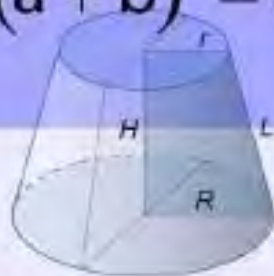
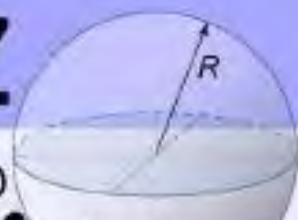


$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$\sqrt[n]{z}$$



$$y = \cos x$$

$$\Sigma$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

۱۳۰۰ فرمول

ریاضی

دوزبانه انگلیسی - فارسی

نوشته: آکس اسویرین ترجمه: احسان کوثری نیا

www.Prozheha.ir

1300 Math Formulas

۱۳۰۰ فرمول ریاضی

دوزبانه انگلیسی - فارسی

نوشته: آکس اسویرین ترجمه: احسان کوثری نیا

This page is intentionally left blank.

این صفحه عمدتاً خالی مانده است.

Preface

پیش گفتار

This handbook is a complete desktop reference for students and engineers. It has everything from high school math to math for advanced undergraduates in engineering, economics, physical sciences, and mathematics. The ebook contains hundreds of formulas, tables, and figures from Number Sets, Algebra, Geometry, Trigonometry, Matrices and Determinants, Vectors, Analytic Geometry, Calculus, Differential Equations, Series, and Probability Theory. The structured table of contents, links, and layout make finding the relevant information quick and painless, so it can be used as an everyday online reference guide.

این دستنامه یک مرجع کامل در دسترس برای دانشجویان و مهندسين به شمار می رود. این کتاب کلیه روابط از ریاضیات دبیرستان تا ریاضیات مهندسی مقطع کارشناسی و پیشرفته، اقتصاد، علوم تجربی و ریاضیات را دربر می گیرد. این مجموعه شامل صدها فرمول، جداول، و شکلهایی مربوط به مجموعه های اعداد، جبر، هندسه، مثلثات، ماتریسها و دترمینانها، بردارها، هندسه تحلیلی، حسابان، معادلات دیفرانسیل، سریها، و نظریه احتمالات است. فهرست ساختاریافته، ارتباطها، و آرایش این کتاب، موجب یافتن سریع و آسان اطلاعات مرتبط می شود، به گونه ای که می توان از آن به عنوان یک راهنمای مرجع سریع روزمره بهره گرفت.

فهرست Contents

1 NUMBER SETS

- 1.1 Set Identities 1
- 1.2 Sets of Numbers 5
- 1.3 Basic Identities 7
- 1.4 Complex Numbers 8

مجموعه های اعداد
ویژگیهای مجموعه
مجموعه های اعداد
همانیهای پایه
اعداد مختلط

2 ALGEBRA

- 2.1 Factoring Formulas 12
- 2.2 Product Formulas 13
- 2.3 Powers 14
- 2.4 Roots 15
- 2.5 Logarithms 16
- 2.6 Equations 18
- 2.7 Inequalities 19
- 2.8 Compound Interest Formulas 22

جبر
روابط فاکتورگیری (تجزیه)
روابط ضرب (بسط)
توانها
ریشه ها
لگاریتمها
معادلات
نابرابریها
روابط بهره ترکیبی

3 GEOMETRY

- 3.1 Right Triangle 24
- 3.2 Isosceles Triangle 27
- 3.3 Equilateral Triangle 28
- 3.4 Scalene Triangle 29
- 3.5 Square 33
- 3.6 Rectangle 34
- 3.7 Parallelogram 35
- 3.8 Rhombus 36
- 3.9 Trapezoid 37
- 3.10 Isosceles Trapezoid 38
- 3.11 Isosceles Trapezoid with Inscribed Circle 40
- 3.12 Trapezoid with Inscribed Circle 41

هندسه
مثلث قائم الزاویه
مثلث متساوی الساقین
مثلث متساوی الاضلاع
مثلث عام
مربع
مستطیل
متوازی الاضلاع
لوزی
دوزنقه
دوزنقه متساوی الساقین
دوزنقه متساوی الساقین با دایره محاطی
دوزنقه با دایره محاطی

3.13	Kite	42	کایت (بادبادک)
3.14	Cyclic Quadrilateral	43	چهارضلعی محاط در دایره
3.15	Tangential Quadrilateral	45	چهارضلعی محیط بر دایره
3.16	General Quadrilateral	46	چهارضلعی عمومی
3.17	Regular Hexagon	47	شش ضلعی منتظم
3.18	Regular Polygon	48	چندضلعی منتظم
3.19	Circle	50	دایره
3.20	Sector of a Circle	53	قطاع دایره
3.21	Segment of a Circle	54	برش دایره
3.22	Cube	55	مکعب
3.23	Rectangular Parallelepiped	56	متوازی السطوح مستطیلی
3.24	Prism	57	مشور
3.25	Regular Tetrahedron	58	چهاروجهی منتظم
3.26	Regular Pyramid	59	هرم منتظم
3.27	Frustum of a Regular Pyramid	61	هرم منتظم ناقص
3.28	Rectangular Right Wedge	62	گوه مستطیلی قائم
3.29	Platonic Solids	63	احجام افلاطونی (چندوجهی های منتظم)
3.30	Right Circular Cylinder	66	استوانه دایره ای قائم
3.31	Right Circular Cylinder with an Oblique Plane Face	68	استوانه دایره ای قائم با وجه مسطح مایل
3.32	Right Circular Cone	69	مخروط دایره ای قائم
3.33	Frustum of a Right Circular Cone	70	مخروط دایره ای قائم ناقص
3.34	Sphere	72	کره
3.35	Spherical Cap	72	عرقچین کروی
3.36	Spherical Sector	73	قطاع کروی
3.37	Spherical Segment	74	برش کروی
3.38	Spherical Wedge	75	گوه کروی
3.39	Ellipsoid	76	بیضیگون
3.40	Circular Torus	78	تیوب دایروی

مثلثات

4 TRIGONOMETRY

واحدهای رادیان و درجه برای زوایا

4.1	Radian and Degree Measures of Angles	80	
4.2	Definitions and Graphs of Trigonometric Functions	81	
4.3	Signs of Trigonometric Functions	86	تعاریف و نمودارهای توابع مثلثاتی
4.4	Trigonometric Functions of Common Angles	87	علائم توابع مثلثاتی
4.5	Most Important Formulas	88	توابع مثلثاتی زوایای عمومی
			مهمترین روابط

4.6	Reduction Formulas	89	روابط کاهشده
4.7	Periodicity of Trigonometric Functions	90	تناوب توابع مثلثاتی
4.8	Relations between Trigonometric Functions	90	روابط میان توابع مثلثاتی
4.9	Addition and Subtraction Formulas	91	روابط جمع و تفریق
4.10	Double Angle Formulas	92	روابط دوبرابر زاویه
4.11	Multiple Angle Formulas	93	روابط چندبرابر زاویه
4.12	Half Angle Formulas	94	روابط نصف زاویه
4.13	Half Angle Tangent Identities	94	برابریهای تانژانت نصف زاویه
4.14	Transforming of Trigonometric Expressions to Product	95	تبدیل عبارتهای مثلثاتی به ضرب
4.15	Transforming of Trigonometric Expressions to Sum	97	تبدیل عبارتهای مثلثاتی به جمع
4.16	Powers of Trigonometric Functions	98	توانهای توابع مثلثاتی
4.17	Graphs of Inverse Trigonometric Functions	99	نمودارهای وارون توابع مثلثاتی
4.18	Principal Values of Inverse Trigonometric Functions	102	
4.19	Relations between Inverse Trigonometric Functions	103	
4.20	Trigonometric Equations	106	معادلات مثلثاتی
4.21	Relations to Hyperbolic Functions	106	روابط میان وارون توابع مثلثاتی
			روابط توابع هایپربولیک (هذلولی)
5	MATRICES AND DETERMINANTS		ماتریسها و دترمینانها
5.1	Determinants	107	دترمینانها
5.2	Properties of Determinants	109	ویژگیهای دترمینانها
5.3	Matrices	110	ماتریسها
5.4	Operations with Matrices	111	عملیات ماتریسها
5.5	Systems of Linear Equations	114	دستگاه های معادلات خطی
6	VECTORS		برداریها
6.1	Vector Coordinates	118	مختصات برداری
6.2	Vector Addition	120	جمع برداری
6.3	Vector Subtraction	122	تفریق برداری
6.4	Scaling Vectors	122	چند برابر کردن بردارها
6.5	Scalar Product	123	ضرب اسکالر
6.6	Vector Product	125	ضرب برداری
6.7	Triple Product	127	ضرب سه گانه
7	ANALYTIC GEOMETRY		هندسه تحلیلی
7.1	One-Dimensional Coordinate System	130	دستگاه مختصات یک بعدی

7.2	Two -Dimensional Coordinate System	131	دستگاه مختصات دوبعدی
7.3	Straight Line in Plane	139	خط راست در صفحه
7.4	Circle	149	دایره
7.5	Ellipse	152	بیضی
7.6	Hyperbola	154	هذلولی
7.7	Parabola	158	بیضی
7.8	Three -Dimensional Coordinate System	161	دستگاه مختصات سه بعدی
7.9	Plane	165	صفحه
7.10	Straight Line in Space	175	خط راست در فضا
7.11	Quadric Surfaces	180	سطوح درجه دو
7.12	Sphere	189	کره
8	DIFFERENTIAL CALCULUS		حساب دیفرانسیل
8.1	Functions and Their Graphs	191	توابع و نمودارهای آنها
8.2	Limits of Functions	208	حدهای توابع
8.3	Definition and Properties of the Derivative	209	تعریف و خواص مشتق
8.4	Table of Derivatives	211	جدول مشتقات
8.5	Higher Order Derivatives	215	مشتقهای مرتبه بالاتر
8.6	Applications of Derivative	217	کاربردهای مشتق
8.7	Differential	221	دیفرانسیل
8.8	Multivariable Functions	222	توابع چند متغیره
8.9	Differential Operators	225	عملگرهای دیفرانسیل
9	INTEGRAL CALCULUS		حساب انتگرال
9.1	Indefinite Integral	227	انتگرال نامعین
9.2	Integrals of Rational Functions	228	انتگرالهای توابع گویا
9.3	Integrals of Irrational Functions	231	انتگرالهای توابع ناگویا
9.4	Integrals of Trigonometric Functions	237	انتگرالهای توابع مثلثاتی
9.5	Integrals of Hyperbolic Functions	241	انتگرالهای توابع هایپربولیک (هذلولی)
9.6	Integrals of Exponential and Logarithmic Functions	242	انتگرالهای توابع نمایی و لگاریتمی
9.7	Reduction Formulas	243	روابط کاهشنده
9.8	Definite Integral	247	انتگرال ناسره
9.9	Improper Integral	253	انتگرال دوگانه
9.10	Double Integral	257	انتگرال سه گانه
9.11	Triple Integral	269	

	انتگرال خط
9.12	Line Integral 275
9.13	Surface Integral 285
	انتگرال سطح
	معادلات دیفرانسیل
10	DIFFERENTIAL EQUATIONS
	معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول
10.1	First Order Ordinary Differential Equations 295
10.2	Second Order Ordinary Differential Equations 298
10.3	Some Partial Differential Equations 302
	معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم
	برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
11	SERIES
	سریها
11.1	Arithmetic Series 304
11.2	Geometric Series 305
11.3	Some Finite Series 305
11.4	Infinite Series 307
11.5	Properties of Convergent Series 307
11.6	Convergence Tests 308
11.7	Alternating Series 310
11.8	Power Series 311
11.9	Differentiation and Integration of Power Series 312
11.10	Taylor and Maclaurin Series 313
11.11	Power Series Expansions for Some Functions 314
11.12	Binomial Series 316
11.13	Fourier Series 316
	سریهای حسابی
	سریهای هندسی
	برخی از سریهای متناهی
	سریهای نامتناهی
	خواص سریهای همگرا
	آزمونهای همگرایی
	سریهای متناوب
	سریهای توانی
	مشتق و انتگرال سریهای توانی
	سریهای تیلور و مکلاورن
	بسطهای سریهای توانی برای برخی از توابع
	سریهای دوجمله ای
	سریهای فوریه
	احتمال
12	PROBABILITY
12.1	Permutations and Combinations 318
12.2	Probability Formulas 319
	ترتیب و ترکیب
	فرمولهای احتمال

This page is intentionally left blank.

این صفحه عمدتاً خالی مانده است.

Chapter 1

فصل ۱

مجموعه های اعداد

Number Sets

1.1 Set Identities

ویژگیهای مجموعه

مجموعه ها	Sets: A, B, C
مجموعه جهانی	Universal set: I
مکمل	Complement : A'
زیرمجموعه سره	Proper subset: $A \subset B$
مجموعه تهی	Empty set: $\emptyset$
اتحاد مجموعه ها	Union of sets: $A \cup B$
اشتراک مجموعه ها	Intersection of sets: $A \cap B$
تفاضل مجموعه ها	Difference of sets: $A \setminus B$

1. $A \subset I$
2. $A \subset A$
3. $A = B$ if $A \subset B$ ^{اگر} and $B \subset A$ ^و.
4. Empty Set ^{مجموعه تهی}
 $\emptyset \subset A$
5. Union of Sets ^{اجتماع مجموعه ها}
 $C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$

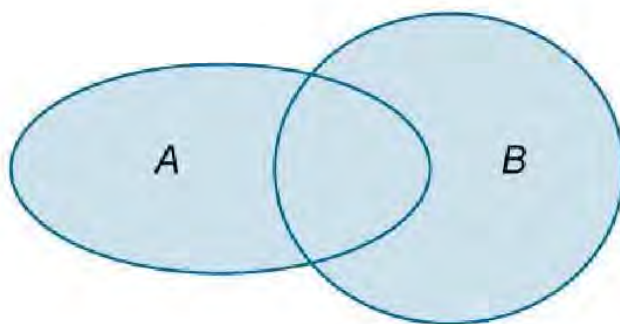


Figure 1. شکل ۱

6. Commutativity جابجا پذیری
 $A \cup B = B \cup A$

7. Associativity شرکت پذیری
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

8. Intersection of Sets اشتراک مجموعه ها
 $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$

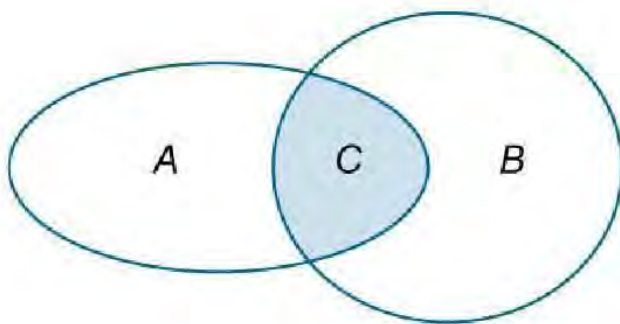


Figure 2. شکل ۲

9. Commutativity جابجا پذیری
 $A \cap B = B \cap A$

10. Associativity شرکت پذیری
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

- 11.** Distributivity توزیع پذیری
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$
- 12.** Idempotency تکرار شونده
 $A \cap A = A,$
 $A \cup A = A$
- 13.** Domination غالب شدن
 $A \cap \emptyset = \emptyset,$
 $A \cup I = I$
- 14.** Identity عینیت
 $A \cup \emptyset = A,$
 $A \cap I = A$
- 15.** Complement مکمل
 $A' = \{x \in I \mid x \notin A\}$
- 16.** Complement of Intersection and Union اشتراک و اجتماع مکمل
 $A \cup A' = I,$
 $A \cap A' = \emptyset$
- 17.** De Morgan's Laws قوانین دمورگان
 $(A \cup B)' = A' \cap B',$
 $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- 18.** Difference of Sets تفاضل مجموعه ها
 $C = B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ and } x \notin A\}$

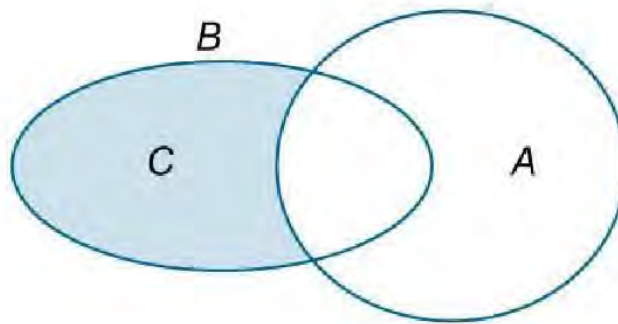


Figure 3. شکل ۳

19. $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$

20. $B \setminus A = B \cap A'$

21. $A \setminus A = \emptyset$

22. $A \setminus B = A$ if $A \cap B = \emptyset$. اگر

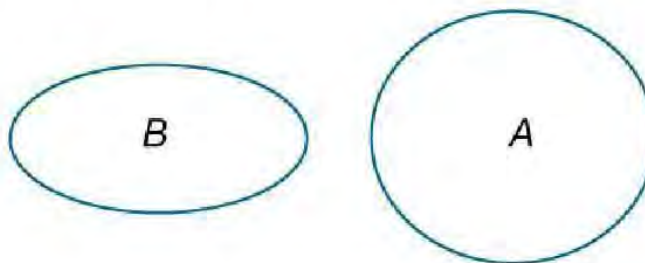


Figure 4. شکل ۴

23. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

24. $A' = I \setminus A$

25. Cartesian Product ضرب کاردتیزین
 $C = A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ and } y \in B\}$

1.2 Sets of Numbers مجموعه های اعداد

Natural numbers: N	اعداد طبیعی
Whole numbers: N_0	اعداد کامل
Integers: Z	اعداد صحیح
Positive integers: Z^+	اعداد صحیح مثبت
Negative integers: Z^-	اعداد صحیح منفی
Rational numbers: Q	اعداد گویا
Real numbers: R	اعداد حقیقی
Complex numbers: C	اعداد مختلط

- 26.** Natural Numbers اعداد طبیعی
 Counting numbers: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, اعداد شمارشی

- 27.** Whole Numbers اعداد کامل
 Counting numbers and zero: $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, اعداد شمارشی و صفر

- 28.** Integers اعداد صحیح
 Whole numbers and their opposites and zero: اعداد کامل و قرینه های آنها و صفر
 $Z^+ = N = \{1, 2, 3, \dots\}$,
 $Z^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$,
 $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- 29.** Rational Numbers اعداد گویا
 Repeating or terminating decimals: اعشار مکرر یا تمام شونده
 $Q = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{ and } a \in Z \text{ and } b \in Z \text{ and } b \neq 0 \right\}$.

- 30.** Irrational Numbers
 Nonrepeating and nonterminating decimals.

31. Real Numbers اعداد حقیقی
 Union of rational and irrational numbers: $\mathbb{R}$. اجتماع اعداد گویا و ناگویا
32. Complex Numbers اعداد مختلط
 $C = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } y \in \mathbb{R}\}$,
 where i is the imaginary unit. که در آن i واحد موهومی است.
33. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

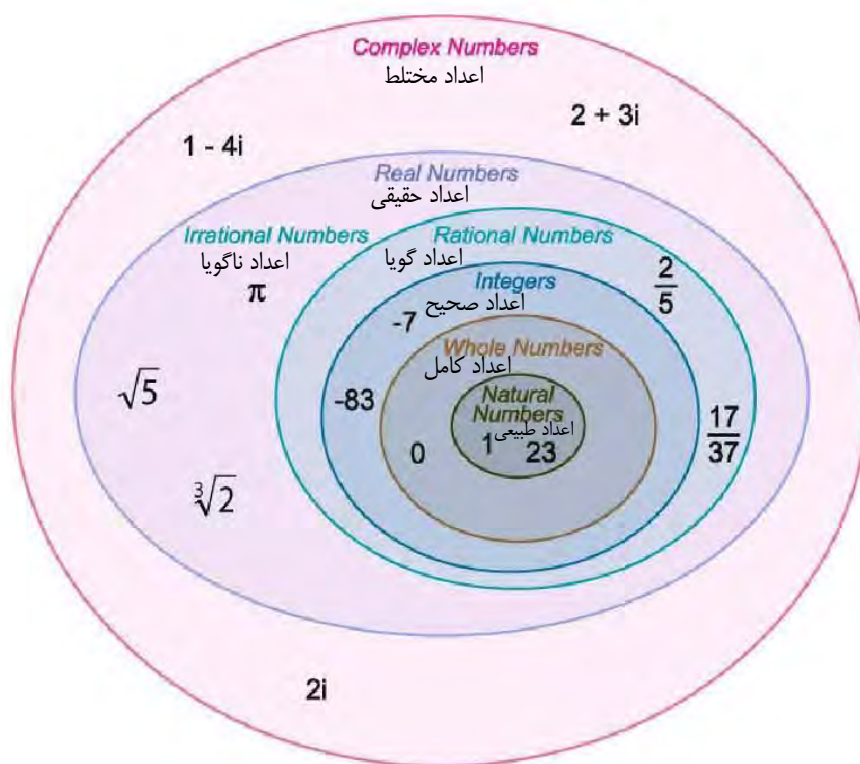


Figure 5. شکل ۵

همانیهای اساسی 1.3 Basic Identities

اعداد حقیقی Real numbers: a, b, c

34. Additive Identity همانی جمع
 $a + 0 = a$

35. Additive Inverse قرینه جمع
 $a + (-a) = 0$

36. Commutative of Addition جابجاپذیری جمع
 $a + b = b + a$

37. Associative of Addition شرکت پذیری جمع
 $(a + b) + c = a + (b + c)$

38. Definition of Subtraction تعریف تفریق
 $a - b = a + (-b)$

39. Multiplicative Identity همانی ضرب
 $a \cdot 1 = a$

40. Multiplicative Inverse وارون ضرب
 $a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$

41. Multiplication Times 0 ضرب در 0
 $a \cdot 0 = 0$

42. Commutative of Multiplication جابجاپذیری ضرب
 $a \cdot b = b \cdot a$

43. Associative of Multiplication شرکت پذیری ضرب
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

44. Distributive Law قانون توزیع پذیری
 $a(b + c) = ab + ac$

45. Definition of Division تعریف تقسیم
 $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

1.4 Complex Numbers اعداد مختلط

Natural number: n عدد طبیعی

Imaginary unit: i واحد موهومی

Complex number: z عدد مختلط

Real part: a, c بخش حقیقی

Imaginary part: bi, di بخش موهومی

Modulus of a complex number: r, r_1 , r_2 مدول عدد مختلط

Argument of a complex number: φ , φ_1 , φ_2 آرگومان (زاویه) عدد مختلط

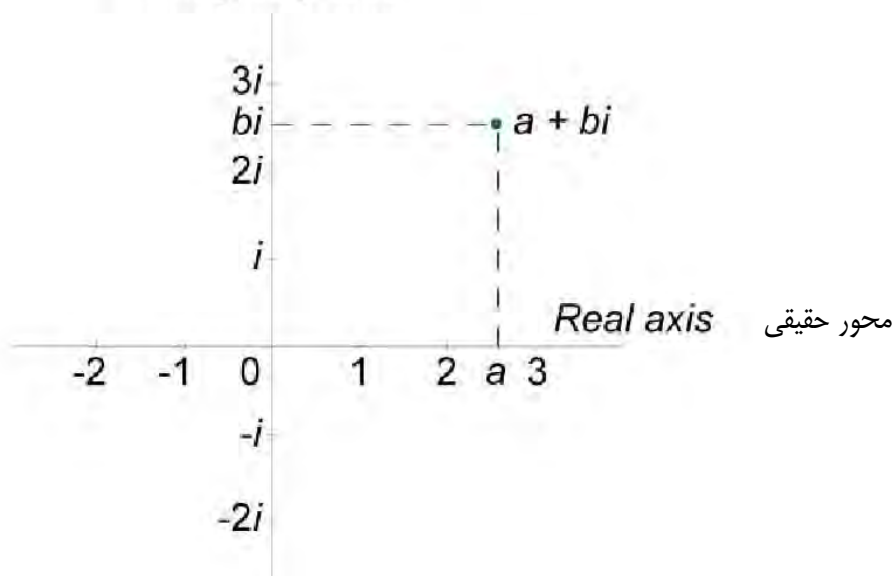
46.

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^{4n+1} = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{4n+2} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{4n+3} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{4n} = 1$

47. $z = a + bi$

48. Complex Plane صفحه مختلط

محور موهومی *Imaginary axis*



شکل ۶ **Figure 6.**

49. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

50. $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

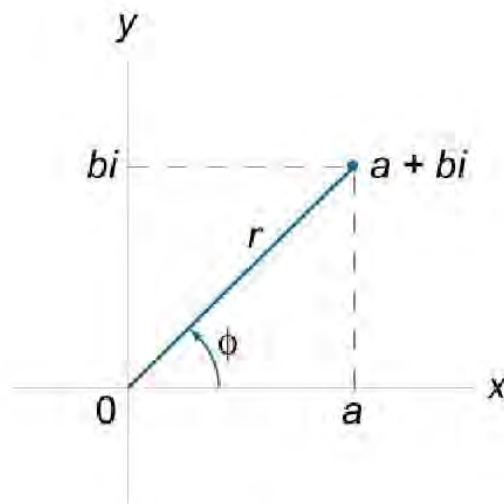
51. $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

52. $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$

53. Conjugate Complex Numbers مزدوج اعداد مختلط

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

54. $a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi$



شکل ۷ Figure 7.

- 55.** Polar Presentation of Complex Numbers نمایش قطبی اعداد مختلط
 $a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
- 56.** Modulus and Argument of a Complex Number مدول و آرگومان عدد مختلط
 If $a + bi$ is a complex number, then اگر $a + bi$ یک عدد مختلط باشد، آنگاه
 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (modulus), مدول
 $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ (argument). آرگومان (زاویه)
- 57.** Product in Polar Representation ضرب در نمایش قطبی
 $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$
 $= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$
- 58.** Conjugate Numbers in Polar Representation اعداد مزدوج در نمایش قطبی
 $\overline{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$
- 59.** Inverse of a Complex Number in Polar Representation وارون عدد مختلط در نمایش قطبی
 $\frac{1}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1}{r} [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$

60. Quotient in Polar Representation کسر در نمایش قطبی

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

61. Power of a Complex Number توان عدد مختلط

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$$

62. Formula "De Moivre" فرمول «دموار»

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

63. Nth Root of a Complex Number ریشه n ام عدد مختلط

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

where که در آن

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

64. Euler's Formula فرمول اویلر

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

2.1 Factoring Formulas

روابط تجزیه

Real numbers: a, b, c اعداد حقیقی
 Natural number: n عدد طبیعی

$$65. \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$66. \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$67. \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$68. \quad a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$69. \quad a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$70. \quad a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$71. \quad \text{If } n \text{ is odd, then اگر } n \text{ فرد باشد، آنگاه}$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

$$72. \quad \text{If } n \text{ is even, then اگر } n \text{ زوج باشد، آنگاه}$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

[این رابطه صحیح نیست! م]

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

2.2 Product Formulas روابط بسط

Real numbers: a, b, c اعداد حقیقی
Whole numbers: n, k اعداد کامل

$$73. \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$74. \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$75. \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$76. \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$77. \quad (a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$78. \quad (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

79. Binomial Formula فرمول دوجمله ای

$$(a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1}b + {}^nC_2 a^{n-2}b^2 + \dots + {}^nC_{n-1} ab^{n-1} + {}^nC_n b^n,$$

where ${}^nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ are the binomial coefficients.
که در آن ضرایب دوجمله ای می باشند.

$$80. \quad (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$81. \quad (a + b + c + \dots + u + v)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + u^2 + v^2 + \\ + 2(ab + ac + \dots + au + av + bc + \dots + bu + bv + \dots + uv)$$

2.3 Powers توانها

Bases (positive real numbers): a, b پایه ها (اعداد حقیقی مثبت)
 Powers (rational numbers): n, m نماها (اعداد گویا)

$$82. \quad a^m a^n = a^{m+n}$$

$$83. \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$84. \quad (ab)^m = a^m b^m$$

$$85. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$86. \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$87. \quad a^0 = 1, a \neq 0$$

$$88. \quad a^1 = a$$

$$89. \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$90. \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

2.4 Roots ریشه ها

Bases: a, b پایه ها

Powers (rational numbers): n, m نماها (اعداد گویا)

$a, b \geq 0$ for even roots ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$)
برای ریشه های زوج

$$91. \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$92. \quad \sqrt[n]{a} \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$$

$$93. \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$$

$$94. \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[nm]{a^m}}{\sqrt[nm]{b^n}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}, \quad b \neq 0.$$

$$95. \quad \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$$

$$96. \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$97. \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

$$98. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$99. \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$100. \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$101. \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}, a \neq 0.$$

$$102. \sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$103. \frac{1}{\sqrt{a \pm \sqrt{b}}} = \frac{\sqrt{a \mp \sqrt{b}}}{a - b}$$

2.5 Logarithms لگاریتم ها

Positive real numbers: x, y, a, c, k اعداد حقیقی مثبت

Natural number: n عدد طبیعی

104. Definition of Logarithm تعریف لگاریتم

$y = \log_a x$ if and only if $x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$.

اگر و تنها اگر

$$105. \log_a 1 = 0$$

$$106. \log_a a = 1$$

$$107. \log_a 0 = \begin{cases} -\infty & \text{if } a > 1 \\ +\infty & \text{if } a < 1 \end{cases}$$

$$108. \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$109. \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$110. \log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$111. \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$112. \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} = \log_c x \cdot \log_a c, c > 0, c \neq 1.$$

$$113. \log_a c = \frac{1}{\log_c a}$$

$$114. x = a^{\log_a x}$$

115. Logarithm to Base 10 لگاریتم پایه ۱۰

$$\log_{10} x = \log x$$

116. Natural Logarithm لگاریتم طبیعی

$$\log_e x = \ln x,$$

where $e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = 2.718281828\dots$

$$117. \log x = \frac{1}{\ln 10} \ln x = 0.434294 \ln x$$

$$118. \ln x = \frac{1}{\log e} \log x = 2.302585 \log x$$

معادلات 2.6 Equations

Real numbers: a, b, c, p, q, u, v اعداد حقیقی
Solutions: x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 جوابها

119. Linear Equation in One Variable معادله خطی یک متغیره

$$ax + b = 0, x = -\frac{b}{a}.$$

120. Quadratic Equation معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0, x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

121. Discriminant دترمینان

$$D = b^2 - 4ac$$

122. Viète's Formulas فرمولهای ویت

اگر $x^2 + px + q = 0$, then $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}.$$

123. $ax^2 + bx = 0, x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}.$

124. $ax^2 + c = 0, x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$

125. Cubic Equation. Cardano's Formula. معادله درجه سوم. فرمول کاردانو
 $y^3 + py + q = 0,$

$$y_1 = u + v, \quad y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u + v) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(u + v)i,$$

که در آن where

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}}.$$

2.7 Inequalities نابرابریها

متغیرها Variables: x, y, z

اعداد حقیقی Real numbers: $\begin{cases} a, b, c, d \\ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \end{cases}, m, n$

دترمینانها Determinants: D, D_x, D_y, D_z

نابرابریها، نمایشهای بازه و نمودارها

126. Inequalities, Interval Notations and Graphs

نابرابریها

نمایش بازه

نمودار

Inequality	Interval Notation	Graph
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	
$a < x \leq b$	$(a, b]$	
$a \leq x < b$	$[a, b)$	
$a < x < b$	(a, b)	
$-\infty < x \leq b,$ $x \leq b$	$(-\infty, b]$	
$-\infty < x < b,$ $x < b$	$(-\infty, b)$	
$a \leq x < \infty,$ $x \geq a$	$[a, \infty)$	
$a < x < \infty,$ $x > a$	(a, ∞)	

127. اگر $a > b$, then $b < a$.

128. If $a > b$, then $a - b > 0$ or $b - a < 0$.

129. If $a > b$, then $a + c > b + c$.

130. If $a > b$, then $a - c > b - c$.

131. If $a > b$ and $c > d$, then $a + c > b + d$.

132. If $a > b$ and $c > d$, then $a - d > b - c$.

133. If $a > b$ and $m > 0$, then $ma > mb$.

134. If $a > b$ and $m > 0$, then $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

135. If $a > b$ and $m < 0$, then $ma < mb$.

136. If $a > b$ and $m < 0$, then $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.

137. If $0 < a < b$ and $n > 0$, then $a^n < b^n$.

138. If $0 < a < b$ and $n < 0$, then $a^n > b^n$.

139. If $0 < a < b$, then $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

140. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$,
تنها اگر $a=b$ باشد برابری صحیح است.
که در آن where $a > 0$, $b > 0$; an equality is valid only if $a = b$.

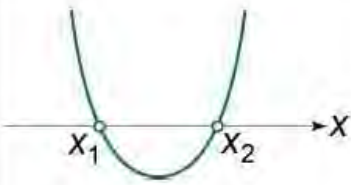
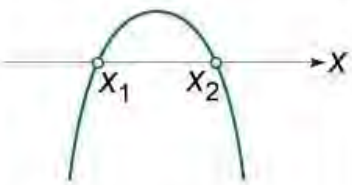
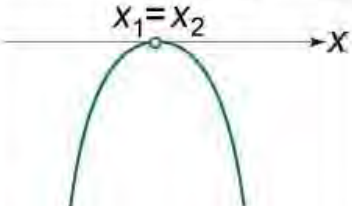
141. $a + \frac{1}{a} \geq 2$, where $a > 0$; an equality takes place only at $a = 1$.
برابری تنها در $a=1$ رخ می دهد. که در آن

142. $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, که در آن $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$.

143. اگر $ax + b > 0$ و $a > 0$ ، آنگاه $x > -\frac{b}{a}$.

144. If $ax + b > 0$ and $a < 0$, then $x < -\frac{b}{a}$.

145. $ax^2 + bx + c > 0$

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 $x < x_1, x > x_2$	 $x_1 < x < x_2$
$D = 0$	 $x_1 < x, x > x_1$	 $x \in \emptyset$
$D < 0$	 $-\infty < x < \infty$	 $x \in \emptyset$

146. $|a + b| \leq |a| + |b|$

147. If $|x| < a$, then $-a < x < a$, where $a > 0$.
 که در آن آنگاه اگر

148. If $|x| > a$, then $x < -a$ and $x > a$, where $a > 0$.

149. If $x^2 < a$, then $|x| < \sqrt{a}$, where $a > 0$.

150. If $x^2 > a$, then $|x| > \sqrt{a}$, where $a > 0$.

151. If $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, then $\begin{cases} f(x) \cdot g(x) > 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$.

152. $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, then $\begin{cases} f(x) \cdot g(x) < 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$.

2.8 Compound Interest Formulas روابط بهره ترکیبی

Future value: A مقدار آینده

Initial deposit: C سپرده اولیه

Annual rate of interest: r نرخ بهره سالانه

Number of years invested: t تعداد سالهای سپرده گذاری

Number of times compounded per year: n تعداد دفعات ترکیب شده در سال

153. General Compound Interest Formula رابطه عمومی بهره ترکیبی

$$A = C \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

- 154.** Simplified Compound Interest Formula رابطه ساده شده بهره ترکیبی
 If interest is compounded once per year, then the previous
 formula simplifies to: اگر بهره یک بار در سال ترکیب شود، آنگاه رابطه پیشین به این
 $A = C(1+r)^t$. رابطه ساده می شود:
- 155.** Continuous Compound Interest بهره ترکیبی پیوسته
 If interest is compounded continually ($n \rightarrow \infty$), then
 $A = Ce^{rt}$. اگر بهره به طور پیوسته ترکیب شود، آنگاه:

3.1 Right Triangle مثلث قائم الزاویه

Legs of a right triangle: a, b ساقهای مثلث قائم الزاویه

Hypotenuse: c وتر

Altitude: h ارتفاع

Medians: m_a, m_b, m_c میانه ها

Angles: α, β زوایا

Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی

Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی

Area: S مساحت

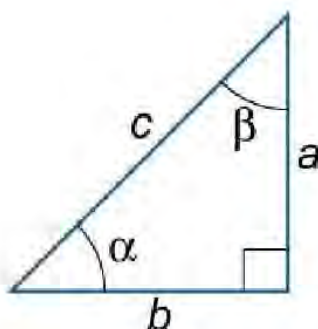


Figure 8. شکل ۸

156. $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$157. \sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta$$

$$158. \cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta$$

$$159. \tan \alpha = \frac{a}{b} = \cot \beta$$

$$160. \cot \alpha = \frac{b}{a} = \tan \beta$$

$$161. \sec \alpha = \frac{c}{b} = \operatorname{cosec} \beta$$

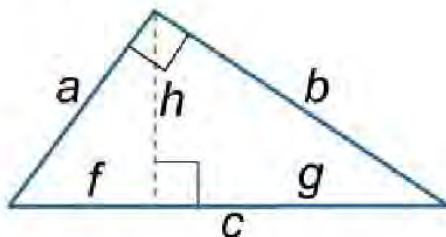
$$162. \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \sec \beta$$

163. Pythagorean Theorem قضیه فیثاغورث
 $a^2 + b^2 = c^2$

164. $a^2 = fc$, $b^2 = gc$,

where f and g are projections of the legs a and b , respectively, onto the hypotenuse c .

که در آن f و g به ترتیب، تصویر شده های ساقهای a و b بر روی وتر c است.



شکل ۹

Figure 9.

165. $h^2 = fg$, که در آن h ارتفاع از زاویه قائمه است.
where h is the altitude from the right angle.

166. $m_a^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$, $m_b^2 = a^2 - \frac{b^2}{4}$,
where m_a and m_b are the medians to the legs a and b .
میان‌های وارد بر ساق‌های a و b اند.

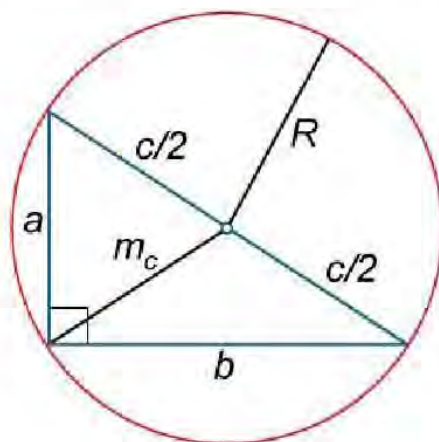


Figure 10. شکل ۱۰.

167. $m_c = \frac{c}{2}$,
میان‌ه وارد بر وتر c است.
where m_c is the median to the hypotenuse c . که در آن

168. $R = \frac{c}{2} = m_c$

169. $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{ab}{a+b+c}$

170. $ab = ch$

$$171. \quad S = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$$

3.2 Isosceles Triangle مثلث متساوی الساقین

Base: a قاعده

Legs: b ساقها

Base angle: β زاویه قاعده

Vertex angle: α زاویه روبروی قاعده

Altitude to the base: h ارتفاع وارد بر قاعده

Perimeter: L محیط

Area: S مساحت

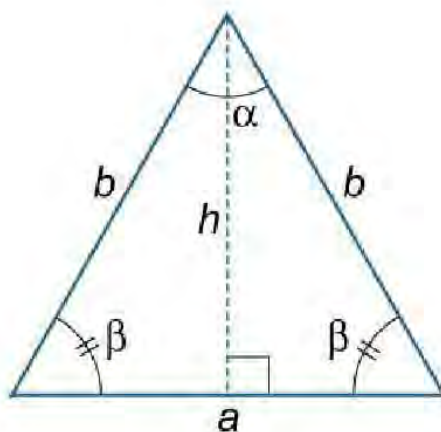


Figure 11. شکل ۱۱

$$172. \quad \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$173. \quad h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$$

174. $L = a + 2b$

175. $S = \frac{ah}{2} = \frac{b^2}{2} \sin \alpha$

3.3 Equilateral Triangle مثلث متساوی الاضلاع

Side of a equilateral triangle: a ضلع مثلث متساوی الاضلاع

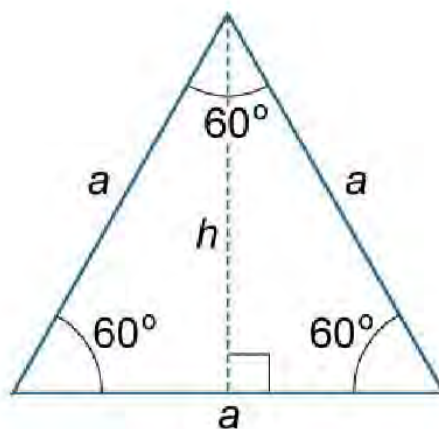
Altitude: h ارتفاع

Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی

Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی

Perimeter: L محیط

Area: S مساحت



شکل ۱۲ Figure 12.

176. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$177. \quad R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$178. \quad r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{R}{2}$$

$$179. \quad L = 3a$$

$$180. \quad S = \frac{ah}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

3.4 Scalene Triangle مثلث عام

(A triangle with no two sides equal) (مثلثی با هیچ دو ضلع برابر)

Sides of a triangle: a, b, c اضلاع مثلث

Semiperimeter: $p = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط

Angles of a triangle: α, β, γ زوایای مثلث

Altitudes to the sides a, b, c : h_a, h_b, h_c ارتفاعهای وارد بر اضلاع

Medians to the sides a, b, c : m_a, m_b, m_c میانه های وارد بر اضلاع

Bisectors of the angles α, β, γ : t_a, t_b, t_c نیمسازهای زوایا

Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی

Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی

Area: S مساحت

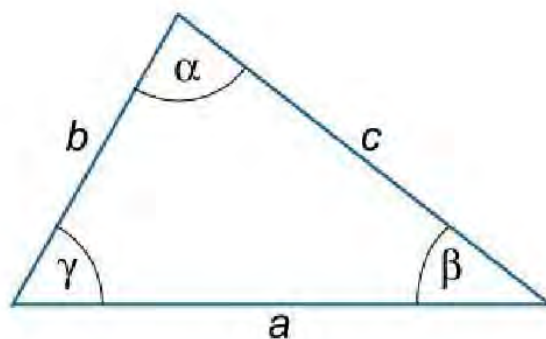


Figure 13. شکل ۱۳

181. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

182. $a + b > c$,
 $b + c > a$,
 $a + c > b$.

183. $|a - b| < c$,
 $|b - c| < a$,
 $|a - c| < b$.

184. Midline خط نیمه

$$q = \frac{a}{2}, q \parallel a .$$

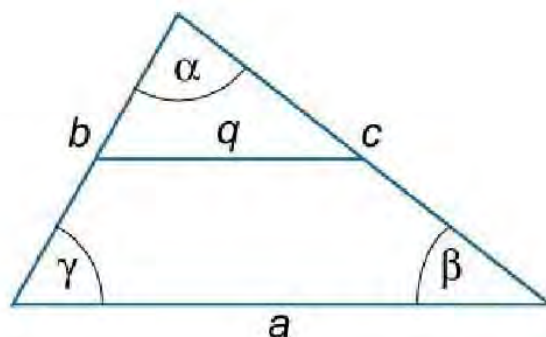


Figure 14. شکل ۱۴

185. Law of Cosines قانون کسینوسها

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha ,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma .$$

186. Law of Sines قانون سینوسها

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R ,$$

که در آن R شعاع دایره محیطی است.

where R is the radius of the circumscribed circle.

$$\mathbf{187.} \quad R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma} = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{ab}{2h_c} = \frac{abc}{4S}$$

$$\mathbf{188.} \quad r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} ,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} .$$

$$\mathbf{189.} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} ,$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} ,$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} .$$

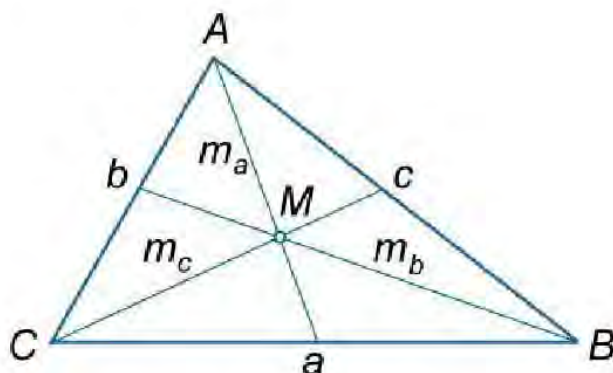
$$\mathbf{190.} \quad h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} ,$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} ,$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} .$$

$$\begin{aligned} 191. \quad h_a &= b \sin \gamma = c \sin \beta, \\ h_b &= a \sin \gamma = c \sin \alpha, \\ h_c &= a \sin \beta = b \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 192. \quad m_a^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \\ m_b^2 &= \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \\ m_c^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}. \end{aligned}$$



شکل ۱۵ Figure 15.

$$193. \quad AM = \frac{2}{3}m_a, \quad BM = \frac{2}{3}m_b, \quad CM = \frac{2}{3}m_c \quad (\text{Fig.15}).$$

$$\begin{aligned} 194. \quad t_a^2 &= \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}, \\ t_b^2 &= \frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2}, \\ t_c^2 &= \frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

195. $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2},$
 $S = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2},$
 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Heron's Formula), (رابطه هرون)
 $S = pr,$
 $S = \frac{abc}{4R},$
 $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$
 $S = p^2 \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}.$

3.5 Square مربع

Side of a square: a ضلع مربع

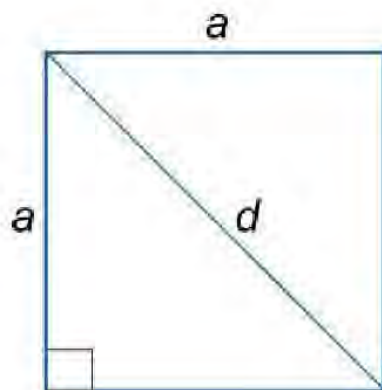
Diagonal: d قطر

Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی

Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی

Perimeter: L محیط

Area: S مساحت



شکل ۱۶

Figure 16.

196. $d = a\sqrt{2}$

197. $R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

198. $r = \frac{a}{2}$

199. $L = 4a$

200. $S = a^2$

3.6 Rectangle مستطیل

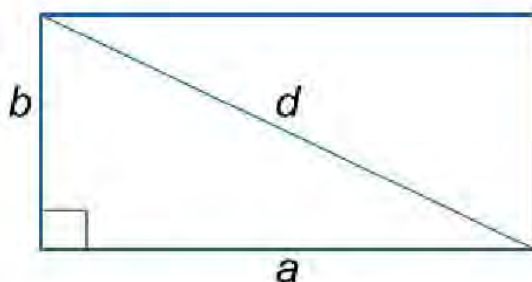
Sides of a rectangle: a, b اضلاع مستطیل

Diagonal: d قطر

Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی

Perimeter: L محیط

Area: S مساحت



شکل ۱۷

Figure 17.

201. $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

202. $R = \frac{d}{2}$

203. $L = 2(a + b)$

204. $S = ab$

3.7 Parallelogram متوازی الاضلاع

Sides of a parallelogram: a, b اضلاع متوازی الاضلاع

Diagonals: d_1, d_2 قطرها

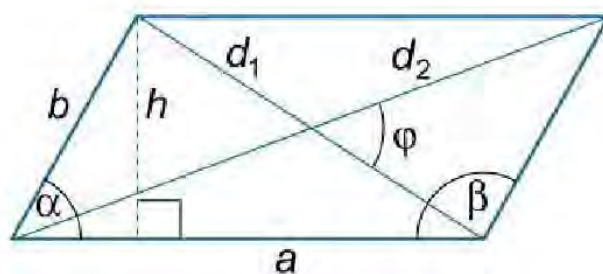
Consecutive angles: α, β زوایای متوالی

Angle between the diagonals: φ زاویه میان اقطار

Altitude: h ارتفاع

Perimeter: L محیط

Area: S مساحت



شکل ۱۸

Figure 18.

205. $\alpha + \beta = 180^\circ$

206. $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

207. $h = b \sin \alpha = b \sin \beta$

208. $L = 2(a + b)$

209. $S = ah = ab \sin \alpha ,$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi .$$

3.8 Rhombus لوزی

Side of a rhombus: a ضلع لوزی

Diagonals: d_1, d_2 قطرها

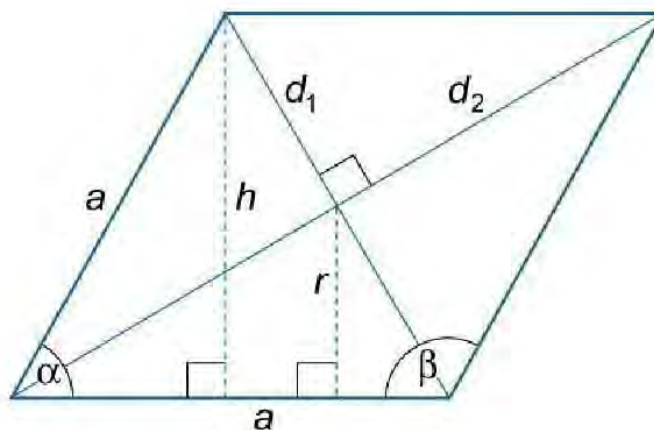
Consecutive angles: α, β زوایای متوالی

Altitude: H ارتفاع

Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی

Perimeter: L محیط

Area: S مساحت



شکل ۱۹ Figure 19.

$$210. \quad \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$211. \quad d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$$

$$212. \quad h = a \sin \alpha = \frac{d_1 d_2}{2a}$$

$$213. \quad r = \frac{h}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a} = \frac{a \sin \alpha}{2}$$

$$214. \quad L = 4a$$

$$215. \quad S = ah = a^2 \sin \alpha ,$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 .$$

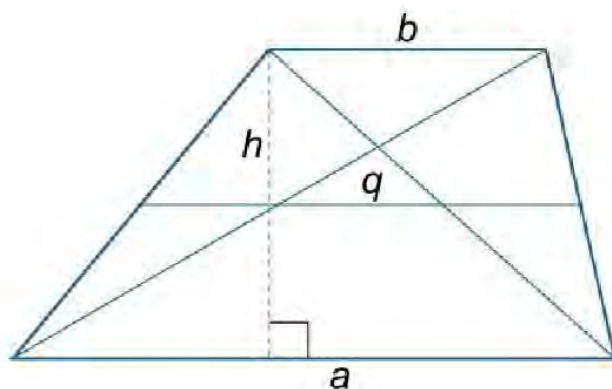
3.9 Trapezoid دوزنقه

Bases of a trapezoid: a, b قاعده های دوزنقه

Midline: q خط نیمه

Altitude: h ارتفاع

Area: S مساحت



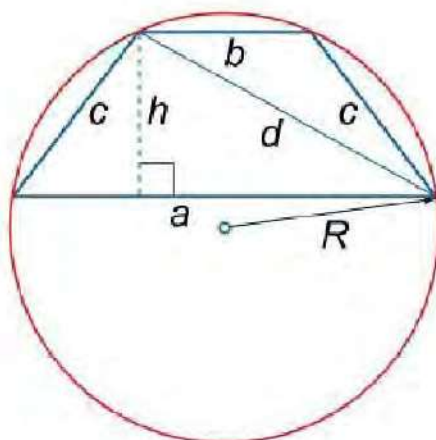
شکل ۲۰ Figure 20.

216. $q = \frac{a+b}{2}$

217. $s = \frac{a+b}{2} \cdot h = qh$

3.10 Isosceles Trapezoid دوزنقه متساوی الساقین

Bases of a trapezoid: a, b	قاعده های دوزنقه
Leg: c	ساق
Midline: q	خط نیمه
Altitude: h	ارتفاع
Diagonal: d	قطر
Radius of circumscribed circle: R	شعاع دایره محیطی
Area: S	مساحت



شکل ۲۱ Figure 21.

$$218. \quad q = \frac{a+b}{2}$$

$$219. \quad d = \sqrt{ab + c^2}$$

$$220. \quad h = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}(b-a)^2}$$

$$221. \quad R = \frac{c\sqrt{ab + c^2}}{\sqrt{(2c-a+b)(2c+a-b)}}$$

$$222. \quad S = \frac{a+b}{2} \cdot h = qh$$

3.11 Isosceles Trapezoid with Inscribed Circle

دوزنقه متساوی الساقین با دایره محاطی

Bases of a trapezoid: a, b قاعده های دوزنقه
 Leg: c ساق
 Midline: q خط نیمه
 Altitude: h ارتفاع
 Diagonal: d قطر
 Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی
 Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی
 Perimeter: L محیط
 Area: S مساحت

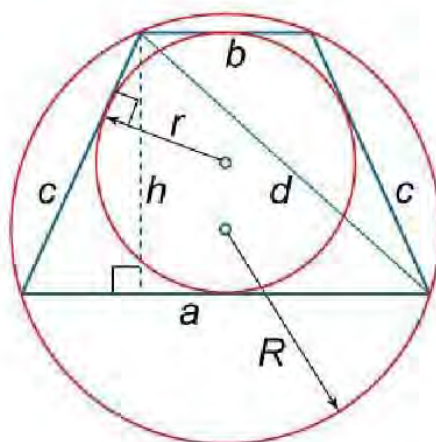


Figure 22. شکل ۲۲

223. $a + b = 2c$

224. $q = \frac{a+b}{2} = c$

225. $d^2 = h^2 + c^2$

$$226. \quad r = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

$$227. \quad R = \frac{cd}{2h} = \frac{cd}{4r} = \frac{c}{2} \sqrt{1 + \frac{c^2}{ab}} = \frac{c}{2h} \sqrt{h^2 + c^2} = \frac{a+b}{8} \sqrt{\frac{a}{b} + 6 + \frac{b}{a}}$$

$$228. \quad L = 2(a+b) = 4c$$

$$229. \quad S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2} = qh = ch = \frac{Lr}{2}$$

3.12 Trapezoid with Inscribed Circle دوزنقه با دایره محاطی

Bases of a trapezoid: a, b قاعده های دوزنقه

Lateral sides: c, d اضلاع جانبی

Midline: q خط نیمه

Altitude: h ارتفاع

Diagonals: d_1, d_2 قطرهای

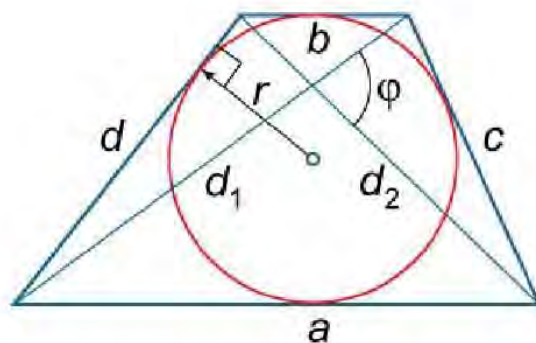
Angle between the diagonals: φ زاویه میان قطرهای

Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی

Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی

Perimeter: L محیط

Area: S مساحت



شکل ۲۳ Figure 23.

230. $a + b = c + d$

231. $q = \frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}$

232. $L = 2(a+b) = 2(c+d)$

233. $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{c+d}{2} \cdot h = qh,$
 $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$

3.13 Kite کایت (بادبادک)

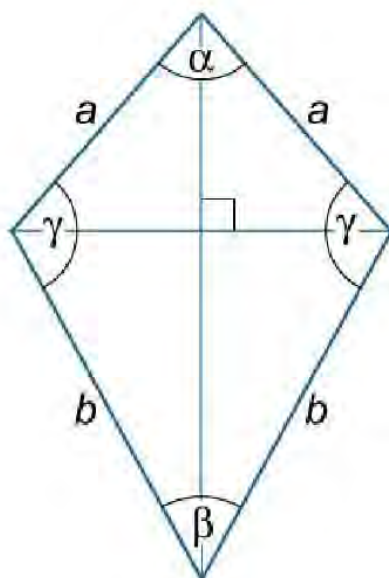
Sides of a kite: a, b اضلاع کایت

Diagonals: d_1, d_2 قطرها

Angles: α, β, γ زوایا

Perimeter: L محیط

Area: S مساحت



شکل ۲۴ Figure 24.

234. $\alpha + \beta + 2\gamma = 360^\circ$

235. $L = 2(a + b)$

236. $S = \frac{d_1 d_2}{2}$

3.14 Cyclic Quadrilateral چهارضلعی محاط در دایره

Sides of a quadrilateral: a, b, c, d اضلاع چهارضلعی

Diagonals: d_1, d_2 قطرها

Angle between the diagonals: φ زاویه میان قطرها

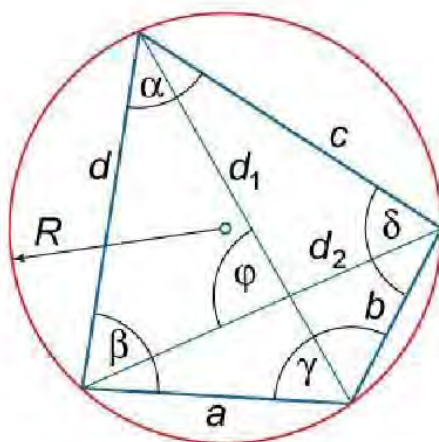
Internal angles: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ زوایای داخلی

Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی

Perimeter: L محیط

Semiperimeter: p نصف محیط

Area: S مساحت



شکل ۲۵ Figure 25.

237. $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$

238. Ptolemy's Theorem قضیه بطلمیوس
 $ac + bd = d_1 d_2$

239. $L = a + b + c + d$

240. $R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}$,

که در آن where $p = \frac{L}{2}$.

241. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$,

$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$,

که در آن where $p = \frac{L}{2}$.

3.15 Tangential Quadrilateral (مماسی) چهارضلعی محیط بر دایره

Sides of a quadrilateral: a, b, c, d اضلاع چهارضلعی

Diagonals: d_1, d_2 قطرها

Angle between the diagonals: φ زاویه میان قطرها

Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی

Perimeter: L محیط

Semiperimeter: p نصف محیط

Area: S مساحت

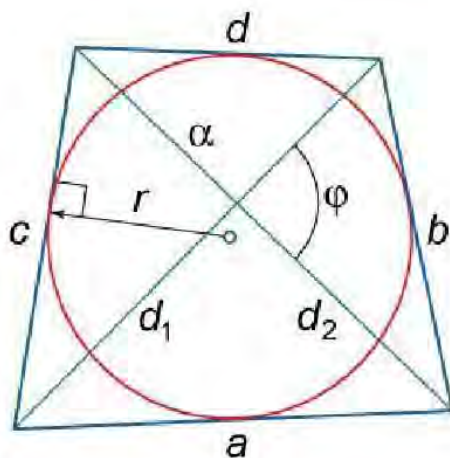


Figure 26. شکل ۲۶

242. $a + c = b + d$

243. $L = a + b + c + d = 2(a + c) = 2(b + d)$

244.
$$r = \frac{\sqrt{d_1^2 d_2^2 - (a - b)^2 (a + b - p)^2}}{2p},$$

where $p = \frac{L}{2}$. که در آن

245. $S = pr = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

3.16 General Quadrilateral چهارضلعی عمومی

Sides of a quadrilateral: a, b, c, d اضلاع چهارضلعی

Diagonals: d_1, d_2 قطرها

Angle between the diagonals: φ زاویه میان قطرها

Internal angles: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ زوایای داخلی

Perimeter: L محیط

Area: S مساحت

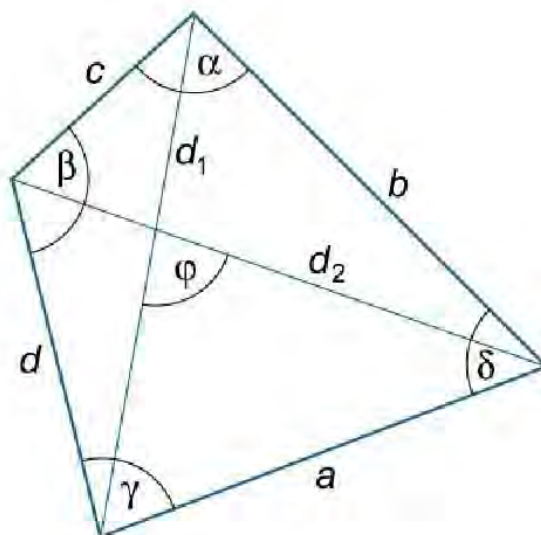


Figure 27. شکل ۲۷

246. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

247. $L = a + b + c + d$

248. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$

3.17 Regular Hexagon شش ضلعی منتظم

Side: a ضلع

Internal angle: α زاویه داخلی

Slant height: m ارتفاع وارد بر ضلع

Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی

Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی

Perimeter: L محیط

Semiperimeter: p نصف محیط

Area: S مساحت

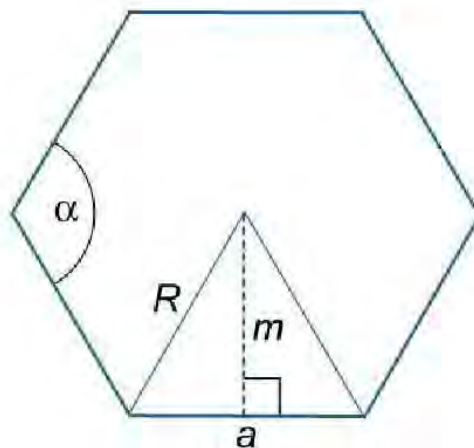


Figure 28. شکل ۲۸

249. $\alpha = 120^\circ$

250. $r = m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

251. $R = a$

252. $L = 6a$

253. $S = pr = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2},$

where $p = \frac{L}{2}.$ که در آن

چندضلعی منتظم 3.18 Regular Polygon

Side: a ضلع

Number of sides: n تعداد اضلاع

Internal angle: α زاویه داخلی

Slant height: m ارتفاع وارد بر ضلع

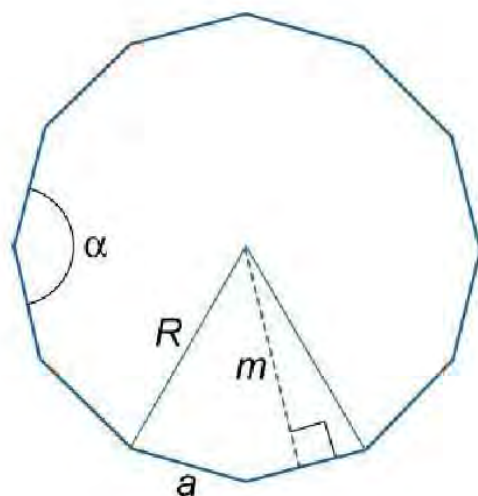
Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی

Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی

Perimeter: L محیط

Semiperimeter: p نصف محیط

Area: S مساحت



شکل ۲۹ Figure 29.

$$254. \quad \alpha = \frac{n-2}{2} \cdot 180^\circ$$

$$255. \quad \alpha = \frac{n-2}{2} \cdot 180^\circ$$

$$256. \quad R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$257. \quad r = m = \frac{a}{2 \tan \frac{\pi}{n}} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$258. \quad L = na$$

$$259. \quad S = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n},$$

$$S = pr = p \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}},$$

که در آن where $p = \frac{L}{2}$.

3.19 Circle دایره

Radius: R شعاع
 Diameter: d قطر
 Chord: a وتر
 Secant segments: e, f پاره خط سکانت
 Tangent segment: g پاره خط مماس
 Central angle: α زاویه مرکزی
 Inscribed angle: β زاویه محاطی
 Perimeter: L محیط
 Area: S مساحت

260. $a = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$

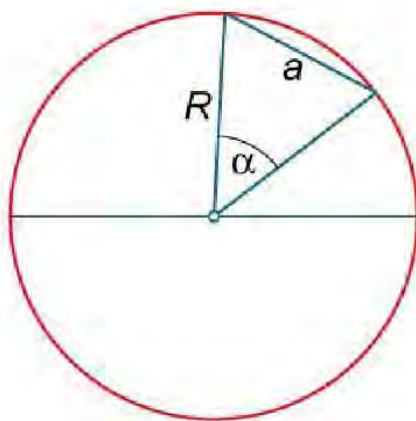
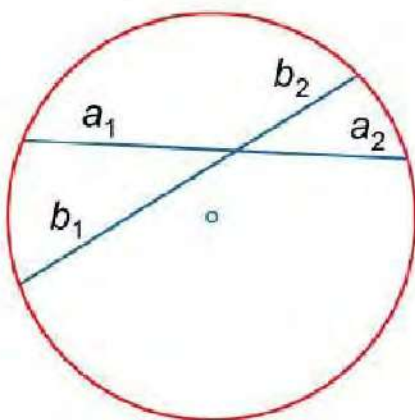


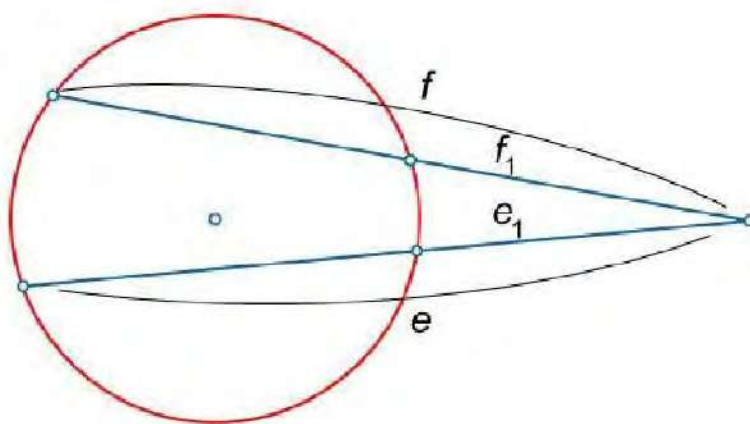
Figure 30. شکل ۳۰

261. $a_1a_2 = b_1b_2$



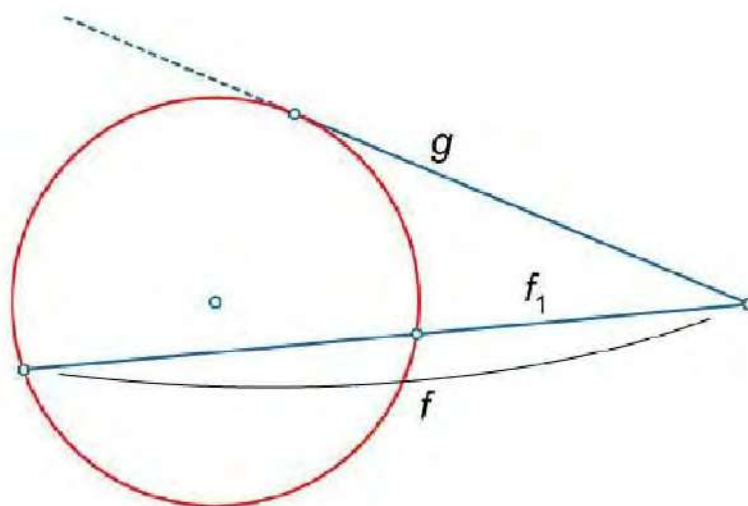
شکل ۳۱ Figure 31.

262. $ee_1 = ff_1$



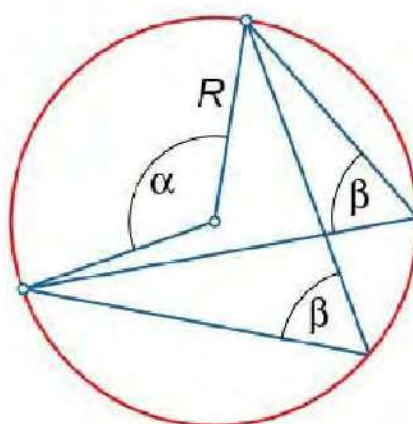
شکل ۳۲ Figure 32.

263. $g^2 = ff_1$



شکل ۳۳ Figure 33.

264. $\beta = \frac{\alpha}{2}$



شکل ۳۴ Figure 34.

265. $L = 2\pi R = \pi d$

266. $S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{LR}{2}$

3.20 Sector of a Circle قطاع دایره

Radius of a circle: R شعاع دایره

Arc length: s طول کمان

Central angle (in radians): x زاویه مرکزی (برحسب رادیان)

Central angle (in degrees): α زاویه مرکزی (برحسب درجه)

Perimeter: L محیط

Area: S مساحت

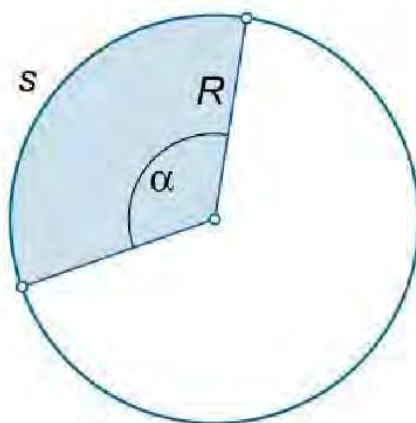


Figure 35. شکل ۳۵

267. $s = Rx$

268. $s = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$

269. $L = s + 2R$

270. $S = \frac{Rs}{2} = \frac{R^2 x}{2} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$

3.21 Segment of a Circle برش دایره

Radius of a circle: R شعاع دایره

Arc length: s طول کمان

Chord: a وتر

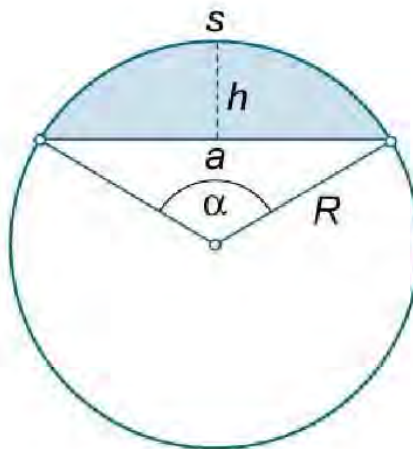
Central angle (in radians): x زاویه مرکزی (برحسب رادیان)

Central angle (in degrees): α زاویه مرکزی (برحسب درجه)

Height of the segment: h ارتفاع برش

Perimeter: L محیط

Area: S مساحت



شکل ۳۶ Figure 36.

271. $a = 2\sqrt{2hR - h^2}$

272. $h = R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}, h < R$

273. $L = s + a$

$$274. \quad S = \frac{1}{2} [sR - a(R - h)] = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\alpha\pi}{180^\circ} - \sin \alpha \right) = \frac{R^2}{2} (x - \sin x),$$

$$S \approx \frac{2}{3} ha.$$

3.22 Cube مکعب

Edge: a یال

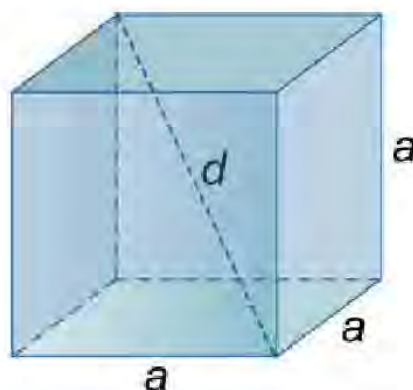
Diagonal: d قطر

Radius of inscribed sphere: r شعاع کره محاطی

Radius of circumscribed sphere: r شعاع کره محیطی

Surface area: S مساحت سطح

Volume: V حجم



شکل ۳۷ Figure 37.

$$275. \quad d = a\sqrt{3}$$

$$276. \quad r = \frac{a}{2}$$

$$277. \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$278. \quad S = 6a^2$$

$$279. \quad V = a^3$$

3.23 Rectangular Parallelepiped متوازی السطوح مستطیلی

Edges: a, b, c یالها
 Diagonal: d قطر
 Surface area: S مساحت سطح
 Volume: V حجم

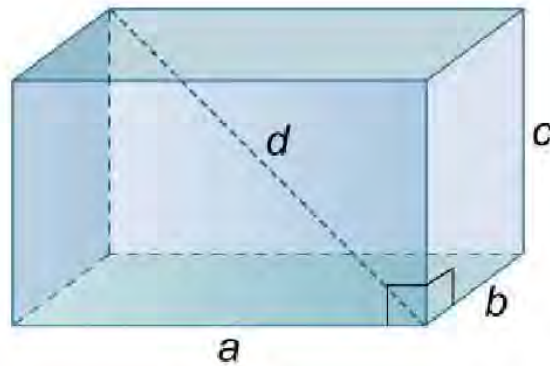


Figure 38. شکل ۳۸

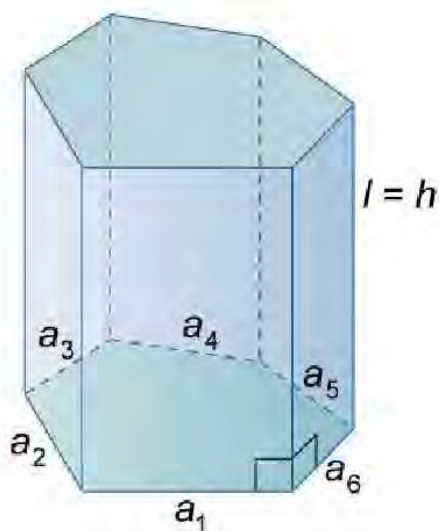
$$280. \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$281. \quad S = 2(ab + ac + bc)$$

$$282. \quad V = abc$$

3.24 Prism منشور

Lateral edge: l یال جانبی
 Height: h ارتفاع
 Lateral area: S_L مساحت جانبی
 Area of base: S_B مساحت قاعده
 Total surface area: S مساحت سطح کل
 Volume: V حجم



شکل ۳۹ Figure 39.

283. $S = S_L + 2S_B.$

284. Lateral Area of a Right Prism مساحت جانبی منشور قائمه
 $S_L = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)l$

285. Lateral Area of an Oblique Prism مساحت جانبی منشور مایل
 $S_L = pl,$
 where p is the perimeter of the cross section.

که در آن p محیط سطح مقطع است.

286. $V = S_B h$

287. Cavalieri's Principle اصل کاوالیر

Given two solids included between parallel planes. If every plane cross section parallel to the given planes has the same area in both solids, then the volumes of the solids are equal.

فرض کنید دو جسم سه بعدی بین صفحات موازی قرار دارند. اگر هر صفحه متقاطع موازی با دو سطح مذکور، مساحت‌های سطح مقطع یکسانی در هر دو جسم داشته باشد، آنگاه حجم‌های دو جسم با هم برابر است.

3.25 Regular Tetrahedron چهاروجهی منتظم

Triangle side length: a طول ضلع مثلث

Height: h ارتفاع

Area of base: S_B مساحت قاعده

Surface area: S مساحت سطح

Volume: V حجم

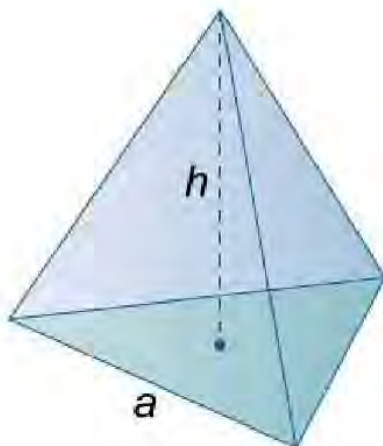


Figure 40. شکل ۴۰

288. $h = \sqrt{\frac{2}{3}} a$

$$289. \quad S_B = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$$290. \quad S = \sqrt{3}a^2$$

$$291. \quad V = \frac{1}{3}S_B h = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}.$$

3.26 Regular Pyramid هرم منتظم

Side of base: a ضلع قاعده

Lateral edge: b یال جانبی

Height: h ارتفاع

Slant height: m ارتفاع وارد بر ضلع

Number of sides: n تعداد اضلاع

Semiperimeter of base: p نصف محیط قاعده

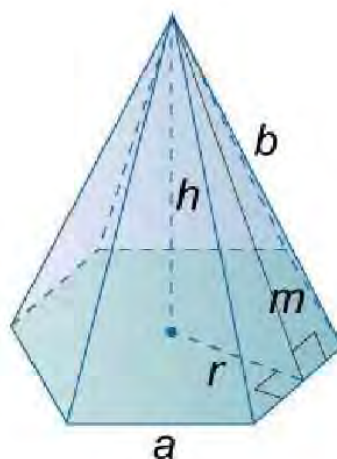
Radius of inscribed sphere of base: r شعاع کره محاطی قاعده

Area of base: S_B مساحت قاعده

Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی

Total surface area: S مساحت سطح کل

Volume: V حجم



شکل ۴۱ Figure 41.

$$292. \quad m = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$293. \quad h = \frac{\sqrt{4b^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} - a^2}}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$294. \quad S_L = \frac{1}{2} nam = \frac{1}{4} na \sqrt{4b^2 - a^2} = pm$$

$$295. \quad S_B = pr$$

$$296. \quad S = S_B + S_L$$

$$297. \quad V = \frac{1}{3} S_B h = \frac{1}{3} prh$$

3.27 Frustum of a Regular Pyramid

هرم منتظم ناقص

طول اضلاع قاعده های پایین و بالا
Base and top side lengths: $\begin{cases} a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \\ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \end{cases}$

ارتفاع Height: h

ارتفاع وارد بر ضلع Slant height: m

مساحت قاعده ها Area of bases: S_1, S_2

مساحت سطح جانبی Lateral surface area: S_L

محیط قاعده ها Perimeter of bases: P_1, P_2

ضریب مقیاس Scale factor: k

مساحت سطح کل Total surface area: S

حجم Volume: V

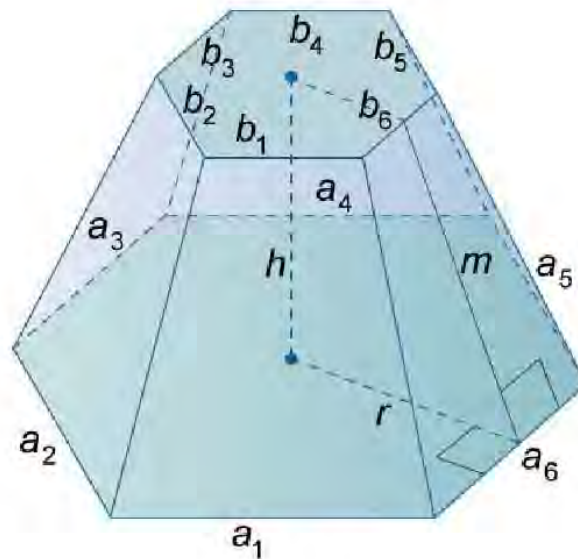


Figure 42. شکل ۴۲

298.
$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \dots = \frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a} = k$$

$$299. \frac{S_2}{S_1} = k^2$$

$$300. S_L = \frac{m(P_1 + P_2)}{2}$$

$$301. S = S_L + S_1 + S_2$$

$$302. V = \frac{h}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$303. V = \frac{hS_1}{3} \left[1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] = \frac{hS_1}{3} [1 + k + k^2]$$

3.28 Rectangular Right Wedge گوه مستطیلی قائم

Sides of base: a, b اضلاع قاعده

Top edge: c یال فوقانی

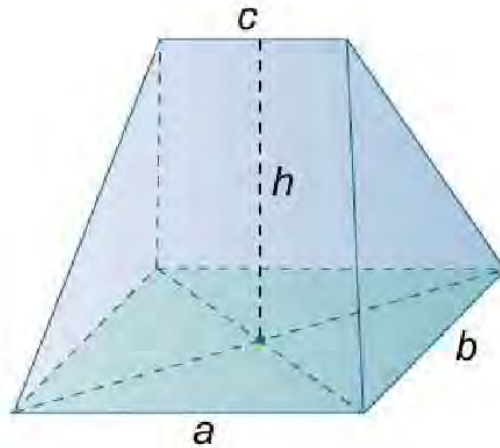
Height: h ارتفاع

Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی

Area of base: S_B مساحت قاعده

Total surface area: S مساحت سطح کل

Volume: V حجم



شکل ۴۳ Figure 43.

$$304. S_L = \frac{1}{2}(a+c)\sqrt{4h^2+b^2} + b\sqrt{h^2+(a-c)^2}$$

$$305. S_B = ab$$

$$306. S = S_B + S_L$$

$$307. V = \frac{bh}{6}(2a+c)$$

3.29 Platonic Solids (احجام افلاطونی (چندوجهی های منتظم)

Edge: a یال

Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی

Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی

Surface area: S مساحت سطح

Volume: V حجم

پنج حجم افلاطونی. احجام افلاطونی چندوجهی های محدبی هستند که دارای سطوح یکسان

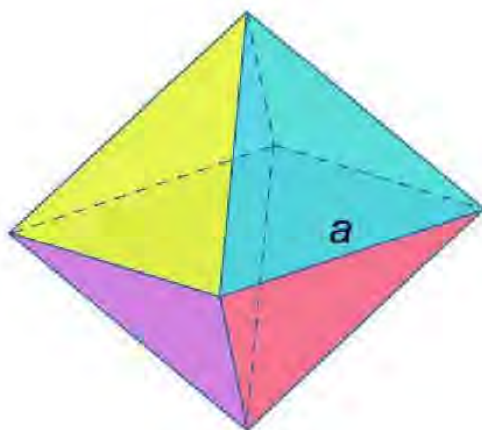
308. Five Platonic Solids

متشکل از چندضلعی های منتظم می باشند.

The platonic solids are convex polyhedra with equivalent faces composed of congruent convex regular polygons.

	تعداد کنجها	تعداد یالها	تعداد سطوح	Section
Solid	Number of Vertices	Number of Edges	Number of Faces	بخش
چهار وجهی منتظم Tetrahedron	4	6	4	3.25
مکعب Cube	8	12	6	3.22
هشت وجهی منتظم Octahedron	6	12	8	3.27
دوازده وجهی منتظم Icosahedron	12	30	20	3.27
بیست وجهی منتظم Dodecahedron	20	30	12	3.27

Octahedron هشت وجهی منتظم



شکل ۴۴

Figure 44.

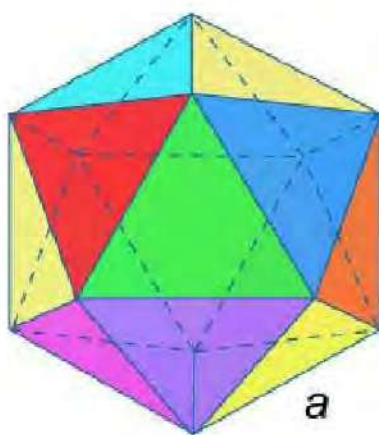
309. $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

310. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

311. $S = 2a^2\sqrt{3}$

312. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Icosahedron بیست وجهی منتظم



شکل ۴۵

Figure 45.

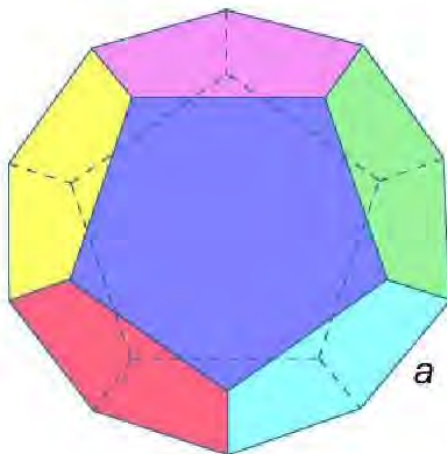
313. $r = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$

314. $R = \frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$

315. $S = 5a^2\sqrt{3}$

316. $V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$

Dodecahedron دوازده وجهی منتظم



شکل ۴۶

Figure 46.

$$317. \quad r = \frac{a\sqrt{10}(25+11\sqrt{5})}{2}$$

$$318. \quad R = \frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$$

$$319. \quad S = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

$$320. \quad V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$$

3.30 Right Circular Cylinder استوانه دایره ای قائم

Radius of base: R شعاع قاعده
Diameter of base: d قطر قاعده

Height: H ارتفاع

Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی

Area of base: S_B مساحت قاعده

Total surface area: S مساحت سطح کل

Volume: V حجم

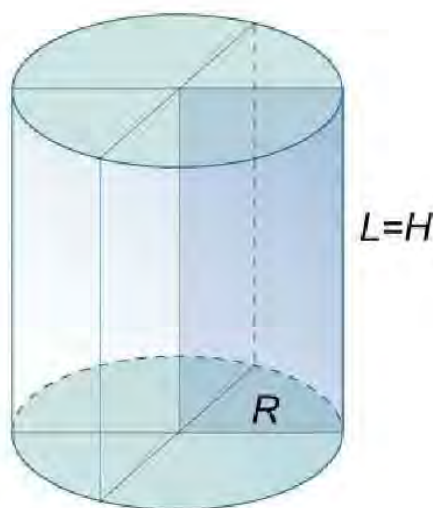


Figure 47. شکل ۴۷

321. $S_L = 2\pi RH$

322. $S = S_L + 2S_B = 2\pi R(H + R) = \pi d \left(H + \frac{d}{2} \right)$

323. $V = S_B H = \pi R^2 H$

3.31 Right Circular Cylinder with an Oblique Plane Face استوانه دایره ای قائم با وجه مسطح مایل

Radius of base: R شعاع قاعده

The greatest height of a side: h_1 بزرگترین ارتفاع جانبی

The shortest height of a side: h_2 کوتاهترین ارتفاع جانبی

Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی

Area of plane end faces: S_B مساحت وجوه مسطح انتهایی

Total surface area: S مساحت سطح کل

Volume: V حجم

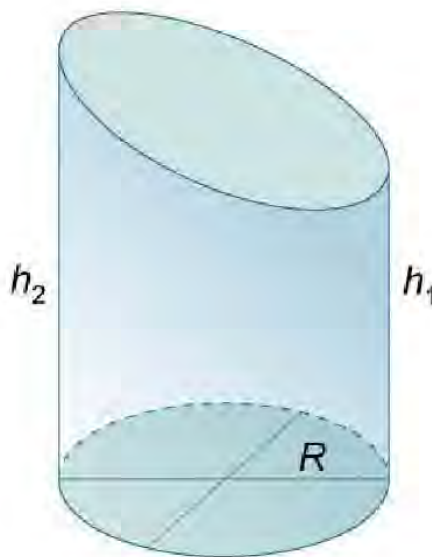


Figure 48. شکل ۴۸

324. $S_L = \pi R(h_1 + h_2)$

325. $S_B = \pi R^2 + \pi R \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right)^2}$

$$326. \quad S = S_L + S_B = \pi R \left[h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \right)^2} \right]$$

$$327. \quad V = \frac{\pi R^2}{2} (h_1 + h_2)$$

3.32 Right Circular Cone مخروط دایره ای قائم

Radius of base: R شعاع قاعده
 Diameter of base: d قطر قاعده
 Height: H ارتفاع
 Slant height: m ارتفاع جانبی
 Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی
 Area of base: S_B مساحت قاعده
 Total surface area: S مساحت سطح کل
 Volume: V حجم

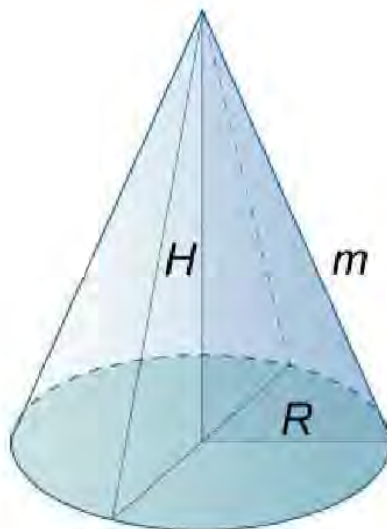


Figure 49. شکل ۴۹

$$328. \quad H = \sqrt{m^2 - R^2}$$

$$329. \quad S_L = \pi R m = \frac{\pi m d}{2}$$

$$330. \quad S_B = \pi R^2$$

$$331. \quad S = S_L + S_B = \pi R(m + R) = \frac{1}{2} \pi d \left(m + \frac{d}{2} \right)$$

$$332. \quad V = \frac{1}{3} S_B H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

مخروط دایره ای قائم ناقص

3.33 Frustum of a Right Circular Cone

Radius of bases: R, r شعاع قاعده ها

Height: H ارتفاع

Slant height: m ارتفاع جانبی

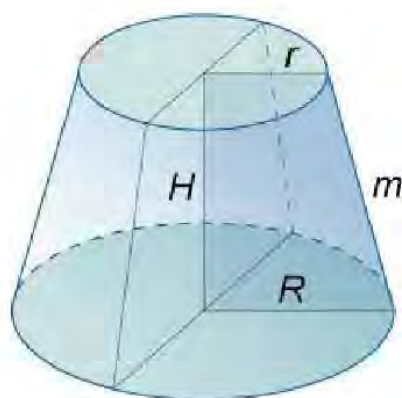
Scale factor: k ضریب مقیاس

Area of bases: S_1, S_2 مساحت قاعده ها

Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی

Total surface area: S مساحت سطح کل

Volume: V حجم



شکل ۵۰ Figure 50.

$$333. H = \sqrt{m^2 - (R - r)^2}$$

$$334. \frac{R}{r} = k$$

$$335. \frac{S_2}{S_1} = \frac{R^2}{r^2} = k^2$$

$$336. S_L = \pi m(R + r)$$

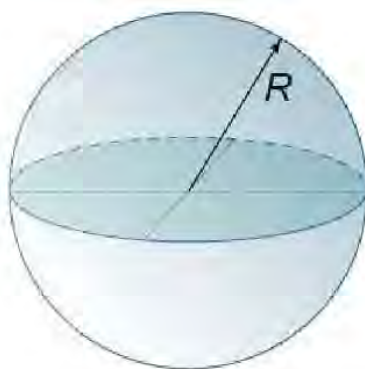
$$337. S = S_1 + S_2 + S_L = \pi[R^2 + r^2 + m(R + r)]$$

$$338. V = \frac{h}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$339. V = \frac{hS_1}{3} \left[1 + \frac{R}{r} + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] = \frac{hS_1}{3} [1 + k + k^2]$$

3.34 Sphere کره

شعاع	Radius: R
قطر	Diameter: d
مساحت سطح	Surface area: S
حجم	Volume: V



شکل ۵۱ Figure 51.

340. $S = 4\pi R^2$

341. $V = \frac{4}{3}\pi R^3 H = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{3}SR$

3.35 Spherical Cap عرقچین کروی

Radius of sphere: R	شعاع کره
Radius of base: r	شعاع قاعده
Height: h	ارتفاع
Area of plane face: S_B	مساحت وجه مسطح
Area of spherical cap: S_C	مساحت عرقچین کروی
Total surface area: S	مساحت سطح کل
Volume: V	حجم

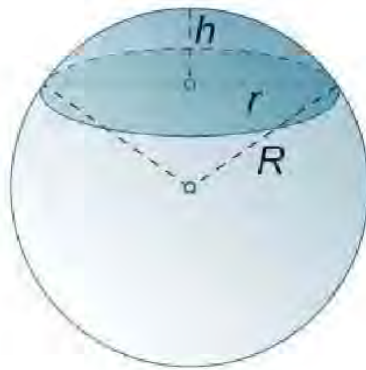


Figure 52. شکل ۵۲

$$342. \quad R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$$

$$343. \quad S_B = \pi r^2$$

$$344. \quad S_C = \pi(h^2 + r^2)$$

$$345. \quad S = S_B + S_C = \pi(h^2 + 2r^2) = \pi(2Rh + r^2)$$

$$346. \quad V = \frac{\pi}{6} h^2 (3R - h) = \frac{\pi}{6} h (3r^2 + h^2)$$

3.36 Spherical Sector قطاع کروی

Radius of sphere: R شعاع کره

Radius of base of spherical cap: r شعاع قاعده عرقچین کروی

Height: h ارتفاع

Total surface area: S مساحت سطح کل

Volume: V حجم

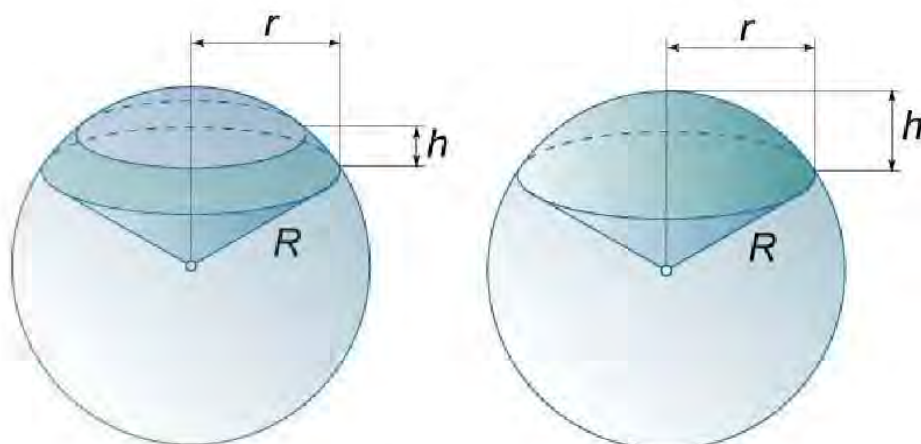


Figure 53. شکل ۵۳

347. $S = \pi R(2h + r)$

348. $V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$

Note: The given formulas are correct both for “open” and “closed” spherical sector.

یادداشت: فرمولهای داده شده برای هر دو قطاع کروی «باز» و «بسته» صحیح است.

3.37 Spherical Segment برش کروی

Radius of sphere: R شعاع کره

Radius of bases: r_1, r_2 شعاع قاعده ها

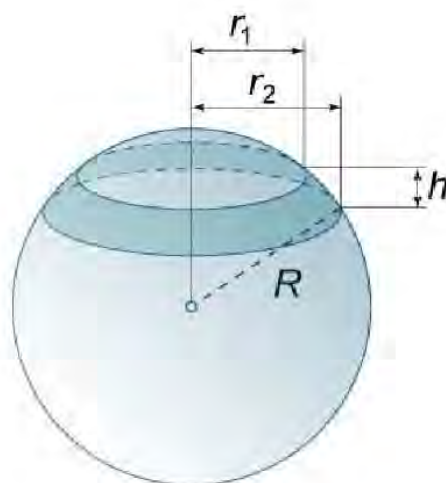
Height: h ارتفاع

Area of spherical surface: S_s مساحت سطح کروی

Area of plane end faces: S_1, S_2 مساحت وجوه انتهایی مسطح

Total surface area: S مساحت سطح کل

Volume: V حجم



شکل ۵۴ Figure 54.

349. $S_s = 2\pi Rh$

350. $S = S_s + S_1 + S_2 = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2)$

351. $V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$

3.38 Spherical Wedge گوه کروی

Radius: R شعاع

Dihedral angle in degrees: x زاویه دوسطحی برحسب درجه

Dihedral angle in radians: α زاویه دوسطحی برحسب رادیان

Area of spherical lune: S_L مساحت قاع کروی

Total surface area: S مساحت سطح کل

Volume: V حجم

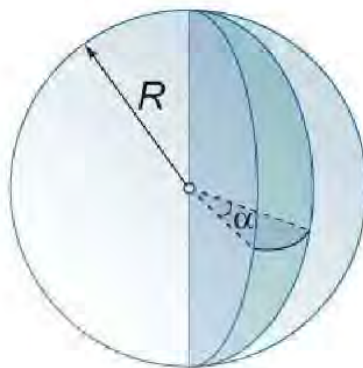


Figure 55. شکل ۵۵

$$352. \quad S_L = \frac{\pi R^2}{90} \alpha = 2R^2 x$$

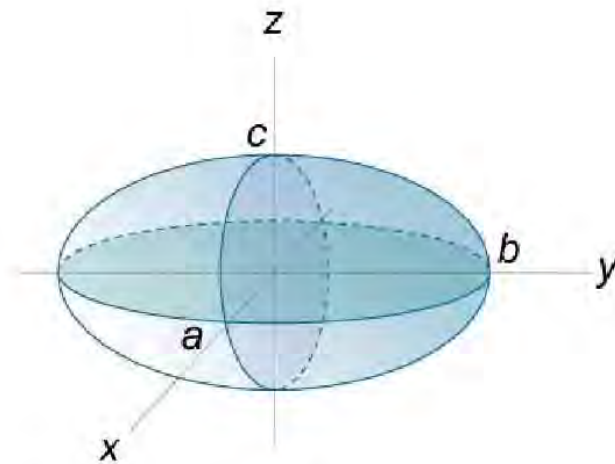
$$353. \quad S = \pi R^2 + \frac{\pi R^2}{90} \alpha = \pi R^2 + 2R^2 x$$

$$354. \quad V = \frac{\pi R^3}{270} \alpha = \frac{2}{3} R^3 x$$

3.39 Ellipsoid بیضیگون

Semi-axes: a, b, c نیمه-محورها

Volume: V حجم



شکل ۵۶ Figure 56.

355. $V = \frac{4}{3}\pi abc$

گوی گون کشیده شده Prolate Spheroid

Semi-axes: a, b, b ($a > b$) نیمه-محورها
 Surface area: S مساحت سطح
 Volume: V حجم

356. $S = 2\pi b \left(b + \frac{a \arcsin e}{e} \right),$

که در آن where $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$

357. $V = \frac{4}{3}\pi b^2 a$

Oblate Spheroid گوی گون له شده

Semi-axes: a, b, b ($a < b$) نیمه-محورها

Surface area: S مساحت سطح

Volume: V حجم

$$358. \quad S = 2\pi b \left(b + \frac{a \operatorname{arcsinh}\left(\frac{be}{a}\right)}{be/a} \right),$$

که در آن where $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.$

$$359. \quad V = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

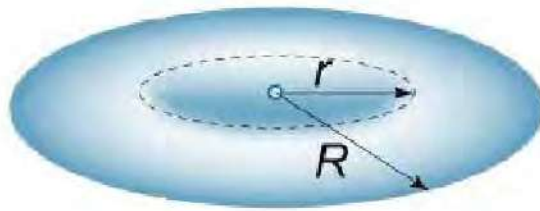
3.40 Circular Torus تیوب دایروی

Major radius: R شعاع اصلی

Minor radius: r شعاع فرعی

Surface area: S مساحت سطح

Volume: V حجم



شکل ۵۷ Picture 57.

360. $S = 4\pi^2 Rr$

361. $V = 2\pi^2 Rr^2$

Angles: α, β زوایا

Real numbers (coordinates of a point): x, y اعداد حقیقی (مختصات یک نقطه)

Whole number: k عدد کامل

واحد‌های رادیان و درجه برای زوایا

4.1 Radian and Degree Measures of Angles

362. $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$

363. $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.017453 \text{ rad}$

364. $1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ rad} \approx 0.000291 \text{ rad}$

365. $1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 3600} \text{ rad} \approx 0.000005 \text{ rad}$

366. زاویه (درجه)

Angle (degrees)	0	30	45	60	90	180	270	360
زاویه (رادیان)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

4.2 Definitions and Graphs of Trigonometric Functions

تعاریف و نمودارهای توابع مثلثاتی

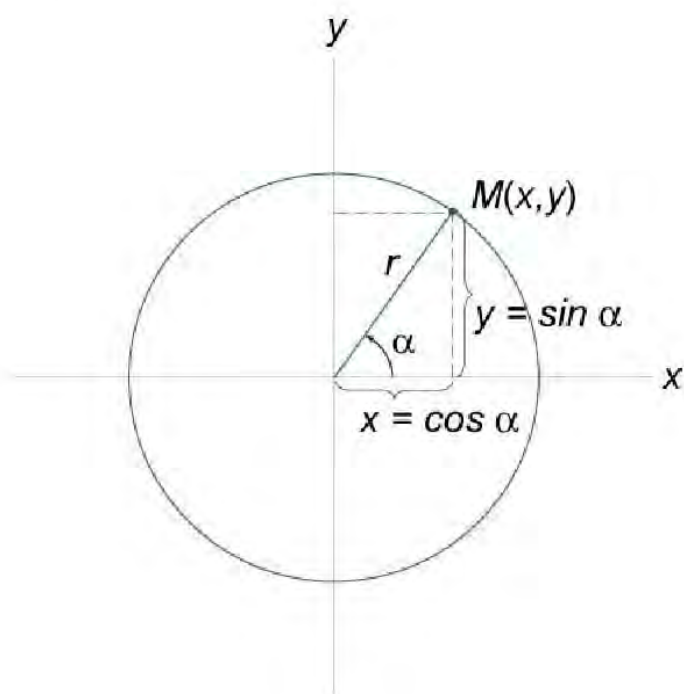


Figure 58. شکل ۵۸

367. $\sin \alpha = \frac{y}{r}$

368. $\cos \alpha = \frac{x}{r}$

369. $\tan \alpha = \frac{y}{x}$

370. $\cot \alpha = \frac{x}{y}$

371. $\sec \alpha = \frac{r}{x}$

372. $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y}$

373. Sine Function تابع سینوس
 $y = \sin x$, $-1 \leq \sin x \leq 1$.

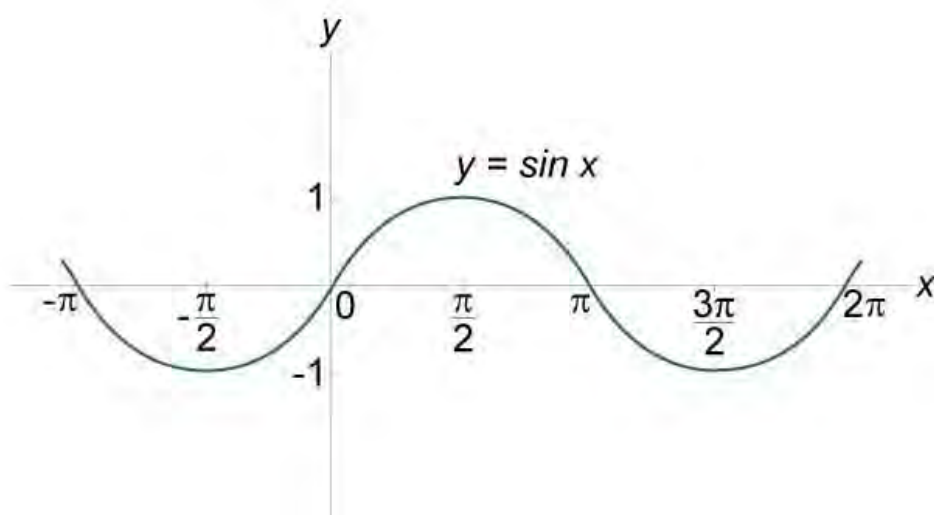


Figure 59. شکل ۵۹

374. Cosine Function تابع کسینوس
 $y = \cos x$, $-1 \leq \cos x \leq 1$.

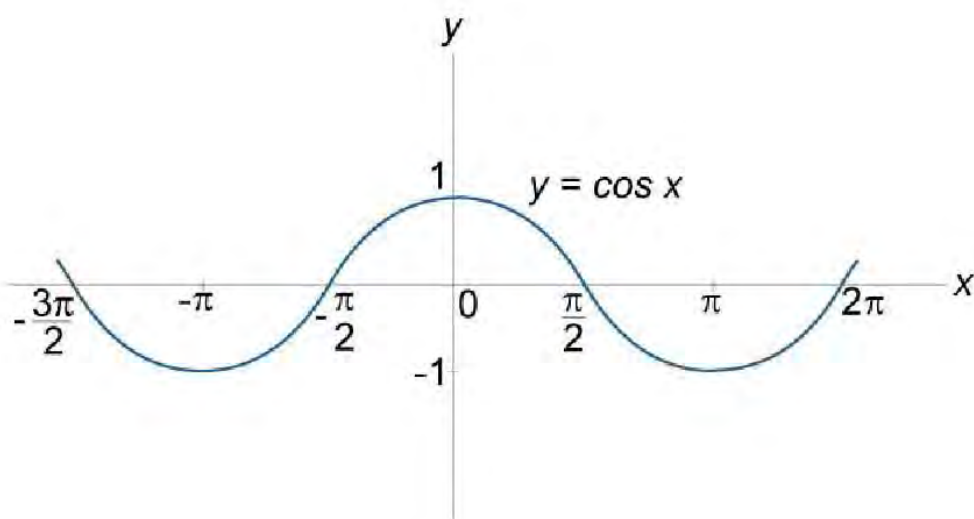


Figure 60. شکل ۶۰

375. Tangent Function تابع تانژانت

$$y = \tan x, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, -\infty \leq \tan x \leq \infty.$$

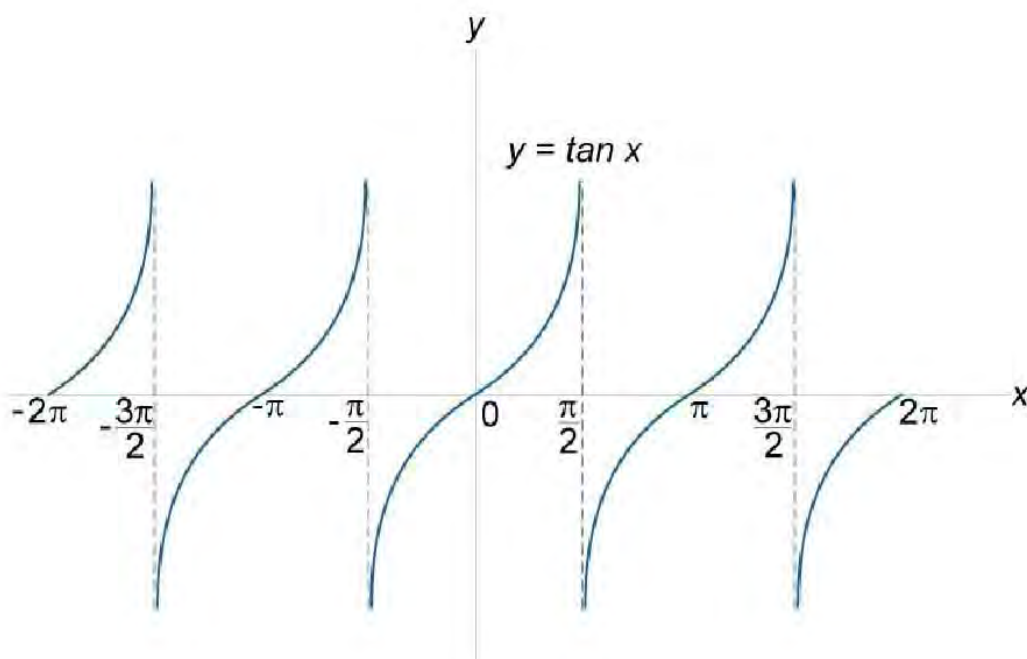


Figure 61. شکل ۶۱

- 376.** Cotangent Function تابع کتانژانت
 $y = \cot x$, $x \neq k\pi$, $-\infty \leq \cot x \leq \infty$.

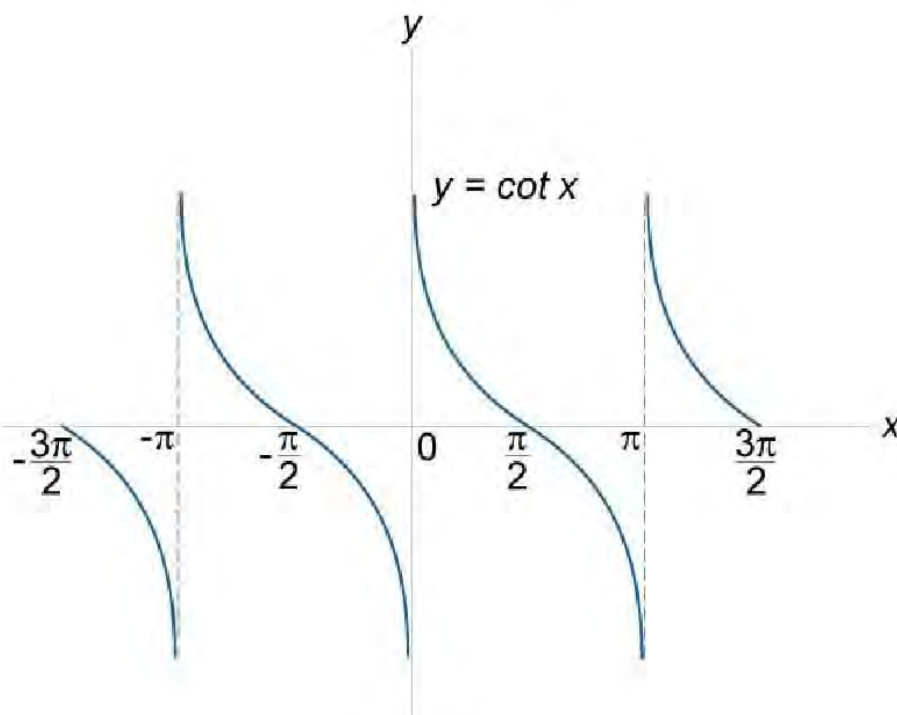
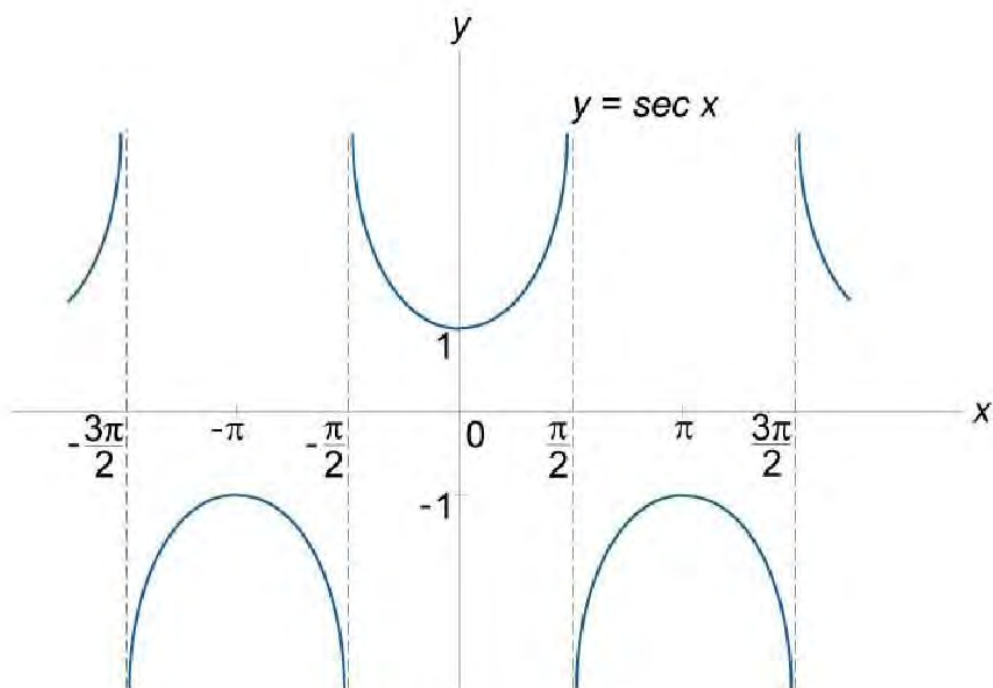


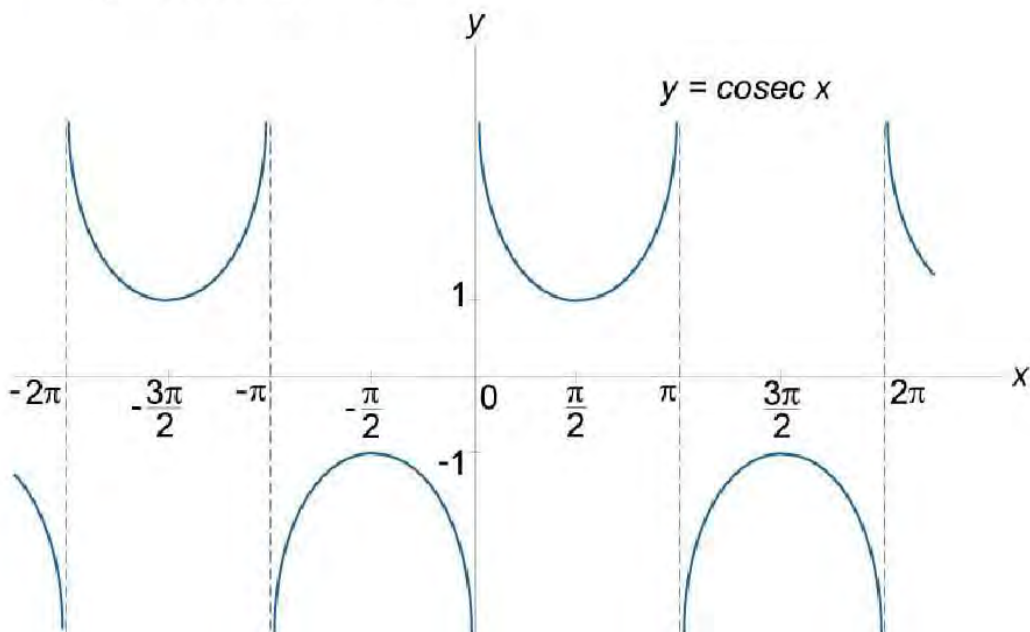
Figure 62. شکل ۶۲

- 377.** Secant Function تابع سکانت
 $y = \sec x$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.



شکل ۶۳ Figure 63.

378. Cosecant Function تابع کسکانت
 $y = \operatorname{cosec} x$, $x \neq k\pi$.



شکل ۶۴ Figure 64.

علائم توابع مثلثاتی

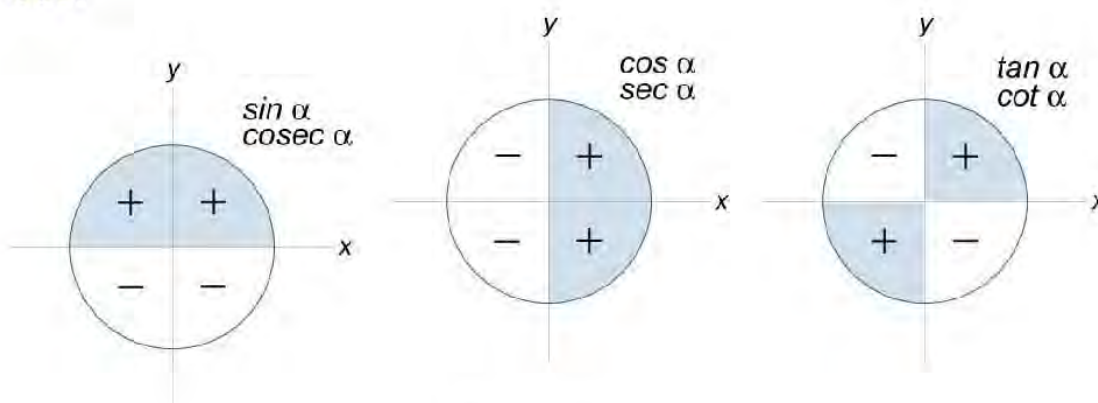
4.3. Signs of Trigonometric Functions

ربع

379.

Quadrant	Sin α	Cos α	Tan α	Cot α	Sec α	Cosec α
I	+	+	+	+	+	+
II	+					+
III			+	+		
IV		+			+	

380.



شکل ۶۵ Figure 65.

توابع مثلثاتی زوایای عمومی

4.4 Trigonometric Functions of Common Angles

381.

α°	α rad	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$\sec \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$
0	0	0	1	0	∞	1	∞
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0	∞	1
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
180	π	0	-1	0	∞	-1	∞
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0	∞	-1
360	2π	0	1	0	∞	1	∞

382.

α°	$\alpha \text{ rad}$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
15	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
36	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
54	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
72	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
75	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$

4.5 Most Important Formulas مهمترین روابط

383. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

384. $\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1$

385. $\csc^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 1$

386. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$$387. \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$388. \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$389. \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$390. \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

4.6 Reduction Formulas روابط کاهشنده

391.

β	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\tan \beta$	$\cot \beta$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$90^\circ - \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$+\cot \alpha$	$+\tan \alpha$
$90^\circ + \alpha$	$+\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$180^\circ - \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$+\tan \alpha$	$+\cot \alpha$
$270^\circ - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\cot \alpha$	$+\tan \alpha$
$270^\circ + \alpha$	$-\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$360^\circ - \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$360^\circ + \alpha$	$+\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\tan \alpha$	$+\cot \alpha$

تناوب توابع مثلثاتی

4.7 Periodicity of Trigonometric Functions

$$392. \quad \sin(\alpha \pm 2\pi n) = \sin \alpha, \text{ period } 2\pi \text{ or } 360^\circ.$$

$$393. \quad \cos(\alpha \pm 2\pi n) = \cos \alpha, \text{ period } 2\pi \text{ or } 360^\circ.$$

$$394. \quad \tan(\alpha \pm \pi n) = \tan \alpha, \text{ period } \pi \text{ or } 180^\circ.$$

$$395. \quad \cot(\alpha \pm \pi n) = \cot \alpha, \text{ period } \pi \text{ or } 180^\circ.$$

روابط میان توابع مثلثاتی

4.8 Relations between Trigonometric Functions

$$396. \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)} = 2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 1$$

$$= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$397. \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$= \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$398. \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} 399. \quad \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \sqrt{\csc^2 \alpha - 1} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \tan \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$400. \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$401. \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \pm \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \tan \frac{\alpha}{2}}$$

روابط جمع و تفریق

4.9 Addition and Subtraction Formulas

$$402. \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$403. \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$404. \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$405. \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$406. \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$407. \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$408. \quad \cot(\alpha + \beta) = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

$$409. \quad \cot(\alpha - \beta) = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$$

روابط دو برابر زاویه

4.10 Double Angle Formulas

$$410. \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$411. \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$412. \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2}{\cot \alpha - \tan \alpha}$$

$$413. \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2}$$

روابط چند برابر زاویه

4.11 Multiple Angle Formulas

$$414. \quad \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha = 3\cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

$$415. \quad \sin 4\alpha = 4\sin \alpha \cdot \cos \alpha - 8\sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$416. \quad \sin 5\alpha = 5\sin \alpha - 20\sin^3 \alpha + 16\sin^5 \alpha$$

$$417. \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

$$418. \quad \cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$$

$$419. \quad \cos 5\alpha = 16\cos^5 \alpha - 20\cos^3 \alpha + 5\cos \alpha$$

$$420. \quad \tan 3\alpha = \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha}$$

$$421. \quad \tan 4\alpha = \frac{4\tan \alpha - 4\tan^3 \alpha}{1 - 6\tan^2 \alpha + \tan^4 \alpha}$$

$$422. \quad \tan 5\alpha = \frac{\tan^5 \alpha - 10\tan^3 \alpha + 5\tan \alpha}{1 - 10\tan^2 \alpha + 5\tan^4 \alpha}$$

$$423. \quad \cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3\cot \alpha}{3\cot^2 \alpha - 1}$$

$$424. \quad \cot 4\alpha = \frac{1 - 6\tan^2 \alpha + \tan^4 \alpha}{4\tan \alpha - 4\tan^3 \alpha}$$

$$425. \quad \cot 5\alpha = \frac{1 - 10 \tan^2 \alpha + 5 \tan^4 \alpha}{\tan^5 \alpha - 10 \tan^3 \alpha + 5 \tan \alpha}$$

روابط نصف زاویه

4.12 Half Angle Formulas

$$426. \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$427. \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$428. \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \csc \alpha - \cot \alpha$$

$$429. \quad \cot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \csc \alpha + \cot \alpha$$

برابریهای تانژانت نصف زاویه

4.13 Half Angle Tangent Identities

$$430. \quad \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$431. \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$432. \quad \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$433. \quad \cot \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \tan \frac{\alpha}{2}}$$

تبدیل عبارتهای مثلثاتی به ضرب

4.14 Transforming of Trigonometric Expressions to Product

$$434. \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$435. \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$436. \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$437. \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$438. \quad \tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$439. \quad \tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$440. \quad \cot \alpha + \cot \beta = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$441. \quad \cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$442. \quad \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$443. \quad \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$444. \quad \tan \alpha + \cot \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$445. \quad \tan \alpha - \cot \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$446. \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$447. \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$448. \quad 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$449. \quad 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

تبدیل عبارتهای مثلثاتی به جمع

4.15 Transforming of Trigonometric Expressions to Sum

$$450. \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$451. \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$452. \quad \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2}$$

$$453. \quad \tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$454. \quad \cot \alpha \cdot \cot \beta = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

$$455. \quad \tan \alpha \cdot \cot \beta = \frac{\tan \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha + \tan \beta}$$

4.16 Powers of Trigonometric Functions

$$456. \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$457. \quad \sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

$$458. \quad \sin^4 \alpha = \frac{\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3}{8}$$

$$459. \quad \sin^5 \alpha = \frac{10 \sin \alpha - 5 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{16}$$

$$460. \quad \sin^6 \alpha = \frac{10 - 15 \cos 2\alpha + 6 \cos 4\alpha - \cos 6\alpha}{32}$$

$$461. \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$462. \quad \cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$$

$$463. \quad \cos^4 \alpha = \frac{\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3}{8}$$

$$464. \quad \cos^5 \alpha = \frac{10 \cos \alpha + 5 \sin 3\alpha + \cos 5\alpha}{16}$$

$$465. \quad \cos^6 \alpha = \frac{10 + 15 \cos 2\alpha + 6 \cos 4\alpha + \cos 6\alpha}{32}$$

نمودارهای وارون توابع مثلثاتی

4.17 Graphs of Inverse Trigonometric Functions

466. Inverse Sine Function وارون تابع سینوس

$$y = \arcsin x, -1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}.$$

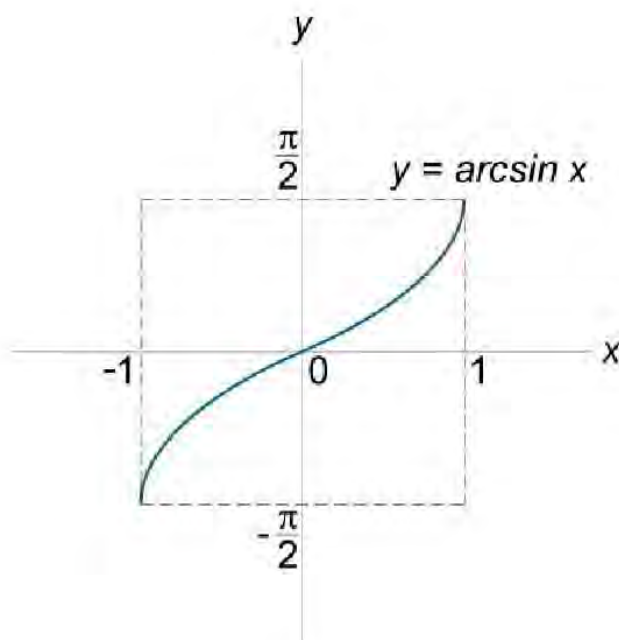


Figure 66. شکل ۶۶

467. Inverse Cosine Function وارون تابع کسینوس

$$y = \arccos x, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq \arccos x \leq \pi.$$

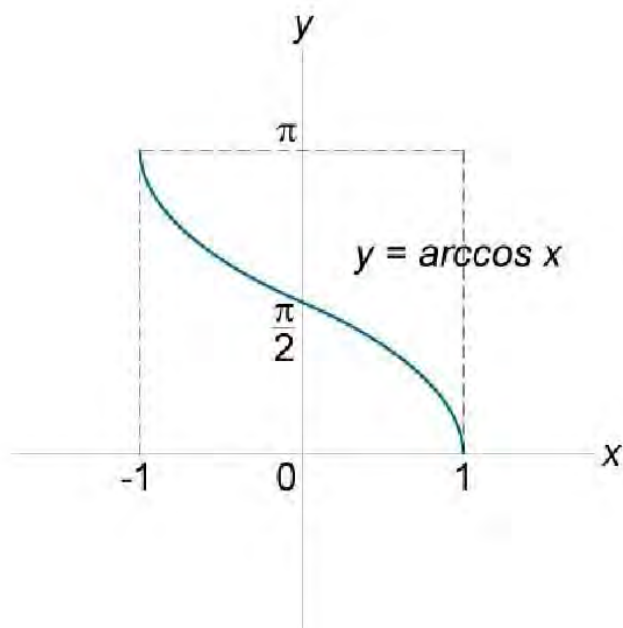


Figure 67. شکل ۶۷

- 468.** Inverse Tangent Function وارون تابع تانژانت
 $y = \arctan x$, $-\infty \leq x \leq \infty$, $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$.

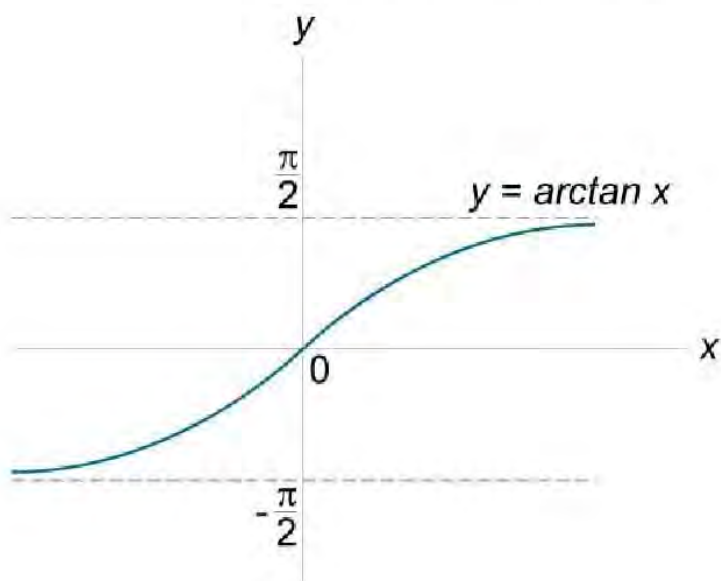


Figure 68. شکل ۶۸

- 469.** Inverse Cotangent Function وارون تابع کتانژانت
 $y = \operatorname{arccot} x, -\infty \leq x \leq \infty, 0 < \operatorname{arccot} x < \pi.$

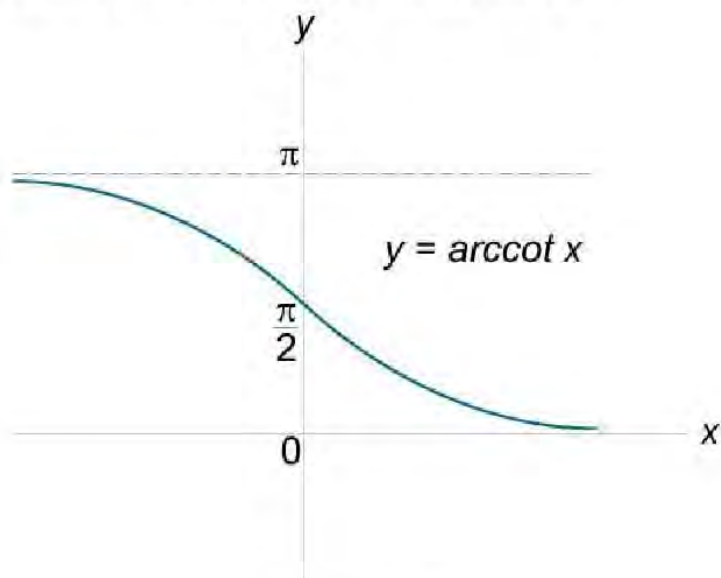


Figure 69. شکل ۶۹

- 470.** Inverse Secant Function وارون تابع سکانت
 $y = \operatorname{arcsec} x, x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \operatorname{arcsec} x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$

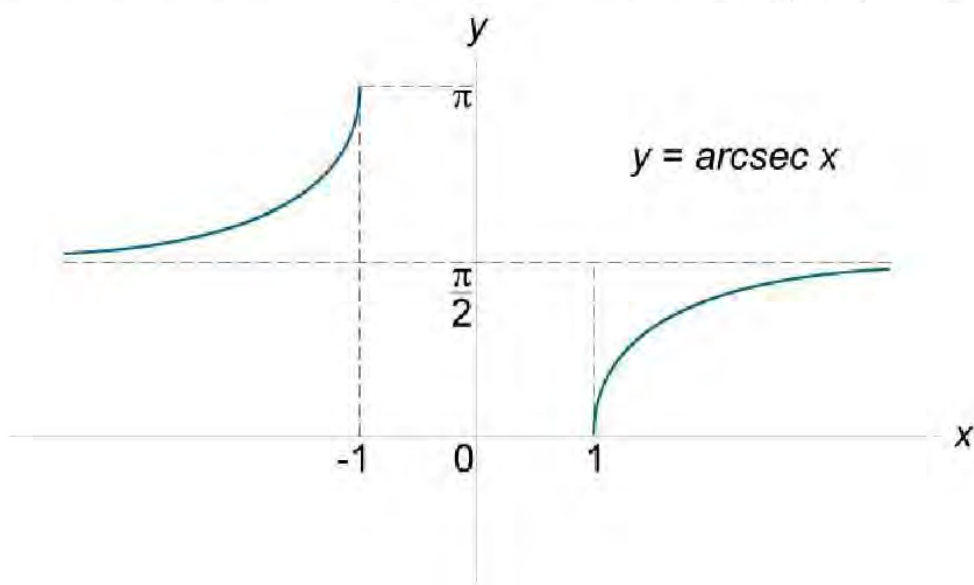


Figure 70. شکل ۷۰

471. Inverse Cosecant Function وارون تابع کسکانت

$$y = \operatorname{arccsc} x, x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \operatorname{arccsc} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

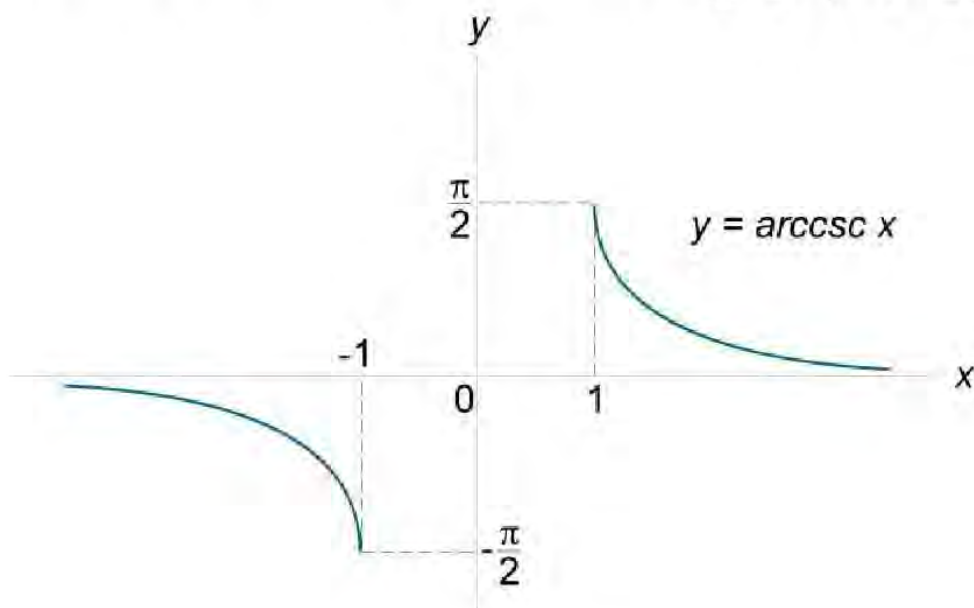


Figure 71. شکل ۷۱

4.18 Principal Values of Inverse Trigonometric Functions

مقادیر اصلی وارون
توابع مثلثاتی

472.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0°	30°	45°	60°	90°
$\arccos x$	90°	60°	45°	30°	0°
x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	
$\arcsin x$	-30°	-45°	-60°	-90°	
$\arccos x$	120°	135°	150°	180°	

473.

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
arctan x	0°	30°	45°	60°	-30°	-45°	-60°
arccot x	90°	60°	45°	30°	120°	135°	150°

4.19 Relations between Inverse Trigonometric Functions

روابط میان وارون
توابع مثلثاتی

474. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

475. $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$

476. $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1.$

477. $\arcsin x = -\arccos \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 0.$

478. $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x^2 < 1.$

479. $\arcsin x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, 0 < x \leq 1.$

480. $\arcsin x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, -1 \leq x < 0.$

481. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$$482. \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$483. \arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$484. \arccos x = \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 0.$$

$$485. \arccos x = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < x \leq 1.$$

$$486. \arccos x = \pi + \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \leq x < 0.$$

$$487. \arccos x = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$488. \arctan(-x) = -\arctan x$$

$$489. \arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$$

$$490. \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$491. \arctan x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \geq 0.$$

$$492. \arctan x = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \leq 0.$$

$$493. \quad \arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

$$494. \quad \arctan x = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}, \quad x < 0.$$

$$495. \quad \arctan x = \operatorname{arccot} \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

$$496. \quad \arctan x = \operatorname{arccot} \frac{1}{x} - \pi, \quad x < 0.$$

$$497. \quad \operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$$

$$498. \quad \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

$$499. \quad \operatorname{arccot} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x > 0.$$

$$500. \quad \operatorname{arccot} x = \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x < 0.$$

$$501. \quad \operatorname{arccot} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$502. \quad \operatorname{arccot} x = \arctan \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

$$503. \quad \operatorname{arccot} x = \pi + \arctan \frac{1}{x}, \quad x < 0.$$

4.20 Trigonometric Equations

معادلات مثلثاتی

Whole number: n عدد کامل

$$504. \quad \sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$$

$$505. \quad \cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n$$

$$506. \quad \tan x = a, \quad x = \arctan a + \pi n$$

$$507. \quad \cot x = a, \quad x = \operatorname{arccot} a + \pi n$$

روابط توابع هایپربولیک (هذلولی)

4.21 Relations to Hyperbolic Functions

Imaginary unit: i واحد موهومی

$$508. \quad \sin(ix) = i \sinh x$$

$$509. \quad \tan(ix) = i \tanh x$$

$$510. \quad \cot(ix) = -i \coth x$$

$$511. \quad \sec(ix) = \operatorname{sech} x$$

$$512. \quad \csc(ix) = -i \operatorname{csch} x$$

فصل ۵

ماتریسها و دترمینانها *Chapter 5*

Matrices and Determinants

Matrices: A, B, C ماتریسها

Elements of a matrix: $a_i, b_i, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$ عناصر ماتریس

Determinant of a matrix: $\det A$ دترمینان ماتریس

Minor of an element a_{ij} : M_{ij} فرعی یک عنصر

Cofactor of an element a_{ij} : C_{ij} همضرب یک عنصر

Transpose of a matrix: $A^T, \tilde{A}$ ترانپاده یک ماتریس

Adjoint of a matrix: $\text{adj } A$ الحاقی یک ماتریس

Trace of a matrix: $\text{tr } A$ ردپا (تریس) یک ماتریس

Inverse of a matrix: A^{-1} وارون یک ماتریس

Real number: k عدد حقیقی

Real variables: x_i متغیرهای حقیقی

Natural numbers: m, n اعداد طبیعی

5.1 Determinants دترمینانها

513. Second Order Determinant دترمینان مرتبه دوم

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

514. Third Order Determinant دترمینان مرتبه سوم

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

515. Sarrus Rule (Arrow Rule) قاعده ساروس (قاعده پیکان)

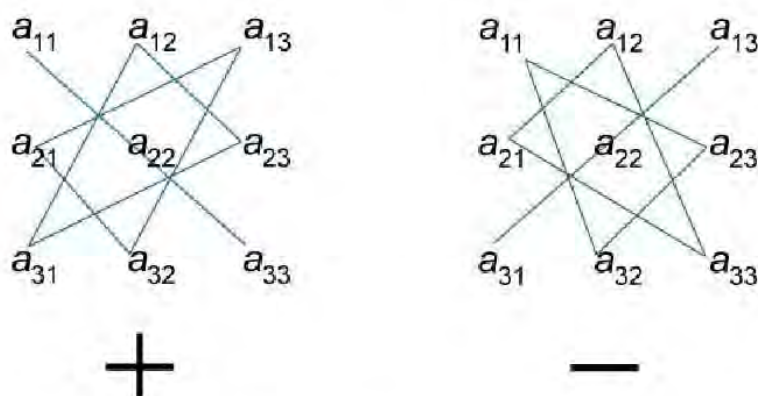


Figure 72. شکل ۷۲

516. N-th Order Determinant دترمینان مرتبه n ام

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

517. Minor فرعی

The minor M_{ij} associated with the element a_{ij} of n -th order matrix A is the $(n-1)$ -th order determinant derived from the matrix A by deletion of its i -th row and j -th column.

فرعی M_{ij} مرتبط با عنصر a_{ij} ماتریس مرتبه n ام A یک دترمینان مرتبه $(n-1)$ ام گرفته شده از ماتریس A است که با حذف سطر i ام و ستون j ام به دست می آید.

518. Cofactor همضرب

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

بسط لاپلاس دترمینان مرتبه n ام

519. Laplace Expansion of n-th Order Determinant

Laplace expansion by elements of the i-th row

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

بسط لاپلاس با عناصر ردیف i ام

Laplace expansion by elements of the j-th column

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

بسط لاپلاس با عناصر ستون j ام

ویژگیهای دترمینانها

5.2 Properties of Determinants

اگر سطرها به جای ستونها و ستونها به جای سطرها عوض شود مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

520. The value of a determinant remains unchanged if rows are changed to columns and columns to rows.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

اگر دو سطر (یا دو ستون) جابجا شوند، علامت دترمینان تغییر می کند.

521. If two rows (or two columns) are interchanged, the sign of the determinant is changed.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

اگر دو سطر (یا دو ستون) با هم برابر باشند، مقدار دترمینان برابر با صفر است.

522. If two rows (or two columns) are identical, the value of the determinant is zero.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

اگر عناصر هر سطر (یا ستون) در یک ضریب مشترک ضرب شوند، دترمینان نیز در همان ضریب ضرب می شود.

- 523.** If the elements of any row (or column) are multiplied by a common factor, the determinant is multiplied by that factor.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

- 524.** If the elements of any row (or column) are increased (or decreased) by equal multiples of the corresponding elements of any other row (or column), the value of the determinant is unchanged.

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

اگر عناصر هر سطر (یا ستون) با ضریبی از عناصر هر سطر (یا ستون) دیگر جمع (و یا تفریق) شوند، مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

5.3 Matrices ماتریسها

تعریف: یک ماتریس A با ابعاد $m \times n$ آرایه ای مستطیلی از عناصر (اعداد یا توابع) با m سطر و n ستون است.

- 525.** Definition

An $m \times n$ matrix A is a rectangular array of elements (numbers or functions) with m rows and n columns.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی ماتریسی از مرتبه $n \times n$ است.

- 526.** Square matrix is a matrix of order $n \times n$.

ماتریس مربعی $[a_{ij}]$ متقارن است اگر $a_{ij} = a_{ji}$ ، یعنی نسبت به قطر اصلی متقارن باشد.

- 527.** A square matrix $[a_{ij}]$ is symmetric if $a_{ij} = a_{ji}$, i.e. it is symmetric about the leading diagonal.

ماتریس مربعی $[a_{ij}]$ پادمتقارن است اگر $a_{ij} = -a_{ji}$ باشد.

- 528.** A square matrix $[a_{ij}]$ is skew-symmetric if $a_{ij} = -a_{ji}$.

ماتریس قطری به ماتریسی گفته می شود که تمامی عناصر آن به جز عناصر روی قطر اصلی، صفر باشند.

529. Diagonal matrix is a square matrix with all elements zero except those on the leading diagonal.

ماتریس واحد به ماتریس قطری گفته می شود که تمامی عناصر روی قطر اصلی آن برابر یک باشند.

530. Unit matrix is a diagonal matrix in which the elements on the leading diagonal are all unity. The unit matrix is denoted by I.

ماتریس واحد با I نشان داده می شود. ماتریس صفر به ماتریسی گفته می شود که تمامی عناصر آن برابر صفر باشند.

531. A null matrix is one whose elements are all zero.

عملیات ماتریسها

5.4 Operations with Matrices

دو ماتریس A و B با هم برابراند اگر، و تنها اگر، هر دو شکل یکسان $m \times n$ داشته و عناصر متناظرشان برابر باشند.

532. Two matrices A and B are equal if, and only if, they are both of the same shape $m \times n$ and corresponding elements are equal.

دو ماتریس A و B را می توان جمع (یا تفریق) کرد اگر، و تنها اگر، هر دو شکل یکسان $m \times n$ داشته باشند. اگر

533. Two matrices A and B can be added (or subtracted) of, and only if, they have the same shape $m \times n$. If

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

then آنگاه

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

اگر k اسکالر، و $A = [a_{ij}]$ ماتریس باشد، آنگاه

534. If k is a scalar, and $A = [a_{ij}]$ is a matrix, then

$$kA = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

535. Multiplication of Two Matrices ضرب دو ماتریس

Two matrices can be multiplied together only when the number of columns in the first is equal to the number of

rows in the second. دو ماتریس را تنها هنگامی می توان در هم ضرب کرد که تعداد

ستونهای ماتریس نخست با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد.

اگر If

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix},$$

آنگاه then

$$AB = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{bmatrix},$$

که در آن where

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{\lambda=1}^n a_{i\lambda}b_{\lambda j} \\ (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k).$$

بنابراین اگر Thus if

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = [b_i] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

آنگاه then

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_2 & a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 & a_{22}b_2 & a_{23}b_3 \end{bmatrix}.$$

536. Transpose of a Matrix ترانهاده ماتریس

If the rows and columns of a matrix are interchanged, then the new matrix is called the **transpose** of the original matrix.

If A is the original matrix, its transpose is denoted A^T or

اگر جای سطرها و ستونهای یک ماتریس عوض شود، آنگاه ماتریس جدید ترانهاده ماتریس $\tilde{A}$ اولیه نامیده می شود. اگر A ماتریس اولیه باشد، ترانهاده آن با A^T نشان داده می شود.

537. The matrix A is orthogonal if $AA^T = I$.

اگر $AA^T = I$ باشد ماتریس A متعامد نامیده می شود.

538. If the matrix product AB is defined, then

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

اگر ضرب ماتریسی AB تعریف شود، آنگاه

539. Adjoint of Matrix الحاقی ماتریس

If A is a square $n \times n$ matrix, its **adjoint**, denoted by $\text{adj } A$, is the transpose of the matrix of cofactors C_{ij} of A :

اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ باشد، الحاقی آن، که با $\text{adj } A$ نشان داده می شود، ترانهاده ماتریس همضریبهای C_{ij} از A می باشد.

540. Trace of a Matrix ردپای (تریس) ماتریس

If A is a square $n \times n$ matrix, its **trace**, denoted by $\text{tr } A$, is defined to be the sum of the terms on the leading diagonal:

اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ باشد، ردپای (تریس) آن، که با $\text{tr } A$ نشان داده می شود، مجموع عبارات قطر اصلی آن می باشد.

541. Inverse of a Matrix وارون ماتریس

If A is a square $n \times n$ matrix with a nonsingular determinant $\det A$, then its **inverse** A^{-1} is given by

اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ با دترمینان $\det A$ غیرصفر باشد، آنگاه وارون $A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}$ آن با رابطه زیر به دست می آید.

542. If the matrix product AB is defined, then

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

543. If A is a square $n \times n$ matrix, the **eigenvectors** X satisfy

اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ باشد، بردار ویژه X رابطه زیر را برآورده می کند $AX = \lambda X$,

while the **eigenvalues** λ satisfy the characteristic equation

حال آنکه مقدار ویژه λ لاندای معادله مشخصه زیر را برآورده می کند $|A - \lambda I| = 0$.

5.5 Systems of Linear Equations دستگاه های معادلات خطی

Variables: $x, y, z, x_1, x_2, \dots$ متغیرها

Real numbers: $a_1, a_2, a_3, b_1, a_{11}, a_{12}, \dots$ اعداد حقیقی

Determinants: D, D_x, D_y, D_z دترمینانها

Matrices: A, B, X ماتریسها

$$544. \begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases},$$

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D} \text{ (Cramer's rule), (قاعده کرامر)}$$

که در آن where

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} = d_1b_2 - d_2b_1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = a_1d_2 - a_2d_1.$$

اگر D غیر صفر باشد، آنگاه دستگاه جواب منفرد دارد:

545. If $D \neq 0$, then the system has a single solution:

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}.$$

اگر D صفر باشد و D_x (یا D_y) غیر صفر باشد، آنگاه دستگاه جواب ندارد.

If $D=0$ and $D_x \neq 0$ (or $D_y \neq 0$), then the system has no

solution.

اگر $D=D_x=D_y=0$ باشد، آنگاه دستگاه بی نهایت جواب دارد.

If $D=D_x=D_y=0$, then the system has infinitely many

solutions.

$$546. \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases},$$

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D} \text{ (Cramer's rule), (قاعده کرامر)}$$

where که در آن

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

اگر D غیر صفر باشد، آنگاه دستگاه جواب منفرد دارد:

547. If $D \neq 0$, then the system has a single solution:

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D}.$$

If $D=0$ and $D_x \neq 0$ (or $D_y \neq 0$ or $D_z \neq 0$), then the system

اگر D صفر باشد و D_x (یا D_y) غیر صفر باشد، آنگاه دستگاه جواب ندارد. has no solution.

If $D=D_x=D_y=D_z=0$, then the system has infinitely

many solutions. اگر $D=D_x=D_y=0$ باشد، آنگاه دستگاه بی نهایت جواب دارد.

548. Matrix Form of a System of n Linear Equations in n Unknowns

شکل ماتریسی دستگاه n معادله خطی با n مجهول

The set of linear equations مجموعه معادلات خطی

[illegible]

can be written in matrix form را می توان به شکل ماتریسی نوشت

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix},$$

i.e. یعنی

$$A \cdot X = B,$$

که در آن where

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

549. Solution of a Set of Linear Equations $n \times n$

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad \text{حل مجموعه ای از معادلات خطی } n \times n$$

where A^{-1} is the inverse of A .

که در آن A^{-1} وارون A است.

فصل ۶ **Chapter 6** بردارها **Vectors**

Vectors: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{r}, \vec{AB}, \dots$ بردارها

Vector length: $|\vec{u}|, |\vec{v}|, \dots$ طول بردار

Unit vectors: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بردارهای واحد

Null vector: $\vec{0}$ بردار صفر

Coordinates of vector $\vec{u}$: X_1, Y_1, Z_1 مختصات بردار

Coordinates of vector $\vec{v}$: X_2, Y_2, Z_2 مختصات بردار

Scalars: λ, μ اسکالرها

Direction cosines: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ کسینوسهای هادی

Angle between two vectors: θ زاویه میان دو بردار

6.1 Vector Coordinates مختصات بردار

550. Unit Vectors بردارهای واحد

$$\vec{i} = (1, 0, 0),$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0),$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1),$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

551. $\vec{r} = \vec{AB} = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{k}$

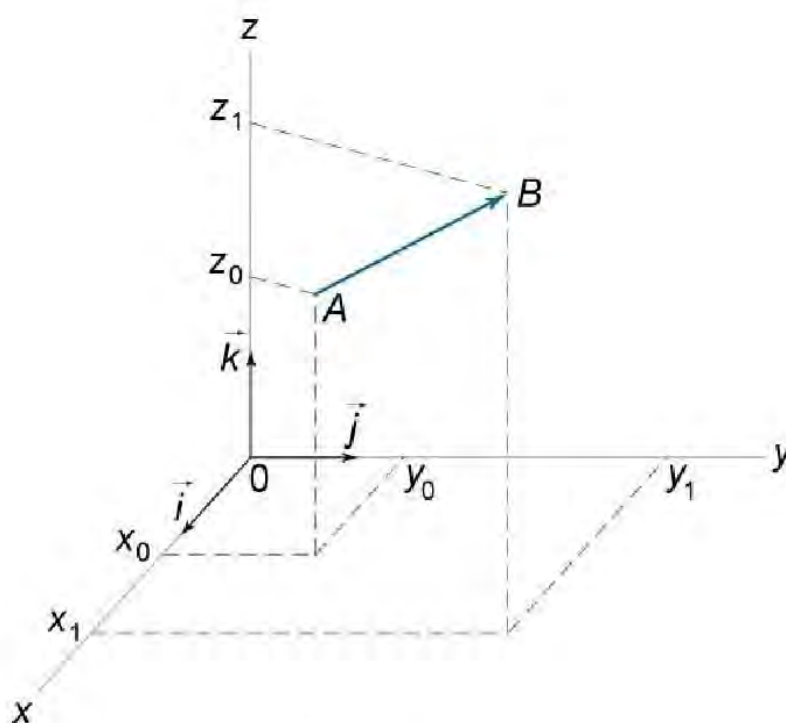


Figure 73. شکل ۷۳

552. $|\vec{r}| = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$

553. If $\vec{AB} = \vec{r}$, then $\vec{BA} = -\vec{r}$.

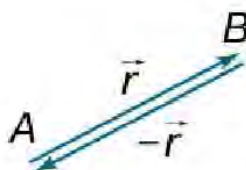


Figure 74. شکل ۷۴

554. $X = |\vec{r}| \cos \alpha,$
 $Y = |\vec{r}| \cos \beta,$
 $Z = |\vec{r}| \cos \gamma.$

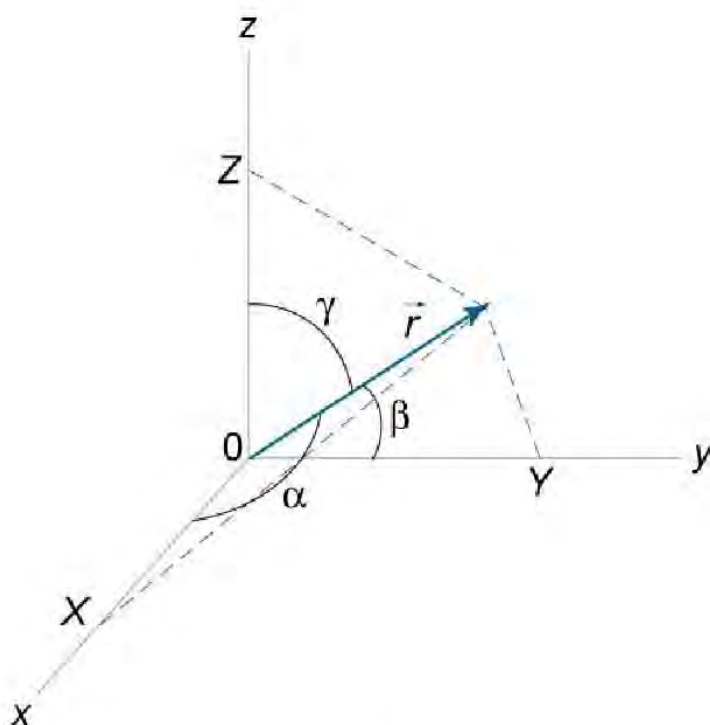


Figure 75. شکل ۷۵

555. اگر $\vec{r}(X, Y, Z) = \vec{r}_1(X_1, Y_1, Z_1)$, then
 آنگاه $X = X_1, Y = Y_1, Z = Z_1$.

6.2 Vector Addition جمع برداری

556. $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

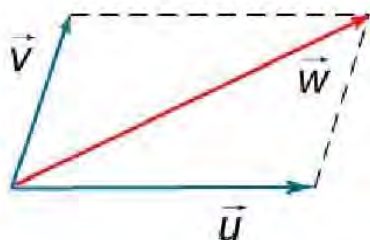
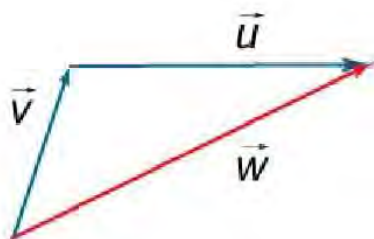
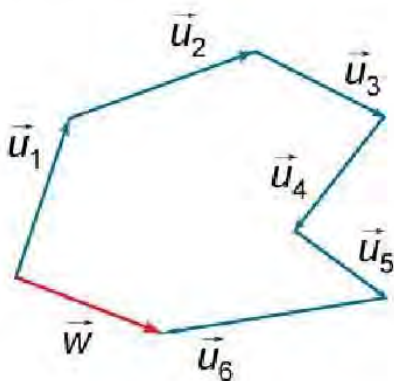


Figure 76. شکل ۷۶



شکل ۷۷ Figure 77.

557. $\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \dots + \vec{u}_n$



شکل ۷۸ Figure 78.

558. Commutative Law قانون جابجاپذیری
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

559. Associative Law قانون شرکت پذیری
 $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

560. $\vec{u} + \vec{v} = (X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2)$

6.3 Vector Subtraction تفریق برداری

561. $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ if $\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$.

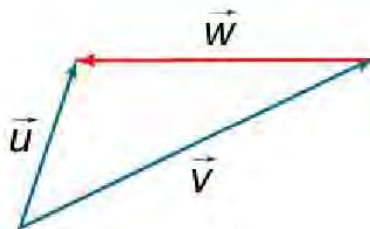


Figure 79. شکل ۷۹

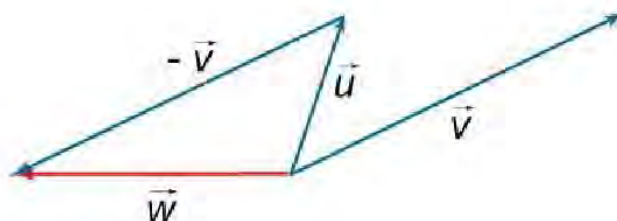


Figure 80. شکل ۸۰

562. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

563. $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0} = (0, 0, 0)$

564. $|\vec{0}| = 0$

565. $\vec{u} - \vec{v} = (X_1 - X_2, Y_1 - Y_2, Z_1 - Z_2),$

6.4 Scaling Vectors چند برابر کردن بردارها

566. $\vec{w} = \lambda \vec{u}$

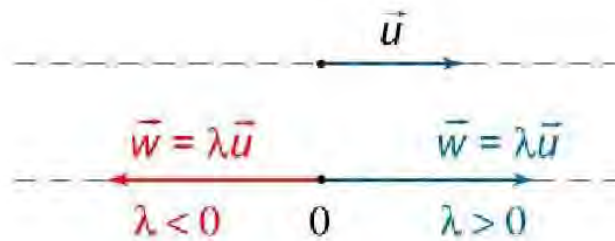


Figure 81. شکل ۸۱

567. $|\vec{w}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$

568. $\lambda \vec{u} = (\lambda X, \lambda Y, \lambda Z)$

569. $\lambda \vec{u} = \vec{u} \lambda$

570. $(\lambda + \mu) \vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}$

571. $\lambda(\mu \vec{u}) = \mu(\lambda \vec{u}) = (\lambda \mu) \vec{u}$

572. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$

6.5 Scalar Product ضرب اسکالر

- 573.** Scalar Product of Vectors $\vec{u}$ and $\vec{v}$ ضرب اسکالر بردارهای u و v
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$,
 where θ is the angle between vectors $\vec{u}$ and $\vec{v}$.
 که در آن تتا زاویه میان بردارهای u و v است.

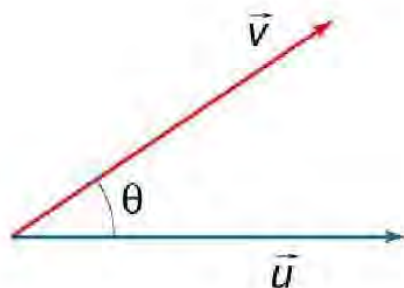


Figure 82. شکل ۸۲

574. Scalar Product in Coordinate Form ضرب اسکالر در شکل مختصات
 If $\vec{u} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{v} = (X_2, Y_2, Z_2)$, then $\vec{u} \cdot \vec{v} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$.
 اگر آنگاه

575. Angle Between Two Vectors زاویه میان دو بردار
 If $\vec{u} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{v} = (X_2, Y_2, Z_2)$, then $\cos \theta = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$.
 اگر آنگاه

576. Commutative Property خاصیت جابجا پذیری
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

577. Associative Property خاصیت شرکت پذیری
 $(\lambda \vec{u}) \cdot (\mu \vec{v}) = \lambda \mu \vec{u} \cdot \vec{v}$

578. Distributive Property خاصیت توزیع پذیری
 $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

579. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ if $\vec{u}, \vec{v}$ are orthogonal ($\theta = \frac{\pi}{2}$). اگر u و v متعامد باشند

580. $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ if $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. اگر

581. $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ if $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. اگر

582. $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

583. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ if $\vec{u}, \vec{v}$ are parallel ($\theta = 0$). اگر u و v موازی باشند

584. If $\vec{u} = (X_1, Y_1, Z_1)$, then $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$. اگر آنگاه

585. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

586. $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

6.6 Vector Product ضرب برداری

587. Vector Product of Vectors $\vec{u}$ and $\vec{v}$ ضرب برداری بردارهای u و v
 $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$, where که در آن

- $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta$, where $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$;
- $\vec{w} \perp \vec{u}$ and $\vec{w} \perp \vec{v}$;
- Vectors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ form a right-handed screw.

بردارهای u, v, w یک پیچ راستگرد تشکیل می دهند.

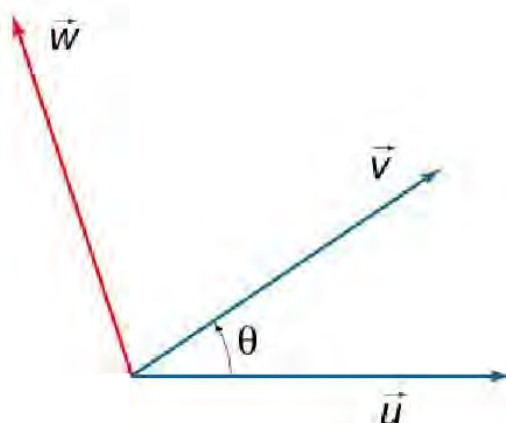


Figure 83. شکل ۸۳

$$588. \quad \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

$$589. \quad \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$590. \quad S = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta \quad (\text{Fig.83}) \quad (\text{شکل ۸۳})$$

591. Angle Between Two Vectors (Fig.83) (شکل ۸۳) زاویه میان دو بردار

$$\sin \theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

592. Noncommutative Property خاصیت غیر جابجا پذیری
 $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

593. Associative Property خاصیت شرکت پذیری
 $(\lambda \vec{u}) \times (\mu \vec{v}) = \lambda \mu \vec{u} \times \vec{v}$

594. Distributive Property خاصیت توزیع پذیری
 $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

595. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ if $\vec{u}$ and $\vec{v}$ are parallel ($\theta = 0$). اگر u و v موازی باشند

596. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

597. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

6.7 Triple Product ضرب سه گانه

598. Scalar Triple Product ضرب سه گانه اسکالر
 $[\vec{u}\vec{v}\vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

599. $[\vec{u}\vec{v}\vec{w}] = [\vec{w}\vec{u}\vec{v}] = [\vec{v}\vec{w}\vec{u}] = -[\vec{v}\vec{u}\vec{w}] = -[\vec{w}\vec{v}\vec{u}] = -[\vec{u}\vec{w}\vec{v}]$

600. $k\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = k[\vec{u}\vec{v}\vec{w}]$

ضرب سه گانه اسکالر در شکل مختصات

601. Scalar Triple Product in Coordinate Form

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

که در آن where

$$\vec{u} = (X_1, Y_1, Z_1), \vec{v} = (X_2, Y_2, Z_2), \vec{w} = (X_3, Y_3, Z_3).$$

602. Volume of Parallelepiped حجم متوازی السطوح
 $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

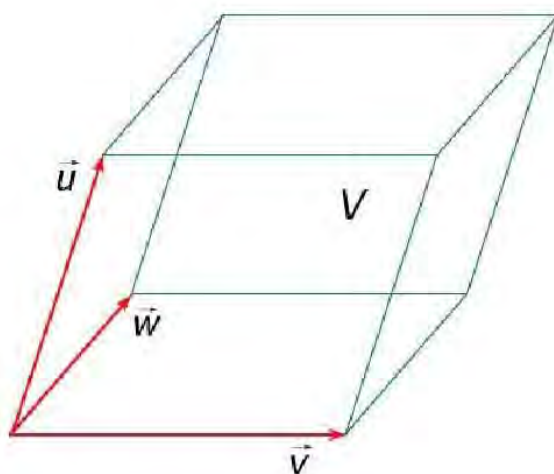


Figure 84. شکل ۸۴

603. Volume of Pyramid حجم هرم

$$V = \frac{1}{6} |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

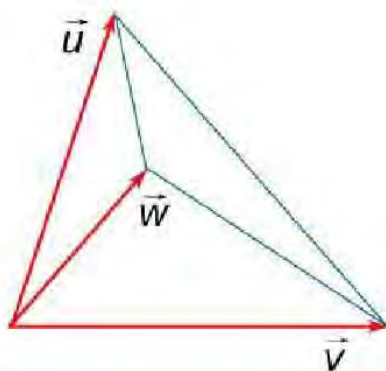


Figure 85. شکل ۸۵

آنگاه بردارهای u ، v ، و w وابسته خطی اند، به گونه ای که رابطه زیر برقرار است اگر

604. If $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$, then the vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, and $\vec{w}$ are **linearly dependent**, so $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ for some scalars λ and μ .

برای برخی از مقادیر اسکالرهایی لاند و مو اگر

605. If $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \neq 0$, then the vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, and $\vec{w}$ are **linearly independent**. آنگاه بردارهای u ، v ، و w مستقل خطی اند.

606. Vector Triple Product ضرب سه گانه برداری

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

دستگاه مختصات یک بعدی

7.1 One-Dimensional Coordinate System

Point coordinates: $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$ مختصات نقطهReal number: λ عدد حقیقیDistance between two points: d فاصله میان دو نقطه**607.** Distance Between Two Points فاصله میان دو نقطه

$$d = AB = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

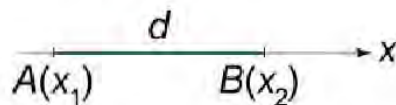


Figure 86. شکل ۸۶

608. Dividing a Line Segment in the Ratio λ تقسیم یک پاره خط به نسبت λ اندا

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \frac{AC}{CB}, \quad \lambda \neq -1.$$

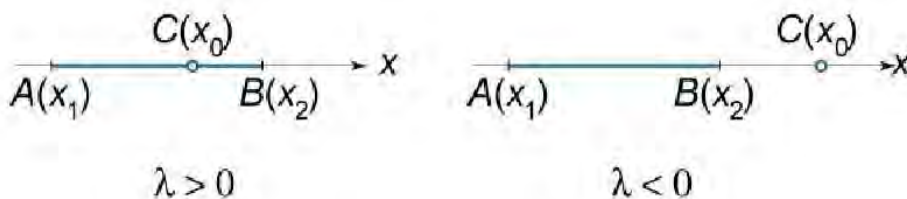


Figure 87. شکل ۸۷

609. Midpoint of a Line Segment نقطه میانه یک پاره خط

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \lambda = 1.$$

دستگاه مختصات دو بعدی

7.2 Two-Dimensional Coordinate System

Point coordinates: $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$ مختصات نقطه

Polar coordinates: r, φ مختصات قطبی

Real number: λ عدد حقیقی

Positive real numbers: $a, b, c,$ اعداد حقیقی مثبت

Distance between two points: d فاصله میان دو نقطه

Area: S مساحت

610. Distance Between Two Points فاصله میان دو نقطه

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

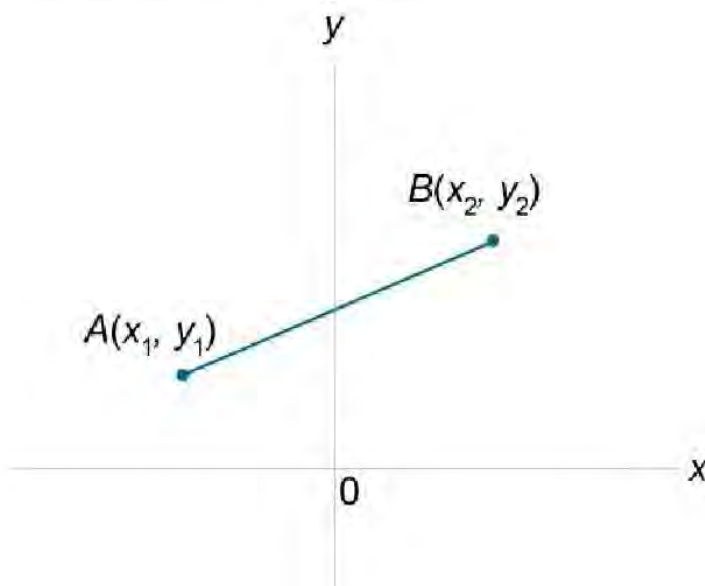


Figure 88. شکل ۸۸

611. Dividing a Line Segment in the Ratio λ تقسیم یک پاره خط به نسبت λ لاند

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$\lambda = \frac{AC}{CB}, \quad \lambda \neq -1.$$

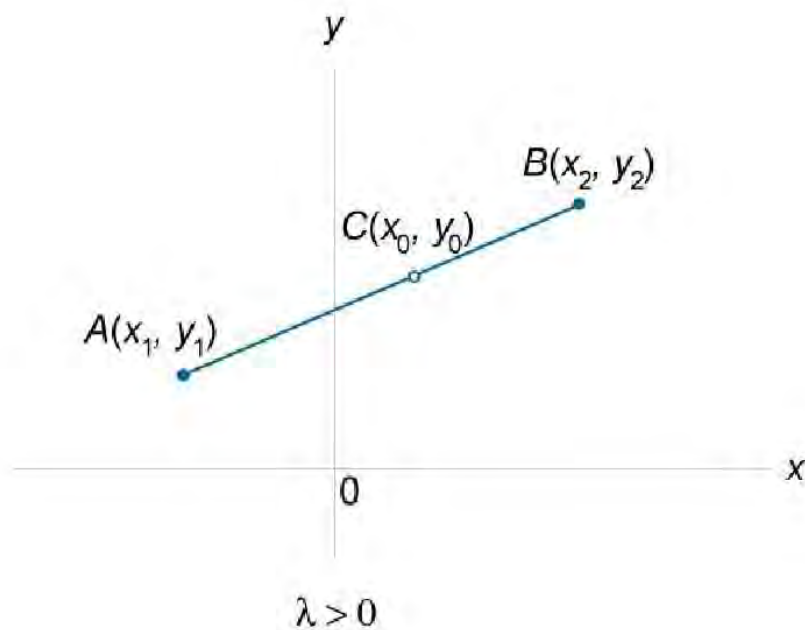


Figure 89. شکل ۸۹

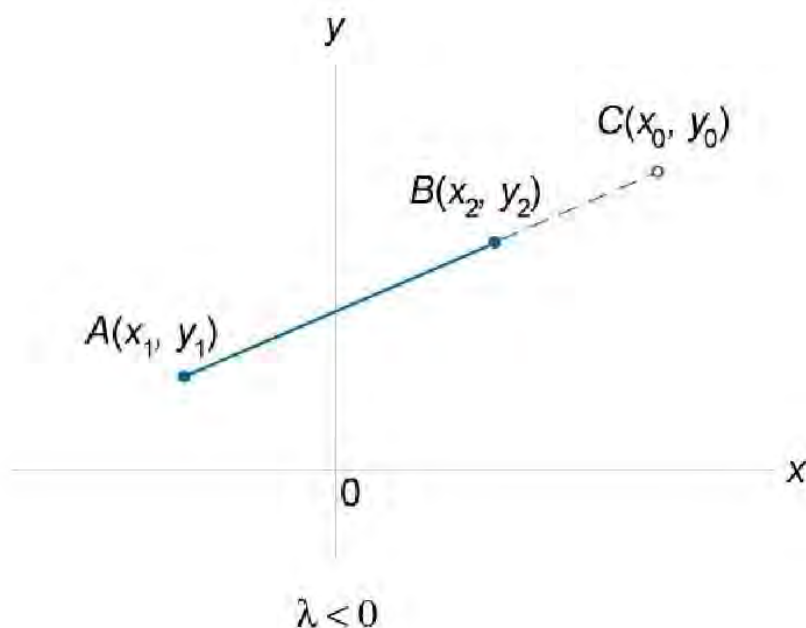


Figure 90. شکل ۹۰.

612. Midpoint of a Line Segment نقطه میانه یک پاره خط

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \lambda = 1.$$

گرانیگاه (تقاطع خطوط میانه) مثلث

613. Centroid (Intersection of Medians) of a Triangle

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

و که در آن where $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, and $C(x_3, y_3)$ are vertices of the triangle ABC. نقاط گوشه های مثلث ABC می باشند.

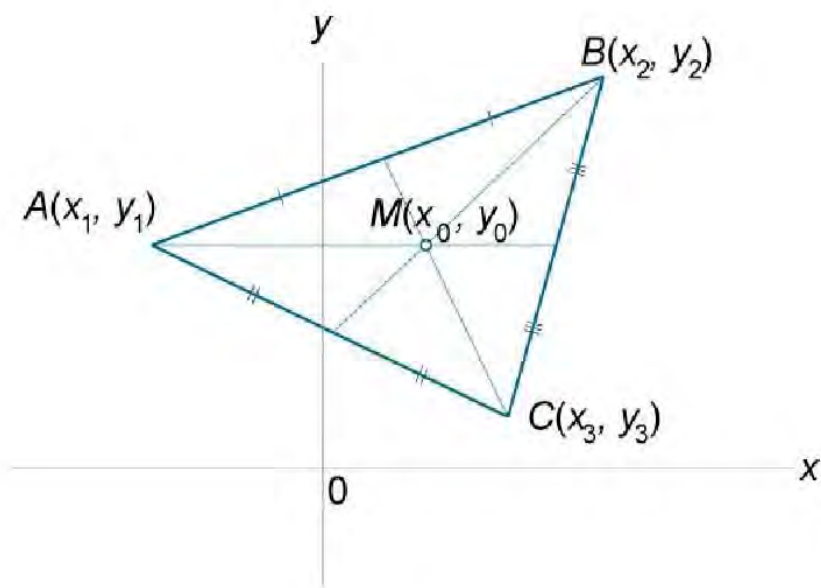


Figure 91. شکل ۹۱

مرکز دایره محاطی (تقاطع نیمسازهای زوایای) مثلث

614. Incenter (Intersection of Angle Bisectors) of a Triangle

$$x_0 = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \quad y_0 = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c},$$

که در آن where $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

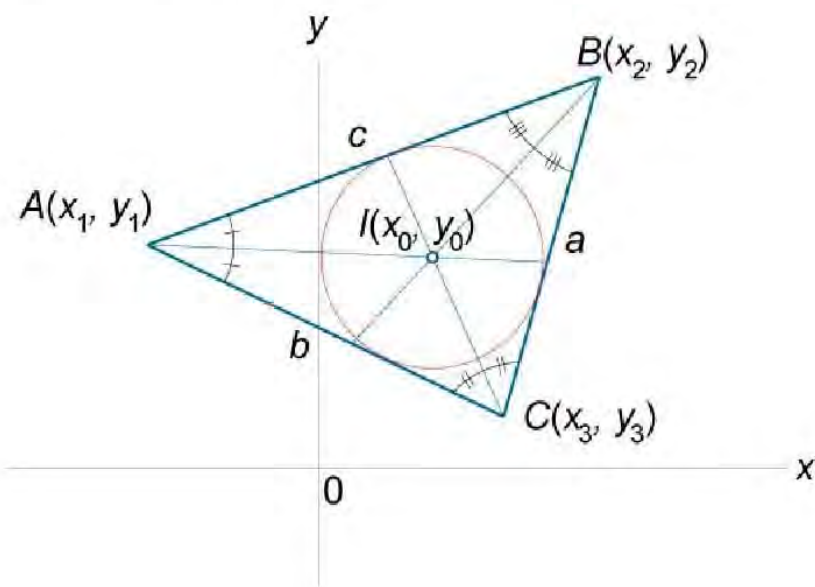


Figure 92. شکل ۹۲

مرکز دایره محیطی (تقاطع میانه های عمود بر اضلاع) مثلث

615. Circumcenter (Intersection of the Side Perpendicular Bisectors) of a Triangle

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 + y_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2 + y_2^2 & 1 \\ x_3 & x_3^2 + y_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

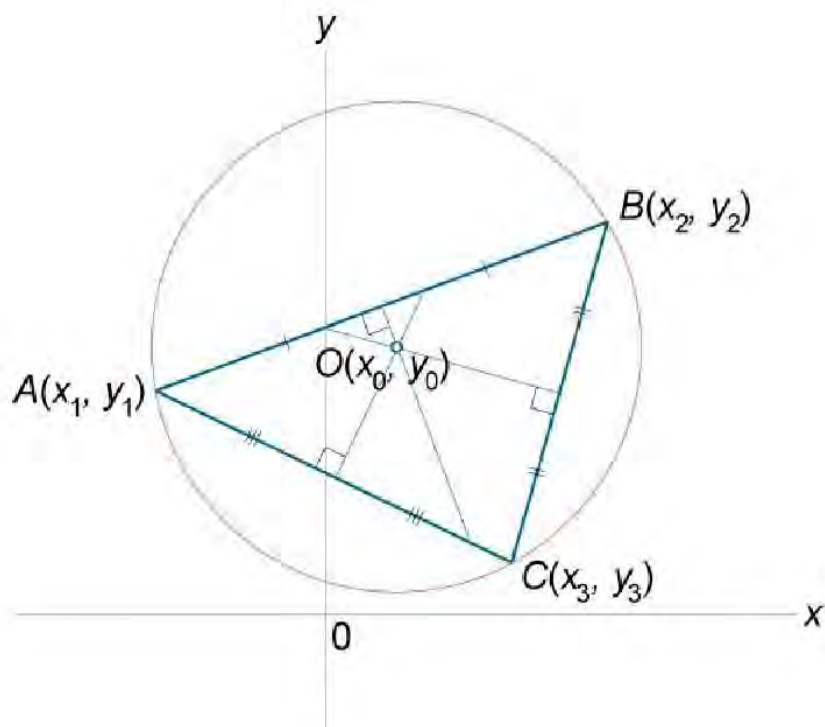


Figure 93. شکل ۹۳

مرکز تعامد (تقاطع ارتفاعهای) مثلث

616. Orthocenter (Intersection of Altitudes) of a Triangle

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_2x_3 + y_1^2 & 1 \\ y_2 & x_3x_1 + y_2^2 & 1 \\ y_3 & x_1x_2 + y_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 + y_2y_3 & x_1 & 1 \\ x_2^2 + y_3y_1 & x_2 & 1 \\ x_3^2 + y_1y_2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

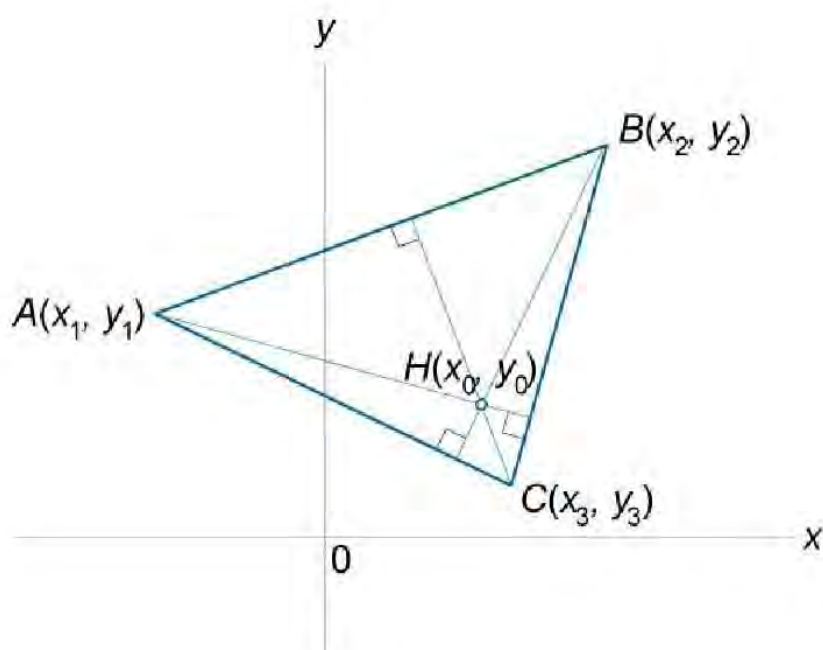


Figure 94. شکل ۹۴

617. Area of a Triangle مساحت مثلث

$$S = (\pm) \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (\pm) \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

618. Area of a Quadrilateral مساحت چهارضلعی

$$S = (\pm) \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_1)(y_4 + y_1)]$$

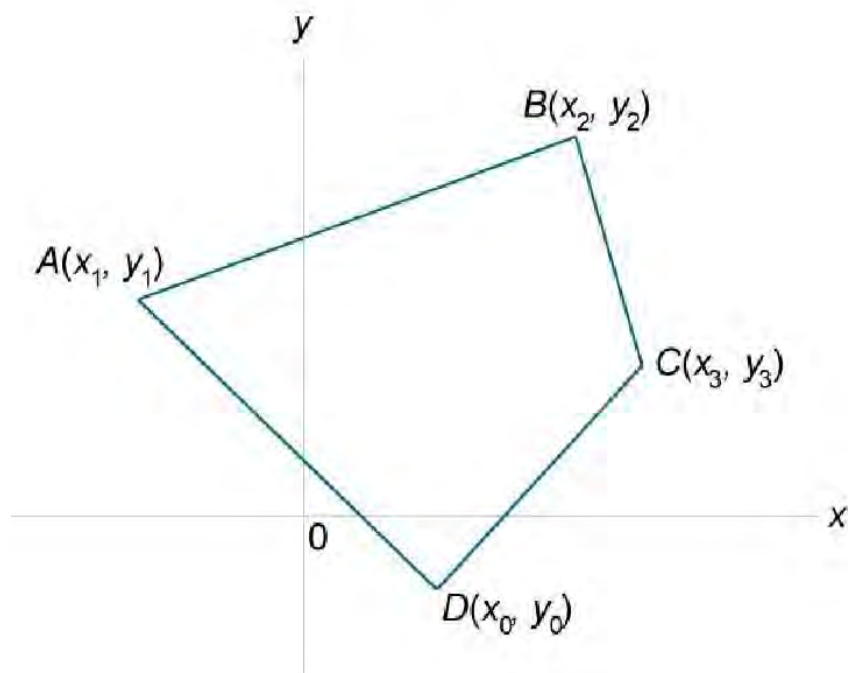


Figure 95. شکل ۹۵

Note: In formulas 617, 618 we choose the sign (+) or (-) so that to get a positive answer for area.

یادداشت: در روابط ۶۱۷ و ۶۱۸ علامتهای (+) یا (-) را انتخاب کرده ایم تا جواب مساحت مثبت باشد.

619. Distance Between Two Points in Polar Coordinates

$$d = AB = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

فاصله میان دو نقطه در مختصات قطبی

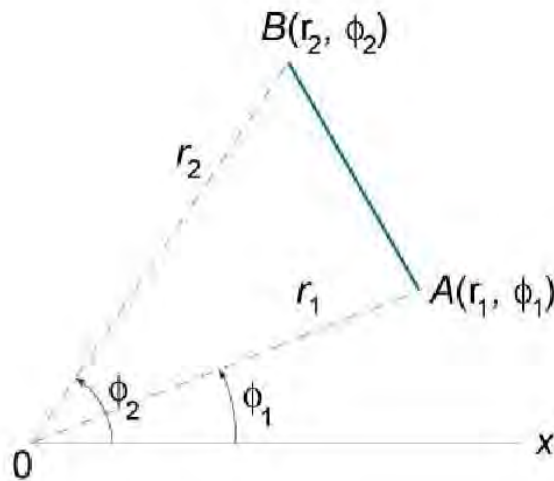


Figure 96. شکل ۹۶

- 620.** Converting Rectangular Coordinates to Polar Coordinates
 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. تبدیل مختصات کارتزین به مختصات قطبی

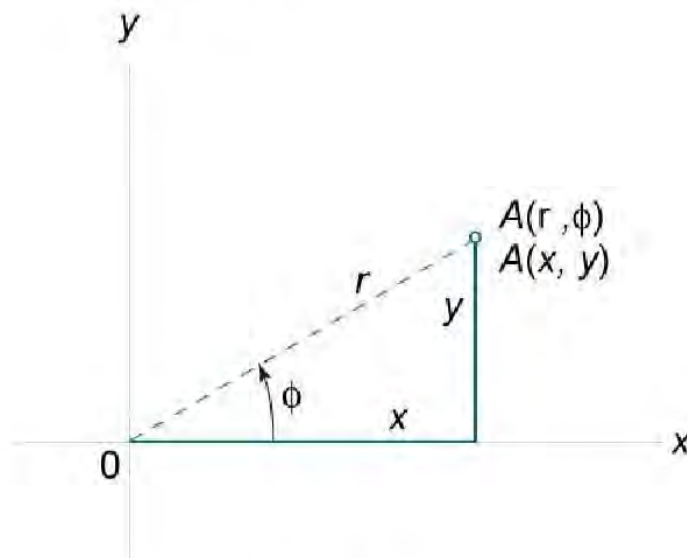


Figure 97. شکل ۹۷

- 621.** Converting Polar Coordinates to Rectangular Coordinates
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \varphi = \frac{y}{x}$. تبدیل مختصات قطبی به مختصات کارتزین

7.3 Straight Line in Plane خط مستقیم در صفحه

Point coordinates: $X, Y, x, x_0, x_1, y_0, y_1, a_1, a_2, \dots$ مختصات نقطه

Real numbers: $k, a, b, p, t, A, B, C, A_1, A_2, \dots$ اعداد حقیقی

Angles: α, β زوایا

Angle between two lines: φ زاویه میان دو خط

Normal vector: $\vec{n}$ بردار نرمال (عمود)

Position vectors: $\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}$ بردارهای مکان

622. General Equation of a Straight Line معادله کلی خط راست
 $Ax + By + C = 0$

623. Normal Vector to a Straight Line بردار عمود بر خط راست
 The vector $\vec{n}(A, B)$ is normal to the line $Ax + By + C = 0$.
 بردار $\vec{n}(A, B)$ عمود بر خط $Ax + By + C = 0$ است.

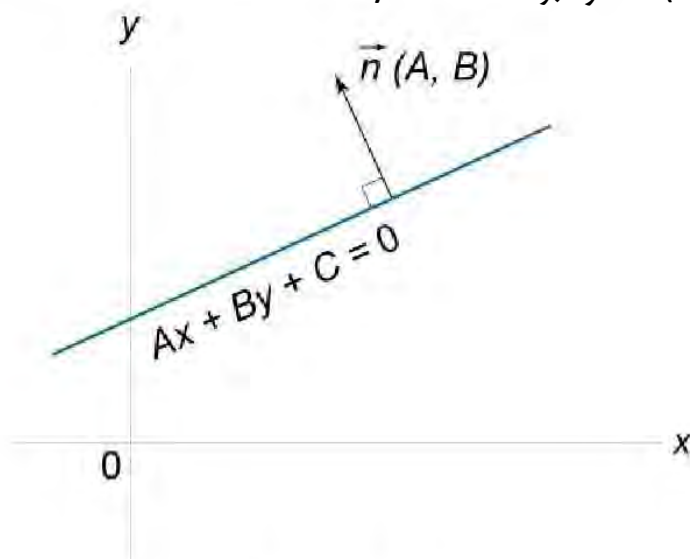


Figure 98. شکل ۹۸

624. Explicit Equation of a Straight Line (Slope-Intercept Form)
 $y = kx + b$. معادله صریح خط راست (شکل شیب-عرض از مبدا)

شیب خط برابر است با $k = \tan \alpha$. The gradient of the line is $k = \tan \alpha$.

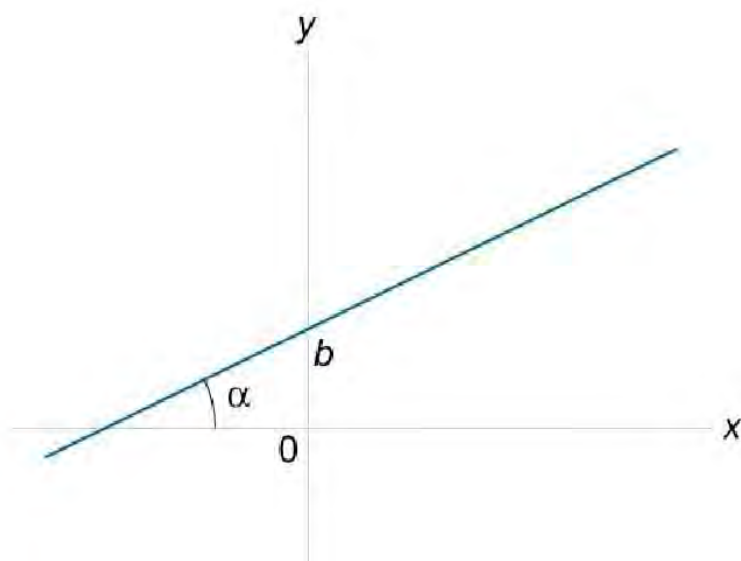


Figure 99. شکل ۹۹

625. Gradient of a Line شیب خط

$$k = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

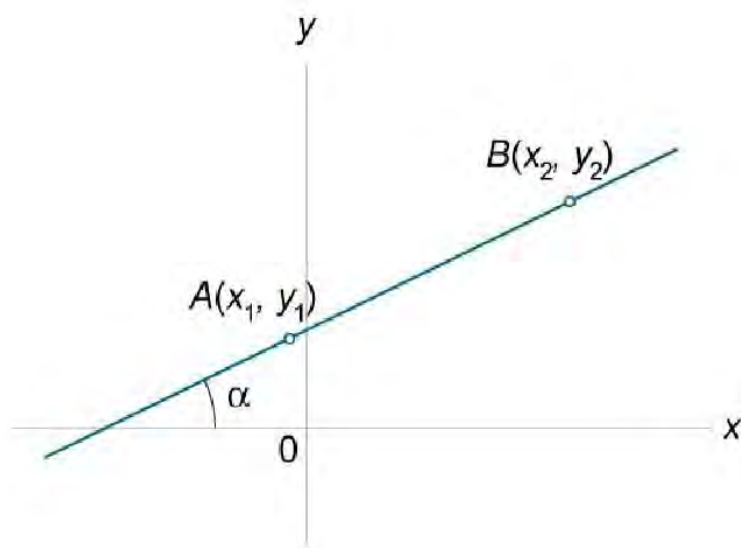


Figure 100. شکل ۱۰۰

معادله خط با یک نقطه و شیب مشخص

626. Equation of a Line Given a Point and the Gradient

$$y = y_0 + k(x - x_0),$$

where k is the gradient, $P(x_0, y_0)$ is a point on the line.

نقطه ای بر روی خط است. که در آن k شیب است.

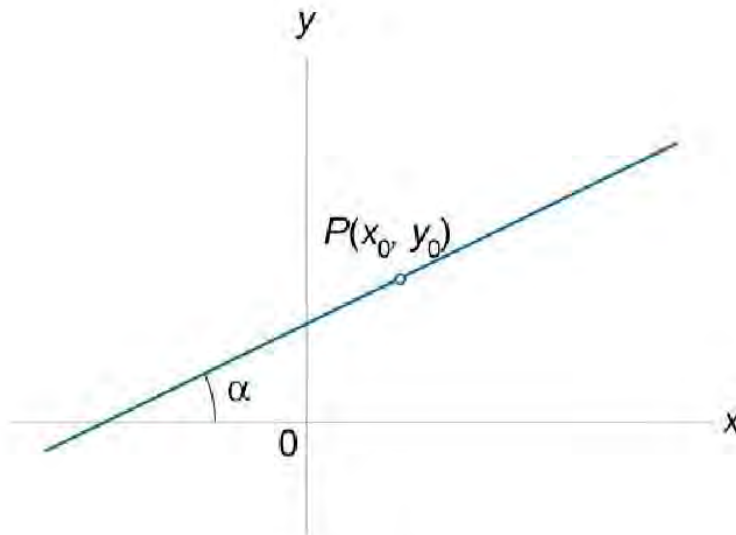


Figure 101. شکل ۱۰۱

627. Equation of a Line That Passes Through Two Points

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

معادله خطی که از دو نقطه می گذرد

یا or

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

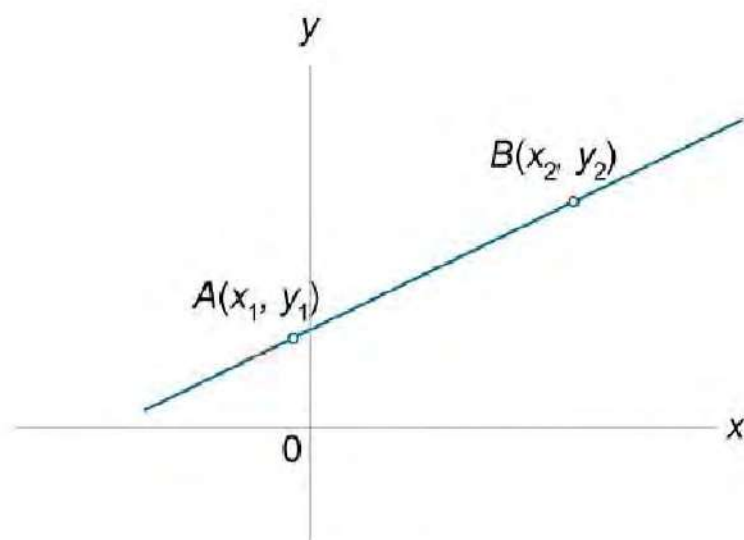


Figure 102. شکل ۱۰۲

628. Intercept Form شکل عرض و طول از مبدا

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

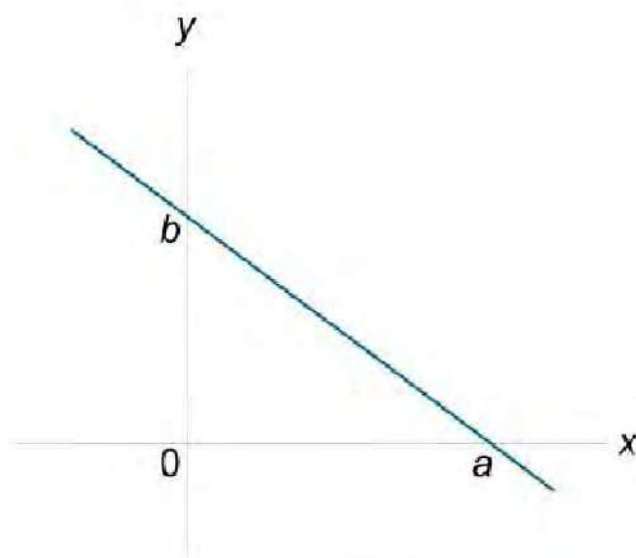


Figure 103. شکل ۱۰۳

- 629.** Normal Form شکل عمود بر خط

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0$$

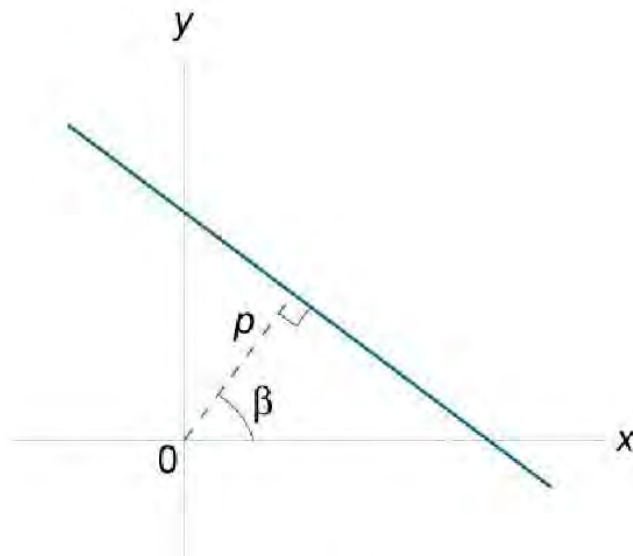


Figure 104. شکل ۱۰۲

- 630.** Point Direction Form شکل هادی نقطه

$$\frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y},$$

where (X, Y) is the direction of the line and $P_1(x_1, y_1)$ lies on the line.

که در آن (X, Y) هادی خط و $P_1(x_1, y_1)$ نقطه ای بر روی خط است.

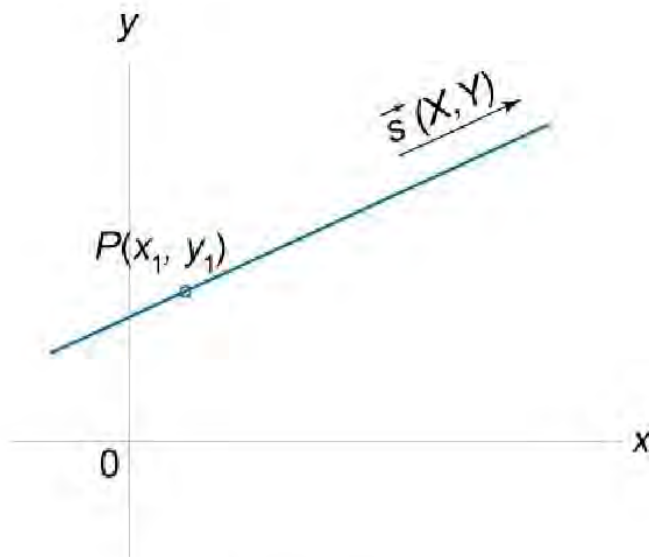


Figure 105. شکل ۱۰۲

631. Vertical Line خط عمودی
 $x = a$

632. Horizontal Line خط افقی
 $y = b$

633. Vector Equation of a Straight Line معادله برداری خط راست

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b},$$

where O مبدا مختصات است، که در آن

O is the origin of the coordinates,

X هر نقطه متغیر بر روی خط است،

X is any variable point on the line, a بردار مکان نقطه معین A بر روی خط است،

$\vec{a}$ is the position vector of a known point A on the line ,

$\vec{b}$ is a known vector of direction, parallel to the line,

t is a parameter,

b بردار معین جهت، موازی با خط است، t پارامتر است،

$\vec{r} = \vec{OX}$ is the position vector of any point X on the line.

$R=OX$ بردار مکان هر نقطه X بر روی خط است.

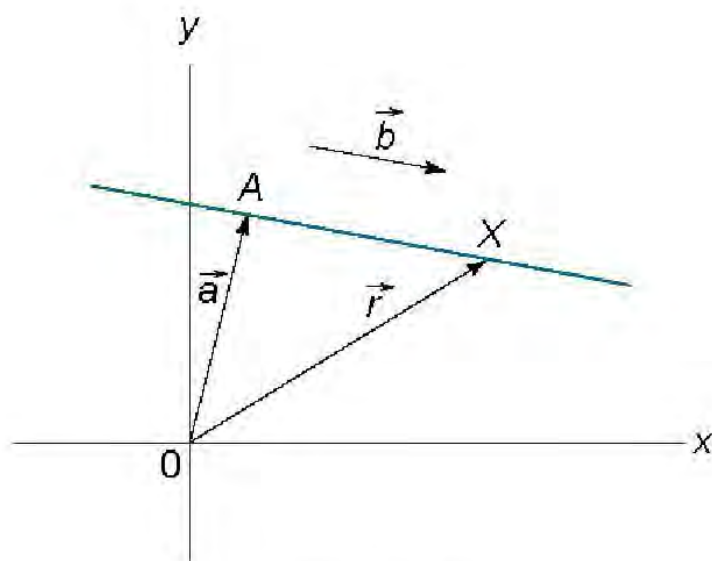


Figure 106. شکل ۱۰۶

634. Straight Line in Parametric Form خط راست به شکل پارامتری

$$\begin{cases} x = a_1 + tb_1 \\ y = a_2 + tb_2 \end{cases},$$

که در آن where

(x, y) are the coordinates of any unknown point on the line,

(a_1, a_2) are the coordinates of a known point on the line,

(b_1, b_2) are the coordinates of a vector parallel to the line,

t is a parameter.

(x, y) مختصات هر نقطه مجهول بر روی خط است،

(a_1, a_2) مختصات نقطه ای معین بر روی خط است،

(b_1, b_2) مختصات برداری موازی خط است، t پارامتر است.

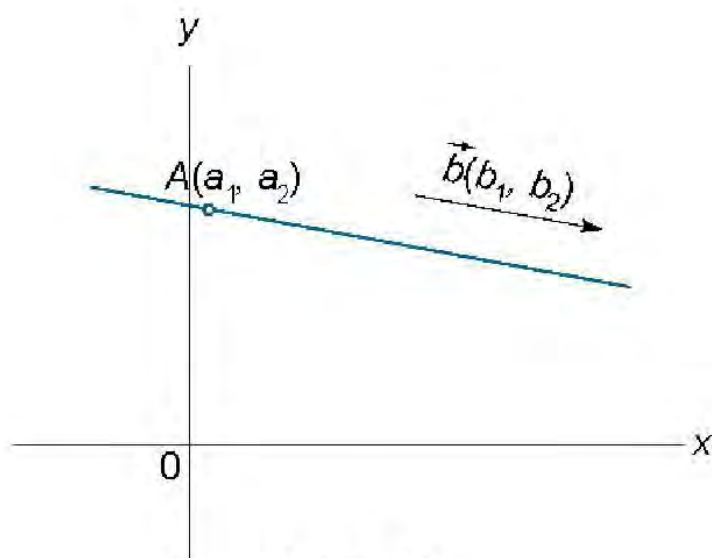


Figure 107. شکل ۱۰۷

- 635.** Distance From a Point To a Line فاصله از نقطه تا خط
 The distance from the point $P(a, b)$ to the line $Ax + By + C = 0$ is
 فاصله از نقطه $P(a, b)$ تا خط $Ax + By + C = 0$ برابر است با

$$d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

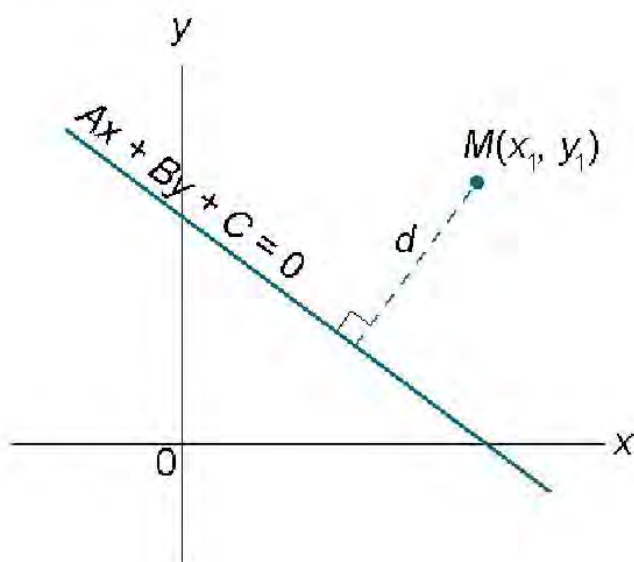


Figure 108. شکل ۱۰۸

خطوط موازی

636. Parallel Lines دو خط $y=k_1x+b_1$ و $y=k_2x+b_2$ موازی اند اگر $k_1=k_2$.

Two lines $y = k_1x + b_1$ and $y = k_2x + b_2$ are parallel if

$$k_1 = k_2.$$

دو خط Two lines $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ and $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ are parallel if موازی اند اگر

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

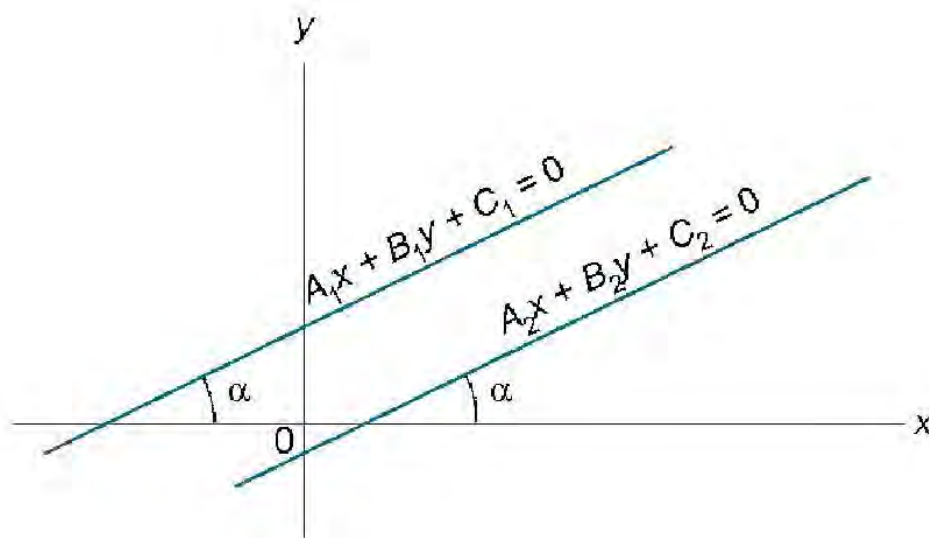


Figure 109. شکل ۱۰۹

خطوط متعامد

637. Perpendicular Lines دو خط $y=k_1x+b_1$ و $y=k_2x+b_2$ متعامد اند اگر

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \text{ or, equivalently, } k_1k_2 = -1. \quad \text{یا به طور معادل،}$$

دو خط Two lines $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ and $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ are perpendicular if متعامد اند اگر

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

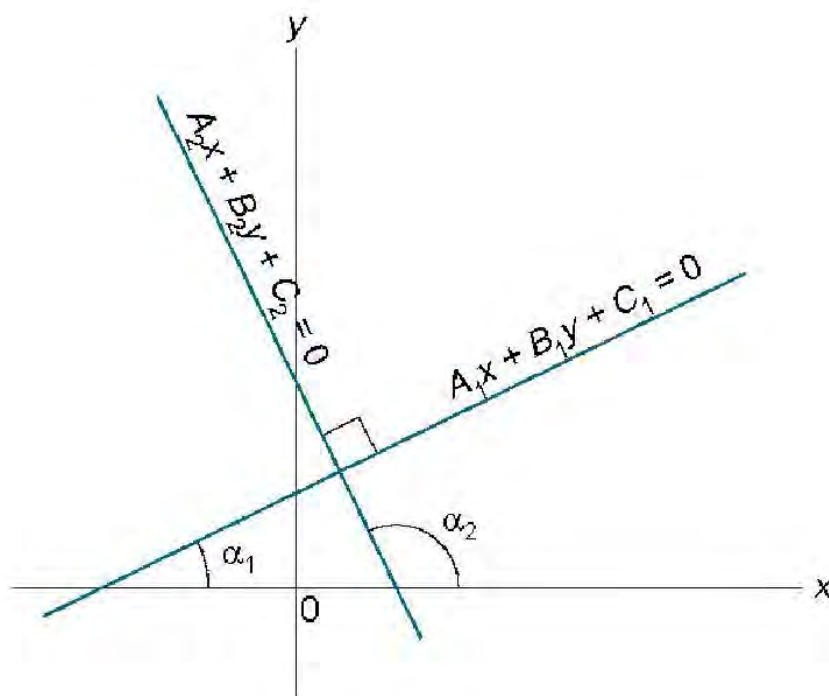


Figure 110. شکل ۱۱۰

638. Angle Between Two Lines زاویه میان دو خط

$$\tan \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

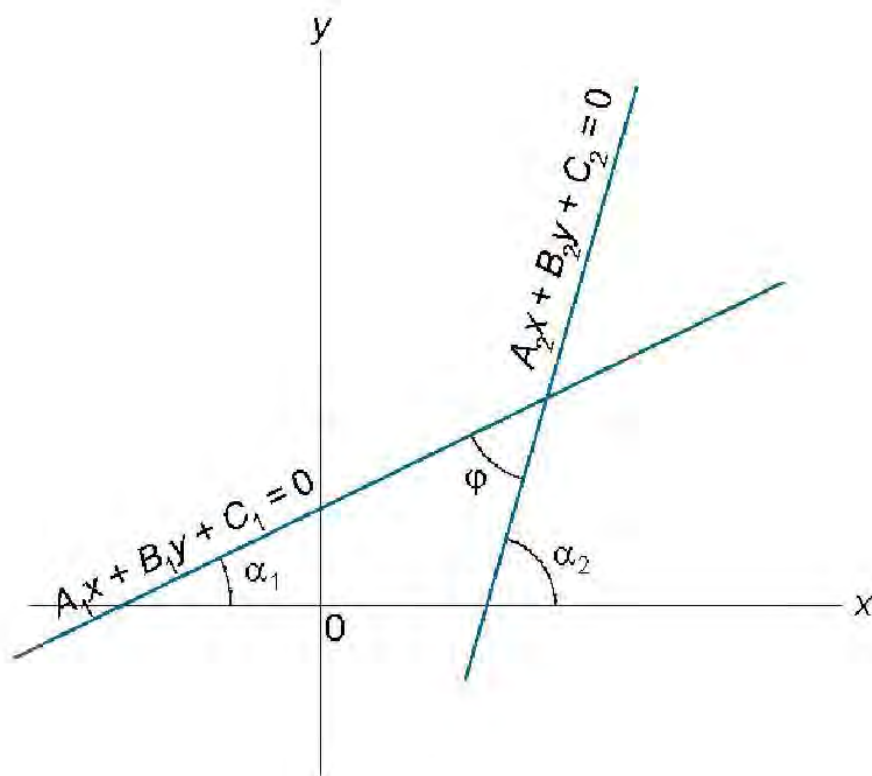


Figure 111. شکل ۱۱۱

639. Intersection of Two Lines تقاطع دو خط
 If two lines $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ and $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ intersect, the intersection point has coordinates متقاطع باشند، مختصات

$$x_0 = \frac{-C_1B_2 + C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, y_0 = \frac{-A_1C_2 + A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$
 نقطه تقاطع عبارت است از:

7.4 Circle دایره

Radius: R شعاع

Center of circle: (a, b) مرکز دایره

Point coordinates: $x, y, x_1, y_1, \dots$ مختصات نقطه

Real numbers: A, B, C, D, E, F, t اعداد حقیقی

640. Equation of a Circle Centered at the Origin (Standard Form)

$$x^2 + y^2 = R^2$$

معادله دایره به مرکز مبدا (شکل استاندارد)

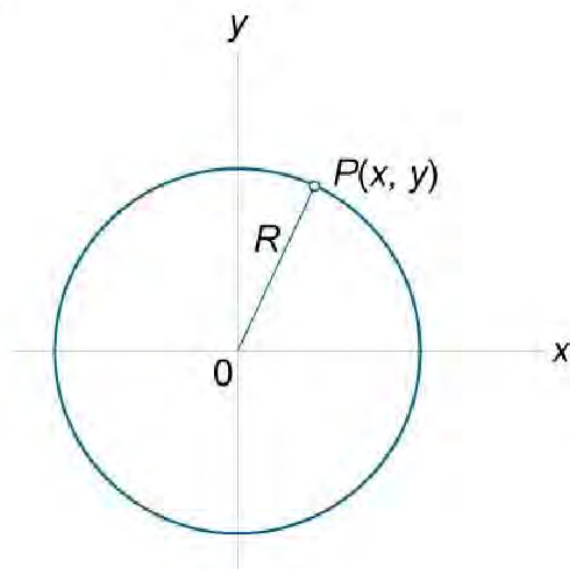


Figure 112. شکل ۱۱۲

641. Equation of a Circle Centered at Any Point (a, b)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

معادله دایره به مرکز هر نقطه (a, b)

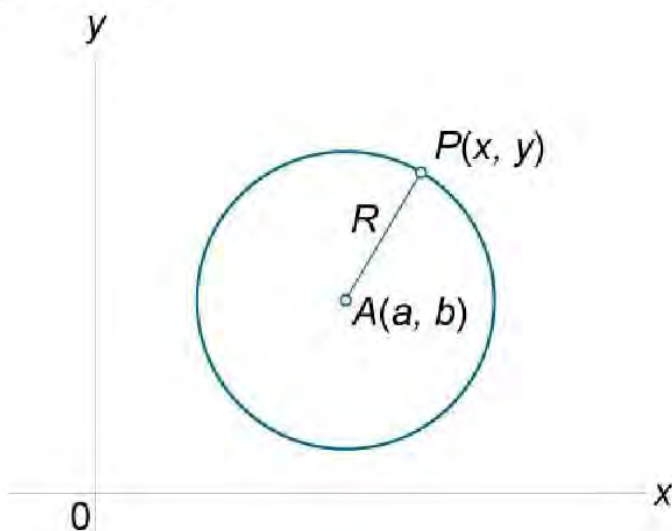


Figure 113. شکل ۱۱۳

642. Three Point Form شکل سه نقطه

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

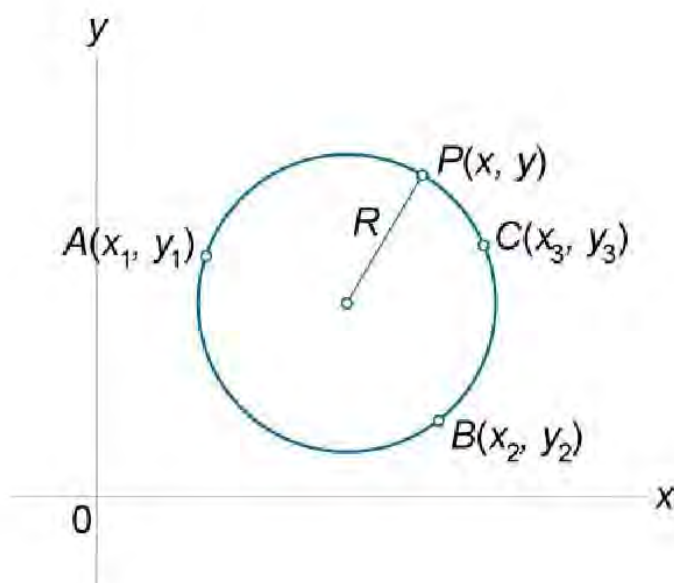


Figure 114. شکل ۱۱۴

643. Parametric Form شکل پارامتری

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

644. General Form شکل کلی

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (A \text{ nonzero, } D^2 + E^2 > 4AF).$$

The center of the circle has coordinates (a, b) , where

$$a = -\frac{D}{2A}, \quad b = -\frac{E}{2A}.$$

The radius of the circle is

شعاع دایره عبارت است از

$$R = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{2|A|}}.$$

7.5 Ellipse بیضی

Semimajor axis: a نیمه محور

Semiminor axis: b نیمه محور

Foci: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ کانونها

Distance between the foci: $2c$ فاصله میان کانونها

Eccentricity: e خروج از مرکزیت

Real numbers: A, B, C, D, E, F, t اعداد حقیقی

Perimeter: L محیط

Area: S مساحت

645. Equation of an Ellipse (Standard Form) معادله بیضی (شکل استاندارد)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

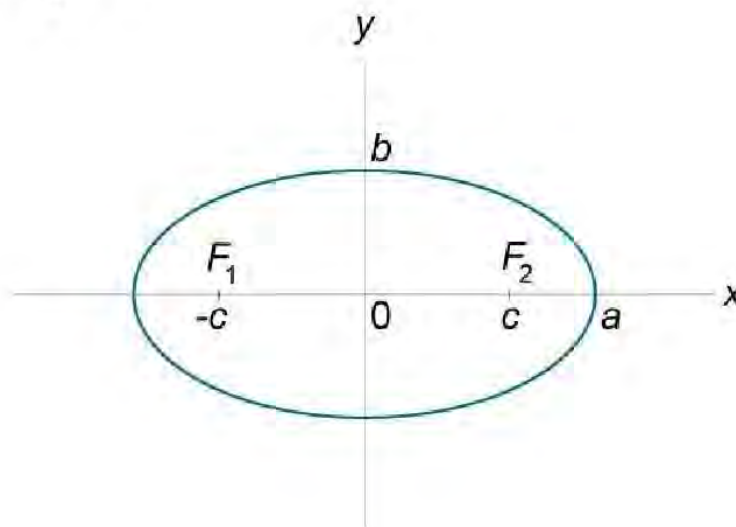


Figure 115. شکل ۱۱۵

646. $r_1 + r_2 = 2a$,

where r_1 , r_2 are distances from any point $P(x, y)$ on the ellipse to the two foci. که در آن r_1 و r_2 فواصل هر نقطه $P(x, y)$ بر روی بیضی تا دو نقطه کانونی می باشند.

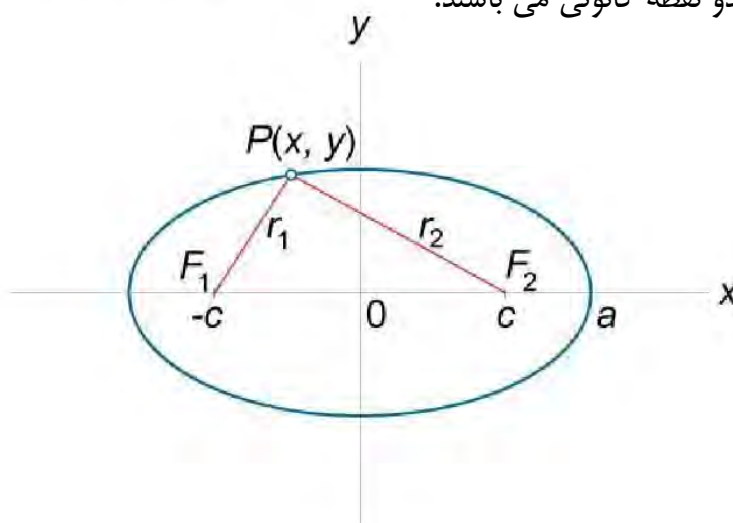


Figure 116. شکل ۱۱۶

647. $a^2 = b^2 + c^2$

648. Eccentricity خروج از مرکزیت

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

649. Equations of Directrices معادله هادیها

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$$

650. Parametric Form شکل پارامتری

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

651. General Form

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

که در آن where $B^2 - 4AC < 0$.

شکل عمومی با محورهای موازی با محورهای مختصات

652. General Form with Axes Parallel to the Coordinate Axes

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

که در آن where $AC > 0$.

653. Circumference محیط

$$L = 4aE(e),$$

که در آن تابع E انتگرال بیضوی کامل نوع دوم است.

where the function E is the complete elliptic integral of the second kind.

فرمولهای تقریبی برای محیط

654. Approximate Formulas of the Circumference

$$L = \pi (1.5(a + b) - \sqrt{ab}),$$

$$L = \pi \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

655. $S = \pi ab$

7.6 Hyperbola هذلولی

Transverse axis: a محور عرضی

Conjugate axis: b محور مزدوج

Foci: $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ کانونها

Distance between the foci: $2c$ فاصله میان کانونها

Eccentricity: e خروج از مرکزیت

Asymptotes: s, t خطوط مجانب

Real numbers: A, B, C, D, E, F, t, k اعداد حقیقی

معادله هذلولی (شکل استاندارد)

656. Equation of a Hyperbola (Standard Form)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

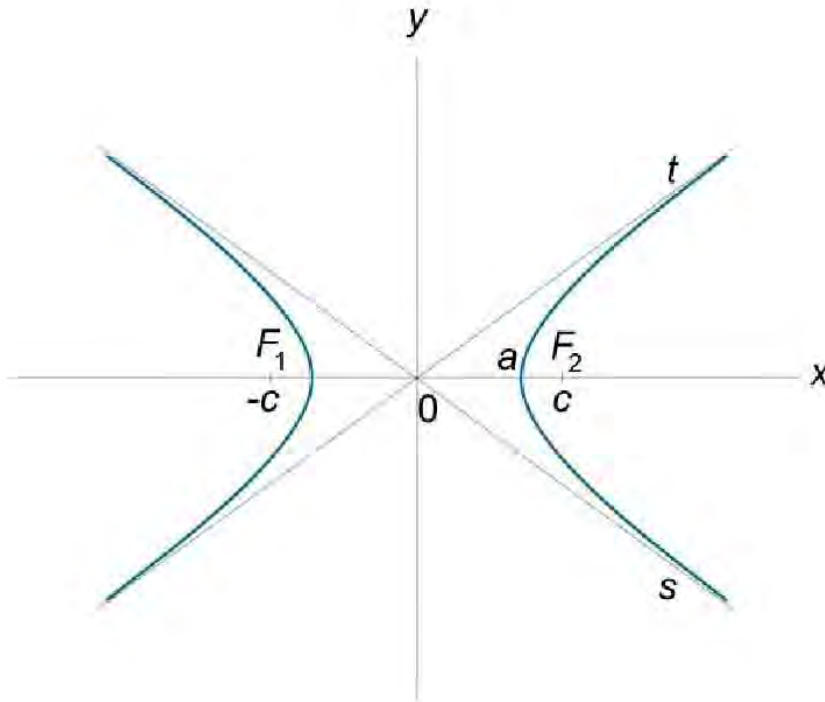


Figure 117. شکل ۱۱۷

657. $|r_1 - r_2| = 2a$,

where r_1 , r_2 are distances from any point $P(x,y)$ on the hyperbola to the two foci.

که در آن r_1 ، r_2 فواصل هر نقطه $P(x,y)$ بر روی هذلولی تا دو نقطه کانونی است.

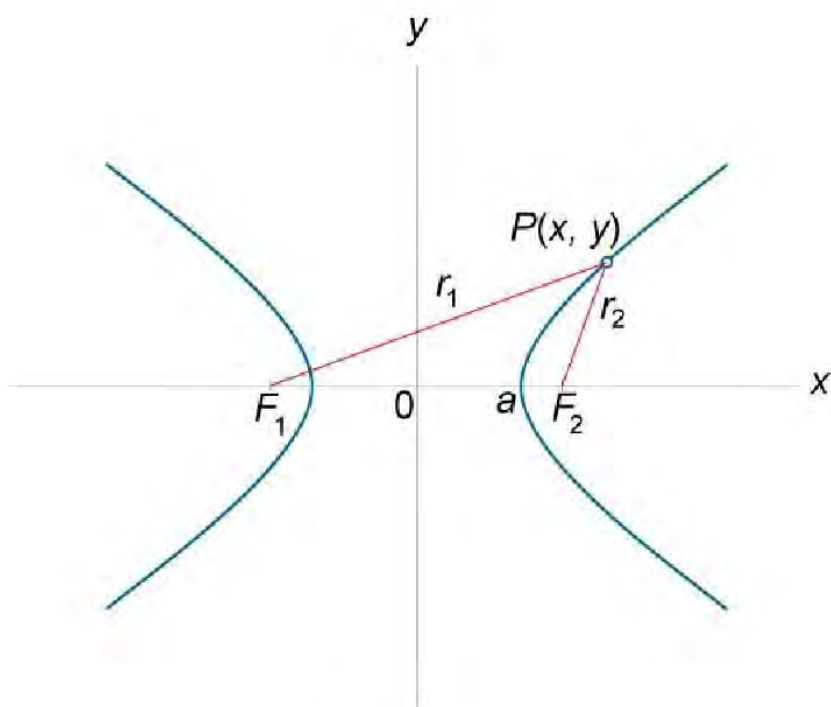


Figure 118. شکل ۱۱۸

658. Equations of Asymptotes معادله های خطوط مجانب

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

659. $c^2 = a^2 + b^2$

660. Eccentricity خروج از مرکزیت

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

661. Equations of Directrices معادله های خطوط هادی

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$$

معادله های پارامتری شاخه راست هذلولی

662. Parametric Equations of the Right Branch of a Hyperbola

$$\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

663. General Form شکل کلی

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

که در آن where $B^2 - 4AC > 0$.

شکل کلی با محورهای موازی محورهای مختصات

664. General Form with Axes Parallel to the Coordinate Axes

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

که در آن where $AC < 0$.

665. Asymptotic Form شکل با خطوط مجانب

$$xy = \frac{e^2}{4},$$

یا or

$$y = \frac{k}{x}, \text{ where } k = \frac{e^2}{4}.$$

In this case, the asymptotes have equations $x=0$ and

$$y=0.$$

در این حالت، معادلات خطوط مجانب عبارتند از: $x=0$ و $y=0$.

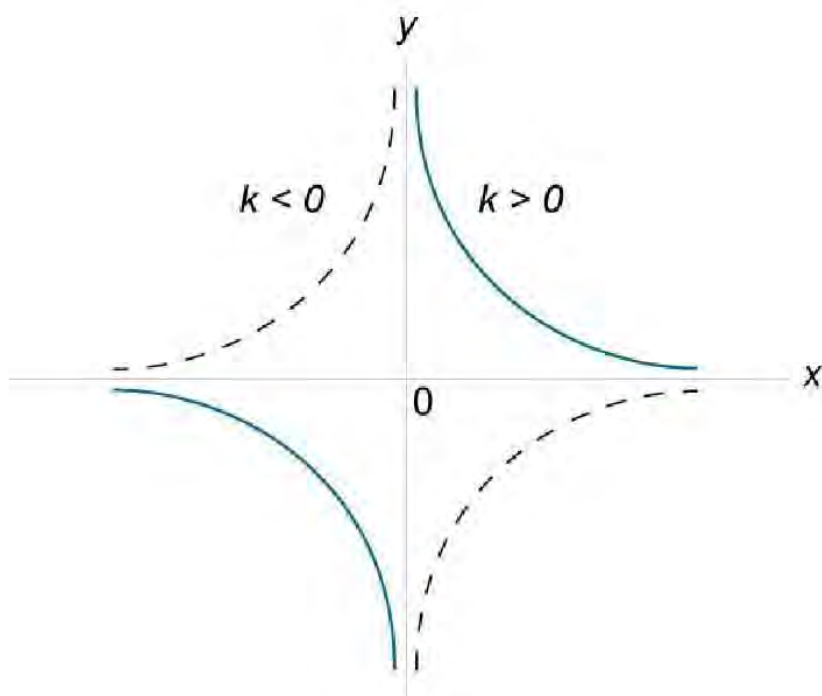


Figure 119. شکل ۱۱۹

7.7 Parabola سهمی

Focal parameter: p پارامتر کانونی

Focus: F کانون

Vertex: $M(x_0, y_0)$ نقطه راس

Real numbers: $A, B, C, D, E, F, p, a, b, c$ اعداد حقیقی

- 666.** Equation of a Parabola (Standard Form) (معادله سهمی (شکل استاندارد))
 $y^2 = 2px$

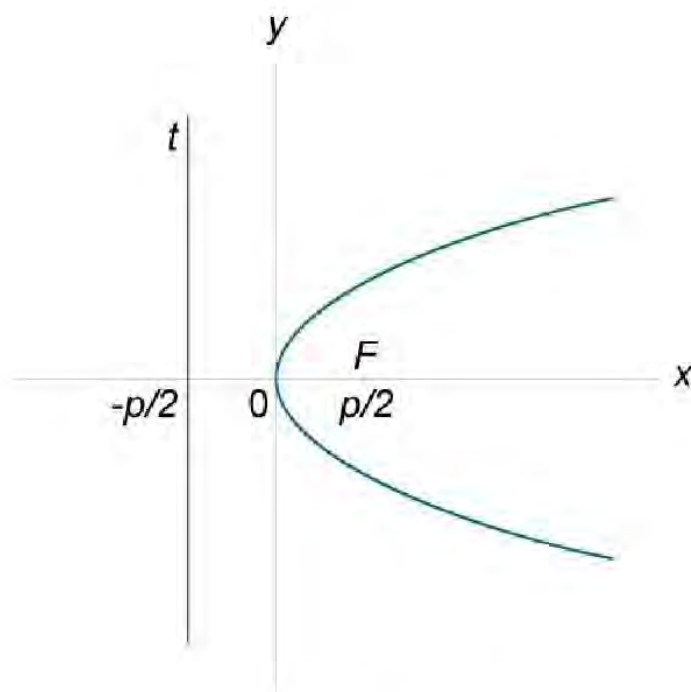


Figure 120. شکل ۱۲۰

معادله خط هادی Equation of the directrix

$$x = -\frac{p}{2},$$

مختصات کانون Coordinates of the focus

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right),$$

مختصات نقطه راس Coordinates of the vertex

$$M(0, 0).$$

667. General Form شکل کلی

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

که در آن where $B^2 - 4AC = 0$.

668. $y = ax^2, p = \frac{1}{2a}.$

معادله خط هادی Equation of the directrix

$$y = -\frac{p}{2},$$

Coordinates of the focus مختصات کانون

$$F\left(0, \frac{p}{2}\right),$$

Coordinates of the vertex مختصات نقطه راس

$$M(0, 0).$$

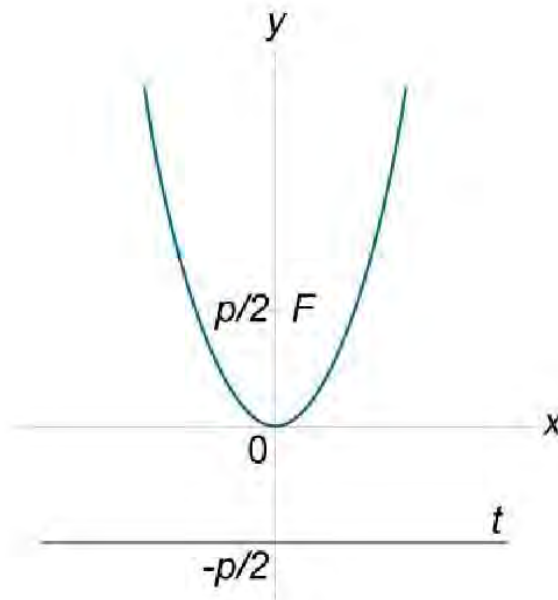


Figure 121. شکل ۱۲۱

669. General Form, Axis Parallel to the y-axis شکل کلی، محور موازی محور y

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (A, E \text{ nonzero}), \quad (A, E \text{ غیر صفر})$$

$$y = ax^2 + bx + c, \quad p = \frac{1}{2a}.$$

Equation of the directrix معادله خط هادی

$$y = y_0 - \frac{p}{2},$$

Coordinates of the focus مختصات کانون

$$F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right),$$

مختصات نقطه راس Coordinates of the vertex

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

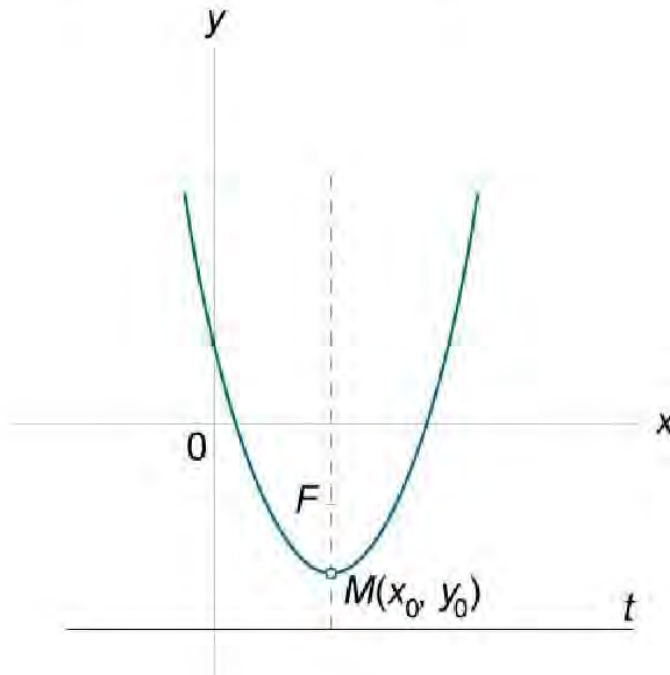


Figure 122. شکل ۱۲۲

دستگاه مختصات سه بعدی

7.8 Three-Dimensional Coordinate System

مختصات نقطه Point coordinates: $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, \dots$

عدد حقیقی Real number: λ

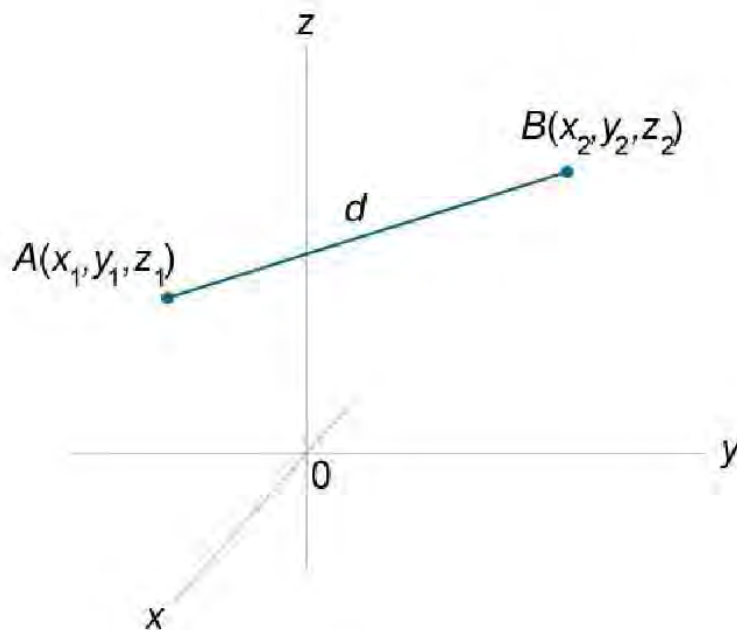
فاصله میان دو نقطه Distance between two points: d

مساحت Area: S

حجم Volume: V

670. Distance Between Two Points فاصله میان دو نقطه

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



شکل ۱۲۳ Figure 123.

671. Dividing a Line Segment in the Ratio λ تقسیم یک پاره خط به نسبت λ اندا

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

که در آن where

$$\lambda = \frac{AC}{CB}, \lambda \neq -1.$$

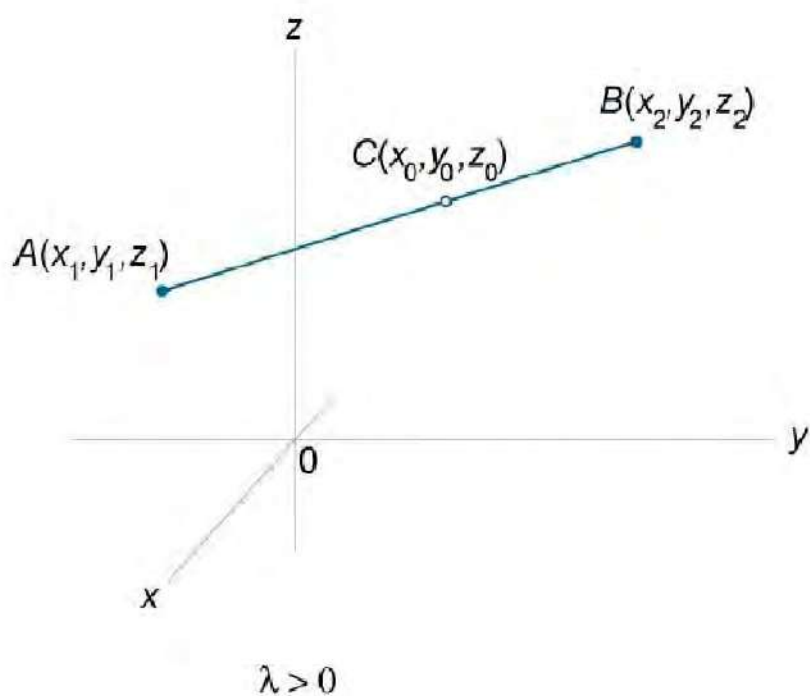


Figure 124. شکل ۱۲۴

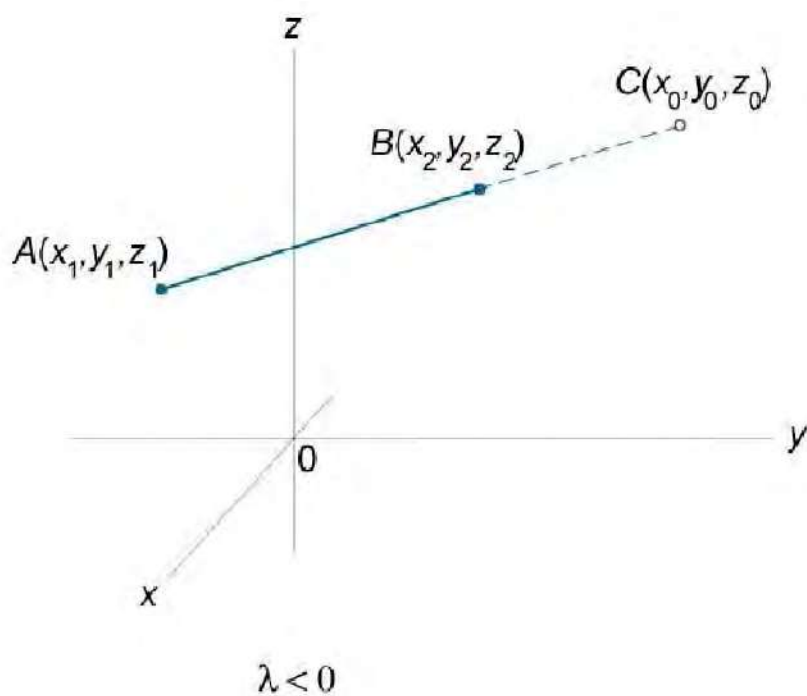


Figure 125. شکل ۱۲۵

672. Midpoint of a Line Segment نقطه میانی یک پاره خط

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}, \lambda = 1.$$

673. Area of a Triangle مساحت مثلث

The area of a triangle with vertices $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, and $P_3(x_3, y_3, z_3)$ is given by مساحت مثلث با رئوس $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, and $P_3(x_3, y_3, z_3)$ می آید با رابطه زیر به دست

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}.$$

حجم چهاروجهی

674. Volume of a Tetrahedron

حجم چهاروجهی با رئوس

The volume of a tetrahedron with vertices $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, and $P_4(x_4, y_4, z_4)$ is given by

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

با رابطه زیر به دست می آید

یا or

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}.$$

Note: We choose the sign (+) or (-) so that to get a positive answer for volume.

یادداشت: علامت مثبت یا منفی را انتخاب می

کنیم تا جواب مثبت برای حجم به دست آید.

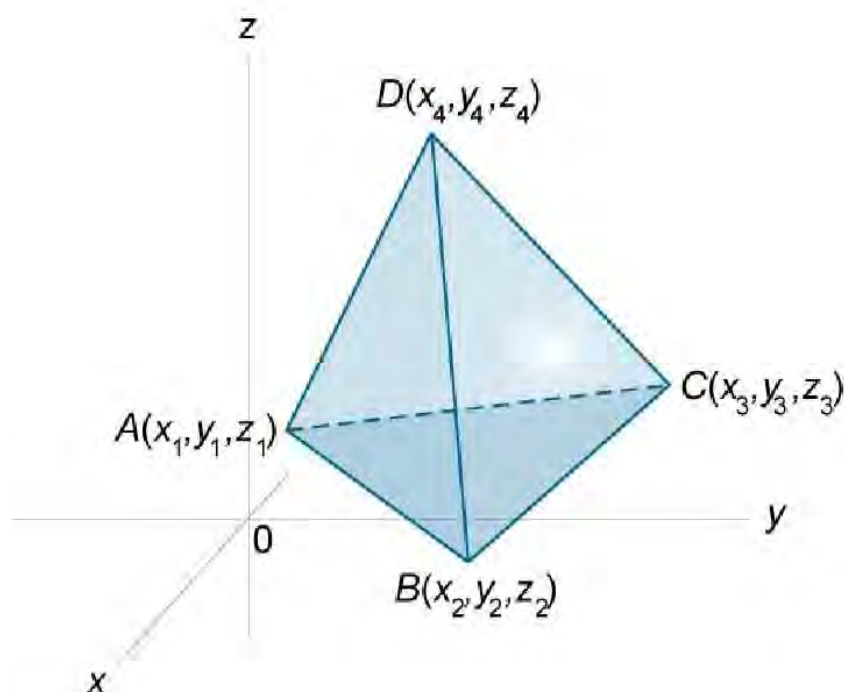


Figure 126. شکل ۱۲۶

7.9 Plane صفحه

Point coordinates: $x, y, z, x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, \dots$ مختصات نقطه

Real numbers: $A, B, C, D, A_1, A_2, a, b, c, a_1, a_2, \lambda, p, t, \dots$ اعداد حقیقی

Normal vectors: $\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$ بردارهای عمود (نرمال)

Direction cosines: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ کسینوسهای هادی

Distance from point to plane: d فاصله از نقطه تا صفحه

- 675.** General Equation of a Plane معادله کلی صفحه
 $Ax + By + Cz + D = 0$

- 676.** Normal Vector to a Plane بردار نرمال (عمود) بر صفحه
 The vector $\vec{n}(A, B, C)$ is normal to the plane
 $Ax + By + Cz + D = 0$. بردار $n(A, B, C)$ نرمال (عمود) بر صفحه است.

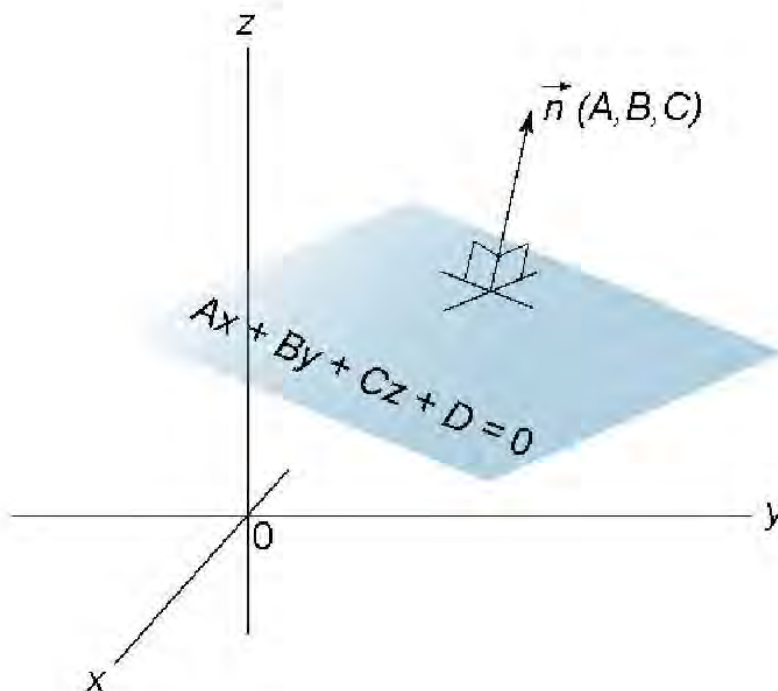


Figure 127. شکل ۱۲۷

- 677.** Particular Cases of the Equation of a Plane حالت‌های خاص معادله صفحه
 $Ax + By + Cz + D = 0$

If $A = 0$, the plane is parallel to the x -axis. اگر $A=0$ ، صفحه موازی محور x است.
 If $B = 0$, the plane is parallel to the y -axis. اگر $B=0$ ، صفحه موازی محور y است.
 If $C = 0$, the plane is parallel to the z -axis. اگر $C=0$ ، صفحه موازی محور z است.
 If $D = 0$, the plane lies on the origin. اگر $D=0$ ، صفحه از مبدا می‌گذرد.

If $A = B = 0$, the plane is parallel to the xy -plane.
 If $B = C = 0$, the plane is parallel to the yz -plane.
 If $A = C = 0$, the plane is parallel to the xz -plane.
 اگر $A=B=0$ ، صفحه موازی صفحه xy است.
 اگر $B=C=0$ ، صفحه موازی صفحه yz است.
 اگر $A=C=0$ ، صفحه موازی صفحه xz است.

678. Point Direction Form شکل نقطه راستا

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

where the point $P(x_0, y_0, z_0)$ lies in the plane, and the vector (A, B, C) is normal to the plane.

که در آن نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ بر روی صفحه واقع است، و بردار (A, B, C) عمود (نرمال) بر صفحه است.

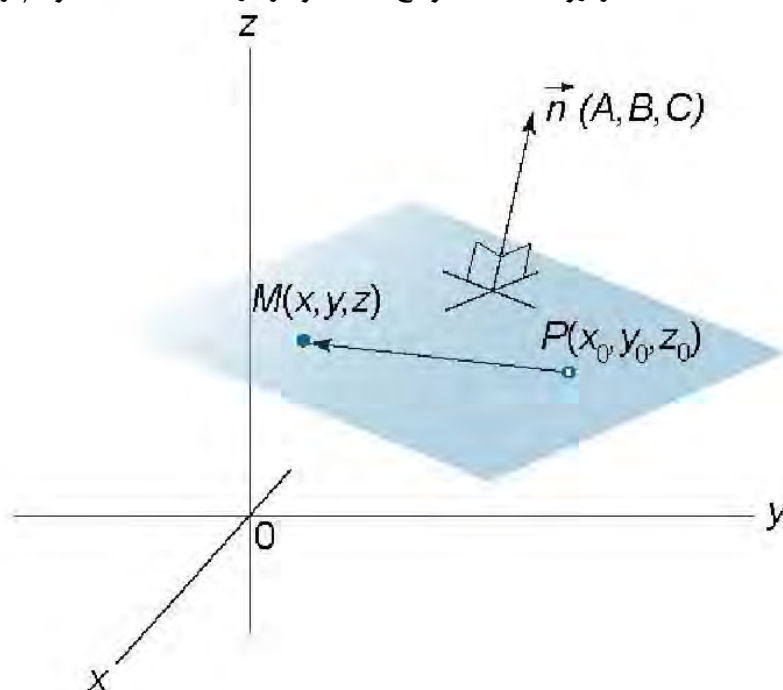


Figure 128. شکل ۱۲۸

679. Intercept Form شکل طول، عرض و ارتفاع از مبدا

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

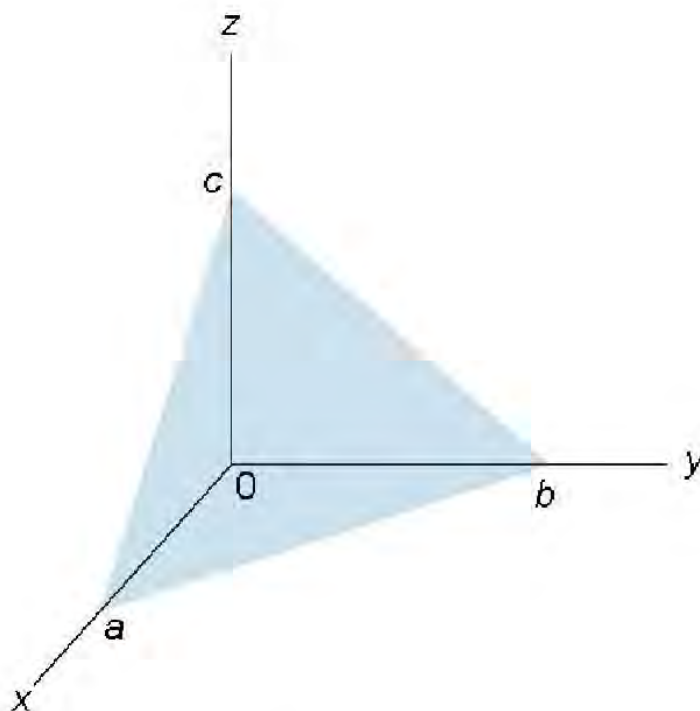


Figure 129. شکل ۱۲۹

680. Three Point Form شکل سه نقطه

$$\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

or

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

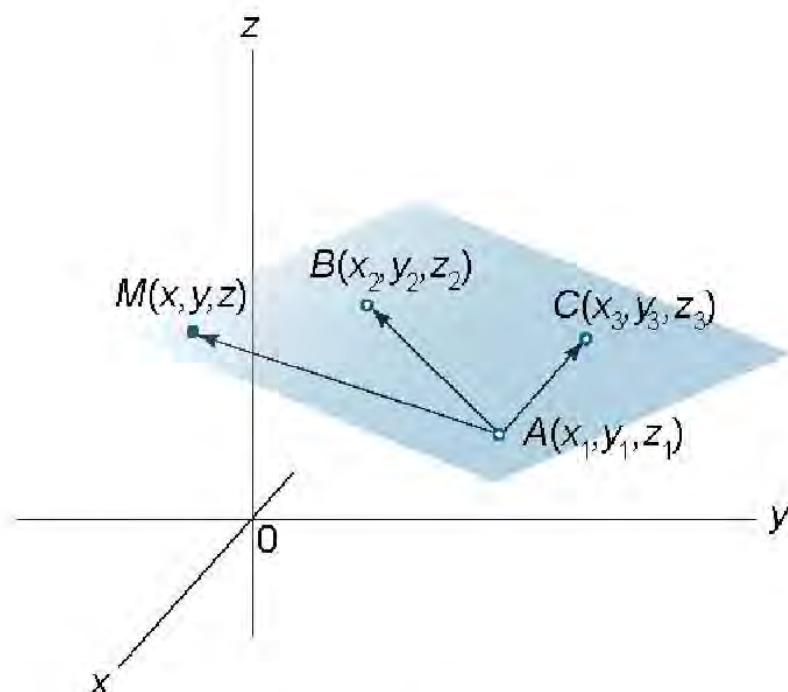


Figure 130. شکل ۱۳۰

681. Normal Form (شکل نرمال (عمود)

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

where p is the perpendicular distance from the origin to the plane, and $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ are the direction cosines of any line normal to the plane.

که در آن p فاصله عمود از مبدا مختصات تا صفحه بوده، و کسینوسهای آلفا، بتا و گاما، کسینوسهای هادی هر خط عمود (نرمال) بر صفحه است.

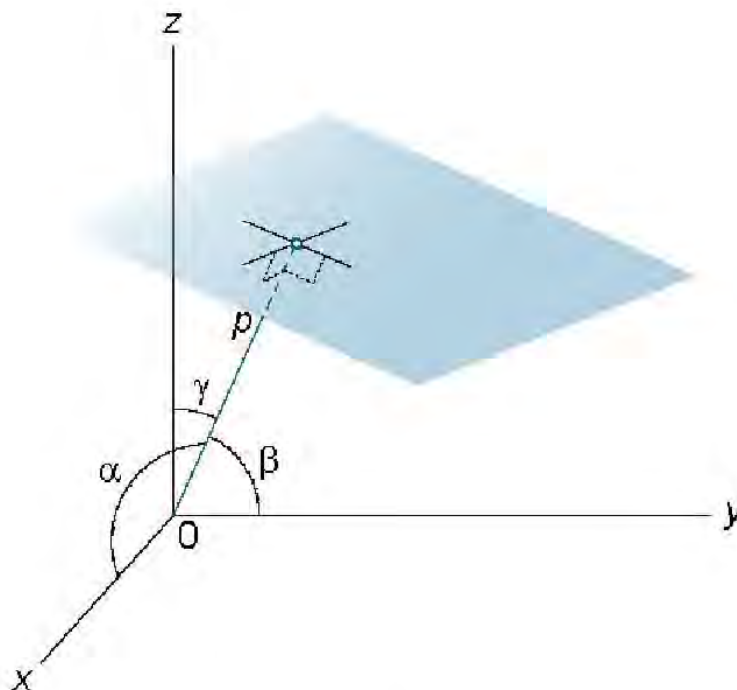


Figure 131. شکل ۱۳۱

682. Parametric Form شکل پارامتری

$$\begin{cases} x = x_1 + a_1s + a_2t \\ y = y_1 + b_1s + b_2t, \\ z = z_1 + c_1s + c_2t \end{cases}$$

where (x, y, z) are the coordinates of any unknown point on the line, the point $P(x_1, y_1, z_1)$ lies in the plane, the vectors (a_1, b_1, c_1) and (a_2, b_2, c_2) are parallel to the plane.

که در آن (x, y, z) مختصات هر نقطه نامعلوم بر روی صفحه است، نقطه $P(x_1, y_1, z_1)$ بر روی صفحه واقع است و بردارهای (a_1, b_1, c_1) و (a_2, b_2, c_2) موازی با صفحه اند.

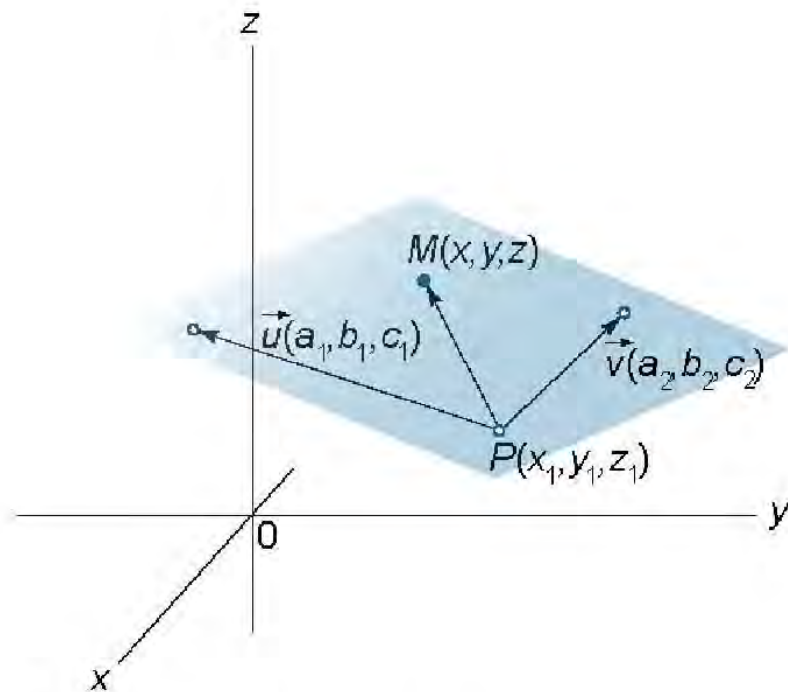


Figure 132. شکل ۱۳۲

683. Dihedral Angle Between Two Planes زاویه دووجهی میان دو صفحه

If the planes are given by اگر معادلات صفحات به صورت زیر باشد

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

آنگاه زاویه دووجهی میان آنها عبارت است از: then the dihedral angle between them is

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

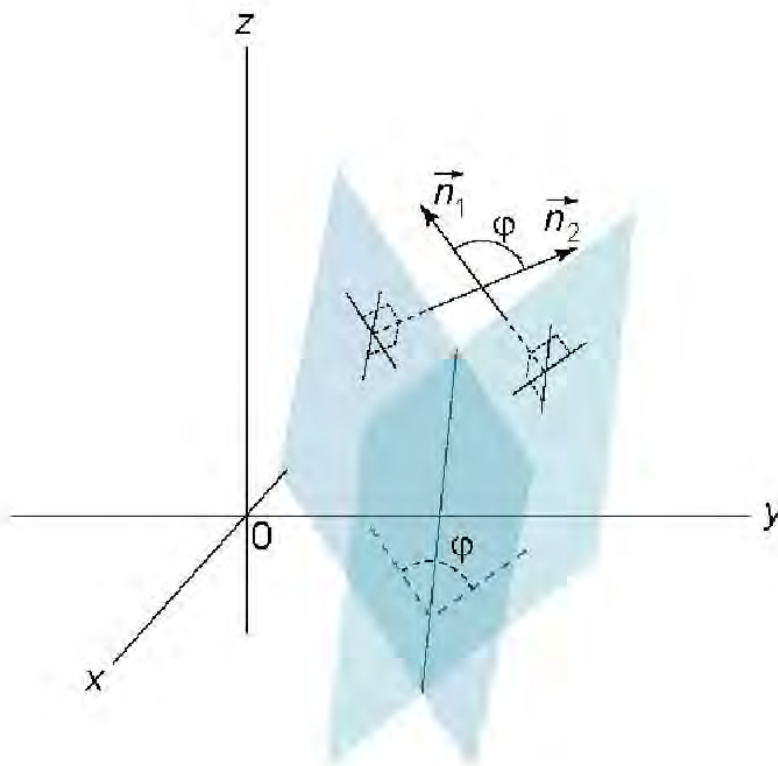


Figure 133. شکل ۱۳۳

684. Parallel Planes صفحات موازی

Two planes $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ and $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ are parallel if موازی اند اگر

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

685. Perpendicular Planes صفحات متعامد

Two planes $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ and $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ are perpendicular if متعامد اند اگر

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

686. Equation of a Plane Through $P(x_1, y_1, z_1)$ and Parallel To the Vectors (a_1, b_1, c_1) and (a_2, b_2, c_2) (Fig.132)

معادله صفحه گذرنده از $P(x_1, y_1, z_1)$ و موازی با بردارهای (a_1, b_1, c_1) و (a_2, b_2, c_2) (شکل ۱۳۲)

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

معادله صفحه گذرنده از نقاط

- 687.** Equation of a Plane Through $P_1(x_1, y_1, z_1)$ and $P_2(x_2, y_2, z_2)$, and Parallel To the Vector (a, b, c) و موازی با بردار

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

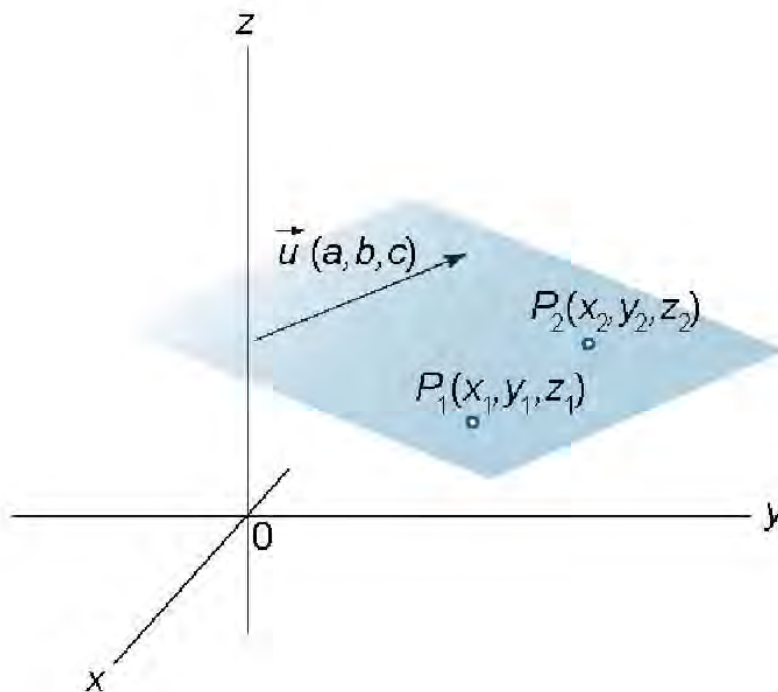


Figure 134. شکل ۱۳۴

- 688.** Distance From a Point To a Plane فاصله از نقطه تا صفحه
The distance from the point $P_1(x_1, y_1, z_1)$ to the plane $Ax + By + Cz + D = 0$ is

فاصله از نقطه $P_1(x_1, y_1, z_1)$ تا صفحه $Ax + By + Cz + D = 0$ برابر است با

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

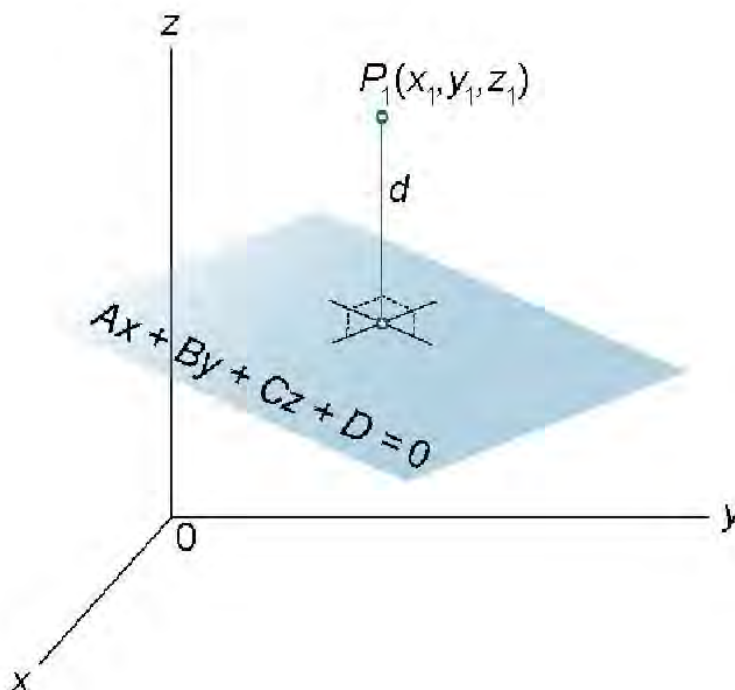


Figure 135. شکل ۱۳۵

689. تقاطع دو صفحه Intersection of Two Planes
 اگر دو صفحه If two planes $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ and $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ intersect, the intersection straight line is given by متقاطع باشند، خط راست تقاطع آنها با رابطه زیر به دست می آید

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt, \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

یا or

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c},$$

که در آن where

$$a = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

$$x_1 = \frac{b \begin{vmatrix} D_1 & C_1 \\ D_2 & C_2 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$y_1 = \frac{c \begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} D_1 & C_1 \\ D_2 & C_2 \end{vmatrix}}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$z_1 = \frac{a \begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

7.10 Straight Line in Space خط راست در فضا

Point coordinates: $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$ مختصات نقطه
 Direction cosines: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ کسینوسهای هادی
 Real numbers: $A, B, C, D, a, b, c, a_1, a_2, t, \dots$ اعداد حقیقی
 Direction vectors of a line: $\vec{s}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ بردارهای راستای خط
 Normal vector to a plane: $\vec{n}$ بردار نرمال (عمود) بر صفحه
 Angle between two lines: φ زاویه میان دو خط

690. Point Direction Form of the Equation of a Line شکل نقطه راستای معادله خط

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c},$$

where the point $P_1(x_1, y_1, z_1)$ lies on the line, and (a, b, c) is the direction vector of the line.

که در آن نقطه $P_1(x_1, y_1, z_1)$ بر روی خط قرار دارد، و (a, b, c) بردار راستای خط است.

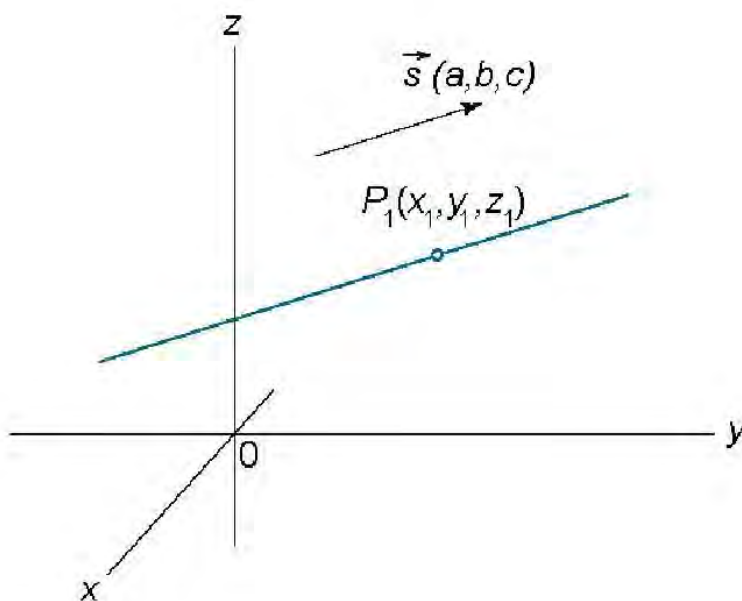


Figure 136. شکل ۱۳۶

691. Two Point Form شکل دو نقطه

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

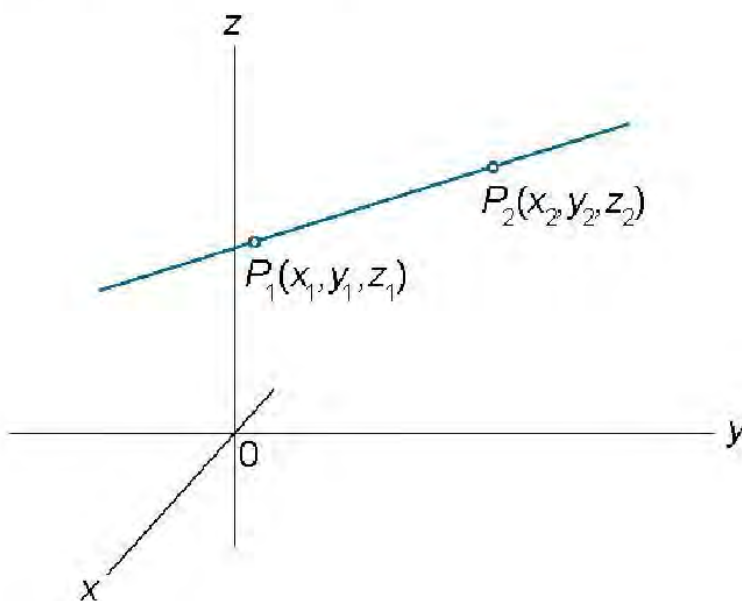


Figure 137. شکل ۱۳۷

692. Parametric Form شکل پارامتری

که در آن نقطه $P_1(x_1, y_1, z_1)$ بر روی خط راست واقع است،
 $\begin{cases} x = x_1 + t \cos \alpha \\ y = y_1 + t \cos \beta \\ z = z_1 + t \cos \gamma \end{cases}$ ، گاما کسینوسهای هادی بردار راستای خط اند،
 پارامتر t هر عدد حقیقی است.

where the point $P_1(x_1, y_1, z_1)$ lies on the straight line,
 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ are the direction cosines of the direction
 vector of the line, the parameter t is any real number.

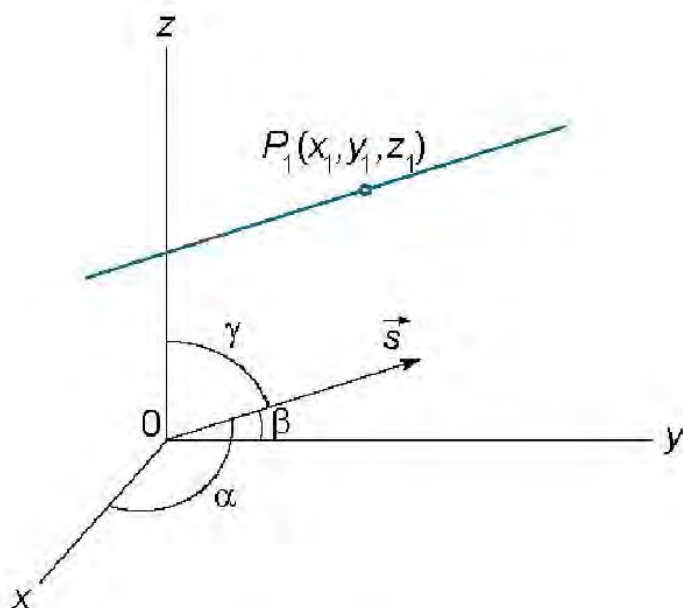


Figure 138. شکل ۱۳۸

693. Angle Between Two Straight Lines زاویه میان دو خط راست

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

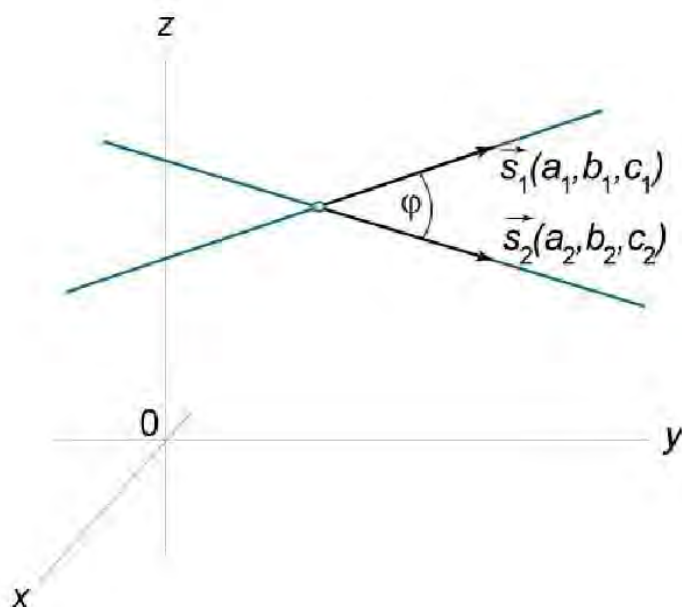


Figure 139. شکل ۱۳۹

694. Parallel Lines خطوط موازی
Two lines are parallel if دو خط موازی اند اگر $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$,

or یا

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

695. Perpendicular Lines خطوط متعامد
Two lines are perpendicular if دو خط متعامد اند اگر $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$,

or یا

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

696. Intersection of Two Lines تقاطع دو خط

Two lines $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ and دو خط و

مقاطع اند اگر $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$ intersect if

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

697. Parallel Line and Plane خط و صفحه موازی

خط راست The straight line $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ and the plane صفحه

$Ax + By + Cz + D = 0$ are parallel if موازی اند اگر

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = 0,$$

یا or

$$Aa + Bb + Cc = 0.$$

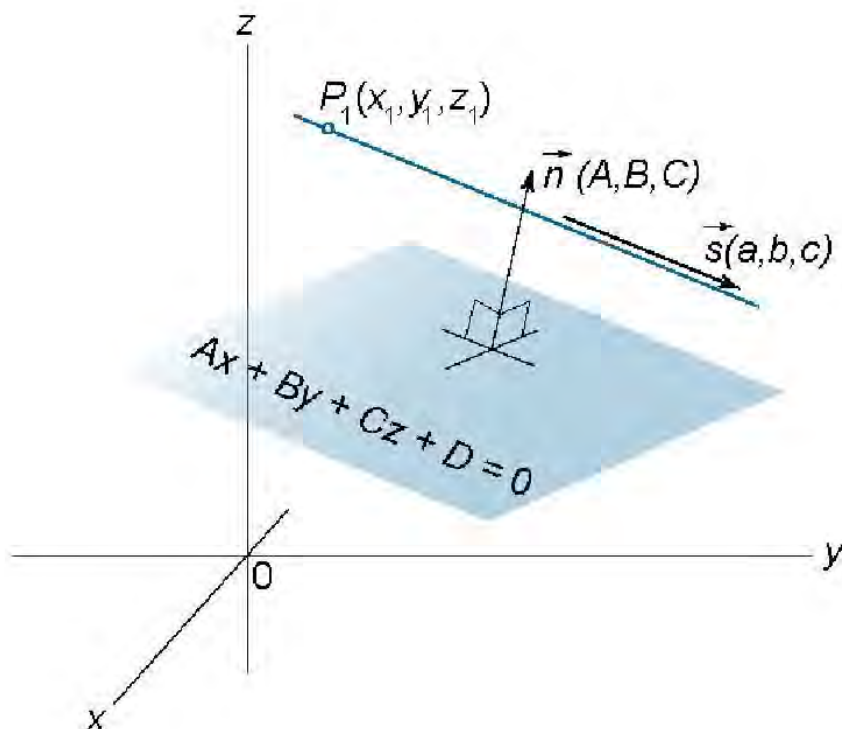


Figure 140. شکل ۱۴۰

698. Perpendicular Line and Plane خط و صفحه متعامد

خط راست The straight line $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ and the plane صفحه

$Ax + By + Cz + D = 0$ are perpendicular if متعامد اند اگر

$$\vec{n} \parallel \vec{s},$$

یا or

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}.$$

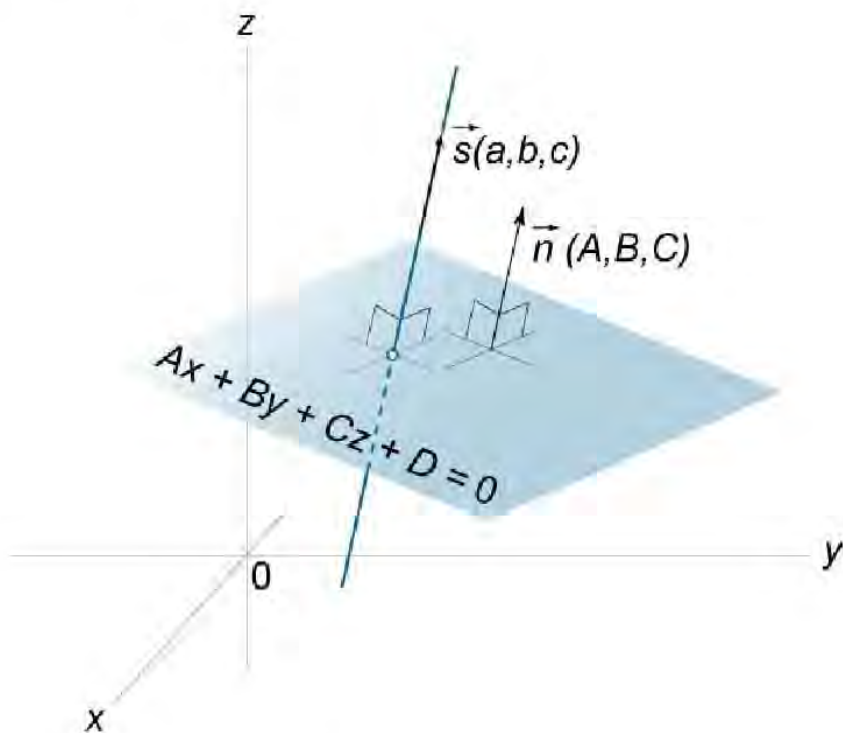


Figure 141. شکل ۱۴۱

7.11 Quadric Surfaces سطوح درجه دوم

مختصات نقطه سطوح درجه دوم
Point coordinates of the quadric surfaces: x, y, z

اعداد حقیقی Real numbers: $A, B, C, a, b, c, k_1, k_2, k_3, \dots$

699. General Quadratic Equation معادله کلی سطوح درجه دوم

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy + 2Px + 2Qy + 2Rz + D = 0$$

700. Classification of Quadric Surfaces دسته بندی سطوح درجه دوم

حالت	رتبه	رتبه	علائم	نوع سطح (رویه)	
Case	Rank(e)	Rank(E)	Δ	k signs	Type of Surface
1	3	4	< 0	یکسان	Real Ellipsoid بیضی گون حقیقی
2	3	4	> 0	یکسان	Imaginary Ellipsoid بیضی گون موهومی
3	3	4	> 0	متفاوت	Hyperboloid of 1 Sheet ۱ صفحه هذلولی گون
4	3	4	< 0	متفاوت	Hyperboloid of 2 Sheets ۲ صفحه هذلولی گون
5	3	3		متفاوت	Real Quadric Cone مخروط درجه دوم حقیقی
6	3	3		یکسان	Imaginary Quadric Cone مخروط درجه ۲ موهومی
7	2	4	< 0	یکسان	Elliptic Paraboloid سهمی گون بیضوی
8	2	4	> 0	متفاوت	Hyperbolic Paraboloid سهمی گون هذلولی
9	2	3		یکسان	Real Elliptic Cylinder استوانه بیضوی حقیقی
10	2	3		یکسان	Imaginary Elliptic Cylinder استوانه بیضوی موهومی
11	2	3		متفاوت	Hyperbolic Cylinder استوانه هذلولی
12	2	2		متفاوت	Real Intersecting Planes صفحات متقاطع حقیقی
13	2	2		یکسان	Imaginary Intersecting Planes صفحات متقاطع موهومی
14	1	3			Parabolic Cylinder استوانه سهموی
15	1	2			Real Parallel Planes صفحات موازی حقیقی
16	1	2			Imaginary Parallel Planes صفحات موازی موهومی
17	1	1			Coincident Planes صفحات منطبق

در اینجا Here

$$e = \begin{pmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} A & H & Q & P \\ H & B & F & Q \\ G & F & C & R \\ P & Q & R & D \end{pmatrix}, \Delta = \det(E),$$

k_1, k_2, k_3 are the roots of the equation, ریشه های این معادله اند،

$$\begin{vmatrix} A-x & H & G \\ H & B-x & F \\ G & F & C-x \end{vmatrix} = 0.$$

701. بیضی گون حقیقی (حالت ۱) Real Ellipsoid (Case 1)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

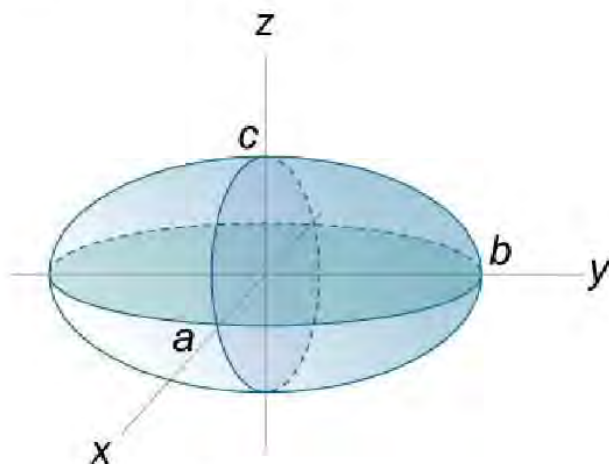


Figure 142. شکل ۱۴۲

702. بیضی گون موهومی (حالت ۲) Imaginary Ellipsoid (Case 2)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

703. هذلولی گون ۱ صفحه (حالت ۳) Hyperboloid of 1 Sheet (Case 3)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

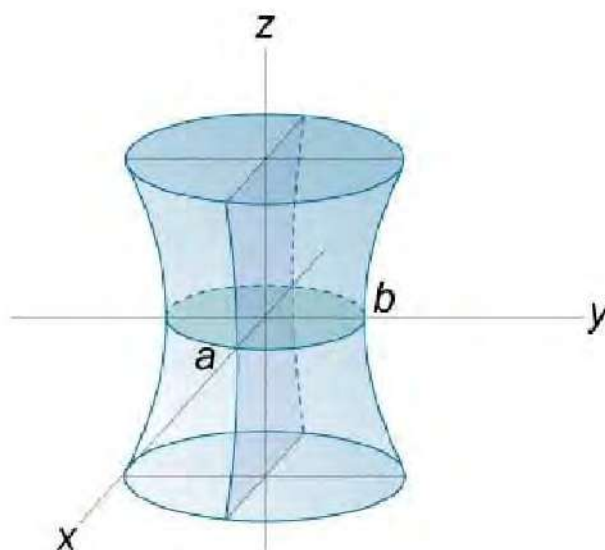


Figure 143. شکل ۱۴۳

704. Hyperboloid of 2 Sheets (Case 4) هذلولی گون ۲ صفحه (حالت ۴)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

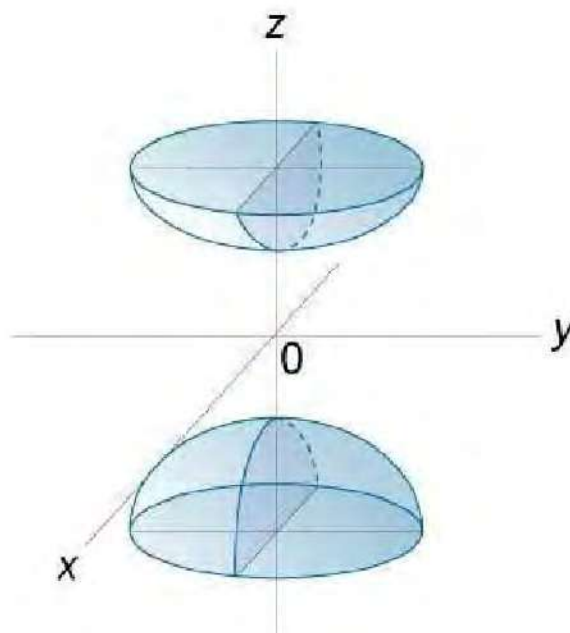


Figure 144. شکل ۱۴۴

705. مخروط درجه دوم حقیقی (حالت ۵) Real Quadric Cone (Case 5)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

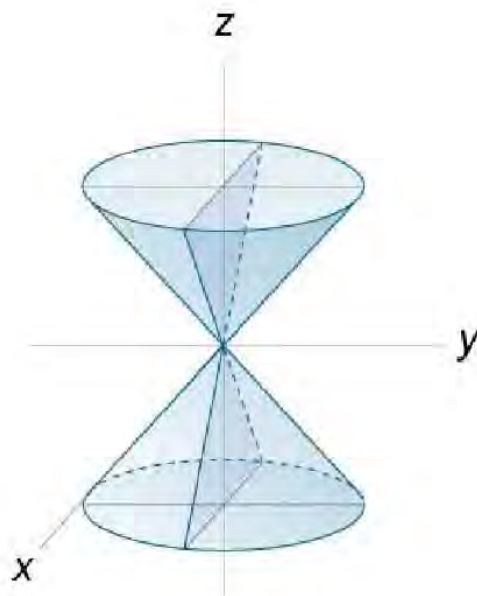


Figure 145. شکل ۱۴۵

706. مخروط درجه دوم موهومی (حالت ۶) Imaginary Quadric Cone (Case 6)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

707. سهمی گون بیضوی (حالت ۷) Elliptic Paraboloid (Case 7)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

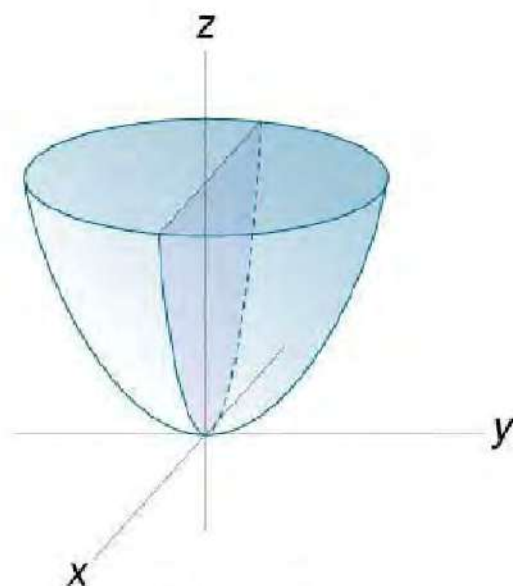


Figure 146. شکل ۱۴۶

708. سهمی گون هذلولی (حالت ۸) Hyperbolic Paraboloid (Case 8)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

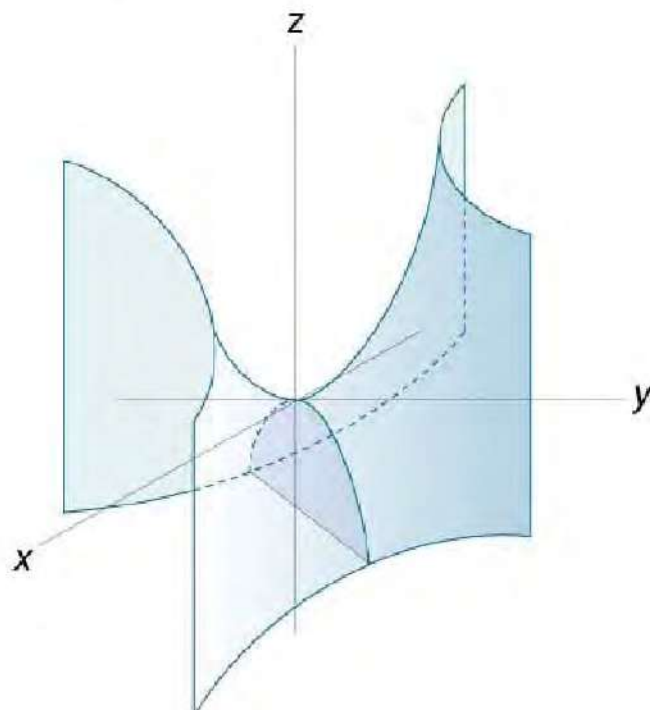


Figure 147. شکل ۱۴۷

709. Real Elliptic Cylinder (Case 9) استوانه بیضوی حقیقی (حالت ۹)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

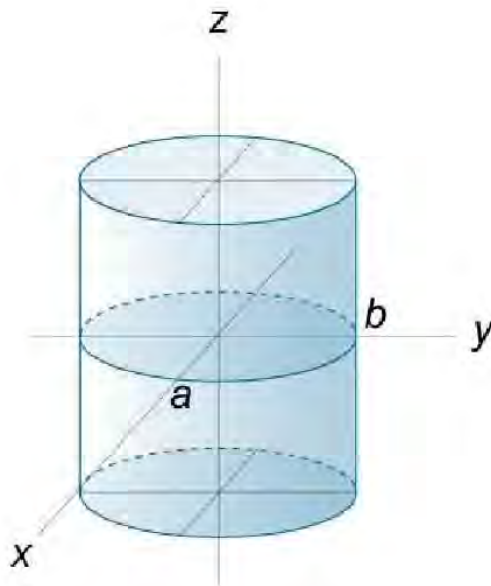


Figure 148. شکل ۱۴۸

710. Imaginary Elliptic Cylinder (Case 10) استوانه بیضوی موهومی (حالت ۱۰)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

711. Hyperbolic Cylinder (Case 11) استوانه هذلولی (حالت ۱۱)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

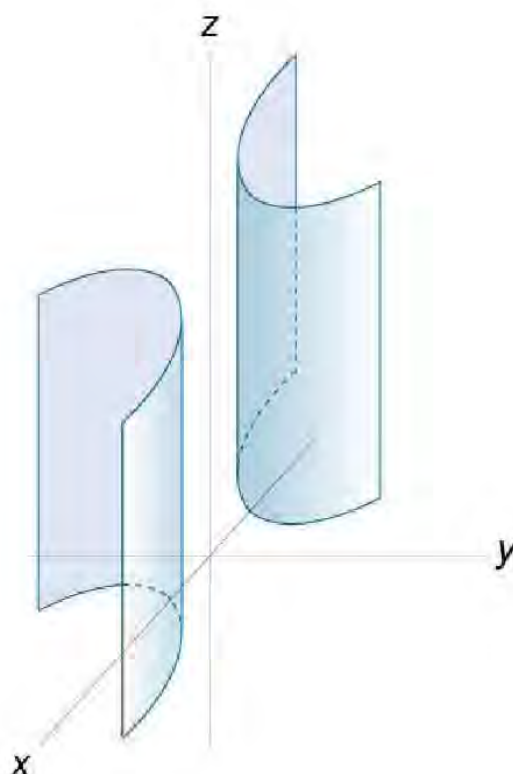


Figure 149. شکل ۱۴۹

712. Real Intersecting Planes (Case 12) صفحات متقاطع حقیقی (حالت ۱۲)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

713. Imaginary Intersecting Planes (Case 13) صفحات متقاطع موهومی (حالت ۱۳)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

714. Parabolic Cylinder (Case 14) استوانه سهمی (حالت ۱۴)

$$\frac{x^2}{a^2} - y = 0$$

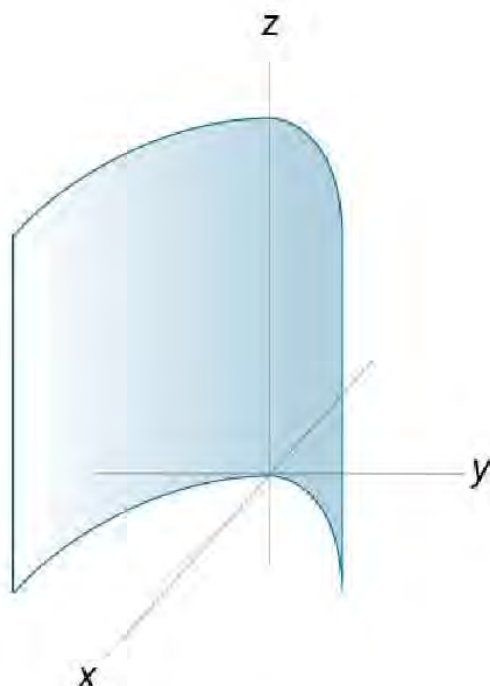


Figure 150. شکل ۱۵۰

715. Real Parallel Planes (Case 15) صفحات موازی حقیقی (حالت ۱۵)

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

716. Imaginary Parallel Planes (Case 16) صفحات موازی موهومی (حالت ۱۶)

$$\frac{x^2}{a^2} = -1$$

717. Coincident Planes (Case 17) صفحات منطبق (حالت ۱۷)

$$x^2 = 0$$

7.12 Sphere کره

Radius of a sphere: R شعاع کره

Point coordinates: $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$ مختصات نقطه

Center of a sphere: (a, b, c) مرکز کره

Real numbers: A, D, E, F, M اعداد حقیقی

معادله کره با مرکز مبدا (شکل استاندارد)

- 718.** Equation of a Sphere Centered at the Origin (Standard Form)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

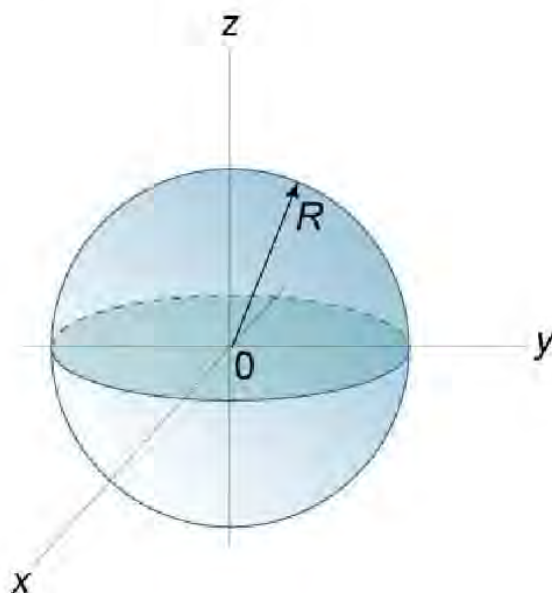


Figure 151. شکل ۱۵۱

معادله کره به مرکز هر نقطه (a, b, c)

- 719.** Equation of a Circle Centered at Any Point (a, b, c)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

- 720.** Diameter Form شکل قطر

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0,$$

که در آن where

$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ are the ends of a diameter. دو سر قطر اند.

721. Four Point Form شکل چهار نقطه

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

722. General Form شکل کلی (A غیر صفر است)

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Dx + Ey + Fz + M = 0 \quad (A \text{ is nonzero}).$$

The center of the sphere has coordinates (a, b, c) , where

$$a = -\frac{D}{2A}, \quad b = -\frac{E}{2A}, \quad c = -\frac{F}{2A}. \quad \text{مرکز کره مختصات (a,b,c) دارد، که در آن}$$

The radius of the sphere is شعاع کره عبارت است از

$$R = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4A^2M}}{2A}.$$

Functions: f, g, y, u, v توابع

Argument (independent variable): x آرگومان (متغیر مستقل)

Real numbers: a, b, c, d اعداد حقیقی

Natural number: n عدد طبیعی

Angle: α زاویه

Inverse function: f^{-1} تابع وارون

8.1 Functions and Their Graphs توابع و نمودارهای آنها

723. Even Function تابع زوج
 $f(-x) = f(x)$

724. Odd Function تابع فرد
 $f(-x) = -f(x)$

725. Periodic Function تابع متناوب
 $f(x + nT) = f(x)$

726. Inverse Function تابع وارون
 $y = f(x)$ is any function, $x = g(y)$ or $y = f^{-1}(x)$ is its inverse function.
 $Y=f(x)$ هر تابعی باشد، $x=g(y)$ یا $y=f^{-1}(x)$ تابع وارون آن است.

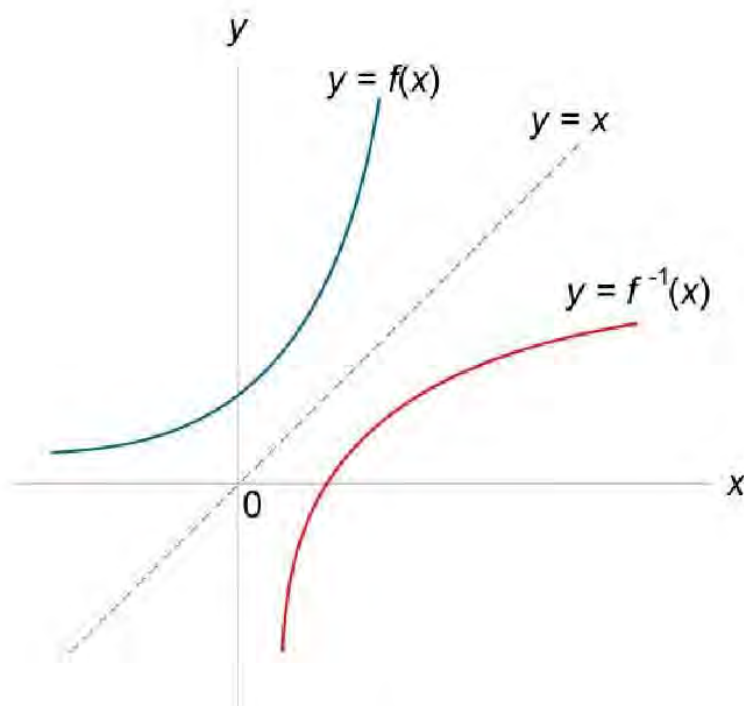


Figure 152. شکل ۱۵۲

727. Composite Function تابع مرکب یک تابع مرکب است.
 $y = f(u)$, $u = g(x)$, $y = f(g(x))$ is a composite function.

728. Linear Function تابع خطی شیب خط است،
 $y = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, $a = \tan \alpha$ is the slope of the line, b is the y-intercept. عرض از مبدا است.

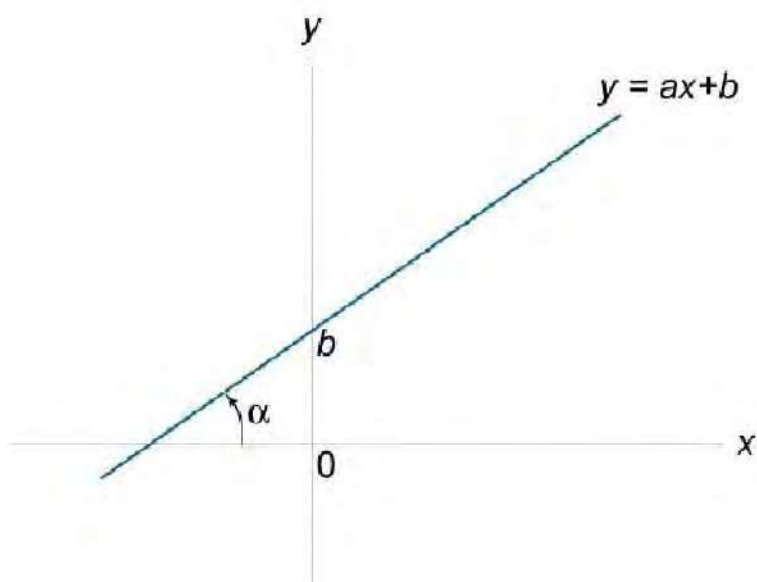


Figure 153. شکل ۱۵۳

729. Quadratic Function تابع درجه دوم
 $y = x^2, x \in \mathbb{R}.$

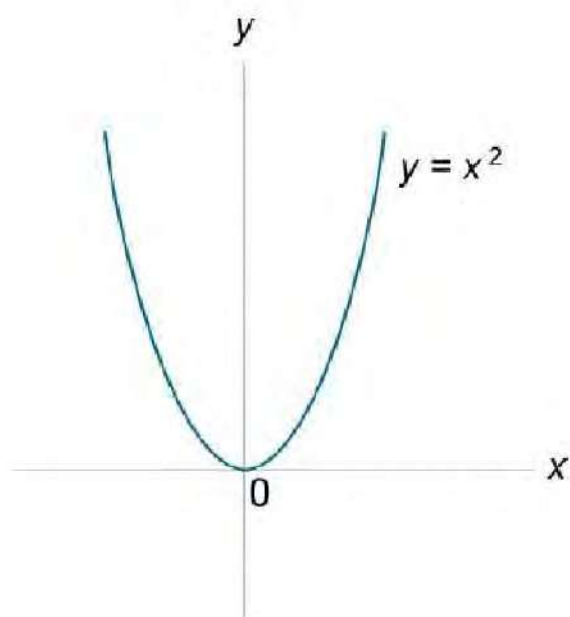


Figure 154. شکل ۱۵۴

730. $y = ax^2 + bx + c, x \in \mathbb{R}.$

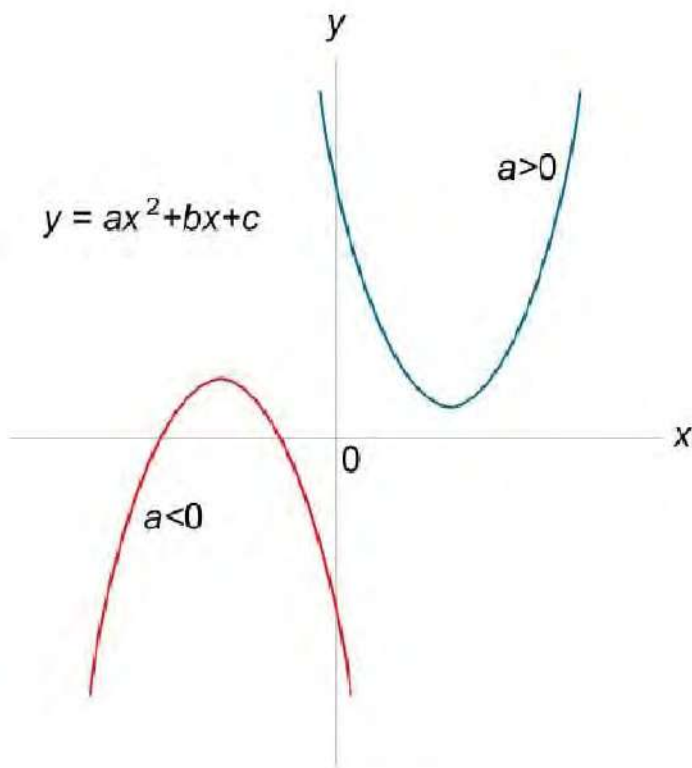


Figure 155. شکل ۱۵۵

731. Cubic Function تابع درجه سوم
 $y = x^3, x \in \mathbb{R}.$

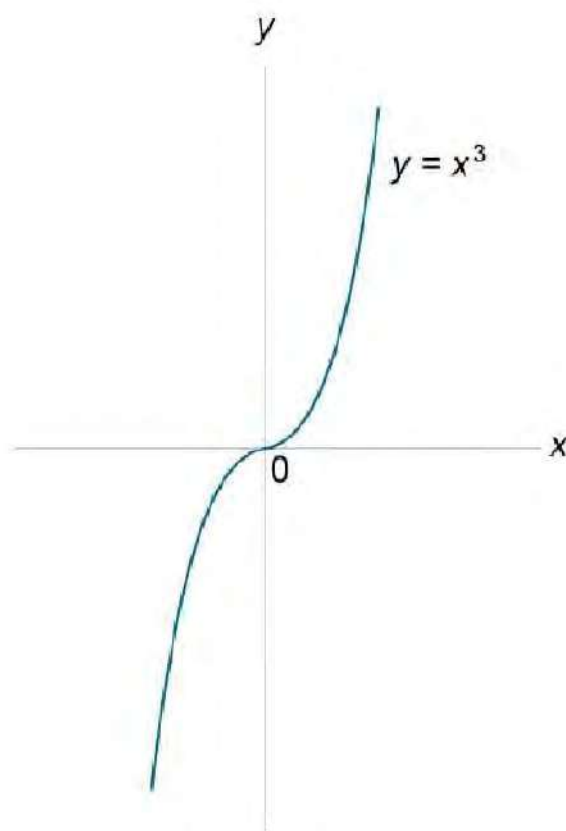


Figure 156. شکل ۱۵۶

732. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, x \in \mathbb{R}.$

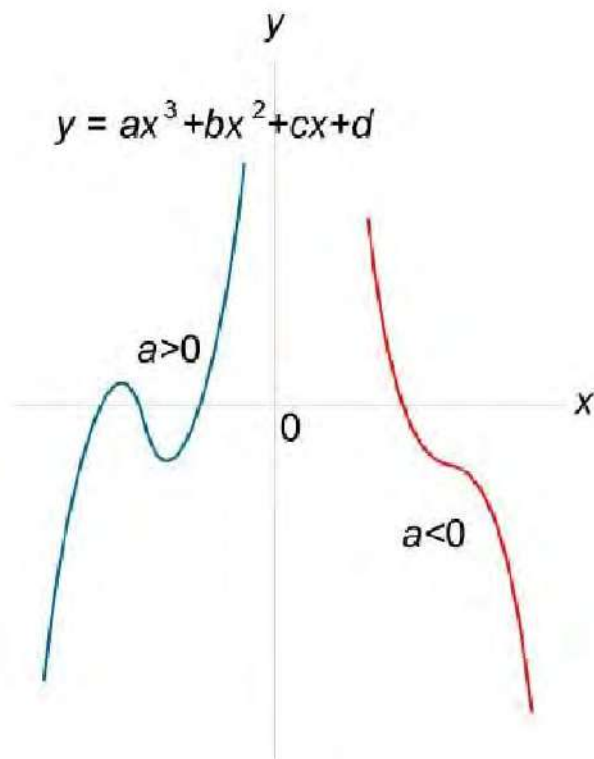


Figure 157. شکل ۱۵۷

733. Power Function تابع توانی
 $y = x^n, n \in \mathbb{N}.$

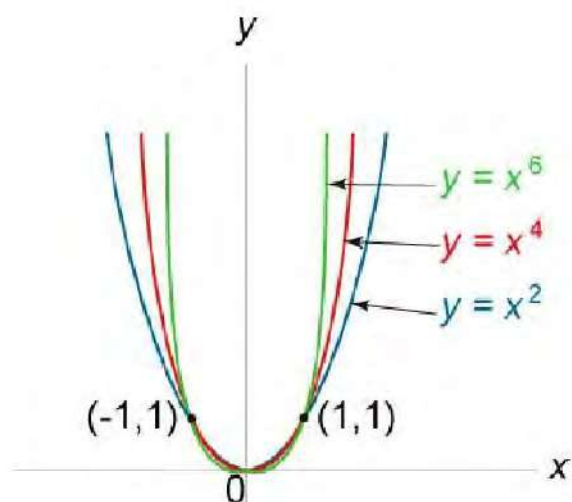


Figure 158. شکل ۱۵۸

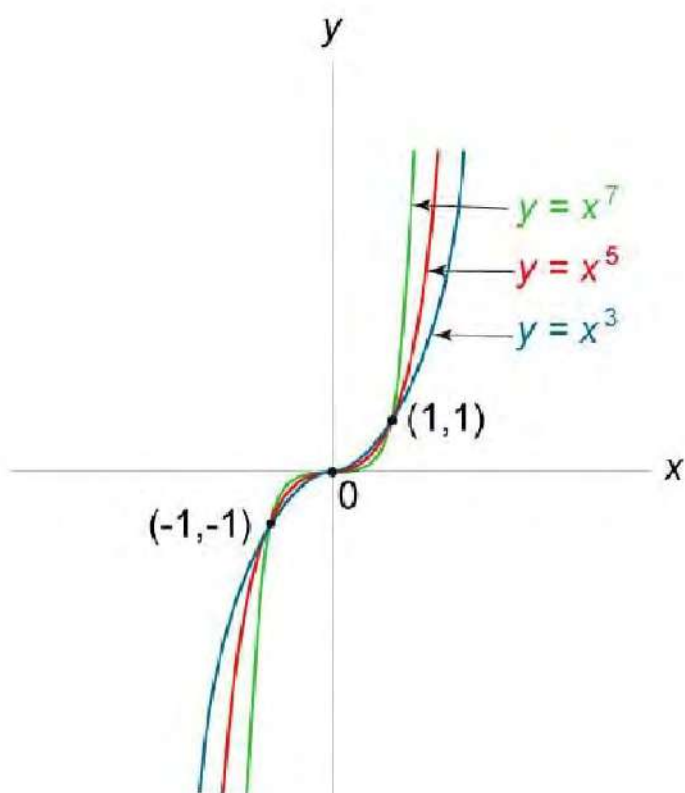


Figure 159. شکل ۱۵۹

- 734.** Square Root Function تابع جذر مربعی
 $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$.

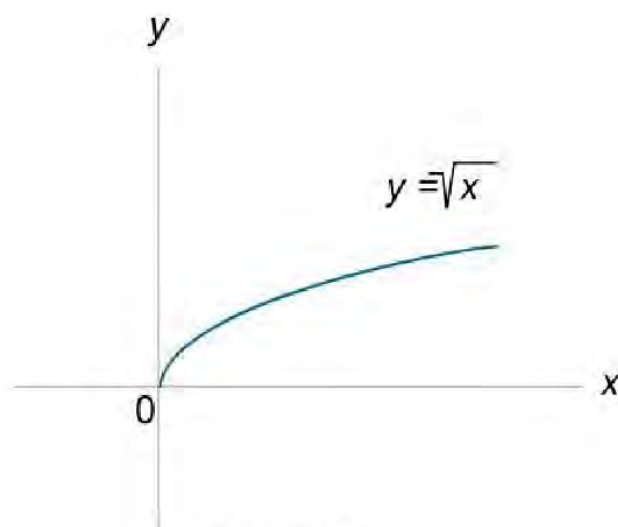


Figure 160. شکل ۱۶۰

- 735.** Exponential Functions توابع نمایی
 $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$,
 $y = e^x$ if $a = e$, $e = 2.71828182846...$
 اگر

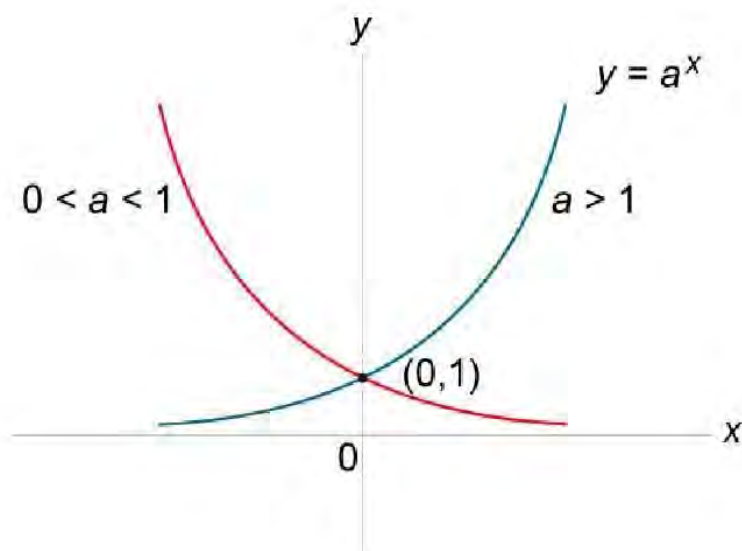


Figure 161. شکل ۱۶۱

736. Logarithmic Functions توابع لگاریتمی

$$y = \log_a x, x \in (0, \infty), a > 0, a \neq 1,$$

$$y = \ln x \text{ if } a = e, x > 0.$$

اگر

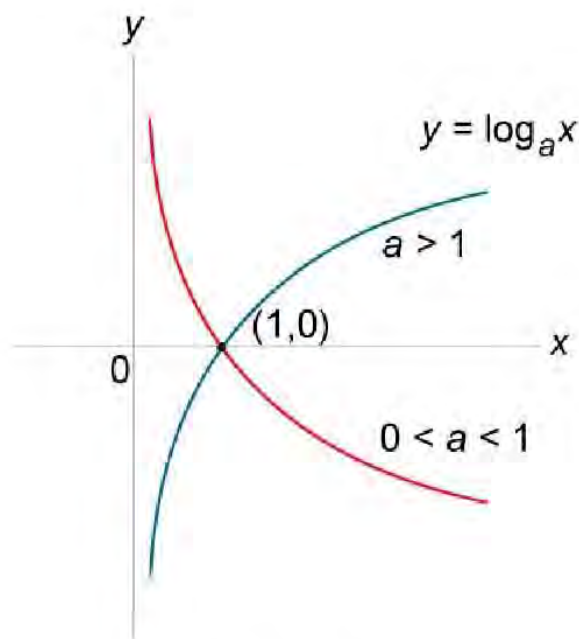


Figure 162. شکل ۱۶۲

737. Hyperbolic Sine Function تابع سینوس هایپربولیک

$$y = \sinh x, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

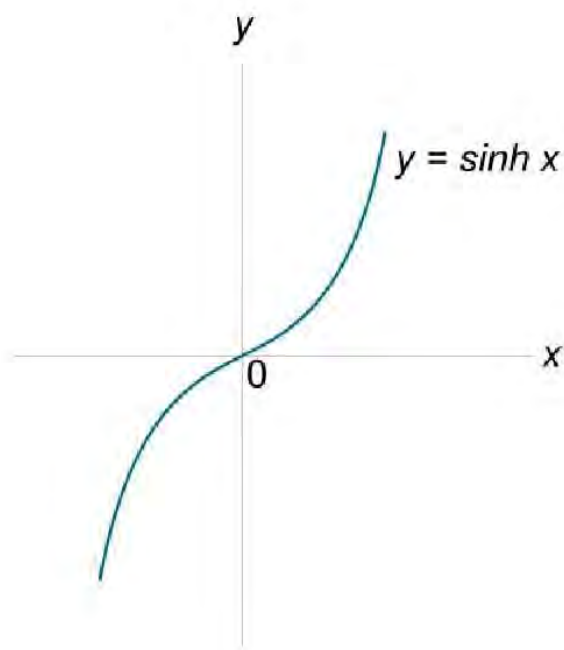


Figure 163. شکل ۱۶۳

738. Hyperbolic Cosine Function تابع کسینوس هایپربولیک

$$y = \cosh x, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

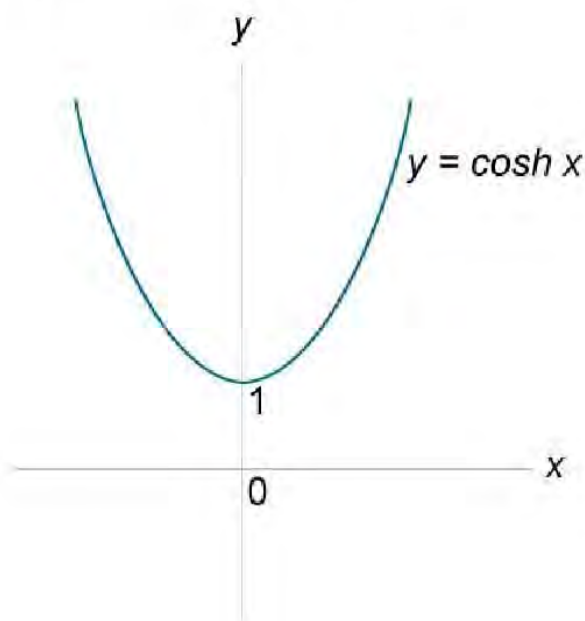


Figure 164. شکل ۱۶۴

739. Hyperbolic Tangent Function تابع تانژانت هایپربولیک

$$y = \tanh x, \quad y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

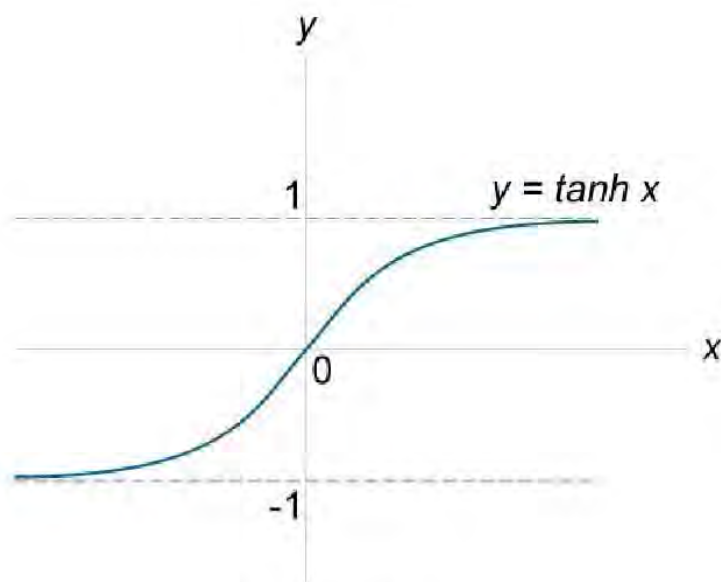


Figure 165. شکل ۱۶۵

740. Hyperbolic Cotangent Function تابع کتانژانت هایپربولیک

$$y = \coth x, \quad y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0.$$

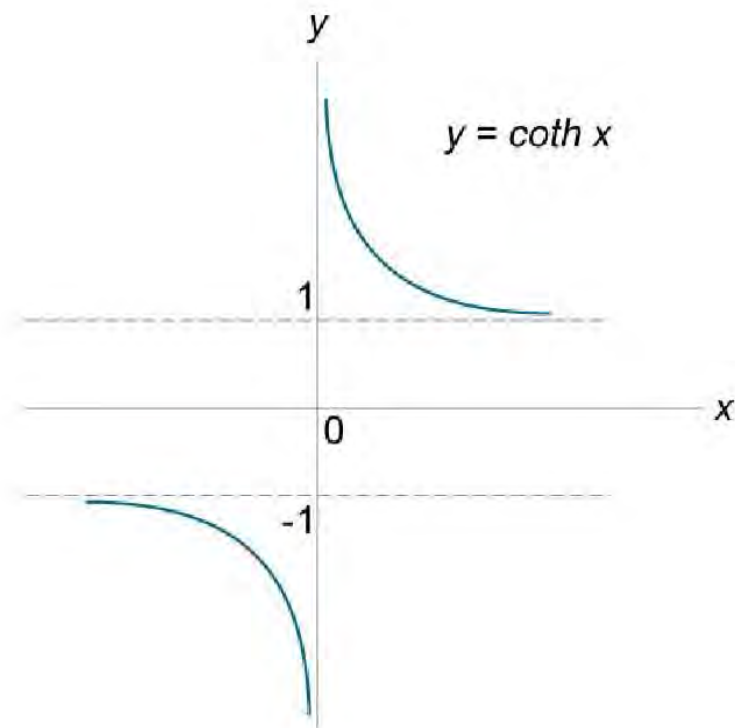


Figure 166. شکل ۱۶۶

741. Hyperbolic Secant Function تابع سکانت هایپربولیک
 $y = \operatorname{sech} x$, $y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

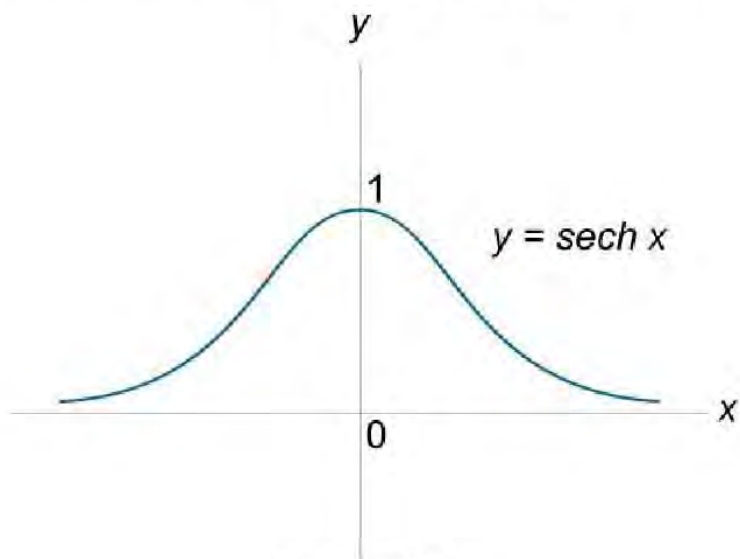


Figure 167. شکل ۱۶۷

742. Hyperbolic Cosecant Function تابع کسکانت هایپربولیک

$$y = \operatorname{csch} x, \quad y = \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0.$$

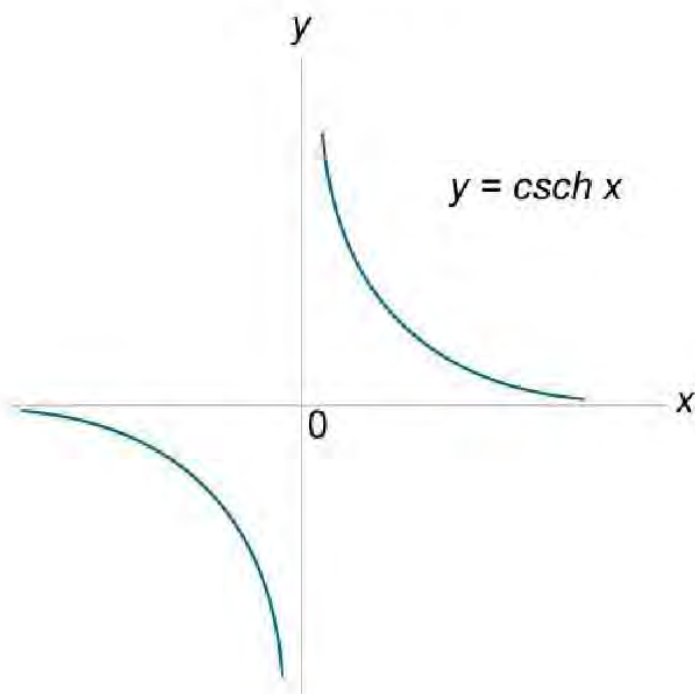


Figure 168. شکل ۱۶۸

743. Inverse Hyperbolic Sine Function تابع وارون سینوس هایپربولیک
 $y = \operatorname{arcsinh} x, \quad x \in \mathbb{R}.$

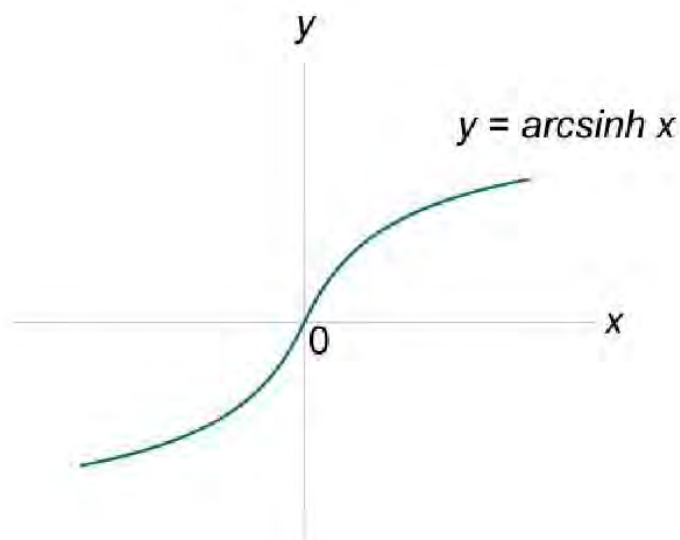


Figure 169. شکل ۱۶۹

- 744.** Inverse Hyperbolic Cosine Function تابع وارون کسینوس هایپربولیک
 $y = \operatorname{arccosh} x, x \in [1, \infty)$.

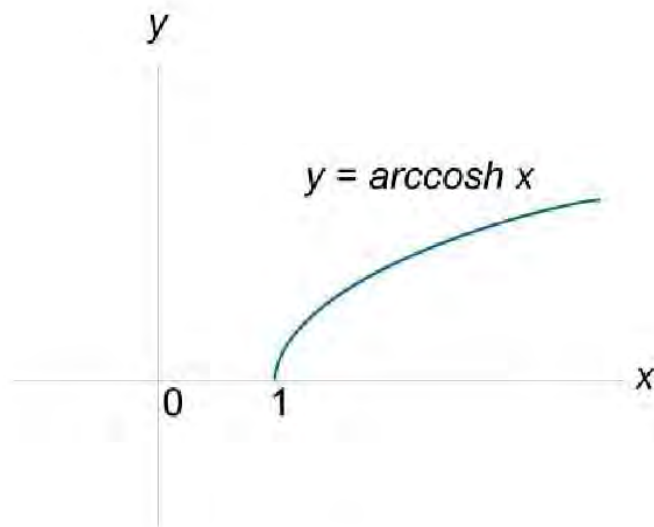


Figure 170. شکل ۱۷۰

- 745.** Inverse Hyperbolic Tangent Function تابع وارون تانژانت هایپربولیک
 $y = \operatorname{arctanh} x, x \in (-1, 1)$.

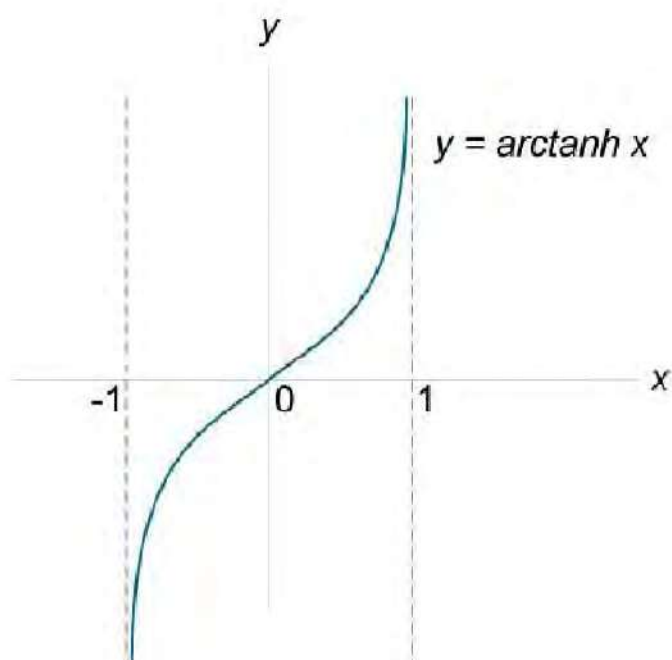


Figure 171. شکل ۱۷۱

746. Inverse Hyperbolic Cotangent Function تابع وارون کتانژانت هایپربولیک
 $y = \operatorname{arccoth} x$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

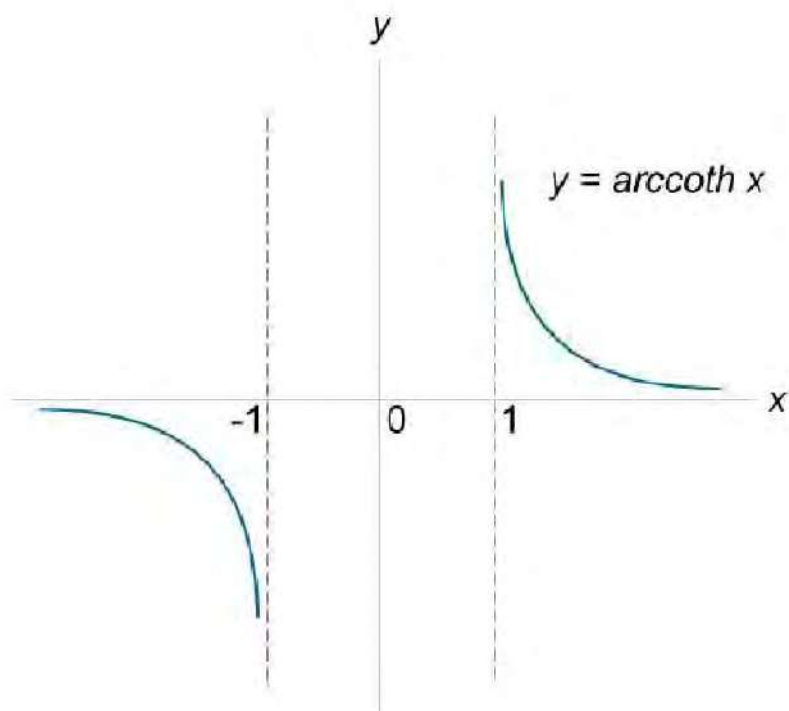


Figure 172. شکل ۱۷۲

747. Inverse Hyperbolic Secant Function
 $y = \operatorname{arcsech} x, x \in (0, 1]$.

تابع وارون سکانت هایپربولیک

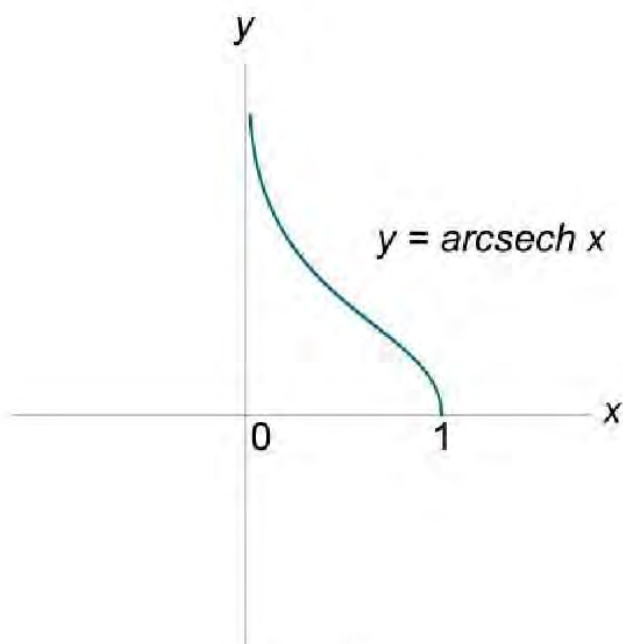


Figure 173. شکل ۱۷۳

- 748.** Inverse Hyperbolic Cosecant Function تابع وارون کسکانت هایپربولیک
 $y = \operatorname{arccsch} x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

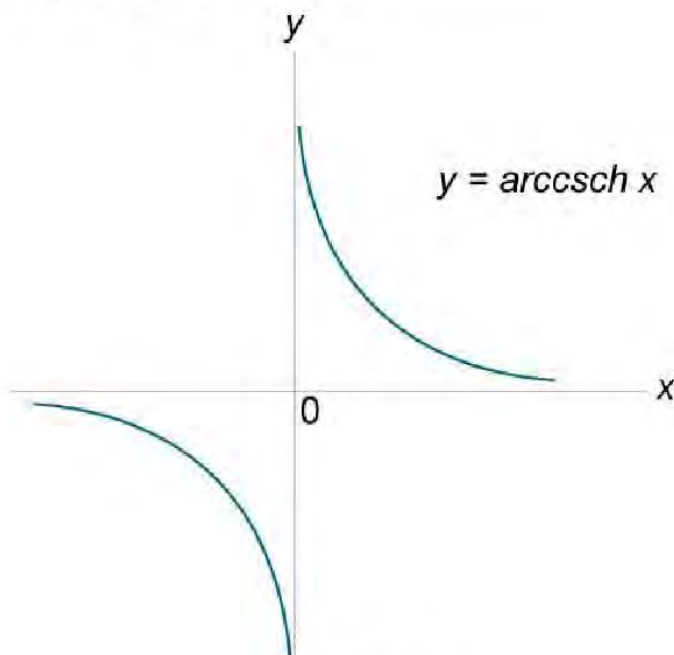


Figure 174. شکل ۱۷۴

8.2 Limits of Functions حدهای توابع

Functions: $f(x)$, $g(x)$ توابع

Argument: x متغیر (آرگومان)

Real constants: a , k ثوابت حقیقی

$$749. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$750. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$751. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$752. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ if } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

$$753. \lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$754. \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

$$755. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \text{ if the function } f(x) \text{ is continuous at } x = a.$$

اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد.

$$756. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$757. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$758. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1$$

$$759. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = 1$$

$$760. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$761. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$762. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

$$763. \lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$$

تعریف و خواص مشتق

8.3 Definition and Properties of the Derivative

Functions: f, g, y, u, v توابع

Independent variable: x متغیر مستقل

Real constant: k ثابت حقیقی

Angle: α زاویه

$$764. y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

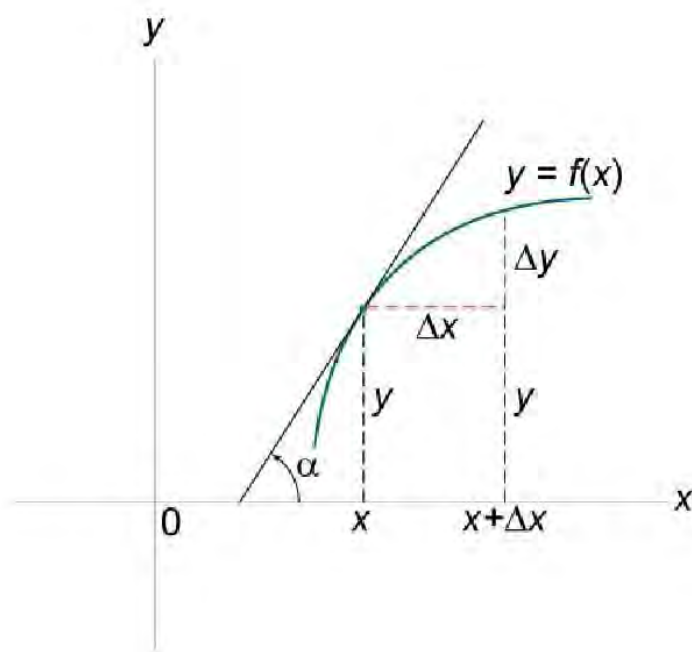


Figure 175. شکل ۱۷۵

765. $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$

766. $\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

767. $\frac{d(u - v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

768. $\frac{d(ku)}{dx} = k \frac{du}{dx}$

769. Product Rule قاعده ضرب
 $\frac{d(u \cdot v)}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}$

770. Quotient Rule قاعده تقسیم

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{\frac{du}{dx} \cdot v - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

771. Chain Rule قاعده مرکب (زنجیروار)

$$y = f(g(x)), \quad u = g(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

772. Derivative of Inverse Function مشتق تابع وارون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

که در آن $x(y)$ وارون تابع $y(x)$ است.
where $x(y)$ is the inverse function of $y(x)$.

773. Reciprocal Rule قاعده معکوس

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y} \right) = -\frac{\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

774. Logarithmic Differentiation مشتق گیری لگاریتمی

$$y = f(x), \quad \ln y = \ln f(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \frac{d}{dx} [\ln f(x)].$$

8.4 Table of Derivatives جدول مشتقات

Independent variable: x متغیر مستقل

Real constants: C, a, b, c ثوابت حقیقی

Natural number: n عدد طبیعی

$$775. \quad \frac{d}{dx}(C) = 0$$

$$776. \quad \frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$777. \quad \frac{d}{dx}(ax + b) = a$$

$$778. \quad \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = ax + b$$

$$779. \quad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$780. \quad \frac{d}{dx}(x^{-n}) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$781. \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$782. \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$783. \quad \frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$784. \quad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$785. \quad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$$786. \quad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$$787. \quad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$788. \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$789. \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$790. \quad \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$791. \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$792. \quad \frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \cdot \sec x$$

$$793. \quad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \cdot \csc x$$

$$794. \quad \frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$795. \quad \frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$796. \quad \frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$797. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$798. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$799. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$800. \quad \frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

$$801. \quad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$802. \quad \frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

$$803. \quad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$804. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$$

$$805. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x$$

$$806. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$807. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$808. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arctanh} x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1.$$

$$809. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccoth} x) = -\frac{1}{x^2-1}, \quad |x| > 1.$$

$$810. \quad \frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \ln u \cdot \frac{dv}{dx}$$

8.5 Higher Order Derivatives مشتق‌های مرتبه بالاتر

Functions: f, y, u, v توابع

Independent variable: x متغیر مستقل

Natural number: n عدد طبیعی

811. Second derivative مشتق دوم

$$f'' = (f')' = \left(\frac{dy}{dx} \right)' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

812. Higher-Order derivative مشتق مرتبه بالاتر

$$f^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

$$813. \quad (u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$$

$$814. \quad (u-v)^{(n)} = u^{(n)} - v^{(n)}$$

815. Leibnitz's Formulas روابط لایبنیتز

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$\begin{aligned}(uv)''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \\ (uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}\end{aligned}$$

$$816. \quad (x^m)^{(n)} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$$

$$817. \quad (x^n)^{(n)} = n!$$

$$818. \quad (\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$$

$$819. \quad (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

$$820. \quad (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$$

$$821. \quad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$822. \quad (a^{mx})^{(n)} = m^n a^{mx} \ln^n a$$

$$823. \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$824. \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

8.6 Applications of Derivative کاربردهای مشتق

Functions: f, g, y توابع

Position of an object: s موقعیت یک شیء

Velocity: v سرعت

Acceleration: w شتاب

Independent variable: x متغیر مستقل

Time: t زمان

Natural number: n عدد طبیعی

825. Velocity and Acceleration سرعت و شتاب
 $s = f(t)$ is the position of an object relative to a fixed موقعیت یک شیء نسبت به یک دستگاه مختصات
 ثابت در زمان t است،
 $v = s' = f'(t)$ is the instantaneous velocity of the object, سرعت لحظه ای شیء است،
 $w = v' = s'' = f''(t)$ is the instantaneous acceleration of شتاب لحظه ای شیء است.
 the object.

826. Tangent Line خط مماس
 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

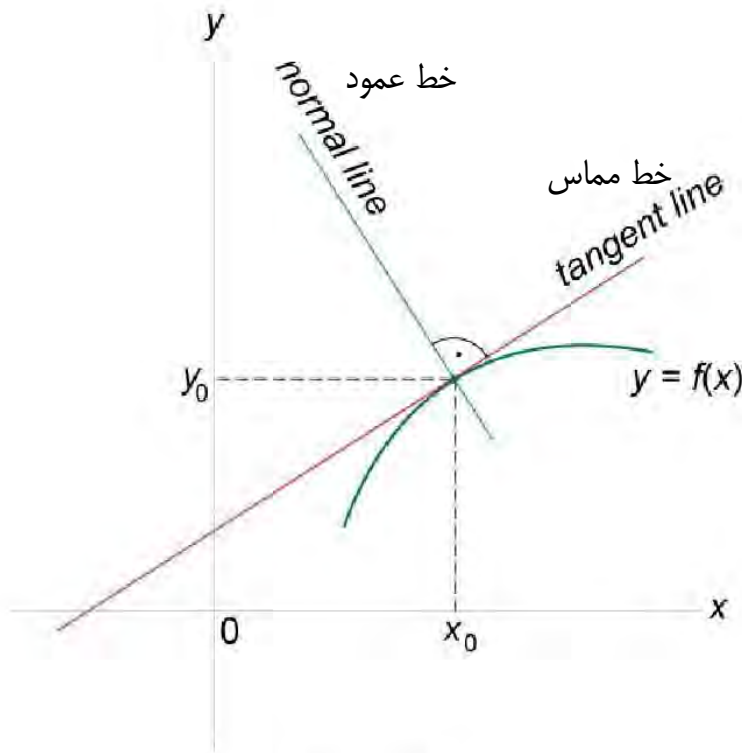


Figure 176. شکل ۱۷۶

827. Normal Line (خط عمود (نرمال)

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (\text{Fig 176})$$

828. Increasing and Decreasing Functions. توابع افزایشنده و کاهشنده

If $f'(x_0) > 0$, then $f(x)$ is increasing at x_0 . (Fig 177, $x < x_1$,

$x_2 < x$), اگر $f'(x_0) > 0$ ، آنگاه $f(x)$ در x_0 افزایشنده است (شکل ۱۷۷، $x < x_1$ ، $x_2 < x$).

If $f'(x_0) < 0$, then $f(x)$ is decreasing at x_0 . (Fig 177,

$x_1 < x < x_2$), اگر $f'(x_0) < 0$ ، آنگاه $f(x)$ در x_0 کاهشنده است (شکل ۱۷۷، $x_1 < x < x_2$).

If $f'(x_0)$ does not exist or is zero, then the test fails.

اگر $f'(x_0)$ وجود نداشته باشد یا صفر باشد، آنگاه این آزمون با شکست مواجه می شود.

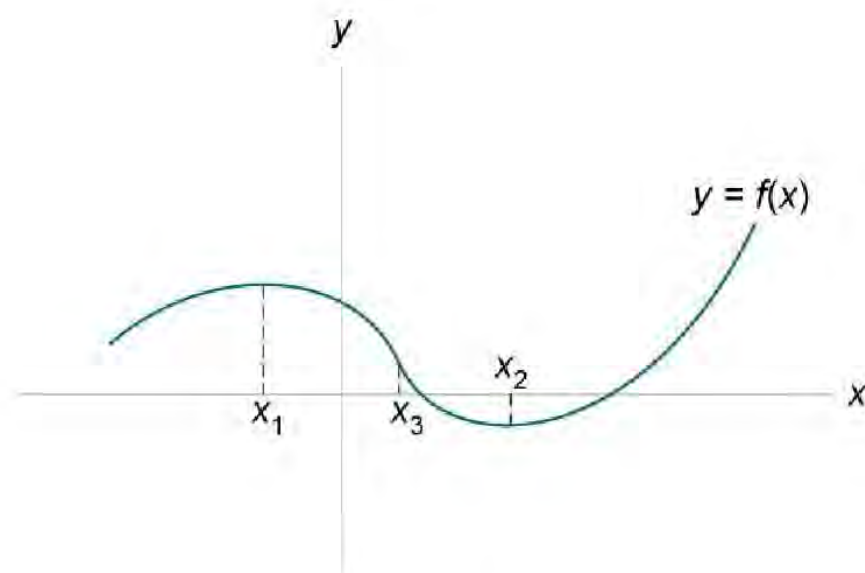


Figure 177. شکل ۱۷۷

829. Local extrema فرینه های موضعی

A function $f(x)$ has a **local maximum** at x_1 if and only if there exists some interval containing x_1 such that $f(x_1) \geq f(x)$ for all x in the interval (Fig.177).

تابع $f(x)$ در x_1 بیشینه موضعی است، اگر و تنها اگر بازه ای شامل x_1 وجود داشته باشد به گونه ای که برای تمامی x ها در آن بازه، $f(x_1) \geq f(x)$ باشد (شکل ۱۷۷).

A function $f(x)$ has a **local minimum** at x_2 if and only if there exists some interval containing x_2 such that $f(x_2) \leq f(x)$ for all x in the interval (Fig.177).

تابع $f(x)$ در x_2 کمینه موضعی است، اگر و تنها اگر بازه ای شامل x_2 وجود داشته باشد به گونه ای که برای تمامی x ها در آن بازه، $f(x_2) \leq f(x)$ باشد (شکل ۱۷۷).

830. Critical Points نقاط بحرانی

A critical point on $f(x)$ occurs at x_0 if and only if either $f'(x_0)$ is zero or the derivative doesn't exist.

نقطه بحرانی بر $f(x)$ در x_0 رخ می دهد، اگر و تنها $f'(x_0)$ صفر باشد یا مشتق وجود نداشته باشد.

831. First Derivative Test for Local Extrema. آزمون مشتق اول برای فرینه های موضعی

If $f(x)$ is increasing ($f'(x) > 0$) for all x in some interval $(a, x_1]$ and $f(x)$ is decreasing ($f'(x) < 0$) for all x in some interval $[x_1, b)$, then $f(x)$ has a local maximum at x_1 (Fig.177).

اگر $f(x)$ برای تمام x ها در بازه $(a, x_1]$ افزایشنده باشد ($f'(x) > 0$) و $f(x)$ برای تمام x ها در بازه $[x_1, b)$ کاهنده باشد ($f'(x) < 0$)، آنگاه $f(x)$ یک بیشینه موضعی در x_1 دارد (شکل ۱۷۷).

اگر $f(x)$ برای تمام x ها در بازه $(a, x_2]$ کاهنده باشد $(f'(x) < 0)$ و برای تمام x ها در بازه $[x_2, b)$ افزایشنده باشد $(f'(x) > 0)$ ، آنگاه $f(x)$ یک کمینه موضعی در x_2 دارد (شکل ۱۷۷).

- 832.** If $f(x)$ is decreasing ($f'(x) < 0$) for all x in some interval $(a, x_2]$ and $f(x)$ is increasing ($f'(x) > 0$) for all x in some interval $[x_2, b)$, then $f(x)$ has a local minimum at x_2 . (Fig.177).

آزمون مشتق دوم برای فرینه های موضعی

- 833.** Second Derivative Test for Local Extrema.

If $f'(x_1) = 0$ and $f''(x_1) < 0$, then $f(x)$ has a local maximum

at x_1 . اگر $f'(x_1) = 0$ باشد و $f''(x_1) < 0$ ، آنگاه $f(x)$ بیشینه موضعی در x_1 دارد.

If $f'(x_2) = 0$ and $f''(x_2) > 0$, then $f(x)$ has a local minimum

at x_2 . اگر $f'(x_2) = 0$ باشد و $f''(x_2) > 0$ ، آنگاه $f(x)$ کمینه موضعی در x_2 دارد. (شکل ۱۷۷) (Fig.177)

- 834.** Concavity. $f(x)$ در x_0 تقعر به سمت بالا دارد اگر و تنها اگر $f'(x)$ در x_0 افزایشنده باشد (شکل ۱۷۷، $x_3 < x$). $f(x)$ is concave upward at x_0 if and only if $f'(x)$ is increasing at x_0 (Fig.177, $x_3 < x$).

$f(x)$ is concave downward at x_0 if and only if $f'(x)$ is decreasing at x_0 . (Fig.177, $x < x_3$). $f(x)$ در x_0 تقعر به سمت پایین دارد اگر و تنها اگر $f'(x)$ در x_0 کاهنده باشد (شکل ۱۷۷، $x < x_3$).

آزمون مشتق دوم برای تقعر

- 835.** Second Derivative Test for Concavity. اگر $f''(x_0) > 0$ باشد، آنگاه $f(x)$ در x_0 به سمت بالا تقعر دارد. اگر $f''(x_0) < 0$ باشد، آنگاه $f(x)$ در x_0 به سمت پایین تقعر دارد. If $f''(x_0) > 0$, then $f(x)$ is concave upward at x_0 . اگر $f''(x_0) < 0$, then $f(x)$ is concave downward at x_0 . If $f''(x)$ does not exist or is zero, then the test fails. اگر $f''(x_0)$ صفر بوده و یا وجود نداشته باشد، آنگاه آزمون با شکست مواجه می شود.

- 836.** Inflection Points نقاط عطف

If $f'(x_3)$ exists and $f''(x)$ changes sign at $x = x_3$, then the point $(x_3, f(x_3))$ is an inflection point of the graph of $f(x)$. If $f''(x_3)$ exists at the inflection point, then $f''(x_3) = 0$ (Fig.177).

اگر $f'(x_3)$ وجود داشته باشد و $f''(x)$ در $x = x_3$ تغییر علامت دهد، آنگاه نقطه

قاعده هوییتال

$(x_3, f(x_3))$ یک نقطه عطف نمودار $f(x)$ می باشد. اگر $f''(x_3)$ در نقطه عطف

- 837.** L'Hopital's Rule

وجود داشته باشد، آنگاه $f''(x_3) = 0$ است.

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ if } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}.$$

8.7 Differential دیفرانسیل

Functions: f, u, v توابع

Independent variable: x متغیر مستقل

Derivative of a function: $y'(x), f'(x)$ مشتق تابع

Real constant: C ثابت حقیقی

Differential of function $y = f(x)$: dy دیفرانسیل تابع

Differential of x : dx دیفرانسیل x

Small change in x : Δx تغییر اندک در x

Small change in y : Δy تغییر اندک در y

838. $dy = y' dx$

839. $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$

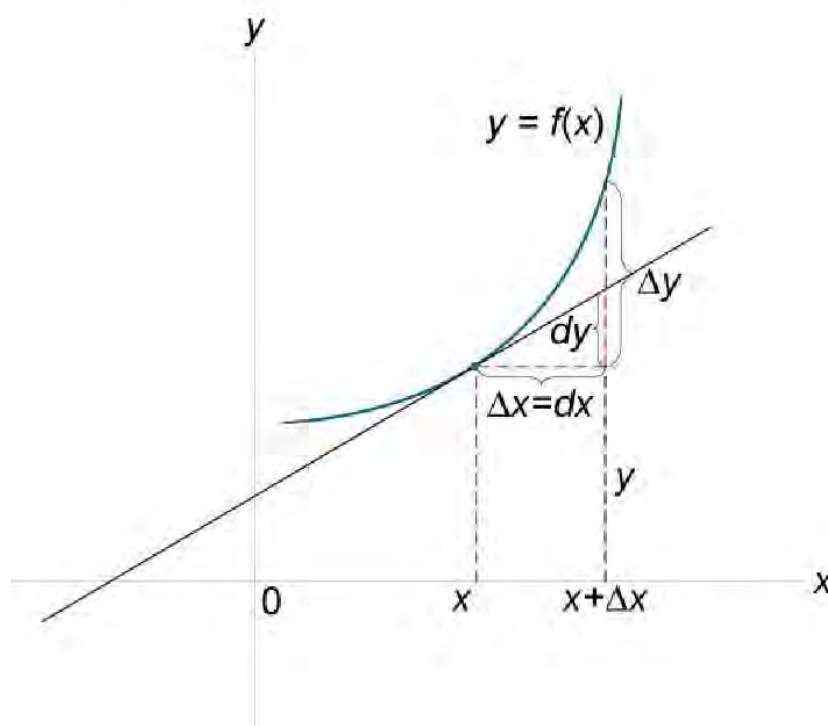


Figure 178. شکل ۱۷۸

840. Small Change in y تغییر اندک در y
 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

841. $d(u + v) = du + dv$

842. $d(u - v) = du - dv$

843. $d(Cu) = Cdu$

844. $d(uv) = vdu + u dv$

845. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$

8.8 Multivariable Functions توابع چند متغیره

Functions of two variables: $z(x, y)$, $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$ توابع دو متغیره
 Arguments: x, y, t متغیرهای مستقل

Small changes in x, y, z , respectively: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

تغییرات اندک در x, y, z , به ترتیب

846. First Order Partial Derivatives مشتقهای جزئی مرتبه اول

The partial derivative with respect to x مشتق جزئی نسبت به x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \text{ (also } \frac{\partial z}{\partial x} = z_x \text{),}$$

The partial derivative with respect to y مشتق جزئی نسبت به y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y \text{ (also } \frac{\partial z}{\partial y} = z_y \text{).}$$

847. Second Order Partial Derivatives مشتقهای جزئی مرتبه دوم

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}.$$

If the derivatives are continuous, then اگر مشتقها پیوسته باشند، آنگاه

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

قواعد مرکب (زنجیره ای)

848. Chain Rules g تابعی از یک متغیر h است)، آنگاه

If $f(x, y) = g(h(x, y))$ (g is a function of one variable h), then اگر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g'(h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial y}.$$

اگر آنگاه

$$\text{If } h(t) = f(x(t), y(t)), \text{ then } h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

اگر آنگاه

If $z = f(x(u, v), y(u, v))$, then

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

849. Small Changes تغییرات اندک

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

850. Local Maxima and Minima بیشینه ها و کمینه های موضعی
 $f(x, y)$ در (x_0, y_0) دارای بیشینه موضعی است اگر برای تمامی (x, y) های به اندازه کافی نزدیک به (x_0, y_0) ، $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ باشد.
 $f(x, y)$ has a local maximum at (x_0, y_0) if $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ for all (x, y) sufficiently close to (x_0, y_0) .

$f(x, y)$ در (x_0, y_0) دارای کمینه موضعی است اگر برای تمامی (x, y) های به اندازه کافی نزدیک به (x_0, y_0) ، $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ باشد.
 $f(x, y)$ has a local minimum at (x_0, y_0) if $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ for all (x, y) sufficiently close to (x_0, y_0) .

851. Stationary Points نقاط ساکن

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

بیشینه ها و کمینه های موضعی در نقاط ساکن رخ می دهند.
 Local maxima and local minima occur at stationary points.

852. Saddle Point نقاط زین اسبی
 نقطه ساکنی است که نه بیشینه موضعی و نه کمینه موضعی باشد.
 A stationary point which is neither a local maximum nor a local minimum

853. Second Derivative Test for Stationary Points آزمون مشتق دوم برای نقاط ساکن

Let (x_0, y_0) be a stationary point $(\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0)$ فرض کنید (x_0, y_0) نقطه ساکن باشد.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

نقطه کمینه موضعی است.

اگر $D > 0$, $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, (x_0, y_0) is a point of local minima.

اگر $D > 0$, $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, (x_0, y_0) is a point of local maxima. نقطه بیشینه

اگر $D < 0$, (x_0, y_0) is a saddle point. نقطه زین اسبی است. موضعی است.

اگر $D = 0$, the test fails. آزمون با شکست مواجه می شود.

854. Tangent Plane صفحه مماس

The equation of the tangent plane to the surface $z = f(x, y)$

at (x_0, y_0, z_0) is معادله صفحه مماس بر سطح $z = f(x, y)$ (رویه) در (x_0, y_0, z_0) عبارت است از

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

عمود بر سطح

855. Normal to Surface

The equation of the normal to the surface $z = f(x, y)$ at

(x_0, y_0, z_0) is معادله خط عمود بر سطح $z = f(x, y)$ (رویه) در (x_0, y_0, z_0) عبارت است از

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

8.9 Differential Operators عملگرهای دیفرانسیل

بردارهای واحد در راستای محاورهای مختصات

Unit vectors along the coordinate axes: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Scalar functions (scalar fields): $f(x, y, z), u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ توابع اسکالر (میدان اسکالر)

Gradient of a scalar field: $\text{grad } u, \nabla u$ گرادیان یک میدان اسکالر

Directional derivative: $\frac{\partial f}{\partial l}$ مشتق جهتی

Vector function (vector field): $\vec{F}(P, Q, R)$ تابع برداری (میدان برداری)

Divergence of a vector field: $\text{div } \vec{F}, \nabla \cdot \vec{F}$ دیورژانس میدان برداری

Curl of a vector field: $\text{curl } \vec{F}, \nabla \times \vec{F}$ کُرل میدان برداری

Laplacian operator: ∇^2 عملگر لاپلاس

856. Gradient of a Scalar Function گرادیان تابع اسکالر

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

$$\text{grad } u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

857. Directional Derivative مشتق جهتی

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma,$$

که در آن جهت با این بردار تعریف می شود.

where the direction is defined by the vector

$$\vec{I}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

858. Divergence of a Vector Field دیورژانس میدان برداری

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

859. Curl of a Vector Field کرل میدان برداری

$$\operatorname{curl} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

860. Laplacian Operator عملگر لاپلاس

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

861. $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \equiv 0$

862. $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) \equiv 0$

863. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$

864. $\operatorname{curl}(\operatorname{curl} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$

فصل ۹ *Chapter 9*

حساب انتگرال *Integral Calculus*

Functions: f, g, u, v توابع

Independent variables: x, t, ξ متغیرهای مستقل

Indefinite integral of a function: $\int f(x)dx, \int g(x)dx, \dots$ انتگرال نامعین تابع

Derivative of a function: $y'(x), f'(x), F'(x), \dots$ مشتق تابع

Real constants: C, a, b, c, d, k ثوابت حقیقی

Natural numbers: m, n, i, j اعداد طبیعی

9.1 Indefinite Integral انتگرال نامعین

$$865. \quad \int f(x)dx = F(x) + C \text{ if } F'(x) = f(x).$$

$$866. \quad \left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

$$867. \quad \int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$868. \quad \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$869. \quad \int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$870. \quad \int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$$

$$871. \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

$$872. \int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x)+C$$

$$873. \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$$

روش جایگذاری Method of Substitution

$$874. \int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt \text{ if } x = u(t).$$

انتگرال گیری جزء به جزء Integration by Parts

$$875. \int u dv = uv - \int v du ,$$

توابع مشتق پذیراند. where $u(x)$, $v(x)$ are differentiable functions. که در آن

9.2 Integrals of Rational Functions انتگرالهای توابع گویا

$$876. \int adx = ax + C$$

$$877. \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$878. \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$879. \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, p \neq -1.$$

$$880. \int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, n \neq -1.$$

$$881. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$882. \int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + C$$

$$883. \int \frac{ax + b}{cx + d} dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc - ad}{c^2} \ln|cx + d| + C$$

$$884. \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C, a \neq b.$$

$$885. \int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2} (a+bx - a \ln|a+bx|) + C$$

$$886. \int \frac{x^2 dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2} (a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2 \ln|a+bx| \right] + C$$

$$887. \int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right| + C$$

$$888. \int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right| + C$$

$$889. \int \frac{xdx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2} \left(\ln|a+bx| + \frac{a}{a+bx} \right) + C$$

$$890. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3} \left(a+bx - 2a \ln|a+bx| - \frac{a^2}{a+bx} \right) + C$$

$$891. \int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} + \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right| + C$$

$$892. \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$893. \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$894. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$895. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$896. \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$$

$$897. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$898. \int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + C$$

$$899. \int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) + C, ab > 0.$$

$$900. \int \frac{x dx}{a + bx^2} = \frac{1}{2b} \ln \left| x^2 + \frac{a}{b} \right| + C$$

$$901. \int \frac{dx}{x(a + bx^2)} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x^2}{a + bx^2} \right| + C$$

$$902. \int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{a + bx}{a - bx} \right| + C$$

$$903. \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C, \\ b^2 - 4ac > 0.$$

$$904. \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C, \\ b^2 - 4ac < 0.$$

9.3 Integrals of Irrational Functions انتگرالهای توابع ناگویا

$$905. \int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax + b} + C$$

$$906. \int \sqrt{ax + b} dx = \frac{2}{3a} (ax + b)^{3/2} + C$$

$$907. \int \frac{x dx}{\sqrt{ax + b}} = \frac{2(ax - 2b)}{3a^2} \sqrt{ax + b} + C$$

$$908. \int x\sqrt{ax+b} \, dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}(ax+b)^{3/2} + C$$

$$909. \int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b-ac}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b-ac}} \right| + C, \\ b-ac > 0.$$

$$910. \int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{ac-b}} \arctan \sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}} + C, \\ b-ac < 0.$$

$$911. \int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} \, dx = \frac{1}{c} \sqrt{(ax+b)(cx+d)} - \\ - \frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}} \ln \left| \sqrt{a(cx+d)} + \sqrt{c(ax+b)} \right| + C, a > 0.$$

$$912. \int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} \, dx = \frac{1}{c} \sqrt{(ax+b)(cx+d)} - \\ - \frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}} \arctan \sqrt{\frac{a(cx+d)}{c(ax+b)}} + C, (a < 0, c > 0).$$

$$913. \int x^2 \sqrt{a+bx} \, dx = \frac{2(8a^2 - 12abx + 15b^2x^2)}{105b^3} \sqrt{(a+bx)^3} + C$$

$$914. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2 - 4abx + 3b^2x^2)}{15b^3} \sqrt{a+bx} + C$$

$$915. \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} \right| + C, a > 0.$$

$$916. \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \left| \frac{a+bx}{-a} \right| + C, a < 0.$$

$$917. \int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}} dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C$$

$$918. \int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}} dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C$$

$$919. \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$$

$$920. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-a)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

$$921. \int \sqrt{a+bx-cx^2} dx = \frac{2cx-b}{4c} \sqrt{a+bx-cx^2} + \frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$$

$$922. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} \right| + C, a > 0.$$

$$923. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{2ax+b}{4a} \sqrt{b^2-4ac} + C, a < 0.$$

$$924. \int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C$$

$$925. \int x\sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{1}{3}(x^2+a^2)^{3/2} + C$$

$$926. \int x^2\sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$$

$$927. \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$$

$$928. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$$

$$929. \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2+a^2} + a \ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C$$

$$930. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C$$

$$931. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$$

$$932. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C$$

$$933. \int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$934. \int x\sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{1}{3}(x^2-a^2)^{3/2} + C$$

$$935. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + a \arcsin \frac{a}{x} + C$$

$$936. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$937. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$938. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2} + C$$

$$939. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$940. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{x} + C$$

$$941. \int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} + C$$

$$942. \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} + C$$

$$943. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + C$$

$$944. \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}} + C$$

$$945. \int (x^2 - a^2)^{3/2} dx = -\frac{x}{8}(2x^2 - 5a^2)\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$946. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$947. \int x\sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2} + C$$

$$948. \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$949. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \left| \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} \right| + C$$

$$950. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$951. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

$$952. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin \frac{x}{a} + C$$

$$953. \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$954. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$955. \int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + C$$

$$956. \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$$

$$957. \int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \arcsin \frac{bx+a^2}{a(x+b)} + C, \quad b > a.$$

$$958. \int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \left| \frac{x+b}{\sqrt{a^2-b^2} \sqrt{a^2-x^2} + a^2+bx} \right| + C, \\ b < a.$$

$$959. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 x} + C$$

$$960. \int (a^2-x^2)^{3/2} dx = \frac{x}{8} (5a^2-2x^2) \sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$961. \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2-x^2}} + C$$

انتگرالهای توابع مثلثاتی

9.4 Integrals of Trigonometric Functions

$$962. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$963. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$964. \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$965. \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$966. \int \sin^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C = \frac{1}{12} \cos 3x - \frac{3}{4} \cos x + C$$

$$967. \int \cos^3 x \, dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C = \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x + C$$

$$968. \int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x \, dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$969. \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x \, dx = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$970. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$971. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$972. \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \csc^3 x \, dx = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$973. \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \sec^3 x \, dx = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$974. \int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$975. \int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$976. \int \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

$$977. \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

$$978. \int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$979. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C$$

$$980. \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \, dx = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin x + C$$

$$981. \int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + C$$

$$982. \int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

$$983. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx = -\frac{1}{\sin x} + C = -\csc x + C$$

$$984. \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} \, dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \cos x + C$$

$$985. \int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x + C$$

$$986. \int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \ln |\tan x| + C$$

$$987. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} + \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$988. \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$989. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \tan x - \cot x + C$$

$$990. \int \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C, \\ m^2 \neq n^2.$$

$$991. \int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C, \\ m^2 \neq n^2.$$

$$992. \int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C, \\ m^2 \neq n^2.$$

$$993. \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$994. \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

$$995. \int \sin x \cos^n x \, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$$

$$996. \int \sin^n x \cos x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$$

$$997. \int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$998. \int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$999. \int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$1000. \int \operatorname{arc cot} x \, dx = x \operatorname{arc cot} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

9.5 Integrals of Hyperbolic Functions انتگرالهای توابع هایپربولیک

$$1001. \int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$1002. \int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$1003. \int \tanh x \, dx = \ln \cosh x + C$$

$$1004. \int \coth x \, dx = \ln |\sinh x| + C$$

$$1005. \int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + C$$

$$1006. \int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + C$$

$$1007. \int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + C$$

$$1008. \int \operatorname{csch} x \coth x dx = -\operatorname{csch} x + C$$

انتگرالهای توابع نمایی و لگاریتمی

9.6 Integrals of Exponential and Logarithmic Functions

$$1009. \int e^x dx = e^x + C$$

$$1010. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$1011. \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$1012. \int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C$$

$$1013. \int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$1014. \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| + C$$

$$1015. \int x^n \ln x dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C$$

$$1016. \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$$

$$1017. \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$$

9.7 Reduction Formulas روابط کاهشده

$$1018. \int x^n e^{mx} \, dx = \frac{1}{m} x^n e^{mx} - \frac{n}{m} \int x^{n-1} e^{mx} \, dx$$

$$1019. \int \frac{e^{mx}}{x^n} \, dx = -\frac{e^{mx}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{m}{n-1} \int \frac{e^{mx}}{x^{n-1}} \, dx, \, n \neq 1.$$

$$1020. \int \sinh^n x \, dx = \frac{1}{n} \sinh^{n-1} x \cosh x - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} x \, dx$$

$$1021. \int \frac{dx}{\sinh^n x} = -\frac{\cosh x}{(n-1)\sinh^{n-1} x} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sinh^{n-2} x}, \, n \neq 1.$$

$$1022. \int \cosh^n x \, dx = \frac{1}{n} \sinh x \cosh^{n-1} x \cosh x + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} x \, dx$$

$$1023. \int \frac{dx}{\cosh^n x} = -\frac{\sinh x}{(n-1)\cosh^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cosh^{n-2} x}, \, n \neq 1.$$

$$1024. \int \sinh^n x \cosh^m x \, dx = \frac{\sinh^{n+1} x \cosh^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \sinh^n x \cosh^{m-2} x \, dx$$

$$1025. \int \sinh^n x \cosh^m x \, dx = \frac{\sinh^{n-1} x \cosh^{m+1} x}{n+m}$$

$$-\frac{n-1}{n+m} \int \sinh^{n-2} x \cosh^m x dx$$

$$1026. \int \tanh^n x dx = -\frac{1}{n-1} \tanh^{n-1} x + \int \tanh^{n-2} x dx, n \neq 1.$$

$$1027. \int \coth^n x dx = -\frac{1}{n-1} \coth^{n-1} x + \int \coth^{n-2} x dx, n \neq 1.$$

$$1028. \int \operatorname{sech}^n x dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{sech}^{n-2} x dx, n \neq 1.$$

$$1029. \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$1030. \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}, n \neq 1.$$

$$1031. \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$1032. \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}, n \neq 1.$$

$$1033. \int \sin^n x \cos^m x dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n x \cos^{m-2} x dx$$

$$1034. \int \sin^n x \cos^m x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m}$$

$$+ \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} x \cos^m x dx$$

$$1035. \int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx, n \neq 1.$$

$$1036. \int \cot^n x dx = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx, n \neq 1.$$

$$1037. \int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx, n \neq 1.$$

$$1038. \int \csc^n x dx = -\frac{\csc^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx, n \neq 1.$$

$$1039. \int x^n \ln^m x dx = \frac{x^{n+1} \ln^m x}{n+1} - \frac{m}{n+1} \int x^n \ln^{m-1} x dx$$

$$1040. \int \frac{\ln^m x}{x^n} dx = -\frac{\ln^m x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{m}{n-1} \int \frac{\ln^{m-1} x}{x^n} dx, n \neq 1.$$

$$1041. \int \ln^n x dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx$$

$$1042. \int x^n \sinh x dx = x^n \cosh x - n \int x^{n-1} \cosh x dx$$

$$1043. \int x^n \cosh x dx = x^n \sinh x - n \int x^{n-1} \sinh x dx$$

$$1044. \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx$$

$$1045. \int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx$$

$$1046. \int x^n \sin^{-1} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$1047. \int x^n \cos^{-1} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos^{-1} x + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$1048. \int x^n \tan^{-1} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx$$

$$1049. \int \frac{x^n dx}{ax^n + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{ax^n + b}$$

$$1050. \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{-2ax - b}{(n-1)(b^2 - 4ac)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(b^2 - 4ac)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}, n \neq 1.$$

$$1051. \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}, n \neq 1.$$

$$1052. \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n} = -\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2 - a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n-1}}, n \neq 1.$$

9.8 Definite Integral انتگرال معین

انتگرال معین تابع Definite integral of a function: $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$, ...

مجموع ریمان Riemann sum: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

تغییرات کوچک Small changes: Δx_i

ضدمشتقها Antiderivatives: $F(x)$, $G(x)$

حدود انتگرال گیریها Limits of integrations: a, b, c, d

$$1053. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i ,$$

where $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

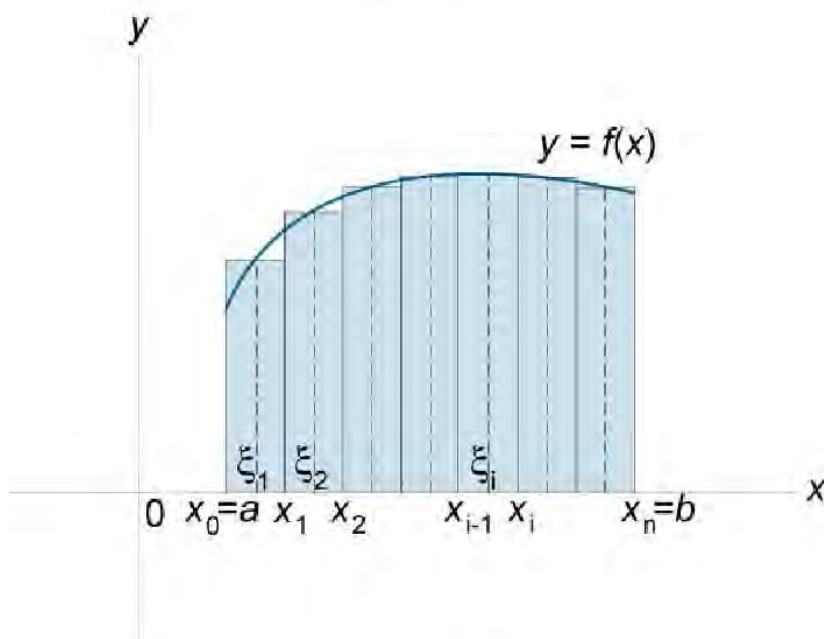


Figure 179. شکل ۱۷۹

$$1054. \int_a^b 1 dx = b - a$$

$$1055. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$1056. \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$1057. \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$1058. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$1059. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$1060. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ for } a < c < b.$$

$$1061. \int_a^b f(x) dx \geq 0 \text{ if } f(x) \geq 0 \text{ on } [a, b].$$

$$1062. \int_a^b f(x) dx \leq 0 \text{ if } f(x) \leq 0 \text{ on } [a, b].$$

1063. Fundamental Theorem of Calculus قضیه بنیادین حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ if } F'(x) = f(x).$$

1064. Method of Substitution روش جایگذاری

اگر $x = g(t)$, then Δ نگاه

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t))g'(t) dt,$$

که در آن where

$$c = g^{-1}(a), d = g^{-1}(b).$$

1065. Integration by Parts انتگرال گیری جزء به جزء

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

1066. Trapezoidal Rule قاعده دوزنقه ای

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

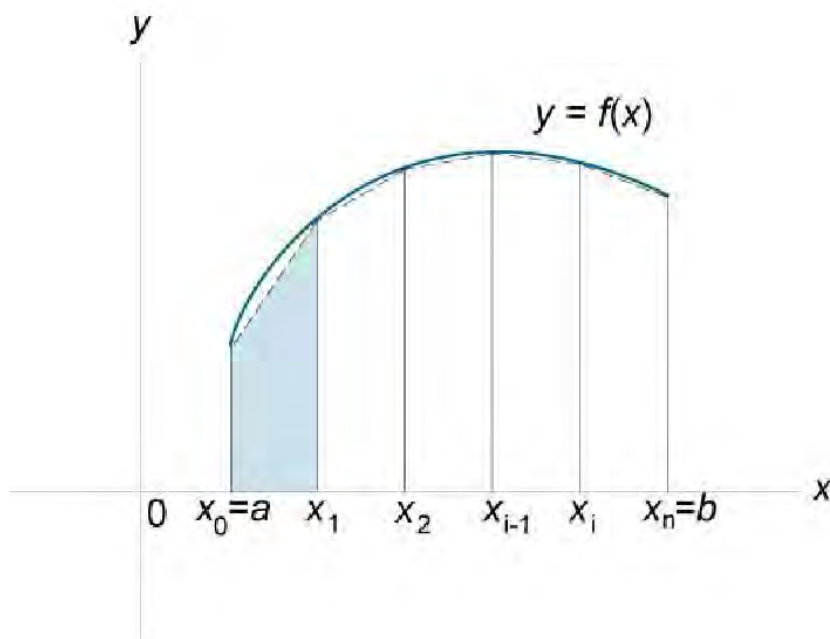


Figure 180. شکل ۱۸۰

1067. Simpson's Rule قاعده سیمپسون

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

where که در آن

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

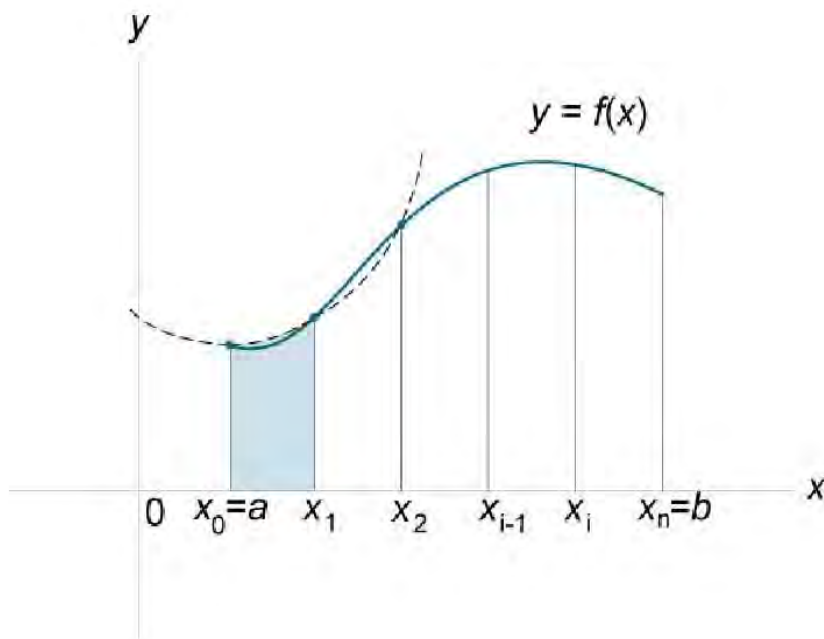


Figure 181. شکل ۱۸۱

1068. Area Under a Curve مساحت زیر منحنی

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

که در آن where $F'(x) = f(x)$.

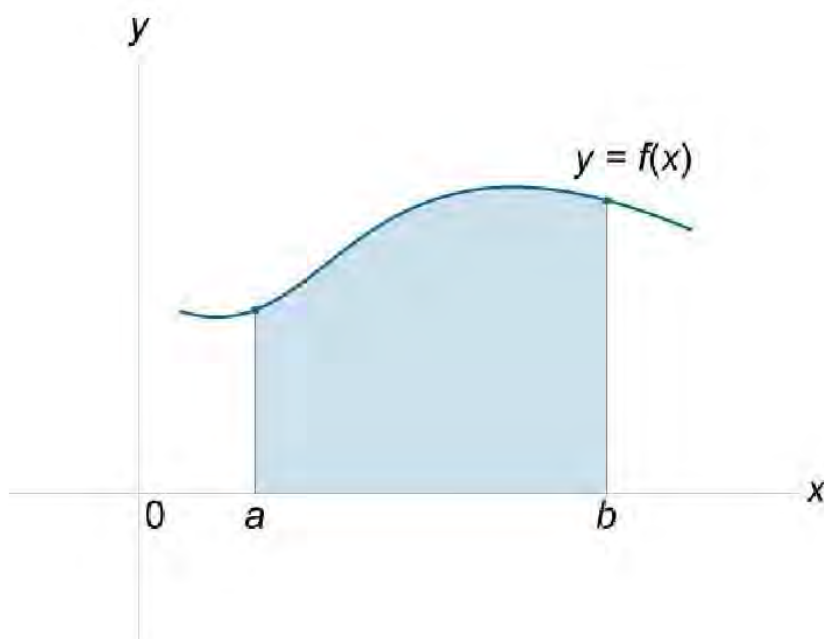


Figure 182. شکل ۱۸۲

1069. Area Between Two Curves مساحت میان دو منحنی

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = F(b) - G(b) - F(a) + G(a),$$

where $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. که در آن

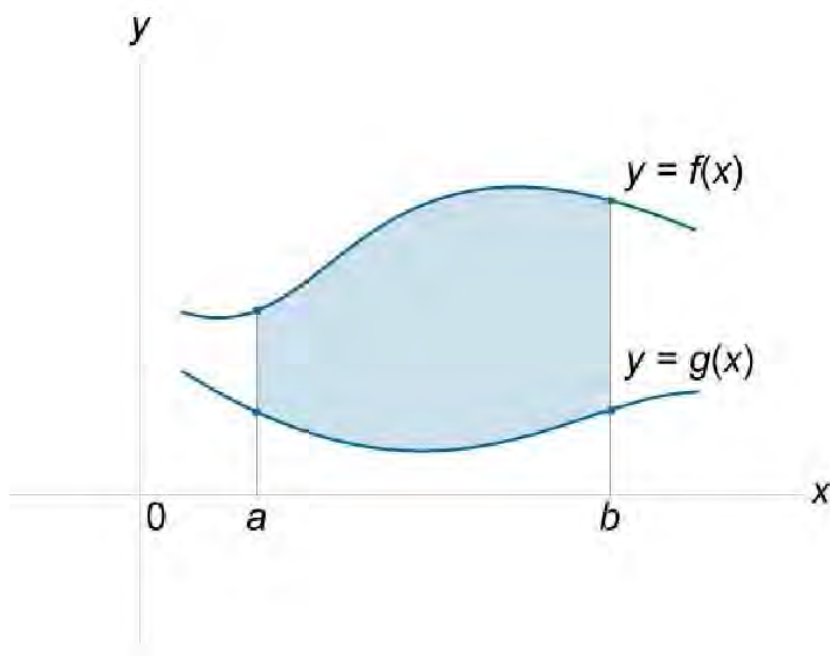


Figure 183. شکل ۱۸۳

9.9 Improper Integral انتگرال ناسره

انتگرال ناسره نامیده می شود اگر
1070. The definite integral $\int_a^b f(x)dx$ is called an **improper integral** if

- a or b is infinite, یا b بی نهایت باشند،
 - $f(x)$ has one or more points of discontinuity in the interval $[a, b]$. $f(x)$ یک یا چند نقطه ناپیوستگی در بازه $[a, b]$ داشته باشد.
- اگر $f(x)$ تابع پیوسته ای در بازه

1071. If $f(x)$ is a continuous function on $[a, \infty)$, then باشد، آنگاه

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x)dx .$$

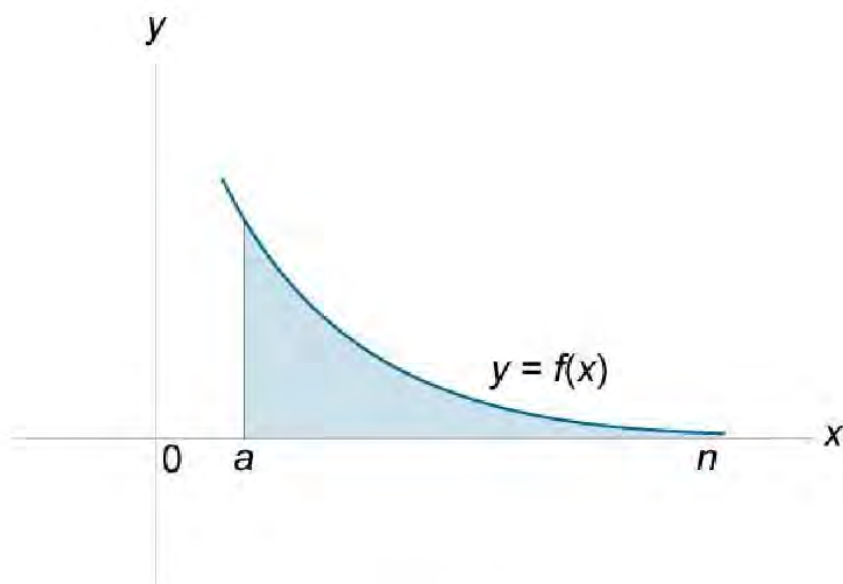


Figure 184. شکل ۱۸۴

اگر $f(x)$ تابع پیوسته ای در بازه

باشد، آنگاه **1072.** If $f(x)$ is a continuous function on $(-\infty, b]$, then

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow -\infty} \int_n^b f(x) dx.$$

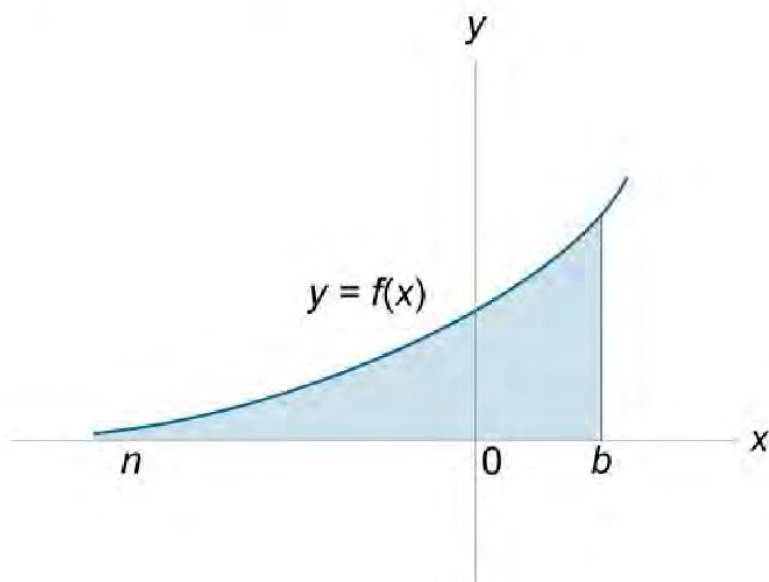


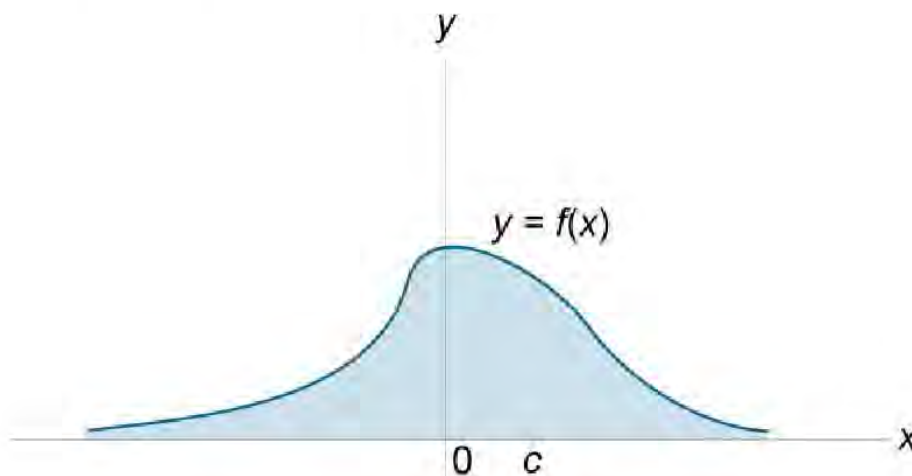
Figure 185. شکل ۱۸۵

Note : The improper integrals in 1071, 1072 are **convergent** if the limits exist and are finite; otherwise the integrals are **divergent**.

یادداشت: انتگرالهای ناسره در روابط ۱۰۷۱ و ۱۰۷۲ همگرا هستند اگر حدها وجود داشته و بی نهایت نباشند؛

در غیر این صورت انتگرالها واگرا می باشند.

1073.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$



شکل ۱۸۶

Figure 186.

اگر برای عدد حقیقی c ، هر دو انتگرال در سمت راست همگرا باشند، آنگاه انتگرال مجموع نیز همگرا می باشد؛ در غیر این صورت واگرا می باشد.

If for some real number c , both of the integrals in the right side are convergent, then the integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ is also convergent; otherwise it is divergent.

1074. Comparison Theorems قضیه های مقایسه

Let $f(x)$ and $g(x)$ be continuous functions on the closed interval $[a, \infty)$. Suppose that $0 \leq g(x) \leq f(x)$ for all x in $[a, \infty)$.

$f(x)$ و $g(x)$ توابعی پیوسته بر روی بازه بسته $[a, \infty)$ می باشند. فرض کنید که برای تمامی x های در بازه $[a, \infty)$ ، شرط $0 \leq g(x) \leq f(x)$ برقرار باشد.

- نیز همگراست. همگرا باشد، آنگاه $\int_a^\infty g(x)dx$ is also
- If $\int_a^\infty f(x)dx$ is convergent, then $\int_a^\infty g(x)dx$ is also convergent,
- نیز واگراست. واگرا باشد، آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ is also divergent.
- If $\int_a^\infty g(x)dx$ is divergent, then $\int_a^\infty f(x)dx$ is also divergent.

همگرایی مطلق

1075. Absolute Convergence

همگرایی مطلق است. همگرا باشد، آنگاه انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$ is abso-

If $\int_a^\infty |f(x)|dx$ is convergent, then the integral $\int_a^\infty f(x)dx$ is abso-

lutely convergent.

1076. Discontinuous Integrand تابع تحت انتگرال ناپیوسته

Let $f(x)$ be a function which is continuous on the interval $[a, b)$ but is discontinuous at $x = b$. Then

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

$f(x)$ تابعی است که در بازه $[a, b)$ پیوسته بوده ولی در $x=b$ ناپیوسته است. آنگاه

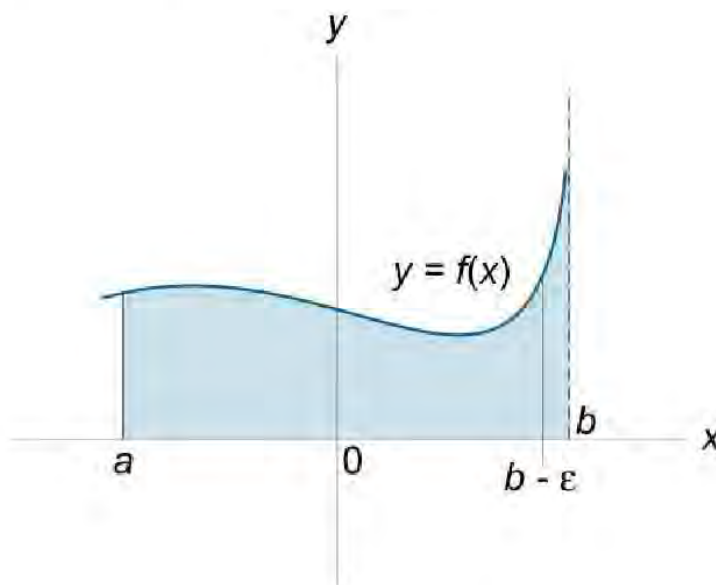


Figure 187. شکل ۱۸۷

1077. Let $f(x)$ be a continuous function for all real numbers x in the interval $[a, b]$ except for some point c in (a, b) . Then

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{c+\delta}^b f(x) dx.$$

$f(x)$ تابعی است که برای همه اعداد حقیقی x در بازه $[a, b]$ به جز نقطه c در بازه (a, b) پیوسته است. آنگاه

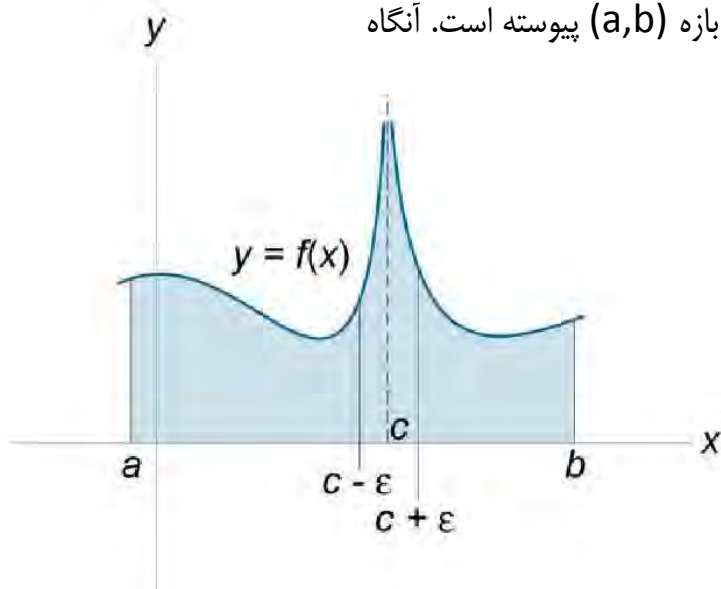


Figure 188. شکل ۱۸۸

9.10 Double Integral انتگرال دو گانه

Functions of two variables: $f(x, y)$, $f(u, v)$, ... توابع دو متغیره

Double integrals: $\iint_R f(x, y) dx dy$, $\iint_R g(x, y) dx dy$, ... انتگرالهای دو گانه

Riemann sum: $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j$ مجموع ریمان

Small changes: Δx_i , Δy_j تغییرات اندک

Regions of integration: R , S نواحی انتگرال گیری

Polar coordinates: r , θ مختصات قطبی

Area: A مساحت

Surface area: S مساحت سطح (رویه)

Volume of a solid: V حجم جسم سه بعدی

Mass of a lamina: m جرم ورق

Density: $\rho(x, y)$ چگالی

First moments: M_x, M_y ممانهای (گشتاورهای) اول

Moments of inertia: I_x, I_y, I_0 ممانهای (گشتاورهای) اینرسی

Charge of a plate: Q بار ورق

Charge density: $\sigma(x, y)$ چگالی بار

Coordinates of center of mass: $\bar{x}, \bar{y}$ مختصات مرکز جرم

Average of a function: μ میانگین تابع

1078. Definition of Double Integral تعریف انتگرال دوگانه

The double integral over a rectangle $[a, b] \times [c, d]$ is defined

to be انتگرال دوگانه بر روی مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dA = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

که در آن (u_i, v_j) نقطه ای در مستطیل است

where (u_i, v_j) is some point in the rectangle

$(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$, and $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

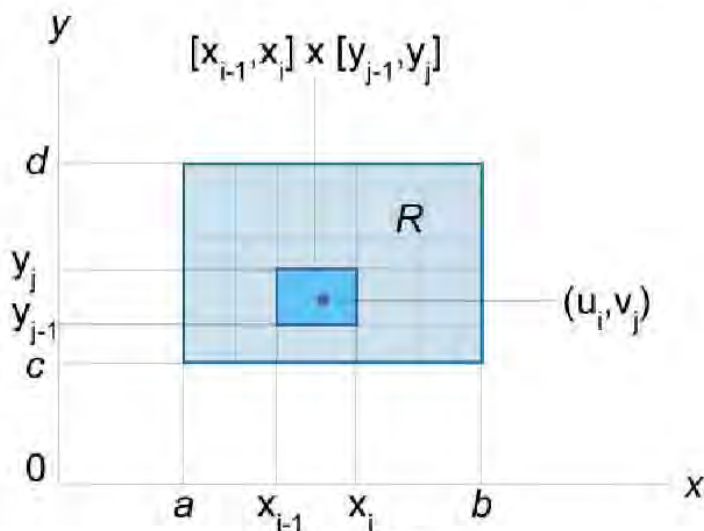


Figure 189. شکل ۱۸۹

انتگرال دوگانه بر روی ناحیه کلی R به صورت زیر است

The double integral over a general region R is

$$\iint_R f(x,y) dA = \iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x,y) dA ,$$

که در آن مستطیل $[a,b] \times [c,d]$ شامل R است،

where rectangle $[a,b] \times [c,d]$ contains R ,

$g(x,y) = f(x,y)$ if $f(x,y)$ is in R and $g(x,y) = 0$ otherwise.

اگر $f(x,y)$ درون R واقع باشد، $g(x,y) = f(x,y)$ است و در غیر این صورت $g(x,y) = 0$ می باشد.

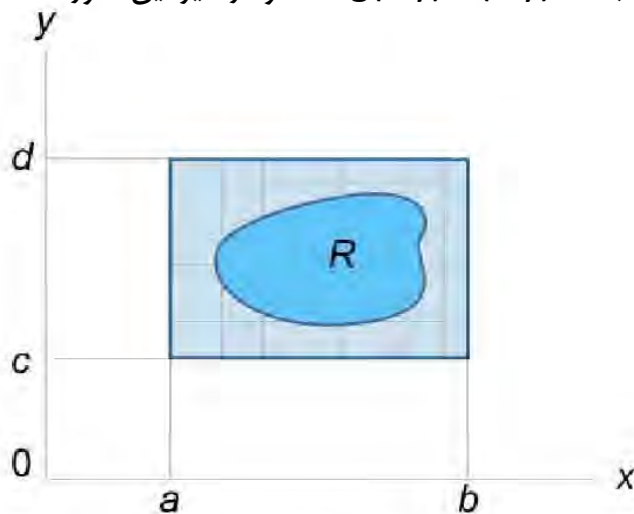


Figure 190. شکل ۱۹۰

1079. $\iint_R [f(x,y) + g(x,y)] dA = \iint_R f(x,y) dA + \iint_R g(x,y) dA$

1080. $\iint_R [f(x,y) - g(x,y)] dA = \iint_R f(x,y) dA - \iint_R g(x,y) dA$

1081. $\iint_R kf(x,y) dA = k \iint_R f(x,y) dA ,$

که در آن k ثابت است. where k is a constant.

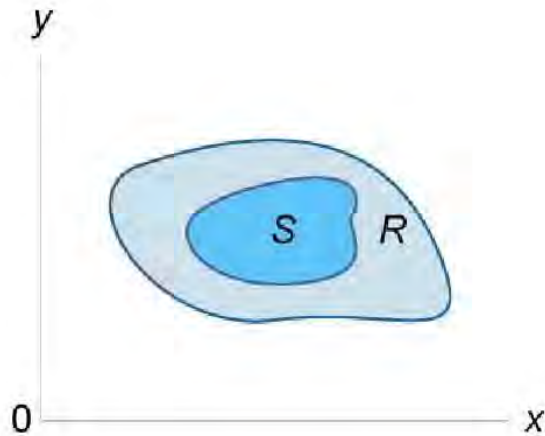
بر روی R برقرار باشد، آنگاه اگر

1082. If $f(x,y) \leq g(x,y)$ on R , then $\iint_R f(x,y) dA \leq \iint_R g(x,y) dA .$

آنگاه بر روی R برقرار باشد و اگر

1083. If $f(x,y) \geq 0$ on R and $S \subset R$, then

$$\iint_S f(x, y) dA \leq \iint_R f(x, y) dA.$$

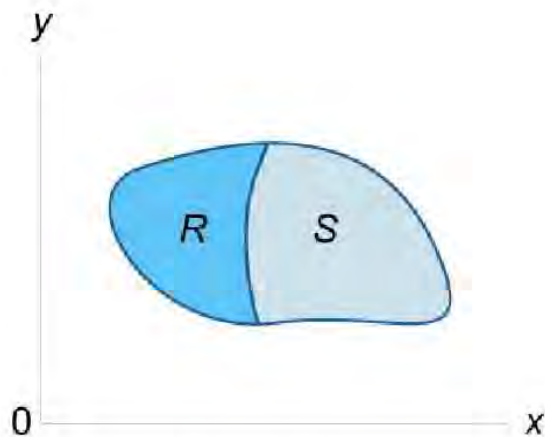


شکل ۱۹۱

Figure 191.

بر روی R برقرار باشد و R و S نواحی غیر همپوشانی باشند، آنگاه
 اگر
1084. If $f(x, y) \geq 0$ on R and R and S are non-overlapping regions, then $\iint_{R \cup S} f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_S f(x, y) dA.$

Here $R \cup S$ is the union of the regions R and S .
 اجتماع نواحی R و S است. در اینجا



شکل ۱۹۲ Figure 192.

1085. Iterated Integrals and Fubini's Theorem انتگرالهای مکرر و قضیه فوبینی

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) dy dx$$

for a region of type I, برای ناحیه نوع یک
 $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, p(x) \leq y \leq q(x)\}.$

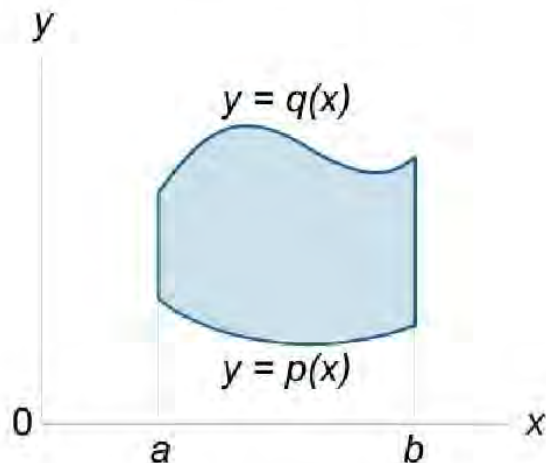


Figure 193. شکل ۱۹۳

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy$$

for a region of type II, برای ناحیه نوع دو
 $R = \{(x, y) | u(y) \leq x \leq v(y), c \leq y \leq d\}.$

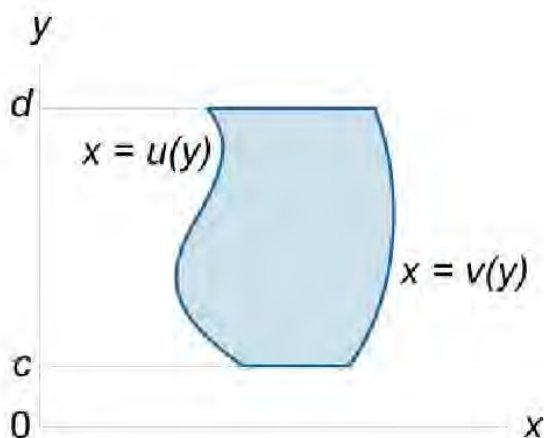


Figure 194. شکل ۱۹۴

1086. Double Integrals over Rectangular Regions

اگر R ناحیه مستطیلی $[a, b] \times [c, d]$ باشد، آنگاه
If R is the rectangular region $[a, b] \times [c, d]$, then

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

در حالت خاصی که تابع تحت انتگرال $f(x, y)$ را بتوان به صورت $g(x)h(y)$ نوشت، خواهیم داشت

In the special case where the integrand $f(x, y)$ can be written as $g(x)h(y)$ we have

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R g(x)h(y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

1087. Change of Variables

تغییر متغیرها

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

ژاکوبین تبدیلات
where $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ is the jacobian of the trans-

formations $(x, y) \rightarrow (u, v)$, and S is the pullback of R which

است، و S تبدیل یافته ناحیه R است که

که می تواند با روابط $x=x(u,v)$ و $y=y(u,v)$ به تعریف R ، محاسبه شود.
can be computed by $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ into the definition of R .

1088. Polar Coordinates مختصات قطبی
 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

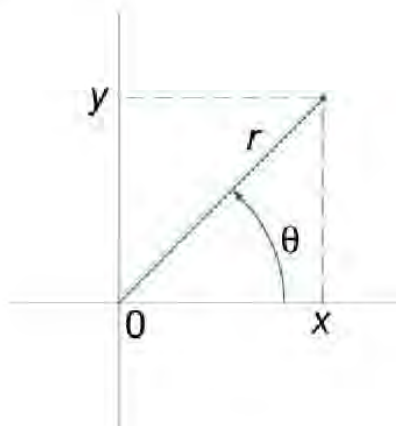


Figure 195.

1089. Double Integrals in Polar Coordinates انتگرالهای دوگانه در مختصات قطبی
دیفرانسیل $dx dy$ برای مختصات قطبی برابر است با

The Differential $dx dy$ for Polar Coordinates is

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr d\theta = r dr d\theta .$$

اگر ناحیه R به صورت زیر تعیین شود:

Let the region R is determined as follows:

$$0 \leq g(\theta) \leq r \leq h(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, \text{ where } \beta - \alpha \leq 2\pi .$$

Then آنگاه

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta .$$

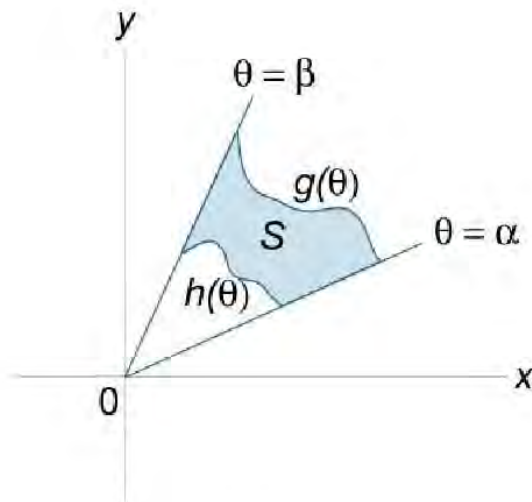


Figure 196. شکل ۱۹۶

اگر ناحیه R مستطیل قطبی باشد که با روابط زیر تعریف شده باشد
 If the region R is the **polar rectangle** given by
 $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, where $\beta - \alpha \leq 2\pi$,
 then که در آن

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

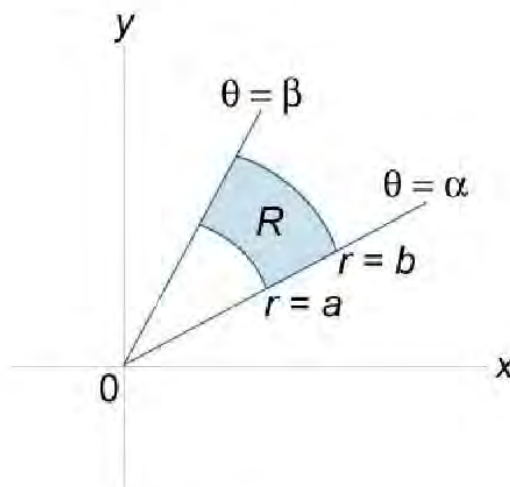


Figure 197. شکل ۱۹۷

1090. Area of a Region مساحت ناحیه

$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} dy dx \quad (\text{for a type I region}). \quad (\text{برای ناحیه نوع یک})$$

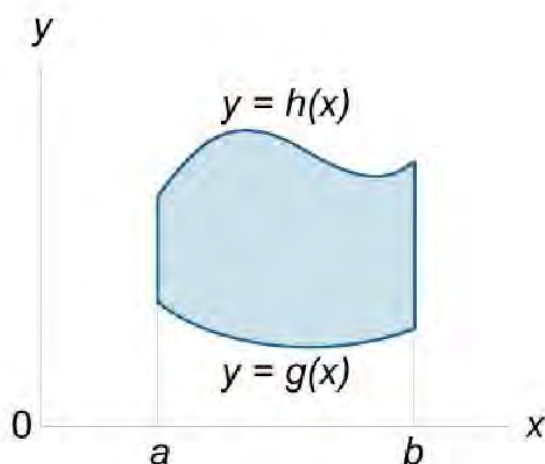


Figure 198. شکل ۱۹۸

$$A = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} dx dy \quad (\text{for a type II region}). \quad (\text{برای ناحیه نوع دو})$$

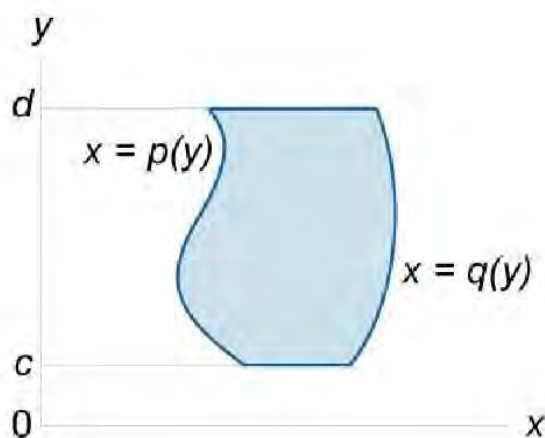
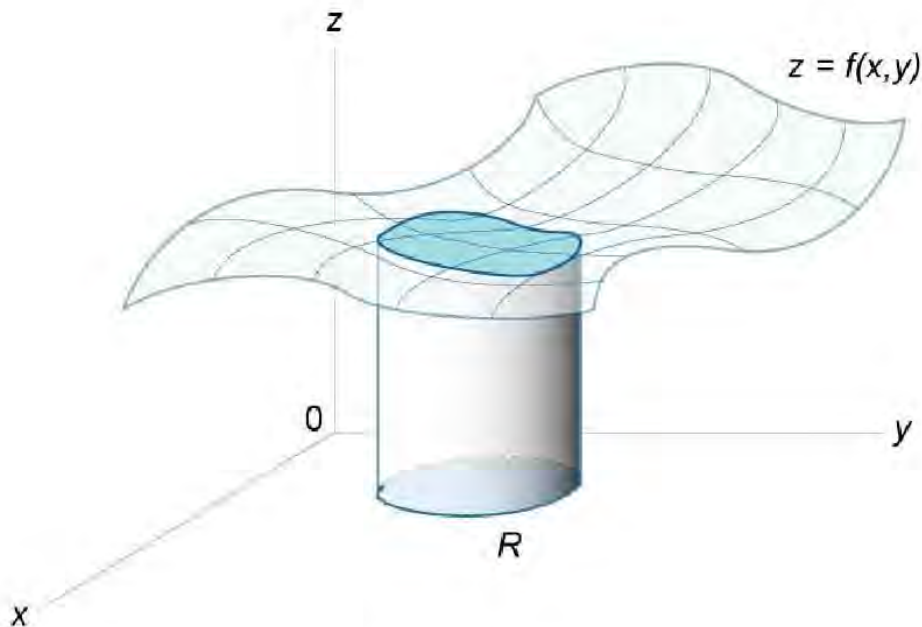


Figure 199. شکل ۱۹۹

1091. Volume of a Solid حجم جسم سه بعدی

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$



شکل ۲۰۰

Figure 200.

اگر R ناحیه نوع یک با مرزهای $x=a$, $x=b$, $y=h(x)$ و $y=g(x)$ باشد، آنگاه

If R is a type I region bounded by $x = a$, $x = b$, $y = h(x)$, $y = g(x)$, then

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy dx.$$

اگر R ناحیه نوع دو با مرزهای $y=c$, $y=d$, $x=p(y)$ و $x=q(y)$ باشد، آنگاه

If R is a type II region bounded by $y = c$, $y = d$, $x = p(y)$, $x = q(y)$, then

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx dy.$$

اگر بر روی ناحیه R ، $f(x,y) \geq g(x,y)$ باشد، آنگاه حجم جسم سه بعدی میان $z_1=f(x,y)$ و $z_2=g(x,y)$ بر روی ناحیه R با رابطه زیر به دست می آید

If $f(x,y) \geq g(x,y)$ over a region R , then the volume of the solid between $z_1=f(x,y)$ and $z_2=g(x,y)$ over R is given by

$$V = \iint_R [f(x,y) - g(x,y)] dA .$$

مساحت و حجم در مختصات قطبی

اگر S ناحیه ای در صفحه xy باشد

که مرزهای آن برابر باشد با

1092. Area and Volume in Polar Coordinates

If S is a region in the xy -plane bounded by $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$,

$r = h(\theta)$, $r = g(\theta)$,

then آنگاه

$$A = \iint_S dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h(\theta)}^{g(\theta)} r dr d\theta ,$$

$$V = \iiint_S f(r,\theta) r dr d\theta .$$

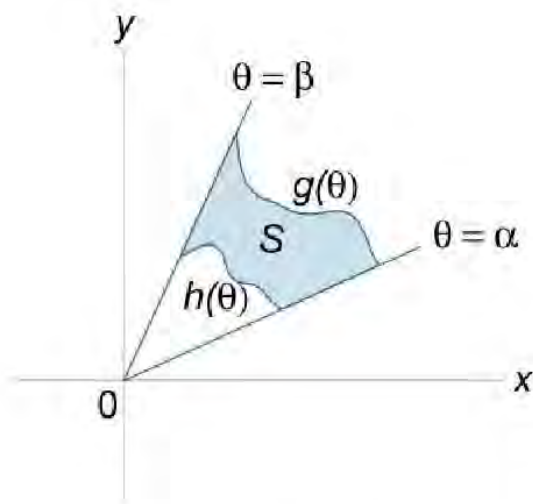


Figure 201. شکل ۲۰۱

1093. Surface Area (مساحت سطح (رویه))

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

جرم ورق

1094. Mass of a Lamina

$$m = \iint_R \rho(x, y) dA,$$

که در آن ورق ناحیه R را در بر گرفته و چگالی آن در نقطه (x, y) عبارت است از $\rho(x, y)$.

where the lamina occupies a region R and its density at a point (x, y) is $\rho(x, y)$.

1095. Moments (گشتاورها (ممانها)

The moment of the lamina about the x -axis is given by formula گشتاور (ممان) ورق حول محور x با این رابطه به دست می آید

$$M_x = \iint_R y \rho(x, y) dA.$$

گشتاور (ممان) ورق حول محور y برابر است با

The moment of the lamina about the y -axis is

$$M_y = \iint_R x \rho(x, y) dA.$$

ممان اینرسی حول محور x برابر است با

The moment of inertia about the x -axis is

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y) dA.$$

ممان اینرسی حول محور y برابر است با

The moment of inertia about the y -axis is

$$I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y) dA.$$

ممان اینرسی قطبی برابر است با

The polar moment of inertia is

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA.$$

1096. Center of Mass مرکز جرم

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_R x \rho(x, y) dA = \frac{\iint_R x \rho(x, y) dA}{\iint_R \rho(x, y) dA},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_R y \rho(x, y) dA = \frac{\iint_R y \rho(x, y) dA}{\iint_R \rho(x, y) dA}.$$

بار ورق

1097. Charge of a Plate

$$Q = \iint_R \sigma(x, y) dA,$$

که در آن بار الکتریکی بر روی ناحیه R گسترده شده و چگالی بار آن در نقطه (x, y) برابر است با $\sigma(x, y)$.

where electrical charge is distributed over a region R and its charge density at a point (x, y) is $\sigma(x, y)$.

1098. Average of a Function میانگین تابع

$$\mu = \frac{1}{S} \iint_R f(x, y) dA,$$

where $S = \iint_R dA$. که در آن

9.11 Triple Integral انتگرال سه گانه

Functions of three variables: $f(x, y, z), g(x, y, z), \dots$ توابع سه متغیره

Triple integrals: $\iiint_G f(x, y, z) dV, \iiint_G g(x, y, z) dV, \dots$ انتگرالهای سه گانه

Riemann sum: $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(u_i, v_j, w_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ مجموع ریمان

Small changes: $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$ تغییرات اندک

Limits of integration: a, b, c, d, r, s حدود انتگرال گیری

Regions of integration: G, T, S نواحی انتگرال گیری

Cylindrical coordinates: r, θ, z مختصات استوانه ای

Spherical coordinates: r, θ, ϕ مختصات کروی

Volume of a solid: V حجم جسم سه بعدی

Mass of a solid: m جرم جسم سه بعدی

Density: $\mu(x, y, z)$ چگالی

Coordinates of center of mass: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ مختصات مرکز جرم

First moments: M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} ممانهای (گشتاورهای) اول

Moments of inertia: $I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}, I_x, I_y, I_z, I_0$ ممانهای (گشتاورهای) اینرسی

تعریف انتگرال سه گانه

1099. Definition of Triple Integral

The triple integral over a parallelepiped $[a, b] \times [c, d] \times [r, s]$

is defined to be انتگرال سه گانه بر روی متوازی السطوح $[a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\iiint_{[a, b] \times [c, d] \times [r, s]} f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_j \rightarrow 0 \\ \max \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(u_i, v_j, w_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

که در آن where (u_i, v_j, w_k) is some point in the parallelepiped

$(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \times (z_{k-1}, z_k)$, and $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

نقطه ای در متوازی السطوح است

$$1100. \iiint_G [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dV = \iiint_G f(x, y, z) dV + \iiint_G g(x, y, z) dV$$

$$1101. \iiint_G [f(x, y, z) - g(x, y, z)] dV = \iiint_G f(x, y, z) dV - \iiint_G g(x, y, z) dV$$

$$1102. \iiint_G kf(x, y, z) dV = k \iiint_G f(x, y, z) dV,$$

where k is a constant. که در آن k ثابت است.

و G و T نواحی پایه غیرهمپوشان هستند، آنگاه

1103. If $f(x, y, z) \geq 0$ and G and T are nonoverlapping basic regions, then

$$\iiint_{G \cup T} f(x, y, z) dV = \iiint_G f(x, y, z) dV + \iiint_T f(x, y, z) dV.$$

Here $G \cup T$ is the union of the regions G and T .

در اینجا اجتماع نواحی G و T است.

برآورد انتگرالهای سه گانه با انتگرالهای مکرر. اگر جسم سه بعدی G مجموعه ای از نقاط (x, y, z) باشد به گونه ای که

1104. Evaluation of Triple Integrals by Repeated Integrals

If the solid G is the set of points (x, y, z) such that

$(x, y) \in R, \chi_1(x, y) \leq z \leq \chi_2(x, y)$, then χ_1, χ_2 are functions of x and y defined on a region R in the xy -plane.

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_R \left[\int_{\chi_1(x, y)}^{\chi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy, \quad \text{که در آن } R \text{ تصویر } G \text{ بر روی صفحه } xy \text{ است.}$$

where R is projection of G onto the xy -plane.

اگر جسم سه بعدی G مجموعه ای از نقاط (x, y, z) باشد به گونه ای که

If the solid G is the set of points (x, y, z) such that

$a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \chi_1(x, y) \leq z \leq \chi_2(x, y)$, then χ_1, χ_2 are functions of x and y defined on a region R in the xy -plane.

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\chi_1(x, y)}^{\chi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

انتگرالهای سه گانه بر روی متوازی السطوح

1105. Triple Integrals over Parallelepiped

If G is a parallelepiped $[a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, then

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_r^s f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx. \quad \text{اگر } G \text{ یک متوازی السطوح باشد،}$$

در حالت خاصی که تابع تحت انتگرال $f(x, y, z)$ را می توان به صورت $g(x)h(y)k(z)$ نوشت، داریم

In the special case where the integrand $f(x, y, z)$ can be written as $g(x)h(y)k(z)$ we have

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right) \left(\int_r^s k(z) dz \right).$$

1106. Change of Variables تغییر متغیرها

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$= \iiint_S f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dx dy dz,$$

where $\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$ is the jacobian of $\begin{matrix} \text{ژاکوبین تبدیل است} \\ \text{the transformations } (x,y,z) \rightarrow (u,v,w), \text{ and } S \text{ is the pull-back of } G \text{ which can be computed by } x=x(u,v,w), \\ y=y(u,v,w) \text{ و } y=y(u,v,w), x=x(u,v,w) \text{ و } y=y(u,v,w), z=z(u,v,w) \text{ into the definition of } G. \end{matrix}$ که در آن

the transformations $(x,y,z) \rightarrow (u,v,w)$, and S is the pull-back of G which can be computed by $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$ و $y=y(u,v,w), x=x(u,v,w)$ و $y=y(u,v,w), z=z(u,v,w)$ into the definition of G . $z=z(u,v,w)$ به تعریف G محاسبه می شود. انتگرالهای سه گانه در مختصات استوانه ای

1107. Triple Integrals in Cylindrical Coordinates

The differential $dx dy dz$ for cylindrical coordinates is

دیفرانسیل $dx dy dz$ برای مختصات استوانه ای برابر است با $dx dy dz = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} \right| dr d\theta dz = r dr d\theta dz$.

جسم سه بعدی G به صورت زیر تعریف شده است:

Let the solid G is determined as follows:

$(x,y) \in R, \chi_1(x,y) \leq z \leq \chi_2(x,y)$, آنگاه G بر روی صفحه xy است.

where R is projection of G onto the xy -plane. Then

$$\iiint_G f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

$$= \iint_{R(r,\theta)} \left[\int_{\chi_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{\chi_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz \right] r dr d\theta.$$

در اینجا S مستخرج G در مختصات استوانه ای است.

Here S is the pullback of G in cylindrical coordinates.

انتگرالهای سه گانه در مختصات کروی

1108. Triple Integrals in Spherical Coordinates

The Differential $dx dy dz$ for Spherical Coordinates is

دیفرانسیل $dx dy dz$ برای مختصات کروی برابر است با $dx dy dz = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} \right| dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

$$\iiint_G f(x,y,z) dx dy dz =$$

$$= \iiint_S f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

where the solid S is the pullback of G in spherical coordinates. The angle θ ranges from 0 to 2π , the angle φ

که در آن جسم سه بعدی S مستخرج از G در مختصات کروی است. زاویه θ از 0 تا 2π تغییر می کند، زاویه φ از 0 تا π تغییر می کند.

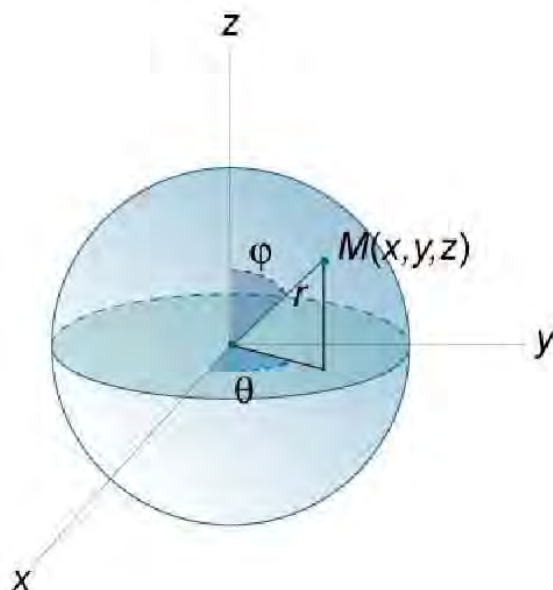


Figure 202. شکل ۲۰۲

1109. Volume of a Solid حجم جسم سه بعدی

$$V = \iiint_G dx dy dz$$

1110. Volume in Cylindrical Coordinates حجم در مختصات استوانه ای

$$V = \iiint_{S(r,\theta,z)} r dr d\theta dz$$

1111. Volume in Spherical Coordinates حجم در مختصات کروی

$$V = \iiint_{S(r,\theta,\varphi)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

جرم جسم سه بعدی

1112. Mass of a Solid

که در آن جسم سه بعدی ناحیه G را اشغال می کند و چگالی آن در نقطه (x, y, z) برابر با $\mu(x, y, z)$ است.

$$m = \iiint_G \mu(x, y, z) dV,$$

where the solid occupies a region G and its density at a point (x, y, z) is $\mu(x, y, z)$.

1113. Center of Mass of a Solid مرکز جرم جسم سه بعدی

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m},$$

where که در آن

$$M_{yz} = \iiint_G x\mu(x, y, z) dV,$$

$$M_{xz} = \iiint_G y\mu(x, y, z) dV,$$

$$M_{xy} = \iiint_G z\mu(x, y, z) dV$$

ممانها (گشتاورها)ی اول حول صفحات به ترتیب، $x=0$,

$y=0$, $z=0$ می باشند، $\mu(x, y, z)$ تابع چگالی است.

are the first moments about the coordinate planes $x=0$, $y=0$, $z=0$, respectively, $\mu(x, y, z)$ is the density function.

1114. Moments of Inertia about the xy -plane (or $z=0$), yz -plane

($x=0$), and xz -plane ($y=0$) یا ممانها (گشتاورها)ی اینرسی حول صفحه xy

$$I_{xy} = \iiint_G z^2 \mu(x, y, z) dV,$$

($z=0$), صفحه yz ($x=0$), و صفحه xz ($y=0$)

$$I_{yz} = \iiint_G x^2 \mu(x, y, z) dV,$$

$$I_{xz} = \iiint_G y^2 \mu(x, y, z) dV.$$

ممانها (گشتاورها)ی اینرسی حول محور x ، محور y ، و محور z

1115. Moments of Inertia about the x -axis, y -axis, and z -axis

$$I_x = I_{xy} + I_{xz} = \iiint_G (z^2 + y^2) \mu(x, y, z) dV,$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz} = \iiint_G (z^2 + x^2) \mu(x, y, z) dV,$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz} = \iiint_G (y^2 + x^2) \mu(x, y, z) dV.$$

1116. Polar Moment of Inertia ممان (گشتاور) اینرسی قطبی

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz} = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dV$$

9.12 Line Integral انتگرال خط

Scalar functions: $F(x, y, z)$, $F(x, y)$, $f(x)$ توابع اسکالر

Scalar potential: $u(x, y, z)$ پتانسیل اسکالر

Curves: C , C_1 , C_2 منحنی ها

Limits of integrations: a, b, α, β حدود انتگرال گیریه

Parameters: t, s پارامترها

Polar coordinates: r, θ مختصات قطبی

Vector field: $\vec{F}(P, Q, R)$ میدان برداری

Position vector: $\vec{r}(s)$ بردار مکان

Unit vectors: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{\tau}$ بردار واحد

Area of region: S مساحت ناحیه

Length of a curve: L طول منحنی

Mass of a wire: m جرم سیم

Density: $\rho(x, y, z)$, $\rho(x, y)$ چگالی

Coordinates of center of mass: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ مختصات مرکز جرم

First moments: M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} ممانهای (گشتاورهای) اول

Moments of inertia: I_x, I_y, I_z ممانهای (گشتاورهای) اینرسی

Volume of a solid: V حجم جسم سه بعدی

Work: W کار

Magnetic field: $\vec{B}$ میدان مغناطیسی

Current: I جریان

Electromotive force: ε نیروی الکتروموتیو

Magnetic flux: ψ شار مغناطیسی

انتگرال خط یک تابع اسکالر

1117. Line Integral of a Scalar Function منحنی C با این تابع برداری داده شده است

Let a curve C be given by the vector function $\vec{r} = \vec{r}(s)$,

$0 \leq s \leq S$, and a scalar function F is defined over the curve C .

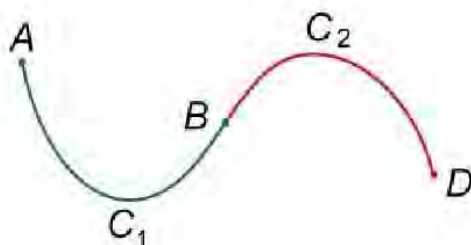
Then

و تابع اسکالر F بر روی منحنی C تعریف شده است. آنگاه

$$\int_0^S F(\vec{r}(s)) ds = \int_C F(x, y, z) ds = \int_C F ds,$$

که در آن ds دیفرانسیل طول کمان است. where ds is the arc length differential.

1118.
$$\int_{C_1 \cup C_2} F ds = \int_{C_1} F ds + \int_{C_2} F ds$$



شکل ۲۰۳

Figure 203.

اگر منحنی هموار C با این رابطه به صورت پارامتری نوشته شود،

1119. If the smooth curve C is parametrized by $\vec{r} = \vec{r}(t)$,

$\alpha \leq t \leq \beta$, then آنگاه

$$\int_C F(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

اگر C منحنی همواری در صفحه xy باشد که با این رابطه داده شده باشد،

1120. If C is a smooth curve in the xy -plane given by the equation

$y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, then آنگاه

$$\int_C F(x, y) ds = \int_a^b F(x, f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

انتگرال خط تابع اسکالر در مختصات قطبی

1121. Line Integral of Scalar Function in Polar Coordinates

که در آن منحنی C با تابع قطبی $r(\theta)$ تعریف می شود

$$\int_C F(x,y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} F(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta,$$

where the curve C is defined by the polar function $r(\theta)$.

انتگرال خط تابع برداری

1122. Line Integral of Vector Field

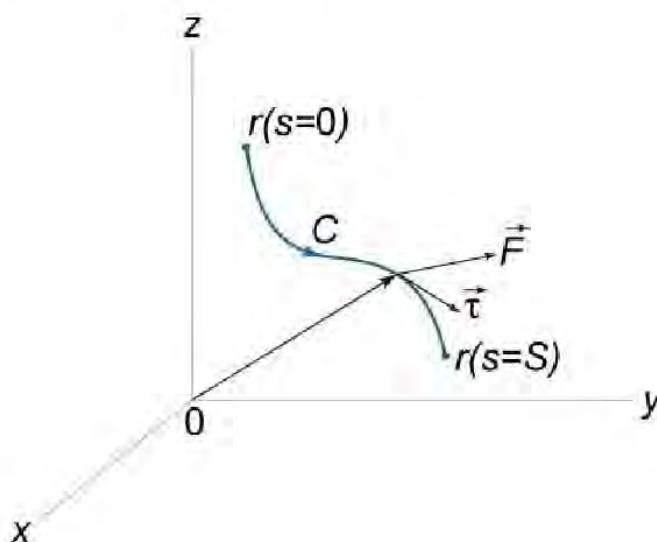
Let a curve C be defined by the vector function $\vec{r} = \vec{r}(s)$,

$0 \leq s \leq S$. Then

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

بردار واحد خط مماس بر این منحنی است.

is the unit vector of the tangent line to this curve.



شکل ۲۰۴

Figure 204.

میدان برداری $F(P,Q,R)$ بر روی منحنی C تعریف می شود.

Let a vector field $\vec{F}(P,Q,R)$ is defined over the curve C .

Then the line integral of the vector field $\vec{F}$ along the curve

C is

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_0^S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds.$$

آنگاه انتگرال خط میدان برداری F در راستای منحنی C برابر است با

خواص انتگرالهای خط میادین برداری

1123. Properties of Line Integrals of Vector Fields

$$\int_{-C} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = - \int_C (\vec{F} \cdot d\vec{r}), \quad \text{که در آن } -C \text{ بیانگر منحنی با راستای مخالف است.}$$

where $-C$ denote the curve with the opposite orientation.

$$\int_C (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_{C_1 \cup C_2} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_{C_1} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) + \int_{C_2} (\vec{F} \cdot d\vec{r}), \quad \text{که در آن اجتماع منحنیهای } C_1 \text{ و } C_2 \text{ است.}$$

where C is the union of the curves C_1 and C_2 .
اگر منحنی C به صورت پارامتری با رابطه زیر بیان شود،

1124. If the curve C is parameterized by $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$,

$\alpha \leq t \leq \beta$, then

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta} \left(P(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + R(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt$$

1125. If C lies in the xy -plane and given by the equation $y = f(x)$,

then اگر C در صفحه xy قرار داشته باشد و با رابطه $y=f(x)$ داده شده باشد، آنگاه

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b \left(P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \frac{df}{dx} \right) dx.$$

1126. Green's Theorem قضیه گرین

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C Pdx + Qdy,$$

where $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ is a continuous vector function with continuous first partial derivatives $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ in a some domain R , which is bounded by a closed, piecewise smooth curve C .

که در آن F یک تابع برداری پیوسته با مشتقات جزئی اول پیوسته در دامنه R است، که مرز این دامنه با منحنی بسته، هموار تکه ای C مشخص شده است.

مساحت ناحیه R که مرز آن با منحنی C مشخص شده است.

1127. Area of a Region R Bounded by the Curve C

$$S = \iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

استقلال مسیر انتگرالهای خط

1128. Path Independence of Line Integrals

The line integral of a vector function $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ is said to be **path independent**, if and only if P, Q, and R are continuous in a domain D, and if there exists some scalar function $u = u(x, y, z)$ (a **scalar potential**) in D such that

$$\vec{F} = \text{grad } u, \text{ or } \frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

انتگرال خط تابع برداری $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ گفته می شود که مستقل از مسیر است، اگر و تنها اگر P، Q و R در دامنه D پیوسته باشند، و اگر تابع اسکالر $u = u(x, y, z)$ (پتانسیل اسکالر) در D وجود داشته باشد به گونه ای که

آنگاه Then

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz = u(B) - u(A).$$

آزمون برای میدان پایستار

1129. Test for a Conservative Field

A vector field of the form $\vec{F} = \text{grad } u$ is called a **conservative field**. The line integral of a vector function $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ is path independent if and only if

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

میدان برداری به شکل $F = \text{grad } u$ میدان پایستار نامیده می شود. انتگرال خط تابع برداری $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ مستقل از مسیر است اگر و تنها اگر

اگر انتگرال خط در صفحه xy گرفته شود به گونه ای که

If the line integral is taken in xy-plane so that

$$\int_C P dx + Q dy = u(B) - u(A),$$

then the test for determining if a vector field is conservative can be written in the form

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

آنگاه آزمون برای تعیین اینکه آیا میدان برداری پایستار است یا نه می تواند به این شکل نوشته شود.

1130. Length of a Curve طول منحنی

$$L = \int_C ds = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt,$$

where C is a piecewise smooth curve described by the position vector $\vec{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. که در آن C منحنی هموار تکه ای است که با بردار مکان $r(t)$ توصیف می شود

If the curve C is two-dimensional, then

$$L = \int_C ds = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

اگر منحنی C دوبعدی باشد،
آنگاه

If the curve C is the graph of a function $y = f(x)$ in the xy -plane ($a \leq x \leq b$), then اگر منحنی C نمودار تابع $y=f(x)$ در صفحه xy باشد،

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

آنگاه

1131. Length of a Curve in Polar Coordinates طول منحنی در مختصات قطبی

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta,$$

where the curve C is given by the equation $r = r(\theta)$,

$\alpha \leq \theta \leq \beta$ in polar coordinates. که در آن منحنی C با معادله $r=r(\theta)$ در مختصات قطبی داده می شود، $\alpha \leq \theta \leq \beta$

جرم سیم

1132. Mass of a Wire

$$m = \int_C \rho(x, y, z) ds,$$

که در آن $\rho(x, y, z)$ جرم بر واحد طول سیم است.
where $\rho(x, y, z)$ is the mass per unit length of the wire.

If C is a curve parametrized by the vector function

$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$, then the mass can be computed by

the formula اگر منحنی C با تابع برداری $r(t)$ به صورت پارامتری نوشته شود،
آنگاه جرم را می توان با این فرمول محاسبه کرد

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

If C is a curve in xy -plane, then the mass of the wire is given by

اگر منحنی C در صفحه xy باشد، آنگاه جرم سیم به این صورت محاسبه می شود

$$m = \int_C \rho(x, y) ds,$$

یا or

(در شکل پارامتری)

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \text{ (in parametric form).}$$

1133. Center of Mass of a Wire مرکز جرم سیم

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m},$$

where که در آن

$$M_{yz} = \int_C x \rho(x, y, z) ds,$$

$$M_{xz} = \int_C y \rho(x, y, z) ds,$$

$$M_{xy} = \int_C z \rho(x, y, z) ds.$$

1134. Moments of Inertia ممانها (گشتاورها)ی اینرسی

The moments of inertia about the x -axis, y -axis, and z -axis are given by the formulas

ممانها (گشتاورها)ی اینرسی حول محور x ، محور y ، و محور z با این روابط داده می شود

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds,$$

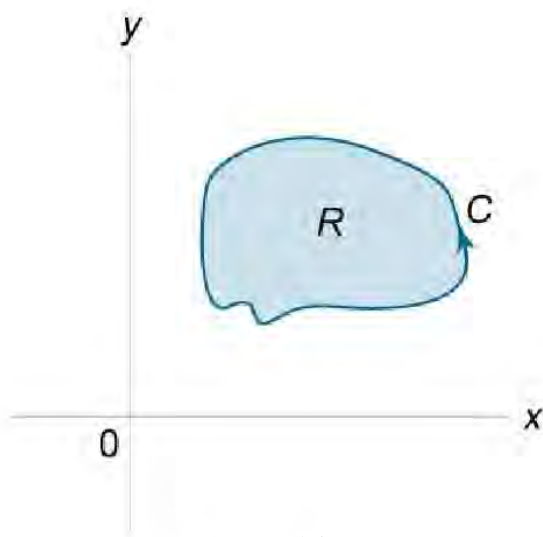
$$I_y = \int_C (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds.$$

1135. Area of a Region Bounded by a Closed Curve

$$S = \oint_C x dy = -\oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx .$$

مساحت ناحیه با مرز یک منحنی بسته



شکل ۲۰۵

Figure 205.

اگر منحنی بسته C به شکل پارامتری $r(t)$ داده شود، آنگاه مساحت را می توان با این رابطه محاسبه کرد

If the closed curve C is given in parametric form

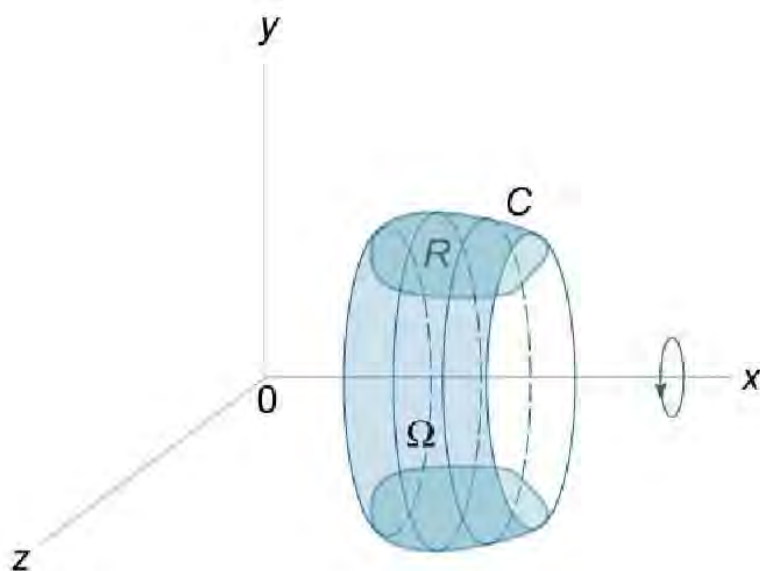
$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$, then the area can be calculated by the formula

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \frac{dy}{dt} dt = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t) \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(x(t) \frac{dy}{dt} - y(t) \frac{dx}{dt} \right) dt .$$

حجم جسم سه بعدی تشکیل شده با دوران منحنی بسته حول محور x

1136. Volume of a Solid Formed by Rotating a Closed Curve about the x -axis

$$V = -\pi \oint_C y^2 dx = -2\pi \oint_C xy dy = -\frac{\pi}{2} \oint_C 2xy dy + y^2 dx$$



شکل ۲۰۶

Figure 206.

1137. کار Work

Work done by a force $\vec{F}$ on an object moving along a curve

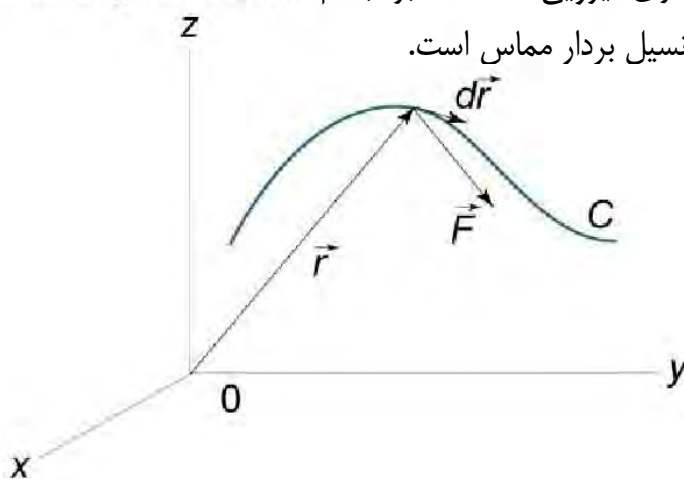
C is given by the line integral کار انجام شده توسط نیروی F بر روی جسم متحرک

$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, در راستای منحنی C با این انتگرال خط داده می شود

where $\vec{F}$ is the vector force field acting on the object, $d\vec{r}$ is

the unit tangent vector. که در آن F میدان برداری نیرویی است که بر جسم

وارد می شود، dr دیفرانسیل بردار مماس است.



شکل ۲۰۷

Figure 207.

اگر جسم در راستای منحنی C در صفحه xy حرکت کند، آنگاه

If the object is moved along a curve C in the xy -plane, then

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy,$$

اگر مسیر C با پارامتر t مشخص شود (t غالباً به معنی زمان است)، رابطه برای محاسبه کار می شود

If a path C is specified by a parameter t (t often means time), the formula for calculating work becomes

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + R(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt,$$

که در آن t از α به β می رود.

If a vector field $\vec{F}$ is conservative and $u(x, y, z)$ is a scalar potential of the field, then the work on an object moving from A to B can be found by the formula

$W = u(B) - u(A)$. اگر میدان برداری F پایستار باشد و $u(x, y, z)$ اسکالر پتانسیل میدان باشد، آنگاه.

قانون آمپر

1138. Ampere's Law

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I.$$

The line integral of a magnetic field $\vec{B}$ around a closed path C is equal to the total current I flowing through the area bounded by the path.

انتگرال خط میدان مغناطیسی B اطراف مسیر بسته C برابر با جریان کل I است که از مساحت با مرز مسیر بسته جریان می یابد.

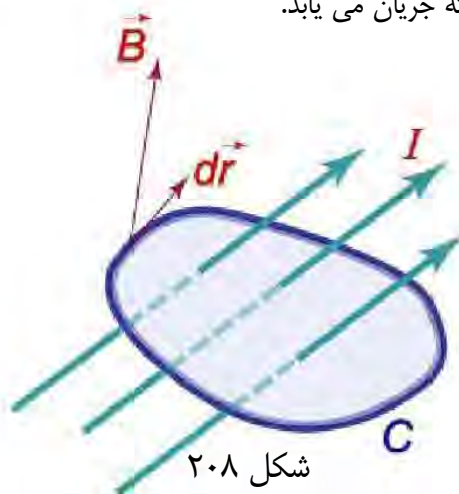


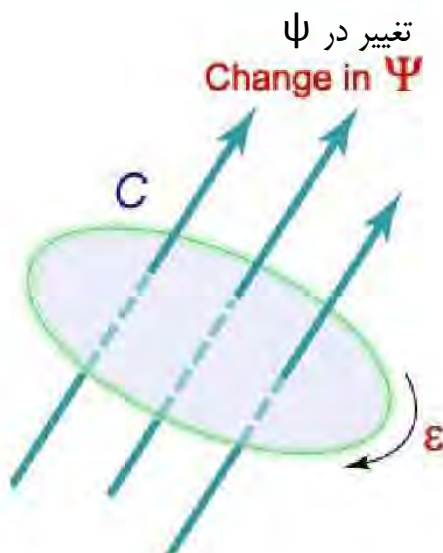
Figure 208.

1139. Faraday's Law قانون فارادی

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\psi}{dt}$$

نیروی الکتروموتیو (emf) ε القا شده اطراف حلقه بسته C برابر است با نرخ تغییر شار مغناطیسی ψ گذرنده از حلقه

The electromotive force (emf) ε induced around a closed loop C is equal to the rate of the change of magnetic flux ψ passing through the loop.



شکل ۲۰۹
Figure 209.

9.13 Surface Integral انتگرال سطح

Scalar functions: $f(x, y, z)$, $z(x, y)$ توابع اسکالر

Position vectors: $\vec{r}(u, v)$, $\vec{r}(x, y, z)$ بردارهای موقعیت

Unit vectors: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ بردارهای واحد

Surface: S (رویه) سطح

Vector field: $\vec{F}(P, Q, R)$ میدان برداری

Divergence of a vector field: $\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$ دیورژانس میدان برداری

Curl of a vector field: $\text{curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ کِرل میدان برداری

Vector element of a surface: $d\vec{S}$ المان برداری سطح

Normal to surface: $\vec{n}$ عمود (نرمال) بر سطح

Surface area: A مساحت سطح

Mass of a surface: m جرم سطح

Density: $\mu(x, y, z)$ چگالی

Coordinates of center of mass: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ مختصات مرکز جرم

First moments: M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} مختصات مرکز جرم

Moments of inertia: $I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}, I_x, I_y, I_z$ ممانها (گشتاورها)ی اینرسی

Volume of a solid: V حجم جسم سه بعدی

Force: $\vec{F}$ نیرو

Gravitational constant: G ثابت گرانش

Fluid velocity: $\vec{v}(\vec{r})$ سرعت سیال

Fluid density: ρ چگالی سیال

Pressure: $p(\vec{r})$ فشار

Mass flux, electric flux: Φ شار جرمی، شار الکتریکی

Surface charge: Q بار سطح

Charge density: $\sigma(x, y)$ چگالی بار

Magnitude of the electric field: $\vec{E}$ شدت میدان الکتریکی

انتگرال سطح تابع اسکالر

1140. Surface Integral of a Scalar Function

سطح S با این بردار موقعیت داده شده است
Let a surface S be given by the position vector $\vec{r}(u, v)$ که در آن محدوده (u, v) در دامنه

$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, $D(u, v)$ صفحه uv تغییر می کند

where (u, v) ranges over some domain $D(u, v)$ of the uv -

plane. انتگرال سطح تابع اسکالر $f(x, y, z)$ بر روی سطح S به این صورت تعریف می شود

The surface integral of a scalar function $f(x, y, z)$ over the surface S is defined as

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D(u, v)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv,$$

where the partial derivatives $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ and $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ are given by

که در آن مشتقات جزئی با روابط زیر داده می شود

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} (u, v) \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u} (u, v) \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u} (u, v) \vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} (u, v) \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v} (u, v) \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v} (u, v) \vec{k}$$

و ضرب برداری است. $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ is the cross product.

اگر سطح S (رویه) با معادله $z = z(x, y)$ داده شود که در آن $z(x, y)$ یک تابع مشتق پذیر در دامنه $D(x, y)$ باشد، آنگاه

1141. If the surface S is given by the equation $z = z(x, y)$ where $z(x, y)$ is a differentiable function in the domain $D(x, y)$, then

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D(x, y)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

انتگرال سطح میدان برداری F بر روی سطح S

1142. Surface Integral of the Vector Field $\vec{F}$ over the Surface S

- If S is oriented **outward**, then اگر S به سمت بیرون گرایش یافته باشد، آنگاه

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS$$

$$= \iint_{D(u, v)} \vec{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] du dv.$$

- If S is oriented **inward**, then اگر S به سمت درون گرایش یافته باشد، آنگاه

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS$$

$$= \iint_{D(u, v)} \vec{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right] du dv.$$

dS المان برداری سطح نامیده می شود. نقطه به معنی ضرب اسکالر بردارهای مرتبط است.

$d\vec{S} = \vec{n} dS$ is called the **vector element of the surface**. Dot means the scalar product of the appropriate vectors.

The partial derivatives $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ and $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ are given by

مشتقهای جزئی با این روابط داده می شود.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \cdot \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \cdot \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \cdot \vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \cdot \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \cdot \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \cdot \vec{k}.$$

اگر سطح S با معادله $z = z(x, y)$ داده شود، که در آن $z(x, y)$ یک تابع مشتق پذیر در دامنه $D(x, y)$ باشد، آنگاه

1143. If the surface S is given by the equation $z = z(x, y)$, where $z(x, y)$ is a differentiable function in the domain $D(x, y)$, then

- If S is oriented upward, i.e. the k -th component of the normal vector is positive, then
 اگر S به سمت بالا گرایش یافته باشد، یعنی مولفه k -ام بردار عمود (نرمال) مثبت باشد، آنگاه

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS$$

$$= \iint_{D(x, y)} \vec{F}(x, y, z) \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + \vec{k} \right) dx dy,$$

- If S is oriented downward, i.e. the k -th component of the normal vector is negative, then
 اگر S به سمت پایین گرایش یافته باشد، یعنی مولفه k -ام بردار عمود (نرمال) منفی باشد، آنگاه

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS$$

$$= \iint_{D(x, y)} \vec{F}(x, y, z) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} - \vec{k} \right) dx dy.$$

1144. $\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$

$$= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

where $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ are the components of the vector field $\vec{F}$.

$\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ are the angles between the outer unit normal vector $\vec{n}$ and the x -axis, y -axis, and z -axis, respectively.

که در آن $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ مولفه های میدان برداری F می باشند. $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ به ترتیب زوایای میان بردار عمود (نرمال) n و محور x ، محور y ، و محور z است.

اگر سطح (رویه) S به شکل پارامتری با بردار $r(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ داده شده باشد آنگاه رابطه پیشین به این صورت

1145. If the surface S is given in parametric form by the vector $\vec{r}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, then the latter formula can be written as

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{D(u,v)} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du dv,$$

where (u,v) ranges over some domain $D(u,v)$ of the uv -plane. که در آن (u,v) در دامنه $D(u,v)$ از صفحه uv تغییر می کند.

قضیه دیورژانس

1146. Divergence Theorem

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_G (\nabla \cdot \vec{F}) dV,$$

where $\vec{F}$ is a vector field whose components $P, Q,$ and R have continuous partial derivatives, که در آن

$\vec{F}(x, y, z) = \langle P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \rangle$ و R مشتقات جزئی پیوسته دارند.

is a vector field whose components $P, Q,$ and R have continuous partial derivatives,

$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ دیورژانس F است که با $\text{div} F$ نیز نشان داده می شود. نماد انتگرال دوگانه نشان داده شده به معنی انتگرال سطح است که بر روی سطح بسته گرفته می شود.

is the divergence of $\vec{F}$, also denoted $\text{div} \vec{F}$. The symbol

$\oiint$ indicates that the surface integral is taken over a closed surface.

قضیه دیورژانس در شکل مختصات

1147. Divergence Theorem in Coordinate Form

$$\oiint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

1148. Stoke's Theorem قضیه استوکس

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

where $\vec{F}(x, y, z) = \langle P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \rangle$ is a vector field whose components P , Q , and R have continuous partial derivatives, $\vec{F}$ یک میدان برداری است که مولفه های آن P, Q, R و مشتقات جزئی پیوسته دارند.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

is the curl of $\vec{F}$, also denoted $\text{curl } \vec{F}$.

The symbol $\oint$ indicates that the line integral is taken over a closed curve. $\oint$ کرل F است که با $\text{curl } F$ نیز نشان داده می شود. نماد انتگرال نشان داده شده به معنی انتگرال خط است که بر روی منحنی بسته گرفته می شود.

1149. Stoke's Theorem in Coordinate Form قضیه استوکس در شکل مختصات

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

1150. Surface Area مساحت سطح

$$A = \iint_S dS$$

1151. If the surface S is parameterized by the vector

$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, اگر سطح (رویه) S با این بردار به صورت پارامتری بیان شود، آنگاه مساحت سطح

$$A = \iint_{D(u, v)} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv, \quad \text{برابر است با}$$

where $D(u, v)$ is the domain where the surface $\vec{r}(u, v)$ is defined. که در آن $D(u, v)$ دامنه ای است که در آن سطح (رویه) $r(u, v)$ تعریف شده است.

اگر S به صورت صریح با تابع $z(x,y)$ بیان شود، آنگاه مساحت سطح برابر است با

1152. If S is given explicitly by the function $z(x,y)$, then the surface area is

$$A = \iint_{D(x,y)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

where $D(x,y)$ is the projection of the surface S onto the xy -plane. که در آن $D(x,y)$ تصویر سطح S بر روی صفحه xy است.

1153. Mass of a Surface جرم سطح

$$m = \iint_S \mu(x,y,z) dS,$$

که در آن $\mu(x,y,z)$ جرم بر واحد سطح (تابع چگالی) است.
where $\mu(x,y,z)$ is the mass per unit area (density function).

1154. Center of Mass of a Shell مرکز جرم پوسته

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m},$$

where که در آن

$$M_{yz} = \iint_S x \mu(x,y,z) dS,$$

$$M_{xz} = \iint_S y \mu(x,y,z) dS,$$

$$M_{xy} = \iint_S z \mu(x,y,z) dS$$

به ترتیب گشتاورها (ممانها)ی اول حول صفحات
مختصات $x=0$, $y=0$, $z=0$ می باشند.
 $\mu(x,y,z)$ تابع چگالی است.

are the first moments about the coordinate planes $x=0$, $y=0$, $z=0$, respectively. $\mu(x,y,z)$ is the density function.

1155. Moments of Inertia about the xy -plane (or $z=0$), yz -plane ($x=0$), and xz -plane ($y=0$)

$$I_{xy} = \iint_S z^2 \mu(x,y,z) dS,$$

$$I_{yz} = \iint_S x^2 \mu(x,y,z) dS,$$

گشتاورها (ممانها)ی اینرسی حول صفحه xy (یا
 $z=0$), صفحه yz ($x=0$), و صفحه xz ($y=0$)

$$I_{xz} = \iint_S y^2 \mu(x, y, z) dS.$$

1156. Moments of Inertia about the x-axis, y-axis, and z-axis

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dS,$$

گشتاورها (ممانها)ی اینرسی حول

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \mu(x, y, z) dS,$$

محور x، محور y، و محور z

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dS.$$

حجم جسم سه بعدی با مرزهای یک سطح (رویه)

1157. Volume of a Solid Bounded by a Closed Surface

$$V = \frac{1}{3} \left| \iiint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy \right|$$

1158. Gravitational Force نیروی گرانش

$$\vec{F} = Gm \iint_S \mu(x, y, z) \frac{\vec{r}}{r^3} dS,$$

که در آن m جرم نقطه (x_0, y_0, z_0) بیرون از سطح (رویه) است،

where m is a mass at a point $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ outside the surface,

$\vec{r} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$, $\mu(x, y, z)$ تابع چگالی است، و G ثابت
 $\mu(x, y, z)$ is the density function,
 and G is gravitational constant. گرانش است.

1159. Pressure Force نیروی فشار

$$\vec{F} = \iint_S p(\vec{r}) d\vec{S},$$

که در آن فشار $p(r)$ بر روی سطح (رویه) S که با بردار موقعیت r داده شده، اعمال می شود.

where the pressure $p(\vec{r})$ acts on the surface S given by the position vector $\vec{r}$.

1160. Fluid Flux (across the surface S) شار سیال (گذرنده از سطح (رویه) S)

$$\Phi = \iint_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{S},$$

که در آن $\vec{v}(\vec{r})$ سرعت سیال است. where $\vec{v}(\vec{r})$ is the fluid velocity.

- 1161. Mass Flux (across the surface S)** شار جرمی (گذرنده از سطح (رویه) S) $\Phi = \iint_S \rho \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$, که در آن $F = \rho \vec{v}$ میدان برداری است، ρ چگالی سیال است. where $\vec{F} = \rho \vec{v}$ is the vector field, ρ is the fluid density.

- 1162. Surface Charge** بار سطحی

$Q = \iint_S \sigma(x, y) dS$, که در آن $\sigma(x, y)$ چگالی بار سطحی است. where $\sigma(x, y)$ is the surface charge density.

- 1163. Gauss' Law** قانون گوس

The electric flux through any closed surface is proportional to the charge Q enclosed by the surface

$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, شار الکتریکی گذرنده از هر سطح (رویه) بسته متناسب با بار Q دربرگرفته شده توسط آن سطح (رویه) است.

where

Φ is the electric flux,

$\vec{E}$ is the magnitude of the electric field strength,

$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$ is permittivity of free space.

که در آن

Φ شار الکتریکی است،

E مقدار شدت میدان الکتریکی است،

ϵ_0 نفوذپذیری فضای آزاد است.

فصل ۱۰

معادلات دیفرانسیل **Chapter 10**

Differential Equations

- Functions of one variable: $y, p, q, u, g, h, G, H, r, z$ توابع تک متغیره
Arguments (independent variables): x, y آرگومانها (متغیرهای مستقل)
Functions of two variables: $f(x, y), M(x, y), N(x, y)$ توابع دو متغیره
First order derivative: $y', u', \dot{y}, \frac{dy}{dt}, \dots$ مشتق مرتبه اول
Second order derivatives: $y'', \ddot{y}, \frac{d^2I}{dt^2}, \dots$ مشتقات مرتبه دوم
Partial derivatives: $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$ مشتقات جزئی
Natural number: n عدد طبیعی
Particular solutions: y_1, y_p جوابهای خاص
Real numbers: $k, t, C, C_1, C_2, p, q, \alpha, \beta$ اعداد حقیقی
Roots of the characteristic equations: λ_1, λ_2 ریشه های معادلات مشخصه
Time: t زمان
Temperature: T, S دما
Population function: $P(t)$ تابع جمعیت
Mass of an object: m جرم جسم
Stiffness of a spring: k سفتی فنر
Displacement of the mass from equilibrium: y جابجایی جرم از تعادل
Amplitude of the displacement: A دامنه جابجایی
Frequency: ω فرکانس
Damping coefficient: γ ضریب میرایی
Phase angle of the displacement: δ زاویه فاز جابجایی
Angular displacement: θ جابجایی زاویه ای
Pendulum length: L طول پاندول

شتاب گرانش: g Acceleration of gravity

جریان: I Current

مقاومت: R Resistance

ضریب القایی (اندوکتانس): L Inductance

ظرفیت (خازن): C Capacitance

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

10.1 First Order Ordinary Differential Equations

1164. Linear Equations معادلات خطی

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

The general solution is حل کلی برابر است با

$$y = \frac{\int u(x)q(x)dx + C}{u(x)},$$

where که در آن

$$u(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right).$$

1165. Separable Equations معادلات جدانشونده

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g(x)h(y)$$

The general solution is given by حل کلی برابر است با

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C,$$

or یا

$$H(y) = G(x) + C.$$

1166. Homogeneous Equations معادلات همگن

The differential equation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ is homogeneous, if

the function $f(x, y)$ is homogeneous, that is

$f(tx, ty) = f(x, y)$. معادله دیفرانسیل $dy/dx = f(x, y)$ همگن است، اگر تابع $f(x, y)$ همگن باشد، یعنی $f(tx, ty) = f(x, y)$

The substitution $z = \frac{y}{x}$ (then $y = zx$) leads to the separable

equation جایگذاری $z = y/x$ (آنگاه $y = zx$) منجر به پیدایش این معادله جداشونده می شود.
 $x \frac{dz}{dx} + z = f(1, z)$.

1167. Bernoulli Equation معادله برنولی

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n.$$

جایگذاری $z = y^{1-n}$ منجر به معادله خطی زیر می شود.

The substitution $z = y^{1-n}$ leads to the linear equation

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

1168. Riccati Equation معادله ریکاتی

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

If a particular solution y_1 is known, then the general solution can be obtained with the help of substitution

$z = \frac{1}{y - y_1}$, which leads to the first order linear equation

اگر جواب خاص y_1 معلوم باشد، آنگاه حل کلی را می توان با کمک جایگذاری $z = 1/(y - y_1)$ به دست آورد، که منجر به این معادله خطی مرتبه اول می شود.

1169. Exact and Nonexact Equations معادلات دقیق و غیردقیق

The equation معادله

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

is called exact if دقیق نامیده می شود اگر

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

and nonexact otherwise. و در غیر این صورت غیر دقیق است.

The general solution is حل کلی برابر است با

$$\int M(x, y)dx + \int N(x, y)dy = C.$$

1170. Radioactive Decay تجزیه رادیواکتیو

$\frac{dy}{dt} = -ky$, که در آن $y(t)$ مقدار عنصر رادیواکتیو در زمان t , و k نرخ تجزیه است. where $y(t)$ is the amount of radioactive element at time t , k is the rate of decay.

جواب برابر است با

The solution is که در آن $y_0 = y(0)$ مقدار اولیه است.

$$y(t) = y_0 e^{-kt}, \text{ where } y_0 = y(0) \text{ is the initial amount.}$$

قانون خنک شدن نیوتون

1171. Newton's Law of Cooling

$\frac{dT}{dt} = -k(T - S)$, که در آن $T(t)$ دمای جسم در زمان t , S دمای محیط اطراف، k ثابت مثبت است.

where $T(t)$ is the temperature of an object at time t , S is the temperature of the surrounding environment, k is a positive constant.

The solution is جواب برابر است با

$$T(t) = S + (T_0 - S)e^{-kt},$$

where $T_0 = T(0)$ is the initial temperature of the object at time $t = 0$. که در آن $T_0 = T(0)$ دمای اولیه جسم در زمان $t = 0$ است.

دینامیک جمعیت (مدل آمایش)

1172. Population Dynamics (Logistic Model)

که در آن $P(t)$ جمعیت در زمان t ، k ثابت مثبت، M اندازه حدی برای جمعیت است.

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{M} \right),$$

where $P(t)$ is population at time t , k is a positive constant, M is a limiting size for the population.

جواب معادله دیفرانسیل برابر است با

The solution of the differential equation is

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kt}}, \text{ where } P_0 = P(0) \text{ is the initial popu-}$$

lation at time $t = 0$. که در آن $P_0 = P(0)$ جمعیت اولیه در زمان $t=0$ است.

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم

10.2 Second Order Ordinary Differential Equations

معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت

1173. Homogeneous Linear Equations with Constant Coefficients

$$y'' + py' + qy = 0.$$

معادله مشخصه برابر است با

The characteristic equation is

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

اگر λ_1 و λ_2 ریشه های حقیقی متمایز معادله مشخصه باشند، آنگاه جواب عمومی برابر است با

If λ_1 and λ_2 are distinct real roots of the characteristic equation, then the general solution is

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \text{ where}$$

که در آن C_1 و C_2 ثوابت انتگرال گیری اند.

C_1 and C_2 are integration constants.

اگر $\lambda_1 = \lambda_2 = -p/2$ ، آنگاه جواب عمومی برابر است با

If $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$, then the general solution is

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{p}{2}x}.$$

اگر $\lambda_1 = \lambda_2$ اعداد مختلط باشند: If λ_1 and λ_2 are complex numbers:

که در آن $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, where

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2},$$

then the general solution is

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

معادلات خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت

1174. Inhomogeneous Linear Equations with Constant Coefficients

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

جواب عمومی برابر است با

The general solution is given by

$$y = y_p + y_h, \text{ where}$$

y_p is a particular solution of the inhomogeneous equation

and y_h is the general solution of the associated homogeneous equation (see the previous topic 1173).

اگر سمت راست شکل زیر را داشته باشد

If the right side has the form

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x),$$

then the particular solution y_p is given by

$$y_p = x^k e^{\alpha x} (R_1(x) \cos \beta x + R_2(x) \sin \beta x),$$

where the polynomials $R_1(x)$ and $R_2(x)$ have to be found

by using the method of undetermined coefficients.

- If $\alpha + \beta i$ is not a root of the characteristic equation, then

اگر $\alpha + \beta i$ ریشه معادله مشخصه نباشد، آنگاه توان $k=0$ است. the power $k=0$,

- If $\alpha + \beta i$ is a simple root, then $k=1$,

اگر $\alpha + \beta i$ ریشه ساده باشد، آنگاه $k=1$ است. If $\alpha + \beta i$ is a double root, then $k=2$.

- If $\alpha + \beta i$ is a double root, then $k=2$.

1175. Differential Equations with y Missing

$$y'' = f(x, y').$$

معادلات دیفرانسیل بدون وجود y را قرار دهید. آنگاه معادله جدید ارضا شده با u برابر است با $u = y'$

Set $u = y'$. Then the new equation satisfied by v is

$$u' = f(x, u),$$

که معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. which is a first order differential equation.

1176. Differential Equations with x Missing معادلات دیفرانسیل بدون وجود x

$$y'' = f(y, y').$$

Set $u = y'$. Since $u = y'$ را قرار دهید. از آنجا که

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy},$$

we have داریم

$$u \frac{du}{dy} = f(y, u),$$

که معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.

which is a first order differential equation.

1177. Free Undamped Vibrations ارتعاشات آزاد غیر میرا شونده

The motion of a Mass on a Spring is described by the equation

$$m\ddot{y} + ky = 0,$$

where که در آن

m is the mass of the object, m جرم جسم است، k سفتی فنر است،

k is the stiffness of the spring, y جابجایی جرم از تعادل است.

y is displacement of the mass from equilibrium.

The general solution is جواب عمومی برابر است با

$$y = A \cos(\omega_0 t - \delta),$$

where که در آن، A دامنه جابجایی است، ω_0 فرکانس پایه، دوره تناوب برابر است با $T = 2\pi/\omega_0$ ،

A is the amplitude of the displacement,

ω_0 is the fundamental frequency, the period is $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$,

δ is phase angle of the displacement. δ زاویه فاز جابجایی است.

This is an example of simple harmonic motion.

این یک مثالی از حرکت نوسانی ساده است.

1178. Free Damped Vibrations ارتعاشات آزاد میرا شده

$$m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + ky = 0, \text{ where}$$

γ is the damping coefficient. که در آن γ ضریب میرایی است. سه حالت

There are 3 cases for the general solution: برای جواب کلی وجود دارد:

حالت ۱. $\gamma^2 > 4km$ (overdamped) ($\gamma^2 > 4km$ بیش میرا شده)

$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t},$$

where که در آن

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}, \lambda_2 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}.$$

حالت ۲. $\gamma^2 = 4km$ (critically damped) ($\gamma^2 = 4km$ میرا شده بحرانی)

$$y(t) = (A + Bt)e^{\lambda t},$$

where که در آن

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2m}.$$

حالت ۳. $\gamma^2 < 4km$ (underdamped) ($\gamma^2 < 4km$ کم میرا شده)

$$y(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t} A \cos(\omega t - \delta), \text{ where که در آن}$$

$$\omega = \sqrt{4km - \gamma^2}.$$

1179. Simple Pendulum آونگ ساده

که در آن θ جابجایی زاویه ای، L طول آونگ، g شتاب گرانش است. $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$,

where θ is the angular displacement, L is the pendulum length, g is the acceleration of gravity.

جواب عمومی برای زوایای کوچک θ برابر است با

The general solution for small angles θ is

$$\theta(t) = \theta_{\max} \sin \sqrt{\frac{g}{L}}t, \text{ the period is } T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

دوره تناوب برابر است با

1180. RLC Circuit مدار RLC

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = V'(t) = \omega E_0 \cos(\omega t),$$

که در آن I جریان در مدار RLC با یک منبع ولتاژ ac (متناوب) $V(t) = E_0 \sin(\omega t)$ است.
where I is the current in an RLC circuit with an ac voltage source $V(t) = E_0 \sin(\omega t)$.

The general solution is جواب عمومی برابر است با

$$I(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + A \sin(\omega t - \varphi),$$

where که در آن

$$r_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L},$$

$$A = \frac{\omega E_0}{\sqrt{\left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)^2 + R^2 \omega^2}},$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right),$$

C_1, C_2 ثابتهای وابسته به شرایط اولیه می باشند.
 C_1, C_2 are constants depending on initial conditions.

برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

10.3. Some Partial Differential Equations

1181. The Laplace Equation معادله لاپلاس

به تابع انرژی پتانسیل $u(x, y)$ برای میدان نیروی پایستار اعمال می شود.
 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از این نوع، بیضوی نامیده می شوند.

applies to potential energy function $u(x, y)$ for a conservative force field in the xy -plane. Partial differential equations of this type are called elliptic.

1182. The Heat Equation معادله گرما

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

که هنگامی که گرما از مناطق گرم به مناطق سرد جریان می یابد به توزیع دما $u(x,y)$ در صفحه xy اعمال می شود. معادلات از این نوع، سهموی نامیده می شوند.

applies to the temperature distribution $u(x,y)$ in the xy -plane when heat is allowed to flow from warm areas to cool ones. The equations of this type are called **parabolic**.

1183. The Wave Equation معادله موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

applies to the displacement $u(x,y)$ of vibrating membranes and other wave functions. The equations of this type are called **hyperbolic**.

به تابع جابجایی $u(x,y)$ غشاهای در حال ارتعاش و دیگر توابع موج اعمال می شود. معادلات از این نوع، هذلولی نامیده می شوند.

11.1 Arithmetic Series سریهای حسابیInitial term: a_1 عبارت اولیهNth term: a_n عبارت N امDifference between successive terms: d اختلاف میان عبارات متوالیNumber of terms in the series: n تعداد عبارات در سریSum of the first n terms: S_n مجموع n عبارت نخست

$$1184. a_n = a_{n-1} + d = a_{n-2} + 2d = \dots = a_1 + (n-1)d$$

$$1185. a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_i + a_{n+1-i}$$

$$1186. a_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$$

$$1187. S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

11.2 Geometric Series سریهای هندسی

Initial term: a_1 عبارت اولیه

Nth term: a_n عبارت N ام

Common ratio: q نسبت به عمومی

Number of terms in the series: n تعداد عبارات در سری

Sum of the first n terms: S_n مجموع n عبارت نخست

Sum to infinity: S مجموع تا بی نهایت

$$1188. a_n = qa_{n-1} = a_1 q^{n-1}$$

$$1189. a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \dots = a_i \cdot a_{n+1-i}$$

$$1190. a_i = \sqrt{a_{i-1} \cdot a_{i+1}}$$

$$1191. S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$1192. S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \quad \text{برای } |q| < 1, \text{ مجموع } S \text{ همچنان که } n \rightarrow \infty \text{ می باشد.}$$

For $|q| < 1$, the sum S converges as $n \rightarrow \infty$.

11.3 Some Finite Series برخی از سریهای متناهی

Number of terms in the series: n تعداد عبارات در سری

$$1193. 1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1194. 2+4+6+\dots+2n=n(n+1)$$

$$1195. 1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

$$1196. k+(k+1)+(k+2)+\dots+(k+n-1)=\frac{n(2k+n-1)}{2}$$

$$1197. 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1198. 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$1199. 1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$1200. 1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

$$1201. 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots=2$$

$$1202. \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots=1$$

$$1203. 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{(n-1)!}+\dots=e$$

11.4 Infinite Series سریهای نامتناهی

Sequence: $\{a_n\}$ توالی
 First term: a_1 عبارت اول
 Nth term: a_n عبارت N ام

1204. Infinite Series سریهای نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

1205. Nth Partial Sum مجموع جزئی N ام

$$S_n = \sum_{n=1}^n a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

1206. Convergence of Infinite Series همگرایی سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L, \text{ if } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$$

اگر

1207. Nth Term Test آزمون عبارت N ام

اگر سری زیر همگرا باشد، آنگاه

- If the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent, then $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, then the series is divergent.

اگر حد صفر نباشد آنگاه سری واگرا است.

11.5 Properties of Convergent Series خواص سریهای همگرا

Convergent Series: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ سریهای همگرا

Real number: c عدد حقیقی

$$1208. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$$

$$1209. \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cA.$$

11.6 Convergence Tests آزمونهای همگرایی

آزمون مقایسه

1210. The Comparison Test سریهای زیر به گونه ای است که برای همه n ها $0 < a_n \leq b_n$ برقرار است.

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ be series such that $0 < a_n \leq b_n$ for all n .
اگر سری b_n همگرا باشد آنگاه سری a_n نیز همگرا است.

- If $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is convergent then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is also convergent.
- If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent then $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is also divergent.

اگر سری a_n واگرا باشد آنگاه سری b_n نیز واگرا است.

1211. The Limit Comparison Test آزمون مقایسه حد

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ be series such that a_n and b_n are posi-

tive for all n . سریهای زیر به گونه ای است که برای همه n ها a_n و b_n مثبت است.

- If $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ are either both
اگر آنگاه و
convergent or both divergent. یا هر دو همگرا یا هر دو واگرا می باشند.
- If $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ then $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent implies that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is
اگر
also convergent.

آنگاه همگرا بودن b_n به این معنی است که a_n نیز همگرا است.

- If $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ then $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent implies that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is also divergent.
 آنگاه a_n بودن b_n به این معنی است که a_n نیز واگرا است.

1212. p-series سری p

p-series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converges for $p > 1$ and diverges for

$0 < p \leq 1$. سری p برای $p > 1$ همگرا است و برای $0 < p \leq 1$ واگرا است.

1213. The Integral Test آزمون انتگرال

Let $f(x)$ be a function which is continuous, positive, and decreasing for all $x \geq 1$. The series $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots$ تابع $f(x)$ تابعی است که برای تمامی $x \geq 1$ پیوسته، مثبت و کاهنده است. سری زیر

converges if $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converges, and diverges if $\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverges.
 همگرا است اگر این انتگرال همگرا باشد، و واگرا است اگر

همچنان که $\int_1^n f(x) dx \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$.

1214. The Ratio Test آزمون نسبت

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series with positive terms.
 اگر a_n سری با عبارات مثبت باشد.

• If $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent.
 آنگاه a_n همگرا است.

• If $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent.
 آنگاه a_n واگرا است.

• If $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ may converge or diverge and

the ratio test is inconclusive; some other tests must be used.

آنگاه a_n می تواند همگرا یا واگرا باشد و آزمون نسبت نمی تواند قضاوت کند؛ از آزمونهای دیگر باید استفاده شود.

1215. The Root Test آزمون ریشه

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series with positive terms. اگر a_n سری با عبارات مثبت باشد.

• اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent. آنگاه a_n همگرا است.

• اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent. آنگاه a_n واگرا است.

• اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ may converge or diverge, but

no conclusion can be drawn from this test.

آنگاه a_n می تواند همگرا یا واگرا باشد، اما نتیجه ای از این آزمون نمی توان به دست آورد.

11.7 Alternating Series سریهای متناوب

آزمون سریهای متناوب (قضیه لایبنیتز)

1216. The Alternating Series Test (Leibniz's Theorem)

اگر $\{a_n\}$ یک توالی از اعداد مثبت باشد به گونه ای که برای همه n ها $a_{n+1} < a_n$ باشد.

Let $\{a_n\}$ be a sequence of positive numbers such that

$a_{n+1} < a_n$ for all n .

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

آنگاه سریهای متناوب

Then the alternating series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$

both converge. هر دو همگرا می باشند.

1217. Absolute Convergence همگرایی مطلق

• A series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is absolutely convergent if the series

سری a_n همگرای مطلق است اگر سری $|a_n|$ همگرا باشد.
 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ is convergent.

اگر سری a_n همگرای مطلق باشد آنگاه این سری همگرا است.

- If the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is absolutely convergent then it is convergent.

1218. Conditional Convergence همگرایی مشروط

A series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is **conditionally convergent** if the series is convergent but is not absolutely convergent.

سری a_n همگرای مشروط است اگر همگرا باشد ولی همگرای مطلق نباشد.

11.8 Power Series سریهای توانی

Real numbers: x, x_0 اعداد حقیقی

Power series: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ سریهای توانی

Whole number: n عدد کامل

Radius of Convergence: R شعاع همگرایی

1219. Power Series in x سریهای توانی برحسب x

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

1220. Power Series in $(x - x_0)$ سریهای توانی برحسب $(x - x_0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

بازه همگرایی

1221. Interval of Convergence

The set of those values of x for which the function

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ is convergent is called the **interval of**

convergence. مجموعه ای از مقادیر x که برای آن تابع $f(x)$ همگرا است بازه همگرایی نامیده می شود.

1222. Radius of Convergence شعاع همگرایی

If the interval of convergence is $(x_0 - R, x_0 + R)$ for some $R \geq 0$, the R is called the **radius of convergence**. It is given as

اگر بازه همگرایی برای $R \geq 0$ برابر با $(x_0 - R, x_0 + R)$ باشد، R شعاع همگرایی نامیده می شود. مقدار آن از رابطه زیر به دست می آید

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \text{ or } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

مشتق و انتگرال سریهای توانی

11.9 Differentiation and Integration of Power Series

Continuous function: $f(x)$ تابع پیوسته

Power series: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ سریهای توانی

Whole number: n عدد کامل

Radius of Convergence: R شعاع همگرایی

مشتق سریهای توانی

1223. Differentiation of Power Series

برای Let $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ for $|x| < R$. در نظر بگیرید

Then, for $|x| < R$, $f(x)$ is continuous, the derivative $f'(x)$ exists and

آنگاه، برای $|x| < R$ ، تابع $f(x)$ پیوسته است، مشتق $f'(x)$ وجود دارد و

$$f'(x) = \frac{d}{dx} a_0 + \frac{d}{dx} a_1 x + \frac{d}{dx} a_2 x^2 + \dots$$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

1224. Integration of Power Series انتگرال گیری از سریهای توانی

Let $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ for $|x| < R$.
 در نظر بگیرید برای

Then, for $|x| < R$, the indefinite integral $\int f(x) dx$ exists and

$$\int f(x) dx = \int a_0 dx + \int a_1 x dx + \int a_2 x^2 dx + \dots$$

آنگاه، برای $|x| < R$ ، انتگرال نامعین $f(x)$ وجود دارد و

$$= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

سریهای تیلور و مک لورن

11.10 Taylor and Maclaurin Series

Whole number: n عدد کامل

Differentiable function: $f(x)$ تابع مشتق پذیر

Remainder term: R_n عبارت باقیمانده

1225. Taylor Series سری تیلور

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n.$$

1226. The Remainder After $n+1$ Terms is given by

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad a < \xi < x.$$

باقیمانده پس از $n+1$

عبارت برابر است با

1227. Maclaurin Series سری مک لورن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + R_n$$

بسطهای سریهای توانی برای برخی از توابع

11.11 Power Series Expansions for Some Functions

Whole number: n عدد کامل

Real number: x عدد حقیقی

$$1228. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$1229. a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots$$

$$1230. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \pm \dots, -1 < x \leq 1.$$

$$1231. \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right), |x| < 1.$$

$$1232. \ln x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right], x > 0.$$

$$1233. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \pm \dots$$

$$1234. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \dots$$

$$1235. \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots, |x| < \frac{\pi}{2}.$$

$$1236. \cot x = \frac{1}{x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{2x^7}{4725} + \dots \right), |x| < \pi.$$

$$1237. \arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)(2n+1)} + \dots, \\ |x| < 1.$$

$$1238. \arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)(2n+1)} + \dots \right), \\ |x| < 1.$$

$$1239. \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \pm \dots, |x| \leq 1.$$

$$1240. \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$1241. \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

11.12 Binomial Series سریهای دو جمله ای

Whole numbers: n, m اعداد کامل

Real number: x عدد حقیقی

Combinations: nC_m ترکیبها

$$1242. (1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \dots + {}^nC_nx^n + \dots + x^n$$

$$1243. {}^nC_m = \frac{n(n-1)\dots[n-(m-1)]}{m!}, |x| < 1.$$

$$1244. \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, |x| < 1.$$

$$1245. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, |x| < 1.$$

$$1246. \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots, |x| \leq 1.$$

$$1247. \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{1 \cdot 2x^2}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5x^3}{3 \cdot 6 \cdot 9} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8x^4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \dots, |x| \leq 1.$$

11.13 Fourier Series سریهای فوریه

Integrable function: $f(x)$ تابع انتگرال پذیر

Fourier coefficients: a_0, a_n, b_n ضرایب فوریه

Whole number: n عدد کامل

$$1248. f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$1249. a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$1250. b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

فصل ۱۲ **Chapter 12** احتمال **Probability**

12.1 Permutations and Combinations ترتیبها و ترکیبها

Permutations: ${}^n P_m$ ترتیبها
Combinations: ${}^n C_m$ ترکیبها
Whole numbers: n, m اعداد کامل

1251. Factorial فاکتوریل
 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)(n-1)n$
 $0! = 1$

1252. ${}^n P_n = n!$

1253. ${}^n P_m = \frac{n!}{(n-m)!}$

1254. Binomial Coefficient ضرایب دو جمله ای

$${}^n C_m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

1255. ${}^n C_m = {}^n C_{n-m}$

1256. ${}^n C_m + {}^n C_{m+1} = {}^{n+1} C_{m+1}$

1257. ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_n = 2^n$

1258. Pascal's Triangle مثلث پاسکال

0 سطر	Row 0					1							
1 سطر	Row 1					1		1					
	Row 2				1		2		1				
	Row 3			1		3		3		1			
	Row 4		1		4		6		4		1		
	Row 5		1	5		10		10	5		1		
	Row 6	1		6	15		20		15	6		1	

12.2 Probability Formulas روابط احتمال

Events: A, B رویدادها

Probability: P احتمال

Random variables: X, Y, Z متغیرهای تصادفی

Values of random variables: x, y, z مقادیر متغیرهای تصادفی

Expected value of X: μ مقدار انتظاری X

Any positive real number: ε هر عدد حقیقی مثبت

Standard deviation: σ انحراف معيار

Variance: σ^2 واریانس

Density functions: $f(x)$, $f(t)$ توابع چگالی

1259. Probability of an Event احتمال یک رویداد

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

where

m is the number of possible positive outcomes,

n is the total number of possible outcomes.

که در آن

m تعداد خروجیهای مثبت ممکن،

n تعداد کل خروجی‌های ممکن است.

1260. Range of Probability Values محدوده مقادیر احتمال
 $0 \leq P(A) \leq 1$

1261. Certain Event رویداد حتمی
 $P(A) = 1$

1262. Impossible Event رویداد ناممکن
 $P(A) = 0$

1263. Complement مکمل
 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

1264. Independent Events رویدادهای مستقل
 $P(A / B) = P(A),$
 $P(B / A) = P(B)$

1265. Addition Rule for Independent Events قاعده جمع برای رویدادهای مستقل
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (این فرمول غلط است! به دو فرمول بعدی توجه کنید [م.])

قاعده ضرب برای رویدادهای مستقل
1266. Multiplication Rule for Independent Events
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

1267. General Addition Rule قاعده عمومی جمع
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$ که در آن
 where اجتماع رویدادهای A و B است. $A \cup B$
 $A \cap B$ اشتراک رویدادهای A و B است.
 $A \cup B$ is the union of events A and B,
 $A \cap B$ is the intersection of events A and B.

1268. Conditional Probability احتمال مشروط
 $P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

1269. $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A / B) = P(A) \cdot P(B / A)$

1270. Law of Total Probability قانون احتمال کل

$$P(A) = \sum_{i=1}^m P(B_i)P(A/B_i),$$
 که در آن B_i توالی رویدادهای مستقل از یکدیگر است.
where B_i is a sequence of mutually exclusive events.

1271. Bayes' Theorem قضیه بایس

$$P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

1272. Bayes' Formula رابطه بایس

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{\sum_{k=1}^m P(B_k) \cdot P(A/B_k)},$$

که در آن

where B_i مجموعه رویدادهای مستقل از یکدیگر (فرضیات) است.
 B_i is a set of mutually exclusive events (hypotheses),
 A رویداد نهایی است، $P(B_i)$ احتمالات پیشین است،
 A is the final event,
 $P(B_i)$ are the prior probabilities، $P(B_i/A)$ احتمالات پسین است.
 $P(B_i/A)$ are the posterior probabilities.

1273. Law of Large Numbers قانون اعداد بزرگ

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

که در آن

where S_n مجموع متغیرهای تصادفی است،
 S_n is the sum of random variables،
 n is the number of possible outcomes. N تعداد رویدادهای ممکن است.

1274. Chebyshev Inequality نابرابری چبیشف

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2},$$

که در آن $V(X)$ واریانس X است. where $V(X)$ is the variance of X .

1275. Normal Density Function تابع چگالی نرمال

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

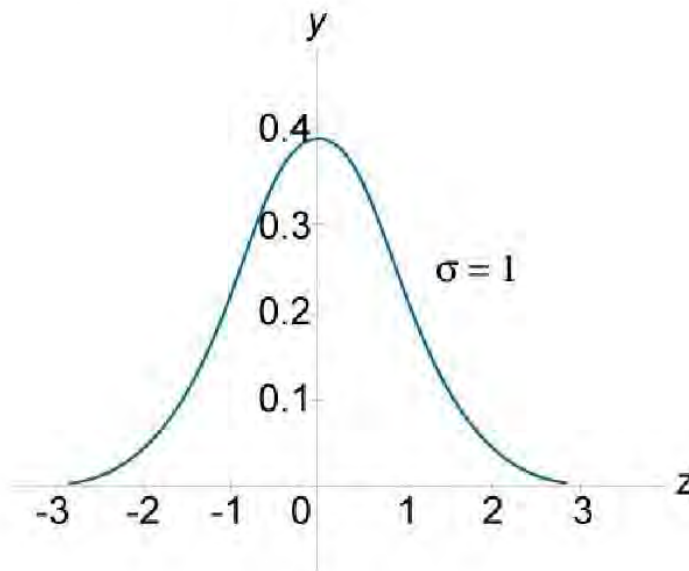
که در آن x یک خروجی خاص است. where x is a particular outcome.

1276. Standard Normal Density Function تابع چگالی نرمال استاندارد

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

مقدار میانگین $\mu=0$ ، انحراف معیار $\sigma=1$.

Average value $\mu = 0$, deviation $\sigma = 1$.



شکل ۲۱۰
Figure 210.

1277. Standard Z Value مقدار استاندارد Z

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

تابع توزیع نرمال تجمعی

1278. Cumulative Normal Distribution Function

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

که در آن

where

x is a particular outcome,

x خروجی خاص است،

t is a variable of integration. t متغیر انتگرال گیری است.

$$1279. P(\alpha < X < \beta) = F\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right),$$

که در آن

where

X is normally distributed random variable,

X متغیر تصادفی با توزیع نرمال است،

F is cumulative normal distribution function,

F تابع توزیع نرمال تجمعی است،

$P(\alpha < X < \beta)$ is interval probability.

$P(\alpha < X < \beta)$ بازه احتمال است.

$$1280. P(|X - \mu| < \varepsilon) = 2F\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

که در آن

where

X متغیر تصادفی با توزیع نرمال است،

X is normally distributed random variable,

F تابع توزیع نرمال تجمعی است.

F is cumulative normal distribution function.

1281. Cumulative Distribution Function تابع توزیع تجمعی

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

که در آن t متغیر انتگرال گیری است. t where t is a variable of integration.

1282. Bernoulli Trials Process فرآیند آزمونهای برنولی

که در آن n توالی آزمایشها است، p احتمال موفقیت هر $\mu = np$ ، $\sigma^2 = npq$ ،

where

آزمایش است، q احتمال شکست است، $q = 1 - p$.

n is a sequence of experiments,

p is the probability of success of each experiments,

q is the probability of failure, $q = 1 - p$.

1283. Binomial Distribution Function تابع توزیع دو جمله ای

$$b(n, p, q) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

$$\mu = np, \sigma^2 = npq,$$

که در آن n تعداد تلاشهای انتخابها است، p احتمال موفقیت،
 $f(x) = (q + pe^x)^n$ ،
 q احتمال شکست است، $q = 1 - p$.
 where

n is the number of trials of selections,

p is the probability of success,

q is the probability of failure, $q = 1 - p$.

1284. Geometric Distribution توزیع هندسی

$$P(T = j) = q^{j-1}p,$$

که در آن T نخستین رویداد موفق در سری است، j شماره
 رویداد است، p احتمال موفق بودن هر یک از رویدادها
 است، q احتمال شکست است، $q = 1 - p$.
 where

T is the first successful event in the series,

j is the event number,

p is the probability that any one event is successful,

q is the probability of failure, $q = 1 - p$.

1285. Poisson Distribution توزیع پواسون

$$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda = np,$$

$$\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda,$$

که در آن λ نرخ رخداد، k تعداد خروجیهای مثبت است.
 where

λ is the rate of occurrence,

k is the number of positive outcomes.

1286. Density Function تابع چگالی

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

1287. Continuous Uniform Density چگالی یکنواخت پیوسته

$$f = \frac{1}{b-a}, \mu = \frac{a+b}{2},$$

که در آن f تابع چگالی است. where f is the density function.

1288. Exponential Density Function تابع چگالی نمایی

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda^2$$

که در آن t زمان، λ نرخ شکست است. where t is time, λ is the failure rate.

1289. Exponential Distribution Function تابع توزیع نمایی

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

که در آن t زمان، λ نرخ شکست است. where t is time, λ is the failure rate.

مقدار انتظاری متغیرهای تصادفی گسسته

1290. Expected Value of Discrete Random Variables

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

که در آن x_i خروجی خاص، p_i احتمال مربوط به آن است. where x_i is a particular outcome, p_i is its probability.

مقدار انتظاری متغیرهای تصادفی پیوسته

1291. Expected Value of Continuous Random Variables

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

1292. Properties of Expectations ویژگیهای مقادیر انتظاری

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y),$$

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y),$$

$$E(cX) = cE(X),$$

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y),$$

که در آن c ثابت است. where c is a constant.

1293. $E(X^2) = V(X) + \mu^2$,

where

$\mu = E(X)$ is the expected value,

$V(X)$ is the variance.

که در آن $\mu = E(X)$ مقدار انتظاری

است، $V(X)$ واریانس است.

1294. Markov Inequality نابرابری مارکوف

$$P(X > k) \leq \frac{E(X)}{k},$$

که در آن k مقداری ثابت است. where k is some constant.

1295. Variance of Discrete Random Variables واریانس متغیرهای تصادفی گسسته

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i,$$

where

x_i is a particular outcome,

p_i is its probability.

که در آن x_i خروجی خاص، p_i احتمال مربوط

به آن است.

واریانس متغیرهای تصادفی پیوسته

1296. Variance of Continuous Random Variables

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

1297. Properties of Variance ویژگیهای واریانس

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y),$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y),$$

$$V(X + c) = V(X),$$

$$V(cX) = c^2 V(X),$$

که در آن c ثابت است. where c is a constant.

1298. Standard Deviation انحراف معیار

$$D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E[(X - \mu)^2]}$$

1299. Covariance کواریانس

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - \mu(X))(Y - \mu(Y))] = E(XY) - \mu(X)\mu(Y),$$

where

X is random variable,

$V(X)$ is the variance of X ,

μ is the expected value of X or Y .

که در آن X متغیر تصادفی است،

$V(X)$ واریانس X است، μ مقدار

انتظاری X یا Y است.

1300. Correlation همبستگی

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}},$$

where

$V(X)$ is the variance of X ,

$V(Y)$ is the variance of Y .

که در آن $V(X)$ واریانس X است،

$V(Y)$ واریانس Y است.

برای دیگر دستنامه ها و راهنماهای مسایل حل شده به وبگاه زیر مراجعه کنید.

Look for other handbooks and solved problem guides at
www.math-ebooks.com.