Polygonflächen

1. Parallelogramm.

(a) Die Seitenlänge eines Parallelogramms beträgt 4 cm, die zugehörige Höhe 5 cm. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

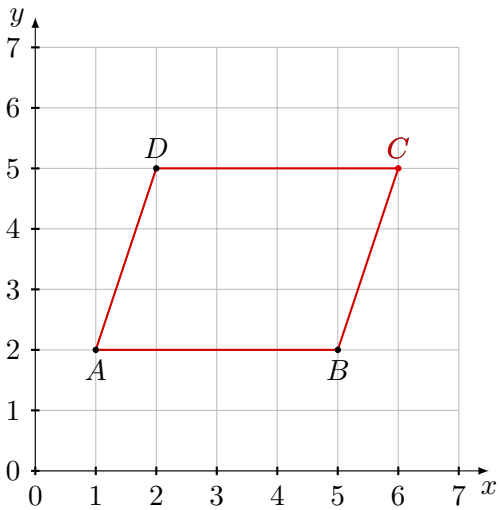
Lösung: Die Fläche ergibt sich aus Grundseite multipliziert mit der Höhe. Sie beträgt also $A = 4 \cdot 5 = 20\,\text{cm}^2$

(b) Von einem Parallelogramm sind die Punkte $A(1/2)$, $B(5/2)$ und $D(2/5)$ gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten des fehlenden Punkts C und zeichnen Sie das Parallelogramm in das Koordinatensystem ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

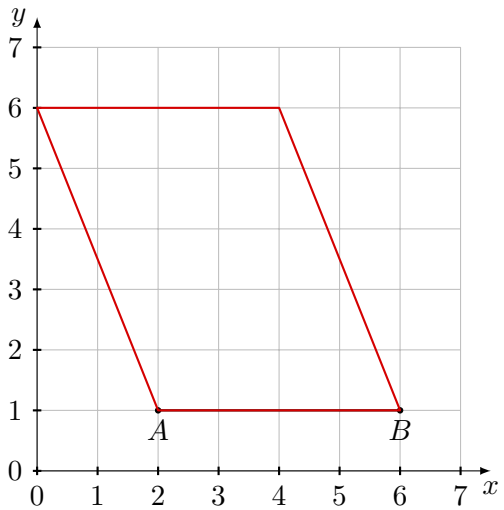
Lösung: Der fehlende Punkt hat die Koordinaten $C(6/5)$, die Fläche beträgt $A = 4 \cdot 3 = 12$.

(c) Ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 20 besitzt die Eckpunkte $A(2/1)$ und $B(6/1)$. Welche gross ist die zur Seite $\overline{AB}$ gehörende Höhe? Zeichnen Sie ein solches Parallelogramm in das Koordinatensystem ein.

Lösung: Die Höhe beträgt $h = 20 : 4 = 5$

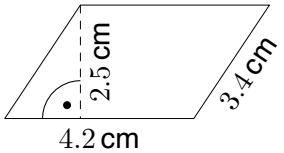


für (b)

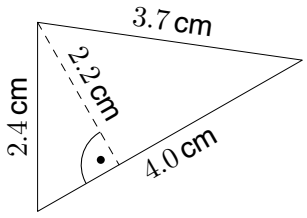


für (c)

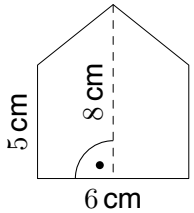
2. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figuren.



(a)



(b)



(c)

Lösung:

(a) $A = 4.2 \cdot 2.5 = 10.5\,\text{cm}^2$

(b) $A = \frac{1}{2} \cdot 4.0 \cdot 2.2 = 4.4\,\text{cm}^2$

(c) $A = 5 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 39\,\text{cm}^2$

3. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes mit den parallelen Seiten a und c mit:

(a) $a = 12.5\,\text{cm}$ $c = 7.8\,\text{cm}$ $h = 4.6\,\text{cm}$

Lösung: $A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h = \frac{1}{2}(12.5 + 7.8) \cdot 4.6 = 46.69\,\text{cm}^2$

(b) $m = 24.6\,\text{cm}$ $h = 1.4\,\text{dm}$

Lösung: $A = m \cdot h = 24.6 \cdot 14 = 344.4\,\text{cm}^2$

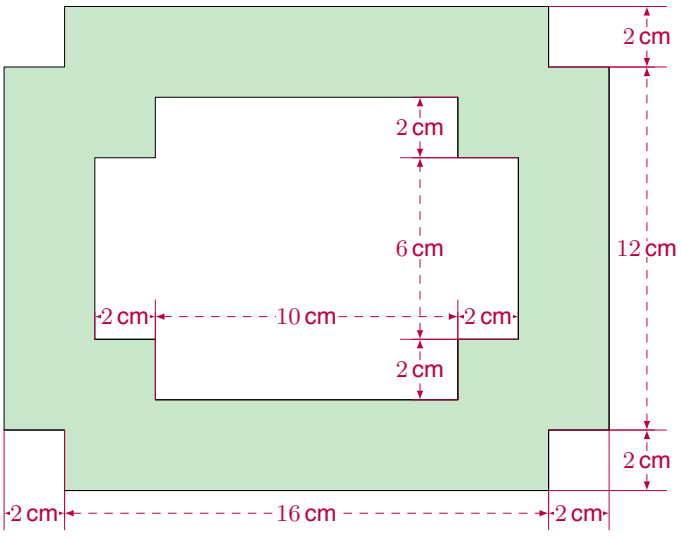
(c) $a = 2.2\,\text{m}$ $c = 8.4\,\text{dm}$ $h = 0.56\,\text{m}$

Lösung: $A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h = \frac{1}{2}(22 + 8.4) \cdot 5.6 = 85.12\,\text{dm}^2$

(d) $m = 3.75\,\text{m}$ $h = 0.84\,\text{dm}$

Lösung: $A = m \cdot h = 37.5 \cdot 0.84 = 31.5\,\text{dm}^2$

4. Rahmen. Wie gross ist die Fläche dieses Rahmens?



Lösung: Grundsätzlich muss die Fläche der inneren Figur A_i von der Fläche der äusseren Figur A_a subtrahiert werden.

$$A = A_a - A_i$$

Die vier Quadrate mit einer Seitenlänge von 2 cm können in die Ecken aussen geschoben werden, dadurch entstehen zwei Rechtecke. Das äussere Rechteck hat die Fläche

$$A_a = (2 + 16 + 2) \cdot (2 + 12 + 2) = 20 \cdot 16 = 320$$

Das innere Rechteck hat die Fläche

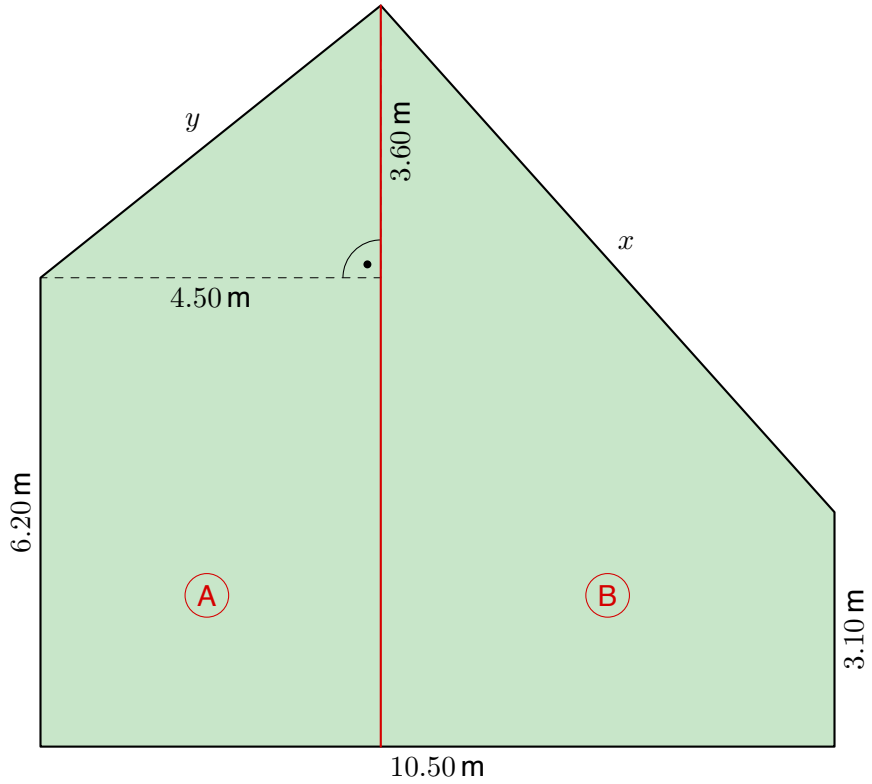
$$A_i = (2 + 10 + 2) \cdot (2 + 6 + 2) = 14 \cdot 10 = 140$$

Die gesamte Fläche beträgt:

$$A = A_a - A_i = 320 - 140 = 180$$

Der Rahmen hat eine Fläche von $180\,\text{cm}^2$.

5. Die Giebelseite eines Hauses soll neu verputzt werden. Zuerst müssen an allen Kanten Putzschiene angebracht werden. Entnehmen Sie die benötigten Masse der unten stehenden Skizze im Massstab 1:100.



(a) Bestimmen Sie die fehlenden Längen x und y durch Messung in der Skizze.

Lösung: $x \approx 5.8\,\text{m}$ $y \approx 9.8\,\text{m}$

(b) Wie viele Meter Schienen werden benötigt?

Lösung: $u \approx 6.2 + 10.5 + 3.1 + 5.8 + 9.8 = 34.5\,\text{m}$

(c) Wie viele Quadratmeter Putz sind aufzubringen?

Lösung: Die Fläche kann in zwei Trapeze (A) und (B) unterteilt werden.

$$A = \text{(A)} + \text{(B)} = \frac{1}{2} \cdot (6.2 + 9.8) \cdot 4.5 + \frac{1}{2} \cdot (9.8 + 3.1) \cdot 6 = 74.7\,\text{m}^2$$

(d) Wie viel kostet das Material, wenn ein Meter Putzschiene Fr. 3.50 kostet und ein Quadratmeter Putz Fr. 11.50?

Lösung: $p = 35 \cdot 3.5 + 75 \cdot 11.5 = 122.5 + 862.5 = 985$ Das Verputzen kostet 985 Franken.

6. Rechteck. Ein Rechteck ist viermal so lang wie breit.

(a) Wie gross ist seine Fläche, wenn der Umfang 144 cm misst?

Lösung: Die eine Seite hat die Länge x, die andere $4x$. Somit sind Umfang und Fläche

$$u = 2 \cdot (x + 4x) = 2 \cdot 5x = 10x \qquad A = 4x \cdot x = 4x^2$$

Damit können Seite x und Fläche A berechnet werden:

$$x = \frac{u}{10} = 14.4\,\text{cm} \qquad A = 4x^2 = 829.44\,\text{cm}^2$$

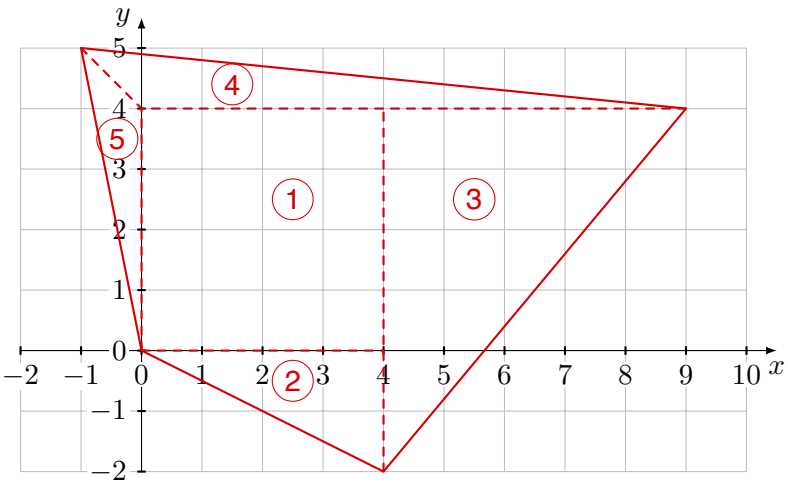
(b) Wie gross ist sein Umfang, wenn die Fläche 144 cm^2 misst?

Lösung: Mit den Formeln aus Teilaufgabe (a) können Seite x und Umfang u berechnet werden:

$$x = \sqrt{\frac{A}{4}} = \sqrt{\frac{144}{4}} = \sqrt{36} = 6 \qquad u = 10x = 60\,\text{cm}$$

7. Viereck. Zeichnen Sie das Viereck mit den folgenden Eckpunkten und bestimmen Sie seine Fläche.

$A(0/0)$ $B(4/-2)$ $C(9/4)$ $D(-1/5)$



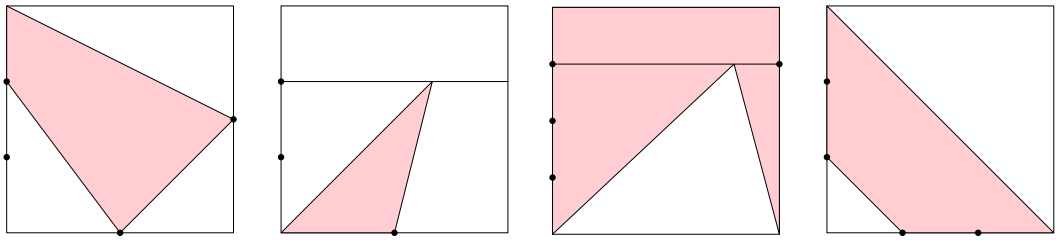
Lösung: Die Fläche des Vierecks kann wie in der Skizze angegeben in Dreiecke und ein Quadrat unterteilt werden. Diese Teilflächen können berechnet werden:

$$A_1 = 4^2 = 16 \qquad A_2 = 0.5 \cdot 4 \cdot 2 = 4 \qquad A_3 = 0.5 \cdot 5 \cdot 6 = 15$$
$$A_4 = 0.5 \cdot 9 \cdot 1 = 4.5 \qquad A_5 = 0.5 \cdot 1 \cdot 4 = 2$$

Damit ergib sich für die gesamte Fläche:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 16 + 4 + 15 + 4.5 + 2 = 41.5$$

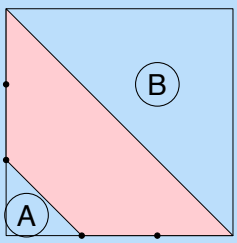
8. Quadrate. Welcher Teil des Quadrats ist farbig? Die Seiten werden durch die Punkte in gleiche Abschnitte unterteilt.



(a) (b) (c) (d)

Lösung: Grundsätzlich kann die Seitenlänge des Quadrats als 1 angenommen werden. Dadurch erhalten wir direkt den gewünschten Bruchteil als Resultat.

(a) Die drei Dreiecksflächen (A), (B) und (C) werden von der Fläche des Quadrats subtrahiert.



$$A = 1 - \text{(A)} - \text{(B)} - \text{(C)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 - \frac{2}{12} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}$$

$$= 1 - \frac{4}{24} - \frac{3}{24} - \frac{6}{24} = \frac{24 - 13}{24} = \frac{11}{24}$$

Antwort: $\frac{11}{24}$ des Quadrats sind eingefärbt.

(b) Die Dreiecksfläche kann direkt berechnet werden, da Grundlinie und Höhe bekannt sind.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

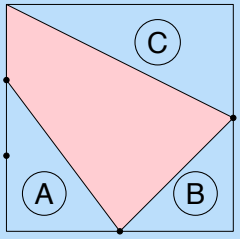
Antwort: $\frac{1}{6}$ des Quadrats sind eingefärbt.

(c) Die Dreiecksfläche kann berechnet werden, da Grundlinie und Höhe bekannt sind. Sie muss von der Quadratfläche subtrahiert werden.

$$A = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Antwort: $\frac{5}{8}$ des Quadrats sind eingefärbt.

(d) Die zwei Dreiecksflächen (A) und (B) werden von der Fläche des Quadrats subtrahiert.



$$A = 1 - \text{(A)} - \text{(B)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1 - \frac{1}{18} - \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{18} - \frac{9}{18} = \frac{18 - 10}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Antwort: $\frac{4}{9}$ des Quadrats sind eingefärbt.