Exponentialgleichungen

1. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.5, Aufgabe 1) Lösen Sie die Exponentialgleichungen. Geben Sie die Lösung auf drei Dezimalstellen genau an.

Beispiel.

$$\begin{array}{lcl}
 & 1.2^{4x-7} = 9 & \\
 \Leftrightarrow & \log(1.2^{4x-7}) = \log(9) & \left| \begin{array}{l} \log \\ \text{Logarithmusgesetz} \\ : \log(1.2) \end{array} \right. \\
 \Leftrightarrow & (4x - 7) \cdot \log(1.2) = \log(9) & \\
 \Leftrightarrow & 4x - 7 = \frac{\log(9)}{\log(1.2)} & \left| \text{lineare Gleichung lösen} \right. \\
 \Leftrightarrow & x \approx 4.763 &
 \end{array}$$

(a) $4^x = 12$

Lösung: $x = \log_4(12) = \frac{\log(12)}{\log(4)} \approx 1.792$

(b) $2.4^x = 3.9$

Lösung: $x = \log_{2.4}(3.9) = \frac{\log(3.9)}{\log(2.4)} \approx 1.555$

(c) $1.14^y = 0.7$

Lösung: $y = \log_{1.14}(0.7) = \frac{\log(0.7)}{\log(1.14)} \approx -2.722$

(d) $0.45^z = 1.9$

Lösung: $z = \log_{0.45}(1.9) = \frac{\log(1.9)}{\log(0.45)} \approx -0.804$

(e) $3.7^{2x} = 5$

Lösung: $3.7^{2x} = (3.7^2)^x = 5 \Rightarrow x = \frac{\log(5)}{2 \cdot \log(3.7)} \approx 0.615$

(f) $1.46^{3x} = 0.8$

Lösung: $1.46^{3x} = (1.46^3)^x = 0.8 \Rightarrow x = \frac{\log(0.8)}{3 \cdot \log(1.46)} \approx -0.197$

(g) $8.2^{-x} = 4.9$

Lösung: $-x = \frac{\log(4.9)}{\log(8.2)} \approx 0.755 \Rightarrow x \approx -0.755$

(h) $5.6^{-2x} = 1.4$

Lösung: Lösung mit Definition des Logarithmus:

$$-2x = \log_{5.6}(1.4) \Rightarrow x = \frac{\log_{5.6}(1.4)}{-2} = -\frac{\log(1.4)}{2 \cdot \log(5.6)} \approx -0.098$$

Lösung mit Logarithmieren der Gleichung:

$\Leftrightarrow$	$5.6^{-2x} = 1.4$	log
$\Leftrightarrow$	$\log(5.6^{-2x}) = \log(1.4)$	Logarithmusgesetz
$\Leftrightarrow$	$-2x \cdot \log(5.6) = \log(1.4)$	: $\log(5.6)$
$\Leftrightarrow$	$-2x = \frac{\log(1.4)}{\log(5.6)}$	: (-2)
$\Leftrightarrow$	$x = -\frac{\log(1.4)}{2 \cdot \log(5.6)}$	Taschenrechner
$\Leftrightarrow$	$x \approx -0.098$	

(i) $2 \cdot 3^x = 1.4$

Lösung: $3^x = \frac{1.4}{2} = 0.7 \Rightarrow x = \frac{\log(0.7)}{\log(3)} \approx -0.325$

(j) $6 \cdot 1.5^y = 2.3$

Lösung: Immer zuerst durch den Faktor dividieren, wird einfacher!

$\Leftrightarrow$	$6 \cdot 1.5^y = 2.3$	: 6
$\Leftrightarrow$	$1.5^y = \frac{2.3}{6}$	log
$\Leftrightarrow$	$\log(1.5^y) = \log\left(\frac{2.3}{6}\right)$	Logarithmengesetze
$\Leftrightarrow$	$y \cdot \log(1.5) = \log(2.3) - \log(6)$	: $\log(1.5)$
$\Leftrightarrow$	$y = \frac{\log(2.3) - \log(6)}{\log(1.5)}$	Taschenrechner
$\Leftrightarrow$	$y \approx -2.365$	

(k) $1.3 \cdot 5^{-x} = 2.8$

Lösung: $-x = \frac{\log(2.8) - \log(1.3)}{\log(5)} \approx 0.477 \Rightarrow x \approx -0.477$

(l) $0.9 \cdot 1.4^t = 3.2$

Lösung: $t = \frac{\log(3.2) - \log(0.9)}{\log(1.4)} \approx 3.770$

2. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.5, Aufgabe 2) Lösen Sie die Exponentialgleichungen. Geben Sie die Lösung auf drei Dezimalstellen genau an.

(a) $10^{x-1} = 6$

Lösung: $x = \frac{\log(6)}{\log(10)} + 1 \approx 1.778$

(b) $6^{x+1} = 108$

Lösung: $x = \frac{\log(108)}{\log(6)} - 1 \approx 1.613$

(c) $5^{1-2x} = 17$

Lösung:

	$5^{1-2x} = 17$	
⇔	$\log(5^{1-2x}) = \log(17)$	log
⇔	$(1 - 2x) \cdot \log(5) = \log(17)$	Logarithmusgesetz
⇔	$1 - 2x = \frac{\log(17)}{\log(5)}$	: $\log(5)$
⇔	$-2x = \frac{\log(17)}{\log(5)} - 1$	-1
⇔	$x = -\frac{\log(17)}{2 \cdot \log(5)} - \frac{1}{2}$	: (-2)
⇔	$x \approx -0.380$	Taschenrechner

(d) $10^{5x+1} = 2$

Lösung:

	$10^{5x+1} = 2$	
⇔	$\log(10^{5x+1}) = \log(2)$	log
⇔	$(5x + 1) \cdot \log(10) = \log(2)$	Logarithmusgesetz
⇔	$5x + 1 = \frac{\log(2)}{\log(10)}$	: $\log(10)$
⇔	$5x = \frac{\log(2)}{\log(10)} - 1$	-1
⇔	$x = \frac{\log(2)}{5 \cdot \log(10)} - \frac{1}{5}$	: 5
⇔	$x \approx -0.140$	Taschenrechner

(e) $3 \cdot 8^{-x-2} = 25$

Lösung:

	$3 \cdot 8^{-x-2} = 25$		: 3
⇔	$8^{-x-2} = \frac{25}{3}$		log
⇔	$\log(8^{-x-2}) = \log\left(\frac{25}{3}\right)$		Logarithmengesetze
⇔	$(-x-2) \cdot \log(8) = \log(25) - \log(3)$		: log(8)
⇔	$-x-2 = \frac{\log(25) - \log(3)}{\log(8)}$		+2
⇔	$-x = \frac{\log(25) - \log(3)}{\log(8)} + 2$		· (-1)
⇔	$x = -\frac{\log(25) - \log(3)}{\log(8)} - 2$		Taschenrechner
⇔	$x \approx -3.020$		

(f) $(7^{2x-1})^2 = 36$

Lösung:

	$(7^{2x-1})^2 = 36$		
⇔	$7^{4x-2} = 36$		log
⇔	$\log(7^{4x-2}) = \log(36)$		Logarithmusgesetz
⇔	$(4x-2) \cdot \log(7) = \log(36)$		: log(7)
⇔	$4x-2 = \frac{\log(36)}{\log(7)}$		+2
⇔	$4x = \frac{\log(36)}{\log(7)} + 2$		: 2
⇔	$x = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\log(36)}{\log(7)} + 2 \right)$		Taschenrechner
⇔	$x \approx 0.960$		

(g) $5 \cdot 2^{-3x+4} = 1$

Lösung:

	$5 \cdot 2^{-3x+4} = 1$		
⇔	$2^{-3x+4} = 0.2$		: 5
⇔	$\log(2^{-3x+4}) = \log(0.2)$		log
⇔	$(-3x+4) \cdot \log(2) = \log(0.2)$		Logarithmusgesetz
⇔	$-3x+4 = \frac{\log(0.2)}{\log(2)}$		: log(2)
⇔	$-3x = \frac{\log(0.2)}{\log(2)} - 4$		-4
⇔	$x = -\frac{\log(0.2)}{3 \cdot \log(2)} + \frac{4}{3}$		: (-3)
⇔	$x \approx 2.107$		Taschenrechner

(h) $3 \cdot 4^{5-x} = 1$

Lösung:

$\Leftrightarrow$	$3 \cdot 4^{5-x} = 1$		: 3
$\Leftrightarrow$	$4^{5-x} = \frac{1}{3}$		log
$\Leftrightarrow$	$\log(4^{5-x}) = \log\left(\frac{1}{3}\right)$		Logarithmengesetze
$\Leftrightarrow$	$(5-x) \cdot \log(4) = \log(1) - \log(3)$		: $\log(4)$
$\Leftrightarrow$	$5-x = \frac{\log(1) - \log(3)}{\log(4)}$		-5
$\Leftrightarrow$	$-x = \frac{\log(1) - \log(3)}{\log(4)} - 5$		· (-1)
$\Leftrightarrow$	$x = -\frac{\log(1) - \log(3)}{\log(4)} + 5$		Taschenrechner
$\Leftrightarrow$	$x \approx 5.792$		

3. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.5, Aufgabe 3) Lösen Sie die Exponentialgleichungen durch Vergleichen der Exponenten.

(a) $5^{2x-3} = 5$

Lösung: $2x - 3 = 1 \Rightarrow x = 2$

(b) $6^{4x-5} = 216$

Lösung: $216 = 6^3 \Rightarrow 4x - 5 = 6 \Rightarrow x = 2$

(c) $4^{2x-1} = 64$

Lösung: $64 = 2^3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

(d) $3^{2x+1} = 3^{x+2}$

Lösung: $2x + 1 = x + 2 \Rightarrow x = 1$

(e) $3^x = \frac{1}{81}$

Lösung: $81 = 3^4 \Rightarrow x = -4$

(f) $25^{x+1} = \frac{1}{5}$

Lösung: $25 = 5^2 \Rightarrow 2(x+1) = -1 \Rightarrow x = -1.5$

(g) $7^{x-2} = \sqrt{7}$

Lösung: $x - 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2.5$

(h) $3^{5x} = \sqrt[3]{3^2}$

Lösung: $5x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{15}$

4. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.5, Aufgabe 4) Eine Braunalge verdoppelt jede Woche ihre Höhe. Zu Beginn der Beobachtung ist sie 1.20 m hoch. Das Wasser ist an dieser Stelle 30 m tief. Wie viele Wochen dauert es, bis die Braunalge an die Wasseroberfläche gelangt?

Lösung: x ist Anzahl der Wochen, es gilt:

$$2^x = 25 \Rightarrow x = \frac{\log(25)}{\log 2} \approx 4.64$$

Es dauert 4 Wochen, 4 Tage, 12 Stunden und 10 Minuten.

5. **Alkohol.** Ein Fass enthält 100 Liter Alkohol. Täglich wird dem Fass ein Liter entnommen und durch Wasser ersetzt. Nach wie vielen Tagen fällt die Alkoholkonzentration erstmals unter 55 %?

Lösung: Bei der ersten Entnahme wird 1 % Alkohol entnommen. Somit ist der Wachstumsfaktor $q = 0.99$.

$$B(0) = 100 \qquad q = 0.99 \qquad n = ? \qquad B(n) = 55$$

Mit der Wachstumsformel ergibt sich:

$\Leftrightarrow$	$B(n) = B(0) \cdot q^n$	einsetzen
$\Leftrightarrow$	$55 = 100 \cdot 0.99^n$	: 100
$\Leftrightarrow$	$0.55 = 0.99^n$	log
$\Leftrightarrow$	$\log(0.55) = n \cdot \log(0.99)$	: $\log(0.99)$
$\Leftrightarrow$	$\frac{\log(0.55)}{\log(0.99)} = n$	ausrechnen
$\Leftrightarrow$	$59.48 \approx n$	

Nach **60 Tagen** fällt die Alkoholkonzentration erstmals unter 55 %.

6. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.5, Aufgabe 6) Bei der Geburt von Lea hat ihre Grossmutter auf einem Sparbuch 100 Franken zu 2.8 % angelegt.

- (a) Wie viel Geld ist an Leas 18. Geburtstag auf dem Sparbuch vorhanden?

Lösung:

$$B(0) \cdot (1 + p)^n = 100 \cdot 1.028^{18} \approx 164.40$$

Es sind **Fr. 164.40** vorhanden.

- (b) An ihrem 18. Geburtstag beschliesst Lea, das Guthaben so lange auf dem Sparbuch zu lassen, bis sich der ursprüngliche Betrag verdoppelt hat. Wie lange muss sie noch warten?

Lösung:

	$B(n) = B(0) \cdot (1 + p)^n$	Einsetzen
⇔	$200 = 100 \cdot (1 + 0.028)^n$	: 100
⇔	$2 = 1.028^n$	log
⇔	$\log(2) = \log(1.028^n)$	Logarithmusgesetz
⇔	$\log(2) = n \cdot \log(1.028)$	: $\log(1.028)$
⇔	$\frac{\log(2)}{\log(1.028)} = n$	Taschenrechner
⇔	$25.1 \approx n$	

Lea muss ein wenig länger als bis zu Ihrem 25. Geburtstag warten, also noch **ein wenig mehr als 7 Jahre**.

7. (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.5, Aufgabe 10) Berechnen Sie die Halbwertszeit.

- (a) Phosphor 32: Jeden Tag zerfallen 4.7 % der vorhandenen Atome.

Lösung:

	$0.5 = (1 - 0.047)^t$	log
⇔	$\frac{\log(0.5)}{\log(0.953)} = t$	
⇔	$14.40 \approx t$	

Die Halbwertszeit beträgt **14.4 Tage**.

- (b) Cobalt 58: Jeden Tag zerfällt 1 % der vorhandenen Atome.

Lösung:

	$2 = (1 - 0.01)^t$	log
⇔	$\frac{\log(2)}{\log(0.99)} = t$	
⇔	$-68.97 \approx t$	

Die Halbwertszeit beträgt **69 Tage**.

- (c) Polonium 218: Jede Minute zerfallen 20 % der vorhandenen Atome.

Lösung:

$$\begin{array}{l}
 2 = (1 - 0.2)^t \quad | \text{ log} \\
 \Leftrightarrow \frac{\log(2)}{\log(0.8)} = t \\
 \Leftrightarrow -3.11 \approx t
 \end{array}$$

Die Halbwertszeit beträgt **3.11 Minuten**.

8. 🏆 (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.5, Aufgabe 5) In Münsteregg geht man davon aus, dass der Wert einer Wohnung jährlich um 1.5 % zunimmt.

- (a) Nach wie vielen Jahren ist eine für 80'000 Franken gekaufte Wohnung 90'000 Franken wert?

Lösung: Nach knapp **8 Jahren** ist die Wohnung 90000 Franken wert.

- (b) Wie viel muss eine Wohnung kosten, damit ihr Wert in 15 Jahren 120'000 Franken beträgt?

Lösung: Die Wohnung muss **95'982 Franken** kosten.

- (c) Wie gross müsste die jährliche Wertsteigerung sein, damit der Wert einer Wohnung in 16 Jahren von 60'000 Franken auf 80'000 Franken steigt?

Lösung: Die Wertsteigerung muss **1.8 %** betragen.

9. 🏆 **Substanz.** Eine Substanz hat eine Halbwertszeit von 3 Wochen.

- (a) Wie viel beträgt die prozentuale Abnahme pro Tag?

Lösung: Die Abnahme pro Tag beträgt **3.25 %**.

- (b) Welcher Teil der ursprünglichen Menge ist nach einem Jahr (52 Wochen) noch vorhanden?

Lösung: Es sind noch **6 Millionstel** vorhanden.

- (c) Wann ist noch 1 Promille der ursprünglichen Menge vorhanden?

Lösung: Nach ungefähr **209 Tagen** oder **30 Wochen**.

10. 🏆 **Kapital.** Ein Kapital ist auf Zinseszins angelegt. Nach 3 Jahren beträgt es Fr. 2771.80, nach 5 Jahren Fr. 2969.20.

- (a) Wie gross ist der Zinsfuss?

Lösung: Der Zinsfuss beträgt **3.5 %**.

(b) Wie gross ist das Anfangskapital?

Lösung: Das Anfangskapital war **2500 Franken**.

(c) In wie viel Jahren verdoppelt sich das Anfangskapital?

Lösung: Das Kapital verdoppelt sich in etwas mehr als **20 Jahren**.

11. 🏆 (Quelle: Lambacher Schweizer, Kapitel 11.5, Aufgabe 8) Die Bevölkerung eines Staates A beträgt 60 Millionen Einwohner und wächst jährlich um 3 %, die eines Staates B beträgt 110 Millionen Einwohner und wächst jährlich um 1 %. Nach wie vielen Jahren haben beide Staaten etwa die gleiche Einwohnerzahl?

Lösung: Nach knapp **31 Jahren** haben die beiden Staaten die gleichen Einwohnerzahl.