

Beschränktes Wachstum

1. **Gerücht.** Am Gymnasium Kirchenfeld mit 1200 Schüler:innen verbreitet sich ein Gerücht. Am Anfang kennen 10 Schüler:innen das Gerücht. Nach t Tagen kennen es $B(t)$ Personen gemäss folgender Tabelle:

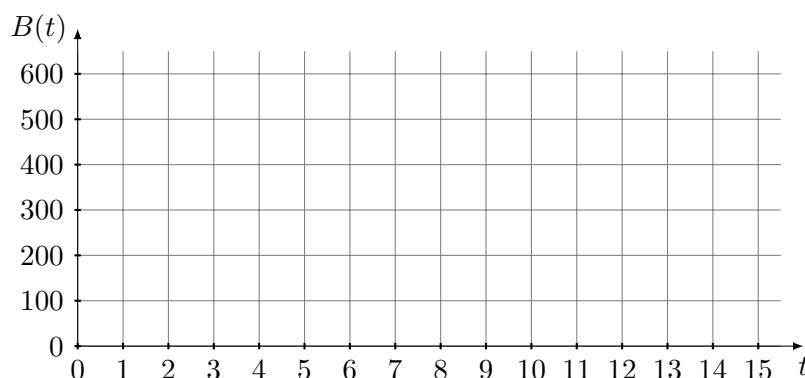
t	0	1	2	3	4
$B(t)$	10	486	772	943	1046
$R(t)$					
$R(t) : R(t-1)$					

- (a) Berechnen Sie für die angegebenen Tage die Anzahl Personen $R(t)$, welche das Gerücht noch nicht kennen.
- (b) Berechnen Sie für die angegebenen Tage die prozentuale Abnahme und der Wachstumsfaktor der Anzahl Personen, die das Gerücht noch nicht kennen.
- (c) Geben Sie die Wachstumsfunktion für $B(t)$ an.
2. **Ester** sind weit verbreitete Aromastoffe, die sich aus je einem Molekül Alkohol und Säure unter Austritt eines Wassermoleküls bilden: $\text{Alkohol} + \text{Säure} \rightarrow \text{Ester} + \text{Wasser}$. Leider läuft die Reaktion nicht vollständig ab, d.h. es bleibt immer ein Rest an Alkohol und Säure übrig.

Bei der Reaktion von 1000 Alkoholmolekülen mit 1000 Säuremolekülen wurde die Zahl $B(t)$ der gebildeten Estermoleküle über die Zeit t in Minuten in die folgende Tabelle eingetragen:

t	0	1	2	3	4	5	10	15
$e(t)$	0	130	226	296	349	388	475	494

- (a) Tragen Sie die gegebenen Werte in das Koordinatensystem ein und bestimmen Sie die Sättigungsgrenze S grafisch.



- (b) Berechnen Sie die Wachstumskonstante q aus den Tabellenwerten für $t = 1$ und $t = 2$ Minuten unter der Annahme eines beschränkten Wachstums. Geben Sie die Wachstumsfunktion an.
- (c) Berechnen Sie $B(10)$ und $B(15)$ mit der Formel für beschränktes Wachstum und vergleichen Sie mit den Tabellenwerten.

- 3. Baumschäden.** In einem Bestand von ursprünglich 10'000 Bäumen werden jedes Jahr 20 % der noch nicht geschädigten Bäume durch den Borkenkäfer befallen.

(a) Stellen Sie die Wachstumsgleichung auf und berechnen Sie die Zahl $B(t)$ der befallenen Bäume nach der angegebenen Anzahl Jahre:

t	1	2	3	4	5	10	20
$B(t)$							

- (b) Nach wie vielen Jahren wären 90 % aller Bäume befallen?
- 4. ☕ Tee.** Die Temperatur eines Glases Tee beträgt 90 °C. Der Tee kühlt ab. Die Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur von 20 °C nimmt jede Minute um 10 % ab. Nach wie vielen Minuten beträgt die Temperatur des Tees nur noch 50 °C?

- 5. Bevölkerung.** In einem Land mit 80 Millionen Einwohnern kommen jährlich auf 1000 Einwohner 8 Geburten und 11 Todesfälle. Die Statistik gibt ferner an, dass im Durchschnitt jährlich 50'000 Personen auswandern und 200'000 Personen einwandern.

- (a) Berechnen Sie die Einwohnerzahl $B(t)$ nach 1, 2, und 3 Jahren.
- (b) Bestimmen Sie den Wachstumsfaktor q und die Schranke S . Geben Sie die Gleichung der Wachstumsfunktion an. Verwenden Sie Millionen Einwohner als Einheit.
- (c) Berechnen Sie die Einwohnerzahl $B(t)$ nach 10, 20 und 50 Jahren.
- (d) Nach wie vielen Jahren wäre die Bevölkerung auf 70 Millionen Einwohner zurückgegangen?

- 6. Infusion.** Einem Patienten werden 5 mg eines Medikamentes pro Minute per Tropfinfusion ins Blut geleitet. Von der im Blut vorhandenen Menge werden jede Minute 4 % über die Nieren wieder ausgeschieden.

(a) Berechnen Sie den Gehalt $B(t)$ des Medikamentes im Blut für die angegebenen Zeiten.

t	0	1	2	3	4	5
$B(t)$						

- (b) Bestimmen Sie den Wachstumsfaktor q , die Sättigungsgrenze S und geben Sie die Wachstumsfunktion an.
- (c) Nach wie vielen Minuten enthält das Blut des Patienten 100 mg des Medikamentes?