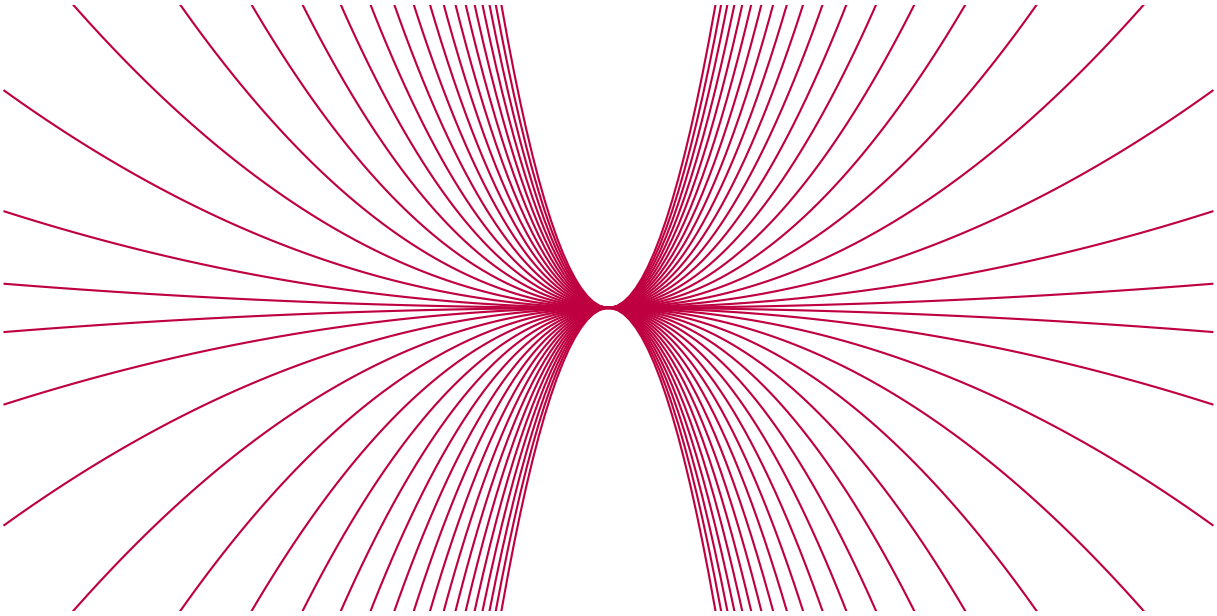
Funktionen

Stefan Rothe

11.06.2025



Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen **2**
2 Lineare Funktionen **5**
3 Quadratische Funktionen **9**
4 Scheitelform **11**
5 Nullstellen **15**
6 Lineare Gleichungssysteme (LGS) **19**

© Gymnasium Kirchenfeld
Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)

1 Funktionen

Funktionen gehören zu den wichtigsten Objekten in der modernen Mathematik.

1.1 Begriffe

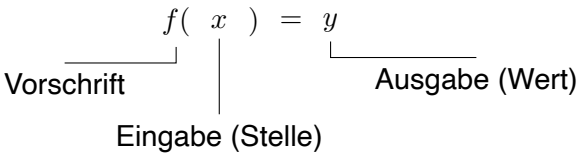
Eine Funktion ist eine **Vorschrift** welche Eingaben in Ausgaben verwandelt. Dabei muss für jede mögliche Eingabe die Ausgabe **eindeutig** definiert sein. Eine Funktion wird mit einem Buchstaben, normalerweise f, bezeichnet.

Alle erlaubten Eingaben einer Funktion werden **Definitionsbereich** oder **Definitionsmenge** der Funktion genannt. Eine Eingabe der Funktion wird als Variable, häufig x oder t, dargestellt. Eine bestimmte Eingabe wird mathematisch als **Stelle** der Funktion bezeichnet.

Geometrisch wird die Eingabe einer Funktion als x-Koordinate interpretiert.

Alle möglichen Ausgaben einer Funktion werden **Wertebereich** oder **Wertemenge** der Funktion genannt. Die Ausgabe der Funktion für eine bestimmte Eingabe x wird mit $f(x)$ bezeichnet.

Geometrisch wird die Ausgabe einer Funktion als y-Koordinate interpretiert. Deshalb wird die Ausgabe häufig auch mit der Variable y bezeichnet.



Schreibweise: Die Tatsache, dass die Funktion f bei der Eingabe 4 die Ausgabe 6 hat, so geschrieben:

$$f(4) = 6$$

Sprechweise: Die Funktion f hat an der **Stelle** 4 den **Wert** 6.

	Eingabe	Ausgabe
Symbol	x	$f(x) = y$
einzelne Zahl	Stelle	Wert
alle möglichen Zahlen	Definitionsbereich	Wertebereich
Grafische Darstellung	x-Achse	y-Achse

Übersicht der Begriffe

Es gibt verschiedene Arten, eine Funktion zu definieren und darzustellen, welche im folgenden einzeln betrachtet werden.

1.2 Darstellung als Funktionsgleichung

Eine Funktion kann dargestellt werden, indem die **Vorschrift** und der **Definitionsbereich** angegeben werden. Damit sind alle Eingaben bekannt und für jede Eingabe kann die entsprechende Ausgabe ermittelt werden.

Beispiel. *Die Funktion f ist definiert durch folgende Vorschrift: «Teile die Eingabe durch Zwei und addiere anschliessend Drei, um die Ausgabe zu erhalten.» Der Definitionsbereich ist $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.*

Nun können die Ausgaben für jede Eingabe ermittelt werden:

$$f(0) = 3 \qquad f(2) = 4 \qquad f(4) = 5 \qquad f(6) = 6 \qquad f(8) = 7 \qquad f(10) = 8$$

Normalerweise wird die Funktionsvorschrift nicht in Textform angegeben, sondern als **Funktionsgleichung**.

Beispiel. *Die Funktion f ist definiert durch: $f(x) = \frac{x}{2} + 3$.*

1.3 Darstellung als Wertetabelle

Eine Funktion kann dargestellt werden, indem sämtliche möglichen Eingaben und die zugehörigen Ausgaben in einer Tabelle aufgelistet werden.

Beispiel. *Die Funktion f ist definiert durch:*

x	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	3	4	5	6	7	8

Wenn die Funktionsgleichung bekannt ist, kann die Wertetabelle ermittelt werden, indem damit für jede Eingabe aus der Definitionsmenge die entsprechende Ausgabe berechnet wird.

TI-30X MathPrint: Funktionswerte und Wertetabelle

Mit der Funktion table können auf dem Taschenrechner Wertetabellen dargestellt werden.

- **Add/Edit Func**: Hier können die Funktionsgleichungen für die zwei Funktionen f und g definiert oder bearbeitet werden.
- **f(**: Damit kann der Wert der Funktion f an einer bestimmten Stelle berechnet werden.
- **g(**: Damit kann der Wert der Funktion g an einer bestimmten Stelle berechnet werden.

1.4 Darstellung als Graph

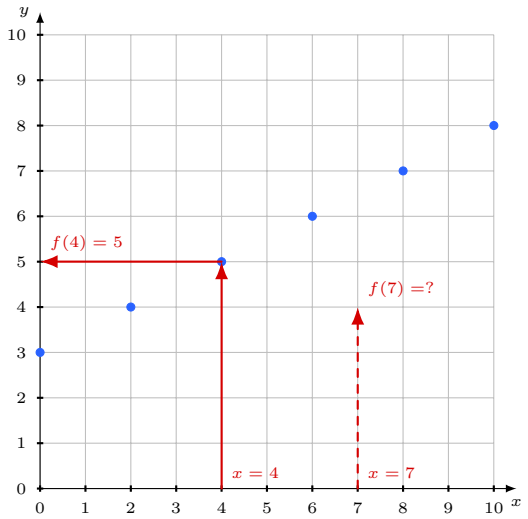
Eine wichtige Darstellungsform von Funktionen ist der Graph. Der Graph einer Funktion ist eine Menge von Punkten, welche in einem Koordinatensystem dargestellt werden.

Jeder Punkt $P(x/y)$ des Graphen stellt eine Eingabe und die zugehörige Ausgabe der Funktion dar. Dabei ist die x-Koordinate x die Eingabe und die y-Koordinate y entpsrechende Ausgabe der Funktion. Mathematisch gesprochen ist die x-Koordinate die **Stelle** und die y-Koordinate der **Wert** der Funktion an dieser Stelle. Dies wird mathematisch so geschrieben:

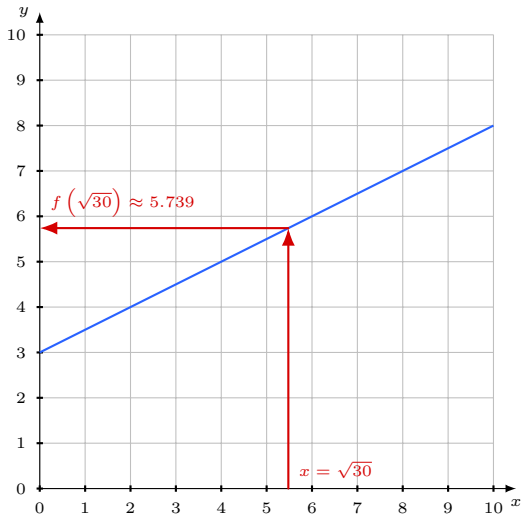
$$y = f(x)$$

Wenn die Definitionsmenge einer Funktion aus den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ besteht, dann liegen die Punkte des Graphen oft so dicht beisammen, dass sie eine durchgehende Linie bilden.

Beispiel. *Zwei Funktion sind durch die unten stehenden Graphen gegeben.*



$f(x)$ $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$



$g(x)$ $D = \mathbb{R}$

Anhand des linken Graphen kann der Wert der Funktion f an der Stelle $x = 4$ abgelesen werden. Dazu wird der Punkt des Graphen senkrecht über dieser Stelle auf der x-Achse gesucht. Anschliessend kann auf der y-Achse der Wert $f(4) = 5$ der Funktion an dieser Stelle abgelesen werden.

Ist an einer Stelle kein Punkt vorhanden, ist die Funktion dort nicht definiert. So ist $f(7)$ nicht definiert.

Der rechte Graph zeigt die Funktion g mit der gleichen Vorschrift wie f, aber einer anderen Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$. Die Funktion g ist damit für jede reelle Zahl definiert und so kann beispielsweise der Wert der Funktion an der Stelle $x = \sqrt{30}$ ermittelt werden.

2 Lineare Funktionen

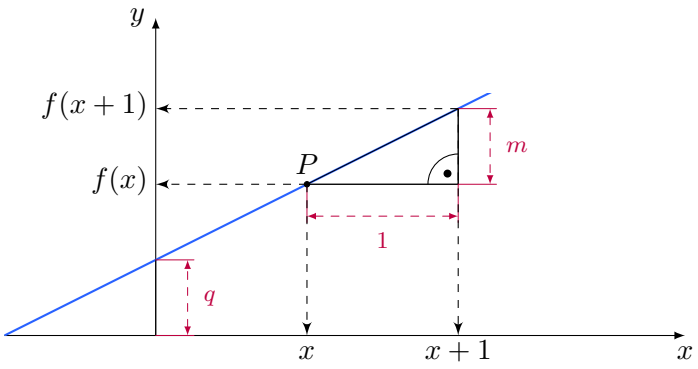
2.1 Definition

Eine Funktion mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$ und einer Funktionsgleichung in der Form

$$f(x) = m \cdot x + q$$

wird als **lineare Funktion** bezeichnet. Die Bezeichnung basiert auf der Tatsache, das der Graph einer linearen Funktion immer eine **Gerade** ist.

Dabei wird m die **Steigung** und q ist der **Ordinatenabschnitt** der Funktion genannt. Funktion. Die Bedeutung der beiden Parameter lässt sich anhand des Graphen der Funktion erkennen.



2.2 y-Achsenabschnitt

Der y-Achsenabschnitt q gibt an, wo der Graph die y-Achse schneidet. Auf der y-Achse ist $x = 0$. Wenn der Wert einer linearen Funktion an dieser Stelle berechnet wird, ergibt sich immer q:

$$\begin{array}{lll|l} & f(x) & = m \cdot x + q & x = 0 \\ \iff & f(0) & = m \cdot 0 + q & \\ \iff & f(0) & = q & \end{array}$$

Der y-Achsenabschnitt q gibt also an, um wieviel der Graph der Funkiton nach oben oder unten verschoben wird.

Wenn der Ordinatenabschnitt gleich Null ist, dann verläuft der Funktionsgraph durch den Ursprung. In diesem Fall hat die Funktionsgleichung die Form

$$f(x) = m \cdot x$$

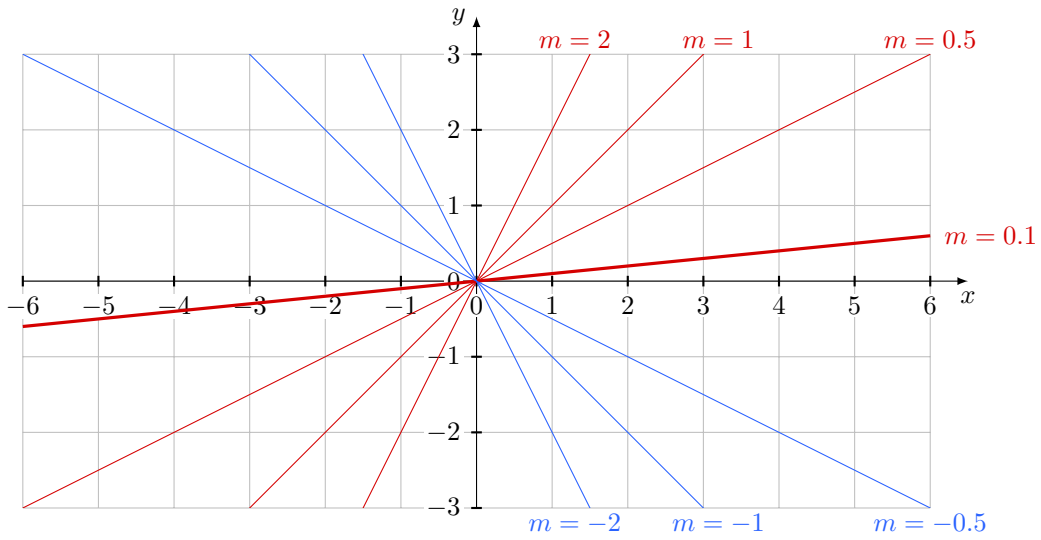
und stellt somit einen **proportionalen** Zusammenhang zwischen x und $f(x)$ dar.

2.3 Steigung

Die Steigung m gibt an, um wie viel sich der Funktionswert (die y-Koordinate) verändert, wenn die Stelle um Eins nach rechts bewegt wird.

Wenn die Steigung positiv ist, verläuft der Graph der Funktion links unten nach rechts oben. Ist die Steigung negativ, dann verläuft der Graph von links oben nach rechts unten. Ist die Steigung gleich Null, dann ist der Graph horizontal, also parallel zur x-Achse.

Das folgende Diagramm zeigt Graphen von linearen Funktionen mit verschiedenen Steigungen:



Diese Definition der Steigung wird auch im Alltag verwendet, um die beispielsweise anzugeben, wie steil eine Strasse ist. Dabei wird der Wert in Prozent angegeben. Das nebenstehende Strassenschild warnt von einer Strasse mit einer Steigung von 0.1. Zum Vergleich ist der Graph der Funktion mit dieser Steigung in der Abbildung oben hervorgehoben.



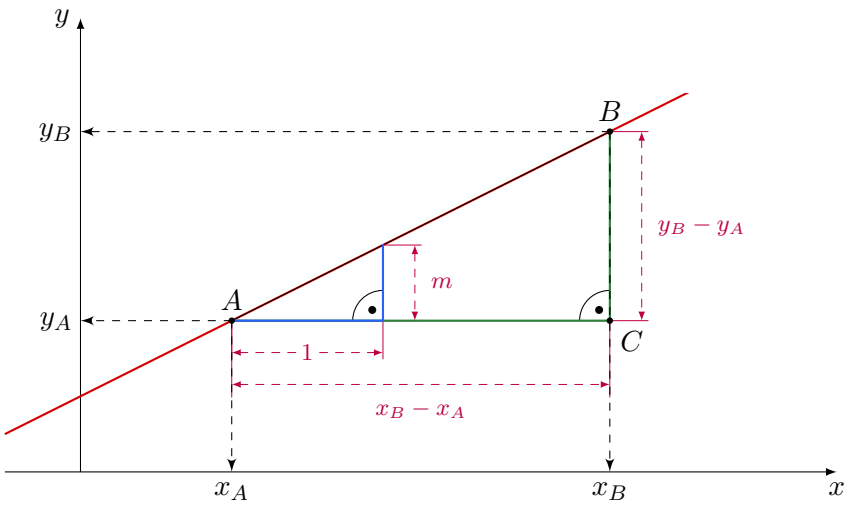
2.4 Bestimmen der Funktionsgleichung

Aus der Geometrie ist bekannt, dass eine Gerade durch zwei Punkte festgelegt wird. Somit ist auch eine lineare Funktion durch zwei Punkte eindeutig bestimmt. Sind Punkte $A(x_A/y_A)$ und $B(x_B/y_B)$ gegeben, kann die Gleichung der linearen Funktion bestimmt werden, deren Graph durch diese beiden Punkte verläuft.

Dabei wird folgendes Vorgehen angewendet:

1. Bestimmen der Steigung m mit Hilfe des Steigungsdreiecks.
2. Einsetzen der Steigung m in die Funktionsgleichung.
3. Bestimmen des y-Achsenabschnitts q durch Einsetzen eines Punkts.

Die Punkte $A(x_A/y_A)$ und $B(x_B/y_B)$ bilden zusammen mit dem Punkt C ein rechtwinkliges Dreieck (grün in der Abbildung). Dabei entspricht die Länge der horizontalen Kathete der Differenz der x-Koordinaten der beiden Punkte. Die Länge der vertikalen Kathete ergibt sich aus der Differenz der y-Koordinaten der Punkte. Dieses Dreieck wird auch **Steigungsdreieck** genannt.



Dieses Dreieck ist ähnlich zum blauen Dreieck, das gemäss der Eigenschaft der Steigung eine horizontale Kathete der Länge 1 und eine vertikale Kathete der Länge m hat. Aufgrund der Ähnlichkeit sind die Seitenverhältnisse gleich

$$\frac{m}{1} = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Somit kann die Steigung berechnet werden, indem die Differenz der y-Koordinaten durch die Differenz der x-Koordinaten dividiert wird.

Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, werden die Koordinaten von A oder B in die Funktionsgleichung eingesetzt. Es entsteht eine Gleichung, welche nach q aufgelöst werden kann.

Beispiel. *Die Funktionsgleichung der Geraden, welche durch die Punkte $A(-4/-3)$ und $B(-6/2)$ geht, soll bestimmt werden.*

Zunächst wird die Steigung m berechnet:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-2}{-4-(-6)} = \frac{-5}{2} = -2.5$$

Die Funktionsgleichung hat also die Form $f(x) = -2.5x + q$. Nun werden die Koordinaten von $A(-4/-3)$ eingesetzt:

$$\begin{array}{rrl|l} & f(x) & = -2.5x + q & A(-4/-3) \\ \iff & -3 & = -2.5 \cdot (-4) + q & -10 \\ \iff & -13 & = q & \end{array}$$

Die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = -2.5x - 13$

2.5 Bestimmen der Nullstelle

Eine besondere Bedeutung haben die Schnittpunkte eines Graphen mit der x-Achse. Diese Punkte werden **Nullstellen** der Funktion genannt.

Für Punkte, welche auf des x-Achse liegen, gilt $y = 0$. Übersetzt auf Funktionen bedeutet dies, dass

$$f(x) = 0$$

gelten muss. In der Funktionsgleichung wird also $f(x)$ durch 0 ersetzt. Dadurch entsteht eine «normale» Gleichung, welche nach x aufgelöst wird, um die Nullstelle(n) zu ermitteln.

Beispiel. *Die Nullstelle der linearen Funktion mit der Funktionsgleichung* $f(x) = -1.5x + 3$ *soll ermittelt werden.*

$$\begin{array}{rrl|l} & f(x) & = -1.5x + 3 & f(x) = 0 \\ \iff & 0 & = -1.5x + 3 & +1.5x \\ \iff & 1.5x & = 3 & : 1.5 \\ \iff & x & = 2 & \end{array}$$

Die Nullstelle der Funktion liegt bei $x = 2$*.*

3 Quadratische Funktionen

3.1 Definition

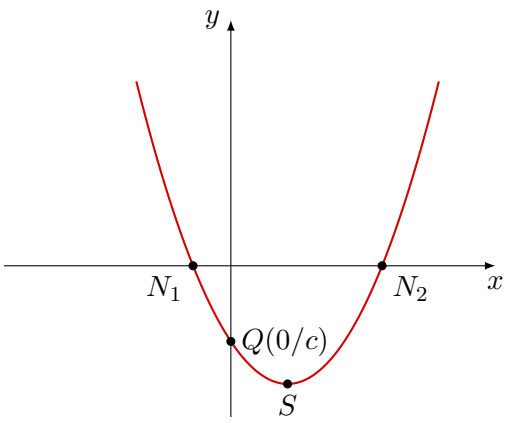
Eine Funktion mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$ und einer Funktionsgleichung in der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

wird als **quadratische Funktion** bezeichnet. Dabei sind die fest gewählten Zahlen a, b und c die **Koeffizienten** der Funktion.

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel**. Auf dem Graph liegen bis zu vier spezielle Punkte:

- Der **Scheitelpunkt** S ist die Stelle, wo die Funktion den kleinsten (oder grössten) Wert annimmt.
- Die **Nullstellen** N_1 und N_2 sind die Stellen, wo die Funktion den Wert 0 annimmt und somit die x-Achse schneidet. Eine quadratische Funktion kann keine, eine oder zwei Nullstellen haben.
- Der Punkt $Q(0/c)$ ist der Ort, wo der Graph die y-Achse schneidet. Er legt also den **y-Achsenabschnitt** des Graphen fest.



3.2 Normalparabel

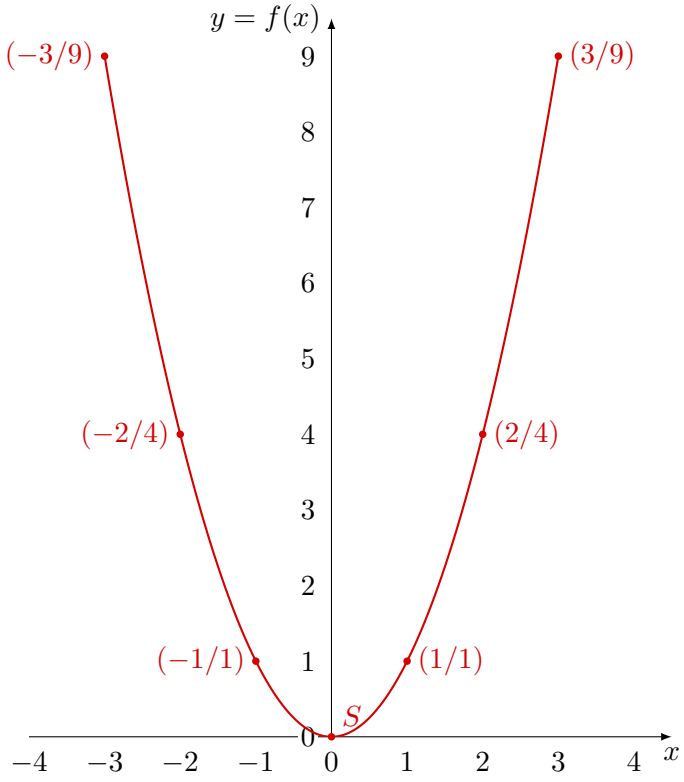
Die Normalparabel ist die einfachste Form einer quadratischen Funktion. Sie hat die Funktionsgleichung

$$f(x) = x^2$$

Bei der Normalparabel ist der Scheitelpunkt gleichzeitig die Nullstelle.

$$S(0/0) = N(0/0)$$

Auf der Normalparabel liegen alle Punkte, deren y-Koordinate das Quadrat der x-Koordinate ist.

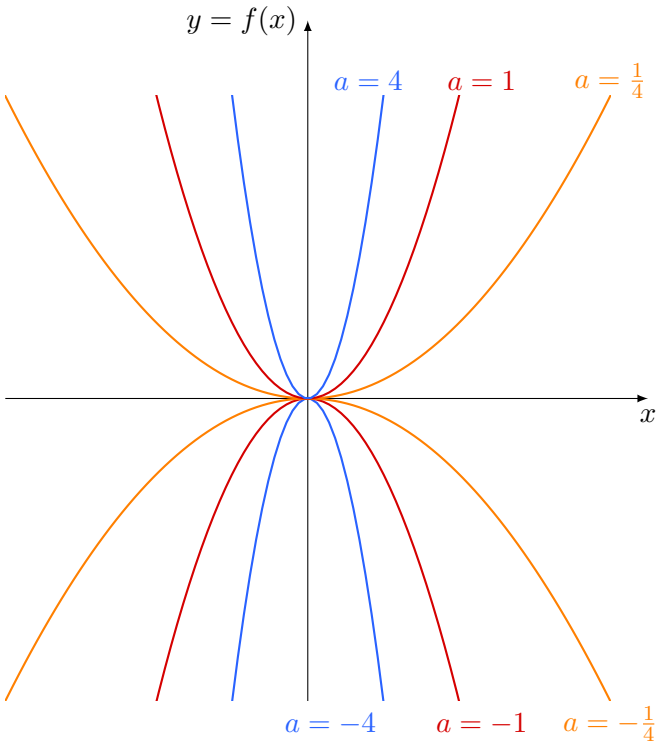


3.3 Spezielle quadratische Funktion

Die spezielle quadratische Funktion ergibt sich, indem die Normalparabel mit einem Faktor a multipliziert wird:

$$f(x) = a \cdot x^2 \qquad (a \neq 0)$$

Der Faktor a darf dabei nicht Null sein, in diesem Fall würde sich anstelle einer Parabel eine Gerade ergeben.



Das Vorzeichen von a bestimmt die Richtung, in welcher die Parabel geöffnet ist:

- Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet.
- Für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet.

Ausserdem kann der Funktionsgraph durch den Parameter a zusammengedrückt oder lang gezogen werden.

- Für $|a| < 1$ wird der Funktionsgraph horizontal lang gezogen.
- Für $|a| > 1$ wird der Funktionsgraph horizontal zusammengedrückt.

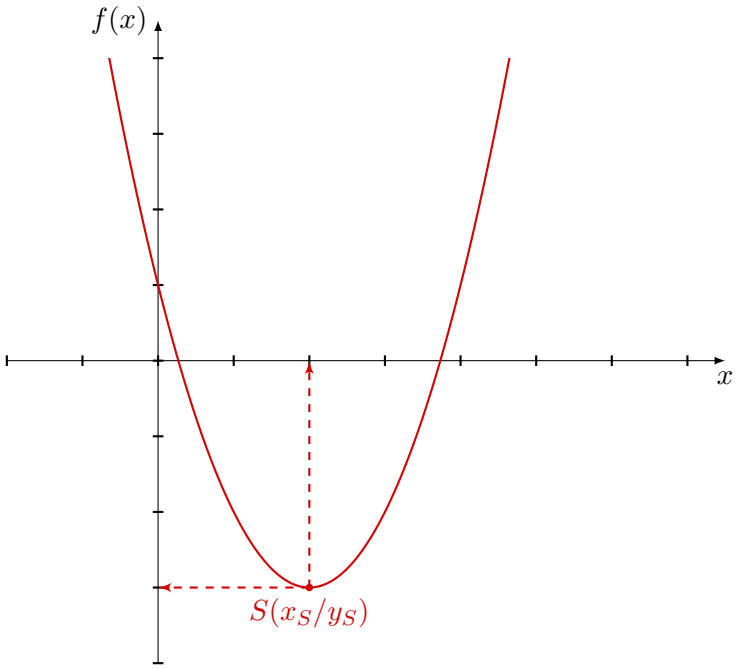
4 Scheitelform

Der Scheitelpunkt S ist der Punkt, an welchem die Funktion den kleinsten bzw. den grössten Wert annimmt. Wenn die Funktionsgleichung in der Scheitelform vorliegt, können die Koordinaten des Scheitelpunkts direkt in der Funktionsgleichung abgelesen werden.

Die allgemeine Scheitelform lautet

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$$

Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten $S(x_S/y_S)$.



4.1 Umformung der Normalform in die Scheitelform

Ein guter Weg, um den Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion zu bestimmen, ist es also, die Funktionsgleichung in die Scheitelform zu bringen. Dazu muss der Term $ax^2 + bx + c$ entsprechend umgeformt werden.

Für Spezialfälle ist dies mit Hilfe der ersten oder zweiten binomischen Formeln möglich.

Beispiel. *Bestimmen Sie den Scheitelpunkt S der Funktion $f(x) = x^2 + 6x + 9$.*

$$f(x) = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(-3/0)$.

4.2 Quadratische Ergänzung

Meistens kann die Funktionsgleichung jedoch nicht direkt in ein Binom umgewandelt werden. In diesem Fall kann die Gleichung aber so umgeformt werden, dass die binomische Formel trotzdem angewendet werden kann. Dieser Trick wird quadratische Ergänzung genannt.

Beispiel. *Es sei die folgende Funktionsgleichung gegeben:*

$$f(x) = x^2 + 6x + 1$$

Damit die binomische Formel angewendet werden kann, müsste der letzte Summand 9 sein. Dies kann erreicht werden, indem zunächst 8 zur Gleichung addiert und gleich wieder subtrahiert wird:

$$f(x) = x^2 + 6x + 1 + 8 - 8 = x^2 + 6x + 9 - 8$$

Nun kann die erste binomische Formel angewendet werden:

$$f(x) = (x+3)^2 - 8$$

Die -8 bleibt übrig und wird zur y-Koordinate des Scheitelpunkts $S(-3,-8)$.

Falls in einer quadratischen Funktion der Koeffizient a nicht gleich Eins ist, muss dieser zunächst ausgeklammert werden.

Beispiel. *Es sei die folgende Funktionsgleichung gegeben:*

$$f(x) = -2x^2 - 12x + 4$$

Zunächst wird der Faktor -2 ausgeklammert. Dabei müssen sämtliche Summanden in der Klammer durch den Faktor dividiert werden.

$$f(x) = -2\left(\frac{-2}{-2}x^2 - \frac{12}{-2}x + \frac{4}{-2}\right)$$

Durch Vereinfachung der Brüche ergibt sich:

$$f(x) = -2\left(x^2 + 6x - 2\right)$$

Nun wird in der Klammer die quadratische Ergänzung vorgenommen:

$$f(x) = -2\left(x^2 + 6x - 2 + 11 - 11\right) = -2\left(x^2 + 6x + 9 - 11\right)$$

Die überzählige -11 muss aus der Klammer entfernt werden:

$$f(x) = -2\left(x^2 + 6x + 9\right) + 22$$

Schliesslich kann in der Klammer die binomische Formel angewendet werden:

$$f(x) = -2(x+3)^2 + 22$$

4.3 Umformung der Normalform in die Scheitelform

Anstelle von konkreten werden kann die Umformung von der Normalform in die Scheitelform auch mit den Parametern a, b und c vorgenommen werden. Daraus ergeben sich allgemeine Formeln, um den die Koordinaten des Scheitelpunkts aus der Normalform zu berechnen.

Für die Umformung von der Normalform in die Scheitelform wird die quadratische Ergänzung verwendet.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Zunächst wird a ausgeklammert, damit x^2 ohne zusätzlichen Faktor steht:

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a} \cdot x\right] + c$$

Nun wird der fehlende Term addiert, um die erste binomische Formel anwenden zu können. Natürlich muss der Term gleich wieder subtrahiert werden:

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$$

Jetzt kann die erste binomische Formel angewendet werden:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$$

Danach wird die rechte innere Klammer ausgerechnet:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

Nun wird a ausmultipliziert:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} + c$$

Noch ein paar kleine Umformungen:

$$f(x) = a\left(x - \left[-\frac{b}{2a}\right]\right)^2 + \left[c - \frac{b^2}{4a}\right]$$

Nun werden die Variablen u und v so definiert:

$$x_S = -\frac{b}{2a} \qquad y_S = c - \frac{b^2}{4a}$$

Damit entsteht die Scheitelform der quadratischen Funktion.

4.4 Umformung der Scheitelform in die Normalform

Für die Umformung von der Scheitelform in die Normalform wird folgendermassen vorgegangen:

- Ausmultiplizieren der Klammer mit der zweiten binomischen Formel
- Multiplizieren des Faktors a in die Klammer.
- Zusammenfassen der Zahlen ohne x.

Beispiel. *Die folgende quadratische Funktion $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ in der Scheitelform soll in die Normalform gebracht werden:*

$$\begin{array}{lll|l}
 & f(x) &= 2(x-3)^2 + 5 & \textit{binomische Formel} \\
\iff & f(x) &= 2\left(x^2 - 6x + 9\right) + 5 & \textit{ausmultiplizieren} \\
\iff & f(x) &= 2x^2 - 12x + 18 + 5 & \textit{zusammenfassen} \\
\iff & f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 &
\end{array}$$

5 Nullstellen

5.1 Definition

Definition: Eine **Nullstelle** x_N einer Funktion f ist die **x-Koordinate**, wo die Funktion die x-Achse schneidet.

Anders gesagt, eine Nullstelle x_N ist die x-Koordinate eines Punkts $N(x_N/0)$, welcher sowohl auf dem Funktionsgraphen als auch auf der x-Achse liegt.

Wenn die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx^c$ gegeben ist, erfüllt eine Nullstelle x_N somit die Gleichung

$$0 = ax_N^2 + bx_N + c$$

Die Werte, welche für x_N eingesetzt werden können, damit die Gleichung erfüllt ist, werden Lösungen der Gleichung genannt. Es kann also folgender Zusammenhang festgehalten werden:

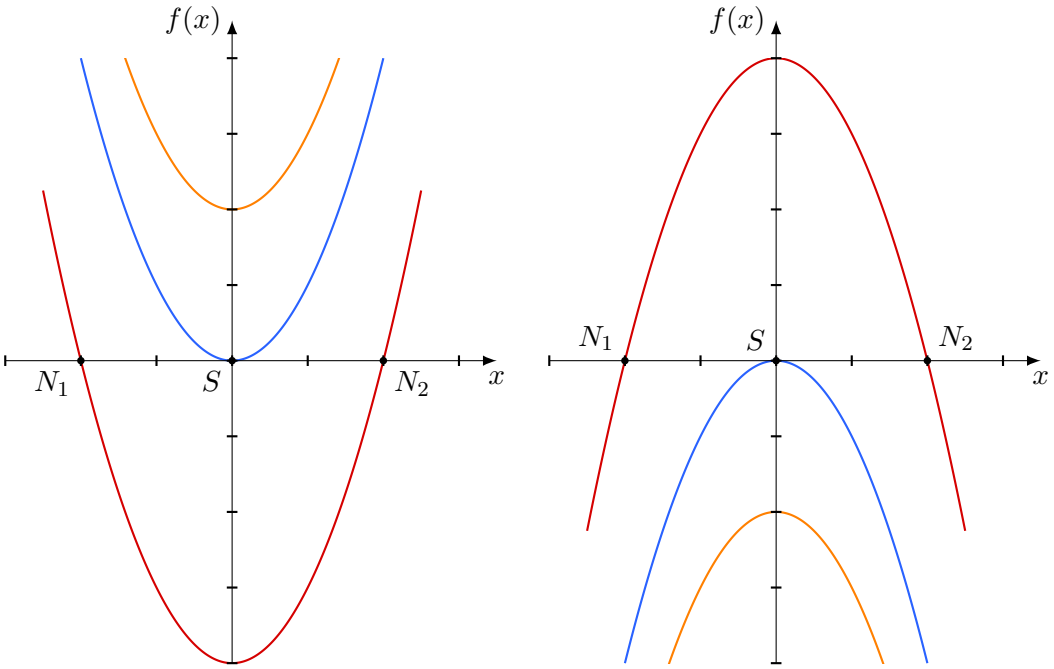
Die Lösungsmenge der Gleichung $f(x) = 0$ ist die Menge der Nullstellen der Funktion f.

5.2 Anzahl Nullstellen

Eine quadratische Funktion hat keine, eine oder zwei Nullstellen. Die Anzahl Nullstellen hängt davon ab, in welche Richtung der Funktionsgraph geöffnet ist sowie von der vertikalen Position des Scheitelpunkts.

Ist der Graph nach oben geöffnet, so hat die Funktion keine Nullstellen, wenn der Scheitel oberhalb der x-Achse liegt. Liegt der Scheitelpunkt S auf der x-Achse, so ist dieser gleichzeitig der Nullpunkt. Wenn der Scheitel unterhalb der x-Achse liegt, gibt es zwei Nullpunkte N_1 und N_2.

Wenn der Graph nach unten geöffnet ist, ist das ganze umgekehrt.



5.3 Nullstellen in der Scheitelform

Um eine allgemeine Formel für die Nullstellen der quadratischen Funktion zu erhalten, wird die Funktionsgleichung (in Scheitelform) gleich Null gesetzt. Anschliessend wird die Gleichung nach x_N aufgelöst:

$$
\begin{array}{rrl|l}
 & a(x_N - x_S)^2 + y_S &= 0 & -y_S \\
\iff & a(x_N - x_S)^2 &= -y_S & : a \\
\iff & (x_N - x_S)^2 &= -\dfrac{y_S}{a} & \sqrt{\ } \\
\iff & x_N - x_S &= \pm\sqrt{-\dfrac{y_S}{a}} & +x_S \\
\iff & x_N &= x_S \pm \sqrt{-\dfrac{y_S}{a}} &
\end{array}
$$

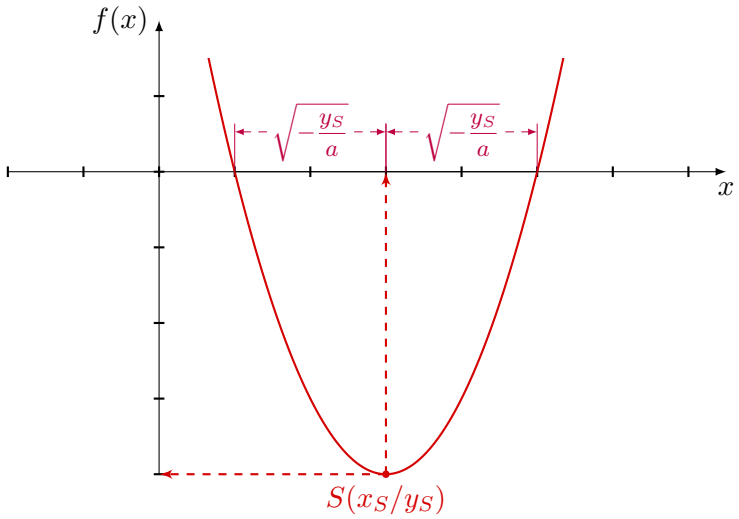
Nullstellen. Für eine quadratische Funktion in Scheitelform $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ lauten die Nullstellen:

$$x_N = x_S \pm \sqrt{-\frac{y_S}{a}}$$

Die Anzahl Nullstellen kann wie folgt ermittelt werden:

- Es gibt eine Nullstelle, wenn $y_S = 0$.
- Es gibt keine Nullstelle, wenn a und y_S das gleiche Vorzeichen haben.
- Es gibt zwei Nullstellen, wenn a und y_S unterschiedliche Vorzeichen haben.

Die Nullstellen sind x_N auf der x-Achse in beide Richtungen um den Wert $\sqrt{-\frac{y_S}{a}}$ von der x-Koordinate des Scheitelpunkts entfernt.



5.4 Nullstellen in der Normalform

In diesem Abschnitt wird die allgemeine Formel für Nullstellen für die Normform der quadratischen Funktion hergeleitet, also die Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dazu wird von der Formel für Nullstellen der Scheitelform ausgegangen:

$$x_N = x_S \pm \sqrt{-\frac{y_S}{a}}$$

Ausserdem werden die Formeln aus Abschnitt 4.3 benötigt:

$$x_S = -\frac{b}{2a} \qquad y_S = c - \frac{b^2}{4a}$$

Zunächst wird die Formel für y_S ein wenig umgeformt:

$$\begin{array}{lrl|l} & y_S &= c - \dfrac{b^2}{4a} & \cdot(-1) \\ \iff & -y_S &= \dfrac{b^2}{4a} - c & \text{erweitern} \\ \iff & -y_S &= \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{4ac}{4a} & \text{addieren} \\ \iff & -y_S &= \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} & : a \\ \iff & -\dfrac{y_S}{a} &= \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} & \end{array}$$

Damit können nun in der Nullstellenformel die Terme x_S und $-\frac{y_S}{a}$ ersetzt werden:

$$x_N = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Der Nenner kann aus der Wurzel herausgenommen werden:

$$x_N = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nun werden noch die Brüche zusammengefasst.

$$x_N = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lösungsformel. Für eine quadratische Funktion in der Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$ lauten die Nullstellen:

$$x_N = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dabei wird der Term in der Wurzel $D = b^2 - 4ac$ auch **Diskriminante** genannt. Die Anzahl Nullstellen kann wie folgt ermittelt werden:

- Es gibt eine Nullstelle, wenn $D = 0$.
- Es gibt keine Nullstelle, wenn $D < 0$.
- Es gibt zwei Nullstellen, wenn $D > 0$.

6 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) besteht aus zwei oder mehreren linearen Gleichungen, die mehrere Variablen enthalten können.

Ein Gleichungssystem wird so geschrieben, dass die einzelnen Variablen untereinander zu liegen kommen. Summanden ohne Variablen stehen auf der rechten Seite der Gleichung. Links und rechts wird das Gleichungssystem mit einem senkrechten Strich markiert, um festzuhalten, dass die beiden Gleichungen zusammengehören.

$$\left|\begin{array}{l} 3x + \ \ y = 9 \\ 2x - 2y = 14 \end{array}\right|$$

Im Gegensatz zu einzelnen Gleichungen sind in einem Gleichungssystem die Gleichungen über die Variablen miteinander verknüpft. Eine Variable stellt in jeder Gleichung im System den gleichen Wert dar. So wären im Beispiel oben $x = 1$ und $y = 6$ zwar eine Lösung für die erste Gleichung, jedoch nicht für die zweite und somit auch nicht für das Gleichungssystem.

Das Ziel bei einem Gleichungssystem ist es, die Lösung(en) zu finden, also Werte für die vorhanden Variablen zu bestimmen, sodass alle Gleichungen im System zu wahren Aussagen werden.

Für das Beispiel oben kann beispielsweise durch Ausprobieren die Lösung $x = 4$ und $y = -3$ gefunden werden.

Es gibt mehrere Verfahren, wie Gleichungssysteme gelöst werden könne. Eines wird im folgenden vorgestellt.

6.1 Substitutionsverfahren (Lösung durch Ersetzen)

Eine Strategie zur Lösung eines linearen Gleichungssystems ist, die eine Gleichung nach einer Variable (z.B.) y aufzulösen und diese dann in der zweiten Gleichung zu ersetzen. Dadurch entsteht eine Gleichung, welche nur eine Variable enthält und gelöst werden kann.

Dabei werden folgende Schritte der Reihe nach ausgeführt:

1. Die erste Gleichung wird nach der Variable y aufgelöst.
2. In der zweiten Gleichung wird die Variable y mit Hilfe der Gleichung aus dem vorherigen Schritt ersetzt. Sie enthält jetzt nur noch die Variable x.
3. Die zweite Gleichung wird nach x aufgelöst. Damit ist die Lösung für x bekannt.
4. In der ersten, nach y aufgelösten Gleichung wird die Lösung für x eingesetzt und damit die Lösung für y berechnet.

Dieses Vorgehen funktioniert natürlich auch, wenn die Variablen x und y anders heissen oder wenn die erste und zweite Gleichung vertauscht werden.

Beispiel. *Das folgende Gleichungssystem soll mit dem Substitutionsverfahren gelöst werden:*

$$\left|\begin{array}{l} 3x + \ \ y = 9 \\ 2x - 2y = 14 \end{array}\right|$$

Die erste Gleichung wird nach y aufgelöst:

$$\begin{array}{rrl} & 3x + y \ = 9 & \left| -3x \right. \\ \iff & \quad y \ = 9 - 3x & \end{array}$$

In der zweiten Gleichung wird y ersetzt (Substitution). Anschliessend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$$\begin{array}{rrl} & 2x - 2y \ = 14 & \left| y = 9 - 3x \right. \\ \iff & 2x - 2(9 - 3x) \ = 14 & \left| \textit{ausmultiplizieren} \right. \\ \iff & 2x - 18 + 6x \ = 14 & \left| +18 \right. \\ \iff & 8x \ = 32 & \left| : 8 \right. \\ \iff & x \ = 4 & \end{array}$$

Mit der nach y aufgelösten Gleichung kann nun y ermittelt werden:

$$\begin{array}{rrl} & y \ = 9 - 3x & \left| x = 4 \right. \\ \iff & y \ = 9 - 3 \cdot 4 = 9 - 12 = -3 & \end{array}$$

Somit ist die Lösung des Gleichungssystems $x = 4$ und $y = -3$.

6.2 Geometrische Interpretation

Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen x und y ist geometrisch betrachtet eine Gerade. Dabei sind die Lösungen für x und y die Koordinaten von Punkten, welche auf dieser Geraden liegen.

Wird die Gleichung nach der Variable y aufgelöst, so entsteht die Funktionsgleichung des Graphen.

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und Variablen besteht geometrisch gesehen zwei Geraden und die Lösung des Gleichungssystems ist der oder die Schnittpunkt(e) der beiden Geraden.

Beispiel. *Es wird das Gleichungssystem aus dem vorherigen Beispiel verwendet.*

$$\left|\begin{array}{l} 3x + \ \ y = 9 \\ 2x - 2y = 14 \end{array}\right|$$

Die Gleichungen werden nach y aufgelöst:

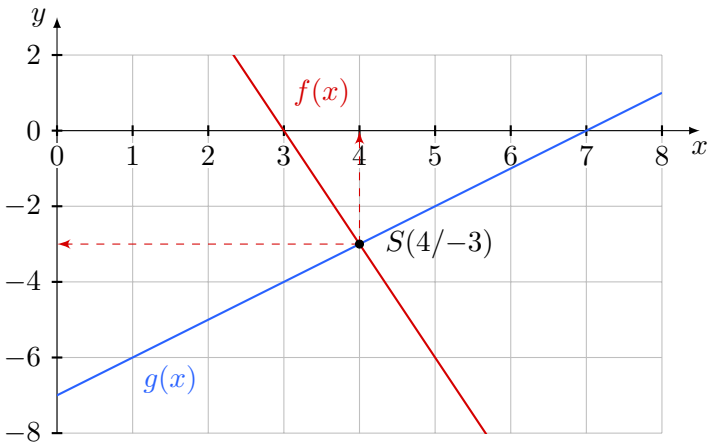
$$y = f(x) = -3x + 9$$
$$y = g(x) = x - 7$$

Anstelle von y wird nun $f(x)$ beziehungsweise $g(x)$ geschrieben, um zu verdeutlichen, dass die Gleichungen nun als Funktionsgleichungen betrachtet werden.

Die x-Koordinate des Schnittpunkts S der beiden Funktionsgraphen kann durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen ermittelt werden:

$$\begin{array}{rrl|l} & -3x+9 & = x-7 & +3x+7 \\ \iff & 16 & = 4x & :4 \\ \iff & 4 & = x & \end{array}$$

Der Schnittpunkt der Geraden hat also die Koordinaten $S(4/-3)$. Diese entsprechen der Lösung des Gleichungssystems $x=4$ und $y=-3$.

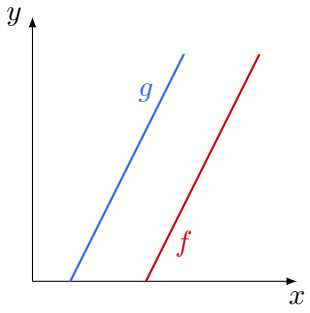


6.3 Lösungsvielfalt

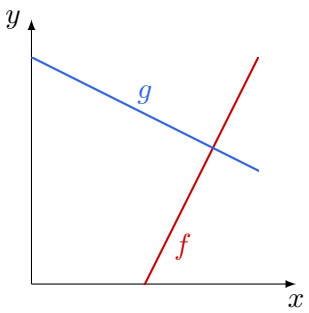
Es gibt drei Möglichkeiten für die Anzahl an Lösungen eines linearen Gleichungssystems:

- keine Lösung
- eine Lösung
- unendlich viele Lösungen

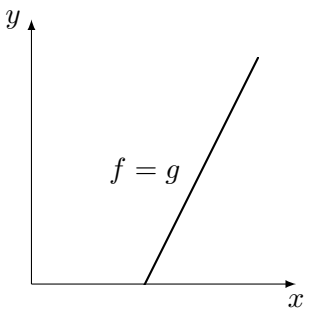
Geometrisch lassen sich diese drei Möglichkeiten anschaulich darstellen:



keine Lösung
die Geraden sind parallel



eine Lösung
die Geraden schneiden sich



unendlich viele Lösungen
die Geraden sind identisch