

Kankor Widget

ابزار کانکور

جدیدترین تکنالوژی آموزشی در سطح کشور

حل تمرینات ریاضی

فصل سوم (قسمت سوم) – تابع





فهرست مطالب

1	فصل سوم (قسمت سوم).....
1	تابع.....
1	تمرین عمومی فصل سوم صفحات (143 الى 146).....
32	مأخذ.....

فصل سوم
(قسمت سوم)
تابع

اهدا کننده: ابزار کانکور
منبع: کتابخانه درخت دانش
جواز/دارنده حق چاپ:

فصل سوم (قسمت سوم)

تابع

تمرین عمومی فصل سوم صفحات (143 الی 146)

1- کدام یک از ست‌های جور‌های مرتب زیر تابع را نشان می‌دهد؟ ناحیه‌های تعریف و قیمت‌های آن‌ها را تعیین کنید.

- 1- $\{(1,2), (3,4), (5,5)\}$
- 2- $\{(3,4), (3,5), (4,4), (4,5)\}$
- 3- $\{(-3,-3), (-2,-2), (-1,-1), (0,0)\}$
- 4- $\{(1,4), (1,5), (1,6)\}$

حل:

1- این ست یک تابع را نشان می‌دهد زیرا هر عنصر از ناحیه‌ی تعریف (Domain) فقط به یک عنصر از ناحیه‌ی قیمت‌ها (Range) ارتباط دارد.

$$Dom = \{1, 3, 5\}, \quad Range = \{2, 4, 5\}$$

2- این ست یک تابع نمی‌باشد زیرا عناصر 3 و 4 دو تصویر دارند. $Dom = \{3, 4\}$, $Range = \{4, 5\}$

3- این ست یک تابع را نشان می‌دهد زیرا هر عنصر از ناحیه‌ی تعریف (Domain) فقط به یک عنصر از ناحیه‌ی قیمت‌ها (Range) ارتباط دارد.

$$Dom = \{-3, -2, -1, 0\}, \quad Range = \{-3, -2, -1, 0\}$$

4- این ست یک تابع نیست زیرا عنصر 1 از ناحیه‌ی تعریف با سه عنصر ناحیه‌ی قیمت‌ها ارتباط دارد.

$$Dom = \{1\}, \quad Range = \{4, 5, 6\}$$

2- اگر $g(x) = x^2 + 2x + 3$ باشد. $g(-1)$, $g(-x)$ و $g(x+5)$ را دریابید.

حل:

$$g(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$g(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = \boxed{2}$$

$$g(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 3 = \boxed{x^2 - 2x + 3}$$

$$g(x+5) = (x+5)^2 + 2(x+5) + 3 = x^2 + 10x + 25 + 2x + 10 + 3 = \boxed{x^2 + 12x + 38}$$

3- اگر $h(x) = x^4 + x^2 + 1$ باشد. $h(3a)$ و $h(-x)$ ، $h(-1)$ ، $h(2)$ را دریابید.

حل:

$$h(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$h(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 1 = \boxed{x^4 + x^2 + 1}$$

$$h(-1) = (-1)^4 + (-1)^2 + 1 = 1 + 1 + 1 = \boxed{3}$$

$$h(2) = (2)^4 + (2)^2 + 1 = 16 + 4 + 1 = \boxed{21}$$

$$h(3a) = (3a)^4 + (3a)^2 + 1 = \boxed{81a^4 + 9a^2 + 1}$$

4- ناحیه‌ی تعریف توابع ذیل را دریابید.

$$a) f(x) = 2x \Rightarrow \boxed{Domf(x) = \mathbb{R}}$$

$$b) f(x) = (x-3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x) = (x-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x-3} \Rightarrow Domf(x) = \boxed{[3, +\infty)}$$

$$c) f(x) = \sqrt{16-x^2} \quad 16-x^2 \geq 0 \Rightarrow (4-x)(4+x) \geq 0 \Rightarrow Domf(x) = \boxed{\{x / x \in \mathbb{R}, -4 \leq x \leq 4\}} = [-4, 4]$$

$$d) f(x) = \frac{2}{x^2-4} \quad \boxed{Domf(x) = \{x / x \in \mathbb{R}, x \neq 2, x \neq -2\}}$$

$$e) f(x) = \sqrt{\frac{3}{x^2+25}} \Rightarrow \boxed{Domf(x) = \mathbb{R}}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-4x-5} \Rightarrow Domf(x) = \{x / x^2-4x-5 \geq 0, x \leq -1, x \geq 5\} = \boxed{(-\infty, -1] \cup [5, \infty)}$$

5- اگر $f(x) = \begin{cases} x+3 & : x < 0 \\ 4x+7 & : x \geq 0 \end{cases}$ باشد. $f(3)$ ، $f(0)$ و $f(-2)$ را دریابید.

حل:

$$f(0) = 4 \cdot 0 + 7 = 7$$

$$f(3) = 4 \cdot 3 + 7 = 12 + 7 = 19$$

$$f(-2) = -2 + 3 = 1$$

6- اگر $g(x) = \begin{cases} x+3 & : x \geq -3 \\ -(x+3) & : x < -3 \end{cases}$ باشد. $g(0)$ ، $g(-6)$ و $g(-3)$ را دریابید.

حل:

$$g(0) = 0 + 3 = 3$$

$$g(-6) = -(-6 + 3) = -(-3) = 3$$

$$g(-3) = -3 + 3 = 0$$

7- اگر $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & : x \neq 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$ باشد، $h(3)$ ، $h(0)$ و $h(5)$ را دریابید.

حل:

$$h(3) = 6$$

$$h(0) = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$h(5) = \frac{5^2 - 9}{5 - 3} = \frac{25 - 9}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

8- کدام یک از معادله‌های زیر یک تابع را تعریف می‌کند:

$$\begin{array}{lll} x + y = 16 & , & x^2 + y = 16 \\ x = y^2 & , & y = \sqrt{x + 4} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 16 \\ x + y^3 = 8 \end{array}$$

حل:

$x + y = 16$ یک تابع است.

$x^2 + y = 16$ یک تابع است.

$x^2 + y^2 = 16$ یک تابع نیست.

$x = y^2$ یک تابع است.

$y = \sqrt{x + 4}$ یک تابع نیست.

$x + y^3 = 8$ یک تابع است.

9- در توابع زیر کدام یک تابع طاق، کدام یک جفت و کدام یک نه تابع جفت و نه طاق می باشد؟

$$a) f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, \quad b) f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad c) f(x) = \frac{2}{x-6}$$

حل:

یک تابع جفت است :

$$a) f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 5 \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

نه جفت است و نه طاق زیرا:

$$b) f(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 1 = x^2 - 2x - 1$$

این تابع نیز نه جفت است و نه طاق زیرا :

$$c) f(x) = \frac{2}{x-6}$$

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)-6} = \frac{2}{-x-6}$$

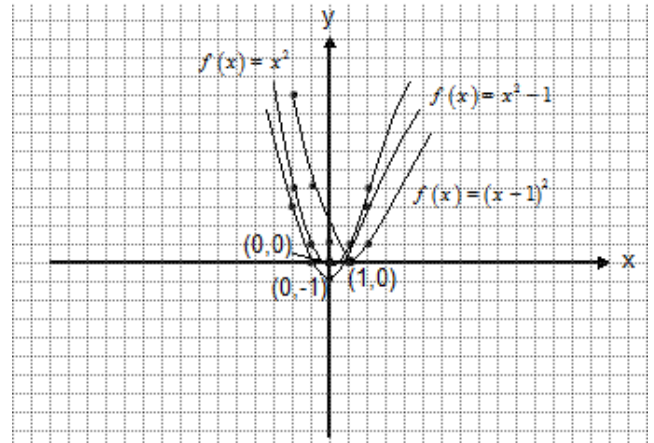
10- گراف‌های توابع $f(x) = x^2 - 1$ و $f(x) = (x-1)^2$ را رسم و با گراف $f(x) = x^2$ مقایسه کنید.

حل:

x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = x^2 - 1$	-1	0	0	3	3

x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = (x-1)^2$	1	0	4	1	9



در رسم فوق واضح مشاهده می‌شود که اگر گراف تابع $f(x) = x^2$ به اندازه‌ی یک واحد به طور عمودی پایین انتقال کند گراف تابع $f(x) = x^2 - 1$ حاصل می‌شود و اگر به اندازه‌ی یک واحد به طور افقی به طرف راست انتقال کند گراف تابع $f(x) = (x-1)^2$ به دست می‌آید.

11- توابع زیر را دریابید و ناحیه‌ی تعریف هریک را تعیین کنید. $\left(\frac{f}{g}\right)$ و $(f \cdot g)$, $(f - g)$, $(f + g)$

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 4x - 1 & , \quad g(x) = 6x + 3 \\ b) f(x) = \sqrt{2x + 5} & , \quad g(x) = \sqrt{4x - 9} \\ c) f(x) = 4x^2 - 11x + 2 & , \quad g(x) = x^2 + 5 \end{array}$$

حل:

$$\begin{aligned} a) f(x) &= 4x - 1, \quad g(x) = 6x + 3 \\ (f + g) &= 4x - 1 + 6x + 3 = 10x + 2 \Rightarrow \text{dom}(f + g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \\ (f - g) &= 4x - 1 - 6x - 3 = -2x - 4 \Rightarrow \text{dom}(f - g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \\ (f \cdot g) &= (4x - 1)(6x + 3) = 24x^2 + 6x - 3 \Rightarrow \text{dom}(f \cdot g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \\ \left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{4x - 1}{6x + 3} \Rightarrow \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{dom}f \cap \text{dom}g \setminus \{x \mid g(x) \neq 0\} \\ 6x + 3 &= 0 \Rightarrow 6x = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) &= \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{aligned}$$

$$b) f(x) = \sqrt{2x+5}, \quad g(x) = \sqrt{4x-9}$$

$$(f+g) = \sqrt{2x+5} + \sqrt{4x-9}$$

$$\text{dom}f = \left\{ x / 2x+5 \geq 0, 2x \geq -5 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2} \right\} = \left[-\frac{5}{2}, \infty \right)$$

$$\text{dom}g = \left\{ x / 4x-9 \geq 0, 4x \geq 9 \Rightarrow x \geq \frac{9}{4} \right\} = \left[\frac{9}{4}, \infty \right)$$

$$\text{dom}(f+g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \left[-\frac{5}{2}, \infty \right) \cap \left[\frac{9}{4}, \infty \right) = \left[\frac{9}{4}, \infty \right)$$

$$(f-g) = \sqrt{2x+5} - \sqrt{4x-9}$$

$$\text{dom}(f-g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \left[-\frac{5}{2}, \infty \right) \cap \left[\frac{9}{4}, \infty \right) = \left[\frac{9}{4}, \infty \right)$$

$$(f \cdot g) = (\sqrt{2x+5})(\sqrt{4x-9}) = \sqrt{8x^2+2x-45}$$

$$\text{dom}(f \cdot g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \left[-\frac{5}{2}, \infty \right) \cap \left[\frac{9}{4}, \infty \right) = \left[\frac{9}{4}, \infty \right)$$

$$\left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{4x-9}} = \sqrt{\frac{2x+5}{4x-9}}$$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g} \right) = \left(\frac{9}{4}, \infty \right)$$

$$c) f(x) = 4x^2 - 11x + 2, \quad g(x) = x^2 + 5$$

$$(f+g) = 4x^2 - 11x + 2 + x^2 + 5 = 5x^2 - 11x + 7 \Rightarrow \text{dom}(f+g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f-g) = 4x^2 - 11x + 2 - (x^2 + 5) = 3x^2 - 11x - 3 \Rightarrow \text{dom}(f-g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g) = (4x^2 - 11x + 2)(x^2 + 5) = 4x^4 - 11x^3 + 22x^2 + 55x + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{dom}(f \cdot g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g} \right) = \frac{4x^2 - 11x + 2}{x^2 + 5} \Rightarrow \text{dom}f = \mathbb{R}, \text{dom}g = \mathbb{R} \Rightarrow \text{dom}\left(\frac{f}{g} \right) = \mathbb{R}$$

چون مخارج به هیچ قیمت صفر نمی‌شود از این رو دومین آن تمامی اعداد حقیقی می‌باشد.

12- اگر $f(x) = 4x^2 - 2x$ و $g(x) = 8x + 1$ باشد؛ پس:

$$(f+g)(3), \quad (f+g)(-5), \quad (f \cdot g)(4)$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)(4), \quad (fog)(2), \quad (gof)(-5)$$

را دریابید.

حل:

$$(f + g) = 4x^2 - 2x + 8x + 1 = 4x^2 + 6x + 1 \Rightarrow (f + g)(3) = 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + 1 = 36 + 18 + 1 = 55$$

$$(f + g)(-5) = 4 \cdot (-5)^2 + 6(-5) + 1 = 100 - 30 + 1 = 71$$

$$(f \cdot g) = (4x^2 - 2x)(8x + 1) = 32x^3 - 12x^2 - 2x \Rightarrow (f \cdot g)(4) = 32(4)^3 - 12(4)^2 - 2(4) = 2048 - 192 - 8 = 1848$$

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{4x^2 - 2x}{8x + 1} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{4(4)^2 - 2(4)}{8(4) + 1} = \frac{64 - 8}{32 + 1} = \frac{56}{33}$$

$$(fog) = f(8x + 1) = 4(8x + 1)^2 - 2(8x + 1) = 4(64x^2 + 16x + 1) - 16x - 2 = 256x^2 + 64x + 4 - 16x - 2 = 256x^2 + 48x + 2$$

$$(fog)(2) = 256(2)^2 + 48(2) + 2 = 1024 + 96 + 2 = 1122$$

$$(gof) = g(4x^2 - 2x) = 8(4x^2 - 2x) + 1 = 32x^2 - 16x + 1$$

$$(gof)(-5) = 32(-5)^2 - 16(-5) + 1 = 800 + 80 + 1 = 881$$

13- (fog) و (gof) را دریابید اگر:

- | | | |
|--------------------------|---|------------------------|
| a) $f(x) = 8x + 12$ | , | $g(x) = 3x - 1$ |
| b) $f(x) = 5x + 3$ | , | $g(x) = -x^2 + 4x + 3$ |
| c) $f(x) = -x^3 + 2$ | , | $g(x) = 4x$ |
| d) $f(x) = \frac{1}{x}$ | , | $g(x) = x^2$ |
| e) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ | , | $g(x) = 8x^2 - 6$ |

حل:

$$a) f(x) = 8x + 12, \quad g(x) = 3x - 1$$

$$(fog)(x) = f(3x - 1) = 8(3x - 1) + 12 = 24x - 8 + 12 = 24x + 4$$

$$(gof)(x) = g(8x + 12) = 3(8x + 12) - 1 = 24x + 36 - 1 = 24x + 35$$

$$b) f(x) = 5x + 3, \quad g(x) = -x^2 + 4x + 3$$

$$(fog)(x) = f(-x^2 + 4x + 3) = 5(-x^2 + 4x + 3) + 3 = -5x^2 + 20x + 15 + 3 = -5x^2 + 20x + 18$$

$$(gof)(x) = g(5x + 3) = -(5x + 3)^2 + 4(5x + 3) + 3 = -(25x^2 + 30x + 9) + 20x + 12 + 3 = -25x^2 - 10x + 6$$

$$c) f(x) = -x^3 + 2, \quad g(x) = 4x$$

$$(fog)(x) = f(4x) = -(4x)^3 + 2 = -64x^3 + 2$$

$$(gof)(x) = g(-x^3 + 2) = 4(-x^3 + 2) = -4x^3 + 8$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2$$

$$(fog)(x) = f(x^2) = \frac{1}{x^2}$$

$$(gof)(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

$$e) f(x) = \sqrt{x+2}, \quad g(x) = 8x^2 - 6$$

$$(fog)(x) = f(8x^2 - 6) = \sqrt{8x^2 - 6 + 2} = \sqrt{8x^2 - 4} = \sqrt{4(2x^2 - 1)} = 2\sqrt{2x^2 - 1}$$

$$(gof)(x) = g(\sqrt{x+2}) = 8(\sqrt{x+2})^2 - 6 = 8(x+2) - 6 = 8x + 16 - 6 = 8x + 10$$

14- با در نظر داشت گراف تابع $y = f(x)$ بگویید که گراف تابع $y = f(x) - 5$ به اندازه‌ی 5 واحد:

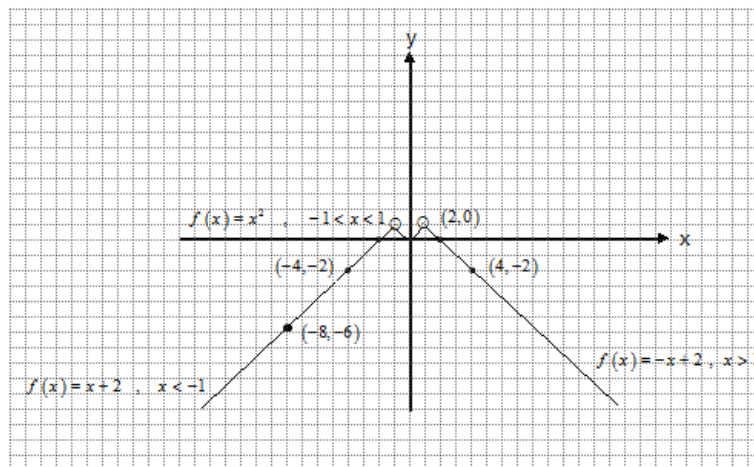
a) به طرف پایین انتقال شده است b) به طرف بالا انتقال شده است

c) به طرف راست انتقال شده است d) به طرف چپ انتقال شده است.

15- اگر $f(x)$ طور زیر تعریف شده باشد، گراف آن را رسم و ناحیه‌های تعریف و قیمت‌های آن را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & x > 1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x+2 & x < -1 \end{cases}$$

حل: به هر تابع طبق شرایط داده شده‌ی قیمت‌ها، گراف آن را قرار ذیل ترسیم و ناحیه‌های تعریف و قیمت‌های آن‌ها را تعیین می‌داریم:



$$\text{dom}f(x) = \{x / x \in \mathbb{R}, x \neq -1, x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

16- ساحه‌ی تعریف و ساحه‌ی قیمت‌های تابع $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ را تعیین کنید.

حل:

$$\text{ساحه‌ی تعریف: } \text{dom}f(x) = \{x / x \in \mathbb{R}, x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

ساحه‌ی قیمت‌ها:

$$yx + y = 2x \Rightarrow y = 2x - yx \Rightarrow y = (2 - y)x \Rightarrow x = \frac{y}{2 - y}$$

$$\text{Rang}f(x) = \{y / y \in \mathbb{R}, y \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

17- ساحه‌ی تعریف و ساحه‌ی قیمت‌های تابع $f(x) = \sqrt{2x-1}$ را تعیین کنید.

حل:

$$\text{dom}f(x) = \left\{ x / x \in \mathbb{R}, x \geq \frac{1}{2} \right\} = \left[\frac{1}{2}, \infty \right)$$

$$\text{Rang}f(x) = y \geq 0 \vee [0, \infty)$$

18- ساحه‌های تعریف توابع ناطق زیر را دریابید و اگر مجانب عمودی داشته باشند، معادله‌های مجانب‌های عمودی را نیز به دست آورید.

$$f(x) = \frac{5x}{x-4} \Rightarrow \text{dom}f(x) = \mathbb{R} - \{4\}, \quad x = 4$$

$$g(x) = \frac{7x}{x-8} \Rightarrow \text{dom}f(x) = \mathbb{R} - \{8\}, \quad x = 8$$

$$h(x) = \frac{x+8}{x^2-64} \Rightarrow \text{dom}f(x) = \mathbb{R} - \{-8, 8\}, \quad x_1 = -8 \wedge x_2 = 8$$

$$f(x) = \frac{x+8}{x^2+64} \Rightarrow \text{dom}f(x) = \mathbb{R}, \quad x = \phi$$

$$g(x) = \frac{x+7}{x^2-49} \Rightarrow \text{dom}f(x) = \mathbb{R} - \{-7, 7\}, \quad x_1 = -7 \wedge x_2 = 7$$

$$h(x) = \frac{x+7}{x^2-36} \Rightarrow \text{dom}f(x) = \mathbb{R} - \{-6, 6\}, \quad x_1 = -6 \wedge x_2 = 6$$

19- گراف‌های توابع $f(x) = x^2 + 2$, $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^2 - 1$ و $f(x) = x^2 - 2$ را در عین سیستم کمیات وضعیه رسم و با گراف تابع $f(x) = x^2$ مقایسه کنید.

حل: برای هریک از توابع فوق قیمت‌های متعدد داده آن‌ها را ترسیم می‌داریم. قرار ذیل:

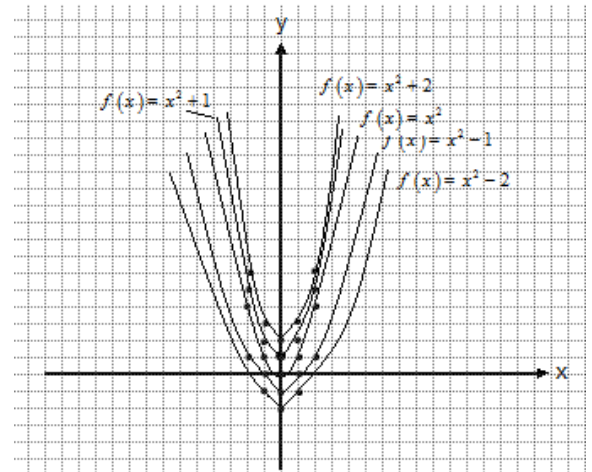
x	0	1	2	-2	-1
$f(x) = x^2$	0	1	4	4	1

x	0	1	2	-2	-1
$f(x) = x^2 + 1$	1	2	5	5	2

x	0	1	2	-2	-1
$f(x) = x^2 - 1$	-1	0	1	1	0

x	0	1	2	-2	-1
$f(x) = x^2 + 2$	2	3	6	6	3

x	0	1	2	-2	-1
$f(x) = x^2 - 2$	-2	-1	2	2	-1



نتیجه: اگر گراف تابع $f(x) = x^2$ به قدر دو واحد به طرف بالا انتقال نماید تابع $f(x) = x^2 + 2$ ، اگر یک واحد به طرف بالا انتقال شود گراف $f(x) = x^2 + 1$ ، اگر یک واحد به طرف پایین انتقال شود گراف $f(x) = x^2 - 1$ و اگر دو واحد به طرف پایین انتقال یابد گراف $f(x) = x^2 - 2$ حاصل می‌شود.

20- کمیات وضعیهی رأس‌ها و معادله‌های تناظر توابع درجه دوم زیر را دریابید.

$$y = (x - 2)^2, \quad y = (x + 3)^2 - 4$$

حل:

در تابع $y = (x - 2)^2$ کمیات وضعیهی رأس آن عبارت از $(2, 0)$ و معادلهی محور تناظر آن $x = 2$ می‌باشد.

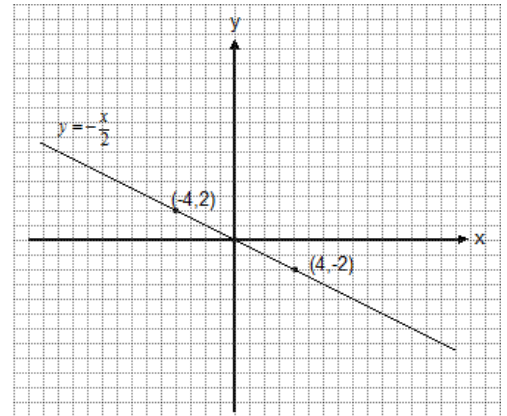
در تابع $y = (x + 3)^2 - 4$ کمیات وضعیهی رأس عبارت از $(-3, -4)$ و معادلهی محور تناظر آن $x = -3$ می‌باشد.

21- گراف تابع $y = -\frac{x}{2}$ را رسم کنید.

حل: گراف تابع مذکور یک خط مستقیم است که با مشخص ساختن دو نقطه‌ی آن می‌توانیم آن را قرار ذیل ترسیم نماییم:

$$y = -\frac{x}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 \Rightarrow y = -2 \\ x = -4 \Rightarrow y = 2 \end{array} \right\}$$



22- مجانب عمودی و مایل تابع $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 2}$ را دریابید.

حل:

مجانب عمودی آن : $x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

مجانب مایل آن : $(x^2 - 5) \div (x + 2) \Rightarrow \boxed{y = x - 2}$

23- معادله‌ی مجانب افقی $h(x) = \frac{x+1}{x-4}$ عبارت است از:

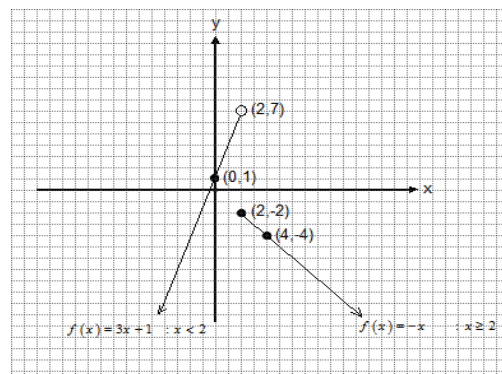
$y = -1$ (a) $y = 1$ (b ✓) $y = -\frac{1}{4}$ (c) $y = 4$ (d)

24- گراف تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & : x < 2 \\ -x & : x \geq 2 \end{cases}$ را رسم کنید.

حل: گراف هر دو جزء تابع مذکور خط مستقیم می‌باشد که قرار ذیل آن را ترسیم می‌داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 3x+1 : x < 2 \\ x = 2 \Rightarrow f(x) = y = 7 \\ x = 0 \Rightarrow y = 1 \end{array} \right\}$$

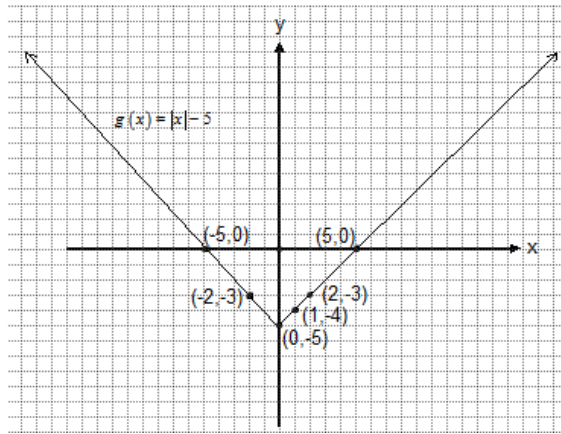
$$\left. \begin{array}{l} -x : x \geq 2 \\ x = 2 \Rightarrow f(x) = y = -2 \\ x = 4 \Rightarrow y = -4 \end{array} \right\}$$



25- گراف تابع $g(x) = |x| - 5$ را رسم و ناحیه‌ی قیمت‌های این تابع را مشخص کنید.

حل: در تابع مذکور قیمت‌های لازم را که برای گراف ضرورت است وضع نموده گراف آن را قرار ذیل ترسیم می‌داریم:

x	0	1	2	-2	-5	5
$g(x) = x - 5$	-5	-4	-3	-3	0	0



26- در ناحیه‌ی قیمت‌های تابع علامه‌ی کدام اعداد شامل می‌باشد؟

حل: در ناحیه‌ی قیمت‌های تابع علامه‌ی (sign function) اعداد $\{-1, 0, 1\}$ شامل می‌باشند یعنی: $Rang\ sign = \{-1, 0, 1\}$

27- معکوس هریک از توابع زیر را دریابید و نیز نشان دهید که $f(f^{-1}(x)) = x$ می‌باشد.

$$f(x) = \frac{1}{8}x, \quad f(x) = 8x - 1, \quad f(x) = x^2 + 6$$

$$f(x) = \frac{4x+6}{5}, \quad f(x) = x^3 - 1$$

حل:

$$f(x) = y = \frac{1}{8}x \Rightarrow x = \frac{1}{8}y \Rightarrow y = 8x \Rightarrow f^{-1}(x) = 8x \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(8x) = \frac{1}{8}(8x) = \boxed{x}$$

$$f(x) = y = 8x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{8} \Rightarrow y = 8x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{8} \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+1}{8}\right) = 8\left(\frac{x+1}{8}\right) - 1 = \boxed{x}$$

معکوس این تابع، تابع نمی‌باشد. $f(x) = y = x^2 + 6 \Rightarrow x = y^2 + 6 \Rightarrow y^2 = x - 6$

$$f(x) = y = \frac{4x+6}{5} \Rightarrow x = \frac{4y+6}{5} \Rightarrow 4y = 5x-6 \Rightarrow y = \frac{5x-6}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5x-6}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{5x-6}{4}\right) = \frac{4\left(\frac{5x-6}{4}\right)+6}{5} = \frac{5x-6+6}{5} = \frac{5x}{5} = \boxed{x}$$

$$f(x) = y = x^3 - 1 \Rightarrow x = y^3 - 1 \Rightarrow y^3 = x+1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x+1}) = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = x+1-1 = \boxed{x}$$

28- آیا تابع $g(x) = x^2$ معکوس پذیر می باشد (معکوس آن نیز یک تابع می باشد).

حل:

$$g(x) = y = x^2 \Rightarrow x = y^2 / \sqrt{}$$

$$y = \pm\sqrt{x} \vee g^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$$

به وضاحت دیده می شود که $g^{-1}(x)$ یک تابع نمی باشد، زیرا اگر $x = -2$ ، $x = 2$ باشد در این صورت

$$g(2) = g(-2) = 4 \text{ گردیده پس } g(x) \text{ یک تابع معکوس پذیر نبوده، یعنی معکوس آن تابع نمی باشد.}$$

29- اگر $(fog)(x) = (gof)(x)$ باشد تابع f با g چی رابطه دارد؟

حل: اگر $(fog)(x) = (gof)(x)$ باشد تابع g معکوس تابع f می باشد.

30- کمیات وضعیهی نقاط تقاطع گراف تابع $g(x) = 3 - \frac{3}{2}x$ با محورهای x و y را دریابید.

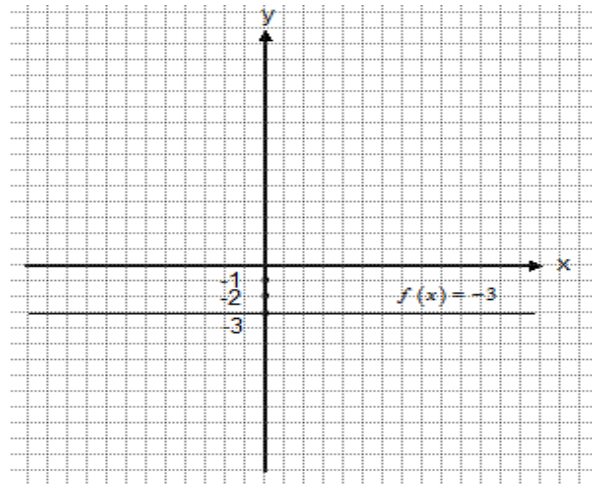
حل:

$$g(x) = y = 3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 3 - \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0) : x \text{ تقاطع با محور}$$

$$g(x) = y = 3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 3 - \frac{3}{2}(0) y = 3 - 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (0, 3) : y \text{ تقاطع با محور}$$

31- گراف تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید.

حل :



32- کمیات وضعیهی نقطه‌ی رأس گراف تابع $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ را دریابید.

حل: کمیات وضعیهی نقطه‌ی رأس توسط رابطه‌ی $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ دریاف می‌گردد. قرار ذیل:

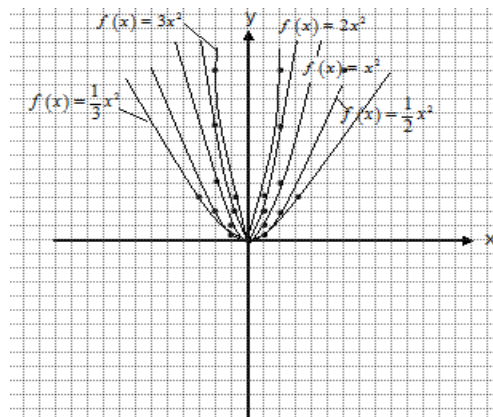
$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{4}{2 \cdot 2}, \frac{4(2)(5) - (4)^2}{4 \cdot 2}\right) = \left(-\frac{4}{4}, \frac{40-16}{8}\right) = (-1, 3)$$

33- در عین سیستم کمیات وضعیه گراف‌های توابع $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ، $f(x) = x^2$ ، $f(x) = 2x^2$ ، $f(x) = 3x^2$ و $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ را

رسم و با گراف $f(x) = x^2$ مقایسه کنید.

حل: به هریک از توابع فوق قیمت‌های متعدد لازمه را داده و قرار ذیل به ترسیم آن می‌پردازیم:

x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4
x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = 2x^2$	0	2	2	8	8
x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = 3x^2$	0	3	3	12	12
x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$	0	0.5	0.5	2	2
x	0	3	-3	6	-6
$f(x) = \frac{1}{3}x^2$	0	3	3	12	12



34- مجانب مایل تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ عبارت است از:

$$\sqrt{a}: y = x$$

$$b: y = x - 1$$

$$c: y = x + 1$$

فصل سوم (قسمت سوم)

تابع

تمرین عمومی فصل سوم صفحات (143 الی 146)

35- کدام یک از ست‌های جوردهای مرتب زیر تابع را نشان می‌دهد؟ ناحیه‌های تعریف و قیمت‌های آن‌ها را تعیین کنید.

- 1- $\{(1, 2), (3, 4), (5, 5)\}$
- 2- $\{(3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5)\}$
- 3- $\{(-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 0)\}$
- 4- $\{(1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$

حل:

5- این ست یک تابع را نشان می‌دهد زیرا هر عنصر از ناحیه‌ی تعریف (Domain) فقط به یک عنصر از ناحیه‌ی قیمت‌ها (Range) ارتباط دارد.

$$Dom = \{1, 3, 5\}, \quad Range = \{2, 4, 5\}$$

6- این ست یک تابع نمی‌باشد زیرا عناصر 3 و 4 دو تصویر دارند. $Dom = \{3, 4\}, \quad Range = \{4, 5\}$

7- این ست یک تابع را نشان می‌دهد زیرا هر عنصر از ناحیه‌ی تعریف (Domain) فقط به یک عنصر از ناحیه‌ی قیمت‌ها (Range) ارتباط دارد.

$$Dom = \{-3, -2, -1, 0\}, \quad Range = \{-3, -2, -1, 0\}$$

8- این ست یک تابع نیست زیرا عنصر 1 از ناحیه‌ی تعریف با سه عنصر ناحیه‌ی قیمت‌ها ارتباط دارد.

$$Dom = \{1\}, \quad Range = \{4, 5, 6\}$$

36- اگر $g(x) = x^2 + 2x + 3$ باشد. $g(-1)$ ، $g(-x)$ و $g(x+5)$ را دریابید.

حل:

$$g(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$g(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = \boxed{2}$$

$$g(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 3 = \boxed{x^2 - 2x + 3}$$

$$g(x+5) = (x+5)^2 + 2(x+5) + 3 = x^2 + 10x + 25 + 2x + 10 + 3 = \boxed{x^2 + 12x + 38}$$

37- اگر $h(x) = x^4 + x^2 + 1$ باشد. $h(2)$ ، $h(-1)$ ، $h(-x)$ و $h(3a)$ را دریابید.

حل:

$$h(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$h(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 1 = \boxed{x^4 + x^2 + 1}$$

$$h(-1) = (-1)^4 + (-1)^2 + 1 = 1 + 1 + 1 = \boxed{3}$$

$$h(2) = (2)^4 + (2)^2 + 1 = 16 + 4 + 1 = \boxed{21}$$

$$h(3a) = (3a)^4 + (3a)^2 + 1 = \boxed{81a^4 + 9a^2 + 1}$$

38- ناحیه‌ی تعریف توابع ذیل را دریابید.

$$a) f(x) = 2x \Rightarrow \boxed{Domf(x) = \mathbb{R}}$$

$$b) f(x) = (x-3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x) = (x-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x-3} \Rightarrow Domf(x) = \boxed{[3, +\infty)}$$

$$c) f(x) = \sqrt{16-x^2} \quad 16-x^2 \geq 0 \Rightarrow (4-x)(4+x) \geq 0 \Rightarrow Domf(x) = \boxed{\{x / x \in \mathbb{R}, -4 \leq x \leq 4\}} = [-4, 4]$$

$$d) f(x) = \frac{2}{x^2-4} \quad \boxed{Domf(x) = \{x / x \in \mathbb{R}, x \neq 2, x \neq -2\}}$$

$$e) f(x) = \sqrt{\frac{3}{x^2+25}} \Rightarrow \boxed{Domf(x) = \mathbb{R}}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-4x-5} \Rightarrow Domf(x) = \boxed{\{x / x^2-4x-5 \geq 0, x \leq -1, x \geq 5\}} = (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$$

39- اگر $f(x) = \begin{cases} x+3 & : x < 0 \\ 4x+7 & : x \geq 0 \end{cases}$ باشد. $f(3)$ ، $f(0)$ و $f(-2)$ را دریابید.

حل:

$$f(0) = 4 \cdot 0 + 7 = 7$$

$$f(3) = 4 \cdot 3 + 7 = 12 + 7 = 19$$

$$f(-2) = -2 + 3 = 1$$

40- اگر $g(x) = \begin{cases} x+3 & : x \geq -3 \\ -(x+3) & : x < -3 \end{cases}$ باشد. $g(0)$ ، $g(-6)$ و $g(-3)$ را دریابید.

حل:

$$g(0) = 0 + 3 = 3$$

$$g(-6) = -(-6 + 3) = -(-3) = 3$$

$$g(-3) = -3 + 3 = 0$$

41- اگر $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & : x \neq 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$ باشد، $h(3)$ ، $h(0)$ و $h(5)$ را دریابید.

حل:

$$h(3) = 6$$

$$h(0) = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$h(5) = \frac{5^2 - 9}{5 - 3} = \frac{25 - 9}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

42- کدام یک از معادله‌های زیر یک تابع را تعریف می‌کند:

$$\begin{array}{lll} x + y = 16 & , & x^2 + y = 16 \\ x = y^2 & , & y = \sqrt{x+4} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 16 \\ x + y^3 = 8 \end{array}$$

حل:

$x + y = 16$ یک تابع است.

$x^2 + y = 16$ یک تابع است.

$x^2 + y^2 = 16$ یک تابع نیست.

$x = y^2$ یک تابع است.

$y = \sqrt{x+4}$ یک تابع نیست.

$x + y^3 = 8$ یک تابع است.

43- در توابع زیر کدام یک تابع طاق، کدام یک جفت و کدام یک نه تابع جفت و نه طاق می باشد؟

$$a) f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, \quad b) f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad c) f(x) = \frac{2}{x-6}$$

حل:

$$a) f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 5 \Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \text{یک تابع جفت است:}$$

$$b) f(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 1 = x^2 - 2x - 1 \quad \text{نه جفت است و نه طاق زیرا:}$$

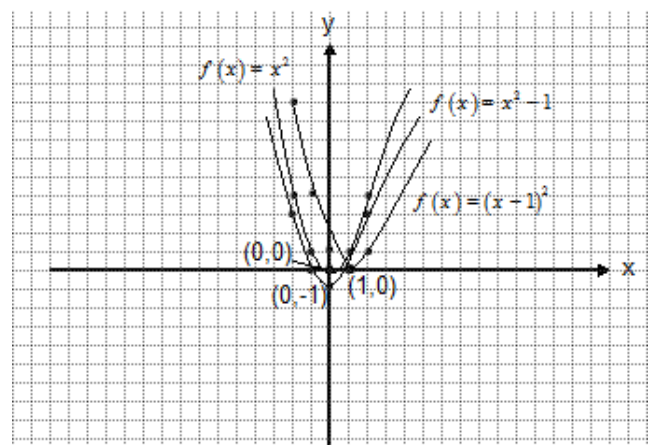
$$c) f(x) = \frac{2}{x-6}$$

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)-6} = \frac{2}{-x-6} \quad \text{این تابع نیز نه جفت است و نه طاق زیرا:}$$

44- گراف های توابع $f(x) = x^2 - 1$ و $f(x) = (x-1)^2$ را رسم و با گراف $f(x) = x^2$ مقایسه کنید.

حل:

x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4
x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = x^2 - 1$	-1	0	0	3	3
x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = (x-1)^2$	1	0	4	1	9



در رسم فوق واضح مشاهده می شود که اگر گراف تابع $f(x) = x^2$ به اندازه ی یک واحد به طور عمودی پایین انتقال کند گراف

تابع $f(x) = x^2 - 1$ حاصل می شود و اگر به اندازه ی یک واحد طور افقی به طرف راست انتقال کند گراف تابع

$f(x) = (x-1)^2$ به دست می آید.

45- توابع زیر را دریابید و ناحیه‌ی تعریف هریک را تعیین کنید. $\left(\frac{f}{g}\right)$ و $(f \cdot g)$, $(f - g)$, $(f + g)$

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= 4x - 1, & g(x) &= 6x + 3 \\ b) \quad f(x) &= \sqrt{2x + 5}, & g(x) &= \sqrt{4x - 9} \\ c) \quad f(x) &= 4x^2 - 11x + 2, & g(x) &= x^2 + 5 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= 4x - 1, & g(x) &= 6x + 3 \\ (f + g) &= 4x - 1 + 6x + 3 = 10x + 2 \Rightarrow \text{dom}(f + g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \\ (f - g) &= 4x - 1 - 6x - 3 = -2x - 4 \Rightarrow \text{dom}(f - g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \\ (f \cdot g) &= (4x - 1)(6x + 3) = 24x^2 + 6x - 3 \Rightarrow \text{dom}(f \cdot g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \\ \left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{4x - 1}{6x + 3} \Rightarrow \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{dom}f \cap \text{dom}g \setminus \{x \mid g(x) \neq 0\} \\ 6x + 3 &= 0 \Rightarrow 6x = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) &= \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{aligned}$$

$$b) f(x) = \sqrt{2x+5}, \quad g(x) = \sqrt{4x-9}$$

$$(f+g) = \sqrt{2x+5} + \sqrt{4x-9}$$

$$\text{dom}f = \left\{ x / 2x+5 \geq 0, 2x \geq -5 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2} \right\} = \left[-\frac{5}{2}, \infty \right)$$

$$\text{dom}g = \left\{ x / 4x-9 \geq 0, 4x \geq 9 \Rightarrow x \geq \frac{9}{4} \right\} = \left[\frac{9}{4}, \infty \right)$$

$$\text{dom}(f+g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \left[-\frac{5}{2}, \infty \right) \cap \left[\frac{9}{4}, \infty \right) = \left[\frac{9}{4}, \infty \right)$$

$$(f-g) = \sqrt{2x+5} - \sqrt{4x-9}$$

$$\text{dom}(f-g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \left[-\frac{5}{2}, \infty \right) \cap \left[\frac{9}{4}, \infty \right) = \left[\frac{9}{4}, \infty \right)$$

$$(f \cdot g) = (\sqrt{2x+5})(\sqrt{4x-9}) = \sqrt{8x^2+2x-45}$$

$$\text{dom}(f \cdot g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \left[-\frac{5}{2}, \infty \right) \cap \left[\frac{9}{4}, \infty \right) = \left[\frac{9}{4}, \infty \right)$$

$$\left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{4x-9}} = \sqrt{\frac{2x+5}{4x-9}}$$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{9}{4}, \infty \right)$$

$$c) f(x) = 4x^2 - 11x + 2, \quad g(x) = x^2 + 5$$

$$(f+g) = 4x^2 - 11x + 2 + x^2 + 5 = 5x^2 - 11x + 7 \Rightarrow \text{dom}(f+g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f-g) = 4x^2 - 11x + 2 - (x^2 + 5) = 3x^2 - 11x - 3 \Rightarrow \text{dom}(f-g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g) = (4x^2 - 11x + 2)(x^2 + 5) = 4x^4 - 11x^3 + 22x^2 + 55x + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{dom}(f \cdot g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g} \right) = \frac{4x^2 - 11x + 2}{x^2 + 5} \Rightarrow \text{dom}f = \mathbb{R}, \text{dom}g = \mathbb{R} \Rightarrow \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}$$

چون مخرج به هیچ قیمت صفر نمی‌شود از این رو دومین آن تمامی اعداد حقیقی می‌باشد.

46- اگر $f(x) = 4x^2 - 2x$ و $g(x) = 8x + 1$ باشد؛ پس:

$$(f+g)(3), \quad (f+g)(-5), \quad (f \cdot g)(4) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(4), \quad (f \circ g)(2), \quad (g \circ f)(-5)$$

را دریابید.

حل:

$$(f+g) = 4x^2 - 2x + 8x + 1 = 4x^2 + 6x + 1 \Rightarrow (f+g)(3) = 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + 1 = 36 + 18 + 1 = 55$$

$$(f+g)(-5) = 4 \cdot (-5)^2 + 6(-5) + 1 = 100 - 30 + 1 = 71$$

$$(f \cdot g) = (4x^2 - 2x)(8x + 1) = 32x^3 - 12x^2 - 2x \Rightarrow (f \cdot g)(4) = 32(4)^3 - 12(4)^2 - 2(4) \\ = 2048 - 192 - 8 = 1848$$

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{4x^2 - 2x}{8x + 1} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{4(4)^2 - 2(4)}{8(4) + 1} = \frac{64 - 8}{32 + 1} = \frac{56}{33}$$

$$(f \circ g) = f(8x + 1) = 4(8x + 1)^2 - 2(8x + 1) = 4(64x^2 + 16x + 1) - 16x - 2 \\ = 256x^2 + 64x + 4 - 16x - 2 = 256x^2 + 48x + 2$$

$$(f \circ g)(2) = 256(2)^2 + 48(2) + 2 = 1024 + 96 + 2 = 1122$$

$$(g \circ f) = g(4x^2 - 2x) = 8(4x^2 - 2x) + 1 = 32x^2 - 16x + 1$$

$$(g \circ f)(-5) = 32(-5)^2 - 16(-5) + 1 = 800 + 80 + 1 = 881$$

47- $(f \circ g)$ و $(g \circ f)$ را دریابید اگر:

$$a) f(x) = 8x + 12, \quad g(x) = 3x - 1$$

$$b) f(x) = 5x + 3, \quad g(x) = -x^2 + 4x + 3$$

$$c) f(x) = -x^3 + 2, \quad g(x) = 4x$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2$$

$$e) f(x) = \sqrt{x+2}, \quad g(x) = 8x^2 - 6$$

حل:

$$a) f(x) = 8x + 12, \quad g(x) = 3x - 1$$

$$(fog)(x) = f(3x - 1) = 8(3x - 1) + 12 = 24x - 8 + 12 = 24x + 4$$

$$(gof)(x) = g(8x + 12) = 3(8x + 12) - 1 = 24x + 36 - 1 = 24x + 35$$

$$b) f(x) = 5x + 3, \quad g(x) = -x^2 + 4x + 3$$

$$(fog)(x) = f(-x^2 + 4x + 3) = 5(-x^2 + 4x + 3) + 3 = -5x^2 + 20x + 15 + 3 = -5x^2 + 20x + 18$$

$$(gof)(x) = g(5x + 3) = -(5x + 3)^2 + 4(5x + 3) + 3 = -(25x^2 + 30x + 9) + 20x + 12 + 3 = -25x^2 - 10x + 6$$

$$c) f(x) = -x^3 + 2, \quad g(x) = 4x$$

$$(fog)(x) = f(4x) = -(4x)^3 + 2 = -64x^3 + 2$$

$$(gof)(x) = g(-x^3 + 2) = 4(-x^3 + 2) = -4x^3 + 8$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2$$

$$(fog)(x) = f(x^2) = \frac{1}{x^2}$$

$$(gof)(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

$$e) f(x) = \sqrt{x+2}, \quad g(x) = 8x^2 - 6$$

$$(fog)(x) = f(8x^2 - 6) = \sqrt{8x^2 - 6 + 2} = \sqrt{8x^2 - 4} = \sqrt{4(2x^2 - 1)} = 2\sqrt{2x^2 - 1}$$

$$(gof)(x) = g(\sqrt{x+2}) = 8(\sqrt{x+2})^2 - 6 = 8(x+2) - 6 = 8x + 16 - 6 = 8x + 10$$

48- با در نظر داشت گراف تابع $y = f(x)$ بگویید که گراف تابع $y = f(x) - 5$ به اندازه‌ی 5 واحد:

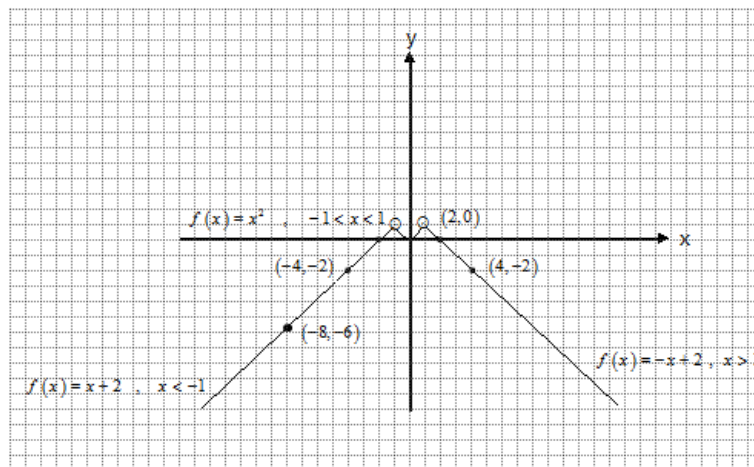
a) به طرف پایین انتقال شده است b) به طرف بالا انتقال شده است

c) به طرف راست انتقال شده است d) به طرف چپ انتقال شده است.

49- اگر $f(x)$ طور زیر تعریف شده باشد، گراف آن را رسم و ناحیه‌های تعریف و قیمت‌های آن را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & x > 1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x+2 & x < -1 \end{cases}$$

حل: به هر تابع طبق شرایط داده شده‌ی قیمت‌ها، گراف آن را قرار ذیل ترسیم و ناحیه‌های تعریف و قیمت‌های آن‌ها را تعیین می‌داریم:



$$\text{dom}f(x) = \{x / x \in \mathbb{R}, x \neq -1, x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

50- ساحه‌ی تعریف و ساحه‌ی قیمت‌های تابع $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ را تعیین کنید.

حل:

$$\text{ساحه‌ی تعریف: } \text{dom}f(x) = \{x / x \in \mathbb{R}, x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

ساحه‌ی قیمت‌ها:

$$yx + y = 2x \Rightarrow y = 2x - yx \Rightarrow y = (2 - y)x \Rightarrow x = \frac{y}{2 - y}$$

$$\text{Rang}f(x) = \{y / y \in \mathbb{R}, y \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

51- ساحه‌ی تعریف و ساحه‌ی قیمت‌های تابع $f(x) = \sqrt{2x-1}$ را تعیین کنید.

حل:

$$\text{dom}f(x) = \left\{ x / x \in \mathbb{R}, x \geq \frac{1}{2} \right\} = \left[\frac{1}{2}, \infty \right)$$

$$\text{Rang}f(x) = y \geq 0 \vee [0, \infty)$$

52- ساحه‌های تعریف توابع ناطق زیر را دریابید و اگر مجانب عمودی داشته باشند، معادله‌های مجانب‌های عمودی را نیز به دست آورید.

$$f(x) = \frac{5x}{x-4} \Rightarrow \text{dom}f(x) = \mathbb{R} - \{4\}, \quad x = 4$$

$$g(x) = \frac{7x}{x-8} \Rightarrow \text{dom}f(x) = \mathbb{R} - \{8\}, \quad x = 8$$

$$h(x) = \frac{x+8}{x^2-64} \Rightarrow \text{dom}f(x) = \mathbb{R} - \{-8, 8\}, \quad x_1 = -8 \wedge x_2 = 8$$

$$f(x) = \frac{x+8}{x^2+64} \Rightarrow \text{dom}f(x) = \mathbb{R}, \quad x = \phi$$

$$g(x) = \frac{x+7}{x^2-49} \Rightarrow \text{dom}f(x) = \mathbb{R} - \{-7, 7\}, \quad x_1 = -7 \wedge x_2 = 7$$

$$h(x) = \frac{x+7}{x^2-36} \Rightarrow \text{dom}f(x) = \mathbb{R} - \{-6, 6\}, \quad x_1 = -6 \wedge x_2 = 6$$

53- گراف‌های توابع $f(x) = x^2 + 2$, $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^2 - 1$ و $f(x) = x^2 - 2$ را در عین سیستم کمیات وضعیه رسم و با گراف تابع $f(x) = x^2$ مقایسه کنید.

حل: برای هریک از توابع فوق قیمت‌های متعدد داده آن‌ها را ترسیم می‌داریم. قرار ذیل:

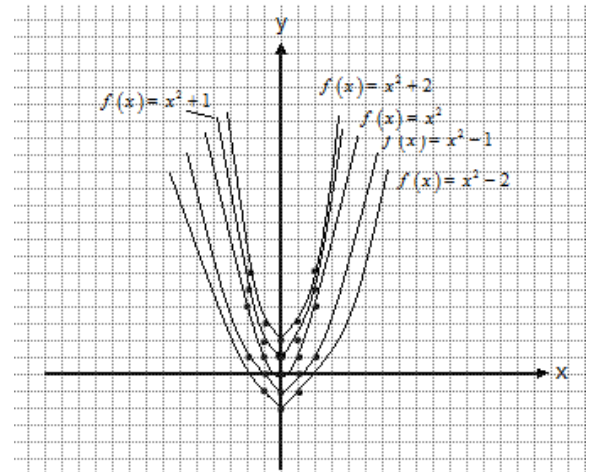
x	0	1	2	-2	-1
$f(x) = x^2$	0	1	4	4	1

x	0	1	2	-2	-1
$f(x) = x^2 + 1$	1	2	5	5	2

x	0	1	2	-2	-1
$f(x) = x^2 - 1$	-1	0	1	1	0

x	0	1	2	-2	-1
$f(x) = x^2 + 2$	2	3	6	6	3

x	0	1	2	-2	-1
$f(x) = x^2 - 2$	-2	-1	2	2	-1



نتیجه: اگر گراف تابع $f(x) = x^2$ به قدر دو واحد به طرف بالا انتقال نماید تابع $f(x) = x^2 + 2$ ، اگر یک واحد به طرف بالا انتقال شود گراف $f(x) = x^2 + 1$ ، اگر یک واحد به طرف پایین انتقال شود گراف $f(x) = x^2 - 1$ و اگر دو واحد به طرف پایین انتقال یابد گراف $f(x) = x^2 - 2$ حاصل می‌شود.

54- کمیات وضعیهی رأس‌ها و معادله‌های تناظر توابع درجه دوم زیر را دریابید.

$$y = (x - 2)^2, \quad y = (x + 3)^2 - 4$$

حل:

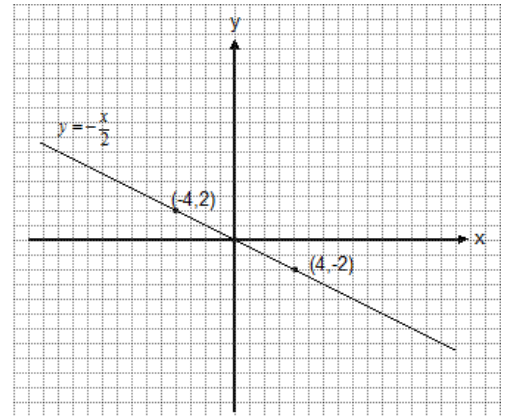
در تابع $y = (x - 2)^2$ کمیات وضعیهی رأس آن عبارت از $(2, 0)$ و معادلهی محور تناظر آن $x = 2$ می‌باشد.

در تابع $y = (x + 3)^2 - 4$ کمیات وضعیهی رأس عبارت از $(-3, -4)$ و معادلهی محور تناظر آن $x = -3$ می‌باشد.

55- گراف تابع $y = -\frac{x}{2}$ را رسم کنید.

حل: گراف تابع مذکور یک خط مستقیم است که با مشخص ساختن دو نقطه‌ی آن می‌توانیم آن را قرار ذیل ترسیم نماییم:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ x = 4 \Rightarrow y = -2 \\ x = -4 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$



56- مجانب عمودی و مایل تابع $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 2}$ را دریابید.

حل:

مجانب عمودی آن : $x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

مجانب مایل آن : $(x^2 - 5) \div (x + 2) \Rightarrow \boxed{y = x - 2}$

57- معادله‌ی مجانب افقی $h(x) = \frac{x+1}{x-4}$ عبارت است از:

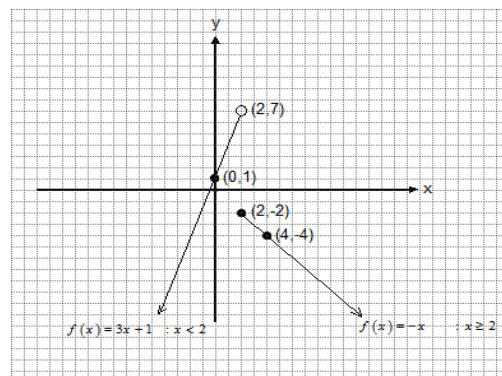
$y = -1$ (a) $y = 1$ (b) ✓ $y = -\frac{1}{4}$ (c) $y = 4$ (d)

58- گراف تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & : x < 2 \\ -x & : x \geq 2 \end{cases}$ را رسم کنید.

حل: گراف هر دو جزء تابع مذکور خط مستقیم می‌باشد که قرار ذیل آن را ترسیم می‌داریم:

$$\begin{cases} 3x+1 & : x < 2 \\ x=2 \Rightarrow f(x) = y=7 \\ x=0 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

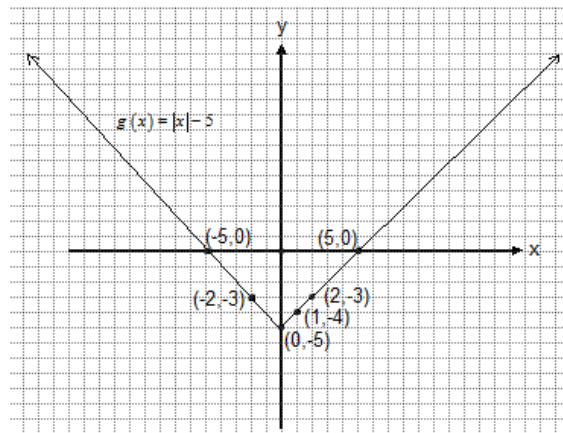
$$\begin{cases} -x & : x \geq 2 \\ x=2 \Rightarrow f(x) = y=-2 \\ x=4 \Rightarrow y=-4 \end{cases}$$



59- گراف تابع $g(x) = |x| - 5$ را رسم و ناحیهی قیمت‌های این تابع را مشخص کنید.

حل: در تابع مذکور قیمت‌های لازم را که برای گراف ضرورت است وضع نموده گراف آن را قرار ذیل ترسیم می‌داریم:

x	0	1	2	-2	-5	5
$g(x) = x - 5$	-5	-4	-3	-3	0	0



60- در ناحیهی قیمت‌های تابع علامه‌ی کدام اعداد شامل می‌باشد؟

حل: در ناحیهی قیمت‌های تابع علامه‌ی (sign function) اعداد $\{-1, 0, 1\}$ شامل می‌باشند یعنی: $Rang\ sign = \{-1, 0, 1\}$

61- معکوس هریک از توابع زیر را دریابید و نیز نشان دهید که $f(f^{-1}(x)) = x$ می‌باشد.

$$f(x) = \frac{1}{8}x, \quad f(x) = 8x - 1, \quad f(x) = x^2 + 6$$

$$f(x) = \frac{4x+6}{5}, \quad f(x) = x^3 - 1$$

حل:

$$f(x) = y = \frac{1}{8}x \Rightarrow x = \frac{1}{8}y \Rightarrow y = 8x \Rightarrow f^{-1}(x) = 8x \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(8x) = \frac{1}{8}(8x) = \boxed{x}$$

$$f(x) = y = 8x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{8} \Rightarrow y = 8x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{8} \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+1}{8}\right) = 8\left(\frac{x+1}{8}\right) - 1 = \boxed{x}$$

$$f(x) = y = x^2 + 6 \Rightarrow x = \sqrt{y-6} \Rightarrow y^2 = x - 6. \text{ معکوس این تابع، تابع نمی‌باشد.}$$

$$f(x) = y = \frac{4x+6}{5} \Rightarrow x = \frac{4y+6}{5} \Rightarrow 4y = 5x-6 \Rightarrow y = \frac{5x-6}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5x-6}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{5x-6}{4}\right) = \frac{4\left(\frac{5x-6}{4}\right)+6}{5} = \frac{5x-6+6}{5} = \frac{5x}{5} = \boxed{x}$$

$$f(x) = y = x^3 - 1 \Rightarrow x = y^3 - 1 \Rightarrow y^3 = x+1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x+1}) = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = x+1-1 = \boxed{x}$$

62- آیا تابع $g(x) = x^2$ معکوس پذیر می باشد (معکوس آن نیز یک تابع می باشد).

حل:

$$g(x) = y = x^2 \Rightarrow x = y^2 / \sqrt{}$$

$$y = \pm\sqrt{x} \vee g^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$$

به وضاحت دیده می شود که $g^{-1}(x)$ یک تابع نمی باشد، زیرا اگر $x = -2$ ، $x = 2$ باشد در این صورت

$$g(2) = g(-2) = 4 \quad \text{یک تابع معکوس پذیر نبوده، یعنی معکوس آن تابع نمی باشد.}$$

63- اگر $(fog)(x) = (gof)(x)$ باشد تابع f با g چی رابطه دارد؟

حل: اگر $(fog)(x) = (gof)(x)$ باشد تابع g معکوس تابع f می باشد.

64- کمیات وضعیهی نقاط تقاطع گراف تابع $g(x) = 3 - \frac{3}{2}x$ با محورهای x و y را دریابید.

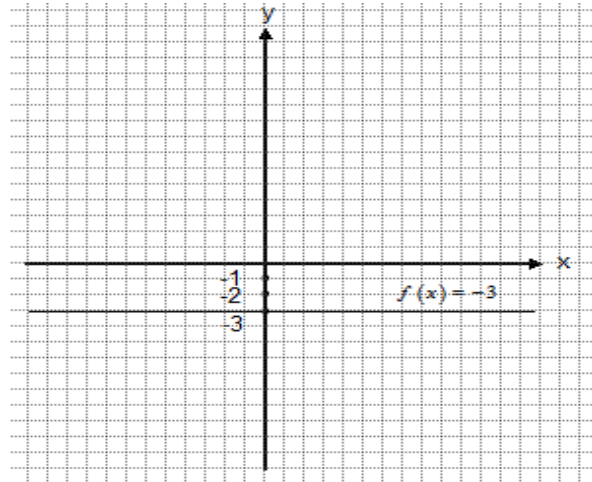
حل:

$$g(x) = y = 3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 3 - \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0) : x \text{ تقاطع با محور}$$

$$g(x) = y = 3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 3 - \frac{3}{2}(0) y = 3 - 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (0, 3) : y \text{ تقاطع با محور}$$

65- گراف تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید.

حل :



66- کمیات وضعیهی نقطه‌ی رأس گراف تابع $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ را دریابید.

حل: کمیات وضعیهی نقطه‌ی رأس توسط رابطه‌ی $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ دریاف می‌گردد. قرار ذیل:

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{4}{2 \cdot 2}, \frac{4(2)(5) - (4)^2}{4 \cdot 2}\right) = \left(-\frac{4}{4}, \frac{40-16}{8}\right) = (-1, 3)$$

67- در عین سیستم کمیات وضعیه گراف‌های توابع $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ، $f(x) = 3x^2$ ، $f(x) = 2x^2$ و $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ را

رسم و با گراف $f(x) = x^2$ مقایسه کنید.

حل: به هریک از توابع فوق قیمت‌های متعدد لازمه را داده و قرار ذیل به ترسیم آن می‌پردازیم:

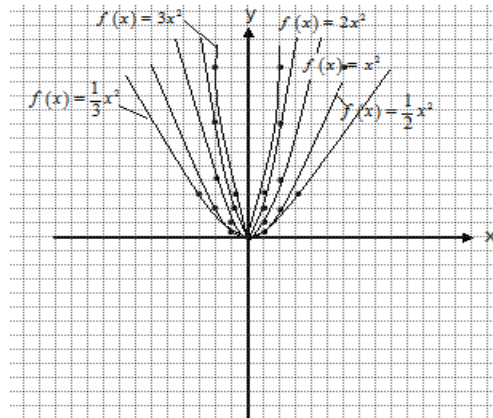
x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = 2x^2$	0	2	2	8	8

x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = 3x^2$	0	3	3	12	12

x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$	0	0.5	0.5	2	2

x	0	3	-3	6	-6
$f(x) = \frac{1}{3}x^2$	0	3	3	12	12



68- مجانب مایل تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ عبارت است از:

$$y = x + 1 \quad (c)$$

$$y = x - 1 \quad (b)$$

$$y = x \quad (a)$$

مأخذ:

این ممد درسی با همکاری کتابخانه درخت دانش به شما اهداء گردیده است.

www.ddl.af



Darakht-e Danesh Information



@AfghanOERs

