

Beschränktes Wachstum

1. **Gerücht.** Am Gymnasium Kirchenfeld mit 1200 Schüler:innen verbreitet sich ein Gerücht. Am Anfang kennen 10 Schüler:innen das Gerücht. Nach t Tagen kennen es $B(t)$ Personen gemäss folgender Tabelle:

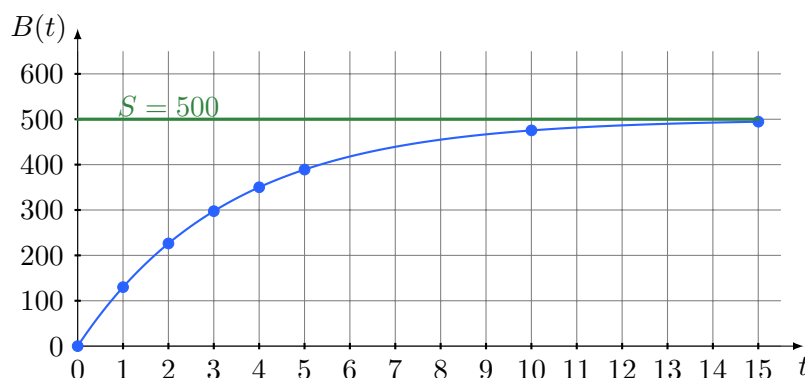
t	0	1	2	3	4
$B(t)$	10	486	772	943	1046
$R(t)$	1190	714	428	257	156
$R(t) : R(t-1)$		0.6	0.6	0.6	0.6

- (a) Berechnen Sie für die angegebenen Tage die Anzahl Personen $R(t)$, welche das Gerücht noch nicht kennen.
- (b) Berechnen Sie für die angegebenen Tage die prozentuale Abnahme und der Wachstumsfaktor der Anzahl Personen, die das Gerücht noch nicht kennen.
- (c) Geben Sie die Wachstumsfunktion für $B(t)$ an.
2. **Ester** sind weit verbreitete Aromastoffe, die sich aus je einem Molekül Alkohol und Säure unter Austritt eines Wassermoleküls bilden: $\text{Alkohol} + \text{Säure} \rightarrow \text{Ester} + \text{Wasser}$. Leider läuft die Reaktion nicht vollständig ab, d.h. es bleibt immer ein Rest an Alkohol und Säure übrig.

Bei der Reaktion von 1000 Alkoholmolekülen mit 1000 Säuremolekülen wurde die Zahl $B(t)$ der gebildeten Estermoleküle über die Zeit t in Minuten in die folgende Tabelle eingetragen:

t	0	1	2	3	4	5	10	15
$e(t)$	0	130	226	296	349	388	475	494

- (a) Tragen Sie die gegebenen Werte in das Koordinatensystem ein und bestimmen Sie die Sättigungsgrenze S grafisch.



Lösung: $S = 500$

- (b) Berechnen Sie die Wachstumskonstante q aus den Tabellenwerten für $t = 1$ und $t = 2$ Minuten unter der Annahme eines beschränkten Wachstums. Geben Sie die Wachstumsfunktion an.

Lösung: $q = \frac{370}{500} = 0.74$ Die Wachstumsfunktion lautet:

$$B(t) = 500 - 500 \cdot 0.74^t$$

- (c) Berechnen Sie $B(10)$ und $B(15)$ mit der Formel für beschränktes Wachstum und vergleichen Sie mit den Tabellenwerten.

Lösung:

$$B(10) = 475$$

$$B(15) = 494$$

- 3. Baumschäden.** In einem Bestand von ursprünglich 10'000 Bäumen werden jedes Jahr 20 % der noch nicht geschädigten Bäume durch den Borkenkäfer befallen.

- (a) Stellen Sie die Wachstumsgleichung auf und berechnen Sie die Zahl $B(t)$ der befallenen Bäume nach der angegebenen Anzahl Jahre:

t	1	2	3	4	5	10	20
$B(t)$	2000	3600	4880	5904	6723	8926	9885

Lösung:

$$B(t) = 10000 - 10000 \cdot 0.8^t$$

- (b) Nach wie vielen Jahren wären 90 % aller Bäume befallen?

Lösung:

$$\begin{array}{lcl}
 & 9000 = 10000 \cdot (1 - 0.8^t) & : 10000 \\
 \Leftrightarrow & 0.9 = 1 - 0.8^t & -0.9 + 0.8^t \\
 \Leftrightarrow & 0.8^t = 0.1 & \log \\
 \Leftrightarrow & t \cdot \log(0.8) = \log(0.1) & : \log(0.8) \\
 \Leftrightarrow & t = \frac{\log(0.1)}{\log(0.8)} \approx 10.319 &
 \end{array}$$

- 4. ☕ Tee.** Die Temperatur eines Glases Tee beträgt 90 °C. Der Tee kühlt ab. Die Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur von 20 °C nimmt jede Minute um 10 % ab. Nach wie vielen Minuten beträgt die Temperatur des Tees nur noch 50 °C?

Lösung: In der Aufgabenstellung sind folgende Werte gegeben:

$$B(0) = 90$$

$$S = 20$$

$$p = -0.1$$

$$B(t) = 50$$

Die Wachstumsfunktion für beschränkte Zunahme lautet

$$B(t) = S - (S - B(0)) \cdot (1 + p)^t = 20 - (20 - 90) \cdot (1 - 0.1)^t = 20 + 70 \cdot 0.9^t$$

Nun wird $B(t) = 50$ eingesetzt und nach t aufgelöst.

	$B(t) = 20 + 70 \cdot 0.9^t$	$B(t) = 50$
$\Leftrightarrow$	$50 = 20 + 70 \cdot 0.9^t$	-20
$\Leftrightarrow$	$30 = 70 \cdot 0.9^t$	$: 70$
$\Leftrightarrow$	$\frac{3}{7} = 0.9^t$	$\log$
$\Leftrightarrow$	$\log(3) - \log(7) = t \cdot \log(0.9)$	$: \log(0.9)$
$\Leftrightarrow$	$\frac{\log(3) - \log(7)}{\log(0.9)} = t$	
$\Leftrightarrow$	$8.04189 \approx t$	

Nach **8 Minuten** ist der Tee auf 50 °C abgekühlt.

- 5. Bevölkerung.** In einem Land mit 80 Millionen Einwohnern kommen jährlich auf 1000 Einwohner 8 Geburten und 11 Todesfälle. Die Statistik gibt ferner an, dass im Durchschnitt jährlich 50'000 Personen auswandern und 200'000 Personen einwandern.

(a) Berechnen Sie die Einwohnerzahl $B(t)$ nach 1, 2, und 3 Jahren.

Lösung:

$$B(t+1) = 0.15 = 0.997 \cdot B(t)$$

$$z(1) = 79.91 \quad z(2) = 79.82 \quad z(3) = 79.7$$

- (b) Bestimmen Sie den Wachstumsfaktor q und die Schranke S . Geben Sie die Gleichung der Wachstumsfunktion an. Verwenden Sie Millionen Einwohner als Einheit.

Lösung:

$$q = 0.997 \quad S = \frac{d}{1-q} = \frac{0.15}{1-0.997} = 50 \quad B(t) = 50 + 30 \cdot 0.997^t$$

- (c) Berechnen Sie die Einwohnerzahl $B(t)$ nach 10, 20 und 50 Jahren.

Lösung:

- (d) Nach wie vielen Jahren wäre die Bevölkerung auf 70 Millionen Einwohner zurückgegangen?

Lösung: Nach ca. **135 Jahren**.

- 6. Infusion.** Einem Patienten werden 5 mg eines Medikamentes pro Minute per Tropfinfusion ins Blut geleitet. Von der im Blut vorhandenen Menge werden jede Minute 4 % über die Nieren wieder ausgeschieden.

- (a) Berechnen Sie den Gehalt $B(t)$ des Medikamentes im Blut für die angegebenen Zeiten.

t	0	1	2	3	4	5
$B(t)$	0	5	9.8	14.4	18.83	23.08

- (b) Bestimmen Sie den Wachstumsfaktor q , die Sättigungsgrenze S und geben Sie die Wachstumsfunktion an.

Lösung: Der Wachstumsfaktor beträgt $q = 1 - 0.04 = 0.96$.

$$S = \frac{d}{1 - q} = \frac{5}{1 - 0.96} = 125$$

Die Sättigungsgrenze S beträgt **125 mg**.

- (c) Nach wie vielen Minuten enthält das Blut des Patienten 100 mg des Medikamentes?

Lösung:

$$\begin{aligned}
 & B(t) = S - (B(0) - S) \cdot q^t \\
 \Leftrightarrow & B(t) = 125 - (125 - 5) \cdot 0.96^t \\
 \Leftrightarrow & 100 = 125 - 120 \cdot 0.96^t \\
 \Leftrightarrow & 120 \cdot 0.96^t = 25 \\
 \Leftrightarrow & 0.96^t = \frac{5}{24} \\
 \Leftrightarrow & t \cdot \log(0.96) = \log(25) \\
 \Leftrightarrow & t = \frac{\log(5) - \log(24)}{\log(0.96)} \\
 \Leftrightarrow & t \approx 38.4
 \end{aligned}
 \quad \left| \begin{array}{l} B(t) = 100 \\ + 120 \cdot 0.96^t - 100 \\ : 120 \\ \log \\ : \log(0.96) \end{array} \right.$$

Nach knapp **39 Minuten** enthält das Blut 100 mg.