

Kankor Widget

ابزار کانکور

جدیدترین تکنالوژی آموزشی در سطح کشور

حرکت دایروی





فهرست مطالب

1	حرکت دایروی
1	سرعت خطی
1	حرکت دایروی یکنواخت
2	تعمیل زاویوی
4	رابطه بین سرعت خطی و سرعت زاویوی
5	رابطه بین تعمیل زاویوی و تعمیل خطی
5	حرکت دایروی با تعمیل یکنواخت
6	مثال ها
8	سوالات
9	منابع
10	مأخذ

حرکت دایروی

اهدایکننده: ابزار کانکور

منبع: کتابخانه درخت دانش

جواز / دارنده حق چاپ: دامنه عمومی / CC0

حرکت دایروی

سرعت خطی

در حرکت های دایروی جسم بر علاوه اینکه زاویه مرکزی α را در زمان t طی می کند قوسی را نیز بالای محیط دایره می پیماید، لذا سرعت خطی عبارت از قوس پیموده شده در واحد زمان است. اگر قوس پیموده شده را به S و سرعت خطی را به V نشان دهیم داریم:

$$V = \frac{S}{t} \dots\dots\dots(1)$$

سرعت خطی به واحد $\frac{cm}{sec}$, $\frac{m}{sec}$ اندازه می گردد.

حرکت دایروی یکنواخت

رابطه ریاضی که به واسطه آن می توانیم نوعیت حرکت را مشخص سازیم به نام معادله حرکت یاد می گردد. حرکت دایروی را می توانیم با داشتن معادله حرکت مشخص نماییم. فرض می کنیم که جسمی بر روی محیط دایره ایی با شعاع r در لحظه t در مرکز دایره زاویه α را تشکیل داده باشد که به مقابل زاویه مذکور قوس پیموده شده s بالای محیط دایره قرار دارد پس داریم:

$$S = \alpha \cdot R$$

$$\alpha = \omega \cdot t$$

$$S = R \cdot \omega \cdot t \dots\dots\dots(2)$$

در حرکت های یکنواخت سرعت متوسط و سرعت لحظوی با هم مساوی است.

معادلات 1 و 2 معادله حرکت دایروی یکنواخت را نشان می دهد. که تابع درجه اول از زمان است با استفاده از رابطه 1 می توان سرعت خطی جسم متحرک را چنین بدست آورد:

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\omega t)}{dt}$$

$$V = R \cdot \omega \dots\dots\dots(3)$$

تعییل زاویوی

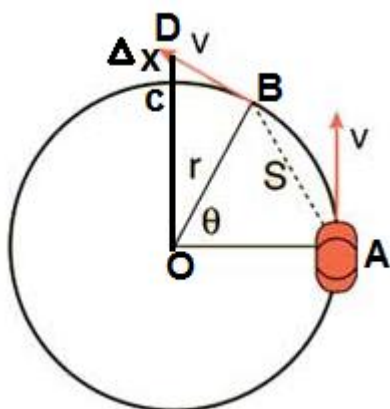
هرگاه سرعت زاویوی یک جسم نظر به زمان ثابت نباشد در آن صورت جسم مذکور دارای تعییل زاویوی $\bar{a}$ می‌باشد اگر متحرک روی مسیر دایروی در زمان t_1 دارای سرعت زاویوی ω_1 و در زمان t_2 دارای سرعت زاویوی ω_2 باشد در آن صورت تعییل زاویوی متوسط جسم مذکور عبارت است از :

$$\bar{a}_\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \dots\dots\dots(4)$$

از این‌جا تعییل زاویوی لحظوی عبارت است از:

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \dots\dots\dots(5)$$

برای دریافت قیمت شتاب زاویوی، دایره با شعاع R را طوری در نظر گرفته که جسمی بالای محیط آن با سرعت زاویوی ω بعد از گذشت زمان قوس S را طی نموده و از نقطه A به نقطه B برسد، قرار شکل (۱) هرگاه در نقطه B



بالای جسم مذکور عامل خارجی عمل نکند، جسم به حرکت منظم با سرعت خطی v به حرکت خود ادامه خواهد داد و بعد از گذشت زمان Δt به نقطه d خارج از محیط دایره می‌رسد. ولی در عمل دیده می‌شود، که جسم بر روی محیط دایره باقی می‌ماند. بنابر آن بالای جسم مذکور عامل خارجی اثر نموده تا فاصله Δx را با حرکت تعییلی پیموده و به نقطه c محیط دایره کشانیده می‌شود لذا فاصله bd را توسط معادله:

$$BD = v \cdot \Delta t \dots\dots\dots(6)$$

طی می‌کند و فاصله Δx را از معادله:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_\omega \cdot \Delta t^2 \dots\dots\dots(7)$$

می‌پیماید.

تصویر (۱) حرکت یک متحرک را روی مسیر دایروی نشان می‌دهد.

اگر قیمت Δt را از معادله ۶ در معادله ۷ وضع نماییم می‌یابیم که :

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_{\omega} \cdot \frac{BD^2}{V^2}$$

$$a_{\omega} = \frac{2\Delta x \cdot v^2}{BD^2} \dots\dots\dots(8)$$

از مثلث OBD داریم :

$$BD^2 = OD^2 - OB^2$$

$$BD^2 = (R + \Delta x)^2 - R^2 = R^2 + 2R\Delta x + \Delta x^2 - R^2$$

چون Δx بسیار کوچک است بنابراین از حد Δx^2 صرف نظر نموده می‌توانیم پس:

$$BD^2 = 2R \cdot \Delta x$$

اگر قیمت BD^2 را در رابطه ۸ وضع نماییم رابطه ذیل حاصل می‌گردد:

$$a_{\omega} = \frac{2\Delta x \cdot v^2}{2R\Delta x} = \frac{v^2}{R} \dots\dots\dots(9)$$

چون

$$a_{\omega} = R \cdot \omega^2 \dots\dots\dots(10)$$

مثال ۱) با استفاده از رابطه اخیر می‌توانیم تعجیل مهتاب را به حول زمین حساب نماییم. چون مدار حرکت مهتاب به حول زمین تقریباً دایروی می‌باشد. که شعاع مسیر دایره آن عبارت است از:

$$R = 384.4 \times 10^3 km = 384.4 \times 10^{10} cm$$

همچنان زمان تناوب حرکت مهتاب به دور زمین مساوی به ۲۷ روز، ۷ ساعت، ۴۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه می‌باشد، یعنی
 $(t = 2.3606 \times 10^6 s)$ لذا داریم:

$$a_{\omega} = R\omega^2 = R \frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow a_{\omega} = \frac{4\pi^2 (3.844 \times 10^{10} \text{ cm})}{(2.3606 \times 10^6 \text{ s})^2}$$

$$\Rightarrow a_{\omega} = 0.273 \text{ cm/s}^2$$

با در نظر داشت قیمت فوق می‌توانیم سرعت خطی مهتاب به حول زمین را قرار ذیل محاسبه نمود:

$$v = \sqrt{R \cdot a_{\omega}} = \sqrt{3.844 \times 10^{10} \text{ cm} \cdot 0.273 \text{ cm/s}^2} \Rightarrow v = 1.023 \times 10^6 \text{ cm/s}$$

$$\Rightarrow v = 1.023 \text{ km/s}$$

رابطه بین سرعت خطی و سرعت زاویوی

قبلاً جسمی که بالای محیط دایره در حرکت دایروی باشد مطالعه نمودیم. حال می‌خواهیم رابطه بین این سرعت‌ها را دریافت کنیم میدانیم که:

$$v = R \cdot \omega \dots\dots\dots(11)$$

این معادله رابطه بین سرعت خطی v و سرعت زاویوی ω را نشان می‌دهد.

حال معادله حرکت را طوری در نظر می‌گیریم که جسم بر روی مسیر دایروی قوس کوچک Δs و یا زاویه کوچک $\Delta \alpha$ را طی کند لذا:

$$\Delta s = R \cdot \Delta \alpha \Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$$

در حالت حدی اگر $\Delta t \rightarrow 0$ در آن حالت می‌یابیم:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 + R \frac{d}{dt}(\omega t)$$

$$v = R \cdot \omega$$

رابطه بین تعجیل زاویوی و تعجیل خطی

فرض می‌کنیم که سرعت زاویوی جسم که در حال حرکت دورانی بالای مسیر دایروی است بین دو لحظه t_1 و t_2 به اندازه $\Delta\omega$ تغییر نماید. در این حالت سرعت خطی به اندازه Δv تغییر خواهد نمود.

$$\Delta v = R \cdot \Delta\omega$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{و یا}$$

در حالت حدی داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} &= R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \\ \frac{dv}{dt} &= R \cdot \frac{d\omega}{dt} \\ a_t &= R \cdot a_\omega \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

معادله اخیر رابطه بین تعجیل زاویوی و تعجیل خطی را نشان می‌دهد. تعجیل زاویوی را به نام تعجیل شعاعی نیز یاد می‌کنند، زیرا این تعجیل همیشه به جهت شعاع دایره بوده و به مرکز دایره موجه است. به همین ترتیب تعجیل خطی را به نام تعجیل مماسی نیز یاد می‌کنند، زیرا هم جهت و مماس به مسیر دایره است.

حرکت دایروی با تعجیل یکنواخت

هنگامی که در یک حرکت دایروی تغییرات سرعت زاویوی جسم نظر به زمان ثابت باشد، در آن حالت تعجیل زاویوی آن ثابت است. تحت این شرط تعجیل های زاویوی متوسط و لحظوی جسم با هم مساوی می‌باشند، پس داریم:

$$a = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \quad \dots\dots\dots(13)$$

اگر $t_1 = t_0$ زمان اولی، $\omega_1 = \omega_0$ سرعت زاویوی اولی و $\omega_2 = \omega$ سرعت زاویوی بعد از لحظه $t_2 = t$ باشد، در آن حالت رابطه (۱۳) به شکل ذیل تبدیل می‌گردد:

$$a = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}$$

$$\omega = \omega_0 + a(t - t_0) \dots\dots\dots(14)$$

اگر $t_0=0$ باشد، پس:

$$\omega = \omega_0 + a \cdot t \dots\dots\dots(15)$$

رابطه (۱۵) مطابقت با معادله $v = v_0 + a \cdot t$ حرکت خطی با تعجیل ثابت می‌نماید. در صورتی که تعجیل زاویوی ثابت باشد، می‌توان سرعت زاویوی متوسط $\bar{\omega}$ را قرار ذیل تعریف نمود:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \dots\dots\dots(16)$$

چون $(\alpha = \bar{\omega} \cdot t)$ است پس:

$$\alpha = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t \dots\dots\dots(17)$$

قیمت ω را از رابطه ۱۵ در رابطه ۱۷ وضع می‌نمایم، می‌یابیم:

$$\alpha = \frac{\omega_0 + \omega_0 + a \cdot t}{2} \cdot t$$

$$\alpha = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \dots\dots\dots(18)$$

مثال‌ها

سوال ۱) جسمی روی مسیر دایره به شعاع 2m به سرعت ثابت حرکت می‌نماید، اگر تعجیل آن 2 m/s^2 باشد سرعت زاویوی و سرعت خطی آن را دریابید؟

$$a_{\omega} = R \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{a_{\omega}}{R} = \frac{2m/s^2}{2m} \Rightarrow \omega = 1 \text{ Rad / sec}$$

$$v = R \cdot \omega \Rightarrow v = 2m \cdot 1 \text{ Rad / s} \Rightarrow v = 2m / s$$

سوال ۲) جسمی روی محیط دایره‌ای به شعاع 2m حرکت مشابه با سرعت زاویوی 10rad/s را اجرا می‌نماید. زمان تناوب، فریکونسی، سرعت خطی و تعجیل آن را دریافت نمایید؟

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3.14}{10} = \frac{6.28}{10} = 0.628 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.628} = 1.59 \text{ HZ}$$

$$V = R\omega = 2m \cdot 10 \text{ Rad / s} = 20m / s$$

$$a = r\omega^2 = 2m \cdot (10 \text{ Rad / s})^2 \Rightarrow a = 2m \cdot 100 (\text{Rad / s})^2 \Rightarrow a = 200m / s^2$$

سوال ۳) قطر پره یک باد پکه برقی 1.8m است اگر سرعت خطی آن 225m/s باشد فریکونسی آن را دریافت کنید؟

$$v = R \cdot \omega \Rightarrow v = R \cdot 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{v}{R \cdot 2\pi}$$

$$R = \frac{d}{2} = \frac{1.8}{2} = 0.9m$$

$$f = \frac{225m / \text{sec}}{0.9m \cdot 2 \cdot 3.14} = \frac{225}{5.652} \Rightarrow f = 39.8 \text{ Hz}$$

سوال ۴) سرعت انجام عقربه دقیقه گرد یک ساعت 0.5mm/s است. طول عقربه چقدر خواهد بود؟

$$\frac{0.5mm}{s} = \frac{0.5 \div 10cm}{\frac{1}{60} \text{ min}} = \frac{0.05 \cdot 60cm}{\text{min}} = 180cm / \text{min}$$

$$R = \frac{180}{2\pi} = \frac{180}{2 \cdot 3.14} = \frac{180}{6.28} = 28.66cm$$

سوالات

۱) چرخ روی محیط دایره به شعاع 3m به سرعت خطی 15m/s در حرکت است سرعت زاویوی آن را در یافت کنید؟

45Rad / s (4) 3Rad / s (3) 15Rad / s (2) 5Rad / s (1)

۲) سرعت چرخ از حالت سکون در مدت 15s به $30\pi \text{ Rad / s}$ می‌رسد، تعجیل زاویوی و تعجیل خطی را در محل دریابید که به فاصله 3cm از مرکز قرار داشته باشد؟

$(8\pi \text{ cm / s}^2)(2\pi \text{ rd / s}^2)$ (2) $(6\pi \text{ cm / s}^2)(3\pi \text{ rd / s}^2)$ (1)

$(2\pi \text{ cm / s}^2)(9\pi \text{ rd / s}^2)$ (4) $(6\pi \text{ cm / s}^2)(2\pi \text{ rd / s}^2)$ (3)

۳) کدام یک از گزینه های ذیل رابطه بین سرعت خطی و زاویوی را نشان می‌دهد؟

$V = R \cdot \omega^2$ (4) $V = R \cdot 2\omega$ (3) $V = R \cdot \omega$ (2) $V = \frac{R}{\omega}$ (1)

۴) رابطه $\left(\frac{v^2}{R}\right)$ کدام یکی از کمیت های ذیل را نشان می‌دهد؟

تعجیل زاویوی (1) سرعت زاویوی (2) تعجیل خطی (3) سرعت خطی (4)

۵) کدام یک از رابطه های ذیل درست می‌باشد؟

$\alpha = \omega_0 + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ (2) $\alpha = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t$ (1)

$\alpha = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ (4) $\alpha = \omega_0 \cdot t^2 + \frac{1}{2} a \cdot t$ (3)

۶) جسمی در مدت 10s به تعداد 20 دور می‌زند، فریکونسی حرکت را دریابید؟

0.5Hz (4) 150Hz (3) 200Hz (2) 2Hz (1)

منابع

(۱) فصل سوم، فزیک صنف یازدهم، نصاب جدید وزارت معارف افغانستان.

(۲) Fundamental of physic, Halliday, David, 8th edition, 2004, chapter 10

مأخذ:

این ممد درسی با همکاری کتابخانه درخت دانش به شما اهداء گردیده است.

www.ddl.af



Darakht-e Danesh Information



@AfghanOERs

