

Kankor Widget

ابزار کانکور

جدیدترین تکنالوژی آموزشی در سطح کشور

محاسبه مومنت عطالت





فهرست مطالب

1.....	محاسبه مومنت عطالت
12.....	مأخذ

محاسبه مومنت عطالت

اهدا کننده: ابزار کانکور

منبع: کتابخانه درخت دانش

جواز / دارنده حق چاپ: دامنه عمومی / CC.0

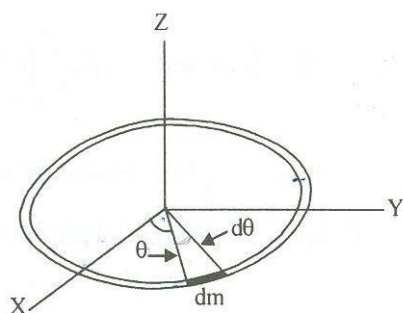
محاسبه مومنت عطالت

مومنت عطالت جسم دورانی موارد استعمال زیاد داشته و اکثراً در مسایل میخانیک از آن استفاده می‌گردد با استفاده از خواص تناظر اجسام می‌توان مومنت عطالت آن‌ها را به حول سه محور اساسی دریافت نمود.

(۱) مومنت عطالت حلقه دایروی

حلقه دایروی توسط دوران یک نقطه بحول یک محور ثابت ساخته می‌شود. فرض می‌نمائیم که حلقه دارای مساحت سطح مقطع معین a ، شعاع r و کثافت ρ بوده و متجانس باشد. حالت تناظر آنرا در نظر گرفته و محور Z را به امتداد محور دوران در نظر می‌گیریم، یعنی عمود بالای مستوی حلقه که از مرکز آن عبور می‌نماید، دو محور در مستوی حلقه قرار دارند قرار شکل (۱) زاویه θ نظر به محور (x) اندازه می‌شود. حجم عنصری را در نظر می‌گیریم که بین θ و $\theta + d\theta$ واقع است.

پس:



$$x = r \cdot \cos \theta, \quad y = r \cdot \sin \theta$$

$$dv = ar \cdot d\theta \quad \dots\dots\dots(1)$$

مومنت عطالت حلقه شکل (۱)

دایروی

مومنت عطالت بحول محورهای مختلف می‌تواند قرار ذیل دریافت گردد.

الف) بحول محور که عمود به مستوی حلقه بوده و از مرکز حلقه مذکور بگذرد یعنی I_z در این حالت کمیات وضعیه Z عناصر مختلف با انتخاب سیستم کمیات وضعیه اختیاری صفر است. پس:

$$\begin{aligned} I_z &= \int r^2 dm = \int \rho r^2 dv = \int_0^{2\pi} \rho r^2 \cdot ar d\theta = \rho r^3 a \int_0^{2\pi} d\theta \\ \Rightarrow I_z &= \rho r^3 a \left(\theta \Big|_0^{2\pi} \right) = \rho r^3 a (2\pi - 0) = 2\pi r^3 \rho a = 2\pi r \rho a \cdot r^2 = \underbrace{2\pi r a}_{V} \underbrace{\rho}_{M} \cdot r^2 = \rho V \cdot r^2 \\ I_z &= M \cdot r^2 \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

در حالیکه $M = 2\pi r a \rho$ کتله حلقه است. این رابطه را می‌توان با در نظر گرفتن حقیقت اینکه مومنت عطالت عبارت از مجموع حاصل ضرب کتله‌ها و مربع فاصله‌های آن‌ها از محور دوران است نیز دریافت نمود. برای حلقه در این حالت فاصله هر ذره از مرکز حلقه ثابت است لذا:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = r^2 \sum_{i=1}^n m_i = Mr^2 \dots\dots\dots(3)$$

ب) بحول محور که در مستوی حلقه واقع بوده و از مرکز آن عبور می‌نماید یعنی I_x یا I_y . مومنت عطالت به حول محور y عبارت است از :

$$\begin{aligned} I_x = I_y &= \int \rho x^2 dv = \int_0^{2\pi} \rho r^2 \cos^2 \theta \cdot ar d\theta \\ I_x = I_y &= \rho ar^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \rho ar^3 \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta = \rho ar^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right|_0^{2\pi} \\ I_x = I_y &= \rho ar^3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (0 - 0) + (2\pi + 0) \right) = \frac{1}{2} \underbrace{2\pi \rho ar}_{M} \cdot r^2 \\ I_x = I_y &= \frac{1}{2} Mr^2 \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

در حالیکه $M = 2\pi a r \rho$ کتله حلقه است. در نتیجه مومنت عطالت حلقه به حول هر قطر به مانند یک محور دوران عبارت از $\frac{1}{2} Mr^2$ است.

ج) بحول محور مماس

محور مماس می‌تواند موازی به محور Z و یا ممکن موازی به هر محور دیگری باشد. در هر حالت مومنت عطالت و تئیکه کتله تمام جسم در مرکز کتله متمرکز گردد عبارت است از :

$$I = M \cdot r^2 \dots\dots\dots(5)$$

مومنت عطالت به حول هر محور مماس می‌تواند با استفاده از قضیه محورهای موازی دریافت گردد. اگر مومنت عطالت حلقه بحول محور مماس که موازی به قطر است به I_0 و مومنت عطالت بحول محور که موازی به محور Z باشد را به I نشان دهیم، در آن حالت داریم:

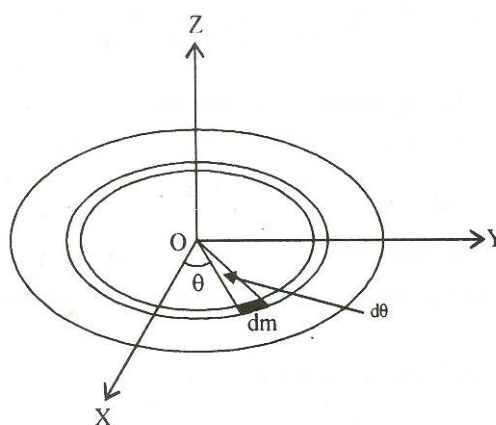
$$I_0 = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 \Rightarrow I_0 = \frac{3}{2}Mr^2 \quad \text{.....(6)}$$

$$I = Mr^2 + Mr^2 \Rightarrow I = 2Mr^2 \quad \text{.....(7)}$$

۲) مومنت عطالت قرص دایروی

قرص دایروی توسط دورا ن قطعه خط به اندازه 360° بحول یک انجام آن تشکیل می‌گردد. در این حالت محور های اساسی می‌توانند به امتداد این محور دوران در نظر گرفته شوند (یعنی محور دوران از مرکز عبور نموده و عمود بالای مستوی قرص باشد) فرضا محور Z به این جهت انتخاب شود و دو محور دیگری در مستوی قرص قرار داشته و می‌توانند هر وضعیت را داشته باشند. این حلقه را به چندین عنصر کوچک تقسیم می‌نمائیم . فرضا یکی از این عناصر کوچک بین زوایای θ و $\theta + d\theta$ به فاصله r و $r + dr$ از مرکز حلقه واقع باشد قرار شکل (۲). حجم این عنصر کوچک عبارت است از:

$$dv = t \cdot r d\theta \cdot dr \quad \text{.....(8)}$$



شکل (2) مومنت عطالت قرص دایروی

در حالیکه t ضخامت قرص است. حال می‌خواهیم مومنت عطالت قرص را به محور های مختلف دریافت نمائیم.

الف) مومنت عطالت به حول محور Z

$$I_z = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dv = \int_0^R \int_0^{2\pi} t \rho r^3 dr d\theta = \int_0^R t \rho r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$I_z = 2\pi t \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi t \rho \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} \pi t \rho \cdot R^4$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{1}{2} MR^2 \dots\dots\dots(9)$$

در حالیکه $M = \rho V = \pi R^2 t \rho$ کتله و R شعاع دسک می‌باشد. برای دسک میان خالی با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 داریم:

$$I_z = 2\pi t \rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{1}{2} \pi t \rho (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} \pi t \rho (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

$$I_z = M (R_2^2 + R_1^2) \dots\dots\dots(10)$$

ب) مومنت عطالت بحول هر قطر

نظر به تناظر دسک بحول x و y می‌توان به امتداد قطر دسک مومنت عطالت را در نظر گرفت. پس به امتداد محور x داریم:

$$I_x = \int \rho (r \sin \theta) dv = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho (r \sin \theta)^2 t r d\theta dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho t r^3 \sin^2 \theta \cdot d\theta dr$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{1}{4} \rho t R^4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \rho t R^4 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$I_x = \frac{1}{4} \rho t R^4 \left[\frac{1}{2} (\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \rho t R^4 \left[\frac{1}{2} (2\pi - 0 - 0 + 0) \right] = \frac{1}{4} \pi \rho t R^2 \cdot R^2$$

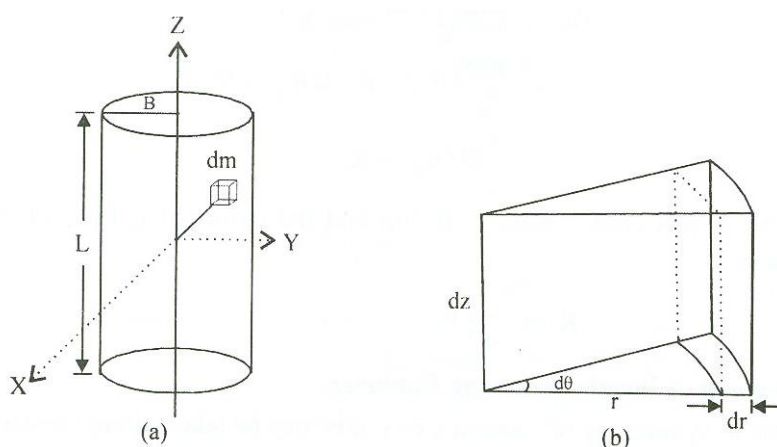
$$I_x = \frac{1}{4} MR^2 \dots\dots\dots(11)$$

در اینجا $M = \pi R^2 \rho t$ است. مومنت عطالت بحول محور مماس می‌تواند به عین ترتیب که در حالت حلقه دریافت گردید محاسبه شود. این حالت به حیث تمرین گذاشته شد.

(۳) مومنت عطالت استوانه دایروی

استوانه دایروی توسط دوران مستوی بحول یکی از اضلاع آن حاصل می‌گردد، که این ضلع به حیث محور دوران استوانه در نظر گرفته می‌شود قرار شکل (۳). لذا می‌توان یکی از محورهای مختصات مثلاً محور Z را به امتداد این محور استوانه انتخاب نمود. دو محور اساسی دیگر و در نتیجه محورهای مختصات به هر دو جهت عمود در یک مستوی عمود به محور استوانه بوده که از مرکز کتله عبور می‌کند. این مسئله در مختصات استوانوی به آسانی حل شده می‌تواند، طوریکه:

$$x = r \cdot \cos \theta, \quad y = r \cdot \sin \theta, \quad z = z \quad \dots\dots\dots(12)$$



شکل (۳) مومنت عطالت استوانه دایروی

زاویه θ نظر به محور x اندازه می‌گردد. حجم عنصری قرار ذیل داده شده است:

$$dv = r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz \quad \dots\dots\dots(13)$$

فرض می‌کنیم که کثافت استوانه ثابت است.

الف) مومنت عطالت بحول محور استوانه

چون فاصله عمودی عنصر کوچک dm از محور Z عبارت از r است لذا:

6

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \rho(z^2 + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta dz = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} z^3 + r^2 z \sin^2 \theta \right]_{-L/2}^{L/2} r dr d\theta \dots\dots\dots(17) \\
 \Rightarrow I_x &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(\frac{L^2}{12} + r^2 \sin^2 \theta \right) r dr d\theta = \rho L \int_0^{2\pi} \left(\frac{L^2}{12} \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \sin^2 \theta \right)_0^R d\theta = \rho L R^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{L^2}{24} + \frac{R^2}{4} \sin^2 \theta \right] d\theta \\
 &= \rho L R^2 \left[\frac{L^2}{24} \theta + \frac{R^2}{4} \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \rho L R^2 \left[\frac{L^2 \cdot 2\pi}{24} + \frac{R^2}{4} \pi \right] = \pi \rho L R^2 \left[\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right] \\
 I_x &= M \left[\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right] = I_y \dots\dots\dots(18)
 \end{aligned}$$

در حالیکه $M = \pi \rho L R^2$ کتله استوانه است.

مومنت عطالت بحول هر محور دیگر می‌تواند با استفاده از قضایای مومنت عطالت دریافت گردد. در صورت استوانه میان خالی حدود انتگرال برای r از R_1 تا R_2 می‌باشد در حالیکه R_2 و R_1 بترتیب شعاعات داخلی و خارجی استوانه میان خالی اند. پس:

$$\begin{aligned}
 I_z &= \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2) \\
 I_x = I_y &= M \left[\frac{1}{4} (R_1^2 + R_2^2) + \frac{L^2}{12} \right] \dots\dots\dots(19)
 \end{aligned}$$

۴ مومنت عطالت سطح کروی باریک

اجسام کروی به هر جهت بحول مرکز خود کاملاً متناظر می‌باشند. بنابر آن محورهای اساسی می‌توانند به جهت هر یک از سه محور عمودی همزمان که از مرکز آن عبور می‌نماید، انتخاب شوند. فرضاً محورها قرار شکل (۵) انتخاب شده باشند در این حالت فرض می‌کنیم قشر دیوار بسیار نازک با کثافت متجانس است. در این حالت کثافت حجمی کتلوی می‌تواند به کثافت سطحی کتلوی ρ تعویض گردد. کتله مجموعی قشر عبارت است از:

$$M = 4\pi R^2 \rho \dots\dots\dots(20)$$

کتله عنصر کوچک که بین زاویه θ و $\theta + d\theta$ و ϕ و $\phi + d\phi$ واقع می‌باشد عبارت است از:

$$dm = \rho R^2 \sin \theta d\theta d\phi \dots\dots\dots(21)$$

فاصله این کتله عنصری از محور Z عبارت از $R \sin \theta$ می‌باشد. در نتیجه مومنت عطالت بحول محور Z عبارت است از:

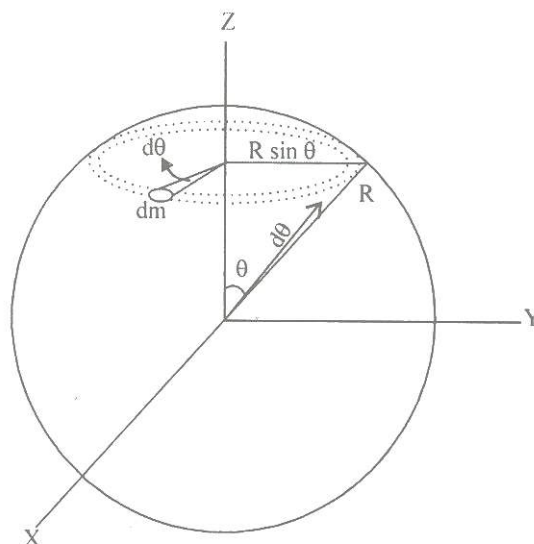
$$I_z = \int (R \sin \theta)^2 dm = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho R^2 \sin \theta \cdot R^2 \sin^2 \theta d\theta d\varphi = \rho R^4 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

در حالیکه

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{4}(3 \sin \theta - \sin 3\theta) \dots\dots\dots(22)$$

$$\begin{aligned} &= \rho R^4 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{4}(3 \sin \theta - \sin 3\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi \rho R^4}{2} \left[-3 \cos \theta + \frac{\cos 3\theta}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \underbrace{(4\pi R^2 \rho)}_M R^2 \\ I_z &= \frac{2}{3} MR^2 \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

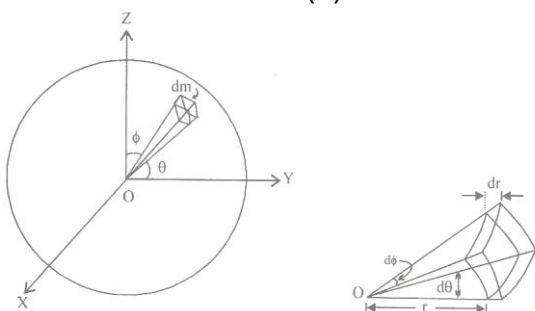


شکل (۵) مومنت عطالت قشر کروی باریک.

در این حالت $I_x = I_y = I_z$ بوده، پس معادله (۲۳) مومنت عطالت را بحول قطر می‌دهد.

۵) مومنت عطالت کره میان پر

این جسم نیز بحول مرکز خود متناظر می‌باشد. محور های مختصات را مطابق شکل (۶) با مرکز کتله به حیث مبدا انتخاب می‌نمائیم.



کثافت حجمی کره را ثابت در نظر می‌گیریم. برای حل این مسئله بهتر است از مختصات کروی استفاده شود. حجم عنصر کوچک در هر نقطه به فاصله r قرار ذیل داده شده است:

شکل (۱۴-۱) مومنت عطالت

$$dv = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\phi$$

$$dv = r^2 \sin \theta \cdot d\theta dr d\phi \dots\dots\dots(24)$$

و قتیکه مومنت عطالت بحول هر قطر بحیث محور دوران محاسبه شود نظر به تناظر $I_x = I_y = I_z$ است فاصله عمودی dm از محور Z عبارت از $r \sin \theta$ است پس داریم:

$$I_x = I = \int \rho (r \sin \theta)^2 dv \dots\dots\dots(25)$$

$$I = \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \rho r^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta \cdot dr d\theta d\phi$$

$$I = 2\pi \rho \int_0^R \int_0^{\pi} r^4 \sin^3 \theta \cdot dr d\theta = \frac{2\pi \rho R^5}{5} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

$$I = \frac{2}{5} \underbrace{\left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right)}_M R^2 \Rightarrow I = \frac{2}{5} M R^2 \dots\dots\dots(26)$$

در اینجا $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ کتله کره است. رابطه اخیر عبارت از مومنت عطالت کره بحول قطر آن می‌باشد. اگر کره میان خالی به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 داده شده باشد، در آن حالت حدود r از R_1 تا R_2 تحول نموده و داریم:

$$I = \frac{2}{5} M \left(\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \right) \dots\dots\dots(27)$$

کنله عبارت است از:

$$M = \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)\rho \dots\dots\dots(27)$$

سوالات

۱) زمانیکه یک خط مستقیم به اطراف یکی از انجام های خود دوران کند شکل که تشکیل می شود عبارت است از:

۱) کره ۲) قرص ۳) دایره ۴) استوانه

۲) مومنت عطالت یک حلقه دایروی بحول محور که عمود به مستوی حلقه بوده و از مرکز حلقه مذکور عبارت است از:

$$I_z = M \cdot r \quad (۱) \quad I_z = M^2 \cdot r^2 \quad (۲) \quad I_z = M \cdot r^2 \quad (۳) \quad I_z = \frac{M}{r^2} \quad (۴)$$

۳) مومنت عطالت یک قرص میان خالی مساوی است به:

$$I_z = M(R_2 + R_1) \quad (۲) \quad I_z = M(R_2^2 + R_1^2) \quad (۱)$$

$$I_z = M(R_2^2 - R_1^2) \quad (۴) \quad I_z = M(R_2 + R_1)^2 \quad (۳)$$

۴) مومنت عطالت یک استوانه به حول محور استوانه توسط رابطه ذیل محاسبه می گردد:

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 \quad (۴) \quad I_z = \frac{3}{2}MR^2 \quad (۳) \quad I_z = MR^2 \quad (۲) \quad I_z = \frac{1}{2}MR \quad (۱)$$

۵) در یک استوانه رابطه $\rho L \pi R^2$ کدام یک از کمیت های ذیل را نشان می دهد؟

۱) حجم ۲) فشار ۳) کنله ۴) مساحت سطحی

۶) مومنت یک کره میان پر مساوی است به:

$$\frac{2}{5}MR^2 \quad (۱) \quad \frac{1}{5}MR^2 \quad (۲) \quad \frac{3}{5}MR^2 \quad (۳) \quad \frac{2}{3}MR^2 \quad (۴)$$

(۷) کتله یک کره میان پر توسط یکی از روابط ذیل دریافت می‌گردد:

$$\frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \rho \quad (۲) \qquad \frac{1}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \rho \quad (۱)$$

$$\frac{3}{4} \pi (R_2^3 - R_1^3) \rho \quad (۴) \qquad \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \rho \quad (۳)$$

منابع

(۱) لکچر نوت های فزیک، سمستر دوم، صنف سیزدهم، نصاب وزارت معارف افغانستان.

Calculus, 6th edition, James Stewart, Mc Master university, 2010, chapter 6 (۲)

Fundamental of physic, Halliday, David, 8th edition, 2008, chapter 10 (۳)

مأخذ:

این ممد درسی با همکاری کتابخانه درخت دانش به شما اهداء گردیده است.

www.ddl.af



Darakht-e Danesh Information



@AfghanOERs

