

Spis treści

Wstęp	xv
I Analiza z lotu ptaka: granica, pochodna i całka	1
1 Prolog	5
1.1 Odkrywanie wzorów i zasada indukcji	5
1.2 Dwumian Newtona	14
2 Granica ciągu	19
2.1 Intuicje i rachunki	20
2.2 Trochę teorii i algorytm Herona	26
2.3 Liczba π	29
2.4 Archimedes	32
3 Granica i ciągłość. Eksponenta i logarytm naturalny	33
3.1 Granice, asymptoty i aproksymacje	34
3.2 Ciągłość	39
3.3 Eksponenta, logarytm naturalny i okres podwojenia	42
4 Pochodna: pierwsze podejście	47
4.1 Pochodna i prędkość	47
4.2 Geometryczne spojrzenie na pochodną	55
4.3 Wykresy wielomianów	59
4.4 Kartezjusz i Fermat	62
5 Całka: pierwsze podejście	63
5.1 Całka oznaczona — nieformalne wprowadzenie	63
5.2 Całka nieoznaczona i wzór Newtona-Leibniza	68
5.3 O sumowaniu potęg: dwie aproksymacje	72

II	Pochodne i aproksymacje	75
6	Obliczanie pochodnych	79
6.1	Pochodna iloczynu i pochodna ilorazu	79
6.2	Pochodna funkcji złożonej	82
6.3	Funkcja odwrotna i jej pochodna	85
7	Funkcje trygonometryczne i kołowe	89
7.1	Funkcje trygonometryczne	90
7.2	Funkcje kołowe	94
8	Kilka twierdzeń o istnieniu	97
8.1	Dwa twierdzenia o ciągłości	97
8.2	Twierdzenia Lagrange’a i jego konsekwencje	101
8.3	Reguły de l’Hospitála i twierdzenie Cauchy’ego	105
8.4	Lagrange, Cauchy i Weierstrass	110
9	Monotoniczność, ekstrema i wypukłość	111
9.1	Monotoniczność i ekstrema	111
9.2	Zadania na maksimum i minimum. Izoperymetria	117
9.3	Wypukłość	121
10	Aproksymacje wielomianowe	123
10.1	Aproksymacje liniowe i wzór Taylora	123
10.2	Rozwinięcia Maclaurina	126
10.3	Krótki dowód wzoru Taylora*	130
10.4	Anglicy i Szkoci	131
11	Przybliżone rozwiązywanie równań	133
11.1	Połowienie przedziału i pierwiastki wielomianów	133
11.2	Metoda Newtona i algorytm Herona	136
III	Całka: pole, długość i objętość	139
12	Całka oznaczona	143
12.1	Definicja i własności całki oznaczonej	143
12.2	Wzór Newtona-Leibniza	149
12.3	Twierdzenie o postaci funkcji pierwotnej	152

13 Techniki całkowania	155
13.1 Całkowanie przez podstawienie	155
13.2 Całkowanie przez części i redukcje	160
13.3 Newton i Leibniz	163
14 Całkowanie funkcji wybranych klas	165
14.1 Całkowanie funkcji wymiernych	165
14.2 Całkowanie funkcji trygonometrycznych	170
14.3 Funkcje hiperboliczne	174
15 Pola, długości i objętości	179
15.1 Pole figury i długość krzywej	179
15.2 Bryły obrotowe	184
15.3 Dwaj Jezuici: Guldin i Cavalieri	190
16 Metody przybliżone	191
16.1 Cztery proste metody	191
16.2 Reguła Simpsona i obliczanie π	194
16.3 Simpson	196
17 Całki niewłaściwe	197
17.1 Całki niewłaściwe	197
17.2 Kryteria zbieżności	201
17.3 Nadzwyczaj użyteczna całka	203
18 Objętość kuli i funkcja gamma*	207
18.1 Objętość kuli n -wymiarowej	207
18.2 Funkcja gamma	210
19 Wzór Stirlinga i wzór Wallisa*	215
19.1 Wzór Stirlinga i aproksymacje całkowite	215
19.2 Wzór Wallisa	218
IV Szeregi	221
20 Szeregi i iloczyny	225
20.1 Szereg geometryczny	226
20.2 Szereg harmoniczny i szeregi pokrewne	229
20.3 Iloczyny nieskończone	233
20.4 Euler	235

21 Kryteria zbieżności szeregów	237
21.1 Uogólniony szereg harmoniczny i kryterium całkowite	237
21.2 Dwa dalsze kryteria: porównawcze i ilorazowe	239
21.3 Dwa typy zbieżności	242
21.4 Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego	245
21.5 O rozmieszczeniu liczb pierwszych*	247
21.6 D'Alembert	248
22 Szeregi potęgowe	249
22.1 Rozwijanie funkcji w szereg Maclaurina	250
22.2 Funkcje zadane szeregiem potęgowym	255
23 Operacje na szeregach i wzór Leibniza	259
23.1 Operacje na szeregach	259
23.2 Wzór Leibniza i obliczanie π	263
23.3 Szalone rachunki Leonarda Eulera*	267
24 Liczby zespolone i funkcje przestępne	269
24.1 Liczby zespolone	270
24.2 Eksponenta zespolona i najpiękniejszy wzór matematyki	272
24.3 Liczby zespolone, logarytmy i całki*	275
25 Szeregi Fouriera	279
25.1 Szeregi Fouriera	279
25.2 Kwestie zbieżności	284
25.3 Fourier, Dirichlet i Riemann	289
V Krótkie spojrzenie na równania różniczkowe	291
26 Równania o zmiennych rozdzielonych	295
26.1 Podstawowe pojęcia	295
26.2 Technika rozwiązywania równań	297
27 Równanie rozpadu i modele wzrostu populacji	301
27.1 Równanie rozpadu i jego warianty	301
27.2 Modele wzrostu populacji	305
28 Liniowość i układy drgające	309
28.1 Równania liniowe I rzędu	309
28.2 Równania liniowe II rzędu	312

28.3	Równanie układu drgającego*	317
28.4	Bernoulli	320
29	Równania różniczkowe i szeregi	321
29.1	Znane równania — nowe podejście	321
29.2	Trudne równania i funkcje specjalne*	325
30	Transformata Laplace’a	329
30.1	Wzory i własności	329
30.2	Zastosowania	332
31	Epilog	337
31.1	Co już wiemy ...	337
31.2	... a czego nie wiemy	338
	Odpowiedzi i wskazówki	339
	Indeks	353