Potenzen

1. **Multiplikation mit gleicher Basis.** Vereinfachen Sie ohne auszurechnen die Potenzen so weit wie möglich.
   (a) $10^5 \cdot 10^{13} = 10^{5+13} = 10^{18}$
   (b) $(-10)^3 \cdot (-10) = (-10)^{3+1} = (-10)^4 = 10^4$
   (c) $-0.1^5 \cdot 0.1^6 = -0.1^{5+6} = -0.1^{11}$
   (d) $2^7 \cdot 2^{11} = 2^{7+11} = 2^{18}$
   (e) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4+13} = \left(\frac{1}{2}\right)^{17} = \frac{1^{17}}{2^{17}} = \frac{1}{2^{17}}$

2. **Multiplikation mit gleichem Exponenten.** Vereinfachen Sie ohne auszurechnen die Potenzen so weit wie möglich.
   (a) $3^7 \cdot 5^7 = (3 \cdot 5)^7 = 15^7$
   (b) $1.2^3 \cdot 5^3 = (1.2 \cdot 5)^3 = 6^3$
   (c) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 6^2 = (2 \cdot 3 \cdot 6)^2 = 36^2$
   (d) $0.01^6 \cdot 100^6 = (0.01 \cdot 100)^6 = 1^6 = 1$
   (e) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3^3 = \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right)^3 = 2^3$
   (f) $(-2)^{99} \cdot (-3)^{99} = ((-2) \cdot (-3))^{99} = 6^{99}$

3. **Potenzen von Potenzen.** Vereinfachen Sie ohne auszurechnen die Potenzen so weit wie möglich.
   (a) $\left(2^3\right)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$
   (b) $\left(2^2\right)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$
   (c) $2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9$
   (d) $\left((-2)^3\right)^2 = (-2)^{3 \cdot 2} = (-2)^6 = 2^6$
   (e) $\left(-2^3\right)^2 = \left(2^3\right)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$
   (f) $\left(-2^2\right)^3 = -2^{3 \cdot 2} = -2^6$

4. **Division mit gleicher Basis.** Vereinfachen Sie ohne auszurechnen die Potenzen so weit wie möglich.

(a) $\frac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$

(b) $\frac{(-3)^{30}}{(-3)^{29}} = (-3)^{30-29} = -3$

(c) $\frac{(-4)^{24}}{4^2} = \frac{4^{24}}{4^2} = 4^{24-2} = 4^{22}$

5. **Division mit gleichem Exponenten.** Vereinfachen Sie ohne auszurechnen die Potenzen so weit wie möglich.

(a) $\frac{30^6}{3^6} = \left(\frac{30}{3}\right)^6 = 10^6$

(b) $\frac{4^3}{2^3} = \left(\frac{4}{2}\right)^3 = 2^3$

(c) $\frac{5^4}{25^4} = \left(\frac{5}{25}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1^4}{5^4} = \frac{1}{5^4}$

(d) $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \left(\frac{3}{2} : \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{1}\right)^2 = 6^2$

6. **Potenz als Basis.** Schreiben Sie die Basis als Potenz und vereinfachen Sie.

(a) $2^5 \cdot 4^3 = 2^5 \cdot \left(2^2\right)^3 = 2^5 \cdot 2^{2\cdot 3} = 2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}$

(b) $81^5 \cdot 2^{10} = \left(9^2\right)^5 \cdot 2^{10} = 9^{2\cdot 5} \cdot 2^{10} = 9^{10} \cdot 2^{10} = (9 \cdot 2)^{10} = 18^{10}$

(c) $\frac{3^7}{9^3} = \frac{3^7}{\left(3^2\right)^3} = \frac{3^7}{3^{2\cdot 3}} = \frac{3^7}{3^6} = 3^{7-6} = 3$

(d) $\frac{27^2}{4^3} = \frac{\left(3^3\right)^2}{\left(2^2\right)^3} = \frac{3^{3\cdot 2}}{2^{2\cdot 3}} = \frac{3^6}{2^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6 = 1.5^6$

7. **Negative Exponenten.** Vereinfachen Sie und schreiben Sie als Potenz mit positivem Exponenten.

(a) $3^{-5} \cdot 3^7 = 3^{-5+7} = 3^2$

(b) $5^3 \cdot 5^0 \cdot 5^{-5} \cdot 5 = 5^{3+0-5+1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

(c) $(-2)^2 \cdot (-2)^{-5} = (-2)^{2-5} = (-2)^{-3} - 2^{-3} = -\frac{1}{2^3}$

(d) $\frac{5^{-3}}{5^4} = 5^{-3-4} = 5^{-7} = 5^{-7} = \frac{1}{5^7}$

(e) $\frac{2^{-4}}{2^{-10}} = 2^{-4-(-10)} = 2^{-4+10} = 2^6$

(f) $\dfrac{(-3)^2}{(-3)^{-4}} = (-3)^{2-(-4)} = (-3)^6 = 3^6$

(g) $\dfrac{3^{-3}}{(-3)^3} = \dfrac{3^{-3}}{-3^3} = -3^{-3-3} = -3^{-6} = -\dfrac{1}{3^6}$

(h) $2^{-3} \cdot 3^{-3} = (2 \cdot 3)^{-3} = 6^{-3} = \dfrac{1}{6^3}$

(i) $\dfrac{6^{-3}}{2^{-3}} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^{-3} = 3^{-3} = \dfrac{1}{3^3}$

(j) $\left(3^{-3}\right)^2 = 3^{(-3)\cdot 2} = 3^{-6} = \dfrac{1}{3^6}$

8. **Potenzen von Potenzen.** Vereinfachen Sie, indem Sie die gleiche Basis herstellen und rechnen Sie anschliessend aus.

(a) $\dfrac{\left(2^2\right)^3}{2^5} = \dfrac{2^{2\cdot 3}}{2^5} = \dfrac{2^6}{2^5} = 2^{6-5} = 2$

(b) $\dfrac{\left(3^3\right)^5}{\left(3^2\right)^6} = \dfrac{3^{3\cdot 5}}{3^{2\cdot 6}} = \dfrac{3^{15}}{3^{12}} = 3^{15-12} = 3^3 = 27$

(c) $\dfrac{4^7}{2^{10}} = \dfrac{\left(2^2\right)^7}{2^{10}} = \dfrac{2^{2\cdot 7}}{2^{10}} = \dfrac{2^{14}}{2^{10}} = 2^{14-10} = 2^4 = 16$

(d) $\dfrac{5^8}{25^3} = \dfrac{5^8}{\left(5^2\right)^3} = \dfrac{5^8}{5^{2\cdot 3}} = \dfrac{5^8}{5^6} = 5^{8-6} = 5^2 = 25$

(e) $\dfrac{9^7}{27^4} = \dfrac{\left(3^2\right)^7}{\left(3^3\right)^4} = \dfrac{3^{2\cdot 7}}{3^{3\cdot 4}} = \dfrac{3^{14}}{3^{12}} = 3^{14-12} = 3^2 = 9$

(f) $\dfrac{4^4 \cdot 27^2}{8^2 \cdot 9^3} = \dfrac{\left(2^2\right)^4 \cdot \left(3^3\right)^2}{\left(2^3\right)^2 \cdot \left(3^2\right)^3} = \dfrac{2^{2\cdot 4} \cdot 3^{3\cdot 2}}{2^{3\cdot 2} \cdot 3^{2\cdot 3}} = \dfrac{2^8 \cdot 3^6}{2^6 \cdot 3^6} = 2^{8-6} = 4$

(g) $\left(-3^3\right)^2 : 9^2 = \dfrac{\left(3^3\right)^2}{\left(3^2\right)^2} = \dfrac{3^{3\cdot 2}}{3^{2\cdot 2}} = \dfrac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2 = 9$

(h) $\left(-25^2\right)^3 : (-5)^9 = \dfrac{-\left(25^2\right)^3}{-5^9} = \dfrac{\left(\left(5^2\right)^2\right)^3}{5^9} = \dfrac{5^{2\cdot 2\cdot 3}}{5^9} = \dfrac{5^{12}}{5^9} = 5^{12-9} = 5^3 = 125$

(i) $\left[(-7)^2\right]^5 : (-49)^4 = \dfrac{\left(7^2\right)^5}{\left(7^2\right)^4} = \dfrac{7^{2\cdot 5}}{7^{2\cdot 4}} = \dfrac{7^{10}}{7^8} = 7^{10-8} = 7^2 = 49$

(j) $\left(-4^2 \cdot 2^4\right) : 8^2 = \dfrac{-\left(2^2\right)^2 \cdot 2^4}{\left(2^3\right)^2} = \dfrac{-2^{2\cdot 2} \cdot 2^4}{2^{3\cdot 2}} = \dfrac{-2^4 \cdot 2^4}{2^6} = \dfrac{-2^8}{2^6} = -2^{8-6} = -2^2 = -4$

(k) ★ $\dfrac{32^4 \cdot 25^5}{16^3 \cdot 5^7} =$

Lösung:

$$= \frac{(2^5)^4 \cdot (5^2)^5}{(2^4)^3 \cdot 5^7} = \frac{2^{4\cdot 5} \cdot 5^{5\cdot 2}}{2^{4\cdot 3} \cdot 5^7} = \frac{2^{20} \cdot 5^{10}}{2^{12} \cdot 5^7} = 2^{20-12} \cdot 5^{10-7} = 2^8 \cdot 5^3$$

$$= 256 \cdot 125 = 32000$$

(l) ★ $\dfrac{(-27)^3 \cdot 25^2}{-3^8 \cdot (-5^3)} =$

Lösung:

$$= \frac{-27^3 \cdot 25^2}{3^8 \cdot 5^3} = \frac{-\left(3^3\right)^3 \cdot \left(5^2\right)^2}{3^8 \cdot 5^3} = \frac{-3^{3\cdot 3} \cdot 5^{2\cdot 2}}{3^8 \cdot 5^3} = \frac{-3^9 \cdot 5^4}{3^8 \cdot 5^3} = -3^{9-8} \cdot 5^{4-3}$$

$$= -3 \cdot 5 = -15$$

9. Ordnen. Ordnen Sie die folgenden Potenzen nach aufsteigender Grösse.

5^3 $\quad -5^3$ $\quad (-5)^3$ $\quad 5^{-3}$ $\quad -5^{-3}$ $\quad (-5)^{-3}$

Lösung:

$$-5^3 = (-5)^3 = -125$$
$$-5^{-3} = (-5)^{-3} = -\frac{1}{125}$$
$$5^{-3} = \frac{1}{125}$$
$$5^3 = 125$$