

K.A. Stroud
Dexter J. Booth

MATEMATYKA

OD ZERA DLA INŻYNIERA

WYDANIE VIII

Z języka angielskiego przełożyły

Agnieszka Apenuvor
Zofia Denkowska
Agnieszka Jarosz

Korekta merytoryczna tłumaczenia
prof. dr hab. Tadeusz Stanisław

Pętla



macmillan
international
HIGHER EDUCATION



RED GLOBE
PRESS

Tytuł oryginału: Engineering Mathematics (8th Edition)

First published in English under the title

Engineering Mathematics by K.A. Stroud and Dexter Booth, edition: 8.

Copyright © K.A. Stroud 1970, 1982, 1987, 1995

Copyright © K. A Stroud and Dexter J. Booth under exclusive licence to Macmillan

Education Limited 2001, 2007, 2013, 2020

This edition has been translated and published under licence from Macmillan Education Limited, part of Springer Nature.

Macmillan Education Limited, part of Springer Nature takes no responsibility and shall not be made liable for the accuracy of the translation.

Copyright © for the translation by Pętla Sp. z o.o. 2016, 2021

Copyright © for the Polish edition by Pętla Sp. z o.o. 2016, 2021

Wszystkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie i rozpowszechnianie całości albo fragmentów tej książki - z wyjątkiem cytatów w artykułach i przeglądach krytycznych - możliwe jest tylko na podstawie pisemnej zgody właściciela praw autorskich.

Tłumaczenie i redakcja **Agnieszka Jarosz**

Korekta merytoryczna tłumaczenia **prof. dr hab. Tadeusz Stanisław**

Współtwórcy poprzedniego wydania:

Tłumaczenie **Agnieszka Apenuvor, Zofia Denkowska, Agnieszka Jarosz**

Korekta merytoryczna tłumaczenia **prof. dr hab. Tadeusz Stanisław**

Redakcja **Agnieszka Jarosz**

Oprawa graficzna i skład **Daniel Zarymbowski**

ISBN 978-83-944283-1-0

Pętla Sp. z o.o.

<http://www.stroud.edu.pl/>

info@stroud.edu.pl

tel. 508 270 779



Skrócony spis treści

Część I Tematy podstawowe

F.1	Arytmetyka	3
F.2	Wprowadzenie do algebry	63
F.3	Wyrażenia i równania	97
F.4	Wykresy	123
F.5	Równania liniowe	157
F.6	Równania wielomianowe	173
F.7	Dwumian Newtona	187
F.8	Ułamki proste	215
F.9	Trygonometria	235
F.10	Funkcje	259
F.11	Funkcje trygonometryczne i wykładnicze	279
F.12	Różniczkowanie	309
F.13	Całkowanie	347

Część II

1	Liczby zespolone 1	379
2	Liczby zespolone 2	406
3	Funkcje hiperboliczne	431
4	Wyznaczniki	453
5	Macierze	484
6	Wektory	519
7	Różniczkowanie	544
8	Zastosowania różniczkowania	563
9	Styczne, normalne i krzywizny	585
10	Ciągi	607
11	Szeregi 1	642
12	Szeregi 2	666
13	Krzywe i dopasowanie krzywej	692
14	Pochodne cząstkowe 1	736
15	Pochodne cząstkowe 2	757
16	Całkowanie 1	773
17	Całkowanie 2	800
18	Całkowanie z użyciem wzorów rekurencyjnych	828
19	Zastosowania całkowania 1	841
20	Zastosowania całkowania 2	859
21	Zastosowania całkowania 3	881
22	Całkowanie numeryczne	910
23	Układ współrzędnych biegunowych	929
24	Całki wielokrotne	951
25	Równania różniczkowe pierwszego rzędu	977
26	Równania różniczkowe drugiego rzędu	1013
27	Wprowadzenie do transformat Laplace'a	1036
28	Przetwarzanie danych i statystyka	1054
29	Prawdopodobieństwo	1085

Strona celowo pozostawiona pusta

Spis treści

<i>Przedmowa do pierwszego wydania</i>	<i>xix</i>
<i>Przedmowa do drugiego wydania</i>	<i>xx</i>
<i>Przedmowa do trzeciego wydania</i>	<i>xxi</i>
<i>Przedmowa do czwartego wydania</i>	<i>xxii</i>
<i>Przedmowa do ósmego wydania</i>	<i>xxiii</i>
<i>Od wydawcy polskiej edycji</i>	<i>xxiv</i>
<i>Jak korzystać z tej książki</i>	<i>xxv</i>
<i>Przydatne informacje</i>	<i>xxvii</i>

Część I Tematy podstawowe **1**

Program F.1 Arytmetyka **3**

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	3
<i>Quiz F.1</i>	4
Typy liczb	6
Liczby naturalne - Cyfry i pozycyjność - Punkty na osi i porządek - Liczby całkowite - Nawiasy - Dodawanie i odejmowanie - Mnożenie i dzielenie - Nawiasy i kolejność wykonywania działań - Podstawowe prawa arytmetyki - Szacowanie - Zaokrąglanie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Czynniki, dzielniki i liczby pierwsze	15
Czynniki i dzielniki - Liczby pierwsze - Rozkład na czynniki pierwsze - Podstawowe twierdzenie arytmetyki - Największy wspólny dzielnik (NWD) - Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW) - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Ułamki, stosunki i procenty	18
Dzielenie liczb całkowitych - Mnożenie ułamków - Z - Równość ułamków - Dzielenie ułamków - Dodawanie i odejmowanie ułamków - Ułamki na kalkulatorze - Stosunki - Procenty - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Ułamki dziesiętne	27
Dzielenie liczb całkowitych - Zaokrąglanie - Cyfry znaczące - Miejsca po przecinku - Zera końcowe - Ułamki zwykłe w postaci dziesiętnej - Ułamki w postaci dziesiętnej jako ułamki zwykłe - Ułamki dziesiętne nieskończone - Ułamki w postaci dziesiętnej jako ułamki zwykłe - Liczby wymierne, niewymierne i rzeczywiste - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Potęgi	33
Podnoszenie liczby do potęgi - Prawa potęgowania - Potęgowanie na kalkulatorze - Potęgi o wykładniku ułamkowym i pierwiastki - Liczby niewymierne - Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych przez potęgi 10 - Kolejność wykonywania działań - Postać wykładnicza - Wyprowadzanie postaci wykładniczej - Użycie kalkulatora - Postać inżynierska - Sprawdzanie obliczeń - Dokładność - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Systemy liczbowe	44
System dziesiętny - System binarny (dwójkowy) - System ósemkowy - System dwunastkowy - System szesnastkowy - Metoda alternatywna - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Zamiana podstawy z dziesiętnej na inną	52
Postać dwójkowa - Postać ósemkowa - Postać dwunastkowa - Zamiana ułamka w systemie dziesiętnym na postać ósemkową - Użycie liczb w systemie ósemkowym jako etapu pośredniego	
Metoda odwrotna	56

Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.1</i>	58
<i>Zadania sprawdzające F.1</i>	59
<i>Dalsze wyzwania F.1</i>	60
Program F.2 Wprowadzenie do algebry	63
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	63
<i>Quiz F.2</i>	64
Wyrażenia algebraiczne	65
Symbole inne niż cyfry - Stałe - Zmienne - Reguły algebry - Kolejność wykonywania działań - Wyrazy i współczynniki - Redukcja wyrazów podobnych - Wyrazy analogiczne - wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias - Usuwanie nawiasów - Nawiasy zagnieżdżone - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Potęgi i logarytmy	72
Potęgi - Reguły dotyczące potęg - Logarytmy - Reguły dotyczące logarytmów - Podstawa 10 i podstawa e - Zamiana podstawy - Równania logarytmiczne - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Mnożenie i dzielenie wyrażeń algebraicznych	81
Mnożenie - Dzielenie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Ułamki algebraiczne	85
Dodawanie i odejmowanie - Mnożenie i dzielenie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Rozkład wyrażeń algebraicznych na czynniki	89
Wspólne czynniki - Wspólne czynniki uzyskane przez grupowanie - Wzory skróconego mnożenia - Wyrażenia kwadratowe będące iloczynami czynników liniowych - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.2</i>	93
<i>Zadania sprawdzające F.2</i>	94
<i>Dalsze wyzwania F.2</i>	95
Program F.3 Wyrażenia i równania	97
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	97
<i>Quiz F.3</i>	98
Wyrażenia i równania	99
Obliczanie wartości wyrażeń - Równania - Obliczanie wartości zmiennych niezależnych - Przekształcanie wzorów - Proces obliczania wartości - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Wielomiany	109
Wyrażenia wielomianowe - Obliczanie wartości wielomianów - Obliczanie wartości wielomianów metodą Hornera - Twierdzenie o resztach (twierdzenie Bézouta) - Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki - Rozkład na czynniki wielomianów czwartego stopnia - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.3</i>	120
<i>Zadania sprawdzające F.3</i>	121
<i>Dalsze wyzwania F.3</i>	121
Program F.4 Wykresy	123
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	123
<i>Quiz F.4</i>	124

Wykresy równań	125
Równania - Uporządkowane pary liczb - Kartezjański układ współrzędnych - Rysowanie wykresów - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Stosowanie arkuszy kalkulacyjnych	133
Arkusze kalkulacyjne - Wiersze i kolumny - Wpisywanie tekstu i liczb - For- muły - Usuwanie wpisów - Sporządzanie wykresów w kartezjańskim układzie współrzędnych - Sposoby prezentacji - Podsumowanie - Ćwiczenia na po- wtórzenie	
Nierówności	142
Większe niż i mniejsze niż - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Wartości bezwzględne	144
Moduł - Wykresy - Nierówności - Interakcja - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.4</i>	153
<i>Zadania sprawdzające F.4</i>	154
<i>Dalsze wyzwania F.4</i>	154
Program F.5 Równania liniowe	157
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	157
<i>Quiz F.5</i>	158
Równania liniowe	159
Rozwiązywanie równań prostych - Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi - Układy trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi - Wstępne przekształcenia - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.5</i>	169
<i>Zadania sprawdzające F.5</i>	170
<i>Dalsze wyzwania F.5</i>	170
Program F.6 Równania wielomianowe	173
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	173
<i>Quiz F.6</i>	174
Równania wielomianowe	175
Równania kwadratowe - Równania trzeciego stopnia z przynajmniej jednym czynnikiem liniowym - Równania czwartego stopnia z co najmniej dwoma czynnikiem liniowymi - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.6</i>	184
<i>Zadania sprawdzające F.6</i>	185
<i>Dalsze wyzwania F.6</i>	185
Program F.7 Dwumian Newtona	187
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	187
<i>Quiz F.7</i>	188
Silnia i kombinacje	189
Silnia - Kombinacje - Trzy własności współczynników dwumianowych - Pod- sumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Dwumian Newtona	197
Trójkąt Pascala - Wzór dwumianowy Newtona - Wyraz ogólny rozwinięcia dwumianowego - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Zapis przy użyciu znaku Σ (sigma)	203
Wyrazy ogólne sumy w zapisie ze znakiem Σ - Suma n początkowych liczb naturalnych - Reguły działania na sumach - Liczba e - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.7</i>	212

<i>Zadania sprawdzające F.7</i>	213
<i>Dalsze wyzwania F.7</i>	213
Program F.8 Ułamki proste	215
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	215
<i>Quiz F.8</i>	216
Ułamki proste	217
Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Mianowniki z powtarzającymi się i kwadratowymi czynnikami	224
Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.8</i>	232
<i>Zadania sprawdzające F.8</i>	232
<i>Dalsze wyzwania F.8</i>	232
Program F.9 Trygonometria	235
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	235
<i>Quiz F.9</i>	236
Kąty	237
Obrót - Radiany - Trójkąty - Funkcje trygonometryczne - Odwrotności funkcji trygonometrycznych - Twierdzenie Pitagorasa - Trójkąty specjalne - Połowa trójkąta równobocznego - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Tożsamości trygonometryczne	250
Jedynka trygonometryczna - Dodatkowe dwie tożsamości - Tożsamości dla kątów złożonych - Wzory trygonometryczne - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.9</i>	256
<i>Zadania sprawdzające F.9</i>	256
<i>Dalsze wyzwania F.9</i>	257
Program F.10 Funkcje	259
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	259
<i>Quiz F.10</i>	260
Przetwarzanie liczb	261
Funkcje jako reguły, lecz nie wszystkie reguły jako funkcje - Funkcje i działania arytmetyczne - Funkcje odwrotne - Wykresy funkcji odwrotnych - Wykres funkcji $y = x^3$ - Wykres funkcji $y = x^{1/3}$ - Wykres funkcji $y = x^3$ i $y = x^{1/3}$ w jednym układzie współrzędnych - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Złożenie	272
Funkcja złożona - Funkcje odwrotne do funkcji złożonych - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.10</i>	276
<i>Zadania sprawdzające F.10</i>	277
<i>Dalsze wyzwania F.10</i>	277
Program F.11 Funkcje trygonometryczne i wykładnicze	279
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	279
<i>Quiz F.11</i>	280
Wprowadzenie	281
Funkcje trygonometryczne	281
Obrót - Tangens - Okres - Amplituda - Przesunięcie fazowe - Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych - Równania trygonometryczne - Równania w postaci $a \cos x + b \sin x = c$ - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	

Funkcje wykładnicze i logarytmiczne	295
Funkcje wykładnicze - Równania wykładnicze - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Funkcje parzyste i nieparzyste	299
Części parzyste i nieparzyste - Część parzysta i nieparzysta funkcji wykładniczej - Granice funkcji - Działania na granicach - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.11</i>	304
<i>Zadania sprawdzające F.11</i>	305
<i>Dalsze wyzwania F.11</i>	306

Program F.12 Różniczkowanie 309

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	309
<i>Quiz F.12</i>	310
Współczynniki kierunkowe i gradienty	311
Współczynnik kierunkowy prostej - Gradient krzywej w danym punkcie - Określenie gradientu krzywej metodami algebraicznymi - Pochodne potęg x - Różniczkowanie wielomianów - Pochodne drugiego i wyższego rzędu oraz zapis alternatywny - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Standardowe pochodne i reguły	324
Granica $\sin\theta/\theta$ dla $\theta \rightarrow 0$ - Standardowe pochodne - Pochodna iloczynu funkcji - Pochodna ilorazu dwóch funkcji - Pochodna funkcji złożonej - Pochodna $y = a^x$ - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Metoda iteracyjna Newtona	338
Zapis - Tabelaryczne przedstawienie wyników - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.12</i>	344
<i>Zadania sprawdzające F.12</i>	345
<i>Dalsze wyzwania F.12</i>	346

Program F.13 Całkowanie 347

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	347
<i>Quiz F.13</i>	348
Całkowanie	349
Stała całkowania - Całki standardowe - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Całkowanie wielomianów	352
Funkcje funkcji liniowej x - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Całkowanie funkcji wymiernej z użyciem rozkładu na ułamki proste	357
Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Pola obszarów pod krzywymi	360
Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Całkowanie jako sumowanie	364
Pole figury ograniczonej krzywą i przecinającą ją prostą - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.13</i>	373
<i>Zadania sprawdzające F.13</i>	374
<i>Dalsze wyzwania F.13</i>	375

Część II

377

Program 1	Liczby zespolone 1	379
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>		379
Wprowadzenie		380
Pojęcia i symbole		
Symbol i		380
Równania kwadratowe		
Potęgi i		383
Potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim - Potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym		
Liczby zespolone		384
Dodawanie i odejmowanie - Mnożenie - Dzielenie - Równość liczb zespolonych - Ćwiczenia na powtórzenie		
Przedstawienie graficzne liczb zespolonych		393
Diagram Arganda - Interpretacja geometryczna sumy liczb zespolonych		
Postać trygonometryczna liczb zespolonych		395
Postać wykładnicza liczb zespolonych		400
Podsumowanie		402
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 1</i>		403
<i>Zadania sprawdzające 1</i>		403
<i>Dalsze wyzwania 1</i>		404
Program 2	Liczby zespolone 2	406
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>		406
Obliczenia dla postaci trygonometrycznej		407
Ćwiczenia na powtórzenie		
Pierwiastki liczby zespolonej		415
Rozwinięcia		421
Rozwinięcia $\sin n\theta$ i $\cos n\theta$ - Rozwinięcia $\cos^n\theta$ i $\sin^n\theta$		
Miejsca geometryczne		424
Podsumowanie		427
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 2</i>		428
<i>Zadania sprawdzające 2</i>		428
<i>Dalsze wyzwania 2</i>		429
Program 3	Funkcje hiperboliczne	431
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>		431
Wprowadzenie		432
Wykresy funkcji hiperbolicznych		434
Ćwiczenia na powtórzenie		
Obliczanie wartości funkcji hiperbolicznych		439
Funkcje odwrotne względem funkcji hiperbolicznych		440
Postać logarytmiczna funkcji odwrotnych do funkcji hiperbolicznych		442
Tożsamości hiperboliczne		445
Zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi i hiperbolicznymi		447
Podsumowanie		450
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 3</i>		451
<i>Zadania sprawdzające 3</i>		451
<i>Dalsze wyzwania 3</i>		452
Program 4	Wyznaczniki	453

Czego się nauczę z tego programu?	453
Wyznaczniki	454
Wyznaczniki trzeciego stopnia	460
Obliczanie wyznaczników trzeciego stopnia	
Układy równań liniowych z trzema niewiadomymi	464
Ćwiczenia na powtórzenie	
Zgodność układu równań liniowych	472
Własności wyznaczników	475
Podsumowanie	479
Czy potrafisz? Lista kontrolna 4	480
Zadania sprawdzające 4	480
Dalsze wyzwania 4	481

Program 5	Macierze	484
------------------	-----------------	------------

Czego się nauczę z tego programu?	484
Macierze - definicje	485
Zapis macierzowy	486
Równość macierzy	487
Dodawanie i odejmowanie macierzy	487
Mnożenie macierzy	488
Mnożenie macierzy przez skalar - Mnożenie dwóch macierzy	
Macierz transponowana	491
Macierze specjalne	492
Wyznacznik macierzy kwadratowej	494
Dopełnienia algebraiczne elementów macierzy - Macierz kwadratowa dołączona	
Macierz odwrotna do macierzy kwadratowej nieosobliwej	496
Iloczyn macierzy kwadratowej i macierzy do niej odwrotnej	
Rozwiązywanie układów równań liniowych	499
Metoda eliminacji Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych	
Wartości własne i wektory własne macierzy	504
Wartości własne - Wektory własne	
Twierdzenie Cayleya – Hamiltona	509
Macierze odwrotne - Podnoszenie macierzy do potęgi o wykładniku całkowitym	
Podsumowanie	513
Czy potrafisz? Lista kontrolna 5	514
Zadania sprawdzające 5	515
Dalsze wyzwania 5	516

Program 6	Wektory	519
------------------	----------------	------------

Czego się nauczę z tego programu?	519
Wprowadzenie: Wartości skalarne i wektorowe	520
Przedstawienie wektorowe	521
Dwa równe wektory - Typy wektorów - Dodawanie wektorów - Suma dowolnej liczby wektorów	
Składowe danego wektora	524
Składowe wektorów wyrażone przez wektory jednostkowe	
Wektory w przestrzeni	530
Cosinusy kierunkowe	532
Iloczyn skalarny dwóch wektorów	533
Iloczyn wektorowy dwóch wektorów	535
Kąt między dwoma wektorami	537
Stosunki kierunkowe	540

Podsumowanie	540
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 6</i>	541
<i>Zadania sprawdzające 6</i>	541
<i>Dalsze wyzwania 6</i>	542
Program 7 Różniczkowanie	544
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	544
Pochodne standardowe	545
Złożenie funkcji	546
Iloczynny - Ilorazy	
Pochodna logarytmiczna	552
Ćwiczenia na powtórzenie	
Funkcje uwikłane	555
Równania parametryczne	557
Podsumowanie	559
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 7</i>	560
<i>Zadania sprawdzające 7</i>	560
<i>Dalsze wyzwania 7</i>	561
Program 8 Zastosowania różniczkowania	563
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	563
Różniczkowanie funkcji odwrotnych do funkcji trygonometrycznych	564
Ćwiczenia na powtórzenie	
Pochodne funkcji odwrotnych do funkcji hiperbolicznych	566
Ćwiczenia na powtórzenie	
Wartości minimum i maksimum	571
Punkty przegięcia	575
Podsumowanie	581
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 8</i>	581
<i>Zadania sprawdzające 8</i>	582
<i>Dalsze wyzwania 8</i>	582
Program 9 Styczne, normalne i krzywizny	585
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	585
Równanie prostej	586
Styczne i normalne do krzywej w danym punkcie	589
Krzywizna	594
Środek krzywizny	
Podsumowanie	603
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 9</i>	604
<i>Zadania sprawdzające 9</i>	604
<i>Dalsze wyzwania 9</i>	605
Program 10 Ciągi	607
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	607
Funkcje określone dla liczb całkowitych	608
Ciągi - Wykresy ciągów - Ciąg arytmetyczny - Ciąg geometryczny - Ciąg harmoniczny - Określenie rekurencyjne - Inne ciągi - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Równania różnicowe	620
Rozwiązywanie równań różnicowych - Równania jednorodne drugiego rzędu - Równe pierwiastki równania charakterystycznego - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	

Granice ciągów	629
Nieskończoność - Granice - Granice nieskończone - Reguły dotyczące granic - Symbole nieoznaczone (granice nieokreślone) - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 10</i>	637
<i>Zadania sprawdzające 10</i>	638
<i>Dalsze wyzwania 10</i>	639
Program 11 Szeregi 1	642
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	642
Szeregi	643
Szeregi arytmetyczne - Średnia arytmetyczna - Szeregi geometryczne - Średnia geometryczna	
Szeregi liczb naturalnych w ustalonej potęgde	648
Suma liczb naturalnych - Suma kwadratów - Suma sześciątów	
Szeregi nieskończone	651
Granice	653
Szeregi zbieżne i rozbieżne - Testy zbieżności - Zbieżność bezwzględna	
Podsumowanie	662
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 11</i>	663
<i>Zadania sprawdzające 11</i>	663
<i>Dalsze wyzwania 11</i>	664
Program 12 Szeregi 2	666
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	666
Szeregi potęgowe	667
Wprowadzenie - Szereg Maclaurina - Szeregi standardowe - Szeregi dwumianowe	
Wartości przybliżone	677
Szereg Taylora	
Granice funkcji – symbole nieoznaczone	680
Reguła de l'Hospitala do wyznaczania granic wyrażeń nieoznaczonych	
Podsumowanie	687
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 12</i>	688
<i>Zadania sprawdzające 12</i>	689
<i>Dalsze wyzwania 12</i>	689
Program 13 Krzywe i dopasowanie krzywej	692
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	692
Wprowadzenie	693
Standardowe krzywe	693
Linia prosta - Krzywe drugiego stopnia - Krzywe trzeciego stopnia - Okrąg - Elipsa - Hiperbola - Krzywe logarytmiczne - Krzywe wykładnicze - Krzywe hiperboliczne - Krzywe trygonometryczne - Tangensoida	
Asymptoty	702
Określenie asymptoty ukośnej - Asymptoty równoległe do osi x i y	
Systematyczne rysowanie krzywych na podstawie równania	707
Symetria - Punkty przecięcia z osiami - Przesunięcie względem początku układu współrzędnych - Asymptoty - Duże i małe wartości x i y - Punkty stacjonarne - Ograniczenia	
Dopasowywanie krzywej	712
Zależność liniowa - Wykresy w postaci $y = ax^n$, gdzie a i n są stałymi - Wy- kresy w postaci $y = ae^{nx}$	

Program 18	Całkowanie z użyciem wzorów rekurencyjnych	828
	<i>Czego się nauczę z tego rozdziału?</i>	828
	Podsumowanie	838
	<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 18</i>	838
	<i>Zadania sprawdzające 18</i>	838
	<i>Dalsze wyzwania 18</i>	839
Program 19	Zastosowania całkowania 1	841
	<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	841
	Podstawowe zastosowania	842
	Obszar pod krzywą - Całki oznaczone	
	Równania parametryczne	850
	Wartości średnie	851
	Wartość średnia kwadratowa (RMS)	853
	Podsumowanie	855
	<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 19</i>	856
	<i>Zadania sprawdzające 19</i>	856
	<i>Dalsze wyzwania 19</i>	857
Program 20	Zastosowania całkowania 2	859
	<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	859
	Wprowadzenie	860
	Objętość bryły obrotowej	860
	Środek geometryczny figury płaskiej	864
	Środek ciężkości bryły obrotowej	867
	Długość krzywej	868
	Równania parametryczne	
	Powierzchnia boczna bryły obrotowej	872
	Równania parametryczne	
	Reguła Pappusa-Guldina	875
	Podsumowanie	876
	<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 20</i>	877
	<i>Zadania sprawdzające 20</i>	878
	<i>Dalsze wyzwania 20</i>	878
Program 21	Zastosowania całkowania 3	881
	<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	881
	Momenty bezwładności	882
	Promień bezwładności - Twierdzenie o osiach równoległych - Twierdzenie o osiach prostopadłych (dla cienkich płytek) - Przydatne wyniki standardowe	
	Geometryczny moment bezwładności	896
	Figury złożone	
	Środek parcia	900
	Ciśnienie w punkcie P o głębokości z poniżej lustra płynu - Całkowite parcie na pionową płytkę zanurzoną w płynie - Głębokość środka parcia	
	Podsumowanie	906
	<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 21</i>	906
	<i>Zadania sprawdzające 21</i>	907
	<i>Dalsze wyzwania 21</i>	908
Program 22	Całkowanie numeryczne	910
	<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	910

Wprowadzenie	911
Całkowanie numeryczne	912
Za pomocą szeregów - Z użyciem metody Simpsona	
Dowód metody Simpsona	924
Podsumowanie	925
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 22</i>	926
<i>Zadania sprawdzające 22</i>	926
<i>Dalsze wyzwania 22</i>	927

Program 23 Układ współrzędnych biegunowych 929

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	929
Wprowadzenie do współrzędnych biegunowych	930
Krzywe biegunowe	932
Standardowe krzywe biegunowe	934
Zastosowania	937
Podsumowanie	948
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 23</i>	949
<i>Zadania sprawdzające 23</i>	949
<i>Dalsze wyzwania 23</i>	950

Program 24 Całki wielokrotne 951

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	951
Sumowanie w dwóch kierunkach	952
Całki podwójne	955
Całki potrójne	957
Zastosowania	959
Ćwiczenia na powtórzenie	
Zapis alternatywny	964
Obliczenia pól powierzchni z użyciem całek wielokrotnych	968
Obliczanie objętości brył z użyciem całek wielokrotnych	970
Podsumowanie	973
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 24</i>	974
<i>Zadania sprawdzające 24</i>	974
<i>Dalsze wyzwania 24</i>	975

Program 25 Równania różniczkowe pierwszego rzędu 977

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	977
Wprowadzenie	978
Tworzenie równań różniczkowych	979
Rozwiązywanie równań różniczkowych	981
Za pomocą bezpośredniego całkowania - Przez rozdzielenie zmiennych -	
Ćwiczenia na powtórzenie	
Rozwiązywanie równań różniczkowych	988
Równania jednorodne – przez podstawienie $y = vx$ - Ćwiczenia na powtórzenie	
Rozwiązywanie równań różniczkowych	994
Równania liniowe – użycie czynnika całkującego - Ćwiczenia na powtórzenie	
Równanie Bernoulliego	1002
Podsumowanie	1007
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 25</i>	1008
<i>Ćwiczenia testowe 25</i>	1009
<i>Dalsze wyzwania 25</i>	1009

Program 26	Równania różniczkowe drugiego rzędu	1013
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>		1013
Równania jednorodne		1014
Ćwiczenia na powtórzenie		
Równania niejednorodne		1022
Rozwiązanie szczególne		1029
Podsumowanie		1033
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 26</i>		1033
<i>Zadania sprawdzające 26</i>		1034
<i>Dalsze wyzwania 26</i>		1034
Program 27	Wprowadzenie do transformat Laplace'a	1036
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>		1036
Transformata Laplace'a		1037
Odwrotna transformata Laplace'a - Tabela transformat Laplace'a - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie		
Transformata Laplace'a		1041
Transformata Laplace'a pochodnej - Dwie własności transformat Laplace'a - Tabela transformat Laplace'a - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie		
Transformata Laplace'a		1045
Generowanie nowych transformat - Transformaty Laplace'a pochodnych wyższych rzędów - Tabela transformat Laplace'a - Równania różniczkowe niejednorodne, liniowe, o stałych współczynnikach - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie		
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 27</i>		1051
<i>Zadania sprawdzające 27</i>		1052
<i>Dalsze wyzwania 27</i>		1052
Program 28	Przetwarzanie danych i statystyka	1054
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>		1054
Wprowadzenie		1055
Porządkowanie		1055
Tabela zliczania metodą kreskową - Grupowanie danych - Grupowanie danych ciągłych - Częstość względna - Zaokrąglanie danych - Granice klas		
Histogramy		1062
Histogram częstości - Histogram częstości względnej		
Miary tendencji centralnej		1064
Średnia - Kodowanie przy obliczaniu średniej - Dekodowanie - Kodowanie w zgrupowanych rozkładach częstości - Moda - Moda w danych zgrupowanych - Mediana - Mediana z pogrupowanych danych		
Miary rozproszenia		1072
Średnie odchylenie - Rozstęp - Odchylenie standardowe - Alternatywny wzór na odchylenie standardowe		
Krzywe rozkładu		1075
Wielokąty częstości - Krzywe częstości - Krzywa rozkładu normalnego		
Standaryzowana krzywa normalna		1078
Podsumowanie		1079
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 28</i>		1080
<i>Zadania sprawdzające 28</i>		1081
<i>Dalsze wyzwania 28</i>		1082

Program 29	Prawdopodobieństwo	1085
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>		1085
Prawdopodobieństwo		1086
Doświadczenia losowe - Zdarzenia - Seria doświadczeń losowych - Łączenie zdarzeń		
Zdarzenia i prawdopodobieństwa		1088
Prawdopodobieństwo - Przypisywanie prawdopodobieństw - Podsumowanie		
Prawdopodobieństwa zdarzeń łączonych		1091
Lub - Zdarzenia niewykluczające się wzajemnie - I - Zdarzenia zależne - Zdarzenia niezależne - Drzewka prawdopodobieństwa - Podsumowanie		
Prawdopodobieństwo warunkowe		1096
Rozkłady prawdopodobieństwa		1099
Zmienne losowe - Wartość oczekiwana - Wariancja i odchylenie standardowe - Próby Bernoulliego - Rozkład dwumianowy prawdopodobieństwa - Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe - Rozkład prawdopodobieństwa Poissona - Porównanie rozkładu dwumianowego i Poissona		
Ciągłe rozkłady prawdopodobieństwa		1115
Krzywa rozkładu normalnego (lub krzywa normalna)		
Standaryzowana krzywa normalna		1115
Podsumowanie		
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 29</i>		1121
<i>Zadania sprawdzające 29</i>		1122
<i>Dalsze wyzwania 29</i>		1123
<i>Odpowiedzi</i>		1126
<i>Indeks</i>		1153