أُولَمبيَاد الريَاضيَّات الخَليجي السَّابِع لِلدُّوَل الأَعضَاء بمكتب التربية العربي لدول الخليج

مَسقط، سلطنة عُمَان، 6 – 10 أُكتوبر 2019 م

زَمَن الاختِبَار : 4 سَاعَات وَ 30 دَقيقة

10 دَرَجَات لِكُل سُؤَال

اَلـسُّؤَال الأَوَّل

١

لِيكن $ABCD$ شِبه مُنحرف بِحيث AD وَ BC مُتوَازيَان، وَ J نقطة تَقَاطع القطرين AC و BD . P نقطة تَقع علَى الضلع BC بِحيث يَكون بُعد النقطة C عن الـمُستقيـم AP مُسَاوٍ لِبُعد النقطة B عن الـمُستَقيـم DP .

اَلـفَقـرَات ١،٢ وَ ٣ اَلتَّالية مُنفَصِلة.

١ـ إِذَا كَانـت مسَاحة الـمثلث AJB تُسَاوي 6 وَ مسَاحة الـمثلث BJC تُسَاوي 9 ، أَوجِـد مسَاحة الـمثلث APD .

٢ـ أَوجِـد كـل النِّقَاط Q الوَاقِعة فـي نفس مُستَوَى شِبه الـمُنحرِف $ABCD$ وَ التـي تُـحقِّق : مِـسَاحة $(\triangle AQB)$ = مِـسَاحة $(\triangle DQC)$.

٣ـ أَثبـث أَن PJ هُو مُنصِّف الزَّاوية $\angle APD$.

اَلـسُّؤَال الـثَّانـي

٢

١- أَوجِـد أَصغَر مُضَاعف موجَب لِـ 45 بِـحيث يَكون كـل رقـم مِن أَرقَامه 7 أَو 0 .

٢- أَوجِـد أَصغَر مُضَاعف موجَب لِـ 32 بِـحيث يَكون كـل رقـم مِن أَرقَامه 6 أَو 1 .

٣- كَـم عُنصر من الـمَجموعة $\{1, 2, \ldots, 1441\}$ لَديه مُضَاعف موجَب يَكون كـل رقـم مِن أَرقَامه 5 أَو 2 .

اَلـسُّؤَال الـثَّالِـث

٣

لِنَعتبِر الـمَجموعة $S = \{1, 2, \ldots, 1441\}$.

١- تَقـوم نُورَة بِعَد الـمَجموعَات الـجُزئِيـة من S الـتـي تَـتَكون من عنصرين فقط، ويكون نَاتـج جـمعِهِمَا عدَد زَوجـي.
تَقـوم رَانيَا بِعَد الـمَجموعَات الـجُزئِيـة من S الـتـي تَـتَكون من عنصرين فقط، ويكون نَاتـج جـمعِهِمَا عدَد فَردي.
أَوجِـد الـعدَد الـذي حَصَلَت عليه كـل من نُورَة وَ رَانيَا.

٢- لِيَـكُن t عدَد الـمَجموعَات الـجُزئِيـة من S الـتـي لَا يَقِل عدَد عنَاصِرِهَا عن اثنيـن و يَكون نَاتِـج ضَرب كـل عنَاصِرِهَا عدَد زَوجـي.
أَوجِـد أكـبـر قُوة لِلعدَد 2 وَالتّـي تَقسِـم العدَد t .

٣- يَقـوم أَحـمَـد بِعَد الـمَجموعَات الـجُزئِيـة من S الـتـي تَـحتَوي علَى 77 عُنصُرًا وَ يَكون نَاتِـج جـمع عنَاصِر كُـلّ مِـنـهَا عدَد زَوجـي.
تَقـوم بُشـرَى بِعَد الـمَجموعَات الـجُزئِيـة من S الـتـي تَـحتَوي علَى 77 عُنصُرًا وَ يَكون نَاتِـج جـمع عنَاصِر كُـلّ مِـنـهَا عدَد فَردي.
مَن عدَدُه أَكـبَـر، أَحـمَـد أَو بُشـرَى ؟ أَوجِـد الـفَرق بـيـن الـعَدَدَين.

اَلـسُّؤَال الـرَّابـع

٤

لِتَكُن $(a_n)_{n\geq 1}$ الـمُتَتَابِعة (الـمُتَتَالِية) اَلـمُعَرَّفة بِـ $a_n = n$ لِكُـل $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$ وَ لِكُـل $n \geq 7$:

$$a_n = \left\lfloor \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{2} \right\rfloor$$

حَيث $\lfloor x \rfloor$ هُوَ أَكـبَر عدَد صَـحيح أَصـغر مِن أَو يُسَاوي x ؛ فَـمَـثلًا : $\lfloor 2.4 \rfloor = 2$ ، $\lfloor 3 \rfloor = 3$ وَ $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

لِكُـل الأَعدَاد الـصَّحِيحة $n \geq 2$ ، لِتَكُـن $S_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \setminus \{r_n\}$ حَيث r_n هُوَ بَاقـي قِسمَة $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ عَلَـى 3 . تَرمُز الـعَلَامة \ إِلَـى حَذف الـعُنصُر r_n مِن $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ فَقَط فـي حَالة إِنتِمَائِه لَهَا. فَمَثلًا : $S_4 = \{2,3,4\}$ لِأَنّ $r_4 = 1$ ، إِذن نَـحذِف 1 مِن $\{1,2,3,4\}$. بَـيـنَـمَا $S_5 = \{1,2,3,4,5\}$ لِأَنّ $r_5 = 0$ وَ 0 لَا يَنتَمي إِلَـى الـمَجموعة $\{1,2,3,4,5\}$.

١ـ أَوجِـد S_7 ، S_8 ، S_9 وَ S_{10} .

٢ـ نَقول أَن الـمَجموعة S_n ، لِـ $n \geq 6$ ، **مُتَوَازِنة جِدًّا** إِذَا أَمكن تَـجـزِئَـتُـهَا إِلَـى ثَلَاث مَـجموعَات مُنفَصِلة ، مَثنَـى مَثنَى، وَ لَدَيـهَا نَفس نَاتِـج جَـمـع الـعنَاصِر.

مِثَال : اَلـمَجموعة S_6 مُتَوَازِنـة جِدًّا لأَنّ :

$$S_6 = \{1,2,3,4,5,6\} = \{1,6\} \cup \{2,5\} \cup \{3,4\}$$

وَ لَدَينَا

$$1 + 6 \ = \ 2 + 5 \ = \ 3 + 4.$$

أَثبِـت أَن الـمَجموعَات S_7 ، S_8 ، S_9 وَ S_{10} مُتَوَازِنـة جِدًّا.

٣ـ هَـل الـمَجموعة S_{2019} مُتَوَازِنة جِدًّا ؟ عَـلّـل جَوَابَك.