Exponentialfunktionen

1. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.2, Aufgabe 1) Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ verläuft durch den Punkt P. Bestimmen Sie a und geben Sie an, ob die Funktion steigt oder fällt.

(a) $P(1/3)$

Lösung:

$$\begin{array}{lrl|l} & y &= a^x & \text{einsetzen} \\ \Leftrightarrow & 3 &= a^1 & \end{array}$$

Es ist $a = 3$, die Funktion steigt.

(b) $P(1/0.25)$

Lösung:

$$\begin{array}{lrl|l} & y &= a^x & \text{einsetzen} \\ \Leftrightarrow & 0.25 &= a^1 & \end{array}$$

Es ist $a = 0.25$, die Funktion fällt.

(c) $P(2/6)$

Lösung:

$$\begin{array}{lrl|l} & y &= a^x & \text{einsetzen} \\ \Leftrightarrow & 6 &= a^2 & \sqrt{} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{6} &= a & \end{array}$$

Es ist $a = \sqrt{6} \approx 2.45$, die Funktion steigt.

(d) $P(-1/3)$

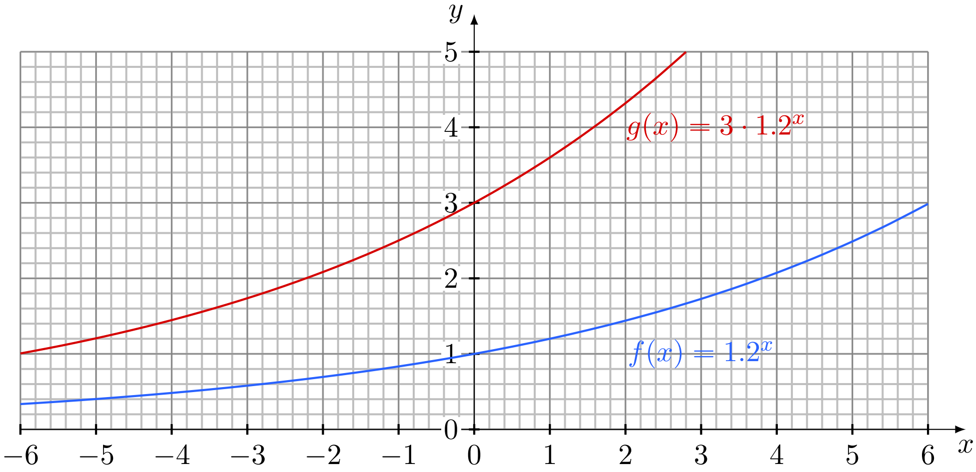
Lösung:

$$\begin{array}{lrl|l} & y &= a^x & \text{einsetzen} \\ \Leftrightarrow & 3 &= a^{-1} & \cdot a \\ \Leftrightarrow & 3a &= 1 & : 3 \\ \Leftrightarrow & a &= \frac{1}{3} & \end{array}$$

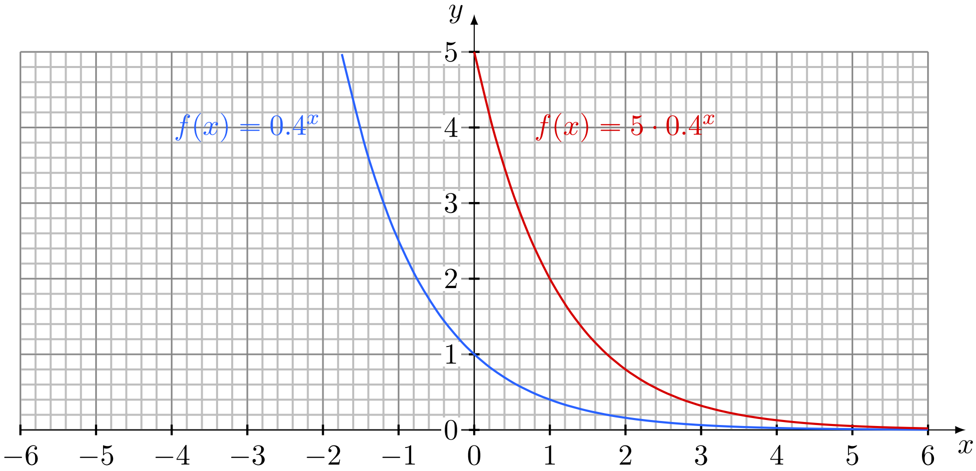
Es ist $a = \frac{1}{3}$, die Funktion fällt.

2. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.2, Aufgabe 2) Zeichnen Sie die Graphen der Funktion f mithilfe einer Wertetabelle. Zeichnen Sie anschliessend den Graphen von g durch Multiplikation der Funktionswerte von f mit dem Streckfaktor.

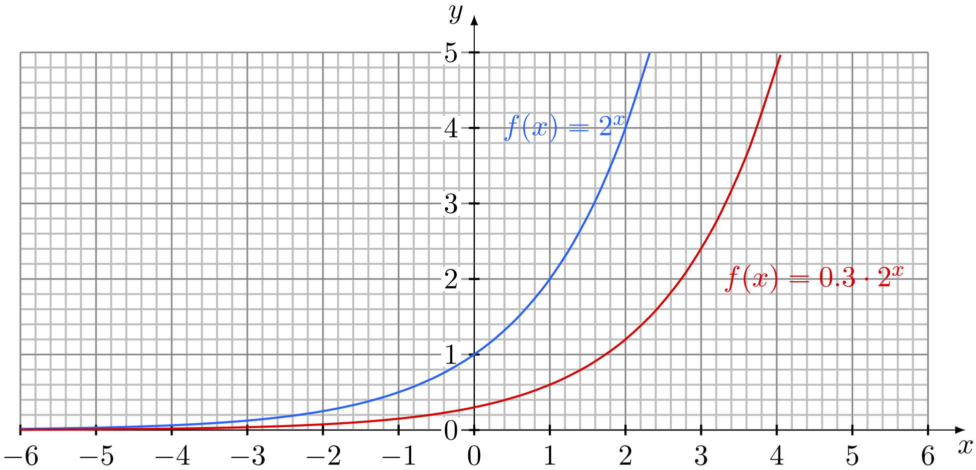
(a) $f(x) = 1.2^x$ $\qquad g(x) = 3 \cdot 1.2^x$



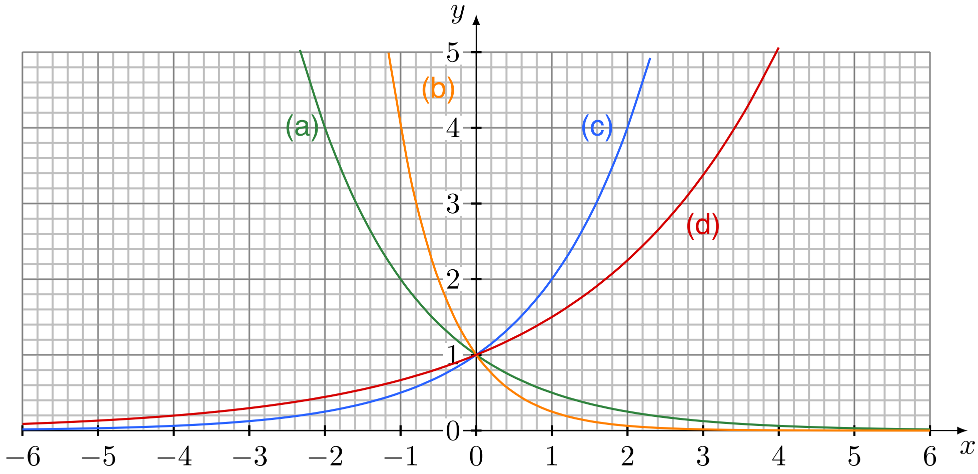
(b) $f(x) = 0.4^x$ $\qquad g(x) = 5 \cdot 0.4^x$



(c) $f(x) = 2^x$ $\qquad g(x) = 0.3 \cdot 2^x$



3. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.2, Aufgabe 3) Die Graphen in der Abbildung gehöhren zu Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$. Bestimmen Sie jeweils den Wert für a.



Lösung:

(a) $a = 0.5 \qquad f(x) = 0.5^x$

(b) $a = 0.25 \qquad f(x) = 0.25^x$

(c) $a = 2 \qquad f(x) = 2^x$

(d) $a = 1.5 \qquad f(x) = 1.5^x$

4. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.2, Aufgabe 5) Ein Bestand kann näherungsweise durch die Funktion $f(t) = 20 \cdot 0.95^t$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Tagen.

(a) Wie gross ist der Bestand nach 3, 4, 8, 16 und 24 Stunden?

Zeit in Stunden	$\frac{t}{24}$	3	4	8	16	24
Zeit in Tagen	t	0.125	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Bestand	$20 \cdot 0.95^t$	19.87	19.83	19.66	19.33	19

(b) Wie gross war der Bestand vor einem, zwei und drei Tagen?

Zeit in Tagen	t	-1	-2	-3
Bestand	$20 \cdot 0.95^t$	21.053	22.16	23.33

(c) Wie gross ist die tägliche und wöchentliche Abnahme in Prozent?

Lösung: Die tägliche Abnahme ist 5 %:

$$p = q - 1 = 0.95 - 1 = -0.05 = -5\,\%$$

Die wöchentliche Abnahme ist ungefähr 30 %

$$q^7 - 1 = 0.95^7 - 1 \approx 0.70 - 1 = -0.3 = -30\,\%$$

5. **Zellkultur.** In einer Zellkultur wird pro 15 Minuten eine Zunahme der Zellenanzahl um 3.5 % beobachtet.

   (a) Beschreiben Sie die Anzahl der Zellen $B(t)$ in Abhängigkeit der Zeit t in einer Stunde durch eine passende Exponentialfunktion.

   Lösung:

   $$B(t) = B(0) \cdot (1 + 0.035)^{4 \cdot t} = B(0) \cdot 1.035^{4 \cdot t} = B(0) \cdot \left(1.035^4\right)^t$$

   (b) Um wie viel Prozent nimmt die Anzahl der Zellen an einem Tag zu?

   Lösung:

   $$B(24) = B(0) \cdot 1.147523^{24} \approx B(0) \cdot 27.18 = 1 + 26.18$$

   Die Zunahme beträgt ca. 2618 %.

6. **Funktionsgleichungen.** Bestimmen die die Funktionsgleichung der Exponentialfunktionen $f(x) = a \cdot b^x$, welche durch die beiden angegebenen Punkte geht:

   (a) $A(0/2) \qquad B(4/4)$

   Lösung: Die Punkte werden in die Gleichung eingesetzt:

   $$2 = a \cdot b^0 = a \cdot 1 = a \qquad\qquad 4 = a \cdot b^4$$

   Somit ist bekannt, dass $a = 2$, dies kann in der zweiten Gleichung eingesetzt werden:

   $$\begin{array}{lrl|l} & 4 &= a \cdot b^4 & a = 2 \\ \Leftrightarrow & 4 &= 2 \cdot b^4 & : 2 \\ \Leftrightarrow & 2 &= b^4 & \sqrt[4]{} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[4]{2} &= b & \text{Potenzschreibweise} \\ \Leftrightarrow & 2^{\frac{1}{4}} &= b & \text{als Dezimalbruch} \\ \Leftrightarrow & 2^{0.25} &= b & \end{array}$$

   Die Funktionsgleichung lautet somit:

   $$f(x) = 2 \cdot \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^x = 2 \cdot 2^{0.25 \cdot x}$$

   (b) $C(1/2) \qquad D(2/5)$

   Lösung: Die Punkte werden in die Gleichung eingesetzt:

   $$2 = a \cdot b^1 = a \cdot b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{b} \qquad\qquad 5 = a \cdot b^2$$

$$\begin{array}{lrll|l} & 5 & = a \cdot b^2 & & a = \frac{2}{b} \\ \Leftrightarrow & 5 & = \dfrac{2}{b} \cdot b^2 & & :2 \\ \Leftrightarrow & 2.5 & = \dfrac{b^2}{b} & & \text{vereinfachen} \\ \Leftrightarrow & 2.5 & = b & & \end{array}$$

Damit ist $a = \frac{2}{2.5} = 0.8$ und die Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = 0.8 \cdot 2.5^x$$

(c) $E(-1/2)$ $F(1/6)$

Lösung: Die Punkte werden in die Gleichung eingesetzt:

$$2 = a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a = 2b \qquad\qquad 6 = a \cdot b^1 = a \cdot b$$

$$\begin{array}{lrl|l} & 6 & = a \cdot b & a = 2b \\ \Leftrightarrow & 6 & = 2b \cdot b & :2 \\ \Leftrightarrow & 3 & = b^2 & \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3} & = b & \text{Potenzschreibweise} \\ \Leftrightarrow & 3^{\frac{1}{2}} & = b & \text{als Dezimalbruch} \\ \Leftrightarrow & 3^{0.5} & = b & \end{array}$$

Damit ist $a = 2 \cdot \sqrt{3}$ und die Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{0.5 \cdot x}$$

(d) $G(-1/6)$ $H(1/2)$

Lösung: Die Punkte werden in die Gleichung eingesetzt:

$$6 = a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a = 6b \qquad\qquad 2 = a \cdot b^1 = a \cdot b$$

$$\begin{array}{lrl|l} & 2 & = a \cdot b & a = 6b \\ \Leftrightarrow & 2 & = 6b \cdot b & :6 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{2}{6} & = b^2 & \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\dfrac{1}{3}} & = b & \text{Potenzschreibweise} \\ \Leftrightarrow & 3^{-\frac{1}{2}} & = b & \text{als Dezimalbruch} \\ \Leftrightarrow & 3^{-0.5} & = b & \end{array}$$

Damit ist $a = 6 \cdot 3^{-0.5} = 2 \cdot 3^1 \cdot 3^{-0.5} = 2 \cdot 3^{0.5}$ und die Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(3^{-0.5}\right)^x = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{-0.5 \cdot x}$$

7. 🏆 **Population.** In einem neuen Naturschutzgebiet wird die Population einer Tierart überwacht. Nach 10 Jahren werden 11'267 Tiere gezählt, nach 15 Jahren 11'959 Tiere.

   (a) Beschreiben Sie die Anzahl der Tiere $B(t)$ in Abhängigkeit der Anzahl Jahre t mit Hilfe einer geeigneten Funktion.

   Lösung: $B(t) = 10000 \cdot 1.012^t$

   (b) Wie viel Prozent beträgt die jährliche Zuwachsrate?

   Lösung: Die jährliche Zuwachsrate beträgt 1.2 %.

   (c) Um wie viel Prozent nimmt die Anzahl der Tiere in 10 Jahren zu?

   Lösung: Die Population nimmt in 10 Jahren um ca. 12.7 % zu.

8. 🏆 **Bevölkerung.** Die Bevölkerung eines Landes ist in 10 Jahren von 56.5 Millionen auf gegenwärtig 60.8 Millionen Einwohner gewachsen.

   (a) Beschreiben Sie die Bevölkerungszahl mit Hilfe einer geeigneten Funktion.

   Lösung: $B(t) = 56.5 \cdot 1.00736^t$

   (b) Wie viel Prozent beträgt die jährliche Zuwachsrate?

   Lösung: Die Zuwachsrate beträgt 0.736 %.

   (c) In wieviel Jahren hat sich die Bevölkerung verdoppelt?
   Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe durch ausprobieren.

   Lösung: Nach 95 Jahren hat sich die Bevölkerung verdoppelt.

9. 🏆 **Tschernobyl.** Bei der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl wurden etwa 26.4 kg radioaktives Cäsium 137 freigesetzt. Dessen Halbwertzeit beträgt 30 Jahre.

   (a) Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion $m(t)$, welche die Masse der noch nicht zerfallenen Cäsiumatomkerne nach t Jahren angibt.

   Lösung: $m(t) \approx 26.4 \cdot 0.977^t$

   (b) Welcher Prozentsatz an Cäsium zerfällt jährlich?

   Lösung: Jedes Jahr zerfallen 2.3 % des radioaktiven Cäsiums.

   (c) c) Nach wie vielen Jahren sind 95 % des radioaktiven Cäsiums zerfallen?
   Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe durch ausprobieren.

   Lösung: Nach 130 Jahren sind 95 % zerfallen.