

Kankor Widget

ابزار کانکور

جدیدترین تکنالوژی آموزشی در سطح کشور

مومنتم زاویه ای





فهرست مطالب

- 1..... مومنتم زاویه ای
- 3..... مومنتم زاویه ای سیستم نقاط مادی
- 4..... مومنتم زاویه ای دو ذره نسبت به مرکز کتله انها
- 9..... سوالات
- 10..... منابع
- 11..... مأخذ

مومنتم زاویه ای

اهدا کننده: ایزار کانکور

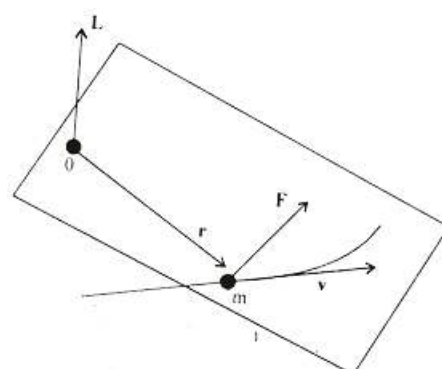
منبع: کتابخانه درخت دانش

جواز / دارنده حق چاپ: دامنه عمومی / CC.0

مومنتم زاویه ای

مومنتم زاویه ای مفهوم است که در حالت دوران کتله نقطوی به حول یک محور و یا دوران یک جسم بزرگ به حول محوری که از خود جسم عبور می نماید، حاصل می گردد. مومنتم زاویه ای یک ذره با کتله m که به سرعت v (که دارای مومنتم خطی $p = mv$ است) به حول نقطه O قرار شکل (1) حرکت می نماید عبارت است از :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \\ \Rightarrow \vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \dots\dots\dots(1)$$



شکل (1) مومنتم زاویه ای را به حول یک نقطه نشان می دهد

مومنتم زاویه ای وکتوری است عمود بالای مستوی که توسط $\vec{r}$ و $\vec{v}$ تشکیل می گردد. بصورت عموم مومنتم زاویه ای یک ذره وقتی که ذره حرکت نماید در مقدار و جهت تغییر می نماید. در حالت حرکت دایروی مطابق شکل (2) وقتی که O مرکز دایره باشد، وکتورهای $\vec{r}$ و $\vec{v}$ بالای یکدیگر عمود بوده، چون $v = \omega r$ می باشد بنابراین داریم :

$$L = mr \cdot v = mr \cdot r\omega \\ \Rightarrow L = m \cdot r^2 \cdot \omega \dots\dots\dots(2)$$

به خاطر باید داشت که جهت L هم جهت ω می باشد. اگر حرکت در یک مستوی به شکل دایروی نبوده، بلکه بشکل منحنی الخط باشد، در آن صورت می توان سرعت را به دو مرکبه یکی به امتداد شعاع و دیگری عمود بالای شعاع تجزیه نمود. تنها مرکبه عمودی سرعت در مومنتم زاویه ای حصه می گیرد. در این حالت می یابیم:

$$L = mr \cdot v_{\theta} \dots\dots\dots(3)$$

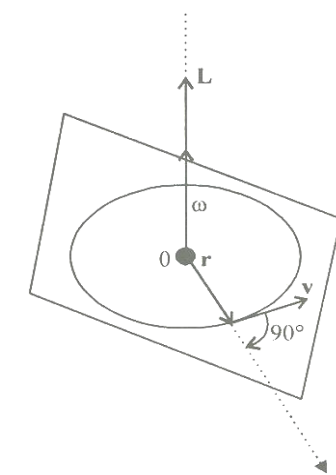
در حالیکه $v_{\theta} = r \frac{d\theta}{dt}$ است. پس:

$$L = mr^2 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \dots\dots\dots(4)$$

خاطر نشان باید نمود که معادله (۴) مشابه به معادله برای حرکت دایروی، زیرا $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ می باشد، پس بصورت عموم ω و r ثابت نمی باشند و در نتیجه مومنتم زاویه ای ثابت نمی باشد. از معادله (1) نظر به زمان مشتق گرفته می یابیم:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \dots\dots\dots(5)$$

اما $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = m \vec{v} \times \vec{v} = 0$ است و $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext}$ می باشد لذا معادله (5) بشکل ذیل تبدیل می گردد:



شکل (2) حرکت دایروی

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{ext} = \vec{\tau}_{ext} \dots\dots\dots(6)$$

این رابطه تنها زمان درست است که $\vec{L}$ و $\vec{\tau}_{ext}$ نظر به یک نقطه اندازه شوند. کمیت $\vec{\tau}_{ext}$ بنام تورک قوه خارجی یا تورک به حول نقطه O یاد می گردد. معادله (6) بیان می دارد که مشتق زمانی مومنتم زاویه ای یک ذره مساوی به تورک قوه عامل است و هر دو از عین نقطه اندازه می شوند. از بیانات فوق نتیجه می شود که تغییر در مومنتم زاویه ای $d\vec{L}$ در انتروال زمانی بسیار کوچک dt مساوی به تورک τ است که بالای ذره عمل می نماید $\vec{\tau}_{ext} = 0$. اگر باشد، در آن حالت $\vec{L}$ به حول نقطه O ثابت حرکت می باشد. این حالت بنام پرنسیپ تحفظ مومنتم زاویه ای یاد می گردد. به

خاطر باید داشت که قیمت حقیقی $\vec{L}$ تابع انتخاب خاص نقطه معیاری O از جای که $\vec{r}$ یعنی وکتور موقعیت و در نتیجه

ان مومنتم خطی $\vec{p} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ ذره از ان اندازه می‌شود.

مومنتم زاویه‌ای سیستم نقاط مادی

قبلا مطالعه نمودیم که مومنتم زاویه‌ای نقطه مادی به حول یک نقطه داده شده عبارت از یک کمیت وکتوری است یعنی:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \quad \text{.....(7)}$$

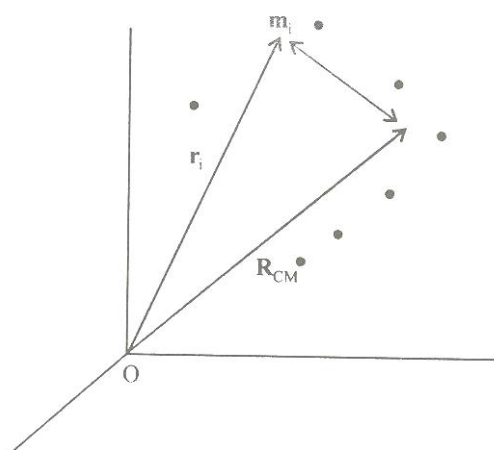
هم چنان دیدیم که مومنتم زاویه‌ای با تورک $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ قوه عامل رابطه ذیل را دارد :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \quad \text{.....(8)}$$

حال حالت را در نظر می‌گیریم که چندین ذره موجود باشد قرار شکل (3)، برای این منظور جسم را با n ذره در نظر می‌گیریم. مومنتم زاویه‌ای مجموعی سیستم عبارت از حاصل جمع وکتوری مومنتم زاویه‌ای هر ذره به حول نقطه O است یعنی :

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad \text{.....(9)}$$



در حالیکه $\vec{r}_i, m_i$ و $\vec{v}_i$ بترتیب کتله، وکتور موقعیت و سرعت ذره i ام به حول نقطه O اند. سیستم کمیات وضعیه در نقطه معیاری O یک سیستم عطالتی می‌باشد. فرضا وکتور موقعیت مرکز کتله در هر لحظه $\vec{R}_{cm}$ نظر به O باشد، پس داریم :

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{cm} + \vec{r}'_i \quad \text{.....(10)}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'_i \quad \text{.....(11)}$$

شکل (3) مومنتم زاویه‌ای سیستم نقاط مادی

در حالیکه $\vec{r}'_i$ و $\vec{v}'_i$ بترتیب شعاع وکتور و سرعت ذره i ام نظر به مرکز کتله اند. در نتیجه داریم که:

$$\vec{L} = \sum [m_i (\vec{R}_{cm} + \vec{r}_i) \times (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i)]$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times (\sum m_i \vec{v}_i) + (\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{v}_{cm} + \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \dots\dots\dots(12)$$

در حالیکه $(\sum m_i = M)$ کتله مجموعی سیستم است. نظر به تعریف در مختصات مرکز کتله داریم :

$$\sum m_i \vec{r}_i' = 0 = \sum m_i \vec{v}_i' \dots\dots\dots(13)$$

در نتیجه مومنتم زاویه‌ای سیستم نقاط مادی به حول نقطه معیاری مستقر O قرار ذیل داده شده است :

$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} \dots\dots\dots(14)$$

در حالیکه

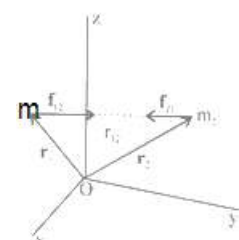
$$\vec{L}_{cm} = \sum \vec{r}' \times \vec{p}' \dots\dots\dots(15)$$

مومنتم زاویه‌ای ذاتی تمام ذرات سیستم به حول مرکز کتله می‌باشد. حد دوم طرف راست معادله (14) مومنتم زاویه‌ای به حول نقطه معیاری O است که با حرکت مرکز کتله یکجا می‌گردد به مانند ذره که به کتله M با مرکز کتله حرکت نماید.

مومنتم زاویه‌ای دو ذره نسبت به مرکز کتله آنها

فرضا $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ وکتور موقعیت ذره 1 نسبت به ذره 2 باشد قرار شکل (۴). موقعیت مرکز کتله دو ذره نسبت به مختصات معیاری لابراتواری L عبارت است از:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \dots\dots\dots(16)$$



شکل (۴) مومنتم زاویه‌ای دو ذره نسبت به مرکز کتله آنها

پس وکتور موقعیت هر ذره نسبت به مختصات مرکز کتله عبارت اند از :

$$\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{R}_{cm} = \frac{m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \vec{r}_{12}}{m_1 + m_2} \quad \text{.....(17)}$$

$$\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{R}_{cm} = \frac{m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}_{12}}{m_1 + m_2} \quad \text{.....(18)}$$

مومنتم زاویه‌ای نسبت به مرکز کتله عبارت است از :

$$\begin{aligned} \vec{L}_{cm} &= (\vec{r}'_1 \times \vec{p}'_1) + (\vec{r}'_2 \times \vec{p}'_2) = \frac{m_2 \vec{r}_{12}}{m_1 + m_2} \times \vec{v}_{12} + \left(-\frac{m_1 \vec{r}_{12}}{m_1 + m_2}\right) \times (-\vec{v}_{12}) \\ \Rightarrow \vec{L}_{cm} &= M \vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12} - \vec{r}_{12} \times M \vec{v}_{12} \quad \text{.....(19)} \end{aligned}$$

در حالیکه $\left(M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)$ بنام کتله تعمیم یافته سیستم دو ذره یاد می‌گردد. در نتیجه مومنتم زاویه‌ای یک سیستم نظر

به مرکز کتله عین چیز به مانند یک ذره $M \vec{v}_{12}$ و وکتور موقعیت $\vec{r}_{12}$ می‌باشد. به خاطر باید داشت که در رابطه اخیر برای $\vec{L}_{CM}$ تنها کمیت‌های که ظاهر می‌گردند عبارت از موقعیت نسبیتی و سرعت نسبیتی دو ذره است. نتیجه فوق مهم بوده و موارد استعمال زیاد دارد. بطور مثال وقتی که می‌خواهیم مومنتم زاویه‌ای اتم هایدروجن را محاسبه کنیم، باید فاصله و سرعت الکترون نسبت به پروتون در نظر گرفته شود، اما باید کتله الکترون به کتله تعمیم یافته سیستم الکترون - پروتون تعویض گردد. هنگامیکه با سیستم ذرات زیاد سرو کار داشته باشیم، در آن حالت مومنتم زاویه‌ای مجموعی مربوط به مرکز کتله بنام مومنتم زاویه‌ای داخلی سیستم یاد می‌گردد.

مثال ۱) نشان دهید که رابطه بین مومنتم زاویه‌ای نسبت به مرکز کتله مختصات معیاری (یا مومنتم زاویه‌ای داخلی) یک سیستم ذرات و مومنتم زاویه‌ای نسبت به سیستم لابراتواری عبارت است از:

$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{r}_{cm} \times \vec{P}$$

حل) جهت آسانی کار فرض می‌نمائیم که سیستم از دو ذره تشکیل گردیده باشد. مومنتم زاویه‌ای نسبت به سیستم لابراتواری L عبارت است از:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2$$

اگر $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ سرعت ها نسبت به سیستم معیاری لابراتواری و $\vec{v}'_1$ و $\vec{v}'_2$ سرعت ها نسبت به سیستم معیاری مرکز کتله باشند در آن حالت داریم:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}_{Cm}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}'_2 + \vec{v}_{Cm}$$

بصورت مشابه

$$\vec{P}_2 = \vec{p}'_2 + m_2 \vec{v}_{Cm} \quad \text{و} \quad \vec{P}_1 = \vec{p}'_1 + m_1 \vec{v}_{Cm}$$

میدانیم که $\vec{r}_1 = \vec{r}'_1 + \vec{r}_{Cm}$, $\vec{r}_2 = \vec{r}'_2 + \vec{r}_{Cm}$ اند لذا داریم:

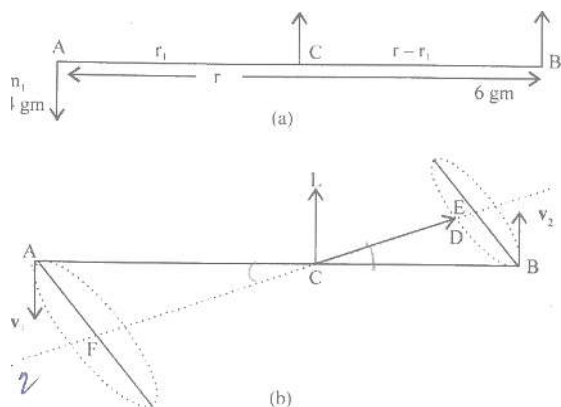
$$\begin{aligned} \vec{L} &= (\vec{r}'_1 + \vec{r}_{Cm}) \times (\vec{p}'_1 + m_1 \vec{v}_{Cm}) + (\vec{r}'_2 + \vec{r}_{Cm}) \times (\vec{p}'_2 + m_2 \vec{v}_{Cm}) \\ &= (\vec{r}'_1 \times \vec{p}'_1) + (\vec{r}'_2 \times \vec{p}'_2) + \vec{r}_{Cm} \times (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2) + (m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2) \times \vec{v}_{Cm} \end{aligned}$$

چون $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0$ است. با استعمال تعریف های $\vec{L}_{Cm}$ و $\vec{r}_{Cm}$ مومنتم زاویه ای نسبت به مختصات لابراتواری L قرار ذیل حاصل میگردد:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{L}_{Cm} + (m_1 + m_2) \vec{r}_{Cm} \times \vec{v}_{Cm} = \vec{L}_{Cm} + M \vec{r}_{Cm} \times \vec{v}_{Cm} \\ \vec{L} &= \vec{L}_{Cm} + \vec{r}_{Cm} \times \vec{P} \end{aligned}$$

حد اول طرف راست مومنتم زاویه ای داخلی نسبت به مختصات مرکز کتله و حد دوم مومنتم زاویه ای خارجی نسبت به مختصات لابراتواری است در صورتیکه تمام کتله سیستم در مرکز کتله متمرکز گردیده باشد.

مثال ۲) دو کتله 4gr و 6gr بترتیب در دو انجام میله سبک بدون کتله به طول 10cm وصل اند و میله برخلاف جهت



حرکت عقربه ساعت با سرعت زاویه ای $2 \frac{rev}{sec}$ به حول محور که از مرکز کتله ان عبور می نماید و عمود به طول ان است دوران می نماید. (a) مومنتم زاویه ای هر کتله به حول مرکز کتله را دریابید. (b) مومنتم زاویه ای مجموعی را به حول مرکز کتله دریافت کنید. (c) مومنتم زاویه ای سیستم به حول محور دوران را دریافت کنید.

اگر محور دوران میله تحت زاویه 30^0 نسبت به طول آن میلان نماید چی تغییرات بوجود خواهد آمد و چرا ؟

حل (a) مرکز کتله مطابق شکل داده شده به فاصله r_1 از A قرار دارد پس داریم :

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 = m_2 (r - r_1)$$

$$\frac{r_1}{r - r_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{6}{4}, \quad r = 10 \text{ cm}$$

در نتیجه مرکز کتله C در فاصله 6 cm از کتله $m_1 = 4 \text{ gr}$ قرار دارد. چون میله به حول محور که عمودا بالای طول میله از نقطه C عبور می نماید با سرعت $\omega = 2 \times 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ زاویه ای دوران مینماید. پس مومنتم زاویه ای کتله m_1 عبارت است از :

$$L_1 = m_1 r_1^2 \omega = 4(6)^2 4\pi = 1800 \text{ gr} \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} = 1.8 \times 10^{-4} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$$

متشابهاً مومنتم زاویه ای کتله m_2 مساوی است به :

$$L_2 = m_2 (r - r_1)^2 \omega = 6 \times 4^2 \times 4\pi = 1200 \text{ gr} \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} = 1.2 \times 10^{-4} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$$

(b) چون L_1 و L_2 به امتداد محور دوران قرار دارند. لذا مومنتم زاویه ای مجموعی L به امتداد محور دوران بوده و مقدار آن عبارت است از:

$$L = L_1 + L_2 = 1800 + 1200 = 3000 \text{ gr} \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} = 3 \times 10^{-4} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$$

(c) در این حالت مومنتم زاویه ای مجموعی به امتداد محور دوران قرار گرفته است، بنابراین مومنتم زاویه ای سیستم به حول محور دوران مساوی به مومنتم زاویه ای مجموعی به حول مرکز کتله یعنی $3 \times 10^{-4} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$ است.

اکنون حالت را در نظر می گیریم وقتی که محور دوران میله نظر به طول میله به زاویه 30^0 میلان نماید قرار شکل (b) سرعت زاویه ای در این حالت به امتداد محور دوران قرار دارد یعنی در جهت CD با مقدار $\omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

کتله های m_1 و m_2 در این حالت بترتیب به حول محور بالای دایره به شعاعات $r'_1 = 6 \sin 30^0 = 3 \text{ cm}$ و $r'_2 = 4 \sin 30^0 = 2 \text{ cm}$ دوران می نمایند. سرعت های خطی کتله های مذکور بترتیب عبارت اند از :

$$v_1 = 4\pi \times 3 = 37.5 \frac{cm}{sec}$$

$$v_2 = 4\pi \times 2 = 25 \frac{cm}{sec}$$

جهت های v_1 و v_2 عمود به طول AB میله بوده اما به جهت متضاد یک دیگری باشند قرار شکل (b). در نتیجه مقدار مومنتم های زاویه ای عبارت اند از :

$$L_1 = m_1 (r \times v_1) = 4 \times 6 \times 37.5 = 900 gr \frac{cm^2}{sec} = 0.9 \times 10^{-4} kg \frac{m^2}{sec}$$

$$L_2 = m_2 (r_2 \times v_2) = 6 \times 4 \times 25 = 600 gr \frac{cm^2}{sec} = 0.6 \times 10^{-4} kg \frac{m^2}{sec}$$

چون (r_1, v_1) و (r_2, v_2) با لای یکدیگر عمود اند و $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ وکتور های موقعیت کتله های m_1 و m_2 نسبت به C می باشند ، جهت های L_1 و L_2 با یکدیگر موازی بوده و عمود بطرف بالا بالای میله اند شکل (b) . چون مومنتم های زاویه ای نظر به دو ذره باهم موازی اند ، پس مومنتم مجموعی سیستم عبارت از

$$L = L_1 + L_2 = 900 + 600 = 1500 gr \frac{cm^2}{sec} = 1.5 \times 10^{-4} kg \frac{m^2}{sec}$$

به امتداد جهت که در شکل نشان داده شده است . دیده میشود که وکتور مومنتم مجموعی L دارای عین جهت با وکتور سرعت زاویه ای ω نمی باشد اما زاویه میلان $(90^\circ - 30^\circ = 60^\circ)$ را میسازد . مقدار مومنتم زاویه ای سیستم به حول محور دوران عبارت است از :

$$1500 \cos 60^\circ = 750 gr \frac{cm^2}{sec} = 0.075 \times 10^{-4} kg \frac{m^2}{sec}$$

سوالات

(۱) دوران یک جسم بزرگ به حول محوری که از خود جسم عبور می‌نماید کدام کمیت فیزیکی را تعریف می‌کند؟

(۱) مومنتم زاویه‌ای (۲) مومنتم زاویه‌ای (۳) تورک خطی (۴) هر سه درست است

(۲) کدام یک از روابط ذیل مومنتم زاویه‌ای را بیان می‌کند؟

(۱) $\vec{L} = \vec{r} \times p$ (۲) $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ (۳) $\vec{L} = \frac{\vec{r}}{m\vec{v}}$ (۴) ۱ و ۲ درست است

(۳) مومنتم زاویه‌ای وکتوری است بالای مستوی که توسط $\vec{r}$ و $\vec{v}$ تشکیل می‌گردد.

(۱) موازی (۲) عمود (۳) منطبق (۴) هیچکدام

(۴) مومنتم زاویه‌ای سیستم نقاط مادی از کدام رابطه بدست می‌آید؟

(۱) $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n$ (۲) $\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

(۳) $\vec{L} = \vec{L}_1 - \vec{L}_2 - \dots - \vec{L}_n$ (۴) ۱ و ۲ درست است

(۵) رابطه $\vec{L}_{cm} = M\vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12} - \vec{r}_{12} \times M\vec{v}_{12}$ کدام یک از کمیت های ذیل را بیان می‌دارد؟

(۱) مومنتم زاویه‌ای دو کتله نظر به مرکز کتله آنها

(۲) مومنتم زوایوی سیستم از ذرات مادی

(۳) مومنتم چندین ذره

(۴) هر سه درست است

(۶) در رابطه $\vec{L}_{cm} = M\vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12} - \vec{r}_{12} \times M\vec{v}_{12}$ مقدار M مساوی است به:

(۱) $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (۲) $\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$ (۳) $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ (۴) $\frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2}$

منابع

(۱) دیوید، ها لیدی. ، رابرت، رزنیک. وجرل واکر، 1383 ، مترجمین : محمد رضا جلیلیان نصرتی و محمد عابدینی
مبانی فزیک ، ایران: انتشارات صفارا اشراقی.

Young, H. D. and Freedman, R. A. 1996, University Physics 9th (۲)

Fundamental of physic, 9th edition, Halliday, David, 2008, chapter 11 (۳)

مأخذ:

این ممد درسی با همکاری کتابخانه درخت دانش به شما اهداء گردیده است.

www.ddl.af



Darakht-e Danesh Information



@AfghanOERs

