

Kankor Widget ابزار کانکور

جدیدترین تکنالوژی آموزشی در سطح کشور

حرکت دایره‌یی





فهرست مطالب

1.....	حرکت دایره‌یی
1.....	زمان تناوب (پریود)
2.....	فریکونسی
2.....	سرعت زاویوی
3.....	سرعت خطی
3.....	حرکت دایروی یکنواخت
4.....	تعجیل زاویوی
6.....	رابطه بین سرعت خطی و سرعت زاویوی
7.....	رابطه بین تعجیل زاویوی و تعجیل خطی
7.....	حرکت دایروی با تعجیل یکنواخت
8.....	سوالات و جوابات
11.....	مأخذ

حرکت دایره یی

اهدا کننده: ابزار کانکور

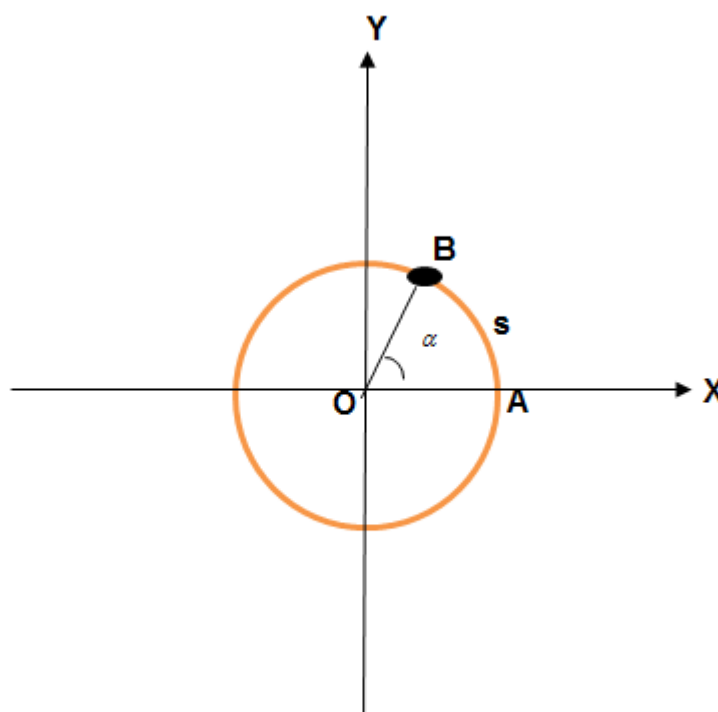
منبع: کتابخانه درخت دانش

جواز/دارنده حق چاپ: دامنه عمومی / CC0

نویسنده: ملیحه احمدی

حرکت دایره‌یی

حرکت دایروی حرکتی را می‌نامند که مسیر حرکت جسم دایره‌یی به شعاع R باشد. یا به عبارت دیگر منحنی را که جسم متحرک در فضا رسم می‌نماید مسیر دایروی است. حال دایره‌یی را با شعاع R طوری در نظر می‌گیریم که مرکز آن در مبدأ سیستم مختصات قائم (XY) قرار داشته باشد مطابق شکل ذیل اگر جسمی با کتله m در نقطه A محیط دایره مذکور طوری قرار داشته باشد که خلاف حرکت عقربه ساعت در حال حرکت بر روی محیط دایره باشد. بعد از گذشت زمان t دیده خواهد شد که جسم مذکور در نقطه B محیط دایره قرار می‌گیرد، یعنی جسم مذکور قوس $AB=S$ را بروی دایره طی می‌کند و یا در مرکز دایره مذکور زاویه $\angle AOB = \alpha$ را می‌سازد می‌توانیم موقعیت جسم را که در حال حرکت دایروی روی محیط دایره است در هر لحظه توسط قوس پیموده شده S و یا زاویه مرکزی α تعیین نماییم. قبل از این که حرکت دایروی را مورد مطالعه قرار دهیم می‌خواهیم مفاهیمی را بررسی نماییم که میتوان توسط آنها حرکت های دایروی را تحلیل کرد.



شکل 1 حرکت جسم را روی مسیر دایروی نشان می‌دهد

زمان تناوب (پریود)

زمان تناوب عبارت از زمانی است که جسم برای پیمودن یک دور مکمل بروی محیط دایره در بر می‌گیرد. هرگاه مطابق شکل فوق جسم از نقطه A محیط دایره در مبدأ زمان $t_1=0$ شروع به حرکت نموده و بعد از گذشت زمان t دوباره به نقطه A برسد یعنی یک دور مکمل و یا محیط مکمل دایره را طی کند. این زمان را به T نشان داده و زمان تناوب حرکت می‌نامیم.

فریکونسی

تعداد دور های را که جسم بر روی مسیر دایروی در واحد زمان انجام می‌دهد به نام فریکونسی جسم یاد می‌کنند و به f نشان داده می‌شود. نظر به این تعریف فریکونسی معکوس زمان تناوب می‌باشد یعنی:

$$f = \frac{1}{T}$$

سرعت زاویوی

قبلاً مطالعه نمودیم که جسم متحرک در اثنای حرکت دایروی در مرکز دایره زاویه کیفی را می‌سازد، که توسط این زاویه موقعیت جسم روی محیط دایره تعیین شده می‌تواند. از این رو جسم در حرکت های دایروی با سرعت زاویوی ω حرکت می‌نماید. سرعت زاویوی متوسط $\bar{\omega}$ بین زمان های t_1 و t_2 عبارت از نسبت تغییر زاویه یعنی $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ و تغییر زمان $\Delta t = t_2 - t_1$ است پس:

$$\bar{\omega} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

در حالیکه α_1 زاویه‌ای است که جسم بعد از گذشت زمان t_1 و α_2 زاویه‌ای است که جسم مذکور بعد از گذشت زمان t_2 در مرکز دایره می‌سازد. سرعت زاویوی لحظوی عبارت از مشتق سرعت متوسط نظر به زمان است. پس:

$$\omega_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}$$

اگر جسم یک بار محیط دایره را طی کند در آن صورت زاویه پیموده شده $2\pi \text{ Rad}$ بوده بنابر آن سرعت زاویوی مساوی خواهد بود به:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

سرعت زاویوی به واحد $\frac{\text{Rad}}{\text{sec}}$ اندازه می‌گردد.

مثال ۱:- موقعیت زاویوی ذره‌ای که روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند با رابطه $\theta = 2t^2 + 6t$ داده شده است

A. سرعت زاویوی متوسط متحرک را بین لحظه های $t_1 = 1\text{S}$ و $t_2 = 2\text{S}$ حساب کنید

B. سرعت لحظه‌ای متحرک را در لحظه‌ی $t_2 = 3\text{S}$ حساب کنید.

حل جزئی A:

$$\begin{aligned}\theta &= 2t^2 + 6t \\ \bar{\omega} &= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ \theta_1 &= 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 8 \text{ Rad} \\ \theta_2 &= 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 8 + 12 = 20 \text{ Rad} \\ \bar{\omega} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{20 - 8}{2 - 1} = \frac{12}{1} = 12 \text{ Rad}\end{aligned}$$

حل جزئی B:

$$\begin{aligned}\theta &= 2t^2 + 6t \\ \omega_t &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(2t^2 + 6t)}{dt} = 4t + 6 \\ \omega_t &= 4 \cdot 3 + 6 = 12 + 6 = 18 \text{ Rad}\end{aligned}$$

سرعت خطی

در حرکت های دایروی جسم بر علاوه اینکه زاویه مرکزی α را در زمان t طی می کند قوسی را نیز بالای محیط دایره می پیماید، لذا سرعت خطی عبارت از قوس پیموده شده در واحد زمان است. اگر قوس پیموده شده را به S و سرعت خطی را به V نشان دهیم داریم:

$$V = \frac{S}{t}$$

سرعت خطی به واحد $\frac{m}{\text{sec}}$, $\frac{cm}{\text{sec}}$ اندازه می گردد.

حرکت دایروی یکنواخت

رابطه ریاضی که به واسطه آن می توانیم نوعیت حرکت را مشخص سازیم به نام معادله حرکت یاد می گردد. حرکت دایروی را می توانیم با داشتن معادله حرکت مشخص نماییم. فرض می کنیم که جسمی بر روی محیط دایره‌یی با شعاع r در لحظه t در مرکز دایره زاویه α را تشکیل داده باشد که به مقابل زاویه مذکور قوس پیموده شده S بالای محیط دایره قرار دارد پس داریم:

طی می کند و فاصله Δx را از معادله

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_{\omega} \Delta t^2 \dots\dots\dots 2$$

می پیماید.

اگر قیمت Δt را از معادله ۱ در معادله ۲ وضع نماییم می یابیم که :

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_{\omega} \frac{BD^2}{V^2}$$

$$a_{\omega} = \frac{2\Delta x v^2}{BD^2} \dots\dots 3$$

از مثلث OBD داریم :

$$BD^2 = OD^2 - OB^2$$

$$BD^2 = (R + \Delta x)^2 - R^2 = R^2 + 2R\Delta x + \Delta x^2 - R^2$$

چون Δx بسیار کوچک است بنابراین از حد Δx^2 صرف نظر نموده می توانیم پس

$$BD^2 = 2R\Delta x$$

اگر قیمت BD^2 را در رابطه ۳ وضع نماییم رابطه ذیل حاصل می گردد.

$$a_{\omega} = \frac{2\Delta x \cdot v^2}{2R\Delta x} = \frac{v^2}{R}$$

چون

$$a_{\omega} = R\omega^2$$

مثال:- با استفاده از رابطه اخیر می توانیم تعجیل مهتاب را به حول زمین حساب نماییم. چون مدار حرکت مهتاب به حول زمین تقریباً دایروی می باشد. که شعاع مسیر دایره آن عبارت است از:

$$R = 384.4 \times 10^3 km = 384.4 \times 10^{10} cm$$

هم چنان زمان تناوب حرکت مهتاب به دور زمین مساوی به ۲۷ روز، ۷ ساعت، ۴۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه می باشد، یعنی:

$$t = 2,3606 \times 10^6 sec$$

لذا داریم:

$$a_{\omega} = R\omega^2 = R \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$a_{\omega} = \frac{4\pi^2 (3.844 \times 10^{10} \text{ cm})}{(2.3606 \times 10^6 \text{ sec})^2}$$

$$a_{\omega} = 0.273 \text{ cm / sec}^2$$

بدر نظر داشت قیمت فوق میتوانیم سرعت خطی مهتاب به حول زمین را قرار ذیل محاسبه نمود:

$$v = \sqrt{Ra_{\omega}} = \sqrt{3.844 \times 10^{10} \text{ cm} \cdot 0.273 \text{ cm / sec}^2}$$

$$v = 1.023 \times 10^6 \text{ cm / sec}$$

$$v = 1.023 \text{ km / sec}$$

رابطه بین سرعت خطی و سرعت زاویوی

قبلاً جسمی که بالای محیط دایره در حرکت دایروی باشد مطالعه نمودیم. حال می‌خواهیم رابطه بین این رعت ها را دیافت کنیم میدانیم که $v = R \cdot \omega$

$$v = R \cdot \omega$$

این معادله رابطه بین سرعت خطی v و سرعت زاویوی ω را نشان می‌دهد.

حال معادله حرکت را طوری در نظر می‌گیریم که جسم بر روی مسیر دایروی قوس کوچک Δs و یا زاویه کوچک $\Delta \alpha$ را طی کند لذا

$$\Delta s = R \Delta \alpha$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = R \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$$

در حالت حدی اگر $\Delta t \rightarrow 0$ در آن حالت می‌یابیم

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$$

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\alpha}{dt} \quad R \frac{d}{dt} (\omega t)$$

$$v = R\omega$$

رابطه بین تعجیل زاویوی و تعجیل خطی

فرض می‌کنیم که سرعت زاویوی جسم که در حال حرکت دورانی بالای مسیر دایروی است بین دو لحظه t_1 و t_2 به اندازه $\Delta\omega$ تغییر نماید. در این حالت سرعت خطی به اندازه Δv تغییر خواهد نمود

$$\Delta v = R \Delta \omega$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad \text{و یا}$$

در حالت حدی داریم

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} &= R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \\ \frac{dv}{dt} &= R \frac{d\omega}{dt} \\ a_t &= R a_\omega \end{aligned}$$

معادله اخیر رابطه بین تعجیل زاویوی و تعجیل خطی را نشان می‌دهد. تعجیل زاویوی را به نام تعجیل شعاعی نیز یاد می‌کنند، طوری که این تعجیل همیشه به جهت شعاع دایره بوده و به مرکز دایره موجه است. به همین ترتیب تعجیل خطی را به نام تعجیل مماسی نیز یاد می‌کنند، زیرا هم جهت و مماس به مسیر دایره است.

حرکت دایروی با تعجیل یکنواخت

هنگامی که در یک حرکت دایروی تغییرات سرعت زاویوی جسم نظر به زمان ثابت باشد، در آن حالت تعجیل زاویوی آن ثابت است. تحت این شرط تعجیل‌های زاویوی متوسط و لحظوی جسم باهم مساوی می‌باشند، پس داریم

$$a = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \dots\dots\dots 1$$

اگر $t_1 = t$ زمان اولی، $\omega_1 = \omega_0$ سرعت زاویوی اولی و $\omega_2 = \omega$ سرعت زاویوی بعد از لحظه $t = t_2$ باشد، در آن حالت رابطه (۱) به شکل ذیل تبدیل می‌گردد:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \\ \omega &= \omega_0 + a(t - t_0) \dots\dots 2 \end{aligned}$$

اگر $t = 0$ باشد، پس

$$\omega = \omega_0 + at \dots\dots\dots 3$$

رابطه ۳ مطابقت تام با معادله $v = v_0 + at$ حرکت خطی با تعجیل ثابت می‌نماید. در صورتی که تعجیل زاویوی ثابت باشد، میتوان سرعت زاویوی متوسط $\bar{\omega}$ را قرار ذیل تعریف نمود.

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega}{2}$$

چون $\alpha = \frac{\bar{\omega}}{t}$ است پس

$$\alpha = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t \dots\dots\dots 4$$

قیمت ω را از رابطه ۳ در رابطه ۴ وضع می‌نمایم، می‌یابیم

$$\alpha = \frac{\omega_0 + \omega_0 + at}{2} t$$

$$\alpha = \omega_0 t + \frac{1}{2} at^2 \dots\dots\dots 5$$

اگر قیمت t را از رابطه ۳ در رابطه ۴ وضع نمایم حاصل می‌داریم

$$\alpha = \frac{\omega + \omega_0}{2} \frac{\omega - \omega_0}{a}$$

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2a}$$

از اینجا

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2a\alpha$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2a\alpha}$$

سوالات و جوابات

سوال ۱:- جسم روی مسیر دایره به شعاع 2m به سرعت ثابت حرکت می‌مند، اگر تعجیل آن 2m/sec^2 باشد سرعت زاویوی و سرعت خطی آن را دریابید؟

$$a_{\omega} = R\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{a_{\omega}}{R} = \frac{2m/sec^2}{2m}$$

$$\omega = 1Rad / sec$$

$$v = R\omega$$

$$v = 2m \cdot 1Rad / sec$$

$$v = 2m / sec$$

سوال ۲:- جسم روی محیط دایره‌ای به شعاع ۲۰ سانتی‌متر حرکت مشابه با سرعت زاویوی 10π را اجرا می‌نماید. زمان تناوب، فریکونسی، سرعت خطی و تعجیل آن را دریافت نمایید؟

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3.14}{10} = \frac{6.28}{10} = 0.628 sec$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.628} = 1.59 HZ$$

$$V = R\omega = 2m \cdot 10Rad / sec = 20m / sec$$

$$a = r\omega^2 = 2m \cdot (10Rad / sec)^2$$

$$a = 2m \cdot 100(Rad / sec)^2$$

$$a = 200m / sec^2$$

سوال ۳:- قطر پره یک باد پکه برقی ۱.۸ متر است اگر سرعت خطی آن 225π باشد فریکونسی آن را دریافت کنید؟

$$v = R\omega$$

$$v = R2\pi f$$

$$f = \frac{v}{R2\pi}$$

$$R = \frac{d}{2} = \frac{1.8}{2} = 0.9m$$

$$f = \frac{225m / sec}{0.9m \cdot 2 \cdot 3.14} = \frac{225}{5.652}$$

$$f = 39.8 HZ$$

سوال 4:- سرعت انجام عقربه دقیقه گرد یک ساعت 0.5 mm/sec است. طول عقربه چقدر خواهد بود؟

$$\frac{0.5 \text{ mm}}{\text{sec}} = \frac{0.5 \div 10 \text{ cm}}{\frac{1}{60} \text{ min } t} = \frac{0.05 \cdot 60 \text{ cm}}{\text{min } t} = 180 \text{ cm} / \text{min } t$$

$$R = \frac{180}{2\pi} = \frac{180}{2 \cdot 3.14} = \frac{180}{6.28} = 28.66 \text{ cm}$$

سوال 5:- چرخ روی محیط دایره به شعاع 3 m به سرعت خطی 15 m/sec در حرکت است سرعت زاویوی آن را در یافت کنید؟

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{15 \text{ m/sec}}{3 \text{ m}} = 5 \text{ Rad/sec}$$

سوال 6:- سرعت چرخ از حالت سکون در مدت 15 sec به $30\pi \text{ Rad/sec}$ می رسد، تعجیل زاویوی و تعجیل خطی را در محل دریابید که به فاصله 3 cm از مرکز قرار داشته باشد؟

$$a_{\omega} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} = \frac{\omega}{t} = \frac{30\pi \text{ rad/sec}}{15 \text{ sec}} = 2\pi \text{ rad/sec}^2$$

$$a_t = R a_{\omega} = 3 \text{ cm} \cdot 2\pi \text{ rad/sec}^2 = 6\pi \text{ cm/sec}^2$$

مأخذ:

این ممد درسی با همکاری کتابخانه درخت دانش به شما اهداء گردیده است.

www.ddl.af



Darakht-e Danesh Information



@AfghanOERs

