Übungsprobe Exponentielles Wachstum

Beachten Sie:

- Sie haben 75 Minuten Zeit.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Sie dürfen den Taschenrechner und das Fundamentum verwenden.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Total
max. Punkte	8	8	8	6	6	8	44
Punkte							

Note

1. Wachstum (8P)

Von zwei Wachstumsvorgängen (K) und (P) sind jeweils die Bestände zu den Zeitpunkten 0, 1, 2, 3 und 4 bekannt:

n	0	1	2	3	4
$B(n)$	60.0	54.0	48.6	43.7	39.4

(K)

n	0	1	2	3	4
$B(n)$	60.0	53.6	47.2	40.8	34.4

(P)

(a) Geben Sie zu beiden Vorgängen an, ob es sich um lineares oder exponentielles Wachstum handelt. Begründen Sie Ihre Antwort. (4P)

Lösung: Bei (K) handelt es sich um exponentielles Wachstum, da die relative Veränderung, also der Quotient zweier aufeinander folgenden Bestände, konstant ist:

$$\frac{54.0}{60.0} = 0.9 \qquad \frac{48.6}{54.0} = 0.9 \qquad \frac{43.7}{48.6} \approx 0.9 \qquad \frac{39.4}{43.7} \approx 0.9$$

Bei (P) handelt es sich um lineares Wachstum, da die absolute Veränderung, also die Differenz zweier aufeinander folgenden Bestände, konstant ist:

$$53.6 - 60.0 = -6.4 \qquad 47.2 - 53.6 = -6.4$$
$$40.8 - 47.2 = -6.4 \qquad 34.3 - 40.8 = -6.4$$

Bewertung:

- korrekte Antwort je **1P**
- korrekte Begründung je **1P**

(b) Geben Sie zu beiden Vorgängen an, ob es sich um positives oder negatives Wachstum handelt und wieso. (2P)

Lösung: Bei (K) handelt es sich um negatives Wachstum, da die relative Veränderung mit 0.9 kleiner als Eins ist.

Beim (P) handelt es sich um negatives Wachstum, da die absolute Veränderung mit –6.4 negativ ist.

Bewertung:

- korrekte Antwort je **1P**
- korrekte Begründung je **1P**

(c) Geben Sie zu beiden Vorgängen den Bestand zum Zeitpunkt $n = 20$ an. (2P)

Lösung: Für (K) ist $B(20) = B(0) \cdot q^n = 60 \cdot 0.9^{20} \approx 7.29$

Für (P) ist $B(20) = B(0) + d \cdot n = 60 + (-6.4) \cdot 20 = -68$

Bewertung:

- korrekte Antwort je **1P**

2. Funktionsgleichung bestimmen.

Bestimmen Sie jeweils die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$, die durch die beiden angegebenen Punkte geht.

(a) $A(0/2)$ und $B(4/4)$ (4P)

Lösung: Damit beide Punkte auf dem Funktionsgraphen liegen, müssen die Koordinaten der Punkte die Funktionsgleichung erfüllen, also:

$$y_A = a \cdot b^{x_A} \qquad y_B = a \cdot b^{x_B}$$

Mit den Werten:

$$2 = a \cdot b^0 \qquad 4 = a \cdot b^4$$

Wegen $b^0 = 1$ ergibt die linke Gleichung sofort $a = 2$. In der rechten Gleichung wird dies eingesetzt, danach wird nach b aufgelöst.

$$\begin{array}{lrl|l} & 4 &= a \cdot b^4 & a = 2 \\ \Leftrightarrow & 4 &= 2 \cdot b^4 & :2 \\ \Leftrightarrow & 2 &= b^4 & \sqrt[4]{} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[4]{2} &= b & \end{array}$$

Damit ist $b = \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$ und die Funktionsgleichung lautet (drei Varianten, alle korrekt):

$$f(x) = 2 \cdot \left(\sqrt[4]{2}\right)^x = 2 \cdot \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^x = 2 \cdot 2^{\frac{x}{4}}$$

Bewertung:

- Koordinaten in Gleichung einsetzen **1P**
- erste Gleichung auflösen **1P**
- zweite Gleichung auflösen **1P**
- korrekte Funktionsgleichung **1P**

(b) $C(1/2)$ und $D(2/5)$ (4P)

Lösung: Die Punkte C und D müssen wiederum die Funktionsgleichung erfüllen, also:

$$2 = a \cdot b^1 \qquad\qquad 5 = a \cdot b^2$$

Hier wird die linke Gleichung nach a aufgelöst:

$$a = \frac{2}{b}$$

In der rechten Gleichung wird dies eingesetzt, danach wird nach b aufgelöst.

$$\begin{array}{lrll} & 5 &= a \cdot b^2 & \quad \Big| \; a = \frac{2}{b} \\ \Leftrightarrow & 5 &= \frac{2}{b} \cdot b^2 & \quad \Big| \; \text{kürzen} \\ \Leftrightarrow & 5 &= 2 \cdot b & \quad \Big| \; : 2 \\ \Leftrightarrow & 2.5 &= b & \end{array}$$

Damit ist $a = \frac{2}{b} = 0.8$ und die Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = 0.8 \cdot 2.5^x$$

Bewertung:

- Koordinaten in Gleichung einsetzen **1P**
- erste Gleichung auflösen **1P**
- zweite Gleichung auflösen **1P**
- korrekte Funktionsgleichung **1P**

3. Hasenpopulation. **(8P)**

Auf einer Insel werden $B(0) = 20$ Hasen ausgesetzt. Die Population verdoppelt sich alle zwei Monate.

(a) Bestimmen Sie die Grösse der Hasenpopulation nach 1, 2, 3 und 4 Jahren. (2P)

Jahre	1	2	3	4
Population	1280	$81'920$	$5.2 \cdot 10^6$	$3.4 \cdot 10^8$

Lösung: Bewertung:

- pro zwei korrekte Werte **1P**

(b) Geben Sie die Funktionsgleichung $f(t)$ für die Hasenpopulation $f(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit **in Monaten** t an. Formen Sie die Gleichung so um, dass t alleine im Exponenten steht. (2P)

Lösung:

$$f(t) = 20 \cdot 2^{\frac{t}{2}} = 20 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^t = 20 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^t$$

Bewertung:

- korrekte Wert in Basis **1P**
- korrekte Funktionsgleichung **1P**

(c) Geben Sie die Funktionsgleichung $g(t)$ für die Hasenpopulation $g(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit **in Jahren** t an. Formen Sie die Gleichung so um, dass t alleine im Exponenten steht. (2P)

Lösung:

$$g(t) = 20 \cdot 2^{6t} = 20 \cdot \left(2^6\right)^t = 20 \cdot 64^t$$

Bewertung:

- korrekte Wert in Basis **1P**
- korrekte Funktionsgleichung **1P**

(d) In wie vielen Monaten wird die Zahl der Hasen auf 20'000 angestiegen sein? (1P)

Lösung: Dazu wird die Wachstumsgleichung aus Teilaufgabe (b), d.h. in Monaten verwendet:

$$\begin{array}{lrll|l} & f(t) &=& 20 \cdot 2^{\frac{t}{2}} & f(t) = 20'000 \\ \Leftrightarrow & 20'000 &=& 20 \cdot 2^{\frac{t}{2}} & :20 \\ \Leftrightarrow & 1000 &=& 2^{\frac{t}{2}} & \text{log} \\ \Leftrightarrow & \log(1000) &=& \log\left(2^{\frac{t}{2}}\right) & \text{Logarithmengesetze} \\ \Leftrightarrow & 3 &=& \frac{t}{2} \cdot \log(2) & \cdot 2 : \log(2) \\ \Leftrightarrow & \frac{6}{\log(2)} &=& t & \text{Taschenrechner} \\ \Leftrightarrow & 19.93 &\approx& t & \end{array}$$

In 20 Monaten wird die Population auf 20'000 angestiegen sein.

Bewertung:

- korrektes Resultat **1P**

(e) In wie vielen Monaten wird die Zahl der Hasen auf 20 Millionen angestiegen sein? (1P)

Lösung: Dazu wird die Wachstumsgleichung aus Teilaufgabe (b), d.h. in Monaten verwendet:

$$\begin{array}{lrll|l} & f(t) &=& 20 \cdot 2^{\frac{t}{2}} & f(t) = 20 \cdot 10^6 \\ \Leftrightarrow & 20 \cdot 10^6 &=& 20 \cdot 2^{\frac{t}{2}} & :20 \\ \Leftrightarrow & 10^6 &=& 2^{\frac{t}{2}} & \text{log} \\ \Leftrightarrow & \log\left(10^6\right) &=& \log\left(2^{\frac{t}{2}}\right) & \text{Logarithmengesetze} \\ \Leftrightarrow & 6 &=& \frac{t}{2} \cdot \log(2) & \cdot 2 : \log(2) \\ \Leftrightarrow & \frac{12}{\log(2)} &=& t & \text{Taschenrechner} \\ \Leftrightarrow & 39.86 &\approx& t & \end{array}$$

In 40 Monaten wird die Population auf 20 Millionen angestiegen sein.

Bewertung:

- korrektes Resultat **1P**

4. Schweizer Bevölkerung. **(6P)**

2010 zählte die Schweiz 7'857'000 Einwohnerinnen und Einwohner. Gemäss dem Bundesamt für Statistik sind für den Zeitraum 2010 bis 2060 drei Szenarien der Bevölkerungsentwicklung möglich.

Berechnen Sie für jedes Szenario die jährliche Zu- oder Abnahme in Prozent anhand der Prognose für das Jahr 2060:

Lösung: Für alle Teilaufgaben muss die Wachstumsfuntkion nach p aufgelöst werden:

$$
\begin{array}{rrl|l}
 & f(x) & = f(0)\cdot(p+1)^t & \text{Werte einsetzen} \\
\Leftrightarrow & f(50) & = 7.857\cdot 10^6\cdot(1+p)^{50} & :7.857 \\
\Leftrightarrow & \dfrac{f(50)}{7.857\cdot 10^6} & = (1+p)^{50} & \sqrt[50]{} \\
\Leftrightarrow & \left(\dfrac{f(50)}{7.857\cdot 10^6}\right)^{\frac{1}{50}} & = 1+p & -1 \\
\Leftrightarrow & \left(\dfrac{f(50)}{7.857\cdot 10^6}\right)^{\frac{1}{50}} - 1 & = p &
\end{array}
$$

(a) Szenario «tief»: 6'758'000 Einwohner (2P)

Lösung:

$$= \left(\frac{6.758\cdot 10^6)}{7.857\cdot 10^6}\right)^{\frac{1}{50}} - 1 \approx -0.003 = -0.30\,\%$$

(b) Szenario «mittel»: 8'992'000 Einwohner (2P)

Lösung:

$$= \left(\frac{8.992\cdot 10^6}{7.857\cdot 10^6}\right)^{\frac{1}{50}} - 1 \approx 0.0027 = 0.27\,\%$$

(c) Szenario «hoch»: 11'315'000 Einwohner (2P)

Lösung:

$$= \left(\frac{11.315\cdot 10^6}{7.857\cdot 10^6}\right)^{\frac{1}{50}} - 1 \approx 1.0073 = 0.73\,\%$$

5. Exponentialgleichungen Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

(a) $2 \cdot 3^x = 4$ (2P)

Lösung:

$$\begin{array}{rrl|l} & 2 \cdot 3^x & = 4 & :2 \\ \Leftrightarrow & 3^x & = 2 & \text{log} \\ \Leftrightarrow & \log\left(3^x\right) & = \log(2) & \text{Logarithmusgesetz} \\ \Leftrightarrow & x \cdot \log(3) & = \log(2) & :\log(3) \\ \Leftrightarrow & x & = \dfrac{\log(2)}{\log(3)} & \text{Taschenrechner} \\ \Leftrightarrow & x & \approx 0.63 & \end{array}$$

Bewertung:

- Gleichung korrekt Logarithmieren **1P**
- Gleichung korrekt Auflösen und richtiges Resultat **1P**

(b) $2^{2x+1} - 4^3 = 8$ (2P)

Lösung:

$$\begin{array}{rrl|l} & 2^{2x+1} - 4^3 & = 8 & +4^3 \\ \Leftrightarrow & 2^{2x+1} & = 8 + 64 & \text{log} \\ \Leftrightarrow & \log\left(2^{2x+1}\right) & = \log(72) & \text{Logarithmusgesetz} \\ \Leftrightarrow & (2x+1) \cdot \log(2) & = \log(72) & :\log(72) \\ \Leftrightarrow & 2x + 1 & = \dfrac{\log(72)}{\log(2)} & -1 \\ \Leftrightarrow & 2x & = \dfrac{\log(72)}{\log(2)} - 1 & :2 \\ \Leftrightarrow & x & = \dfrac{\log(72)}{2 \cdot \log(2)} - \dfrac{1}{2} & \text{Taschenrechner} \\ \Leftrightarrow & x & \approx 2.58 & \end{array}$$

Bewertung:

- Gleichung korrekt Logarithmieren **1P**
- Gleichung korrekt Auflösen und richtiges Resultat **1P**

(c) $5^x = 3^x$ (2P)

Lösung:

$$\begin{array}{rrl|l} & 5^x & = 3^x & \text{log} \\ \Leftrightarrow & \log\left(5^x\right) & = \log\left(3^x\right) & \text{Logarithmusgesetz} \\ \Leftrightarrow & x \cdot \log(5) & = x \cdot \log(3) & -x \cdot \log(3) \\ \Leftrightarrow & x \cdot \log(5) - x \cdot \log(3) & = 0 & \text{ausklammern} \\ \Leftrightarrow & x \cdot (\log(5) - \log(3)) & = 0 & :(\log(5) - \log(3)) \\ \Leftrightarrow & x & = 0 & \end{array}$$

Bewertung:

- Gleichung korrekt Logarithmieren **1P**
- Gleichung korrekt Auflösen und richtiges Resultat **1P**

6. Kapital. **(8P)**

Auf einer Bank wird mit dem Kapital von 10'000 Franken ein Sparkonto eröffnet und zu einem Zins von 3 % angelegt. Ende Jahr wird der Zins zum Kapital geschlagen.

(a) Berechnen Sie die Höhe des Kapitals nach 1, 2, 3, 4 und 5 Jahren. (2P)

Jahre	1	2	3	4	5
Kapital	10'300	10'609	10'927	11'255	11'593

(b) Geben Sie die Funktionsgleichung an, welche die Höhe des Kapitals $K(n)$ nach t Jahren beschreibt. (2P)

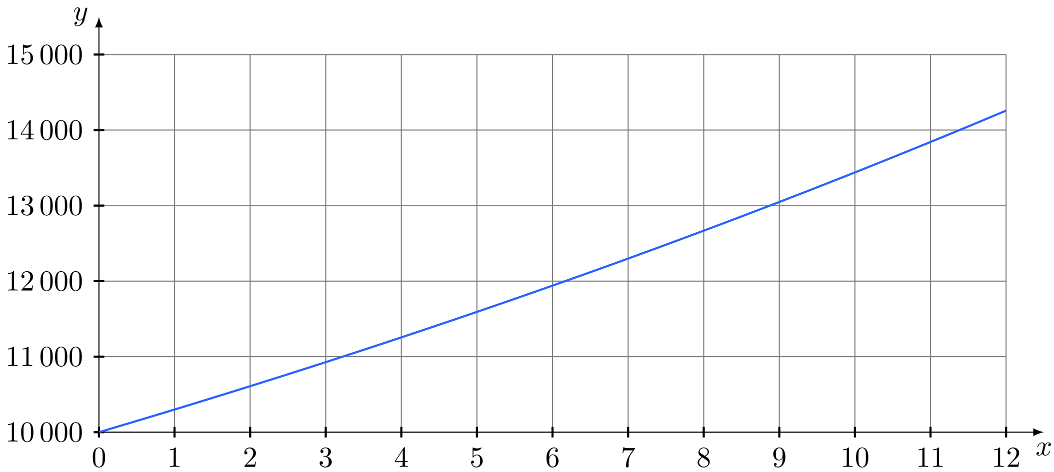
Lösung:

$$K(t) = K(0) \cdot (1+p)^t = 10'000 \cdot 1.03^t$$

(c) Wie gross ist $K(n)$ nach 20 Jahren? (1P)

Lösung: Fr. 18'061.10

(d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $K(n)$. (1P)



(e) Nach welcher Zeit ist das Kapital auf 15'000 Franken angestiegen? (1P)

Lösung: in 13.72 Jahren

(f) In welcher Zeitspanne würde sich das Kapital $K(n)$ verdoppeln? (1P)

Lösung: in 23.45 Jahren