

Kankor Widget ابزار کانکور

جدیدترین تکنالوژی آموزشی در سطح کشور

توابع





فهرست مطالب

1	Error! Bookmark not defined.	انواع توابع
1		توابع جفت و تاق
3		توابع متزايد ، متناقص و ثابت
6		تركيب توابع
9		توابع يك به يك (One to One function) :
9		امتحان خط افقي براي يك به يك بودن توابع
10		معكوس يك تابع
12		تمرينات
13		مأخذ

انواع توابع

اهدا کننده: ابزار کانکور

منبع: کتابخانه درخت دانش

جواز/دارنده حق چاپ: دامنه عمومی/CC 0

توابع

توابع جفت و تاق

تابعی که گراف آن نظر به محور y متناظر باشد تابع جفت و تابعی که گراف آن نظر به مبدأ متناظر باشد بنام تابع تاق یاد می‌شود. یا به عبارتی دیگر f یک تابع جفت است اگر برای هر قیمت x شامل دومین آن $f(-x) = f(x)$ باشد و تابع f یک تابع تاق است اگر برای هر قیمت x شامل در دومین آن $f(-x) = -f(x)$ باشد.

مثال: کدام یک از توابع ذیل جفت و کدام یکی از آنها تاق است؟

$$1. f(x) = 3x^4 - 4, \quad 2. f(x) = 5x^3 - 2x, \quad 3. f(x) = \frac{x^2 + 1}{3x}, \quad 4. f(x) = \frac{2}{2x - 7}$$

حل:

$$1. f(x) = 3x^4 - 4$$

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 4 = 3x^4 - 4 \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

تابع جفت است.

$$2. f(x) = 5x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 5(-x)^3 - 2(-x) = -5x^3 + 2x = -(5x^3 - 2x) = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

تابع تاق است.

$$3. f(x) = \frac{x^2 + 1}{3x}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{3(-x)} = \frac{x^2 + 1}{-3x} = -\frac{x^2 + 1}{3x} = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

تابع تاق است.

$$4. f(x) = \frac{2}{2x-7}$$

$$f(-x) = \frac{2}{2(-x)-7} = \frac{2}{-2x-7} = -\frac{2}{2x+7}$$

$$\Rightarrow f(-x) \neq -f(x)$$

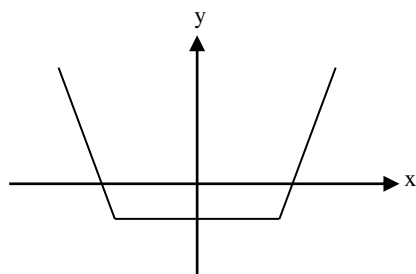
نه تابع جفت و نه تابع تاق است.

نوت: تمام توابع ثابت تابع جفت اند بجز از $f(x) = 0$ که هم جفت و هم تاق است چون هم نظر به مبدأ متناظر است و هم نظر به محور Y.

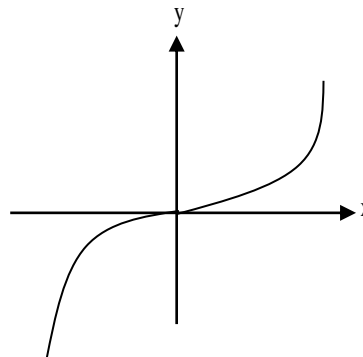
$$f(x) = c \Rightarrow f(-x) = c \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

مثال: توابع ذیل را از لحاظ جفت بودن و تاق بودن آن تشخیص نمایید.

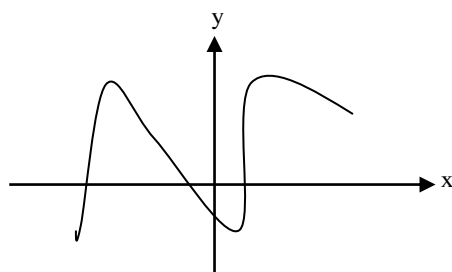
1.



2.



3.



حل:

- (1) چون گراف تابع نظر به محور y متناظر است پس یک تابع جفت می‌باشد.
- (2) چون گراف تابع نظر به مبدأ کمیات وضعیه متناظر است پس یک تابع تاق است.
- (3) چون گراف تابع نه نظر به محور y و نه نظر به مبدأ کمیات وضعیه متناظر است پس نه یک تابع جفت و نه یک تابع تاق است.

توابع متزاید ، متناقص و ثابت

- (1) تابع f در انتروال (I) متزاید است اگر در ناحیه تعریف تابع $f(x_1) < f(x_2)$ و $x_1 < x_2$ باشد.
- (2) تابع f در انتروال (I) متناقص است اگر در ناحیه تعریف تابع $f(x_1) > f(x_2)$ و $x_1 < x_2$ باشد.
- (3) تابع f در انتروال (I) ثابت است اگر در ناحیه تعریف تابع $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n)$ باشد.

مثال اول: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در انتروال $(0, \infty)$ دارای چه خاصیت است.

حل:

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{3} \\ x_2 = 4 \Rightarrow f(x_2) = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

پس تابع فوق یک تابع متناقص است.

مثال دوم: تابع $f(x) = 5^x$ در انتروال $(-\infty, 0]$ چی خاصیت دارد.

حل:

$$f(x) = 5^x \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -2 \Rightarrow f(x_1) = 5^{-2} = \frac{1}{25} \\ x_2 = -1 \Rightarrow f(x_2) = 5^{-1} = \frac{1}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)}$$

پس یک تابع متزاید است.

مثال سوم: تابع $f(x) = x^2$ در انتروال دومین خود دارای چه خاصیت است.

حل:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -4 \Rightarrow f(x_1) = (-4)^2 = 16 \\ x_2 = -3 \Rightarrow f(x_2) = (-3)^2 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 2 \Rightarrow f(x_1) = (2)^2 = 4 \\ x_2 = 3 \Rightarrow f(x_2) = (3)^2 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)}$$

پس تابع مذکور در انتروال $(-\infty, 0)$ متناقص و در انتروال $(0, \infty)$ متزاید است.

مثال چهارم: توابع ذیل در دومین خود دارای چه خاصیت است.

$$h(x) = -x + 4 \quad (c)$$

$$g(x) = 2x + 3 \quad (b)$$

$$f(x) = 5 \quad (a)$$

حل:

(a)

$$f(x) = 5, \quad f(1) = 5, \quad f(4) = 5, \quad f(99) = 5$$

طوری که دیده می‌شود اگر برای متحول قیمت های متفاوت را در نظر بگیریم در قیمت تابع هیچ تغییر نمی‌آید پس این نوع توابع بنام توابع ثابت یاد می‌شوند.

(b)

$$g(x) = 2x + 3 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 3 \Rightarrow g(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 6 + 3 = 9 \\ x_2 = 5 \Rightarrow g(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 10 + 3 = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)}$$

پس این تابع یک تابع متزاید است.

(c)

$$h(x) = -x + 4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -4 \Rightarrow f(-4) = 8 \\ x_2 = 0 \Rightarrow f(0) = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)}$$

پس این تابع یک تابع متناقص است.

نوت: یک تابع خطی دارای شکل عمومی $f(x) = mx + b$ بوده که ضریب x یعنی m به نام میل خط یاد شده و حالات ذیل در این نوع توابع موجود است.

(1) توابع خطی با میل مثبت متزاید است.

(2) توابع خطی با میل منفی متناقص است.

(3) توابع خطی با میل صفر ثابت است.

مثالها:

(1) اگر تابع $f(x) = (a-4)x^2 + (a-b-3)x + 8$ یک تابع ثابت باشد قیمت های a و b را دریابید.

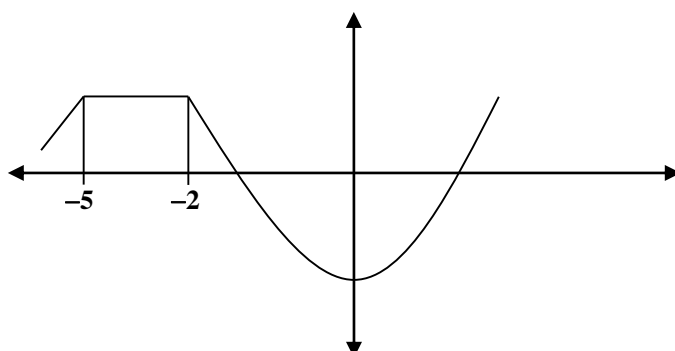
حل:

$$f(x) = (a-4)x^2 + (a-b-3)x + 8$$

$$(a-4) = 0 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

$$(a-b-3) = 0 \Rightarrow (4-b-3) = 0 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

(2) در گراف تابع ذیل انتروال های متزاید، متناقص و ثابت را دریابید.



حل:

متزاید $(-\infty, -5)$

ثابت $[-5, -2)$

متناقص $[-2, 0)$

متزاید $[0, +\infty)$

ترکیب توابع

ترکیب توابع در حقیقت نوعی از قیمت گذاری تابع می باشد که در اینجا به جای متحول یک تابع قیمت عدد نه بلکه یک تابع را وضع می نماییم هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشد تابع $f \circ g(x)$ عبارت از ترکیب توابع $f(x)$ و $g(x)$ می باشد که چنین نشان داده می شود.

$$f(x) \rightarrow f(g(x)) \Rightarrow f \circ g(x) \text{ که در اینصورت دومین تابع } f \circ g(x) \text{ عبارت از } g(x) \text{ می باشد.}$$

مثال اول: قیمت های مجهول ذیل را دریافت کنید.

حل:

$$1) \left. \begin{array}{l} f \circ g(4) = ? \\ g(4) = -5 \\ f(-5) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f \circ g(4) = f(g(4)) = f(-5) = \boxed{2}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} f \circ f(2) = ? \\ f(2) = -3 \\ f(-3) = 43 \end{array} \right\} \Rightarrow f \circ f(2) = f(f(2)) = f(-3) = \boxed{43}$$

$$3) \left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 3x \\ g(x) = x - 4 \\ fog(x) = ? \\ gof(x) = ? \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} fog(x) = f(g(x)) = (x-4)^2 + 3 \cdot (x-4) \\ fog(x) = x^2 - 8x + 16 + 3x - 12 = \boxed{x^2 - 5x + 4} \\ gof(x) = g(f(x)) = \boxed{x^2 + 3x - 4} \end{array}$$

مثال دوم: اگر $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x^3$ باشد پس در آنصورت قیمت های ذیل را دریابید.

a) $fog(2)$ b) $gof(1)$ c) $fof(5)$ d) $gog(-1)$

حل:

$$\begin{array}{l} \text{a) } fog(x) = f(g(x)) = x^3 + 1 \Rightarrow fog(2) = 2^3 + 1 = \boxed{9} \\ \text{b) } gof(x) = g(f(x)) = (x+1)^3 \Rightarrow gof(1) = (1+1)^3 = \boxed{8} \\ \text{c) } fof(x) = f(f(x)) = x + 1 + 1 = x + 2 \Rightarrow fof(5) = 5 + 2 = \boxed{7} \\ \text{d) } gog(x) = g(g(x)) = (x^3)^3 = x^9 \Rightarrow gog(-1) = (-1)^9 = \boxed{-1} \end{array}$$

مثال سوم: اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ و $g(x) = x^5$ و $h(x) = x^2 + x$ باشد پس در آنصورت $fogoh(x)$ را دریابید.

حل:

$$\begin{aligned} fogoh(x) &= f(g(h(x))) \\ g(h(x)) &= (x^2 + x)^5 \Rightarrow f(g(h(x))) = \frac{(x^2 + x)^5}{(x^2 + x)^5 - 1} \end{aligned}$$

مثال چهارم: اگر $fog(x) = \sqrt{5x+3}$ باشد پس در آنصورت $f(x)$ و $g(x)$ را دریابید.

حل:

$$\begin{aligned} fog(x) &= \sqrt{5x+3} \\ g(x) &= 5x+3, \quad f(x) = \sqrt{x} \end{aligned}$$

مثال پنجم: اگر قیمت $\text{gof}(x) = (x^2 + 1)^2$ باشد پس در آنصورت $f(x)$ و $g(x)$ را دریابید.

حل:

$$\text{gof}(x) = (x^2 + 1)^2$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = x^2$$

مثال ششم: اگر $\text{fog}(x) = 4x - 1$ و $g(x) = x + 2$ باشد پس در آنصورت قیمت $f(x)$ را دریابید.

حل:

$$\text{fog}(x) = 4x - 1$$

$$f(g(x)) = 4x - 1 \Rightarrow f\left(\underset{a}{x+2}\right) = 4x - 1$$

$$x + 2 = a \Rightarrow x = a - 2$$

$$f(a) = 4(a - 2) - 1 \Rightarrow f(a) = 4a - 9 \Rightarrow \boxed{f(x) = 4x - 9}$$

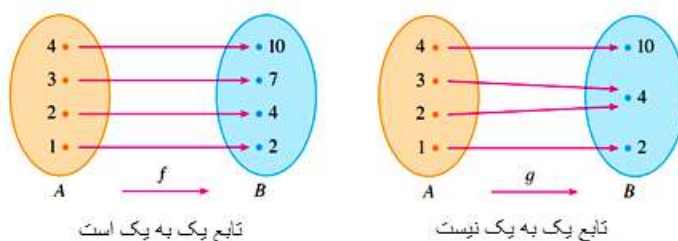
مثال هفتم: $\text{fog}(x) = 5x - 2$ و $f(x) = 4x - 3$ پس قیمت $g(x)$ را دریابید.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{fog}(x) = 5x - 2 \\ f(x) = 4x - 3 \\ g(x) = ? \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{fog}(x) = f(g(x)) = 5x - 2, \quad f(g(x)) = 4 \cdot g(x) - 3 \\ 5x - 2 = 4 \cdot g(x) - 3 \Rightarrow 5x + 1 = 4 \cdot g(x) \Rightarrow \boxed{g(x) = \frac{5x + 1}{4}} \end{array}$$

توابع یک به یک (One to One function):

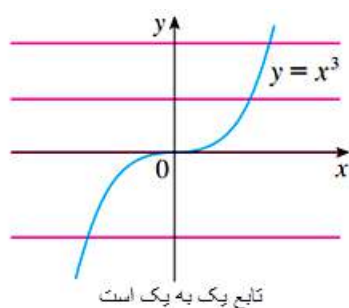
هرگاه برای یک قیمت x یک قیمت y موجود باشد این نوع توابع، توابع یک به یک نامیده می‌شوند.



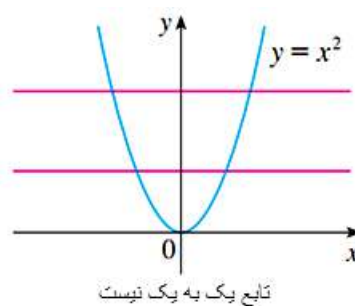
نوت: تمام توابع مثلثاتی و توابع جفت توابع یک به یک نمی‌باشند.

امتحان خط افقی برای یک به یک بودن توابع

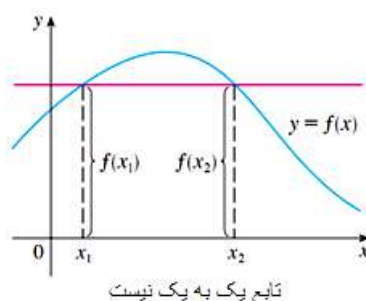
اگر بالای گراف یک تابع خط افقی رسم کنیم و خط افقی گراف تابع را در یک نقطه قطع کند گراف یک تابع یک به یک را نشان می‌دهد اما اگر خط، گراف را در دو یا بیشتر از دو نقطه قطع نماید گراف یک تابع یک به یک را نشان نمی‌دهد.



One to One function



Not One to One function

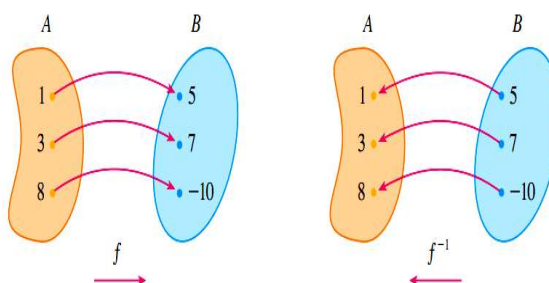
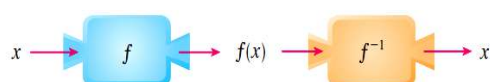


Not One to One function

معکوس یک تابع

هرگاه تابع f یک تابع یک به یک و دارای دومین A و رنج B باشد پس در آنصورت معکوس تابع f^{-1} تابع است که دارای دومین B و رنج A می‌باشد یا به عبارت دیگر معکوس یک تابع عبارت از متناظر همان تابع نظر به خط $y=x$ می‌باشد.

$$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$



مثال اول: اگر $f = \{(2,3), (1,4), (9,43), (32,100)\}$ باشد در آنصورت معکوس تابع f^{-1} و $f^{-1}(32)$ را دریابید.

حل:

$$f = \{(2,3), (1,4), (9,43), (32,100)\}$$

$$f^{-1} = \{(3,2), (4,1), (43,9), (100,32)\} \quad , \quad f^{-1}(32) = 100$$

برای پیدا نمودن معکوس یک تابع مراحل ذیل را تعقیب می‌نماییم.

- (1) x و y را به یک دیگر تعویض می‌نماییم.
- (2) از مرحله اول قیمت y را در یافت می‌نماییم.
- (3) در مرحله آخر بجای y ، y^{-1} می‌نویسیم.

مثال دوم: معکوس توابع ذیل را دریابید.

a) $f(x) = \sqrt{10-3x}$, b) $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$ c) $f(x) = e^{x^3}$

حل:

$$a) f(x) = \sqrt{10-3x} \Rightarrow y = \sqrt{10-3x}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{10-3y} \Rightarrow x^2 = 10-3y$$

$$\Rightarrow 3y = 10 - x^2 \Rightarrow y = \frac{10-x^2}{3} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{10-x^2}{3}}$$

$$b) f(x) = \frac{4x-1}{2x+3} \Rightarrow x = \frac{4y-1}{2y+3} \Rightarrow (2y+3) \cdot x = 4y-1 \Rightarrow 2yx + 3x - 4y = -1$$

$$(2x-4)y = -1-3x \Rightarrow y = \frac{-1-3x}{2x-4} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{-1-3x}{2x-4}}$$

$$c) f(x) = e^{x^3} \Rightarrow x = e^{y^3} \Rightarrow \log_e x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\ln x} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\ln x}}$$

مثال سوم: اگر $f^{-1}\left(\frac{x+1}{x}\right) = x^3$ باشد در آن صورت $f^{-1}(2) = ?$ را دریابید.

حل:

$$f^{-1}\left(\frac{x+1}{x}\right) = x^3 \quad \frac{x+1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\boxed{f^{-1}(2) = 1^3 = 1}$$

تمرینات

1. گراف های کدام یکی از دو تابع ذیل نظر به خط مستقیم $y = x$ متناظر است:

$$\begin{array}{llll} \begin{cases} y = x^3 \\ y = x^2 \end{cases} (4) & \begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 \end{cases} (3) & \begin{cases} y = \log_3 x \\ y = 3^x \end{cases} (2) \sqrt{} & \begin{cases} y = 3x \\ y = x^2 \end{cases} (1) \end{array}$$

2. معادله تابع $g = \{(-3,5) \cdot (0,5) \cdot (1,5) \cdot (4,5)\}$ که بصورت جوره های مرتب داده شده است ، عبارت است از:

$$\begin{array}{llll} g(x) = 5 \sqrt{4} & g(x) = x \sqrt{3} & g(x) = -x \sqrt{2} & g(x) = -5 \sqrt{1} \end{array}$$

3. اگر $R^{-1} = \{(1,2), (2,4)\}$ باشد پس R مساوی است به:

$$\begin{array}{ll} \{(1,2), (2,4)\} \sqrt{1} & \{(2,4), (1,4)\} \sqrt{2} \\ \{(2,1), (4,2)\} \sqrt{3} & \{(2,1), (2,4)\} \sqrt{4} \end{array}$$

4. کدام یکی از توابع ذیل در انتروال $(-\infty, \infty)$ معکوس پذیر نمی باشد :

$$\begin{array}{llll} y = \cos x \sqrt{1} & y = x^3 \sqrt{2} & y = x^3 + 1 \sqrt{3} & y = 2x + 1 \sqrt{4} \end{array}$$

5. تابع $f(x) = x^2$ در انتروال $[0, 2]$ چه خاصیت دارد:

(1) هر سه جواب درست است (2) متناقص است

(3) تابع جفت (4) یک به یک

مأخذ:

این ممد درسی با همکاری کتابخانه درخت دانش به شما اهداء گردیده است.

www.ddl.af



Darakht-e Danesh Information



@AfghanOERs

