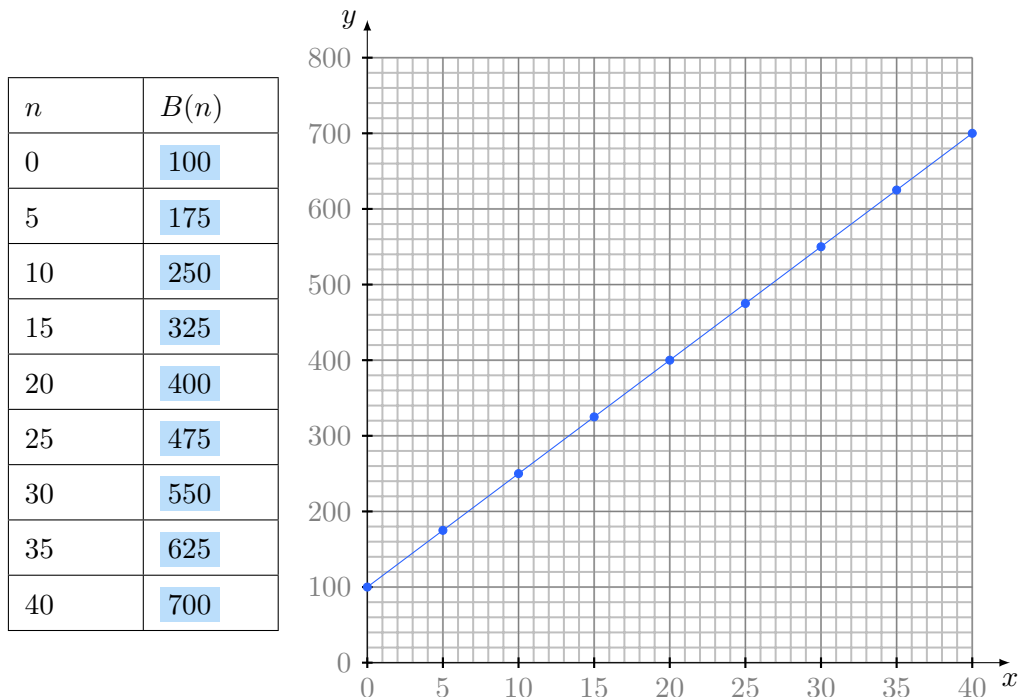


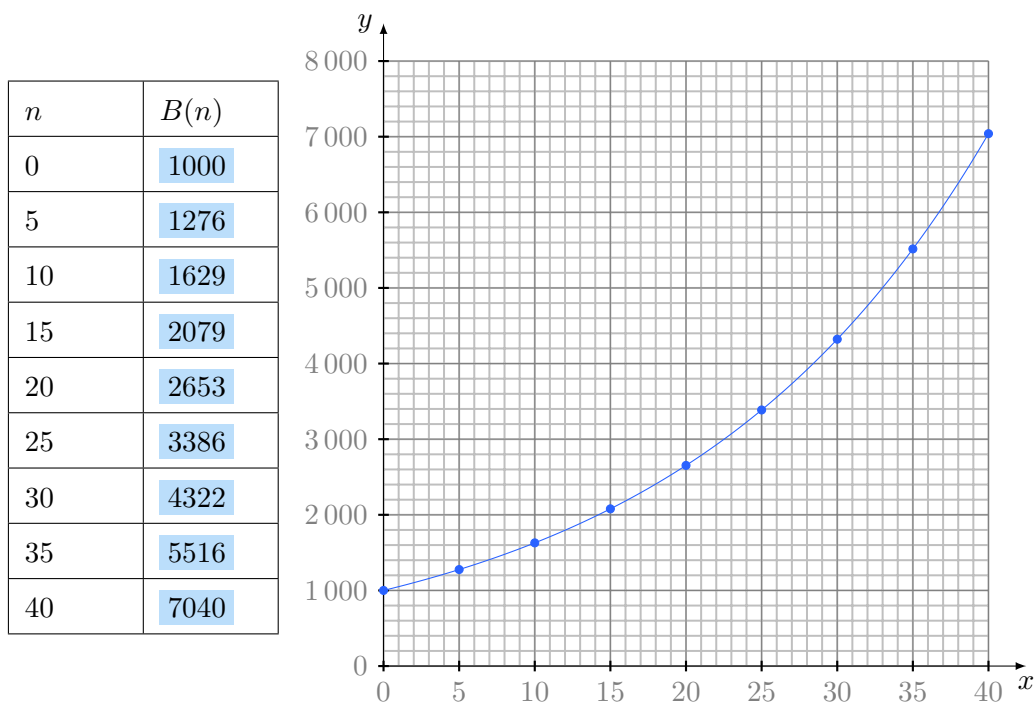
Wachstumsvorgänge

1. Geld

- (a) Sie haben zum Geburtstag eine Spardose mit 100 Franken erhalten. Jeden Monat legen Sie 15 Franken in die Spardose. Wieviel Geld haben Sie nach n Monaten?

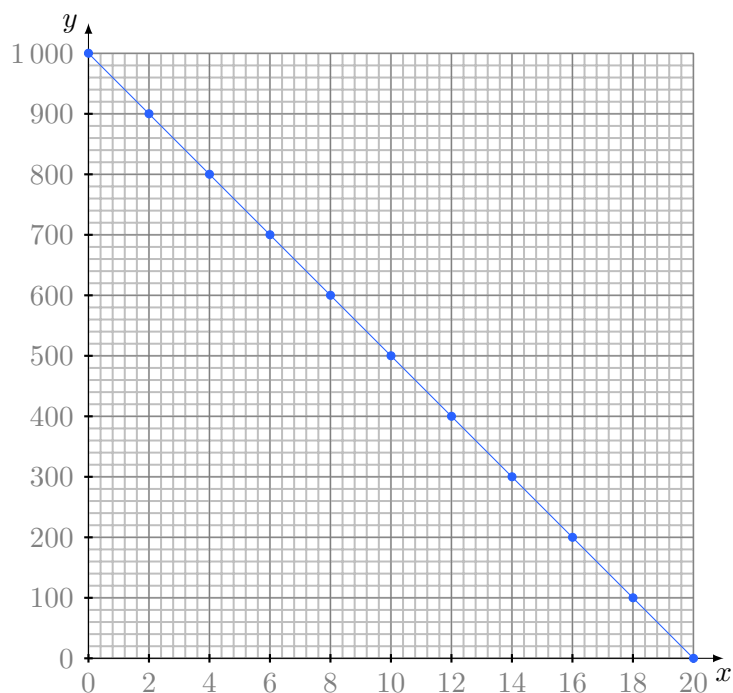


- (b) Sie legen 1000 Franken auf einem Sparkonto mit einem jährlichen Zinssatz von 5 % an. Wieviel Guthaben haben Sie nach n Jahren?



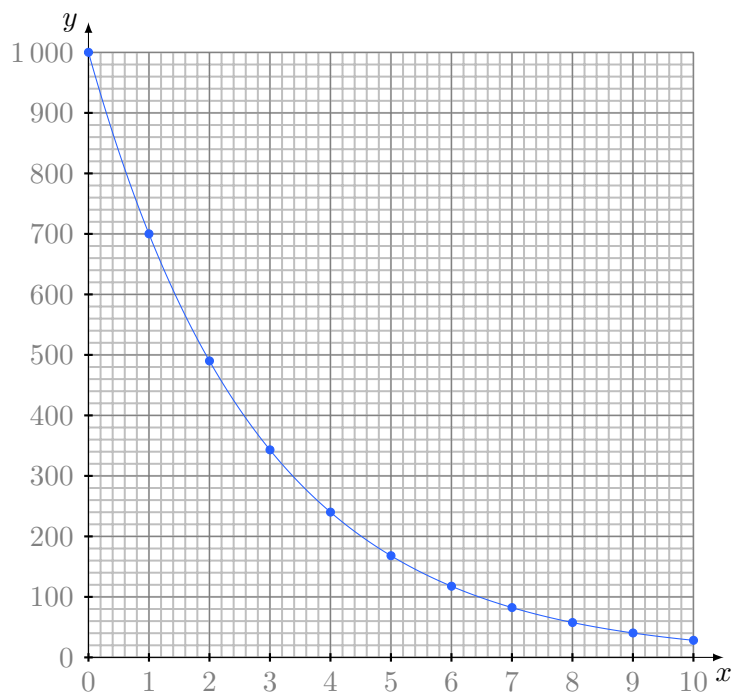
- (c) Sie haben sich das neueste iPhone für 1000 Franken auf Raten gekauft. Sie zahlen jeden Monat 50 Franken zurück. Wieviel Schulden haben Sie nach n Monaten?

n	$B(n)$
0	1000
2	900
4	800
6	700
8	600
10	500
12	400
14	300
16	200
18	100
20	0



- (d) Sie haben sich für 1000 Franken ein neues iPhone gekauft. Ein iPhone verliert jedes Jahr 30 % seines Werts. Für welchen Betrag können Sie es nach n Jahren noch verkaufen?

n	$B(n)$
0	1000
1	700
2	490
3	343
4	240
5	168
6	118
7	82
8	58
9	40
10	28



2. Zinsrechnen.

- (a) Ein Kapital von 500 Franken wird zu 5 % verzinst. Der Zins wird jeweils zum Kapital geschlagen. Auf welchen Betrag wächst das Kapital in 10 Jahren?

Lösung:

$$B(0) = 500 \qquad n = 10 \qquad q = 1.05 \qquad B(n) = ?$$

Die Werte werden in die Wachstumsgleichung eingesetzt, diese wird nach $B(n)$ aufgelöst.

$$\begin{array}{lcl} B(n) = B(0) \cdot q^n & & \text{einsetzen} \\ \Leftrightarrow B(10) = 500 \cdot 1.05^{10} & & \text{ausrechnen} \\ \Leftrightarrow B(10) \approx 814.45 & & \end{array}$$

Das Kapital wächst auf **Fr. 814.45**.

- (b) Wie viel Franken muss man auf ein Sparkonto einzahlen, wenn es innert 20 Jahren durch Zinseszins auf 2000 Franken anwachsen soll? Der jährliche Zinssatz beträgt 5 %.

Lösung:

$$B(0) = ? \qquad n = 20 \qquad q = 1.05 \qquad B(n) = 2000$$

Die Werte werden in die Wachstumsgleichung eingesetzt, diese wird nach $B(0)$ aufgelöst.

$$\begin{array}{lcl} B(n) = B(0) \cdot q^n & & \text{einsetzen} \\ \Leftrightarrow 2000 = B(0) \cdot 1.05^{20} & & : 1.05^{20} \\ \Leftrightarrow \frac{2000}{1.05^{20}} = B(0) & & \text{ausrechnen} \\ \Leftrightarrow 753.80 \approx B(0) & & \end{array}$$

Man muss **Fr. 753.80** anlegen.

- (c) Ein Kapital von 3600 Franken wächst in 12 Jahren auf 5000 Franken. Zu wie viel Prozent wurde es verzinst?

Lösung:

$$B(0) = 3600 \qquad n = 12 \qquad q = ? \qquad B(n) = 5000$$

Die Werte werden in die Wachstumsgleichung eingesetzt und diese nach q aufgelöst.

$$\begin{array}{lcl} B(n) = B(0) \cdot q^n & & \text{einsetzen} \\ \Leftrightarrow 5000 = 3600 \cdot q^{12} & & : 3600 \\ \Leftrightarrow \frac{5000}{3600} = q^{12} & & \text{kürzen} \\ \Leftrightarrow 1.38 = q^{12} & & \sqrt[12]{} \\ \Leftrightarrow \sqrt[12]{1.38} = q & & \text{ausrechnen} \\ \Leftrightarrow 1.0278 \approx q & & \end{array}$$

Der Zins beträgt **2.78 %**.

- (d) Wie lange dauert es, bis sich ein Kapital von 1000 Franken mit einem Zinssatz von 4.5 % verdoppelt hat?

Lösung:

$$B(0) = 1000 \quad n = ? \quad q = 1.045 \quad B(n) = 2000$$

Die Werte werden in die Wachstumsgleichung eingesetzt und diese nach n aufgelöst.

	$B(n) = B(0) \cdot q^n$	einsetzen
$\Leftrightarrow$	$2000 = 1000 \cdot 1.045^n$	: 1000
$\Leftrightarrow$	$2 = 1.045^n$	log
$\Leftrightarrow$	$\log(2) = n \cdot \log(1.045)$	: $\log(1.045)$
$\Leftrightarrow$	$\frac{\log(2)}{\log(1.045)} = n$	ausrechnen
$\Leftrightarrow$	$15.7 \approx n$	

Es dauert **16 Jahre**.

3. (Lambacher Schweizer, Kapitel 11.1, Aufgabe 1) Aus dem Wirtschaftsteil einer Zeitung:

- (a) «Der Umsatz des Unternehmens hat sich im letzten Jahr von 3.2 Millionen Franken auf 3.45 Millionen Franken erhöht.»

Bestimmen Sie die absolute Änderung und die relative Änderung.

Lösung:

$$d = B(1) - B(0) = 3.45 - 3.2 = 0.25$$

$$p = \frac{d}{B(0)} = \frac{0.25}{3.2} \approx 0.078$$

Die absolute Änderung beträgt **250'000 Franken**, die relative Änderung beträgt **7.8 %**.

- (b) «Der Gewinn der Firma betrug im letzten Jahr 560'000 Franken und hat sich in diesem Jahr um 7.8 % verringert.»

Wie gross ist der Gewinn in diesem Jahr?

Lösung: Es ist der Bestand $B(0)$ und die prozentuale Veränderung p bekannt:

$$B(0) = 560000$$

$$p = -0.078$$

Die Formel für die relative Änderung muss nun nach $B(n+1)$ aufgelöst werden:

$$\begin{array}{lcl}
 & p = \frac{B(n+1) - B(n)}{B(n)} & \\
 \Leftrightarrow & p = \frac{B(n+1)}{B(n)} - \frac{B(n)}{B(n)} & \\
 \Leftrightarrow & p = \frac{B(n+1)}{B(n)} - 1 & +1 \\
 \Leftrightarrow & p + 1 = \frac{B(n+1)}{B(n)} & \cdot B(n) \\
 \Leftrightarrow & B(n) \cdot (p + 1) = B(n+1) &
 \end{array}$$

Diese Formel kann nun verwendet werden, um $B(1)$ zu berechnen.

$$B(1) = B(0) \cdot (1 + p) = 560000 \cdot (1 - 0.078) = 516320$$

Der Gewinn beträgt in diesem Jahr **516'320 Franken**.

- (c) «Im abgelaufenen Jahr wurden 45'600 Geräte verkauft. Das war gegenüber dem vorausgegangenen Jahr eine Steigerung von 6500. Auch im kommenden Jahr sollen wieder 6500 Geräte mehr verkauft werden.»

Bestimmen Sie prozentualen Änderungen im abgelaufenen und kommenden Jahr.

Lösung:

$$p_0 = \frac{d}{B(0)} = \frac{6500}{45600 - 6500} = 0.166$$

$$p_1 = \frac{d}{B(1)} = \frac{6500}{45600} = 0.142$$

Die prozentuale Änderung betrug im abgelaufenen Jahr **16.6 %**, im kommenden Jahr wird sie voraussichtlich **14.2 %** betragen.

- (d) In diesem Jahr konnte die Verschuldung um 8 % auf 62'000 Franken gedrückt werden. Auch im kommenden Jahr ist eine Verringerung der Schulden um 8 % geplant.

Bestimmen Sie die Änderungen im abgelaufenen und kommenden Jahr.

Lösung: Die Gleichung für das prozentuale Wachstum wird nach $B(0)$ aufgelöst:

$$\begin{array}{lcl}
 & p = \frac{B(1) - B(0)}{B(0)} & \\
 \Leftrightarrow & p \cdot B(0) = B(1) - B(0) & +B(0) \\
 \Leftrightarrow & p \cdot B(0) + B(0) = B(1) & \text{ausklammern} \\
 \Leftrightarrow & B(0) \cdot (p + 1) = B(1) & : (p + 1) \\
 \Leftrightarrow & B(0) = \frac{B(1)}{p + 1} &
 \end{array}$$

Also ist

$$d = B(1) - B(0) = \frac{62000}{1 - 0.08} - 62000 \approx 5391$$

Die Änderung im abgelaufenen Jahr betrug **5391 Franken**, die Änderung im kommenden Jahr wird **4960 Franken** betragen.

4. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.1, Aufgabe 2)

- (a) Für einen Bestand gilt $B(1) = 1.6$. Er nimmt von $n = 1$ zu $n = 2$ um 12 % zu. Berechnen Sie $B(2)$.

Lösung: $B(2) = 1.6 \cdot 1.12 = 1.792$

- (b) Für einen Bestand gilt $B(8) = 34$. Er nimmt von $n = 8$ zu $n = 9$ um 4.3 % ab. Berechnen Sie $B(9)$.

Lösung: $B(9) = 34 \cdot (1 - 0.043) = 32.538$

- (c) Ein Bestand nimmt von $n = 4$ zu $n = 5$ um 75 % auf $B(5) = 12.8$ zu. Berechnen Sie $B(4)$.

Lösung: $B(4) = \frac{12.8}{1.75} \approx 7.31$

5. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.1, Aufgabe 3)

Handelt es sich um lineares oder um exponentielles Wachstum? Berechnen Sie $B(20)$.

n	0	1	2	3	4	5
$B(n)$	1	3	5	7	9	11

(a)

n	0	1	2	3	4	5
$B(n)$	2	3.6	6.48	11.66	21.00	37.79

(c)

n	0	1	2	3	4	5
$B(n)$	1	2	4	8	16	32

(b)

n	0	1	2	3	4	5
$B(n)$	10	8	6.4	5.12	4.10	3.28

(d)

Lösung:

- (a) Lineares Wachstum mit der Änderung $d = 2$.

$$B(20) = B(0) + d \cdot n = 1 + 2 \cdot 20 = 41$$

- (b) Exponentielles Wachstum mit Wachstumsfaktor $q = 2$.

$$B(20) = B(0) \cdot q^n = 1 \cdot 2^{20} = 1'048'576$$

(c) Exponentielles Wachstum mit Wachstumsfaktor $q = 1.8$.

$$B(20) = B(0) \cdot q^n = 2 \cdot 1.8^{20} \approx 254'965$$

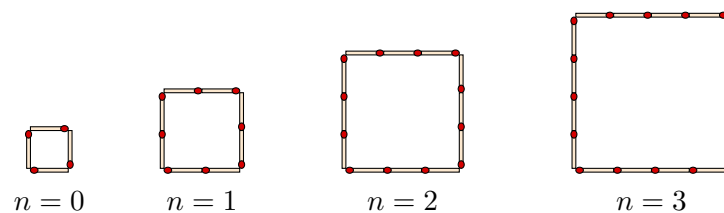
(d) Exponentielles Wachstum mit Wachstumsfaktor $q = 0.8$.

$$B(20) = B(0) \cdot q^n = 10 \cdot 0.8^{20} \approx 0.12$$

6. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.1, Aufgabe 4)

Untersuchen Sie, ob es sich bei den Wachstumsprozessen um lineares oder um exponentielles Wachstum oder um keines von beiden handelt. Bestimmen Sie $B(5)$.

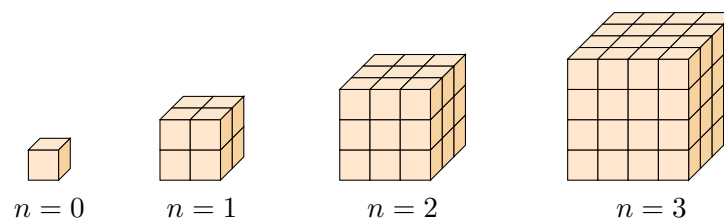
(a) $B(n)$ ist die Anzahl Streichhölzer:



Lösung: Lineares Wachstum mit der Änderung $d = 4$.

$$B(5) = B(0) + d \cdot n = 4 + 4 \cdot 5 = 24$$

(b) $B(n)$ ist die Anzahl Würfelchen:



Lösung: Es handelt sich weder um lineares noch um exponentielles Wachstum. Für die Anzahl Würfelchen gilt

$$B(n) = (n + 1)^3 \quad \Rightarrow \quad B(5) = (5 + 1)^3 = 6^3 = 216$$

7. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.1, Aufgabe 5)

Ein Bestand mit dem Anfangswert $B(0) = 5000$ nimmt monatlich um 4 % ab.

(a) Stellen Sie die Entwicklung des Bestandes in den ersten 12 Monaten in einer Tabelle dar.

n	0	1	2	3	4	5	6
$B(n)$	5000	4800	4608	4424	4247	4077	3914
n	7	8	9	10	11	12	
$B(n)$	3757	3607	3463	3324	3191	3064	

- (b) Wie gross ist die absolute und prozentuale Änderung des Bestandes von $n = 0$ zu $n = 1$?

Lösung: Die prozentuale Änderung ist immer -4% , die absolute Änderung beträgt -200 .

- (c) Wie gross ist die absolute und prozentuale Änderung des Bestandes von $n = 20$ zu $n = 21$?

Lösung: Die prozentuale Änderung ist immer -4% , die absolute Änderung beträgt -88 .

8. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.1, Aufgabe 6)

Handelt es sich um lineares oder um exponentielles Wachstum? Berechnen Sie $B(1)$ bis $B(6)$ und $B(12)$. Erläutern Sie, was $B(12)$ im gegebenen Zusammenhang bedeutet.

- (a) Der Umsatz im Januar beträgt 100'000 Franken. Er erhöht sich monatlich um 3000 Franken.

n	1	2	3	4	5	6	12
$B(n)$	100000	103000	106000	109000	112000	115000	133000

Lösung: $B(12)$ ist der Umsatz im Dezember.

- (b) Babys wiegen bei der Geburt durchschnittlich 3200g. Sie nehmen wöchentlich um 4% zu.

n	1	2	3	4	5	6	12
$B(n)$	3328	3461	3600	3744	3893	4049	5123

Lösung: $B(12)$ ist das Gewicht 12 Wochen nach der Geburt.

- (c) Die Schulden einer Firma betragen zurzeit 1 Million Franken. Es ist beabsichtigt, die Schulden von Jahr zu Jahr zu halbieren.

n	1	2	3	4	5	6	12
$B(n)$	500000	250000	125000	62500	31250	15625	244

Lösung: $B(12)$ sind die Schulden nach 12 Jahren.

9. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.1, Aufgabe 7)

Bei einem exponentiellen Wachstumsvorgang ist der Anfangsbestand $B(0) = 200$. Bestimmen Sie $B(6)$ bei

- (a) einem Wachstumsfaktor von 1.2

Lösung:

$$q = 1.2$$

$$B(6) = 200 \cdot 1.2^6 \approx 597.20$$

- (b) einer prozentualen Zunahme von 25 %

Lösung:

$$p = 0.25$$

$$q = 1 + p = 1.25$$

$$B(6) = 200 \cdot 1.25^6 \approx 762.94$$

- (c) einer prozentualen Abnahme von 15 %

Lösung:

$$p = -0.15$$

$$q = 1 + p = 0.85$$

$$B(6) = 200 \cdot 0.85^6 \approx 75.43$$

- (d) einem Wachstumsfaktor von 0.92

Lösung:

$$q = 0.92$$

$$B(6) = 200 \cdot 0.92^6 \approx 121.27$$

10. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.1, Aufgabe 8)

Papier mit einer Stärke von 0.2 mm wird auf eine Rolle mit einem äusseren Durchmesser von 15 cm gewickelt.



- (a) Auf welchen Durchmesser wächst die Rolle mit x Lagen an?

Lösung: Es wird in Millimeter gerechnet. Mit jeder Wicklung wird die Rolle um $2 \cdot 0.2 \text{ mm} = 0.4 \text{ mm}$ dicker. Es handelt sich also um lineares Wachstum mit folgenden Werten:

$$B(0) = 150 \text{ mm}$$

$$B(n) = ?$$

$$d = 0.4 \text{ mm}$$

$$n = x$$

Diese werden in die Wachstumsgleichung eingesetzt:

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l|l} B(n) = B(0) + n \cdot d & \text{einsetzen} \\ B(x) = 150 + x \cdot 0.4 & \end{array}$$

Mit x Lagen beträgt der Durchmesser der Rolle $150 + 0.4x$ Millimeter.

- (b) Wie viele Lagen sind auf der Rolle, wenn der Durchmesser 1.80 m beträgt?

Lösung: Die Werte

$$B(0) = 150 \text{ mm} \quad B(n) = 1800 \quad d = 0.4 \text{ mm} \quad n = ?$$

werden in die Wachstumsgleichung eingesetzt:

$$\begin{array}{l|l} B(n) = B(0) + n \cdot d & \text{einsetzen} \\ \Leftrightarrow 1800 = 150 + n \cdot 0.4 & -150 \\ \Leftrightarrow 1650 = n \cdot 0.4 & : 0.4 \\ \Leftrightarrow 4125 = n & \end{array}$$

Es sind **4125 Lagen** auf der Rolle.

11. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.1, Aufgabe 9)

Eine Seerosenart verdoppelt täglich die von ihr bedeckte Teichfläche. Am Anfang wird eine Seerose in einen Teich gepflanzt. Nach 30 Tagen ist der ganze Teich bedeckt.

- (a) Nach wie vielen Tagen ist der Teich zur Hälfte bedeckt?

Lösung: nach 29 Tagen

- (b) Nach wie vielen Tagen ist der Teich vollständig bedeckt, wenn man am Anfang zwei Seerosen statt einer Seerose pflanzt?

Lösung: nach 29 Tagen

12. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.1, Aufgabe 10)

Ein hängender Tropfstein in einer Höhle wächst jährlich um durchschnittlich 3 mm.

- (a) Der Tropfstein ist 1.062 m lang. Wie alt ist er vermutlich?

Lösung: Es handelt sich um lineares Wachstum. Die Werte

$$B(0) = 0 \quad B(n) = 1.062 \quad d = 0.003 \quad n = ?$$

werden in die Wachstumsgleichung eingesetzt:

$$\begin{array}{l|l} B(n) = B(0) + n \cdot d & \text{einsetzen} \\ \Leftrightarrow 1.062 = 0 + n \cdot 0.003 & : 0.003 \\ \Leftrightarrow 354 = n & \end{array}$$

Der Tropfstein ist vermutlich **354 Jahre** alt.

(b) In wie vielen Jahren wird der Stein voraussichtlich 1.5 m lang sein?

Lösung: Die Werte:

$$B(0) = 1.062$$

$$B(n) = 1.5$$

$$d = 0.003$$

$$n = ?$$

werden in die Wachstumsgleichung eingesetzt:

$\Leftrightarrow$	$B(n) = B(0) + n \cdot d$	einsetzen -1.062 : 0.003
$\Leftrightarrow$	$1.5 = 1.062 + n \cdot 0.003$	
$\Leftrightarrow$	$0.438 = n \cdot 0.003$	
$\Leftrightarrow$	$146 = n$	

Voraussichtlich in **146 Jahren** wird der Tropfstein so lang sein.