

Potenz- und Wurfelfunktionen

Stefan Rothe

14.01.2025

Inhaltsverzeichnis

1	Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten	2
2	Repetition Quadratwurzeln	4
3	Allgemeine Wurzeln	6
4	Funktionseigenschaften	7
5	Potenzfunktionen	9

© Gymnasium Kirchenfeld

*Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)*

1 Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten

1.1 Potenzgesetze

Potenz mit natürlichem Exponenten. Die Potenz k gibt an, wie oft die Basis a mit dem Ausgangswert 1 multipliziert wird.

$$a^k := 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{k\text{-mal}}$$

Spezialfälle:

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Der Wert von 0^0 ist nicht definiert.

Beispiele: $2^3 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $(\sqrt{2})^4 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$

Potenz mit negativem Exponent. Die Potenz einer Zahl a mit einem negativen Exponenten $-k$ ist der Kehrwert der Potenz mit der Gegenzahl k im Exponenten.

$$a^{-k} := \frac{1}{a^k} = \frac{1}{1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{k\text{-mal}}}$$

Beispiele: $4^{-7} = \frac{1}{4^7}$ $3^{-1} = \frac{1}{3}$ $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$

Negative Basis. Die Potenz einer negativen Zahl $-a$ mit einem **geraden Exponenten** k ist gleich der Potenz mit der Gegenzahl a als Basis.

$$(-a)^k = a^k \quad \text{wenn } k \text{ gerade}$$

Die Potenz einer negativen Zahl $-a$ mit einem **ungeraden Exponenten** k ist gleich der Gegenzahl der Potenz mit der Gegenzahl a als Basis.

$$(-a)^k = -a^k \quad \text{wenn } k \text{ ungerade}$$

Beispiele: $(-3)^2 = 3^2 = 9$ $(-3)^3 = -3^3 = -27$

Produkt mit gleicher Basis. Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Potenzen addiert werden:

$$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$$

Beispiele: $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$ $3 \cdot 3^{-3} = 3^{1+(-3)} = 3^{-2}$

Quotient mit gleicher Basis. Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Potenzen subtrahiert werden:

$$\frac{a^k}{a^m} = a^{k-m}$$

Beispiele: $\frac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1}$ $\frac{3^{-2}}{3^{-4}} = 3^{-2-(-4)} = 3^2$

Produkt mit gleichem Exponent. In einem Produkt können gleiche Exponenten ausgeklammert werden:

$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$$

Beispiele: $5^3 \cdot 3^3 = (5 \cdot 3)^3 = 15^3$ $2^{-2} \cdot 7^{-2} = (2 \cdot 7)^{-2} = 14^{-2}$

Quotient mit gleichem Exponent. In einem Bruch können gleiche Exponenten ausgeklammert werden:

$$\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

Beispiele: $\frac{4^6}{2^6} = \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^6$ $\frac{3^{-2}}{5^{-2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = 0.6^{-2}$

Potenz einer Potenz. Potenzen werden potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$(a^k)^m = a^{k \cdot m}$$

Beispiele: $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$ $(5^2)^{-2} = 5^{2 \cdot (-2)} = 5^{-4}$

2 Repetition Quadratwurzeln

2.1 Definition

Welche Zahl muss quadriert werden, um Neun zu erhalten?

$$\square^2 = 9$$

Diese Frage wird mit Hilfe der Umkehroperation, dem Wurzelziehen oder Radizieren, beantwortet. Als Resultat ergibt sich

$$\sqrt{9} = \square$$

Dabei ist zu beachten, dass es zwei Zahlen gibt, deren Quadrat Neun ist, nämlich 3 und -3 . Damit das Wurzelziehen eindeutig ist, wird festgelegt, dass das eine Wurzel nie negativ sein kann.

Welche Zahl muss quadriert werden, um -9 zu erhalten?

$$\square^2 = -9$$

Das ein Quadrat nie negativ sein kann, gibt es keine Antwort auf diese Frage. Das Wurzelziehen aus negativen Zahlen ist somit nicht definiert.

Definition: Das Wurzelziehen oder Radizieren ist die Umkehroperation des Quadrierens. Mit dem Radizieren wird die unbekannte, nicht-negative Basis eines Quadrates berechnet:

$$x^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{a} \quad (x \geq 0)$$

Das Radizieren einer negativen Zahl ist nicht definiert.

Beispiele: $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{-4}$ ist nicht definiert.

2.2 Schreib- und Sprechweise

Die Zahl a welche radiziert wird, heisst **Radikand**. Das Resultat des Wurzelziehens heisst **Wurzel** oder **Radikal**.

Für das Wurzelziehen wird das Operationszeichen $\sqrt{}$ verwendet. Wir schreiben

$$\sqrt{a} = b$$

und sagen «Die Wurzel von a ist gleich b .»

Beispiel: Die Wurzel von 49 ist Sieben: $\sqrt{49} = 7$

2.3 Gesetze

Wurzeln können gemäss der folgenden Gesetze umgeformt werden.

Produktregel. Das Produkt zweier Wurzeln ist gleich der Wurzel aus dem Produkt der beiden Radikanden.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Das Produkt zweier gleicher Wurzeln ist gleich dem Radikanden:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

Beispiele: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$

Quotientenregel. Der Quotient zweier Wurzeln ist gleich der Wurzel des Quotienten der beiden Radikanden.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Beispiele: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

Quadrieren einer Wurzel. Das Quadrat einer Wurzel ist gleich dem Radikanden. Dabei muss natürlich beachtet werden, dass der Radikand nicht negativ sein kann.

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad a \geq 0$$

Beispiele: $(\sqrt{5})^2 = 5$ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$

Wurzel eines Quadrats. Die Wurzel eines Quadrats ist gleich dem Betrag der Basis.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Hier kann a durchaus eine negative Zahl sein, da ja der Radikand a^2 in jedem Fall positiv ist. Da das Resultat der Wurzel gemäss Definition nicht negativ sein kann, muss hier der Betrag von a genommen werden.

Beispiele: $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

3 Allgemeine Wurzeln

3.1 Motivation

Das radizieren oder ziehen der Quadratwurzel liefert die Antwort auf die Frage, welche Zahl quadriert werden muss, um eine bestimmte Zahl zu erhalten.

Geometrisch gesehen wird mit dem ziehen der Quadratwurzel die Seitenlänge eines Quadrats mit gegebenem Flächeninhalt bestimmt.

Analog kann aber auch gefragt werden, welche Seitenlänge ein Würfel mit gegebenem Volumen hat. Oder algebraisch ausgedrückt: Welche Zahl muss mit drei potenziert werden, um beispielsweise 27 zu erhalten?

$$\square^3 = 27$$

Um diese Frage zu beantworten, wird der Wurzelbegriff erweitert.

Definition: Das Wurzelziehen oder Radizieren ist die Umkehroperation des Potenzierens. Mit dem Radizieren wird die unbekannte, nicht-negative Basis der Potenz berechnet:

$$x^k = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[k]{a} \quad (x \geq 0)$$

3.2 Schreib- und Sprechweise

Die Zahl a welche radiziert wird, heisst **Radikand**, die Zahl k heisst **Wurzelexponent**. Das Resultat des Wurzelziehens heisst k -te **Wurzel** oder k -tes **Radikal**.

Für das Wurzelziehen wird das Operationszeichen $\sqrt[k]{}$ verwendet. Der Wurzelexponent wird oben links hingeschrieben. Wir schreiben

$$\sqrt[k]{a} = b$$

und sagen «Die k -te Wurzel von a ist gleich b .»

Beispiel: Die dritte Wurzel von 125 ist 5: $\sqrt[3]{125} = 5$

4 Funktionseigenschaften

4.1 Spiegelsymmetrie bezüglich y-Achse

Satz: Der Funktionsgraph von f ist spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse, falls für alle Werte x gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

Dieser Zusammenhang soll an dem folgenden Beispiel verdeutlicht werden. Zunächst wird beliebige eine Position auf der x-Achse x gewählt. Nun wird der Punkt P ermittelt, der an dieser Stelle auf dem Funktionsgraph liegt. Er hat die Koordinaten $P(x/f(x))$. Nun wird der Punkt an der y-Achse gespiegelt. Der Spiegelpunkt hat die gleiche x-Koordinate wie der Originalpunkt, die y-Koordinate wird negiert. Somit hat der Spiegelpunkt die Koordinaten

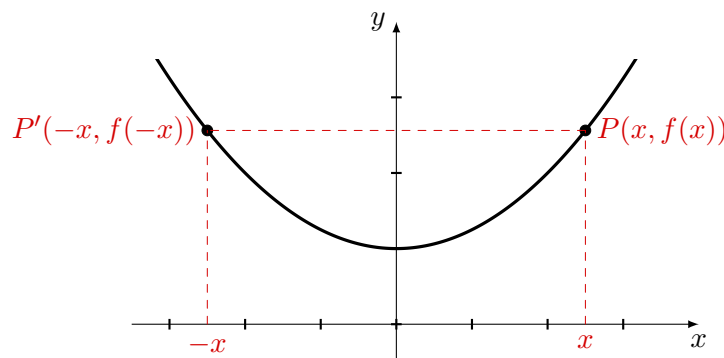
$$P'(-x/f(x))$$

Wenn aber der Spiegelpunkt auch auf dem Funktionsgraph liegen soll, muss er die Koordinaten

$$P'(-x/f(-x))$$

haben. Die y-Koordinate des Punkts P' ist immer gleich, also gilt

$$f(x) = f(-x)$$



Alle Potenzfunktionen mit einem geraden Exponenten sind symmetrisch bezüglich der y-Achse.

Beispiel: $f(x) = x^2$ ist spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse, da

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

4.2 Punktsymmetrie bezüglich Ursprung

Satz: Der Funktionsgraph von f ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs, falls für alle Werte x gilt:

$$-f(x) = f(-x)$$

Dieser Zusammenhang soll an dem folgenden Beispiel verdeutlicht werden. Zunächst wird beliebige eine Position auf der x-Achse x gewählt. Nun wird der Punkt P ermittelt, der an dieser Stelle auf dem Funktionsgraph liegt. Er hat die Koordinaten $P(x/f(x))$. Nun wird der Punkt am Ursprung gespiegelt. Beim Spiegelpunkt werden beide Koordinaten negiert. Somit hat der Spiegelpunkt die Koordinaten

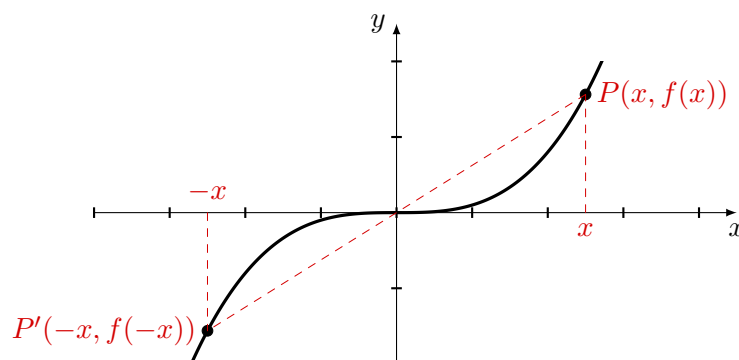
$$P'(-x/-f(x))$$

Wenn aber der Spiegelpunkt auch auf dem Funktionsgraph liegen soll, muss er die Koordinaten

$$P'(-x/f(-x))$$

haben. Die y-Koordinate des Punkts P' ist immer gleich, also gilt

$$-f(x) = f(-x)$$



Alle Potenzfunktionen mit einem ungeraden Exponenten sind punktsymmetrisch bezüglich dem Ursprung.

Beispiel: $f(x) = x^3$ ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs, da

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

5 Potenzfunktionen

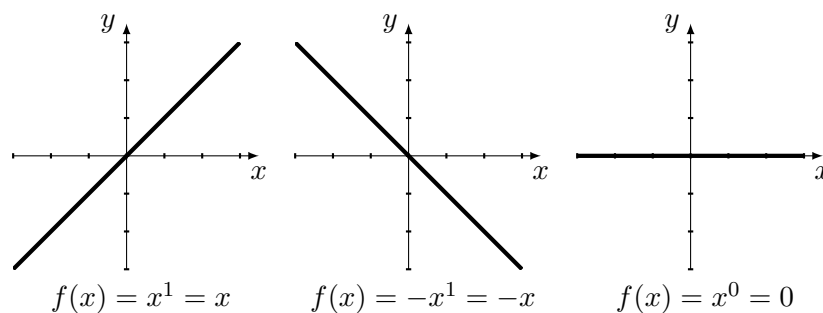
Für jede natürliche Zahl k und jede reelle Zahl $a \neq 0$ heisst die Funktion

$$f(x) = a \cdot x^k$$

Potenzfunktion k -ten Grades.

5.1 Spezialfälle

Für den Exponenten 1 entsteht eine lineare Funktion, für den Exponenten 0 ist die Funktion konstant.

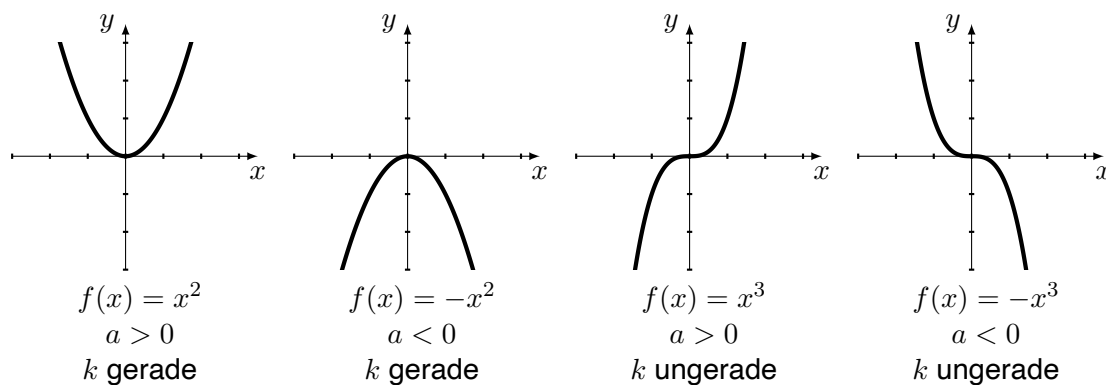


5.2 Natürliche Exponenten

In diesem Fall ist der Exponent eine natürliche Zahl grösser als Eins, die Potenzfunktion sieht so aus:

$$f(x) = a \cdot x^k \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$$

Der Graph von Potenzfunktionen nimmt abhängig von k und a folgende Formen an:



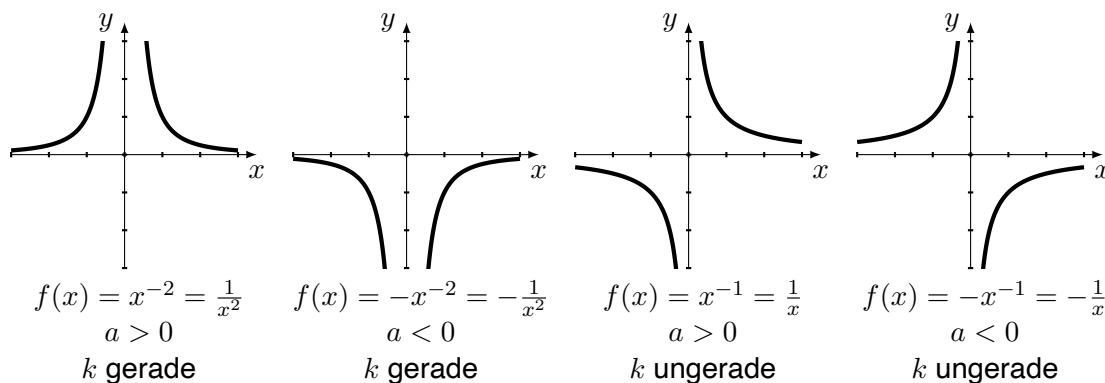
Potenzfunktionen mit geradem Exponenten sind spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse. Potenzfunktionen mit ungeradem Exponenten sind punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

5.3 Negative Exponenten

In diesem Fall ist der Exponent eine negative ganze Zahl, die Potenzfunktion sieht so aus:

$$f(x) = a \cdot x^{-k} = a \cdot \frac{1}{x^k} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Der Graph von Potenzfunktionen nimmt abhängig von k und a folgende Formen an:



5.4 Rationale Exponenten

In diesem Fall ist der Exponent eine rationale Zahl, d.h. ein Bruch, und die Potenzfunktion sieht so aus:

$$f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{k}} = a \cdot \sqrt[k]{x} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Hier ändert sich die Form des Funktionsgraphen mit der Veränderung von k nicht grundlegend. Da jedoch Wurzeln nur für Positive Zahlen definiert sind, entsteht ein an der y-Achse gespiegelter Funktionsgraph, wenn x durch $-x$ ersetzt wird.

