

Kankor Widget

ابزار کانکور

جدیدترین تکنالوژی آموزشی در سطح کشور

مجمع فورمول های ریاضی





فهرست مطالب

یک روند جالب ریاضی.....	1
فورمول های مورد نیاز در ریاضیات.....	2
(حساب، الجبر، هندسه و مثلثات).....	2
فورمول های مورد نیاز در علم حساب:.....	2
رابطه بین بزرگترین قاسم مشترک (GCD) و کوچکترین مضرب مشترک (LCM):.....	2
اعداد کسری.....	3
نسبت حسابی.....	4
نسبت هندسی.....	4
وسط حسابی.....	4
تناسب و خواص آن.....	4
وسط هندسی تناسب.....	5
فیصد.....	6
ریح ساده یا ریح بسیط.....	6
تنزیل.....	6
ریح مرکب.....	6
فورمول های مورد نیاز در علم الجبر:.....	7
طاقته ها.....	7
جزرها.....	7

- 9 طرز ناطق سازی
- 10 تجزیه و مطابقت های مشهور
- 11 فکتوریل
- 12 قوانین قیمت مطلقه
- 12 اراییه علمی اعداد
- 12 سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول (معادلات خطی)
- 13 معادلات درجه دوم یک مجهوله
- 14 نامساوات
- 14 خواص نامساوی ها:
- 15 تصاعدات
- 15 اول - تصاعد حسابی:
- 17 دوم - تصاعد هندسی:
- 18 لوگاریتم
- 20 لیمت
- 23 معادل بودن دو تابع از نگاه لیمت:
- 24 معادل های توابع الجبری پولینومیلی:
- 24 معادل های توابع مثلثاتی:
- 25 معادل های توابع جذری:
- 25 مشتقات

- 25 مشتقات توابع الجبری :
- 27 مشتقات توابع مثلثاتی:
- 28 مشتقات توابع لوگاریتمی و نمایی:
- 29 مشتقات توابع معکوس مثلثاتی:
- 30 مشتقات توابع مثلثاتی هایپر بولیک:
- 30 مشتق توابع قیمت مطلقه
- 30 مشتق توابع ضمنی :
- 30 قضیه‌ی لایبتال:
- 30 طریق ارایه مراتب مشتقات :
- 32 انتیگرال‌ها
- 32 قوانین خواص اولیه‌ی انتیگرال‌ها:
- 33 انتیگرال‌های اساسی:
- 33 انتیگرال‌های توابع مثلثاتی:
- 34 انتیگرال‌های توابع نمایی و لوگاریتمی:
- 35 انتیگرال‌های توابع معکوس مثلثاتی:
- 35 انتیگرال‌های توابع هایپر بولیک مثلثاتی:
- 36 انتیگرال‌های متفرقه:
- 36 قضیه‌ی رول (Roll) :
- 36 قضیه‌ی فرمات (Fermat):

- 37 قضیه‌ی کوشی (Cauchy):
- 37 قضیه‌ی قیمت وسطی – قضیه‌ی لاگرانژ (Lagrange):
- 37 فورمول‌های مورد نیاز در علم هندسه‌ی مسطحه:
- 37 مثلث.
- 42 مساحت مثلث متساوی الاضلاع:
- 42 چهار ضلعی‌ها.
- 42 متوازی الاضلاع.
- 42 مساحت متوازی الاضلاع:
- 43 مستطیل.
- 43 مربع.
- 43 معین (لوزی).
- 44 ذوزنقه.
- 44 دایره.
- 44 مساحت حلقه‌ی دایره:
- 45 بیضوی (الپس).
- 45 فورمول‌های مورد نیاز در علم هندسه‌ی فضایی:
- 46 منشور.
- 46 مکعب.
- 46 مکعب مستطیل.

47	 استوانه
47	 هرم
47	 هرم ناقص
47	 مخروط
48	 مخروط ناقص
48	 کره
48	 فورمول های مورد نیاز در علم هندسه ی تحلیلی
49	 معادلات خطوط مستقیم
52	 حالات خصوصی معادله ی خط مستقیم:
53	 دریافت فاصله ی یک نقطه از یک خط و مبدای کمیات وضعیه:
53	 شروط موازات، عمودیت و منطبق بودن دو خط مستقیم:
55	 زاویه بین دو خط مستقیم:
56	 فاصله بین دو خط موازی:
56	 معادلات دایره
57	 حالات خصوصی معادله ی معیاری دایره:
59	 موقعیت دایره در نواحی چهار گانه و معادلات آن ها:
59	 معادله ی عمومی یک دایره:
61	 موقعیت نسبی یک خط با یک دایره:
62	 حالات دو دایره:

- 63 معادله‌ی خط مماس و نارمل دایره در یک نقطه‌ی دایره
- 63 معادله‌ی خط نارمل:
- 64 معادله‌ی خط مماس:
- 64 دریافت طول مماس:
- 65 معادلات پارابولا
- 65 حالت اول) پارابولای افقی :
- 66 حالت دوم) پارابولای عمودی:
- 66 عن المركزیت پارابولا:
- 67 وتر عمودی (لتس ریگتم) پارابولا:
- 67 معادلات بیضوی (الپس):
- 67 عن المركزیت بیضوی:
- 67 لتس ریگتم:
- 72 معادلات هایپر بولا
- 78 فورمول‌های مورد نیاز در علم مثلثات :
- 82 مناسبت بین نسبت‌های مثلثاتی بعضی از زوایا
- 85 نسبت‌های مثلثاتی $(180^\circ - \alpha)$ یا $(\pi - \alpha)$:
- 90 روابط اساسی و فرعی (اشتقاقی) مثلثاتی :
- 93 قانون سین یا قضیه‌ی سین:
- 95 قانون کوسین یا قضیه‌ی کوسین:

95 قانون تانجانت یا قضييه تانجانت:

95 دریافت نسبت های مثلثاتی نصف زاویه از جنس طول اضلاع آن مثلث

99 نتیجه :

100 مأخذ

فورمول های مورد نیاز در ریاضیات

اهدا کننده: ابزار کانکور

منبع: کتابخانه درخت دانش

جواز/دارنده حق چاپ:

یک روند جالب ریاضی

$$\begin{aligned}
 1^3 + 5^3 + 3^3 &= 153 \\
 (16)^3 + (50)^3 + (33)^3 &= 165033 \\
 (166)^3 + (500)^3 + (333)^3 &= 166500333 \\
 (1666)^3 + (5000)^3 + (3333)^3 &= 166650003333 \\
 (16666)^3 + (50000)^3 + (33333)^3 &= 166665000033333 \\
 (166666)^3 + (500000)^3 + (333333)^3 &= 166666500000333333 \\
 (\dots)^3 + (\dots)^3 + (\dots)^3 &= \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

فورمول های مورد نیاز در ریاضیات

(حساب، الجبر، هندسه و مثلثات)

فورمول های مورد نیاز در علم حساب:

رابطه بین بزرگترین قاسم مشترک (GCD) و کوچکترین مضرب مشترک (LCM):

اگر G بزرگترین قاسم مشترک دو عدد a و b و L کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b باشد در این صورت روابط ذیل بین شان موجود است:

$$1. \quad G \cdot L = a \cdot b$$

$$2. \quad G = \frac{a \cdot b}{L}$$

$$3. \quad L = \frac{a \cdot b}{G}$$

$$4. \quad a = \frac{G \cdot L}{b}$$

$$5. \quad b = \frac{G \cdot L}{a}$$

اعداد کسری

$$1. \quad a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$$

$$2. \quad a - \frac{b}{c} = \frac{ac - b}{c}$$

$$3. \quad \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

$$4. \quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$5. \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$6. \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$7. \quad a \div \left(\frac{b}{c} \right) = \frac{a}{\left(\frac{b}{c} \right)} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$$

$$8. \quad \left(\frac{a}{b} \right) \div c = \frac{\left(\frac{a}{b} \right)}{c} = \frac{\frac{a}{\frac{b}{1}}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{bc}$$

$$9. \quad \left(\frac{a}{b} \right) \div \left(\frac{c}{d} \right) = \frac{\left(\frac{a}{b} \right)}{\left(\frac{c}{d} \right)} = \frac{ad}{bc}$$

نسبت حسابی

اگر دو عدد a و b داشته باشیم، نسبت حسابی آن مساوی است به : $d = a - b$

نسبت هندسی

اگر دو عدد a و b داشته باشیم، نسبت هندسی آن مساوی است به : $r = \frac{a}{b}$ یا $r = \frac{b}{a}$

وسط حسابی

هرگاه $x \in R$ باشد پس وسط حسابی اعداد $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ عبارت است از:

$$M_a = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

در رابطه‌ی فوق $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ مقدارها و n تعدادشان را نشان می‌دهد.

تناسب و خواص آن

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ یک تناسب باشد، در این صورت خواص آن قرار ذیل است:

1. $ad = bc$

2. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

3. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

4. $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

5. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

6. $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

7. $\frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$

8. $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$

9. $\frac{an}{b} = \frac{cn}{d} / n \neq 0$

10. $\frac{a}{bn} = \frac{c}{dn} / n \neq 0$

11. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

12. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = k \Rightarrow \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = k$

همچنان در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ هرگاه یکی از عناصر یا جمله‌ی چهارگانه تناسب مجهول باشد، می‌توانیم قیمت آن را به رویت سه

عنصر معلوم دریافت کنیم که این قاعده را به نام قاعده‌ی سه یاد می‌نمایند. قرار ذیل:

13. $a = \frac{bc}{d}$

14. $b = \frac{ad}{c}$

15. $c = \frac{ad}{b}$

16. $d = \frac{bc}{a}$

وسط هندسی تناسب

اگر $\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$ و یا $\frac{m}{a} = \frac{b}{m}$ باشد پس وسط هندسی تناسب مذکور مساوی است به: $m = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{ab}$

و اما اوسط هندسی تعداد n عدد مثبت $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ مساوی است به:

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$$

فیصد

در مسایل مربوط فیصد چهار کمیت: کمیت اصلی (b)، کمیت فرعی یا کمیت کم و زیاد شده یا فیصدی (p)، نرخ (r) و 100؛ تناسب $\frac{p}{b} = \frac{r}{100}$ را تشکیل می دهند که با توجه به خواص طرفین – وسطین تناسب، هر یک از کمیت های اساسی از جنس یک دیگر بدست آمده می توانند، یعنی:

$$\frac{p}{b} = \frac{r}{100} \Rightarrow p = \frac{b \times r}{100}, b = \frac{p \times 100}{r}, r = \frac{p \times 100}{b}$$

ربح ساده یا ربح بسیط

اگر کمیت اصلی (سرمایه) b، کمیت فیصدی (نفع یک دور زمانی) p، نرخ r و زمان t- فرض شود، مفاد بعد از گذشت زمان t عبارت از $I = tp$ می شود و کمیت های مربوط قرار ذیل دریافت می گردد:

$$\frac{p}{b} = \frac{r}{100} \Rightarrow \frac{p \times t}{b} = \frac{r \times t}{100} \Rightarrow \frac{I}{b} = \frac{r \times t}{100}$$

$$\Rightarrow I = \frac{b \times r \times t}{100}, b = \frac{I \times 100}{r \times t}, t = \frac{I \times 100}{b \times r}, r = \frac{I \times 100}{b \times t}$$

تنزیل

تنزیل شبیه ربح است با تفاوت اینکه در ربح سرمایه رشد میکند در حالیکه در تنزیل وجه مربوط کاهش می یابد، فورمول های تنزیل و ربح یکی اند در عوض ربح (I)، کمیت تنزیل (d) در فورمول مد نظر گرفته می شود. قرار ذیل:

$$\Rightarrow d = \frac{b \times r \times t}{100}, b = \frac{d \times 100}{r \times t}, r = \frac{d \times 100}{b \times t}, t = \frac{d \times 100}{b \times r}$$

ربح مرکب

اگر مفاد مرکب را به I، سرمایه اولی را به p، نرخ یا فیصدی را به r، مدت را به n و سرمایه جدید را به S نشان دهیم چنین رابطه را می توانیم بنویسیم:

$$S = p(1+r)^n$$

$$I = S - p$$

فورمول های مورد نیاز در علم الجبر:

طاقت ها

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

6. $a^0 = 1$

2. $a^m \cdot b^m = (ab)^m$

7. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

8. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

9. $(-a)^{2k} = a^{2k}$

5. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

10. $(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}$

جزرها

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m / n \geq 2$$

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

6. $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

2. $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^{p+q}}$

7. $\sqrt[n]{a^p} \div \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^{p-q}}$

3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[mn]{a^p}$

8. $\sqrt[m]{a^p} \div \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{pn-qm}}$

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}} = \sqrt[mnpq]{a}$

9. $\sqrt[n]{a^n} = a$, if n is odd ط ل ق

10. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, if n is even ج ف ت

5. $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{pn+qm}}$

11. $\underbrace{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}\dots\dots\sqrt{a}}_n = \sqrt[n]{a^{2n-1}} / a \geq 0$

همچنان برای معلومات بیشتر، بعضی خواص دیگر جذور را نیز ذیلاً ذکر می‌نماییم:

$$12. \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \quad C = \sqrt{A^2 - B}$$

$$13. \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

$$14. \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

$$15. \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$16. \sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$17. \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a \cdot \dots}}}} = \sqrt[n]{a}$$

$$18. \sqrt[n]{a \div \sqrt[n]{a \div \sqrt[n]{a \div \sqrt[n]{a \div \dots}}}} = \sqrt[n+1]{a}$$

$$19. \sqrt{a(a+1)} + \sqrt{a(a+1) + \dots} = (a+1)$$

$$20. \sqrt{a(a+1)} - \sqrt{a(a+1) - \dots} = (a)$$

طرز ناطق سازی

1. $\frac{k}{\sqrt{a}} = \frac{k}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{k\sqrt{a}}{a}$
2. $\frac{k}{\sqrt[n]{a^m}} / n > m = \frac{k}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{k\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$
3. $\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$
4. $\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$
5. $\frac{A}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} = \frac{A}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} \cdot \frac{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \frac{A(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{A(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{A(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$

نوت:

عامل ناطق سازی برای جذور مرکب بلند تر از درجه دوم قوس دوم مطابقت مربوط آن می باشد. قرار ذیل:

1. $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) = x + y$
2. $(\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y})(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{x^3y} + \sqrt[5]{x^2y^2} - \sqrt[5]{xy^3} + \sqrt[5]{y^4}) = x + y$
- ⋮
- $(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^{n-1}} - \sqrt[n]{x^{n-2}y} + \sqrt[n]{x^{n-3}y^2} - \sqrt[n]{x^{n-4}y^3} + \dots + \sqrt[n]{y^{n-1}}) = x + y$
3. $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) = x - y$
4. $(\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{y})(\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3y} + \sqrt[5]{x^2y^2} + \sqrt[5]{xy^3} + \sqrt[5]{y^4}) = x - y$
- ⋮
5. $(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}y} + \sqrt[n]{x^{n-3}y^2} + \sqrt[n]{x^{n-4}y^3} + \dots + \sqrt[n]{y^{n-1}}) = x - y$

تجزیه و مطابقت های مشهور

مطابقت ها خیلی زیاد اند اما مشهورترین آن ها که در مسائل ریاضیات استفاده ی اعظمی دارند قرار ذیل می باشد:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases} \quad \text{1- مربع کامل:}$$

$$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases} \quad \text{2- مکعب کامل:}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{3- تفاضل مربعات:}$$

$$a^2 + b^2 = (a+b+\sqrt{2ab})(a+b-\sqrt{2ab}) \quad \text{4- مجموعه ی مربعات:}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{5- مجموعه ی مکعبات:}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{6- تفاضل مکعبات:}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \\ (a-b)^2 - (a+b)^2 = -4ab \end{cases} \quad \text{7- تفاضل مربعات دو قوس مزدوج:}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 + (a-b)^2 \\ (a-b)^2 + (a+b)^2 \end{cases} = 2(a^2 + b^2) \quad \text{8- مجموعه ی مربعات دو قوس مزدوج:}$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \quad \text{9-}$$

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab \quad \text{10-}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \quad \text{11-}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \quad \text{12-}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \quad \text{13-}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) \quad \text{14-}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) \quad \text{15-}$$

16- برای تمام قیمت های طبیعی n :

برای تمام قیمت های جفت و طاق n :

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

برای تمام قیمت های جفت و طاق n :

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3}a^{n-3}b^3 + \dots - b^n$$

17- اگر n یک عدد جفت یا تاق باشد:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \dots + b^{n-1})$$

18- اگر n فقط یک عدد جفت باشد:

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + a^{n-5}b^4 - \dots - b^{n-1})$$

19- اگر n فقط یک عدد طاق باشد:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + a^{n-5}b^4 - \dots + b^{n-1})$$

20- اگر n فقط یک عدد جفت باشد:

$$a^n + b^n = \left(a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} + \sqrt{2(ab)^{\frac{n}{2}}} \right) \left(a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} - \sqrt{2(ab)^{\frac{n}{2}}} \right)$$

فکتوریل

$$1. \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$$

$$2. \quad 1! = 1$$

$$3. \quad 0! = 1$$

$$4. \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} / n, r \in \mathbb{N} \wedge n \geq r$$

با در نظر داشت فکتوریل می‌توانیم بینوم های $(a \pm b)^n$ را قرار ذیل انکشاف داد:

$$(a+b)^n = \frac{a^n}{0!} + \frac{n}{1!} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots 2.1}{n!} b^n$$

$$(a-b)^n = \frac{a^n}{0!} - \frac{n}{1!} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 - \dots + (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots 2.1}{n!} b^n$$

قوانین قیمت مطلقه

- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}; |x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$
- $a > 0; |x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$
- $a > 0; |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $a > 0; |x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|x-y| \geq |x| - |y|$
- $|x+y| \geq ||x| - |y||$
- $|x|^2 = |x^2| = x^2$
- $(|x|)^2 = |x|^n$
- $(-x)^{2n} = (x)^{2n} = |x|^{2n}$
- $(x)^{2n} = (y)^{2n} \Rightarrow |x| = |y|$

ارایه‌ی علمی اعداد

با استفاده از طاقت می‌توان اعداد بسیار بزرگ و یا اعداد بسیار کوچک را با در نظر داشت رونداف (Round off) به شکل علمی $(a \cdot 10^n)$ نوشت، طوری که $1 \leq a < 10$ و $n \in \mathbb{Z}$

سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول (معادلات خطی)

شکل عمومی این سیستم: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \dots\dots (I) \\ a_2x + b_2y = c_2 \dots\dots (II) \end{cases}$ می‌باشد.

شرط تقاطع (موجودیت حل یکتا) : $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

شرط موازات (عدم موجودیت حل) : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

شرط انطباق (موجودیت بینهایت حل ها) : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

معادلات درجه دوم یک مجهوله

شکل عمومی: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

فورمول دریافت جذور: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

دلتا یا قاسمه: $\Delta = b^2 - 4ac$

الف: اگر $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو جذر حقیقی مختلف است.

ب: اگر $\Delta = 0$ باشد در این صورت معادله دارای دو جذر حقیقی مساوی است.

ج: اگر $\Delta < 0$ باشد در این صورت معادله جذور حقیقی ندارد (دو جذر موهومی دارد).

بعضی خواص و قوانین این معادلات قرار ذیل است:

$$1. \quad S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$2. \quad D = x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$3. \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$4. \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

$$5. \quad x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

$$6. \quad x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$$

تشکیل معادله‌ی درجه دوم:

$$7. \quad x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\checkmark \quad x^2 - Sx + P = 0$$

نامساوات

دو کمیت یا دو مقدار A و B دارای سه حالت ذیل می‌باشند:

$$1. \quad A = B$$

$$2. \quad A > B$$

$$3. \quad A < B$$

حالت اول را مساوات و حالات دوم و سوم را نامساوات می‌نامند.

خواص نامساوی‌ها:

اگر به اطراف یک نامساوات یک عدد مانند c را جمع یا تفریق کنیم در نامساوات تغییری آید. مانند ذیل:

$$a > b$$

$$a + c > b + c$$

$$a - c > b - c$$

$$a < b$$

$$a + c < b + c$$

$$a - c < b - c$$

اگر اطراف یک نامساوات را به یک عدد مثبت مانند c ضرب یا تقسیم نماییم در نامساوات کدام تغییر وارد نمی شود. مانند ذیل:

$$a > b$$

$$a \cdot c > b \cdot c$$

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$a < b$$

$$a \cdot c < b \cdot c$$

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

اگر به اطراف یک نامساوات یک عدد منفی مانند c ضرب یا تقسیم شود علامه یا جهت نامساوات تغییر می کند. مانند ذیل:

$$a > b$$

$$a(-c) < b(-c)$$

$$\frac{a}{(-c)} < \frac{b}{(-c)}$$

$$a < b$$

$$a(-c) > b(-c)$$

$$\frac{a}{(-c)} > \frac{b}{(-c)}$$

اگر اطراف یک نامساوات را معکوس سازیم علامه یا جهت نامساوات تغییر می نماید. مانند ذیل:

$$a > b$$

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$a < b$$

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

تصادات

اول - تصاعد حسابی:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \vee \quad l = a + (n-1)d \quad \blacklozenge \text{ حد اخیر:}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{m+1} \quad \vee \quad d = \frac{l - a}{m+1} \quad \blacklozenge \text{ شامل سازی } m \text{ جمله در بین تصاعد:}$$

❖ حاصل جمع حدود: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \vee S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

❖ حاصل جمع حدود: $S_n = \frac{n}{2}\{(2a_1 + (n-1)d)\} \vee S_n = \frac{n}{2}\{(2a + (n-1)d)\}$

❖ حاصل جمع اعداد مسلسل طبیعی:

$$y = b$$

❖ حاصل جمع اعداد مسلسل جفت:

$$S_n = n(n+1) \vee \sum 2n = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n+1)$$

❖ حاصل جمع اعداد مسلسل طاق:

$$S_n = n^2 \vee \sum (2n-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$$

❖ حاصل جمع مربعات اعداد طبیعی:

$$S = \sum n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

❖ حاصل جمع مکعبات اعداد طبیعی:

$$S = \sum n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

❖ حاصل جمع توان های چهار اعداد طبیعی:

$$S = \sum n^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

❖ حاصل جمع مربعات اعداد مسلسل جفت:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2n)^2 \Rightarrow S = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

❖ حاصل جمع مکعبات اعداد مسلسل جفت:

$$12. \quad 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \dots + (2n)^3 \Rightarrow S = 2n^2 (n+1)^2$$

❖ حاصل جمع مربعات اعداد مسلسل طاق:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n-1)^2 \Rightarrow S = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$$

❖ حاصل جمع مکعبات اعداد مسلسل طاق:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + (2n-1)^3 \Rightarrow S = n^2 (2n^2 - 1)$$

دوم - تصاعد هندسی:

حد اخیر :

$$1. \quad a_n = a_1 r^{n-1} \vee l = ar^{n-1}$$

شامل سازی جملات:

$$2. \quad r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} \vee r = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$$

حاصل جمع حدود:

$$3. \quad S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} / r > 1$$

حاصل جمع حدود:

$$4. \quad S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} / r < 1$$

حاصل جمع حدود a_1 حد اول و a_n حد اخیر:

$$5. \quad S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

در صورتیکه $r < 1$ باشد :

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1}{1 - r} \quad \because (a_n \rightarrow 0)$$

در صورتیکه $r > 1$ باشد:

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \infty \quad \because (a_n \rightarrow \infty)$$

لوگاریتم

$$N = a^x \Leftrightarrow \log_a^N = x \quad / \quad N > 0, \quad a \neq 1 > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$1. \log_a 1 = 0$$

$$2. \log_a a = 1$$

$$3. \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$4. \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$5. \log_a \frac{1}{N} = -\log_a N = \text{co} \log_a N$$

$$6. \log_a N^m = m \log_a N$$

$$7. \log_{a^n} N = \frac{1}{n} \log_a N$$

$$8. \log_{a^n} N^m = \frac{m}{n} \log_a N$$

$$9. \log_{a^m} N^m = \log_a N$$

$$10. \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{N} = \log_a N$$

$$11. \log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[m]{N} = \frac{n}{m} \log_a N$$

$$12. \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$13. \log_b a \cdot \log_a b = 1$$

$$14. \log_{MN} a = \frac{1}{\log_a M + \log_a N}$$

$$15. \log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c \cdot \log_e d = \log_e a$$

$$16. \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$17. \log_a (\log_b (\log_c x)) = m \Rightarrow x = c^{b^{a^m}}$$

$$18. a^{\log_a N} = N$$

$$19. x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$$

$$20. \frac{\log_a M}{\log_{ab} M} = 1 + \log_a b$$

$$21. a^{\log_a x - \log_a y} = \frac{x}{y}$$

$$22. \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$23. e^{x \ln a} = a^x$$

$$24. AB = C^{\log_c A} \cdot C^{\log_c B}$$

$$25. \log_{\frac{a}{b}} x = \frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_b x - \log_a x} = -\frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x - \log_b x}$$

لیمیت

در صورتیکه c و n اعداد ثابت بوده و توابع $f(x)$ و $g(x)$ در یک نقطه‌ی مانند a دارای لیمیت باشند، یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = d$ در این صورت قضایای لیمیت قرار ذیل اند:

1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b + d$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b - d$
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot d$
5. $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot b$
6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{d}$
7. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = (b)^n$
8. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$
9. $\lim_{x \rightarrow a} [\log_m^{f(x)}] = \log_m^{\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]} = \log_m^b$
10. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = (b)^d$
11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \quad a > 1$$

$$13. \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad a > 1$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0, \quad 0 < a < 1$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty, \quad 0 < a < 1$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\arcsin bx} = \frac{a}{b}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{\arcsin bx} = \frac{a}{b}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\arcsin bx} = \frac{a}{b}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{\arcsin bx} = \frac{a}{b}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{\arcsin bx} = \frac{a}{b}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{\arcsin bx} = \frac{a}{b}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$34. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718281.....$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

همچنان برای معلومات بیشتر لیست های ذیل را نیز یاد آوری می‌نماییم:

$$37. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{اگر } n \text{ یک عدد جفت باشد}$$

$$38. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \quad \text{اگر } n \text{ یک عدد جفت باشد}$$

39. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ اگر n یک عدد طاق باشد

40. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ اگر n یک عدد طاق باشد

موضوعات ذیل نیز در محاسبات الجبری لیمت ها حایز اهمیت است:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) + (-\infty) \Rightarrow \text{تعریف نمی شود (مبهم، نامعین، غیر معین)}$$

$$(-\infty) + (+\infty) \Rightarrow \text{تعریف نمی شود (مبهم، نامعین، غیر معین)}$$

$$(+\infty) - (+\infty) \Rightarrow \text{تعریف نمی شود (مبهم، نامعین، غیر معین)}$$

$$(+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) - (-\infty) \Rightarrow \text{تعریف نمی شود (مبهم، نامعین، غیر معین)}$$

$$(a) + (+\infty) = +\infty, a \in \mathbb{R}$$

$$(a) + (-\infty) = -\infty, a \in \mathbb{R}$$

$$(a) - (+\infty) = -\infty, a \in \mathbb{R}$$

$$(a) - (-\infty) = +\infty, a \in \mathbb{R}$$

$$(a) \cdot (+\infty) = +\infty, a > 0$$

$$(a) \cdot (+\infty) = -\infty, a < 0$$

$$(a) \cdot (-\infty) = +\infty, a < 0$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(+a) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(-a) \cdot (+\infty) = -\infty$$

مبهم (تعریف نشده) $0 \cdot (+\infty)$

$$(+a) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$(-a) \cdot (-\infty) = +\infty$$

مبهم (تعریف نشده) $0 \cdot (-\infty)$

$$\frac{a}{+\infty} = 0$$

$$\frac{a}{-\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{a} = \infty$$

مبهم (تعریف نشده) $\frac{\infty}{\infty}$

$$\infty^n = \infty, \quad n > 1$$

$$a^\infty = \infty, \quad |a| > 1$$

$$a^\infty = 0, \quad |a| < 1$$

$$\sqrt[n]{\infty} = \infty$$

معادل بودن دو تابع از نگاه لیمیت:

برای آسانی کار در محاسبات الجبری از عملیهی معادل بودن استفاده به عمل می‌آید که به علامت $(\sim)$ نمایش داده می‌شود.

مثلاً: اگر خواسته باشیم که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x}$ را محاسبه کنیم چنین عمل می‌کنیم:

$$\tan 5x \sim 5x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x} = \frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}} = 5$$

تعریف دو تابع معادل: توابع $f(x)$ و $g(x)$ در صورتیکه $x \rightarrow a$ کند زمانی با هم معادل اند که دارای شرایط ذیل باشند:

$$I. \begin{cases} f(a) = 0 \\ g(a) = 0 \end{cases} \quad II. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ می‌توان به جای هر تابع قیمت معادل آن را وضع نموده و آن را حل نمود.

برای معلومات بیشتر قیمت های معادل بعضی توابع با تفکیک نوعیت آن قرار ذیل نگاشته می‌شود:

معادل های توابع الجبری پولینومیلی:

الف: اگر $x \rightarrow \pm \infty$ ، هر افاده‌ی کثیرالجهلی از x معادل حدی است که توانش بیشتر باشد. مانند:

$$x \rightarrow \pm \infty \Rightarrow \begin{cases} x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x - 7 \sim x^5 \\ -x^2 + 3x - 12x^4 + 5 \sim -12x^4 \end{cases}$$

یعنی اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x - 7)$ را بخواهیم حل کنیم به جای اینکه در تمامی حدود قیمت لایتناهی را وضع نماییم فقط در قیمت معادل آن وضع نموده و جواب را دریافت می‌داریم قرار ذیل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x - 7) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 = (\infty)^5 = \infty$$

ب: اگر $x \rightarrow 0$ ، هر افاده‌ی کثیرالجهلی از x معادل حدی است که توانش کمتر باشد. مانند:

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^5 + 11x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 9x \sim 9x \\ -x^2 + 3x - 12x^4 + 5 \sim 5 \end{cases}$$

معادل های توابع مثلثاتی:

اگر U تابع از x باشد طوری که $U \rightarrow 0$ در این صورت معادل های ذیل را می‌توانیم بنویسیم:

- | | |
|---|--|
| 1. $\sin U \sim U$ | 2. $\tan U \sim U$ |
| 3. $1 - \cos U \sim \frac{1}{2}U^2$ | 4. $U - \sin U \sim \frac{1}{6}U^3$ |
| 5. $U - \tan U \sim -\frac{1}{3}U^3$ | 6. $\tan U - \sin U \sim \frac{1}{2}U^3$ |
| 7. $(1+U)^n - 1 \sim nU$ | 8. $\sqrt[n]{1+U} - 1 \sim \frac{1}{n}U$ |
| 9. $\sin U$, $\tan U$, $\text{Arc sin } U$, $\text{Arc tan } U \sim U$ | |

معادل های توابع جذری:

الف: اگر $x \rightarrow \pm\infty$ و n یک عدد طاق باشد (قیمت مطلقه ضرور نیست). قرار ذیل:

$$\sqrt[n]{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n} \sim \sqrt[n]{a_0} \left(x + \frac{a_1}{na_0} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{8x^3 + 48x^2 + 2x - 1} \sim \sqrt[3]{8} \left(x + \frac{48}{3 \cdot 8} \right) = 2(x+2) \\ x \rightarrow \pm\infty \end{array} \right.$$

مثال:

ب: اگر $x \rightarrow \pm\infty$ و n یک عدد جفت باشد (قیمت مطلقه ضرور است و باید $a_0 > 0$ باشد). قرار ذیل:

$$\sqrt[n]{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n} \sim \pm \sqrt[n]{a_0} \left(x + \frac{a_1}{na_0} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[4]{16x^4 - 4x^3 + 2x - 1} \sim \pm \sqrt[4]{16} \left(x + \frac{-4}{4 \cdot 16} \right) = \pm 2 \left(x - \frac{1}{16} \right) \\ x \rightarrow \pm\infty \end{array} \right.$$

مثال:

برای معلومات بیشتر معادل های ذیل را نیز یاد آور می شویم :

- $x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \{ \sin [\sin \dots \sin (nx)] \} \sim nx$
- $x \rightarrow 0 \Rightarrow \tan \{ \tan [\tan \dots \tan (nx)] \} \sim nx$
- $x \rightarrow 0 \Rightarrow \ln(1+x) \sim x$
- $x \rightarrow 0 \Rightarrow e^x - 1 \sim x$

مشتقات

مشتقات توابع الجبری :

در روابط ذیل : a, c, n اعداد ثابت، x متحول، $u = f(x)$ ، $v = g(x)$ و $w = h(x)$ توابع را ارایه می دارند.

$$1. y = c \Rightarrow y' = 0$$

$$2. y = ax^n \Rightarrow y' = nax^{n-1}$$

$$3. y = u \pm v \pm w \pm \dots \Rightarrow y' = u' \pm v' \pm w' \pm \dots$$

$$4. y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + uv'$$

$$5. y = c \cdot u \Rightarrow y' = cu'$$

$$6. y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$7. y = \frac{u}{c} \Rightarrow y' = \frac{u'}{c}$$

$$8. y = \frac{c}{v} \Rightarrow y' = \frac{-cv'}{v^2}$$

$$9. y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$10. y = au^n \Rightarrow y' = nau^{n-1} \cdot u'$$

مشتقات توابع مثلثاتی:

$$11. \quad y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x, \quad y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

$$12. \quad y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x, \quad y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$$

$$13. \quad y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan u \Rightarrow y' = u' \sec^2 u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$14. \quad y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$y = \cot u \Rightarrow y' = -u' \csc^2 u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$$

$$15. \quad y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \cdot \tan x \Rightarrow y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$y = \sec u \Rightarrow y' = u' \sec u \cdot \tan u \Rightarrow y' = \frac{u' \sin u}{\cos^2 u}$$

$$16. \quad y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cdot \cot x \Rightarrow y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$y = \csc u \Rightarrow y' = -u' \csc u \cdot \cot u \Rightarrow y' = \frac{-u' \cos u}{\sin^2 u}$$

مشتقات توابع لوگارتیمی ونمایی:

$$17. \quad y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$18. \quad y = \log_a^x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$y = \log_a^u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$19. \quad y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$y = e^u \Rightarrow y' = u' e^u$$

$$20. \quad y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$$

$$y = a^u \Rightarrow y' = u' a^u \ln a$$

$$21. \quad y = u^u \Rightarrow y' = u' u^u (1 + \ln u)$$

$$22. \quad y = u^v \Rightarrow y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{v u'}{u} \right)$$

$$23. \quad y = \ln |x| \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

مشتقات توابع معکوس مثلثاتی:

$$24. \quad y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y = \arcsin u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$25. \quad y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y = \arccos u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$26. \quad y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$27. \quad y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad y = \operatorname{arccot} u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$28. \quad y = \operatorname{arcsec} x \Rightarrow y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad y = \operatorname{arcsec} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$29. \quad y = \operatorname{arccsc} x \Rightarrow y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad y = \operatorname{arccsc} u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

مشتقات توابع مثلثاتی هایپربولیک:

$$30. \quad y = \sinh x \Rightarrow y' = \cosh x$$

$$31. \quad y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x$$

$$32. \quad y = \tanh x \Rightarrow y' = \operatorname{sech}^2 x$$

$$33. \quad y = \coth x \Rightarrow y' = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$34. \quad y = \operatorname{sech} x \Rightarrow y' = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$$

$$35. \quad y = \operatorname{csch} x \Rightarrow y' = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x$$

مشتق توابع قیمت مطلقه

$$y = |u| \Rightarrow y' = \frac{u'u}{|u|}$$

مشتق توابع ضمنی :

رابطه‌ی ضمنی را به صورت عموم به شکل $f(x, y) = 0$ نشان می‌دهیم و مشتق آن قرار ذیل است:

$$f'(x, y) = -\frac{F'(x)}{F'(y)}$$

قضیه‌ی لاپیتال:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{اگر} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{گردد پس داریم که:}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{اگر} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{گردد پس داریم که:}$$

طریق ارایه مراتب مشتقات :

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d[f(x)]}{dx} \quad \text{مشتق اول:}$$

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 [f(x)]}{dx^2} \quad \text{مشتق دوم :}$$

$$f'''(x) = y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 [f(x)]}{dx^3} \quad \text{مشتق سوم :}$$

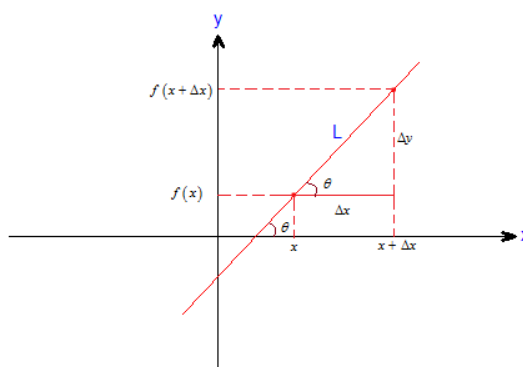
$$f^{(4)}(x) = y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^4 [f(x)]}{dx^4} \quad \text{مشتق چهارم :}$$

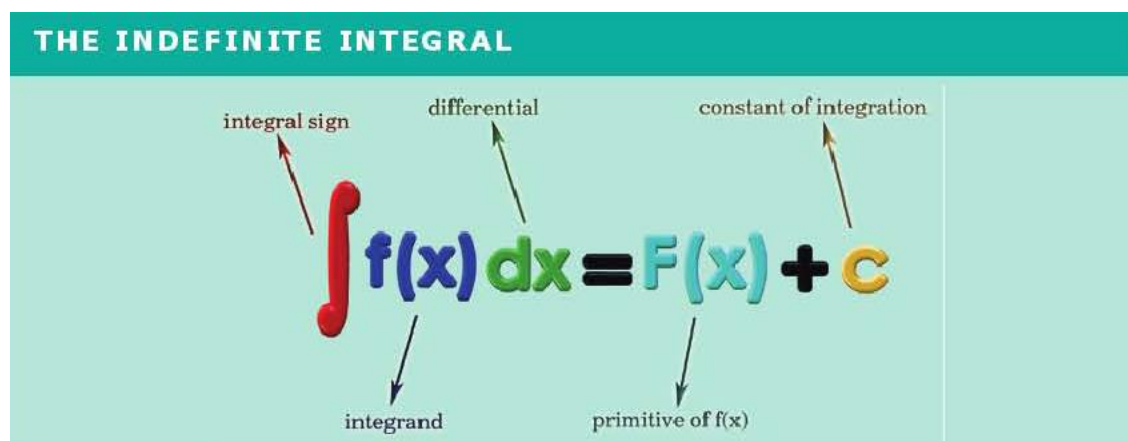
:

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n [f(x)]}{dx^n} \quad \text{مشتق } n \text{ ام :}$$

همچنان چون مشتق اول مساوی است به میل مماس در یک نقطه‌ی معینی از گراف و همچنان مساوی است به تانجانت زاویه‌ی که گراف با محور افقی x می‌سازد بنا بر آن می‌توانیم رابطه‌ی ذیل را نیز بنویسیم :

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d[f(x)]}{dx} = m = \tan \theta$$





قوانین خواص اولیه ی انتیگرال ها:

1. $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$, c is a constant
2. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
3. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, $F(x) = \int f(x) dx$
4. $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$, c is a constant
5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
6. $\int_a^a f(x) dx = 0$
7. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
8. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
9. $\int_a^b c dx = c(b - a)$

$$\text{If } f(x) \geq 0 \text{ on } a \leq x \leq b \therefore \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\text{If } f(x) \geq g(x) \text{ on } a \leq x \leq b \therefore \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

انتیگرال های اساسی:

در فورمول های ذیل c به نام ثابت انتیگرال یاد می گردد.

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int 1 dx = \int dx = x + c$
3. $\int k dx = kx + c$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
6. $\int x^{-1} dx = \ln|x| + c$
7. $\int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c, n \neq 1$
8. $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$
9. $\int x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{x^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1} + c$

انتیگرال های توابع مثلثاتی:

- | | |
|---|--|
| 1. $\int \sin u du = -\cos u + c$ | 2. $\int \cos u du = \sin u + c$ |
| 3. $\int \tan u du = \ln \sec u + c$ | 4. $\int \cot u du = \ln \sin u + c$ |
| 5. $\int \sec u du = \ln \sec u + \tan u + c$ | 6. $\int \csc u du = \ln \csc u - \cot u + c$ |
| 7. $\int \sec^2 u du = \tan u + c$ | 8. $\int \csc^2 u du = -\cot u + c$ |
| 9. $\int \sec^3 u du = \frac{1}{2}(\sec u \tan u + \ln \sec u + \tan u) + c$ | |
| 10. $\int \csc^3 u du = \frac{1}{2}(-\csc u \cot u + \ln \csc u - \cot u) + c$ | |
| 11. $\int \sec u \tan u du = \sec u + c$ | 12. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + c$ |

انتیگرال های توابع نمایی و لوگاریتمی:

1. $\int e^u du = e^u + c$
2. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
3. $\int \ln u du = u \ln(u) - u + c$
4. $\int e^{au} \sin(bu) du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} [a \sin(bu) - b \cos(bu)] + c$
5. $\int ue^u du = (u - 1)e^u + c$
6. $\int e^{au} \cos(bu) du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} [a \cos(bu) + b \sin(bu)] + c$
7. $\int \frac{1}{u \ln u} du = \ln |\ln u| + c$

انتیگرال های توابع معکوس مثلثاتی:

1. $\int \sin^{-1} u \, du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + c$
2. $\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + c$
3. $\int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + c$
4. $\int \cot^{-1} u \, du = u \cot^{-1} u + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + c$
5. $\int \sec^{-1} u \, du = u \sec^{-1} u - \ln(u + \sqrt{u^2-1}) + c$
6. $\int \csc^{-1} u \, du = u \csc^{-1} u + \ln(u + \sqrt{u^2-1}) + c$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$
8. $\int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$
9. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}} du = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

انتیگرال های توابع هایپربولیک مثلثاتی:

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \sinh u \, du = \cosh u + c$ | 2. $\int \cosh u \, du = \sinh u + c$ |
| 3. $\int \tanh u \, du = \ln \cosh u + c$ | 4. $\int \coth u \, du = \ln \sinh u + c$ |
| 5. $\int \operatorname{sech} u \, du = \tan^{-1}(\sinh u) + c$ | 6. $\int \operatorname{csch} u \, du = -\cot^{-1}(\cosh u) + c$ |
| 7. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + c$ | 8. $\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + c$ |
| 9. $\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + c$ | 10. $\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + c$ |

انتیگرال های متفرقه:

1. $\int \frac{1}{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + c$
2. $\int \frac{1}{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c$
3. $\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + c$
4. $\int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + c$
5. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c$
6. $\int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + c$

قضیه ی رول (Roll):

فرض کنید که تابع f دارای شرایط ذیل باشد:

✓ در انتروال بسته ی $[a, b]$ متمادی باشد.

✓ در انتروال باز (a, b) مشتق پذیر باشد.

✓ $f(a) = f(b) = 0$ باشد.

در این صورت عددی مانند c در انتروال باز (a, b) وجود دارد طوری که $f'(c) = 0$ می گردد.

قضیه ی فرمات (Fermat):

هرگاه تابع $f(x)$ در انتروال بسته ی $[a, b]$ متمادی و برای هر $c \in (a, b)$ ، $a < c < b$ قیمت $f(c)$ اعظمی و یا اصغری باشد یعنی $f(c) = \text{Max } f(x)$ و یا $f(c) = \text{Min } f(x)$ در صورتیکه تابع $f(x)$ در نقطه ی c قابل اشتقاق باشد پس مشتق تابع در نقطه ی c صفر است یعنی: $f'(c) = 0$

قضیه‌ی کوشی (Cauchy):

هرگاه توابع $f(x)$ و $g(x)$ در انتروال بسته‌ی $[a, b]$ متمادی و در انتروال باز (a, b) مشتق پذیر باشد پس یک عدد مانند c از

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

انتروال باز (a, b) وجود دارد طوریکه:

قضیه‌ی قیمت وسطی - قضیه‌ی لاگرانژ (Lagrange):

هرگاه تابع $y = f(x)$ در انتروال بسته‌ی $[a, b]$ متمادی و در انتروال باز (a, b) مشتق پذیر باشد، لااقل یک عدد مانند c از

انتروال باز (a, b) طوریکه $a < c < b$, $c \in (a, b)$ وجود دارد قرار ذیل:

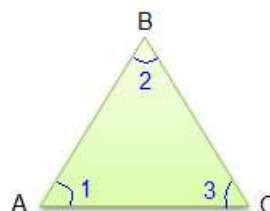
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

فورمول‌های مورد نیاز در علم هندسه‌ی مسطحه:

مثلث

✓ مجموع وسعت زوایای داخلی یک مثلث مساوی به 180^0 است.

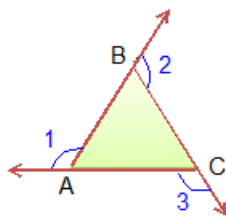
اگر اندازه زاویه را به m که حرف اول (measurement) می‌باشد و معنی اندازه یا وسعت را می‌دهد، نشان دهیم، قرار ذیل عمل می‌نماییم:



$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^0$$

مجموع وسعت زوایای خارجی یک مثلث 360^0 است. قرار ذیل:

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360^\circ$$



✓ ارتفاع مثلث:

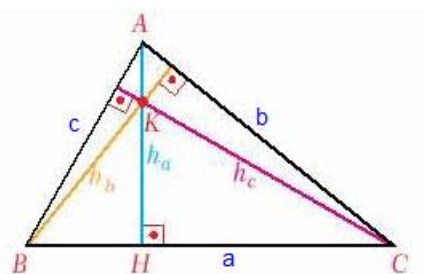
اگر اضلاع مثلث به ترتیب a, b, c باشند، طول ارتفاعات مثلث قرار ذیل دریافت می‌گردد:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



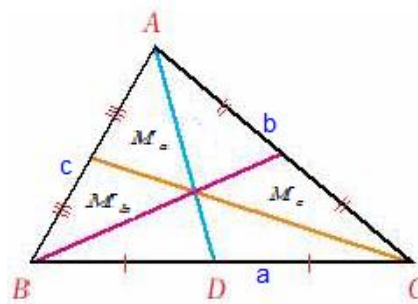
✓ میانه‌ی مثلث:

اگر اضلاع مثلث به ترتیب a, b, c باشند، میانه‌های مثلث قرار ذیل دریافت می‌گردد:

$$M_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

$$M_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$$

$$M_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$



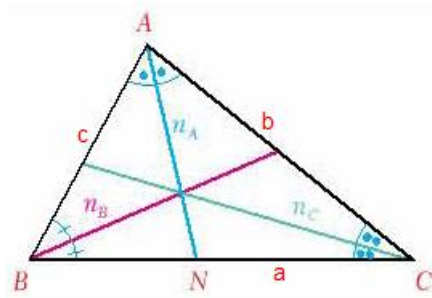
✓ ناصف الزاویه‌ی مثلث:

اگر اضلاع یک مثلث به ترتیب a, b, c باشند طول ناصف الزاویه ها قرار ذیل دریافت می‌گردد:

$$n_A = \frac{2}{b+c} \sqrt{b \cdot c \cdot p(p-a)}$$

$$n_B = \frac{2}{a+c} \sqrt{a \cdot c \cdot p(p-b)}$$

$$n_C = \frac{2}{a+b} \sqrt{a \cdot b \cdot p(p-c)}$$

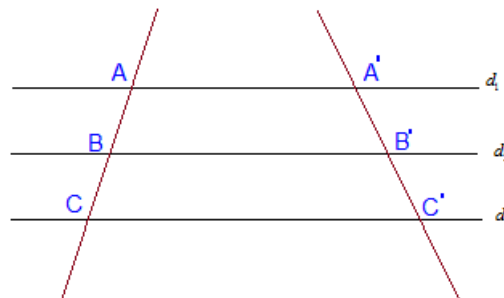


✓ قضیه‌ی تالس:

هرگاه دو یا چندین قطعه خط موازی توسط دو قاطع قطع گردند، بر روی آن‌ها قطعات متناسب جدا می‌کنند.

طبق شکل ذیل خطوط d_1, d_2, d_3 باهم موازی اند.

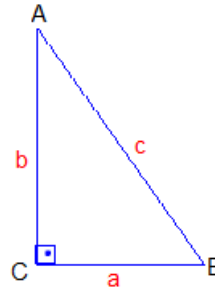
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$



✓ قضیه فیثاغورث:

در هر مثلث قائم الزاویه ، مربع وتر مساوی است به مجموع مربعات دو ضلع قائم آن. قرار ذیل:

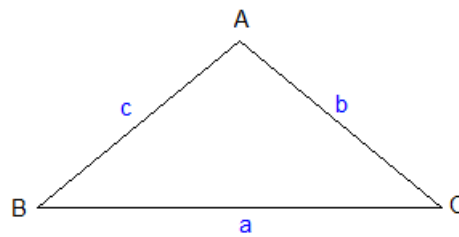
$$a^2 + b^2 = c^2$$



✓ محیط مثلث:

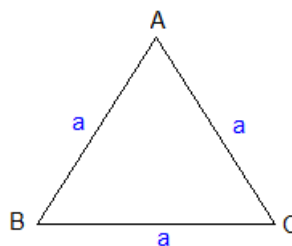
محیط یک مثلث عبارت از مجموعه‌ی طول اضلاع آن می‌باشد. که رابطه‌ی آن قرار ذیل است:

$$P = a + b + c$$



محیط مثلث متساوی الاضلاع قرار ذیل است:

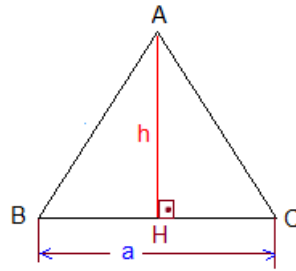
$$P = a + a + a = 3a$$



✓ مساحت مثلث:

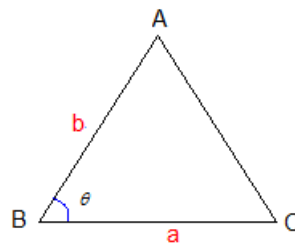
الف: در صورتی که قاعده و ارتفاع آن معلوم باشد.

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h$$



ب: در صورتیکه طول دو ضلع و وسعت زاویه بین این دو ضلع معلوم باشد.

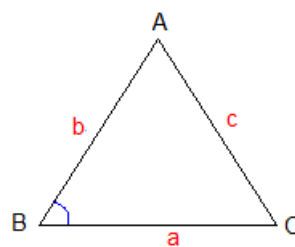
$$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \theta$$



ج: در صورتیکه طول هر سه ضلع مثلث معلوم باشد.

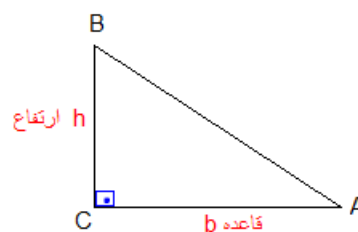
$$2P = a + b + c \Rightarrow P = \frac{a + b + c}{2}$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



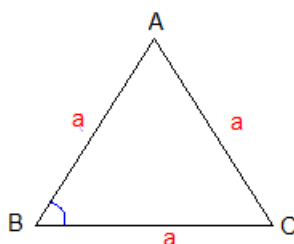
نوت : در مثلث قائم الزاویه یک ضلع قائم آن قاعده و ضلع قائم دیگر آن ارتفاع آن را تشکیل می‌دهد . که مساحت آن قرار ذیل است:

$$A = \frac{1}{2} b \cdot h$$



مساحت مثلث متساوی الاضلاع:

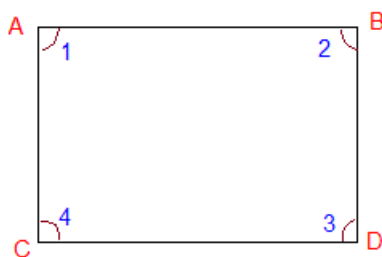
$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$



چهار ضلعی ها

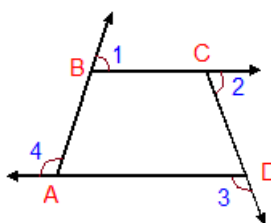
مجموع زوایای داخلی یک چهارضلعی مساوی است به 360^0 :

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 360^0$$



مجموع زوایای خارجی یک چهارضلعی مساوی است به 360^0 :

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 360^0$$

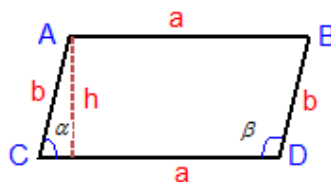


متوازی الاضلاع

$$\alpha + \beta = 180^0$$

$$h = a \sin \alpha$$

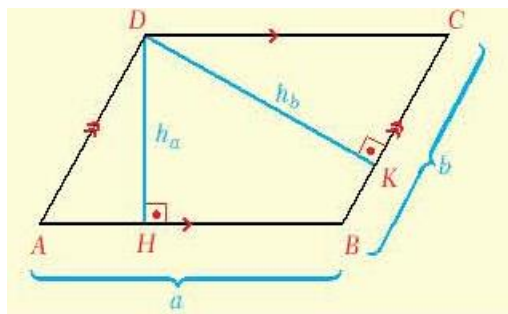
$$h = a \sin \beta$$



محیط متوازی الاضلاع: $P = 2(a + b)$

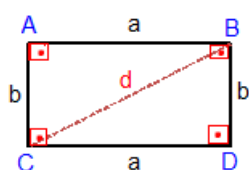
مساحت متوازی الاضلاع: $A = b \cdot h = ab \sin \alpha = ab \sin \beta$

ویا در شکل ذیل می‌توانیم مساحت را چنین دریافت کنیم:



$$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

مستطیل

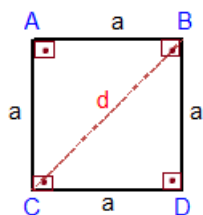


محیط : $P = 2(a + b)$

مساحت : $A = a \cdot b$

قطر : $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

مربع

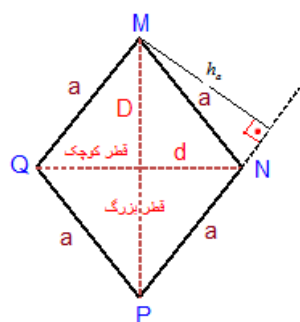


محیط : $P = 4a$

مساحت : $A = a^2$

قطر : $d = \sqrt{2}a$

معین (لوزی)



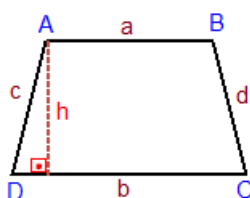
محیط : $P = 4a$

مساحت :

الف) نظر به اضلاع: $A = a \cdot h_a$

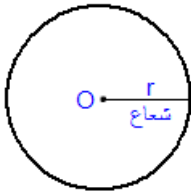
ب) نظر به طول اقطار: $A = \frac{1}{2} D \cdot d$

نوزنقه



محیط : $P = a + b + c + d$

$$A = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h \quad \text{مساحت:}$$



دایره

$$P = 2\pi r \quad \text{محیط:}$$

$$A = \pi r^2 \quad \text{مساحت:}$$

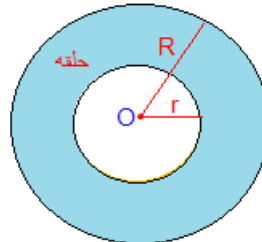
$$\pi = 3.141592.....$$

$$\Rightarrow \pi = 3.14$$

مساحت حلقه‌ی دایره:

حلقه عبارت از ساحه‌ی است که در بین دو دایره‌ی متحد‌المركز به وجود می‌آید و مساحت آن طور ذیل دریافت می‌گردد:

$$A(\text{حلقه}) = \pi(R^2 - r^2)$$

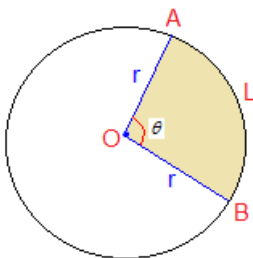


$$R = \text{شعاع دایره ی بزرگ}$$

$$r = \text{شعاع دایره ی کوچک}$$

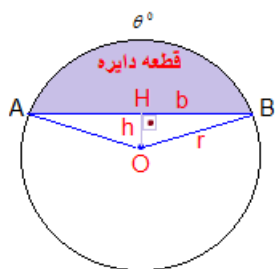
مساحت قطاع دایره:

$$A = \frac{\pi r^2 \theta}{2\pi} \Rightarrow A = \frac{1}{2} r^2 \theta \Rightarrow A = \frac{1}{2} r(r\theta) = \frac{1}{2} r \cdot L \quad \text{الف) بر حسب رادیان:}$$



$$A = \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} \Rightarrow A = \frac{\pi}{360^\circ} r^2 \theta \quad \text{ب) بر حسب درجه:}$$

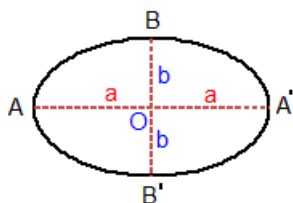
مساحت قطعه دایره:



مساحت مثلث - مساحت قطاع = مساحت قطعه

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2 - \frac{1}{2}bh$$

بیضوی (الپس)



$$P = \pi \sqrt{2(a^2 + b^2)} \quad \text{محیط:}$$

$$A = \pi \cdot a \cdot b \quad \text{مساحت:}$$

$$\overline{AA'} = 2a \quad \text{طول قطر بزرگ:}$$

$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a \quad \text{نصف طول قطر بزرگ:}$$

$$\overline{BB'} = 2b \quad \text{طول قطر کوچک:}$$

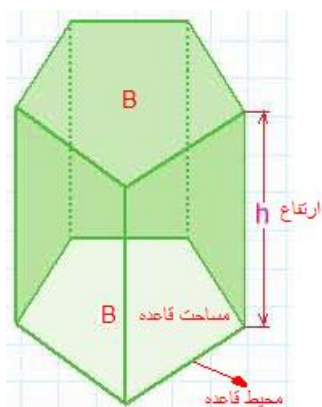
$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b \quad \text{نصف طول قطر کوچک:}$$

فورمول های مورد نیاز در علم هندسه ی فضایی :

در رابطه های ذیل :

- ✓ محیط قاعده به P
- ✓ مساحت سطح جانبی به S
- ✓ مساحت کلی به A
- ✓ مساحت سطح قاعده به B
- ✓ حجم به V نشان داده شده است.

منشور

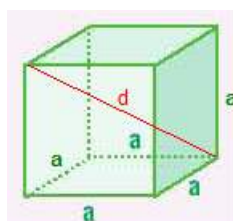


✓ مساحت سطح جانبی : $S = P \cdot h$

✓ مساحت کلی : $A = S + 2B$

✓ حجم : $V = B \cdot h$

مکعب



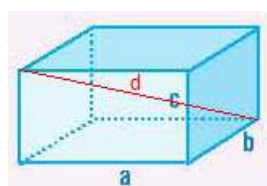
✓ مساحت سطح جانبی : $S = 4a^2$

✓ مساحت کلی : $A = 6a^2$

✓ حجم : $V = a^3$

✓ قطر : $d = \sqrt{3} \cdot a$

مکعب مستطیل



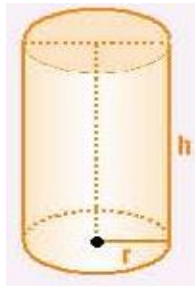
✓ مساحت سطح جانبی : $S = 2(ac + bc)$

✓ مساحت کلی : $A = 2(ab + bc + ac)$

✓ حجم : $V = a \cdot b \cdot c$

✓ قطر : $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

استوانه

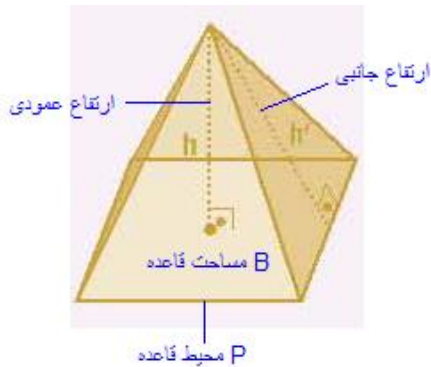


$$S = 2\pi \cdot r \cdot h \quad \checkmark \text{ مساحت سطح جانبی :}$$

$$A = 2\pi r(h + r) \quad \checkmark \text{ مساحت کلی :}$$

$$V = \pi r^2 \cdot h \quad \checkmark \text{ حجم :}$$

هرم

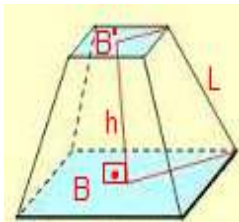


$$S = \frac{1}{2} P \cdot h' \quad \checkmark \text{ مساحت سطح جانبی :}$$

$$A = S + B \quad \checkmark \text{ مساحت کلی :}$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h \quad \checkmark \text{ حجم :}$$

هرم ناقص



$$S = \frac{1}{2} (P + P') \cdot L \quad \checkmark \text{ مساحت سطح جانبی :}$$

$$A = S + B + B' \quad \checkmark \text{ مساحت کلی :}$$

$$V = \frac{1}{3} h (B + \sqrt{BB'} + B') \quad \checkmark \text{ حجم :}$$

در رابطه‌ی فوق P محیط قاعده، P' محیط مقطع، B مساحت قاعده، B' مساحت مقطع، L ارتفاع جانبی و h ارتفاع عمودی را نشان می‌دهد.

مخروط

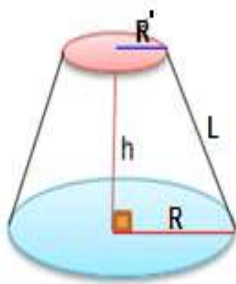


$$S = \pi r \cdot L \quad \checkmark \text{ مساحت سطح جانبی :}$$

$$A = \pi r(L + r) \quad \checkmark \text{ مساحت کلی :}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \quad \checkmark \text{ حجم :}$$

مخروط ناقص

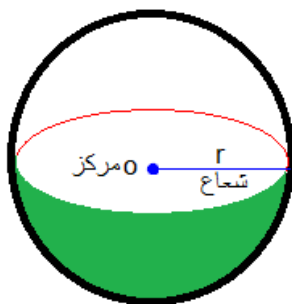


$$S = \pi L(R + R') \quad \checkmark \text{ مساحت سطح جانبی :}$$

$$A = \pi \left[L(R + R') + (R^2 + R'^2) \right] \quad \checkmark \text{ مساحت کلی :}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R'^2 + R \cdot R') \quad \checkmark \text{ حجم :}$$

کره



$$A = 4\pi r^2 \quad \checkmark \text{ مساحت کره :}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \checkmark \text{ حجم کره :}$$

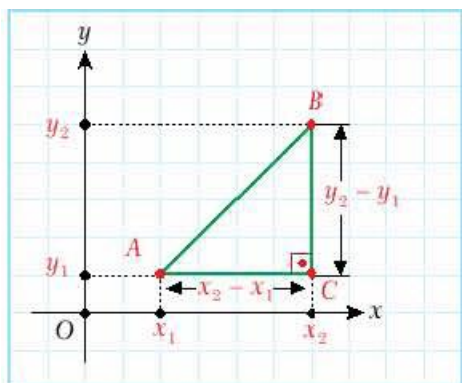
$$A = 2\pi r^2 \quad \checkmark \text{ مساحت نیم کره :}$$

$$V = \frac{2}{3} \pi r^3 \quad \checkmark \text{ حجم نیم کره :}$$

$$V = \frac{2}{3} \pi r^3 \cdot h \quad \checkmark \text{ حجم قطاع کروی :}$$

فورمول های مورد نیاز در علم هندسه ی تحلیلی

فاصله بین دو نقطه: فاصله بین نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$



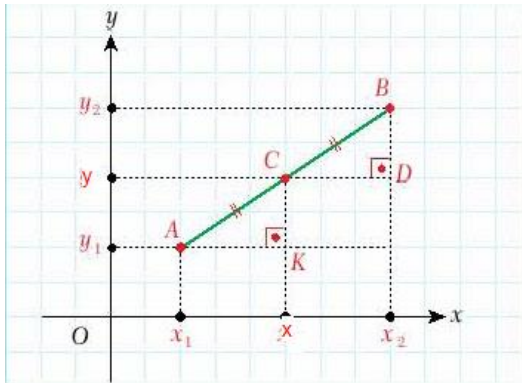
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

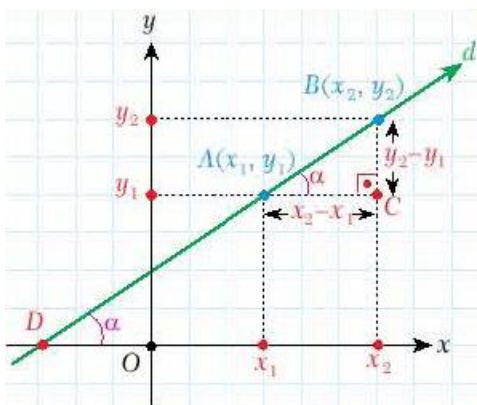
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \quad \text{تقسیم یک قطعه خط به یک نسبت معینه :}$$

مختصات نقطه‌ی تنصیف یک قطعه خط :



$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

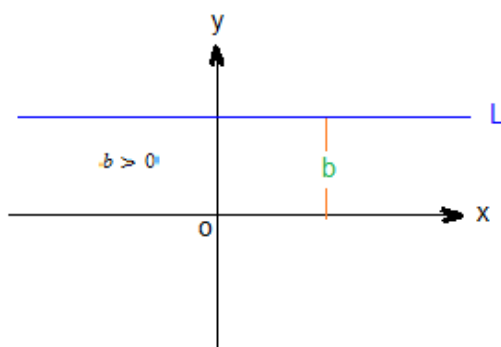
میل خط مستقیم که مختصات انجام‌های آن معلوم باشد:



$$\tan \alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

معادلات خطوط مستقیم

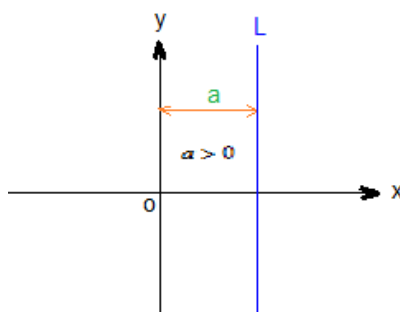
معادله‌ی خط مستقیمی که موازی به محور x باشد: $y = b$



اگر $b > 0$ باشد خط L فوق محور x و اگر $b < 0$ باشد خط پایین محور x و اگر $b = 0$ باشد خط مذکور با محور x منطبق می‌باشد.

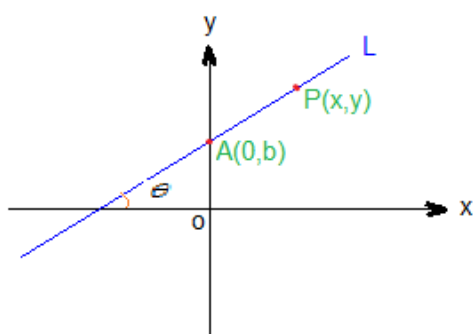
معادله‌ی خط مستقیمی که با محور y موازی باشد: $x = a$

اگر $a > 0$ باشد خط L به طرف راست محور y و اگر $a < 0$ باشد خط به طرف چپ محور y و اگر $a = 0$ باشد، خط L با محور y منطبق است. قرار شکل ذیل:



معادله‌ی خط مستقیمی که میل و نقطه‌ی تقاطع آن با محور y معلوم باشد (معادله معیاری خط مستقیم):

اگر $P(x, y)$ یک نقطه‌ی خط L و $A(0, b)$ نقطه‌ی تقاطع با محور y باشد، در این صورت میل خط مستقیم عبارت است از:

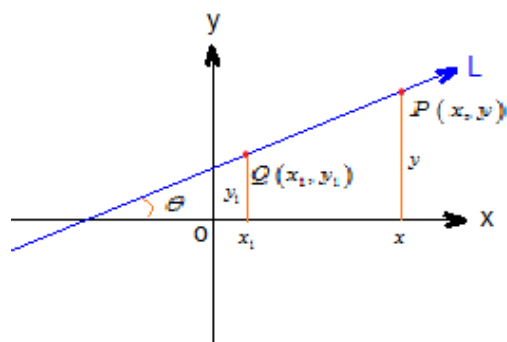


$$m = \frac{y - b}{x - 0} = \frac{y - b}{x} \Rightarrow y - b = mx$$

$$\Rightarrow \boxed{y = mx + b}$$

معادله‌ی خط مستقیمی که میل و یک نقطه‌ی آن معلوم باشد:

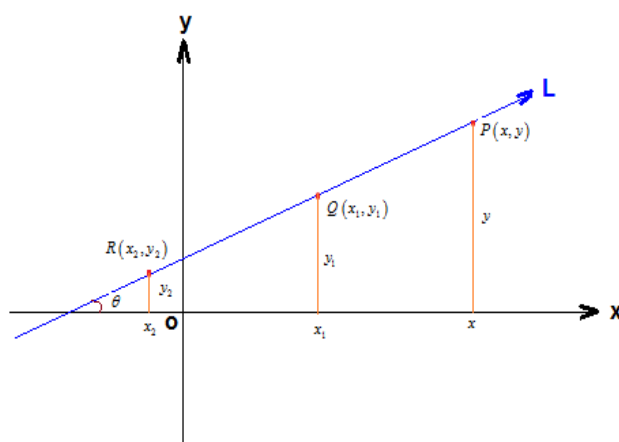
اگر $P(x, y)$ یک نقطه‌ی اختیاری خط L باشد و از نقطه‌ی $Q(x_1, y_1)$ عبور کند، معادله‌ی آن را بادر نظر داشت شکل ذیل چنین به دست می‌آوریم:



$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow \boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

معادله‌ی خط مستقیمی که دو نقطه‌ی آن معلوم باشد:

اگر $P(x, y)$ یک نقطه‌ی اختیاری خط L باشد و از نقاط $Q(x_1, y_1)$ و $R(x_2, y_2)$ عبور نماید، بادر نظر داشت این که میل های هر نقطه‌ی این خط باهم مساوی است می‌توانیم برویت شکل ذیل بنویسیم:



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} / \times (x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

معادله‌ی خط مستقیمی که تقاطع آن با محورات معلوم باشد:

اگر نقطه‌ی $P(x, y)$ یک نقطه‌ی کیفی خط L و نقطه‌ی تقاطع آن با محور x ، $A(a, 0)$ و تقاطع با محور y ، $B(0, b)$ باشد، در این صورت هر سه نقاط روی خط مذکور واقع بوده و با استفاده از معادله‌ی مستقیمی که دو نقطه‌ی آن معلوم باشد بادر نظر داشت شکل ذیل می‌توانیم بنویسیم:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

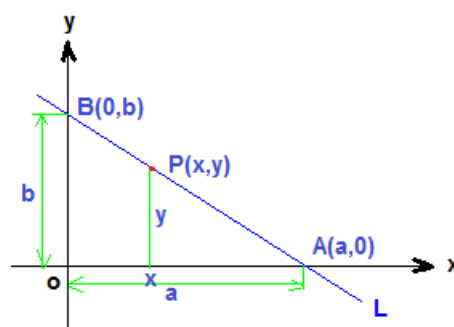
$$\Rightarrow y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a} (x - a)$$

$$\Rightarrow -ay = b(x - a) \Rightarrow -ay = bx - ab$$

$$\Rightarrow bx + ay = ab / \div ab$$

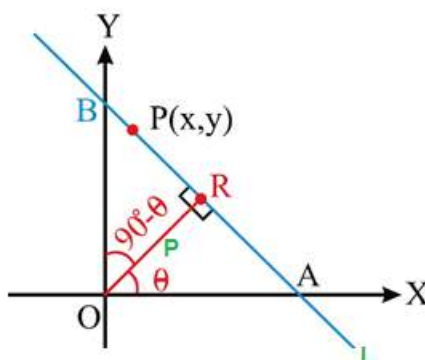
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

معادله‌ی نارمل یک خط مستقیم:



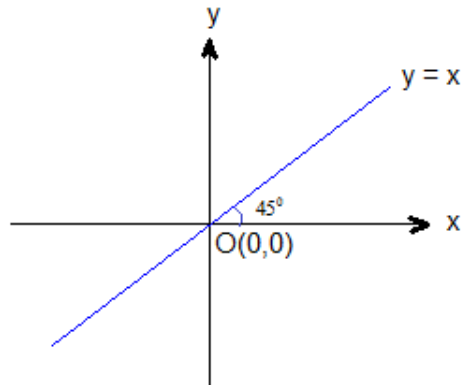
معادله‌ی نورمال یک خط مستقیم که با محور x زاویه θ را تشکیل داده و

طول آن به اندازه p واحد باشد عبارت است از: $x \cos \theta + y \sin \theta = p$

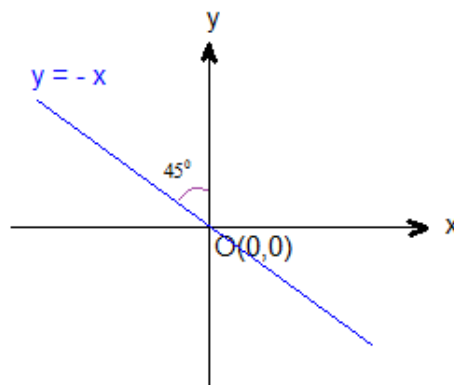


حالات خصوصی معادله‌ی خط مستقیم:

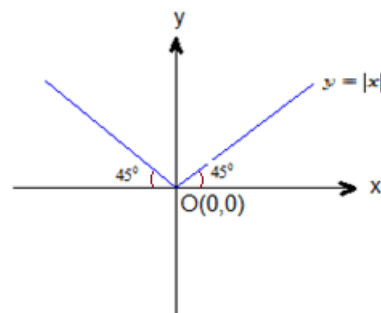
(1) معادله‌ی خط مستقیمی که ناصف اول و سوم کمیات وضعیه‌ی قایم باشد عبارت است از: $y = x$



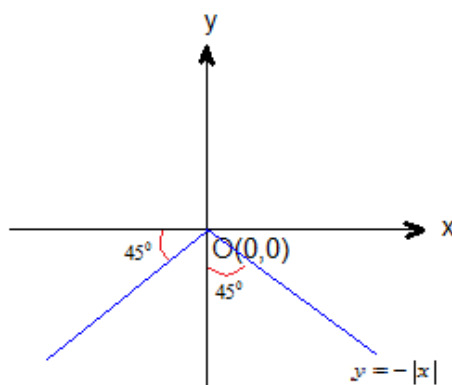
(2) معادله‌ی خط مستقیمی که ناصف ناحیه‌ی دوم و چهارم کمیات وضعیه باشد، عبارت است از: $y = -x$



(3) معادله‌ی مستقیمی که ناصف ناحیه‌ی اول و دوم کمیات وضعیه باشد، عبارت از قیمت مطلقه $y = |x|$ می‌باشد.



(4) معادله مستقیمی که ناصف ناحیه سوم و چهارم کمیات وضعیه باشد، عبارت از قیمت مطلقه $y = -|x|$ می باشد.



دریافت فاصله ی یک نقطه از یک خط و مبدای کمیات وضعیه:

(1) برای دریافت فاصله ی یک نقطه از یک خط از رابطه ی $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می نماییم.

(2) برای دریافت فاصله ی یک نقطه از مبدای کمیات وضعیه از رابطه ی $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ استفاده می نماییم.

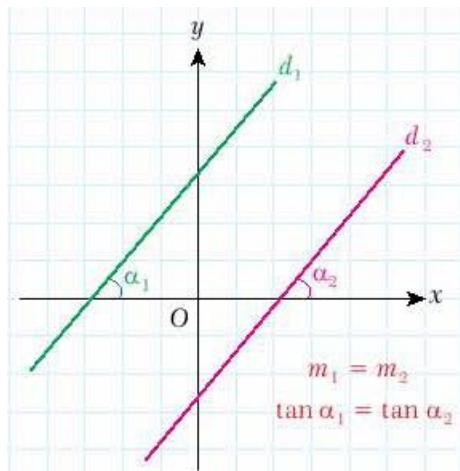
(3) برای دریافت فاصله ی یک خط از مبدای کمیات وضعیه از رابطه ی $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می نماییم.

شروط موازات، عمودیت و منطبق بودن دو خط مستقیم:

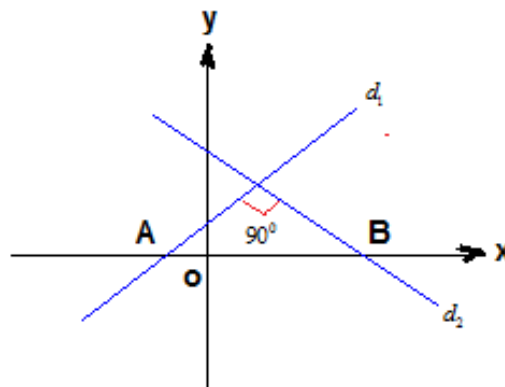
الف: هرگاه دو خط مستقیم توسط معادلات نارمل $\left. \begin{array}{l} y = m_1x + b_1 \dots\dots (i) \\ y = m_2x + b_2 \dots\dots (ii) \end{array} \right\}$ داده شده باشد، برای شروط های فوق داریم که:

(1) هرگاه $m_1 = m_2, b_1 \neq b_2$ باشد مستقیم های داده شده باهم موازی و زاویه بین شان صفر درجه می باشد.

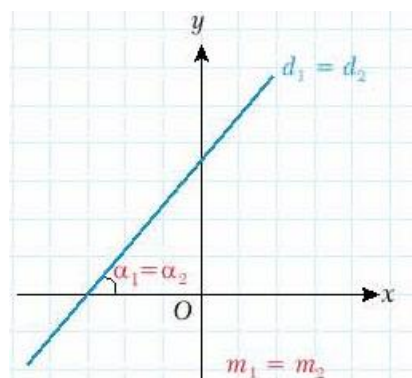
در شکل مقابل خطوط d_1, d_2 باهم موازی اند



(2) هرگاه $m_1 \cdot m_2 = -1$ باشد، مستقیم های داده شده باهم عمود اند. مانند شکل ذیل:



(3) هرگاه $m_1 = m_2$ و $b_1 = b_2$ باشد، در این صورت مستقیم های داده شده با هم منطبق اند. مانند شکل ذیل:



به صورت عموم اگر دو خط $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ را داشته باشیم می‌توانیم حالات این دو خط را چنین بررسی کنیم:

(1) اگر $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ باشد، این دو خط باهم متقاطع اند.

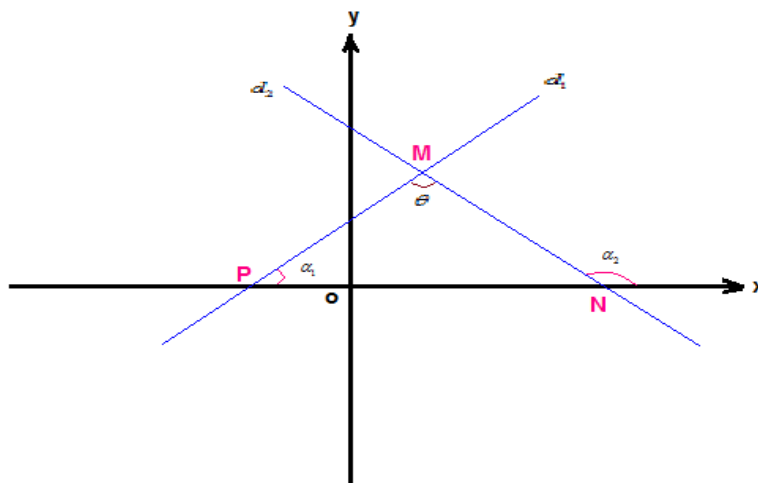
(2) اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ باشد، این دو خط باهم موازی اند.

(3) اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ باشد، این دو خط با هم منطبق اند.

(4) اگر $a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2 = 0$ باشد، این دو خط متقاطع و با هم عمود اند.

زاویه بین دو خط مستقیم:

خطوط d_1, d_2 در نقطه M باهم متقاطع اند، اگر α_1 زاویه ی میل خط d_1 و α_2 زاویه ی میل خط d_2 و θ زاویه بین خطوط d_1, d_2 باشد، مطابق شکل ذیل می توانیم بنویسیم:



$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta \Rightarrow \theta = \alpha_2 - \alpha_1 / \tan$$

$$\tan \theta = \tan (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \cdot \tan \alpha_1} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \tan \alpha_1 \\ m_2 = \tan \alpha_2 \end{cases}$$

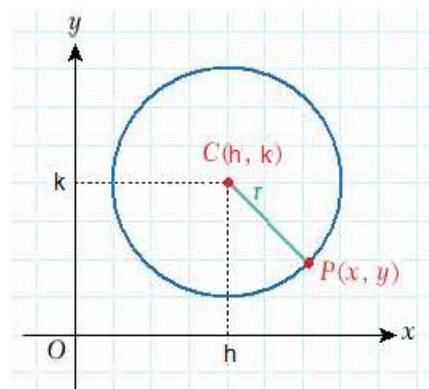
$$\Rightarrow \boxed{\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}}$$

فاصله بین دو خط موازی:

اگر دو خط موازی $ax + by + c_1 = 0$ و $ax + by + c_2 = 0$ را داشته باشیم، فاصله بین این دو خط را توسط رابطه $d = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ می‌توانیم به دست آوریم.

معادلات دایره

در صورتیکه $C(h, k)$ مرکز و r شعاع دایره باشد معادله دایره مساوی است به: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
معادله‌ی فوق معادله‌ی دایره‌ی می‌باشد که مرکز آن در مبدای کمیات وضعیه واقع نمی‌باشد.

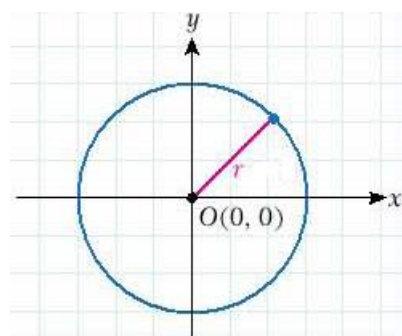


در صورتی که مرکز دایره در مبدای کمیات وضعیه قرار گیرد در این حالت $h = k = 0$ گردیده و معادله شکل ذیل را به خود

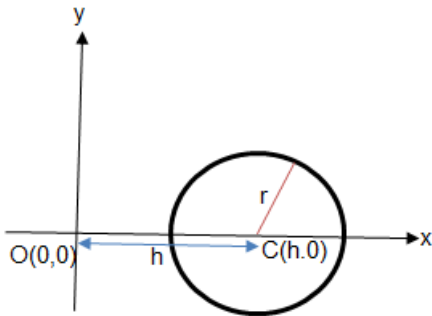
می‌گیرد:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

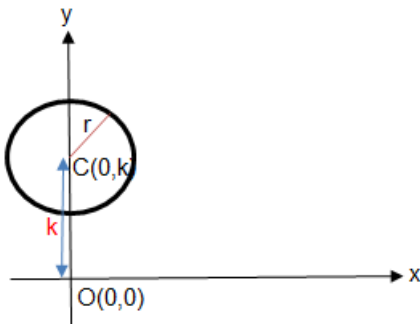


حالات خصوصی معادله ی دایره:

(1) معادله ی دایره ی که مرکز آن بالای محور x واقع باشد:

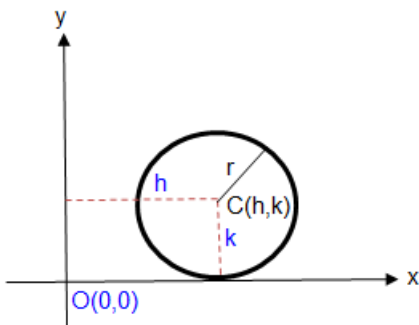
$$k = 0$$

$$(x - h)^2 + y^2 = r^2$$

(2) معادله ی دایره ی که مرکز آن بالای محور y واقع باشد:

$$h = 0$$

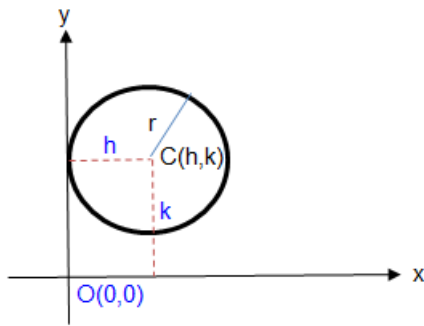
$$x^2 + (y - k)^2 = r^2$$

(3) معادله ی دایره ی که با محور x مماس باشد:

$$|k| = r$$

$$(x - h)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

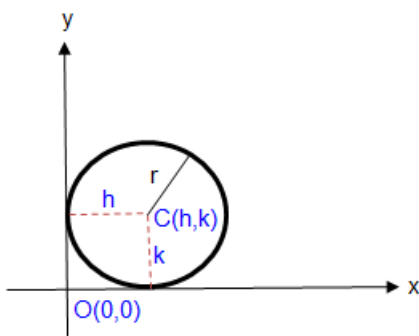
(4) معادله‌ی دایره‌ی که با محور y مماس باشد:



$$|h| = r$$

$$(x - r)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

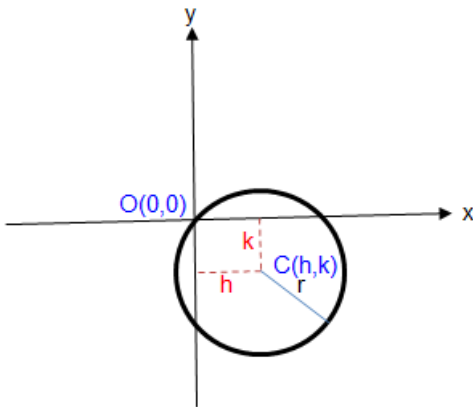
(5) هرگاه دایره با هردو محور مماس باشد:



$$|h| = |k| = r$$

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

(6) هرگاه محیط دایره از مبدای کمیات وضعیه عبور کند:

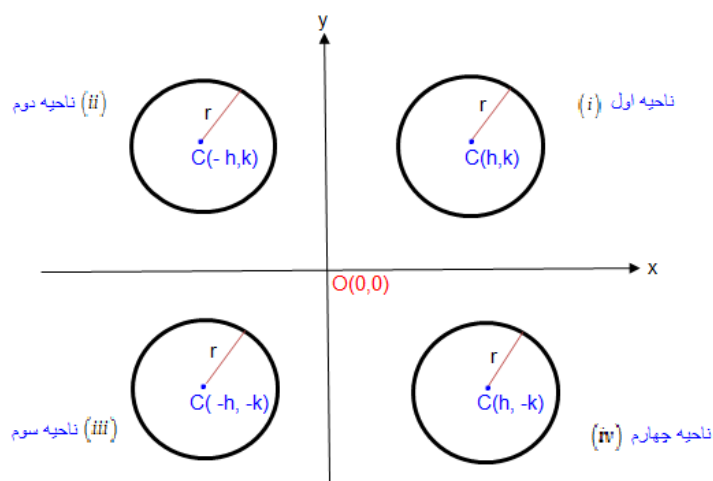


$$x = y = 0$$

$$(0 - h)^2 + (0 - k)^2 = r^2$$

$$h^2 + k^2 = r^2$$

موقعیت دایره در نواحی چهار گانه و معادلات آن ها:



(i) معادله دایره در ناحیه اول: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

(ii) معادله دایره در ناحیه دوم: $(x + h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

(iii) معادله دایره در ناحیه سوم: $(x + h)^2 + (y + k)^2 = r^2$

(iv) معادله دایره در ناحیه چهارم: $(x - h)^2 + (y + k)^2 = r^2$

معادله عمومی یک دایره:

هرگاه معادله یک دایره انکشاف داده شود، معادله عمومی آن قرار ذیل حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}(x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 &= 0\end{aligned}$$

اگر $a = -2h, b = -2k, h^2 + k^2 - r^2 = c$ فرض شود در این صورت می‌توانیم بنویسیم که:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

این معادله را به نام معادله انکشاف یافته یا معادله عمومی دایره می‌نامند.

$$\left. \begin{aligned} a = -2h &\Rightarrow h = -\frac{a}{2} \\ b = -2k &\Rightarrow k = -\frac{b}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C(h, k) = C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \text{ می‌کنیم:}$$

$$h^2 + k^2 - r^2 = c \Rightarrow r^2 = h^2 + k^2 - c / \sqrt{\quad}$$

شعاع دایره :

$$\boxed{r = \sqrt{h^2 + k^2 - c}}$$

همچنان شعاع دایره را می‌توانیم چنین دریافت کنیم:

$$r^2 = h^2 + k^2 - c = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} / \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}$$

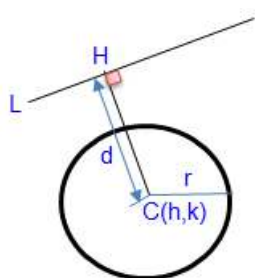
$$\boxed{r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}$$

اگر $h^2 + k^2 - c > 0$ باشد دایره حقیقی است.اگر $h^2 + k^2 - c = 0$ باشد دایره نقطوی استاگر $h^2 + k^2 - c < 0$ باشد دایره مجازی است (وجود ندارد)بعضی اوقات معادله‌ی عمومی دایره را به شکل $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ طوریکه $A = B$ و هم اشاره باشند نیز ارایهمی‌دارند که در این صورت مختصات مرکز $C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ و شعاع دایره $r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ می‌باشد.

موقعیت نسبی یک خط با یک دایره:

دایره‌ی با مرکز $C(h,k)$ با شعاع r و خط مستقیم L را در نظر می‌گیریم، اگر d فاصله بین مرکز دایره و خط L باشد در این صورت سه حالات ذیل را می‌توانیم بازگو کنیم:

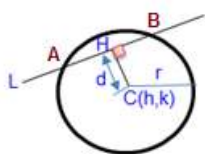
(1) خط با دایره غیر متقاطع است:



$$d > r$$

$$C \cap L = \emptyset$$

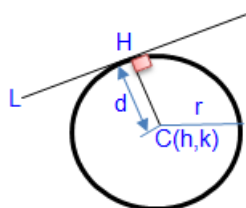
(2) خط با دایره متقاطع است:



$$d < r$$

$$C \cap L = \{A, B\}$$

(3) خط با دایره مماس است:



$$d = r$$

$$C \cap L = \{H\}$$

همچنان می‌توانیم حالت یک خط با یک دایره را توسط دلتا (Δ) یا قاسمه نیز تشخیص دهیم، برای واضح ساختن این مطلب نکات ذیل را در نظر می‌گیریم:

برای این که موقعیت نسبی خط $Ax + By + C = 0$ را با دایره‌ی $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ بدانیم، معادله‌ی خط را برای x یا y حل می‌کنیم بعداً قیمت آن را در معادله‌ی دایره وضع می‌داریم که در نتیجه یک معادله‌ی درجه دوم یک مجهوله حاصل می‌گردد، با در نظر داشت قیمت Δ سه حالت ذیل وجود دارد:

حالت اول: اگر $\Delta > 0$ باشد خط دایره را در دو نقطه قطع می‌نماید.

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ باشد خط با دایره مماس است.

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ باشد خط با دایره غیر متقاطع است یا خط با دایره متخارج می‌باشد.

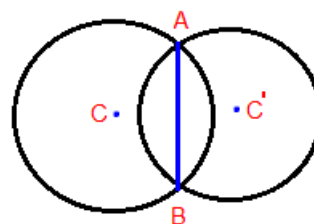
حالات دو دایره:

اگر دو دایره $\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ را در نظر بگیریم، در صورتی که دو نقطه‌ی مشترک داشته باشند با هم متقاطع، در

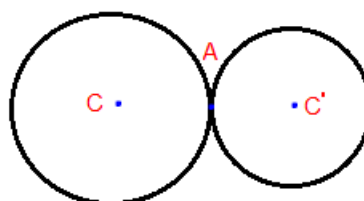
صورتی که یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند با هم مماس و اگر هیچ نقطه‌ی مشترک نداشته باشند غیر متقاطع یا متخارج اند.

برای تشخیص نمودن حالات فوق معادلات دایره را از همدیگر تفریق می‌نماییم که از حاصل تفریق شان معادله‌ی یک خط حاصل می‌گردد، بعداً معادله خط را برای x یا y حل نموده و در یکی از معادلات دایره وضع می‌داریم که در نتیجه آن یک معادله‌ی درجه دوم یک مجهوله حاصل می‌گردد که نظر به قیمت دلتا Δ سه حالت ذیل امکان پذیر می‌باشد:

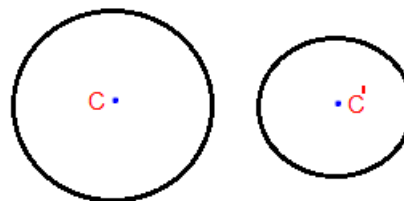
حالت اول: اگر $\Delta > 0$ باشد دو دایره باهم متقاطع اند.



حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ باشد دو دایره باهم مماس اند.

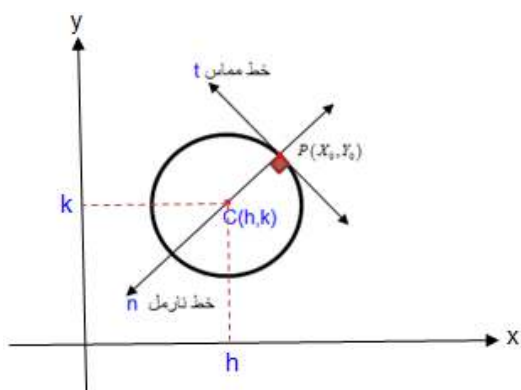


حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ باشد دواير با هم غير متقاطع يا متخارج اند.



معادله‌ی خط مماس و نارمل دایره در یک نقطه‌ی دایره:

اولا ميل های هر دو خطوط را قرار شکل ذیل دریافت می‌داریم:



$$\text{ميل خط نارمل: } mn = \frac{y_0 - k}{x_0 - h}$$

ميل خط مماس:

چون خط مماس عمود بالای خط نارمل می‌باشد،

از این رو می‌توانیم

$$mn \cdot mt = -1 \Rightarrow \frac{y_0 - k}{x_0 - h} \cdot mt = -1$$

$$\Rightarrow mt = -\frac{x_0 - h}{y_0 - k}$$

بنویسیم که :

حالا با در نظر داشت روابط فوق می‌توانیم معادلات خطوط مماس و نارمل را در نقطه‌ی $P(x_0, y_0)$ قرار ذیل دریافت کنیم:

معادله‌ی خط نارمل:

برای دریافت این معادله از معادله‌ی خط مستقیمی که یک نقطه و ميل آن معلوم باشد استفاده می‌نماییم:

$$y - y_0 = mn(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - y_0 = \frac{y_0 - k}{x_0 - h}(x - x_0) \Rightarrow (y - y_0)(x_0 - h) = (y_0 - k)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow (y - y_0)(x_0 - h) - (y_0 - k)(x - x_0) = 0$$

معادله خط مماس:

در این جا هم از معادله خط مستقیمی که میل و یک نقطه‌ی آن معلوم باشد استفاده می‌کنیم:

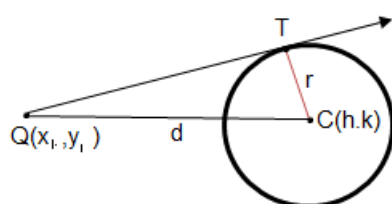
$$y - y_0 = mt(x - x_0)$$

$$mt = -\frac{x_0 - h}{y_0 - k}$$

$$y - y_0 = -\frac{x_0 - h}{y_0 - k}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow (y - y_0)(y_0 - k) + (x - x_0)(x_0 - h) = 0$$

دریافت طول مماس:



در شکل مقابل طول مماس عبارت از خط $\overline{QT}$ می‌باشد که چنین آن را دریافت می‌داریم:

در مثلث قائم الزاویه $\triangle QTC$ قضیه فیثاغورث را تطبیق نموده داریم که :

$$\overline{QC}^2 = \overline{CT}^2 + \overline{QT}^2$$

$$d^2 = r^2 + \overline{QT}^2$$

$$\overline{QT}^2 = d^2 - r^2$$

$$P = d^2 - r^2$$

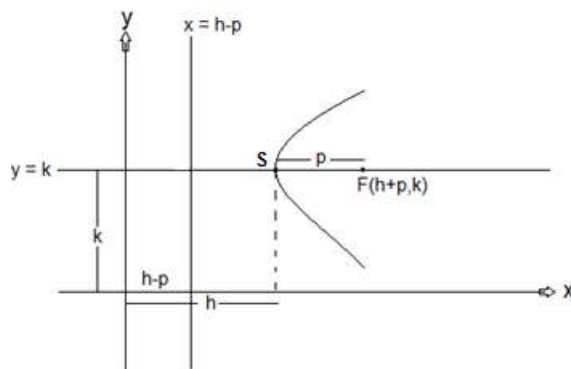
$$\overline{QT}^2 = P / \sqrt{}$$

$$\boxed{\overline{QT} = \sqrt{P} = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}}$$

معادلات پارابولا

حالت اول) پارابولای افقی :

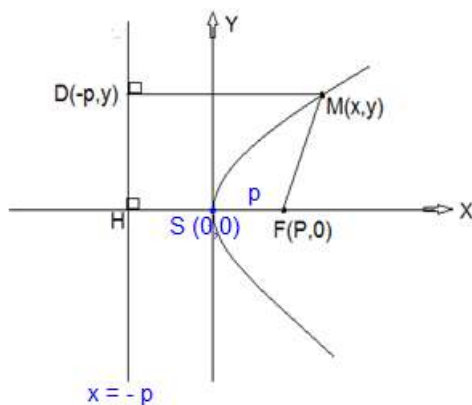
هرگاه راس پارابول نقطه $S(h, k)$ و محور محراقی آن موازی به محور x باشد در این صورت مشخصات آن قرار ذیل است:



$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
 معادله:

راس: $S(h, k)$ محراقی: $F(h+p, k)$ محور تناظر: $y = k$ خط مؤجه یا هادی: $x = h-p$

هرگاه محور محراقی پارابولا بالای محور x باشد و راس آن در مبدای کمیات وضعیه $S(0,0)$ واقع گردد در این صورت مشخصات آن مساوی است به :

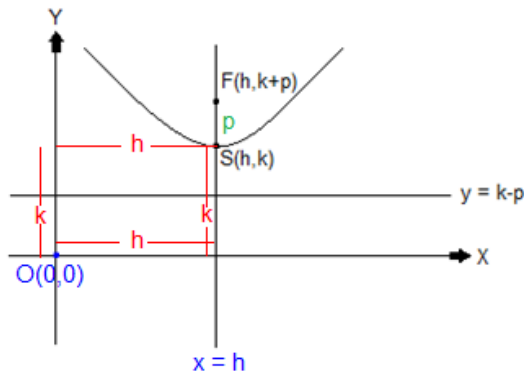


$$y^2 = 4px$$
 معادله:

راس: $S(0,0)$ محراق: $F(p,0)$ محور تناظر: $y = 0$ خط مؤجه یا هادی: $x = -p$

حالت دوم (پارابولای عمودی):

هر گاه رأس پارابولا در نقطه $S(h, k)$ و محور محراقی موازی به محور y باشد مشخصات آن قرار ذیل است:



$$\text{معادله: } (x-h)^2 = 4p(y-k)$$

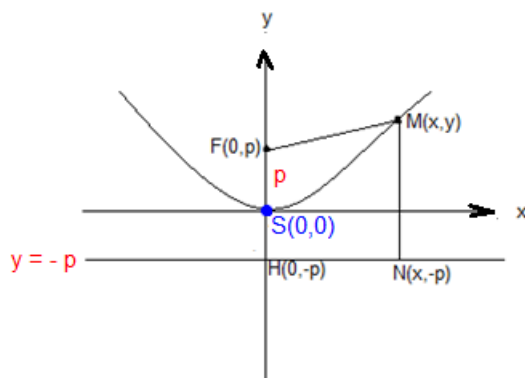
رأس: $S(h, k)$

محراق: $F(h, k+p)$

محور تناظر: $x = h$

خط موجه یا هادی: $y = k - p$

هرگاه محور محراقی محور y و رأس پارابولا در مبدای کمیات وضعیه $S(0, 0)$ واقع باشد در این صورت مشخصات آن قرار ذیل است:



$$\text{معادله: } x^2 = 4py$$

رأس: $S(0, 0)$

محراق: $F(0, p)$

محور تناظر: $x = 0$

خط موجه یا هادی: $y = -p$

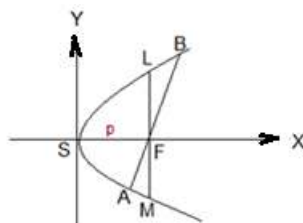
عن المركزیت پارابولا:

عبارت از نسبت مسافه هر نقطه گراف از محراق و خط موجه آن می باشد که در پارابولا این نسبت ثابت بوده و همیشه مساوی به عدد

$$\text{یک است یعنی: } e = \frac{c}{a} = 1$$

وتر عمودی (لتس ریگتم) پارابولا:

طول وتر عمودی (لتس ریگتم)، چهارچند فاصله بین رأس و محراق می باشد یعنی: $\overline{LM} = 4\overline{SF} = 4P$



معادلات بیضوی (الپس)

عن المركزیت بیضوی:

محل هندسی نقاطی که نسبت مسافت شان از یک نقطه معینه (محراق) به منحنی تا یک مستقیم معینه (موجه) کمیت $\left(e = \frac{c}{a}\right)$ باشد عن المركزیت گفته می شود که مقدار عن المركزیت در بیضوی $e < 1$ است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

وچنین دریافت می گردد:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

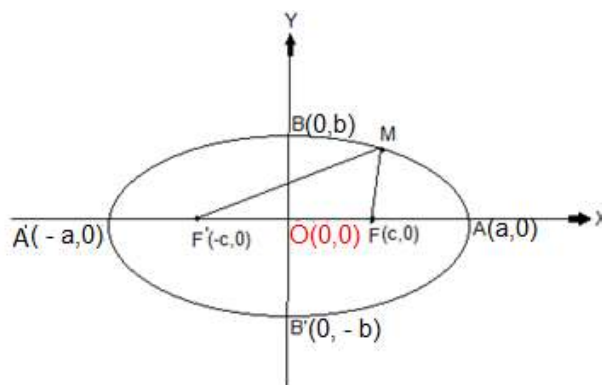
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

لتس ریگتم:

خط مستقیمی که از محراق گذشته و بالای محور محراقی عمود باشد عبارت از لتس ریگتم است و مساوی به $\left(\frac{2b^2}{a}\right)$ می باشد.

حالت اول:

هر گاه محور محراقی بیضوی محور x و مرکز بیضوی بالای مبدای کمیات وضعیه قرار داشته باشد، مشخصات آن قرار ذیل است:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{معادله:}$$

طول قطر بزرگ : $AA' = 2a$

طول قطر کوچک : $BB' = 2b$

محراق طول فاصله ها : $FF' = 2c$

مرکز : $O(0,0)$

مختصات محراق ها : $F(c,0)$, $F'(-c,0)$

مختصات رأس های حقیقی : $A(a,0)$, $A'(-a,0)$

مختصات رأس های غیر حقیقی : $B(0,b)$, $B'(0,-b)$

$$x = \pm \frac{a}{e} \quad \text{معادلات خطوط مؤجه:}$$

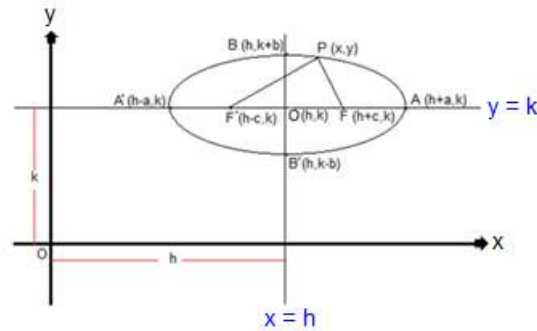
معادله ی محور تناظر یا محور محراقی : $y = 0$

معادله ی محور غیر محراقی : $x = 0$

$$e = \frac{c}{a} < 1 \quad \text{عن المركزیت:}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{قطر رابطه بین نصف طول محراق ها:}$$

هرگاه مرکز بیضوی $O(h, k)$ و محور محراقی موازی به محور x باشد در این صورت مشخصات آن قرار ذیل است:



معادله : $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

طول قطر بزرگ : $AA' = 2a$

طول قطر کوچک : $BB' = 2b$

طول فاصله‌ی محراق‌ها : $FF' = 2c$

مرکز : $O(h, k)$

مختصات محراق‌ها : $F(h+c, k)$, $F'(h-c, k)$

مختصات رأس‌های حقیقی : $A(h+a, k)$, $A'(h-a, k)$

مختصات رأس‌های غیر حقیقی : $B(h, k+b)$, $B'(h, k-b)$

معادلات خطوط مؤجه : $x = h \pm \frac{a}{e}$

معادله‌ی محور تناظر یا محور محراقی : $y = k$

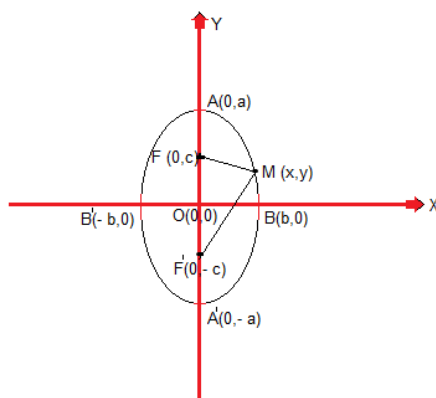
معادله‌ی محور غیر محراقی : $x = h$

عن المركزیت : $e = \frac{c}{a} < 1$

رابطه بین نصف طول محراقها و قطرها : $c^2 = a^2 - b^2$

حالت دوم:

هرگاه محور محراقی بیضوی محور y و مرکز بیضوی بالای مبدا ی کیمیات وضعیه قائم قرار داشته باشد مشخصات آن قرار ذیل است:



معادله : $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

طول قطر بزرگ : $AA' = 2a$

طول قطر کوچک : $BB' = 2b$

طول فاصلهی محراقها : $FF' = 2c$

مرکز : $O(0,0)$

مختصات محراقها : $F(0,c)$, $F'(0,-c)$

مختصات رأس های حقیقی : $A(0,a)$, $A'(0,-a)$

مختصات رأس های غیر حقیقی : $B(b,0)$, $B'(-b,0)$

معادلات خطوط مؤجه : $y = \pm \frac{a}{e}$

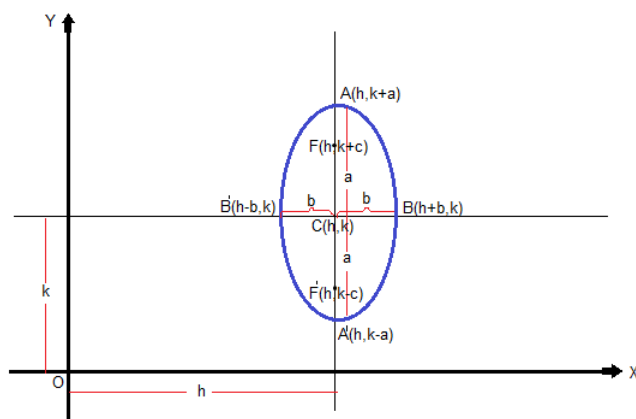
معادلهی محور تناظر یا محور محراقی : $y = 0$

معادلهی محور غیر محراقی : $x = 0$

عن المركزیت : $e = \frac{c}{a} < 1$

رابطه بین نصف طول محراق ها و قطر ها : $c^2 = a^2 - b^2$

هرگاه مرکز بیضوی در نقطه $C(h, k)$ و محور محراقی موازی به محور y باشد در این صورت مشخصات آن عبارت است از:



معادله : $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

طول قطر بزرگ : $AA' = 2a$

طول قطر کوچک : $BB' = 2b$

طول فاصله ی محراق ها : $FF' = 2c$

مرکز : $C(h, k)$

مختصات محراق ها : $F(h, k+c)$, $F'(h, k-c)$

مختصات رأس های حقیقی : $A(h, k+a)$, $A'(h, k-a)$

مختصات رأس های غیر حقیقی : $B(h+b, k)$, $B'(h-b, k)$

معادلات خطوط مؤجه : $y = k \pm \frac{a}{e}$

معادله ی محور تناظر یا محور محراقی : $x = h$

معادله‌ی محور غیر محراقی : $y = k$

عن المركزیت : $e = \frac{c}{a} < 1$

رابطه بین نصف طول محراق‌ها و قطر‌ها : $c^2 = a^2 - b^2$

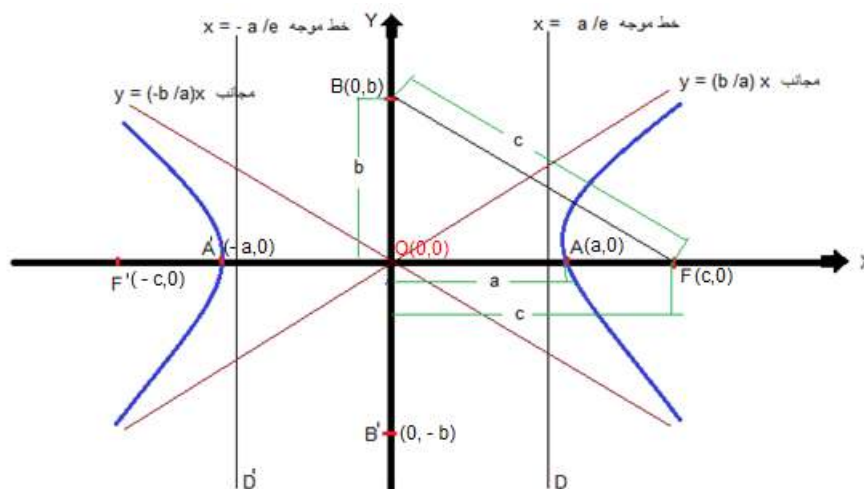
معادله انکشاف یافته بیضوی : $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

طوری‌که ملاحظه میشود $A \neq B$ و هم اشاره است.

معادلات هایپربول

حالت اول:

هرگاه محور محراقی هایپربول محور x و مرکز هایپربول بالای مبدای کمیات وضعیه قرار داشته باشد مشخصات آن قرار ذیل است:



معادله : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

طول رأس‌های حقیقی : $AA' = 2a$

طول رأس‌های غیر حقیقی : $BB' = 2b$

طول فاصله‌ی محراق‌ها : $FF' = 2c$

مرکز : $O(0,0)$

مختصات محراق ها : $F(c,0)$, $F'(-c,0)$

مختصات رأس های حقیقی : $A(a,0)$, $A'(-a,0)$

مختصات رأس های غیر حقیقی : $B(0,b)$, $B'(0,-b)$

معادلات خطوط مؤجه : $x = \pm \frac{a}{e}$

معادله‌ی محور تناظر یا محور محراقی : $y = 0$

معادله‌ی محور غیر محراقی : $x = 0$

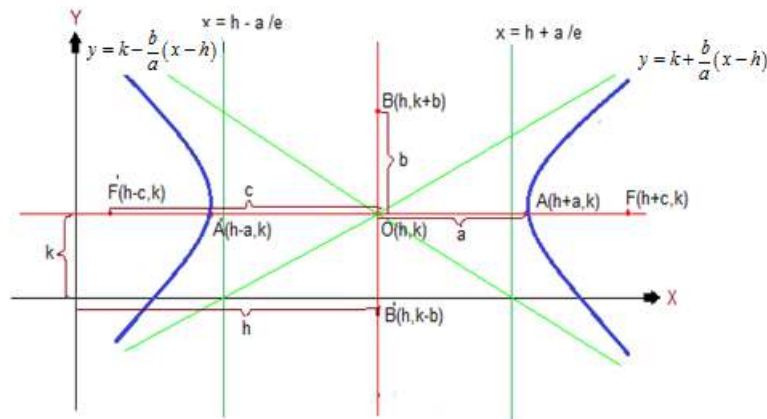
معادله‌ی مجانب ها : $y = \pm \frac{b}{a}x$

عن المركزیت : $e = \frac{c}{a} > 1$

رابطه : $c^2 = a^2 + b^2$

طول وتر عمودی یا لئس ریگتم : $L = \frac{2b^2}{ae}$

هر گاه مرکز هایپر بولا نقطه‌ی $O(h, k)$ و محور محراقی موازی به محور x باشد در این صورت مشخصات آن قرار ذیل است:



$$\text{معادله: } \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

طول رأس‌های حقیقی: $AA' = 2a$

طول رأس‌های غیر حقیقی: $BB' = 2b$

طول فاصله‌ی محراق‌ها: $FF' = 2c$

مرکز: $O(h, k)$

مختصات محراق‌ها: $F(h+c, k)$, $F'(h-c, k)$

مختصات رأس‌های حقیقی: $A(h+a, k)$, $A'(h-a, k)$

مختصات رأس‌های غیر حقیقی: $B(h, k+b)$, $B'(h, k-b)$

$$\text{معادلات خطوط مؤجه: } x = h \pm \frac{a}{e}$$

معادله‌ی محور تناظر یا محور محراقی: $y = k$

معادله‌ی محور غیر محراقی: $x = h$

$$\text{معادله‌ی مجانب‌ها : } y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h) \vee y = k \pm \frac{b}{a}(x - h)$$

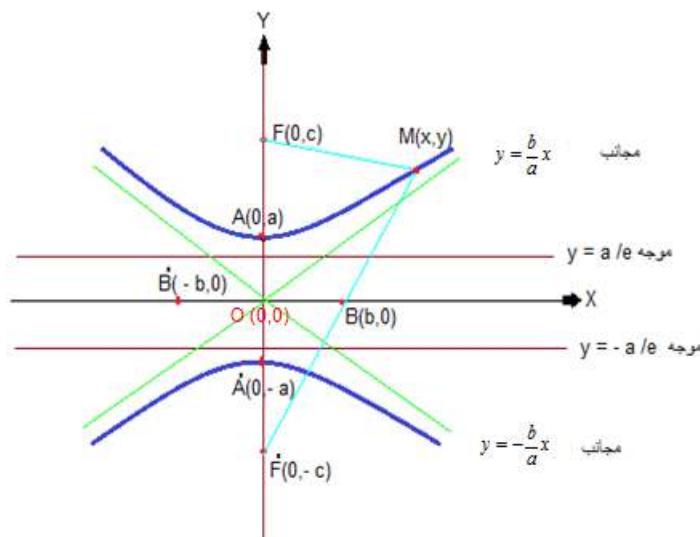
$$\text{عن‌المركزيت : } e = \frac{c}{a} > 1$$

$$\text{رابطه : } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{طول وتر عمودی یا لتس ریگتم : } L = \frac{2b^2}{ae}$$

حالت دوم:

هرگاه محور محراقی هایپربول محور y و مرکز آن بالای مبدای کمیات وضعیه قرار داشته باشد، مشخصات آن قرار ذیل است:



$$\text{معادله : } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\text{طول رأس‌های حقیقی : } AA' = 2a$$

$$\text{طول رأس‌های غیر حقیقی : } BB' = 2b$$

$$\text{طول فاصله‌ی محراق‌ها : } FF' = 2c$$

$$\text{مرکز : } O(0,0)$$

$$\text{مختصات محراق‌ها : } F(0,c) , F'(0,-c)$$

مختصات رأس های حقیقی : $A(0, a)$, $A'(0, -a)$

مختصات رأس های غیر حقیقی : $B(b, 0)$, $B'(-b, 0)$

معادلات خطوط مؤجه : $y = \pm \frac{a}{e}$

معادله ی محور تناظر یا محور محراقی : $x = 0$

معادله ی محور غیر محراقی : $y = 0$

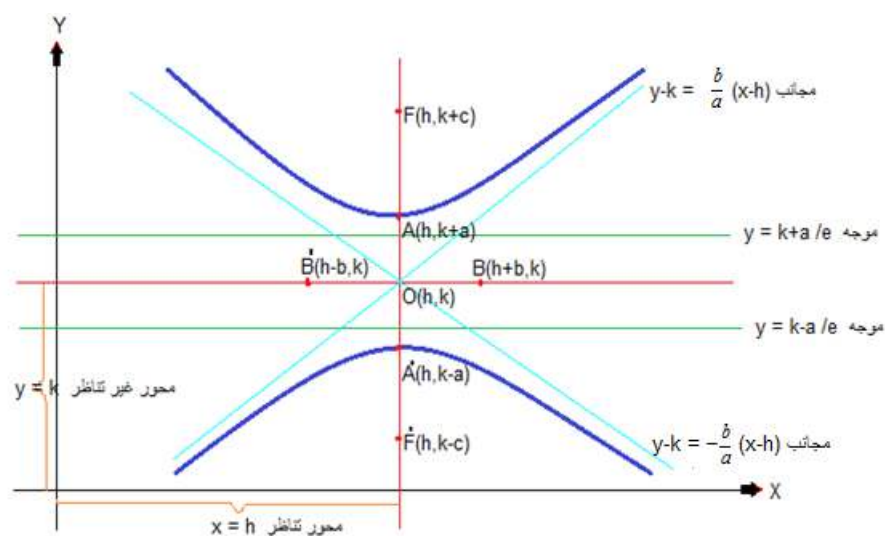
معادله ی مجانب ها : $y = \pm \frac{b}{a} x$

عن المركزیت : $e = \frac{c}{a} > 1$

رابطه : $c^2 = a^2 + b^2$

طول وتر عمودی یا لئس ریگتم : $L = \frac{2b^2}{ae}$

هرگاه مرکز هایپر بولا در نقطه $O(h, k)$ باشد و محور محراقی موازی به محور y باشد در این صورت مشخصات آن قرار ذیل است:



$$\text{معادله: } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{طول رأس های حقیقی: } AA' = 2a$$

$$\text{طول رأس های غیر حقیقی: } BB' = 2b$$

$$\text{طول فاصله ی محراق ها: } FF' = 2c$$

$$\text{مرکز: } O(h, k)$$

$$\text{مختصات محراق ها: } F(h, k+c), F'(h, k-c)$$

$$\text{مختصات رأس های حقیقی: } A(h, k+a), A'(h, k-a)$$

$$\text{مختصات رأس های غیر حقیقی: } B(h+b, k), B'(h-b, k)$$

$$\text{معادلات خطوط مؤجه: } y = k \pm \frac{a}{e}$$

$$\text{معادله ی محور تناظر یا محور محراقی: } x = h$$

$$\text{معادله ی محور غیر محراقی: } y = k$$

$$\text{معادله ی مجانب ها: } y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h) \vee y = k \pm \frac{b}{a}(x - h)$$

$$\text{عن المركزیت: } e = \frac{c}{a} > 1$$

$$\text{رابطه: } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{طول وتر عمودی یا لئس ریکتم: } L = \frac{2b^2}{ae}$$

$$\text{معادله ی انکشاف یافته یا عمومی هایپر بولا مساوی است به: } Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

در صورتیکه : $A = B$ و یا $A \neq B$ بوده و مختلف الاشاره باشند.

فورمول های مورد نیاز در علم مثلثات :

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} \quad \text{رابطه بین درجه، گراد و رادیان :}$$

$$\theta = \frac{|60hr - 11\min|}{2} \quad \text{و یا} \quad \theta = |5.5\min - 30hr| \quad \text{زاویه بین دو عقربه ی ساعت :}$$

در رابطه ی فوق : hr مقدار ساعت ، $\min$ مقدار دقیقه و θ زاویه بین دو عقربه را به درجه نشان می دهد. مانند شکل ذیل:



مثلاً در شکل فوق ساعت 2 : 19 را نشان می دهد که زاویه بین شان چنین دریافت می شود:

$$\theta = |5.5m - 30h| = |5.5 \cdot 19 - 30 \cdot 2| = |104.5 - 60| = |44.5| = (44.5)^0$$

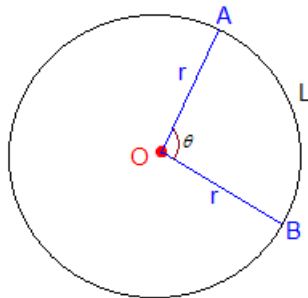
رابطه بین زاویه مرکزی، طول قوس مقابل آن و شعاع دایره :

در صورتیکه $AB = L$ طول قوس مقابل زاویه مرکزی، θ زاویه مرکزی و r شعاع دایره باشد روابط ذیل را می‌توانیم بنویسیم:

$$1. \theta = \frac{L}{r} \quad \text{وسعت زاویه مرکزی}$$

$$2. L = r \cdot \theta \quad \text{طول قوس مقابل زاویه مرکزی}$$

$$3. r = \frac{L}{\theta} \quad \text{طول شعاع دایره}$$



تعریف نسبت‌های مثلثاتی:

$$1. \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

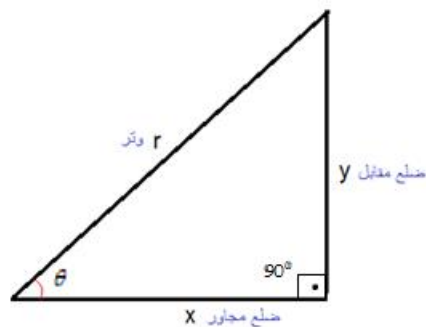
$$2. \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$3. \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$4. \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

$$5. \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$6. \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$$



رابطه بین نسبت های مثلثاتی :

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} \\ \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \theta \cdot \csc \theta = 1$$

$$2. \quad \left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \\ \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \theta \cdot \sec \theta = 1$$

$$3. \quad \left. \begin{array}{l} \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \\ \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \end{array} \right\} \Rightarrow \tan \theta \cdot \cot \theta = 1$$

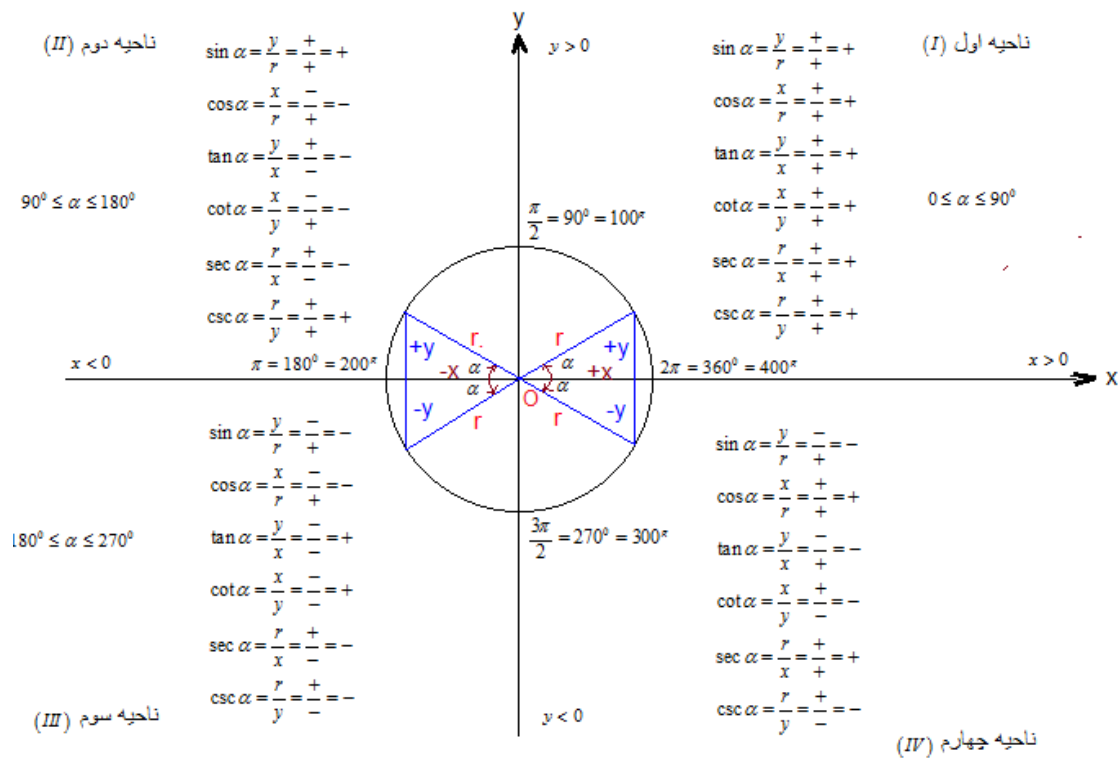
همچنان می توانیم روابط ذیل را نیز یاد آوری نماییم :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

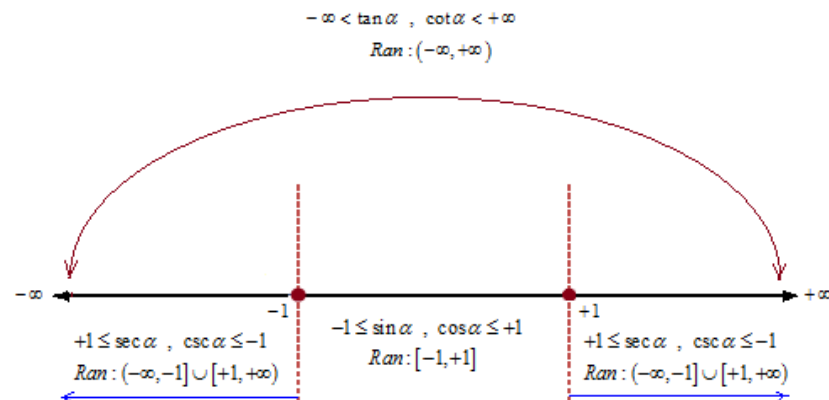
$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

اشاره (علامه) نسبت های مثلثاتی در چهار ناحیه :

با در نظر داشت اینکه شعاع دایره برای همیشه مثبت است $[r > 0 \vee r = (+)]$ ، زیرا فاصله ی یک نقطه را از مرکز نشان می دهد و فاصله هیچگاهی منفی بوده نمی تواند، بنابر آن اشاره (علامه) نسبت های مثلثاتی را قرار ذیل دریافت می نماییم:



ساحه‌ی تحول نسبت‌های مثلثاتی:



دریافت ساده و بسیط نسبت‌های مثلثاتی زوایای $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ به طریقه‌ی جذر:

$\sin \alpha \Rightarrow$	0°	30°	45°	60°	90°
	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$
	90°	60°	45°	30°	0°
$\Leftarrow \cos \alpha$					

$$\sin 30^\circ = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \text{مثلاً:}$$

مناسبت بین نسبت های مثلثاتی بعضی از زوایا

نسبت های مثلثاتی زوایای مقابل یا متضاد:

در مثلثات در مقابل هر زاویه مثبت یک زاویه منفی وجود دارد، مثلاً در مقابل زاویه $(+45^\circ)$ زاویه مقابل آن (-45°) واقع است. به صورت عموم در مقابل هر زاویه $(+\alpha)$ یک زاویه متضاد آن $(-\alpha)$ وجود دارد که قرار ذیل نسبت های مثلثاتی آن دریافت می گردد:

$$\sin(+\alpha) = \frac{+y}{r} \Rightarrow \sin(+\alpha) = \frac{y}{r}$$

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r} \Rightarrow \boxed{\sin(-\alpha) = -\sin \alpha}$$

$$\cos(+\alpha) = \frac{+x}{r} \Rightarrow \cos(+\alpha) = \frac{x}{r}$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{+x}{r} \Rightarrow \boxed{\cos(-\alpha) = \cos \alpha}$$

$$\tan(+\alpha) = \frac{+y}{+x} \Rightarrow \tan(+\alpha) = \frac{y}{x}$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{-y}{+x} \Rightarrow \boxed{\tan(-\alpha) = -\tan \alpha}$$

$$\cot(+\alpha) = \frac{+x}{+y} \Rightarrow \cot(+\alpha) = \frac{x}{y}$$

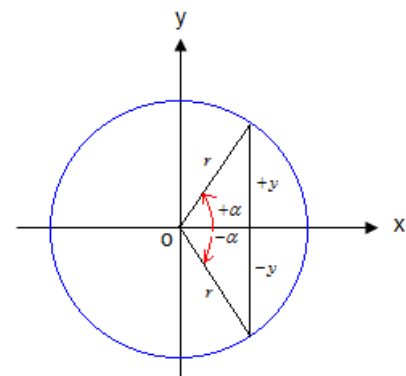
$$\cot(-\alpha) = \frac{+x}{-y} \Rightarrow \boxed{\cot(-\alpha) = -\cot \alpha}$$

$$\sec(+\alpha) = \frac{r}{+x} \Rightarrow \sec(+\alpha) = \frac{r}{x}$$

$$\sec(-\alpha) = \frac{r}{+x} \Rightarrow \boxed{\sec(-\alpha) = \sec \alpha}$$

$$\csc(+\alpha) = \frac{r}{+y} \Rightarrow \csc(+\alpha) = \frac{r}{y}$$

$$\csc(-\alpha) = \frac{r}{-y} \Rightarrow \csc(-\alpha) = -\csc \alpha$$



دریافت نسبت های مثلثاتی $(90^\circ - \alpha)$ یا $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$:

با در نظر داشت خطوط مثلثاتی و شکل ذیل می توانیم این نسبت ها را دریافت کنیم. قرار ذیل:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

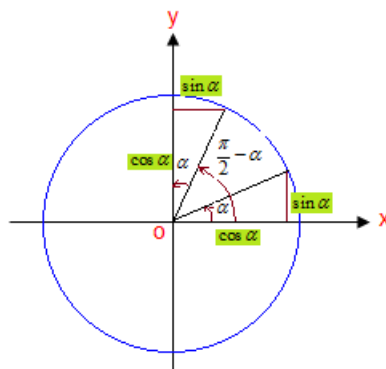
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \csc \alpha$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec \alpha$$



در رسم فوق به وضاحت دیده می شود که محور y نظر به زاویه α حیثیت ضلع مجاور یعنی $\cos \alpha$ را و محور x نظر به زاویه α حیثیت ضلع مقابل یعنی $\sin \alpha$ را داشته که با هم تبدیل می گردند.

چون این زاویه در ناحیه اول واقع است بنا بر آن تمام نسبت ها مثبت اند.

دریافت نسبت های مثلثاتی $(90^\circ + \alpha)$ یا $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos \alpha$$

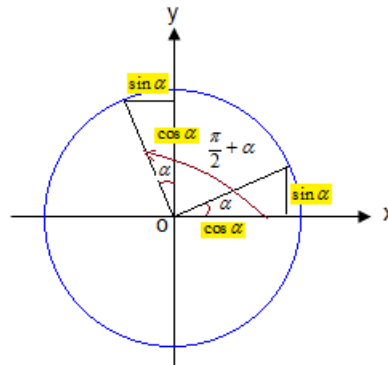
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\csc \alpha$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\sec \alpha$$



با در نظر داشت خطوط مثلثاتی و شکل ذیل می توانیم این نسبت ها را دریافت کنیم. قرار ذیل:

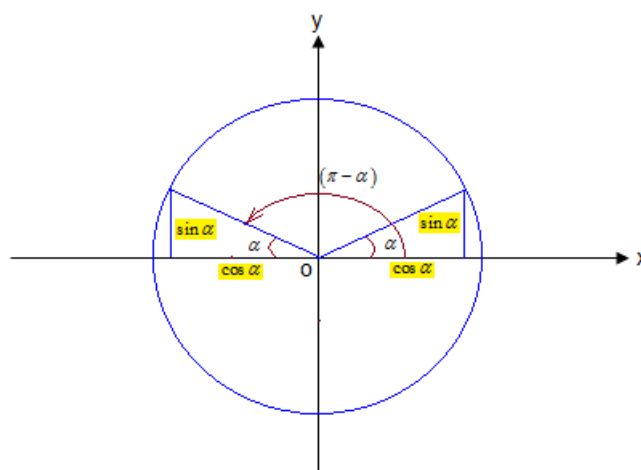
در رسم فوق به وضاحت دیده می شود که محور y نظر به زاویه α حیثیت ضلع مجاور یعنی $\cos \alpha$ را و محور x نظر به زاویه α حیثیت ضلع مقابل یعنی $\sin \alpha$ را داشته که با هم تبدیل می گردند.

چون این زاویه در ناحیه دوم واقع است بنابر آن ساین و معکوس آن کوسیگنت دارای علامه ی مثبت بوده اما دیگر نسبت ها همه منفی می باشند.

نسبت های مثلثاتی $(180^\circ - \alpha)$ یا $(\pi - \alpha)$:

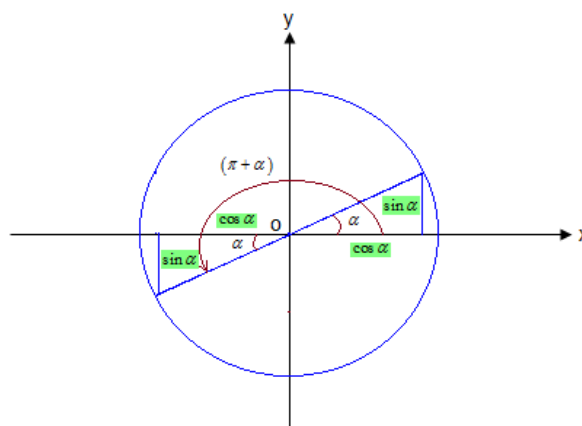
در شکل ذیل واضح معلوم می شود که طول $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ که به ترتیب ضلع مقابل و ضلع مجاور زاویه α می باشند در زاویه $(\pi - \alpha)$ نیز عین موقعیت و عین مقدار را دارند پس نسبت های مثلثاتی این زاویه با خود شان مساوی می باشند با فرق این که این زاویه در ناحیه دوم واقع است لذا نسبت های $\sin \alpha$ و معکوس آن $\csc \alpha$ دارای علامه مثبت و متباقی نسبت ها همه منفی می باشند.
قرار ذیل:

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= +\sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha \\ \sec(\pi - \alpha) &= -\sec \alpha \\ \csc(\pi - \alpha) &= +\csc \alpha\end{aligned}$$

نسبت های مثلثاتی $(180^\circ + \alpha)$ یا $(\pi + \alpha)$:

در شکل ذیل واضح معلوم می شود که طول $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ که به ترتیب ضلع مقابل و ضلع مجاور زاویه α می باشند در زاویه $(\pi + \alpha)$ نیز عین موقعیت و عین مقدار را دارند پس نسبت های مثلثاتی این زاویه با خود شان مساوی می باشند با فرق این که این زاویه در ناحیه سوم واقع است لذا نسبت های $\tan \alpha$ و معکوس آن $\cot \alpha$ دارای علامه مثبت و متباقی نسبت ها همه منفی می باشند.
قرار ذیل:

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= +\tan \alpha \\ \cot(\pi + \alpha) &= +\cot \alpha \\ \sec(\pi + \alpha) &= -\sec \alpha \\ \csc(\pi + \alpha) &= -\csc \alpha\end{aligned}$$



نسبت های مثلثاتی $(270^\circ - \alpha)$ یا $\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$:

با در نظر داشت خطوط مثلثاتی و شکل ذیل می توانیم این نسبت ها را دریافت کنیم. قرار ذیل:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

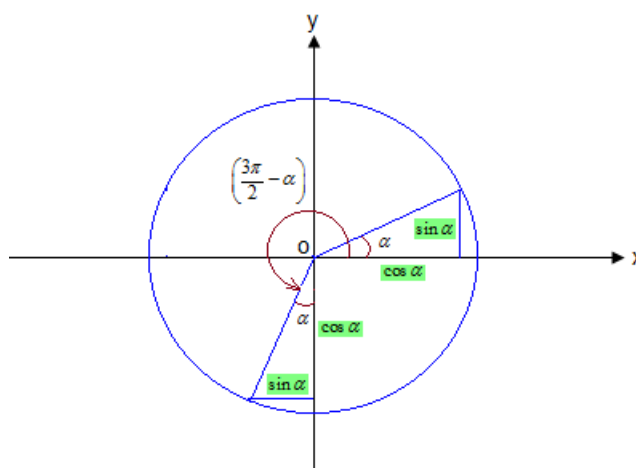
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = +\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = +\tan \alpha$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\csc \alpha$$

$$\csc\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sec \alpha$$



در رسم فوق به وضاحت دیده می شود که محور y نظر به زاویه α حیثیت ضلع مجاور یعنی $\cos \alpha$ را و محور x نظر به زاویه α حیثیت ضلع مقابل یعنی $\sin \alpha$ را داشته که با هم تبدیل می گردند.

چون این زاویه در ناحیه سوم واقع است بنابر آن $\tan \alpha$ و معکوس آن $\cot \alpha$ مثبت ، دیگران همه منفی می باشند.

نسبت های مثلثاتی $(270^\circ + \alpha)$ یا $\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$:

با در نظر داشت خطوط مثلثاتی و شکل ذیل می توانیم این نسبت ها را دریافت کنیم. قرار ذیل:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

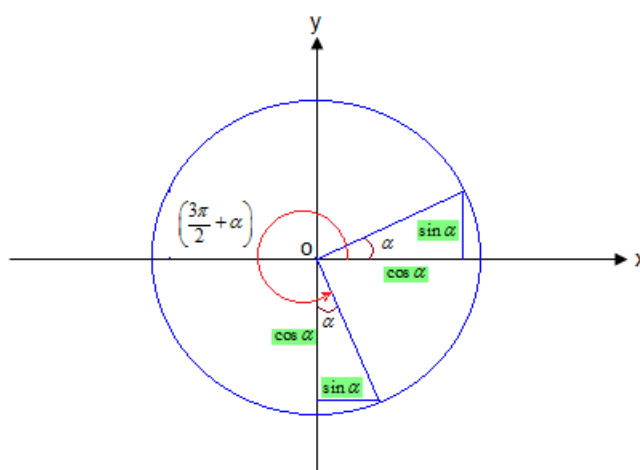
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = +\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = +\csc \alpha$$

$$\csc\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\sec \alpha$$



در رسم فوق به وضاحت دیده می شود که محور y نظر به زاویه α حیثیت ضلع مجاور یعنی $\cos \alpha$ را و محور x نظر به زاویه α حیثیت ضلع مقابل یعنی $\sin \alpha$ را داشته که با هم تبدیل می گردند.

چون این زاویه در ناحیه ی چهارم واقع است بنابر آن $\cos \alpha$ و معکوس آن $\sec \alpha$ مثبت ، دیگران همه منفی می باشند.

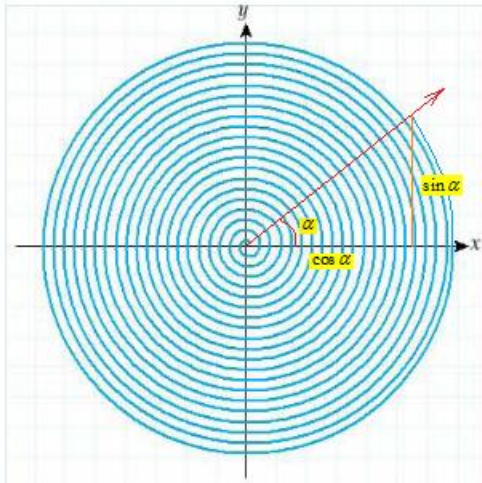
نسبت های مثلثاتی زوایای کوترمینل $(2n\pi + \alpha)$:

به زوایای گفته می شود که ضلع دوم شان بعد از n دور مکمل $(2\pi = 360^\circ)$ دوباره موقعیت اول خود را اتخاذ کنند.

مثلاً: $2\pi + \alpha, 4\pi + \alpha, 6\pi + \alpha, \dots, 2n\pi + \alpha$

طوری که $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

چون α یک زاویه‌ی حاده بوده و نظر به زوایای فوق ضلع مقابل $\sin \alpha$ و ضلع مجاور $\cos \alpha$ نظر به موقعیت محور x و y عین موقعیت خود را دارند و همه نسبت‌ها با خود شان مساوی می‌باشند با فرق اینکه این زوایا در ناحیه‌ی اول واقع بوده و علامات همه نسبت‌ها مثبت می‌باشند. قرار ذیل:



$$\sin(2n\pi + \alpha) = +\sin \alpha$$

$$\cos(2n\pi + \alpha) = +\cos \alpha$$

$$\tan(2n\pi + \alpha) = +\tan \alpha$$

$$\cot(2n\pi + \alpha) = +\cot \alpha$$

$$\sec(2n\pi + \alpha) = +\sec \alpha$$

$$\csc(2n\pi + \alpha) = +\csc \alpha$$

بصورت عموم مناسبت بین نسبت های مثلثاتی بعضی از زوایا را در دو حالت ذیل

خلاصه می نماییم:

$$1. \sin \left[\frac{(2n+1)\pi}{2} \pm \alpha \right] = \cos \alpha$$

حالت اول : اگر $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ باشد.

$$2. \cos \left[\frac{(2n+1)\pi}{2} \pm \alpha \right] = \sin \alpha$$

$$3. \tan \left[\frac{(2n+1)\pi}{2} \pm \alpha \right] = \cot \alpha$$

$$4. \cot \left[\frac{(2n+1)\pi}{2} \pm \alpha \right] = \tan \alpha$$

$$5. \sec \left[\frac{(2n+1)\pi}{2} \pm \alpha \right] = \csc \alpha$$

$$6. \csc \left[\frac{(2n+1)\pi}{2} \pm \alpha \right] = \sec \alpha$$

اشاره (علامه) هر نسبت مذکور مربوط به ناحیه ی آن می گردد.

حالت دوم : اگر $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ باشد.

$$1. \sin(n\pi \pm \alpha) = \sin \alpha$$

$$2. \cos(n\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$$

$$3. \tan(n\pi \pm \alpha) = \tan \alpha$$

$$4. \cot(n\pi \pm \alpha) = \cot \alpha$$

$$5. \sec(n\pi \pm \alpha) = \sec \alpha$$

$$6. \csc(n\pi \pm \alpha) = \csc \alpha$$

اشاره (علامه) هر نسبت مذکور مربوط به ناحیه ی آن می گردد.

روابط اساسی و فرعی (اشتقاقی) مثلثاتی :

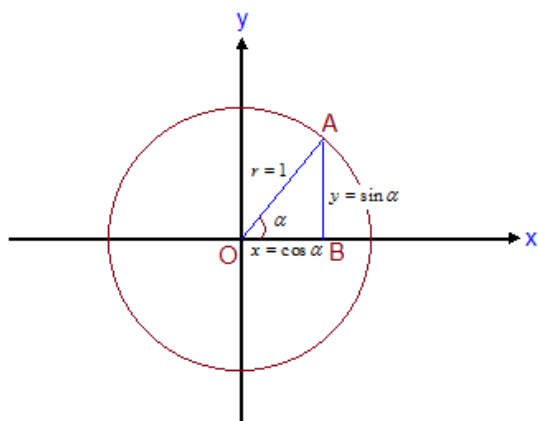
$$\left. \begin{aligned} y^2 + x^2 &= r^2 \\ y^2 + x^2 &= 1^2 \\ y^2 + x^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \dots\dots\dots I$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \dots\dots\dots II$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \dots\dots\dots III$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos \alpha} \dots\dots\dots IV$$

$$\csc \alpha = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin \alpha} \dots\dots\dots V$$



روابط فوق روابط اساسی می باشند که با در نظر داشت آن ها می توانیم روابط فرعی را چنین دریافت کنیم:

1. $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$
2. $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$
3. $\tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1$
4. $\cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha - 1$
5. $\sec^2 \alpha = \tan^2 \alpha + 1$
6. $\csc^2 \alpha = \cot^2 \alpha + 1$

نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دوزایه :

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$$5. \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$6. \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

نسبت های مثلثاتی $\cot(\alpha \pm \beta)$, $\sec(\alpha \pm \beta)$, $\csc(\alpha \pm \beta)$ معکوس سه نسبت اول می باشد.

نسبت های مثلثاتی دوچند یک زاویه :

$$1. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2. \begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$3. \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

نسبت های مثلثاتی سه چند یک زاویه :

1. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
2. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
3. $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

نسبت های مثلثاتی چهار چند یک زاویه :

1. $\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha$
2. $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$
3. $\tan 4\alpha = \frac{4 \tan \alpha - 4 \tan^3 \alpha}{1 - 6 \tan^2 \alpha + \tan^4 \alpha}$

فورمول های تحویل یا ضرب:

1. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
2. $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$
3. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
4. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$
5. $\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$
6. $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$

فورمول های حاصل ضرب به حاصل جمع :

1. $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
2. $\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$
3. $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
4. $\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$
5. $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

نسبت های مثلثاتی یک زاویه از جنس $\tan$ نصف زاویه :

$$1. \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$2. \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$3. \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

نسبت های مثلثاتی نصف زاویه از جنس $\sin$ همان زاویه :

$$1. \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}}{2}$$

$$2. \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}}{2}$$

$$3. \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}}{\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}}$$

نسبت های مثلثاتی نصف زاویه از جنس $\cos$ همان زاویه :

$$1. \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

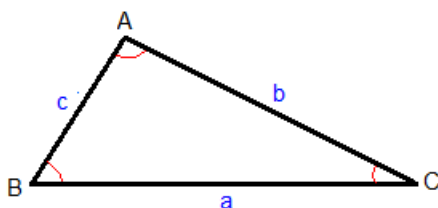
$$2. \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$3. \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

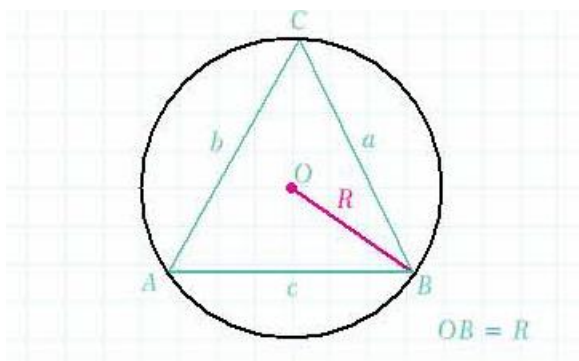
قانون سین یا قضیه ی سین:

در هر مثلث کیفی $\triangle ABC$ رابطه ی $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ صدق می نماید.

چون معکوس یک تناسب باز هم یک تناسب است بنابراین می توانیم تناسب فوق را به شکل معکوس نیز بنویسیم :



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R عبارت از شعاع دایره‌ی محیطی مثلث می‌باشد که از رابطه‌ی فوق قرار ذیل دریافت می‌گردد:

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \quad \text{مساحت مثلث } \triangle ABC$$

با استفاده از قضیه‌ی ساین می‌توان فورمول‌های مولوید (Mollowed) را چنین حاصل نمود :

$$1. \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C}$$

$$2. \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C}$$

$$3. \frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}A}$$

$$4. \frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}A}$$

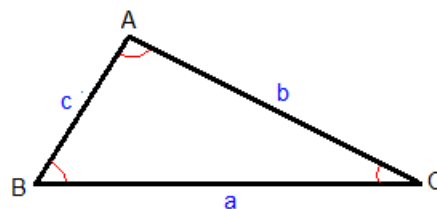
$$5. \frac{c+a}{b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(C-A)}{\sin \frac{1}{2}B}$$

$$6. \frac{c-a}{b} = \frac{\sin \frac{1}{2}(C-A)}{\cos \frac{1}{2}B}$$

قانون کوساین یا قضیه کوساین:

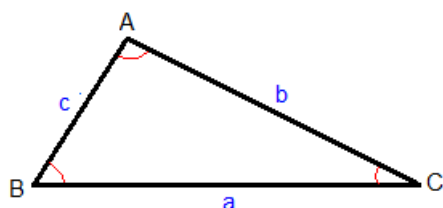
در هر مثلث کیفی ΔABC سه رابطه‌ی ذیل صدق می‌نماید:

$$\begin{aligned} 1. \quad a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ 2. \quad b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ 3. \quad c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$



قانون تانجانت یا قضیه تانجانت:

در هر مثلث کیفی بین اضلاع و زوایای یک مثلث روابط ذیل صدق می‌نماید:

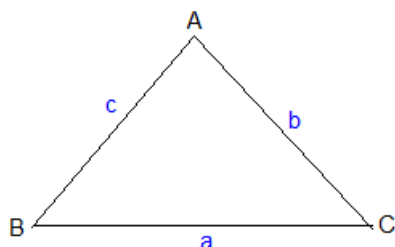


$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}} \dots\dots (i) \\ \frac{a+c}{a-c} &= \frac{\tan \frac{A+C}{2}}{\tan \frac{A-C}{2}} \dots\dots (ii) \\ \frac{b+c}{b-c} &= \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}} \dots\dots (iii) \end{aligned}$$

دریافت نسبت های مثلثاتی نصف زاویه از جنس طول اضلاع آن مثلث

دریافت ساین نصف زاویه:

در مثلث ΔABC اگر طول اضلاع آن را به ترتیب a, b, c بنامیم، ساین نصف هر یک از زوایا از روابط ذیل حاصل می‌گردد.



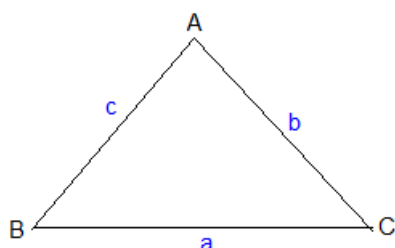
$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

دریافت کوساین نصف زاویه:

در هر مثلث کیفی کوساین نصف هر یک از زوایا از روابط ذیل قابل دریافت است:



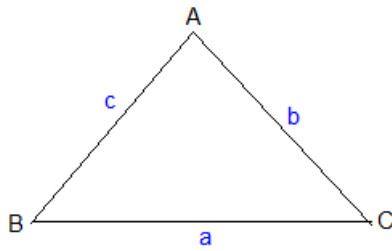
$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

دریافت تانجانت نصف زاویه:

در یک مثلث کیفی ΔABC تانجانت نصف زاویه از روابط ذیل به دست می آید:



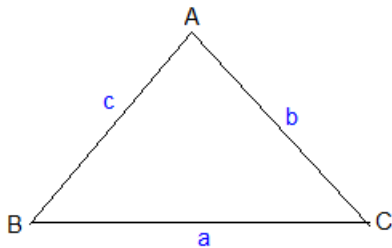
$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

دریافت ساین زاویه از جنس طول اضلاع مثلث:

در یک مثلث کیفی $\triangle ABC$ ساین هریکی از زوایای آن از روابط ذیل دریافت می‌شود:



$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\sin B = \frac{2}{ac} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

دریافت مساحت مثلث $\triangle ABC$ از جنس طول اضلاع آن:

برای دریافت مساحت این مثلث از روابط قبلی استفاده نموده داریم که:

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

از مساوات فوق می‌توان روابط ذیل را نیز نوشت:

$$\sin C = \frac{2S}{ab} \dots (i)$$

$$\sin A = \frac{2S}{bc} \dots (ii)$$

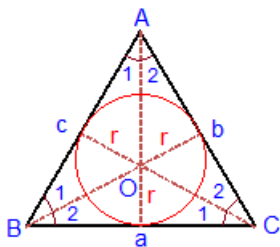
$$\sin B = \frac{2S}{ac} \dots (iii)$$

دریافت طول شعاع دایره‌ی محاطی مثلث :

مرکز دایره‌ی محاطی مثلث عبارت از نقطه‌ی تقاطع سه ناصف الزاویه مثلث می‌باشد یعنی :

$$\angle A_1 = \angle A_2, \angle B_1 = \angle B_2, \angle C_1 = \angle C_2$$

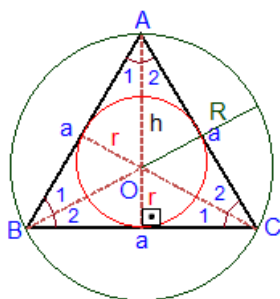
که شعاع آن قرار ذیل دریافت می‌گردد:



$$r = \frac{S}{P} = \frac{\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}{P}$$

$$P = \frac{a+b+c}{2}$$

دریافت ارتفاع، مساحت، شعاع دایره‌ی محیطی و شعاع دایره‌ی محاطی در یک مثلث متساوی الاضلاع :



$$\angle A_1 = \angle A_2, \angle B_1 = \angle B_2, \angle C_1 = \angle C_2$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \quad \text{ارتفاع :}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \quad \text{مساحت :}$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a \quad \text{شعاع دایره‌ی محیطی :}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a \quad \text{شعاع دایره‌ی محاطی :}$$

نتیجه :

مجموعه‌ی فورمول‌های فوق را می‌توان کلید حل مسایل ریاضیات (حساب، الجبر، هندسه‌ی مسطحه، هندسه‌ی فضایی، هندسه‌ی تحلیلی و مثلثات) دانست زیرا تمامی مسایل ریاضیات با این فورمول‌ها قابل حل است.

اگر این فورمولر نزد ما موجود باشد ضرور نیست برای دریافت یک فورمول مورد ضرورت ما کتاب‌های متعددی را جستجو نماییم، بلکه به این مجموعه مراجعه نموده و فورمول مورد نظر را به آسانی دریافت و حل مشکل نماییم.

مأخذ:

این ممد درسی با همکاری کتابخانه درخت دانش به شما اهداء گردیده است.

www.ddl.af



Darakht-e Danesh Information



@AfghanOERs

