Exponentialfunktionen

Stefan Rothe

18.03.2025

Inhaltsverzeichnis

1 Exponentialfunktion

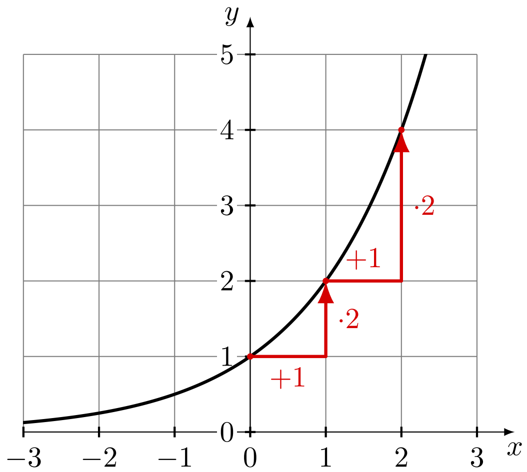
1.1 Definition

Die allgemeine Exponentialfunktion hat die Form

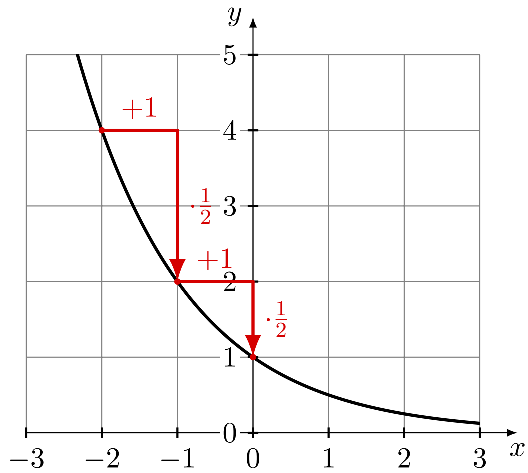
$$f(x) = a \cdot b^x \qquad b \in \mathbb{R}^+$$

Dabei ist die **Basis** b eine **positive Zahl**, welche angibt, um welchen Faktor sich der Funktionswert verändert, wenn x um eins erhöht wird. Die Basis wird auch **Wachstumfaktor** genannt.

Beispielsweise verdoppelt sich bei der Funktion $f(x) = 2^x$ der Funktionswert jedes Mal, wenn x um Eins erhöht wird. Bei der Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ halbiert sich der Funktionswert mit jedem Schritt. Die Exponentialfunktion wächst also, wenn die Basis grösser als Eins ist. Sie nimmt ab, wenn die Basis kleiner als Eins ist.

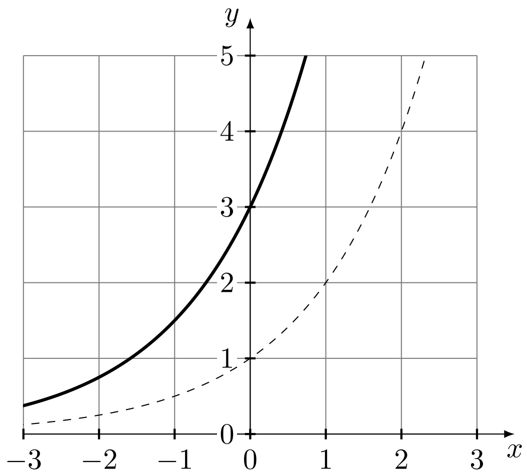


$f(x) = 2^x$

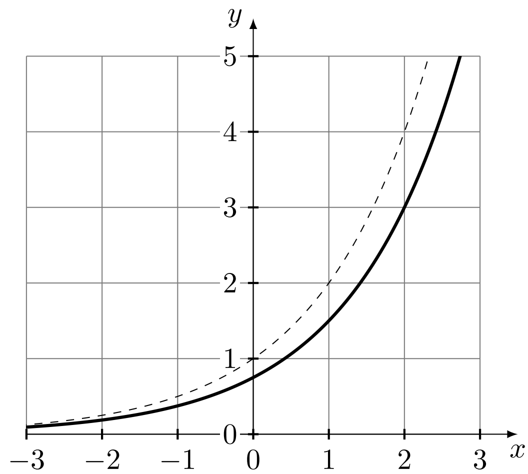


$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Der Parameter a ist ein Streckfaktor. Er bestimmt, wo die Funktion die y-Achse schneidet.



$f(x) = 3 \cdot 2^x$



$f(x) = \frac{3}{4} \cdot 2^x$

2 Logarithmus

Definition

Der Logarithmus x einer Zahl a zur Basis b ist diejenige Zahl, mit welcher die Basis b potenziert werden muss, um a zu erhalten.

$$\log_b(a) = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = a \qquad\qquad \log_7(49) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 7^2 = 49$$

Logarithmengesetze

Es gelten drei Logarithmengesetze. Sie entsprechen den Potenzgesetzen, welche sich auf Potenzen mit gleicher Basis beziehen.

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \quad \Leftrightarrow \quad b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

$$\log_b\left(x^k\right) = k \cdot \log_b(x) \quad \Leftrightarrow \quad (b^x)^k = b^{x \cdot k}$$

Spezielle Logarithmen

Für folgende Basen werden manchmal besondere Schreibweisen verwendet. Dabei steht e für die Eulersche Zahl $2.7182818\ldots$

Bezeichnung	**Basis**	**Schreibweise**	**Bedeutung**
Zehnerlogarithmus	10	$\log(x)$ oder $\lg(x)$	$\log_{10}(x)$
Zweierlogarithmus	2	$\mathrm{lb}(x)$	$\log_2(x)$
natürlicher Logarithmus	e	$\ln(x)$	$\log_e(x)$

Gleichungen Logarithmieren

Um eine Gleichung nach einer Variable x im Exponenten aufzulösen, kann die Gleichung logarithmiert werden. Dabei wird auf beide Seiten der Gleichung der Logarithmus zur gleichen Basis angewendet.

$$\begin{array}{rrl|l}
 & 1.2^x & = 9 & \text{log} \\
\Leftrightarrow & \log\left(1.2^x\right) & = \log(9) & \text{Logarithmusgesetz} \\
\Leftrightarrow & x \cdot \log(1.2) & = \log(9) & : \log(1.2) \\
\Leftrightarrow & x & = \dfrac{\log(9)}{\log(1.2)} & \text{Taschenrechner} \\
\Leftrightarrow & x & \approx 12.05 &
\end{array}$$

Basiswechsel

Computer und Taschenrechner sind nur für die Berechnung von Logarithmen einer bestimmten Basis (normalerweise 10) programmiert. Um einen Logarithmus mit einer anderen Basis zu berechnen, muss mit folgender Regel ein Basiswechsel durchgeführt werden.

$$\log_b(a) = \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(b)}$$

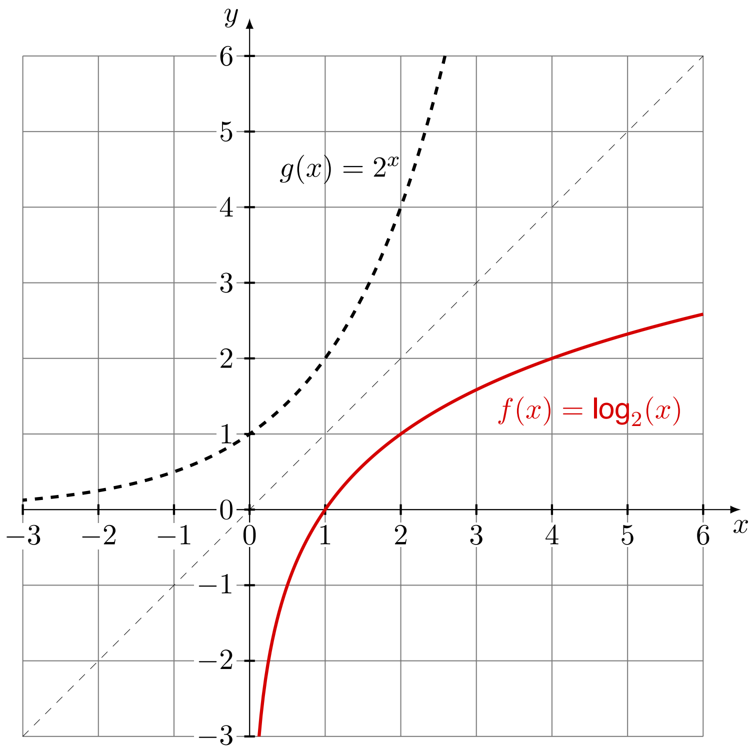
3 Logarithmusfunktion

3.1 Definition

Die allgemeine Logarithmusfunktion hat die Form

$$f(x) = \log_b(x) \qquad b \in \mathbb{R}^+$$

Das der Logarithmus die Umkehroperation des Exponentierens ist, ist die Logarithmusfunktion die Umkehroperation der Exponentialfunktion. Der Graph der Logarithmusfunktion entsteht somit durch Spiegelung and der ersten Winkelhalbierenden.



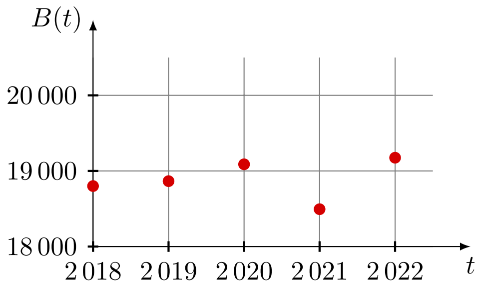
4 Wachstumsvorgänge

4.1 Begriffe

Viele Grössen, die wir messen, verändern sich mit der Zeit. In diesem Kapitel wird betrachtet, wie solche Vorgänge mathematisch beschrieben werden können.

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl gymnasialer Abschlüsse in der Schweiz in verschiedenen Jahren. Diese Anzahl wird der **Bestand** $B(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t genannt.

t	$B(t)$	d	p
2018	18'800		
2019	18'865	65	0.35 %
2020	19'088	223	1.18 %
2021	18'494	−594	−3.11 %
2022	19'175	681	3.68 %



Gymnasiale Abschlüsse in der Schweiz

Die Zuordnung Zeitpunkt $t \to$ Bestand $B(t)$ ist mathematisch betrachtet eine Abbildung oder eine Funktion, welche auch graphisch in einem Koordinatensystem dargestellt werden kann.

Die Änderung des Bestands von einem Zeitpunkt zum nächsten kann auf zwei Arten beschrieben werden.

Die **absolute Veränderung** d ist die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Beständen.

$$d = B(t+1) - B(t)$$

Die **relative** oder **prozentuale Veränderung** p ist die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Beständen im Verhältnis zum ersten der beiden Bestände.

$$p = \frac{d}{B(t)} = \frac{B(t+1) - B(t)}{B(t)}$$

Wenn die Veränderung negativ ist, spricht man von **Zerfall** oder von **negativem Wachstum**.

4.2 Lineares Wachstum

Wenn die absolute Veränderung d konstant ist, sprechen wir von **linearem Wachstum**. Wenn der Anfangsbestand $B(0)$ und die absolute Veränderung d bekannt sind, kann der Bestand $B(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t wie folgt berechnet werden:

$$B(t) = B(0) + d \cdot t$$

Es gilt:

$d > 0$	Der Bestand nimmt zu
$d < 0$	Der Bestand nimmt ab
$d = 0$	Der Bestand bleibt gleich

4.3 Anwendungen

Wachstumsprozesse treten in vielen Bereichen auf, beispielsweise:

- Wachstum von Populationen (z.B. Bakterien, Tiere, Bevölkerung)
- Zerfall radioaktiver Materialien
- Verbreitung von Infektionskrankheiten
- Zunahme von Kapital beim Sparen mit Zinseszins
- Verbreitung von Memes in sozialen Netzwerken
- technologische Fortschritte (Moorsches Gesetz)
- Abkühlung von heissen Flüssigkeiten

5 Exponentielles Wachstum

5.1 Definition

Wenn die relative Veränderung p konstant ist, sprechen wir von **exponentiellem Wachstum**. Wenn der Anfangsbestand $B(0)$ und die Veränderung p bekannt sind, kann der Bestand $B(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t wie folgt berechnet werden:

$$B(t) = B(0) \cdot (1+p)^t$$

Beim exponentiellen Wachstum wird der **Wachstumsfaktor** q so definiert:

$$q = \frac{B(t+1)}{B(t)} = 1 + p$$

Damit kann die Formel vereinfacht geschrieben werden:

$$B(t) = B(0) \cdot q^t$$

Je nachdem, ob der Wachstumsfaktor grösser oder kleiner als Null ist, nimmt der Bestand zu oder ab:

	Wachstumsfaktor	relatives Wachstum
Zunahme	$q > 1$	$p > 0$
Abnahme	$0 < q < 1$	$-1 < p < 0$

Beispiel. *Ein typisches Beispiel für eine **exponentielle Zunahme** ist das Wachstum von Bakterien unter idealen Bedingungen. So ist eine Kolibakterienkultur zu Beginn eines Experiments* 5 cm² *gross. Jede Minute nimmt die Fläche um* 3.5 % *zu. Damit ist*

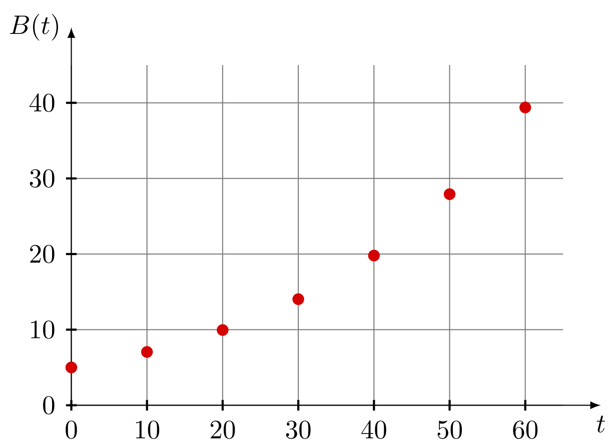
$$B(0) = 5 \qquad\qquad p = 0.035$$

Die Fläche der Bakterienkultur $B(t)$ in Abhängigkeit der vergangenen Zeit t pro Minute kann mit der folgenden Formel beschrieben werden:

$$B(t) = 5 \cdot (1 + 0.035)^t = 5 \cdot 1.035^t$$

Die Bakterienkultur hat einen Wachstumsfaktor von 1.035.

t	$B(t)$
0	5.00
1	5.18
2	5.36
10	7.05
20	9.95
30	14.03
40	19.80
50	27.92
60	39.39



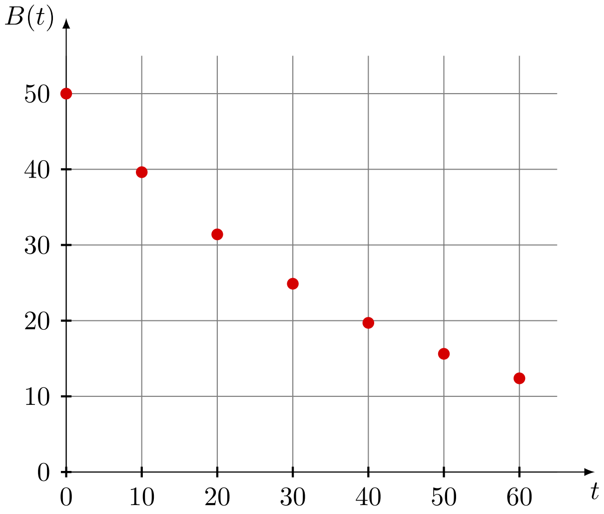
Beispiel. *Ein typisches Beispiel für eine **exponentielle Abnahme** ist der Zerfall eines radioaktiven Materials. Vom Kernspaltungsprodukt Cäsium-137 zerfallen pro Jahr* 2.3 % *der Atomkerne. Zu Beginn sind* 50 g *des Materials vorhanden. Somit ist*

$$B(0) = 50 \qquad\qquad p = -0.023$$

Die verbleibende Menge Cäsium-137 in Abhängigkeit der vergangenen Zeit t pro Jahr wird mit der folgenden Formel beschrieben:

$$B(t) = 50 \cdot (1 - 0.023)^t = 50 \cdot 0.977^t$$

t	$B(t)$
0	50.00
1	48.85
2	47.73
10	39.62
20	31.40
30	24.88
40	19.71
50	15.62
60	12.38



5.2 Verdopplungszeit / Halbwertszeit

Ein oft verwendetes Mass für das exponentielle Wachstum ist die Zeit, in welcher sich der Bestand verdoppelt beziehungsweise halbiert. Diese Zeit wird **Verdopplungszeit** oder **Halbwertszeit** genannt.

Um die Verdopplungszeit für eine gegebenen Wachstumsfaktor q zu bestimmen, wird in der Wachstumsformel $B(t) = 2 \cdot B(0)$ gesetzt und die Gleichung nach t aufgelöst.

$$\begin{array}{lrl|l}
 & 2 \cdot B(0) & = B(0) \cdot q^t & : B(0) \\
\Leftrightarrow & 2 & = q^t & \text{log} \\
\Leftrightarrow & \text{log}(2) & = \text{log}\left(q^t\right) & \text{Logarithmusgesetze} \\
\Leftrightarrow & \text{log}(2) & = t \cdot \text{log}(q) & : \text{log}(q) \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\text{log}(2)}{\text{log}(q)} & = t &
\end{array}$$

Der Anfangsbestand fällt aus der Gleichung, er beeinflusst die Verdopplungszeit nicht. Für den Wachstumsfaktor q ergibt sich die Verdopplungszeit

$$t = \frac{\text{log}(2)}{\text{log}(q)} = \frac{\text{log}(2)}{\text{log}(1+p)}$$

Für die Bestimmung der Halbwertszeit wird $\text{log}(2)$ durch $\text{log}(0.5) = -\text{log}(2)$ ersetzt.

Beispiel. *Für die Kolibakterien mit einem Wachstumsfaktor von $q = 1.035$ pro Minute wird die Verdopplungszeit ermittelt:*

$$\begin{array}{rrl|l}
 & 2 & = 1.035^t & \text{log} \\
\Leftrightarrow & \log(2) & = \log\left(1.035^t\right) & \textit{Logarithmusgesetz} \\
\Leftrightarrow & \log(2) & = t \cdot \log(1.035) & : \log(1.035) \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\log(2)}{\log(1.035)} & = t & \\
\Leftrightarrow & 20.14 & \approx t &
\end{array}$$

Sie haben eine Verdopplungszeit von etwa 20 Minuten.

Um den Wachstumsfaktor zu bestimmen, wenn die Halbwertszeit bekannt ist, wird $B(t) = 0.5B(0)$ in die Formel eingesetzt und nach q aufgelöst.

$$\begin{array}{rrl|l}
 & 0.5 \cdot B(0) & = B(0) \cdot q^t & : B(0) \\
\Leftrightarrow & 0.5 & = q^t & \sqrt[t]{} \\
\Leftrightarrow & \sqrt[t]{0.5} & = q &
\end{array}$$

Für die Halbwertszeit t ergibt sich also der Wachstumsfaktor

$$q = \sqrt[t]{0.5} \qquad\qquad p = \sqrt[t]{0.5} - 1$$

Für die Bestimmung des Wachstumsfaktors aus der Verdopplungszeit wird $\sqrt[t]{0.5}$ durch $\sqrt[t]{2}$ ersetzt.

Beispiel. *Iod hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen.*

$$q = \sqrt[8]{0.5} \approx 0.917 \qquad\qquad p = 0.917 - 1 = -0.083$$

Also hat Iod einen Wachstumsfaktor von 0.917 pro Tag. Jeden Tag zerfallen 8.3 % *der Iodatome.*

5.3 Anfangsbestand bestimmen

Um bei einem exponentiellen Wachstum den Anfgangsbestand zu bestimmen, wir die Formel nach $B(0)$ aufgelöst. Die Division durch q^t kann gemäss Definition als negative Potzenz geschrieben werden.

$$B(0) = \frac{B(t)}{q^t} = B(t) \cdot q^{-t} = B(t) \cdot (1+p)^{-t}$$

Beispiel. *Wie viel Franken muss man auf ein Sparkonto einzahlen, wenn es innert 20 Jahren durch Zinseszins auf 2000 Franken anwachsen soll? Der jährliche Zinssatz beträgt* 5 %*. Es ist*

$$t = 20 \qquad\qquad B(20) = 2000 \qquad\qquad p = 0.05$$

Die Werte werden in die Formel eingesetzt: $B(0) = 2000 \cdot (1 + 0.05)^{-20} \approx 753.78$

Es müssen also 753 Franken angelegt werden.

5.4 Wachstumsfaktor bestimmen

Sind bei einem exponentiellen Wachstum nur zwei Bestände $B(t_1)$ und $B(t_2)$ zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 bekannt, so kann damit das relative Wachstum p bestimmt werden.

Dazu werden die beiden bekannten Bestände in die Formel für den Anfangsbestand aus dem vorherigen Abschnitt eingesetzt. Beide Mal muss sich der gleiche Anfangsbestand ergeben, also werden die Formeln gleichgesetzt. Diese Gleichung kann nach q aufgelöst werden:

$$
\begin{array}{lrl|l}
 & \dfrac{B(t_1)}{q^{t_1}} & = \dfrac{B(t_2)}{q^{t_2}} & \cdot q^{t_2} : (B(t_1) \\
\Leftrightarrow & \dfrac{q^{t_2}}{q^{t_1}} & = \dfrac{B(t_2)}{B(t_1)} & \text{Potenzgesetz} \\
\Leftrightarrow & q^{t_2-t_1} & = \dfrac{B(t_2)}{B(t_1)} & \sqrt[t_2-t_1]{} \\
\Leftrightarrow & q & = \sqrt[t_2-t_1]{\dfrac{B(t_2)}{B(t_1)}} &
\end{array}
$$

Der Wachstumsfaktor kann also mit folgender Formel aus zwei Beständen ermittelt werden:

$$q = \sqrt[t_2-t_1]{\frac{B(t_2)}{B(t_1)}} \qquad p = \sqrt[t_2-t_1]{\frac{B(t_2)}{B(t_1)}} - 1$$

Beispiel. *Die Grösse einer Bakterienkultur wird gemessen. Nach einer Stunde beträgt sie* 30 cm^2*, nach zwei Stunden* 90 cm^2*. Es ist*

$$t_1 = 60 \qquad B(t_1) = 30 \qquad t_2 = 120 \qquad B(t_2) = 90$$

Die Werte werden in die Formel eingesetzt:

$$q = \sqrt[120-60]{\frac{90}{30}} = \sqrt[60]{3} \approx 1.0185$$

Der Wachstumsfaktor q beträgt 1.0185, das relative Wachstum p ist 1.85 % *pro Minute.*

5.5 Zeitdauer bestimmen

Wenn bei einem exponentiellen Wachstum ein Zielbestand $B(t)$ vorgegeben ist, kann die benötigte Zeit t ermittelt werden. Dazu wird die Gleichung für exponentielles Wachstum durch Logarithmieren nach t aufgelöst.

$$
\begin{array}{lrl|l}
 & B(t) & = B(0) \cdot q^t & : B(0) \\
\Leftrightarrow & \dfrac{B(t)}{B(0)} & = q^t & \log \\
\Leftrightarrow & \log\left(\dfrac{B(t)}{B(0)}\right) & = \log\left(q^t\right) & \text{Logarithmengesetze} \\
\Leftrightarrow & \log(B(t)) - \log(B(0)) & = t \cdot \log(q) & : \log(q) \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\log(B(t)) - \log(B(0))}{\log(q)} & = t &
\end{array}
$$

Die benötigte Zeit t, um einen bestimmten Bestand $B(t)$ zu erreichen, kann also mit folgender Formel berechnet werden:

$$t = \frac{\log(B(t)) - \log(B(0))}{\log(q)}$$

Beispiel. *Ein Kapital von 1000 Franken soll verdoppelt werden. Es wird mit einem Zinssatz von* 4.5 % *angelegt. Es gilt:*

$$B(0) = 1000 \qquad B(t) = 2000 \qquad p = 0.045$$

Die Werte werden in die Formel eingesetzt:

$$t = \frac{\log(2000) - \log(1000)}{\log(1 + 0.045)} \approx 15.75$$

Es dauert 16 Jahre, bis sich das Kapital verdoppelt hat.

6 Beschränktes Wachstum

6.1 Definition

In der Natur können Wachstumsprozesse nicht beliebig lange exponentiell verlaufen. Da in Ressourcen beschränkt sind, ist auch ein maximal möglicher Bestand beschränkt. Mathematisch bedeutet das, dass der Bestand eine Schranke S nicht unter- oder überschreiten kann.

Das beschränkte Wachstum wird mit Hilfe des negativen exponentiellen Wachstums modelliert. Die Idee ist, dass der Abstand des Bestandes zur Schranke exponentiell abnimmt. Dazu wird die ursprüngliche exponentielle Wachstumsfunktion von der Schranke subtrahiert. Der Anfangsbestand der exponentiellen Abnahme ist die Differenz des Anfangsbestands zur Schranke, also $S - B(0)$. Dies ergibt folgende Wachstumsgleichung:

$$B(t) = S - (S - B(0)) \cdot q^t$$

Dabei gibt der Wachstumsfaktor q die Abnahme der Differenz zur Schranke S an und muss immer kleiner als Eins sein.

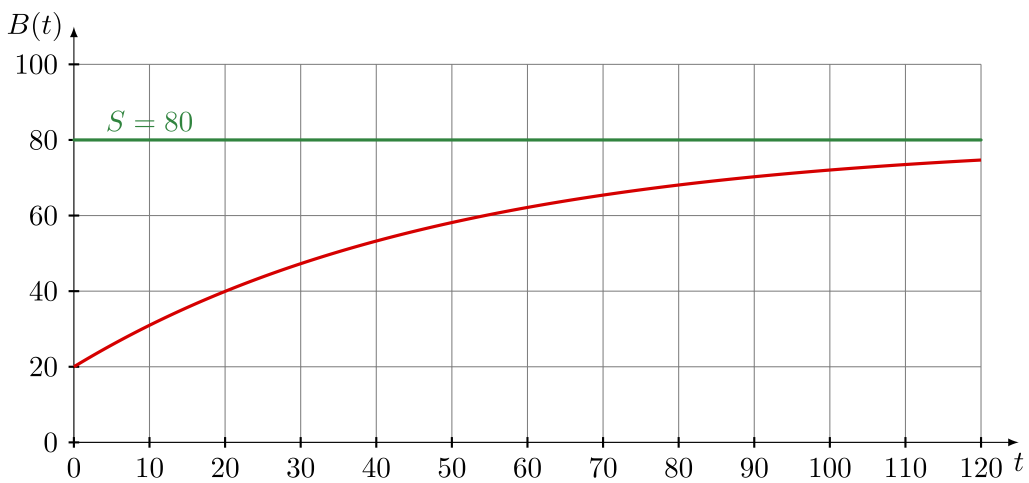
Je nachdem, ob die Schranke S grösser oder kleiner als der Anfangsbestand $B(0)$ ist, handelt es sich um eine Zunahme oder eine Abnahme.

	Bedingung
Zunahme	$S > B(0)$
Abnahme	$S < B(0)$

Beispiel. *Ein Beispiel für eine* ***beschränkte Zunahme*** *ist eine Bakterienkultur in einer Petrischale. In einer* 80 cm² *grossen Petrischale ist zu Beginn* 20 cm² *gross. Die freie Fläche vermindert sich jede Minute um* 2 %*. Es sind also*

$B(0) = 20$ $\qquad S = 80$ $\qquad p = -0.02$

$$B(t) = 80 - (80 - 20) \cdot (1 - 0.02)^t = 80 - 60 \cdot 0.98^t$$

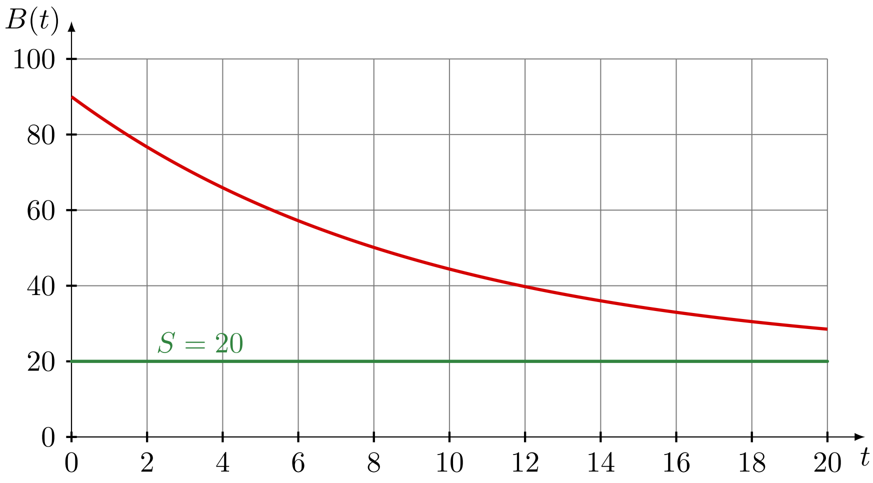


Beispiel. *Ein typisches Beispiel für eine* ***beschränkte Abnahme*** *sind Abkühlungsprozesse. Die Temperatur eines Glases Tee beträgt* 90 °C*. Der Tee kühlt ab, wobei Differenz zur Raumtemperatur von* 20 °C *jede Minute um* 10 % *abnimmt. Damit ist*

$$B(0) = 90 \qquad S = 20 \qquad p = -0.1$$

Die Temperatur des Tees $B(t)$ in Abhängigkeit der vergangenen Zeit t in Minuten kann mit folgender Formel beschrieben werden:

$$B(t) = 20 - (20 - 90) \cdot (1 - 0.1)^t = 20 + 70 \cdot 0.9^t$$



6.2 Bestimmung der Schranke

Die Wachstumsgleichung kann nach der Schranke S aufgelöst werden:

$$\begin{array}{rrll} & B(t) & = S - (S - B(0)) \cdot q^t & \\ \Leftrightarrow & B(t) & = S - S \cdot q^t + B(0) \cdot q^t & \mid -B(0) \cdot q^t \\ \Leftrightarrow & B(t) - B(0) \cdot q^t & = S - S \cdot q^t & \\ \Leftrightarrow & B(t) - B(0) \cdot q^t & = S \cdot \left(1 - q^t\right) & \mid : \left(1 - q^t\right) \\ \Leftrightarrow & \dfrac{B(t) - B(0) \cdot q^t}{1 - q^t} & = S & \end{array}$$

Also kann bei einem beschränkten Wachstum die Schranke ermittelt werden, wenn neben dem Anfangsbestand und dem Wachstumsfaktor der Bestand zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt ist. Die Schranke S wird wie folgt berechnet:

$$S = \frac{B(t) - B(0) \cdot q^t}{1 - q^t}$$

Beispiel. *Die Temperatur eines Glases Tee beträgt* 90 °C*. Der Tee kühlt ab, wobei Differenz zur Raumtemperatur jede Minute um* 10 % *abnimmt. Nach 5 Minuten beträgt die Temperatur des Tees* 60 °C*. Die Raumtemperatur soll ermittelt werden. Es sind*

$$B(0) = 90 \qquad t = 5 \qquad B(t) = 60 \qquad q = 0.9$$

Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$S = \frac{B(t) - B(0) \cdot q^t}{1 - q^t} = \frac{60 - 90 \cdot 0.9^5}{1 - 0.9^5} \approx 16.74$$

Die Raumtemperatur beträgt knapp 17 °C.