

# Kankor Widget ابزار کانکور

جدیدترین تکنالوژی آموزشی در سطح کشور

## حرکت دو بعدی





## فهرست مطالب

- 1.....حرکت دو بعدی
- 5.....سرعت لحظوی در حرکت دو بعدی
- 6.....تعییل متوسط در حرکت دو بعدی
- 8.....مأخذ

## حرکت دو بعدی

اهدا کننده: ابزار کانکور

منبع: کتابخانه درخت دانش

جواز/دارنده حق چاپ: دامنه عمومی / CC.0

## حرکت دو بعدی

حرکت های عمومی اجسام، مانند حرکت توپ شوت شده، حرکت طیاره در حال پرواز و یا حرکت مرمی سریع السیر همه مثال های از حرکت های پرتابی بوده که در دو بعد تشریح شده می توانند هرچند مقاومت هوا اکثراً مهم است، ولی در بسیاری حالات تأثیر آن قابل صرف نظر می باشد.

برای درک خبتر حرکت یک جسم در دوبعد، حرکت آنرا در سیستم کمیات وضعیه (X, Y) در نظر میگیریم سیستم کمیات وضعیه X, Y تحلیل و تجزیه حرکت دو بعدی را آسان و ساده می سازد به طور کلی، حرکت در دو بعد ترکیبی از دو حرکت یک بعدی در دو جهت مختلف X, Y می باشد.

وکتور موقعیت (مکان) در یک سطح با وکتور  $\vec{r}$  نمایش داده می شود این وکتور را می توان به صورت ذیل نوشت.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

که در آن  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  به ترتیب عبارت از وکتور واحد ها در جهت Y و X هستند.

وکتور های واحد: وکتور های اند که اندازه آنها یک واحد باشد تنها خاصیت آنها نشان دادن جهت در فضا است. در سیستم مختصات دوبعدی X, Y وکتور واحد به جهت محور X را  $\vec{i}$  و به جهت محور Y را  $\vec{j}$  نشان می دهند بنابراین وکتور موقعیت  $\vec{r}$  برحسب مرکبه های آن عبارت است از

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

چون هنگام حرکت جسم، وکتور مکان آن تغییر می کند، برای مشخص کردن مکان جسم، کافی است که مرکبه های X و Y را به صورت تابع هایی از زمان داشته باشیم.

$$x = f(t) \quad y = g(t) \dots \dots \dots 1$$

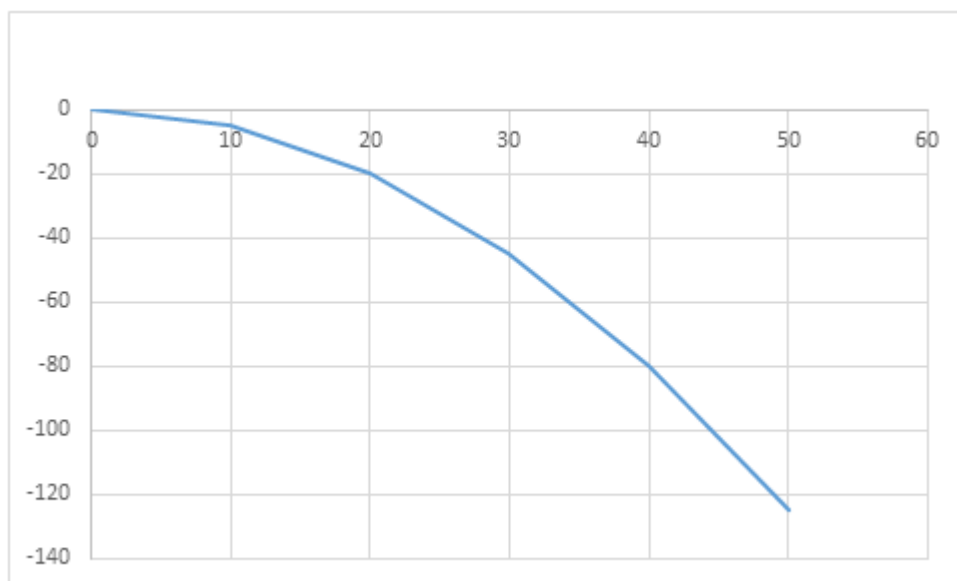
رابط ۱ معادله های حرکت یک جسم را در دو بعد نشان می دهند. واضع است که در حرکت دو بعدی، وکتور مکان نیز تابعی از زمان است. یعنی:

$$\vec{r} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$$

برای وضاحت دادن بیشتر موضوع لازم است که مثال ذیل را مدنظر بگیریم.

مثال: فرض کنید در یک مدت کوتاه معادله های حرکت سنگ پشت در سیستم SI به صورت  $x = 10t$ ، است مسیر حرکت این سنگ پشت را در انتوال زمانی ۰ تا ۵ ثانیه رسم کنید

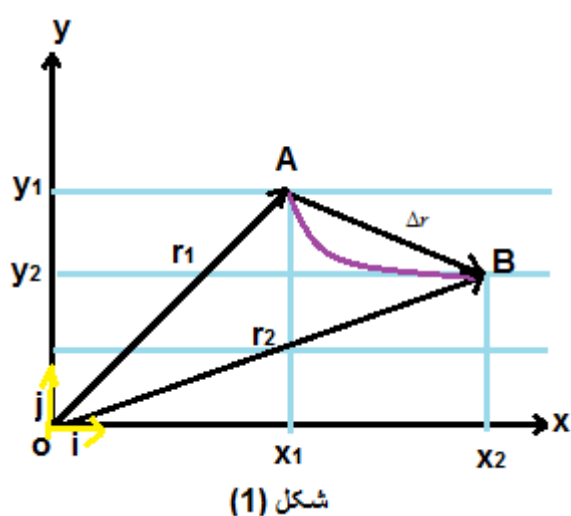
| t(sec)      | 0 | 1  | 2   | 3   | 4   | 5    |
|-------------|---|----|-----|-----|-----|------|
| $x = 10t$   | 0 | 10 | 20  | 30  | 40  | 50   |
| $y = -5t^2$ | 0 | 5- | 20- | 45- | 80- | 125- |



### تغییر مکان و سرعت متوسط در حرکت دو بعدی

برای بررسی تغییر مکان و سرعت متوسط در حرکت های دو بعدی، فرض کنید که متحرک در لحظه  $t_1$  در نقطه  $A$  یعنی مکان  $r_1$  و در لحظه  $t_2$  در نقطه  $B$  یعنی مکان  $r_2$  قرار داشته باشد مطابق به شکل (۱) وکتوری که از  $A$  به  $B$  رسم می شود تغییر مکان جسم در انتروال زمانی  $\Delta t = t_2 - t_1$  را نشان می دهد. این وکتور در شکل (۱) به  $\Delta r$  نشان داده شده است که از رابطه ذیل بدست می آید

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



مطابق به شکل وکتور های تغییر موقعیت مساوی است به:

$$\vec{r}_1 = x_1 + y_1$$

$$\vec{r}_2 = x_2 + y_2$$

بنابراین وکتور تغییر مکان چنین دریافت می گردد

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{\Delta r} = (x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)$$

$$\vec{\Delta r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

$$\vec{\Delta r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} \dots\dots\dots 2$$

سرعت متوسط یک جسم در یک انتروال زمانی معین مانند سرعت متوسط در حرکت یک بعدی چنین تعریف می شود.

نسبت تغییر مکان و زمان مربوطه آن را سرعت متوسط می نامند.

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

با استفاده از رابطه ۲ سرعت متوسط را می توان به صورت ذیل نوشت

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x\vec{i}}{\Delta t} + \frac{\Delta y\vec{j}}{\Delta t} \dots\dots\dots 3$$

مثال ۱: معادله حرکت یک جسم در سیستم  $x = 4t^2 - 2t$ ,  $y = t^2 + 4$  m.k.s است وکتور موقعیت (مکان) این جسم را  $t = 2$  sec پیدا کنید؟

$$x = 4t^2 - 2t$$

$$x = 4 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 4 \cdot 4 - 4 = 16 - 4 = 12$$

$$y = t^2 + 4 = 2^2 + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = 12\vec{i} + 8\vec{j}$$

مثال ۲:

فرض کنید در یک مدت کوتاه، معادله های حرکت یک خرگوش در سیستم SI به صورت  $x = 10t$ ,  $y = -2t^2$  است، سرعت متوسط این خرگوش را در انتروال زمانی ۰ تا ۲ ثانیه بدست آورید؟

$$x = 10t, y = -2t^2$$

$$x_1 = 10 \cdot 0 = 0$$

$$x_2 = 10 \cdot 2 = 20m$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 20 - 0 = 20m$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta t = 2 - 0 = 2 \text{ sec}$$

$$y_1 = -2 \cdot 0 = 0$$

$$y_2 = -2 \cdot 2^2 = -2 \cdot 4 = -8m$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = -8 - 0 = -8m$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j}$$

$$\vec{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} = \frac{20}{2} \vec{i} = 10 \vec{i}$$

$$\vec{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} = \frac{-8}{2} \vec{j} = -4 \vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{20}{2} \vec{i} + \frac{-8}{2} \vec{j} = 10 \vec{i} - 4 \vec{j}$$

مثال ۳: معادله حرکت دو بعدی یک جسم عبارت از  $x = 5t^2 + 3$ ,  $y = 6t^2 + 4$  می باشد و کتور سرعت متوسط آنرا بعد از  $t = 2 \text{ sec}$  دریافت کنید.

$$x = 5t^2 + 3, y = 6t^2 + 4$$

$$x_1 = 5 \cdot 0^2 + 3 = 3$$

$$x_2 = 5 \cdot 2^2 + 3 = 5 \cdot 4 + 3 = 23$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 23 - 3 = 20$$

$$y_1 = 6 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$$y_2 = 6 \cdot 2^2 + 4 = 6 \cdot 4 + 4 = 24 + 4 = 28$$

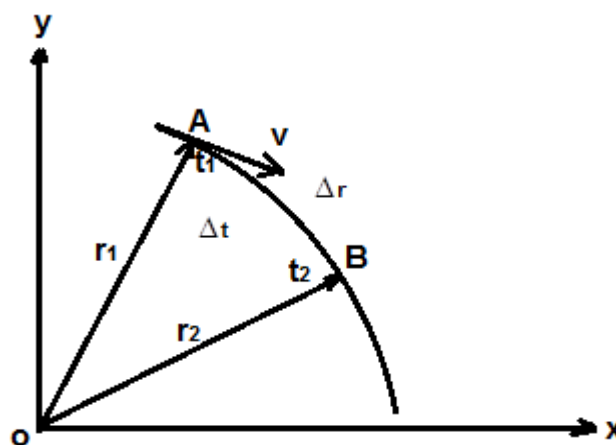
$$\Delta y = y_2 - y_1 = 28 - 4 = 24$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} = \frac{20}{2} \vec{i} + \frac{24}{2} \vec{j}$$

$$\vec{v} = 10 \vec{i} + 12 \vec{j}$$

## سرعت لحظی در حرکت دو بعدی

برای بررسی سرعت لحظه‌ای در حرکت دو بعدی، حرکت جسم را روی مسیر منحنی در نظر می‌گیریم. مطابق شکل ۳ موقعیت جسم در لحظه  $t_1$  در نقطه  $A$  و در لحظه  $t_2$  در نقطه  $B$  مشخص شده است. هنگامیکه انتروال زمانی  $\Delta t$  کوچک و کوچکتر می‌شود، سرعت متوسط را در این لحظه کوچک سرعت لحظه‌ای می‌نامند. از نگاهی ریاضی سرعت لحظه‌ای عبارت از لیمت سرعت متوسط است و قتیکه  $\Delta t$  به طرف صفر تقرب نماید یعنی:



شکل 3

$$\vec{v}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \dots\dots\dots 4$$

به عبارت دیگر می‌توان گفت که سرعت لحظه‌ای مشتق وکتور تغییر مکان جسم نسبت به زمان است. یعنی:

$$\vec{v}_t = \frac{d\vec{r}}{dt} \dots\dots\dots 5$$

بنابر آن با استفاده از رابطه ۵ می‌توان سرعت لحظه‌ای جسم را بر اساس مرکبه‌های آن در دو امتداد  $(x, y)$  بدست آورد یعنی:

$$\vec{v}_t = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}$$

چون وکتور سرعت متوسط با وکتور تغییر مکان در حرکت یک بعدی هم جهت است پس زمانی که  $\Delta t$  به طرف صفر تقرب می‌نماید، وکتور سرعت لحظه‌ای بر مسیر حرکت در نقطه  $A$  مماس خواهد شد. در نتیجه هنگامیکه جسم روی مسیر منحنی حرکت می‌کند جهت وکتور سرعت لحظه‌ای آن همیشه بر مسیر حرکت مماس است و جهت آن هر لحظه تغییر می‌کند.

مثال: معادله حرکت یک موتور در سیستم SI  $x = 4t^2 + 3$ ,  $y = 2t^2 + 2t$  داده شده اندازه سرعت لحظی موتور در  $t = 1 \text{ sec}$  مساوی است به

$$x = 4t^2 + 3$$

$$\vec{v}_x = 8t = 8 \cdot 1 = 8 \text{ m/sec}$$

$$y = 2t^2 + 2t$$

$$\vec{v}_y = 4t + 2 = 4 \cdot 1 + 2 = 4 + 2 = 6 \text{ m/sec}$$

$$\vec{v} = 8i + 6j$$

$$\vec{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{8^2 + 6^2}$$

$$\vec{v} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ m/sec}$$

مثال ۲: معادله حرکت جسمی که بر روی خط مستقیم حرکت می کند، در سیستم MKS به صورت  $x = 4t^2 + 2t + 3$  است بعد از دو ثانیه سرعت آن را محاسبه کنید؟

$$x = 4t^2 + 2t + 3$$

$$v_t = \frac{dx}{dt} = 8t + 2 = 8 \cdot 2 + 2 = 16 + 2$$

$$v_t = 18 \text{ m/sec}$$

### تعیین متوسط در حرکت دو بعدی

در حرکات متغیر سرعت جسم نظر به زمان ثابت نبوده ، بلکه نظر به زمان تغییر می کند این تغییرات سرعت نظر به زمان را به نام تعجیل جسم یاد می کنند به طور مثال: جسم روی مسیر منحنی در حرکت است . طوریکه در لحظه  $t_1$  سرعت آن  $v_1$  و در لحظه  $t_2$  سرعت آن  $v_2$  باشد در این جا دیده می شود که بین دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$  سرعت جسم روی مسیر منحنی ثابت نیست. تغییر سرعت می تواند به معنای تغییر در اندازه سرعت یا تغییر در جهت سرعت و یا هر دو باشد در حالیکه سرعت جسم تغییر نمی کند، مگر جهت سرعت آن هر لحظه در حال تغییر است پس جسم دارای تعجیل است

توسط مقدار تعجیل میتوان نوعیت حرکت غیر منظم را تعیین نمود. تعجیل متوسط در حرکت دوبعدی را می توان از رابطه ذیل دریافت نمود.

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

لذا تعجیل متوسط عبارت از تغییرات سرعت بر تغییرات زمان می باشد.

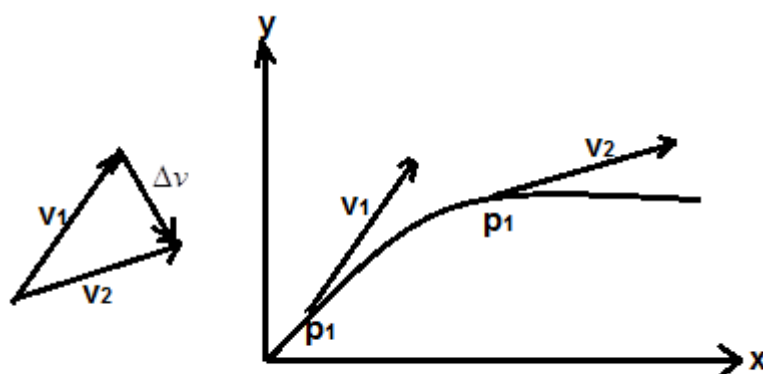
### تعیین لحظه ای در حرکت دو بعدی

عبارت از تعجیل جسم در یک زمان بینهایت کوچک  $\Delta t$  است . یا لمیت تعجیل متوسط است وقتی که  $\Delta t \rightarrow 0$  تقرب کند.

$$\vec{a}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

یا به عبارت دیگر تعجیل لحظه ای مشتق سرعت متوسط نظر به زمان و یا مشتق دو فاصله نظر به زمان است.

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(dr)}{dt(dt)} = \frac{d^2r}{dt^2}$$



شکل 4 تغییرات جهت وکتور سرعت را روی مسیر منحنی نشان می‌دهد

مثال ۱: سرعت یک جسم در حرکت دوبعدی  $v_x = 3 - t^2$ ،  $v_y = 2t^2 - 4t$  می‌باشد بعد از  $t = 1 \text{ sec}$  وکتور تعجیل آن عبارت است از:

$$v_x = 3 - t^2, v_y = 2t^2 - 4t$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2t = -2 \cdot 1 = -2i$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 4t - 4 = 4 \cdot 1 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$a_t = a_x i + a_y j = -2i + 0j = -2i$$

مثال ۲: معادله یک جسم در سیستم  $v = 3t^2 + 6t$  c.g.s است تعجیل جسم را بعد از چهار ثانیه در یافت کنید؟

$$v = 3t^2 + 6t$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 6t + 6 = 6 \cdot 4 + 6 = 24 + 6 = 30 \text{ cm/sec}^2$$

$$a_t = \frac{30}{100} \text{ m/sec}^2 = 0.3 \text{ m/sec}^2$$

## مأخذ:

این ممد درسی با همکاری کتابخانه درخت دانش به شما اهداء گردیده است.

[wwwddl.af](http://wwwddl.af)



Darakht-e Danesh Information



@AfghanOERs

