Repetition Zahlen und Operationen

Beachten Sie:

- Sie haben 60 Minuten Zeit.
- Sie dürfen eine A4-Seite mit eigenen, von Hand geschriebenen Notizen verwenden.
- Ansonsten sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Lösungswege werden bewertet.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Total	Note
max. Punkte	5	6	5	7	9	6	10	48	
Punkte									

1. Kreuzen Sie das entsprechende Feld an, wenn sich die Zahl in der Menge befindet. (5P)

Zahl	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^-$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
π					X
$\sqrt{25}$	X	X		X	X
$\frac{23}{24}$				X	X
-12		X	X	X	X
$7.\overline{45}$				X	X

Lösung: **1P**für jede vollständig korrekte Zeile.

2. Operationen. **(6P)**

Beantworten Sie die folgenden Fragen zu diesem Term.

$$a + b \cdot c$$

(a) Wie heisst die linke Operation und wie nennt man die Operanden und das Resultat? (2P)

Lösung: Operation: Addition **1P**. Operanden/Resultat: Summanden, Summe **1P**

(b) Wie heisst die rechte Operation und wie nennt man die Operanden und das Resultat? (2P)

Lösung: Operation: Multiplikation **1P**. Operanden/Resultat: Faktoren, Produkt **1P**

(c) Welche Operation wird zuerst ausgeführt und wieso? (2P)

Lösung: Die Multiplikation **1P**. Punktoperationen werden vor Strichoperationen ausgeführt **1P**.

3. Primfaktorzerlegung und Kürzen **(5P)**

(a) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von 245 und von 360. (2P)

Lösung: je **1P**: $245 = 5 \cdot 7^2, \qquad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

(b) Kürzen Sie den Bruch $\frac{245}{360}$ vollständig. (1P)

Lösung: $\frac{245}{360} = \frac{5 \cdot 7^2}{5 \cdot 2^3 \cdot 3^2} = \frac{49}{72}$

(c) Erklären Sie in einem vollständigen Satz, was das Kürzen mit der Primfaktorzerlegung zu tun hat. (1P)

Lösung: Wenn man Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegt, kann man die Faktoren, welche in Zähler und Nenner vorkommen, kürzen.

(d) Wie nennt man allgemein die Zahl, durch welche man Zähler und Nenner dividieren muss, um einen vollständig gekürzten Bruch zu erhalten? Geben Sie den ausgeschriebenen Begriff und die Abkürzung an. (1P)

Lösung: grösster gemeinsamer Teiler (ggT)

4. Brüche. **(7P)**

Geben Sie als vollständig gekürzten Bruch an. Der Lösungsweg wird bewertet.

(a) -1.375 (2P)

Lösung: Lösung und Weg je **1P**

$$-\frac{1375}{1000} = -\frac{55 \cdot 25}{10^3} = -\frac{11 \cdot 5^3}{5^3 \cdot 2^3} = -\frac{11}{8}$$

(b) $6.\overline{6}$ (2P)

Lösung: Lösung und Weg je **1P**

$$6.\overline{6} = 6 + \cdot 0.\overline{6} = 6 + \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

(c) $\frac{1}{2} : \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right|$ (3P)

Lösung: Lösung und Weg je **1P**

$$\frac{1}{2} : \left|\frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right| = \frac{1}{2} : \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{2} : \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{1} = 3$$

Die Betragsstriche $|\ |$ haben zwei Auswirkungen. Zunächst funktionieren sie wie Klammern, d.h. die Subtraktion im Betrag muss zuerst berechnet werden. Anschliessend wird der Betrag von $-\frac{1}{6}$ ermittelt. Der Betrag ist immer positiv, also muss das negative Vorzeichen weggelassen werden, d.h. $|-\frac{1}{6}| = \frac{1}{6}$.

5. Potenzen. **(9P)**

Berechnen Sie und geben Sie das Resultat als möglichst einfache Zahl an (Ganze Zahl oder Bruch). Halten Sie die einzelnen Berechnungsschritte fest.

(a) $\frac{10^{-2}}{2^{-2}}$ (2P)

Lösung: Potenzen korrekt zusammengefasst **1P**, korrektes Resultat **1P**

$$= \left(\frac{10}{2}\right)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

Der gleiche Exponent kann ausgeklammert werden. Anschliessend wird der Bruch in der Klammer ausgerechnet.

(b) $3^{-13} \cdot 9^7$ (3P)

Lösung: 9 als Potenz 3^2 geschrieben **1P**

$$= 3^{-13} \cdot \left(3^2\right)^7 = 3^{-13} \cdot 3^{2 \cdot 7} = 3^{-13} \cdot 3^{14}$$

Potenzen mit gleicher Basis korrekt multipliziert **1P**

$$= 3^{-13+14} = 3^1$$

korrektes Resultat **1P**

$$= 3$$

(c) $\left(-2^2\right)^3 \cdot \left((-2)^3\right)^{-3} =$ (4P)

Lösung: Negative Basen korrekt vereinfacht **1P**

$$= -\left(2^2\right)^3 \cdot \left(-2^3\right)^{-3} = -\left(2^2\right)^3 \cdot \left(-\left(2^3\right)^{-3}\right) = \left(2^2\right)^3 \cdot \left(2^3\right)^{-3}$$

Potenz der Potenzen korrekt als Multiplikation geschrieben **1P**

$$= 2^{2 \cdot 3} \cdot 2^{3 \cdot (-3)} = 2^6 \cdot 2^{-9}$$

Potenzen mit gleicher Basis korrekt multipliziert **1P**

$$= 2^{6-9} = 2^{-3}$$

Resultat korrekt vereinfacht **1P**

$$= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

6. Durchmesser. **(6P)**

Geben Sie den Durchmesser jeweils in der wissenschaftlichen Schreibweise in der Grundeinheit Meter an.

(a) Ein einzelnes Coronavirus hat einen Durchmesser von ca. 100 Nanometer. (2P)

Lösung: Korrektes Resultat mit Einheit und korrekte Potenz je ein Punkt.

$100 \cdot 10^{-9}\,\text{m} = 1 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$

(b) Die Milchstrasse hat einen Durchmesser von ca. 200'000 Lichtjahren. Ein Lichtjahr entspricht $9.5 \cdot 10^{15}$ m. (2P)

Lösung: Korrektes Resultat und Einheit korrekte Potenz je ein Punkt.

$200'000 \cdot 9.5 \cdot 10^{15}\,\text{m} = 1.9 \cdot 10^{21}\,\text{m}$

(c) Die Umlaufbahn der Erde um die Sonne hat einen Durchmesser von ca. 150 Millionen Kilometer. (2P)

Lösung: Korrektes Resultat mit Einheit und korrekte Potenz je ein Punkt.

$150\,\text{m} \cdot 10^6 \cdot 10^3 = 150 \cdot 10^9\,\text{m} = 1.5 \cdot 10^{11}\,\text{m}$

7. Wahr oder falsch? (10P)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie oder geben Sie Gegenbeispiele an.

(a) Es gibt Quotienten zweier natürlicher Zahlen, welche irrational sind. (2P)

Lösung: Falsch. gemäss Definition sind alle Quotienten zweier ganzen Zahlen rationale Zahlen. Da alle natürliche Zahlen auch ganze Zahlen sind, entsteht immer eine rationale Zahl, wenn der Quotienz zweier natürlicher Zahlen gebildet wird.

(b) Alle Wurzeln von natürlichen Zahlen sind irrationale Zahlen. (2P)

Lösung: Falsch. z.B. ist $\sqrt{4} = 2$ keine irrationale Zahl.

(c) Das Quadrat einer irrationalen Zahl kann eine natürliche Zahl ergeben. (2P)

Lösung: Richtig. z.B. ist $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ eine natürliche Zahl.

(d) Es gibt Wurzeln von negativen Zahlen, welche rationale Zahlen sind. (2P)

Lösung: Falsch. Wurzeln von negativen Zahlen sind nicht definiert und können somit nie eine rationale Zahl ergeben.

(e) Die Subtraktion ist bezüglich der natürlichen Zahlen abgeschlossen. (2P)

Lösung: Falsch. z.B. ist $3 - 5 = -2$ keine natürliche Zahl.