Normal- und Scheitelform

Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion kann auf zwei Arten dargestellt werden:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$$

Normalform **Scheitelform**

Beide Formen haben Vorteile. In der Normalform können die Koeffizienten a, b und c abgelesen werden, um mit der Lösungsformel die Nullstellen zu ermitteln.

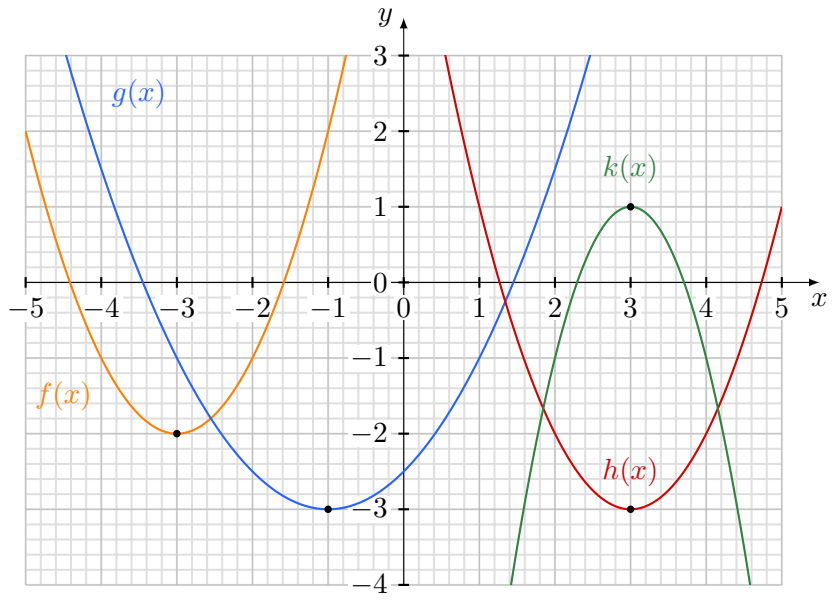
In der Scheitelform können die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_S/y_S)$ abgelesen werden.

Funktionsgleichung aus Scheitelpunkt ermitteln

Wenn der Scheitelpunkt und ein weiterer Punkt der Parabel bekannt sind, kann mit Hilfe der Scheitelform die Funktionsgleichung ermittelt werden.

- Koordinaten des Scheitelpunkts bestimmen und Funktionsgleichung in Scheitelform aufstellen.
- Weiterer Punkt P auf Graph ermitteln, in Funktionsgleichung einsetzen und nach a auflösen.
- a in ursprüngliche Funktionsgleichung einsetzen und ausmultiplizieren, um Normalform zu erhalten.

1. **Funktionsgleichung bestimmen.** Geben Sie die Funktionsgleichung der folgenden Parabeln an. Bestimmen Sie zunächst die Scheitelform und wandeln Sie anschliessend in die Normalform um.



Lösung:

- Orange:

$$f(x) = (x+3)^2 - 2 = x^2 + 6x + 7$$

- Blau:

$$g(x) = 0.5 \cdot (x+1)^2 - 3$$

- Rot:

$$h(x) = (x-3)^2 - 3 = x^2 - 6x + 6$$

- Grün:

$$k(x) = -2 \cdot (x-3)^2 + 1$$

Scheitelpunkt aus Funktionsgleichung ermitteln

Umgekehrt kann der Scheitelpunkt bestimmt werden, indem die Funktionsgleichung in die Scheitelform gebracht wird. Dies wird mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erreicht.

2. Quadratische Ergänzung. Bringen Sie die Funktionsgleichung in die Scheitelform und bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts S.

(a) $f(x) = x^2 + 5x + 2$

Lösung:

$f(x) = (x + 2.5)^2 - 4.25 \qquad S(-2.5/-4.25)$

(b) $f(x) = x^2 + 14x + 38$

Lösung:

$f(x) = (x + 7)^2 - 11 \qquad S(-7/-11))$

(c) $f(x) = 3x^2 + 18x + 82$

Lösung:

$f(x) = 3(x + 3)^2 + 55 \qquad S(-3; 55)$

(d) $f(x) = -x^2 + 3x - 7$

Lösung:

$f(x) = -(x + 1.5)^2 - 4.75 \qquad S(-1.5/-4.75)$

(e) $f(x) = -0.5x^2 + 5x + 9$

Lösung:

$f(x) = -0.5(x - 5)^2 + 21.5 \qquad S(5; 21.5)$

(f) $f(x) = 0.5x^2 - 6.5x + 27$

Lösung:

$f(x) = 0.5(x - 6.5)^2 + 5.875 \qquad S(6.5/5.875)$

Nullpunkte aus Funktionsgleichung ermitteln

Die Nullpunkte, also die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse, werden am einfachsten mit der Normalform ermittelt. Dazu wird $f(x) = 0$ gesetzt.

Demit entsteht eine quadratische Gleichung, welche mit den bekannten Verfahren gelöst werden kann.

3. **Nullstellen.** Bestimmen Sie rechnerisch die Nullpunkte, also die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der x-Achse. Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen bezüglich der x-Achse.

   (a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

   Lösung: Die Diskriminante ist $D = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6) = 4 + 12 = 16$ Die Nullstellen sind somit

   $$x_N = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -2 \pm 4$$

   Die Lösungsmenge lautet:

   $$\mathbb{L} = \{-6; 2\}$$

   (b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4$

   Lösung: Die Diskriminante ist $D = 2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-4) = 4 - 4 = 0$. Somit gibt es nur eine Nullstelle:

   $$x_N = \frac{-2}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-2}{-\frac{1}{2}} = 4$$

   Die Lösungsmenge lautet:

   $$\mathbb{L} = \{4\}$$

   (c) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

   Lösung: Die Diskriminante ist $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4$, also negativ. Die Funktion hat somit keine Nullstelle.

   Die Lösungsmenge lautet:

   $$\mathbb{L} = \{\}$$

   (d) $f(x) = 2x^2 - 7x - 4$

   Lösung: Die Lösungsmenge lautet:

   $$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{2}; 4\right\}$$

(e) $f(x) = 4x^2 - 11x - 3$

Lösung: Die Lösungsmenge lautet:

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{4}; 3\right\}$$

(f) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$

Lösung: Die Lösungsmenge lautet:

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$$