

Logarithmen

Definition

Der Logarithmus x einer Zahl a zur Basis b ist diejenige Zahl, mit welcher die Basis b potenziert werden muss, um a zu erhalten.

$$\log_b(a) = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = a \qquad \log_7(49) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 7^2 = 49$$

Logarithmengesetze

Es gelten drei Logarithmengesetze. Sie entsprechen den Potenzgesetzen, welche sich auf Potenzen mit gleicher Basis beziehen.

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

$$\log_b(x^k) = k \cdot \log_b(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad (b^x)^k = b^{x \cdot k}$$

Spezielle Logarithmen

Für folgende Basen werden manchmal besondere Schreibweisen verwendet. Dabei steht e für die Eulersche Zahl 2.7182818...

Bezeichnung	Basis	Schreibweise	Bedeutung
Zehnerlogarithmus	10	$\log(x)$ oder $\lg(x)$	$\log_{10}(x)$
Zweierlogarithmus	2	$\text{lb}(x)$	$\log_2(x)$
natürlicher Logarithmus	e	$\ln(x)$	$\log_e(x)$

Gleichungen Logarithmieren

Um eine Gleichung nach einer Variable x im Exponenten aufzulösen, kann die Gleichung logarithmiert werden. Dabei wird auf beide Seiten der Gleichung der Logarithmus zur gleichen Basis angewendet.

$$\begin{array}{l|l}
 1.2^x = 9 & \log \\
 \log(1.2^x) = \log(9) & \text{Logarithmusgesetz} \\
 x \cdot \log(1.2) = \log(9) & : \log(1.2) \\
 x = \frac{\log(9)}{\log(1.2)} & \text{Taschenrechner} \\
 x \approx 12.05 &
 \end{array}$$

Basiswechsel

Computer und Taschenrechner sind nur für die Berechnung von Logarithmen einer bestimmten Basis (normalerweise 10) programmiert. Um einen Logarithmus mit einer anderen Basis zu berechnen, muss mit folgender Regel ein Basiswechsel durchgeführt werden.

$$\log_b(a) = \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(b)}$$