Kosinussatz

1. **SSS.** Die drei Seiten eines Dreiecks sind vorgegeben. Berechnen Sie die Winkel.

   (a) $a = 45\,\text{cm}$ $b = 38\,\text{cm}$ $c = 55\,\text{cm}$

   Lösung: Winkel α mit Kosinussatz berechnen:

   $$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \arccos\left(\frac{38^2 + 55^2 - 45^2}{2 \cdot 38 \cdot 55}\right) \approx 54.219°$$

   Winkel β mit Kosinussatz berechnen:

   $$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) = \arccos\left(\frac{45^2 + 55^2 - 38^2}{2 \cdot 45 \cdot 55}\right) \approx 43.240°$$

   Winkel γ mit Innenwinkelsumme berechnen.

   $$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 54.219° - 43.240° \approx 82.541°$$

   Lösung:

   $$\alpha \approx 54.219° \qquad \beta \approx 43.240° \qquad \gamma \approx 82.541°$$

   (b) $a = 36\,\text{cm}$ $b = 6.5\,\text{dm}$ $c = 432\,\text{mm}$

   Lösung: Alle Masse in Millimeter umrechnen:

   $$a = 360\,\text{mm} \qquad b = 650\,\text{mm} \qquad c = 432\,\text{mm}$$

   Winkel α mit Kosinussatz berechnen:

   $$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \arccos\left(\frac{650^2 + 432^2 - 360^2}{2 \cdot 650 \cdot 432}\right) \approx 31.367°$$

   Winkel β mit Kosinussatz berechnen:

   $$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) = \arccos\left(\frac{360^2 + 432^2 - 650^2}{2 \cdot 360 \cdot 432}\right) \approx 109.979°$$

   Winkel γ mit Innenwinkelsumme berechnen.

   $$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 31.367° - 109.979° \approx 38.654°$$

   Lösung:

   $$\alpha \approx 31.367° \qquad \beta \approx 109.979° \qquad \gamma \approx 38.654°$$

2. **SWS.** Zwei Seiten eines Dreiecks sowie der eingeschlossene Winkel sind vorgegeben. Berechnen Sie die dritte Seite und die zwei anderen Winkel.

(a) $a = 1.4\,\text{m}$ $b = 1.8\,\text{m}$ $\gamma = 102.9°$

Lösung: Mit Kosinussatz c berechnen:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)} = \sqrt{1.4^2 + 1.8^2 - 2 \cdot 1.4 \cdot 1.8 \cdot \cos(102.9°)}$$
$$\approx 2.515\,\text{m}$$

Mit Kosinussatz α berechnen:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \approx \arccos\left(\frac{1.8^2 + 2.515^2 - 1.4^2}{2 \cdot 1.8 \cdot 2.515}\right) \approx 32.861°$$

Mit Innenwinkelsumme β berechnen:

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma \approx 44.239°$$

Lösung:

$$c \approx 2.515\,\text{m} \qquad \alpha \approx 32.864° \qquad \beta \approx 44.329°$$

(b) $a = 68\,\text{mm}$ $c = 41\,\text{mm}$ $\beta = 108.5°$

Lösung: Mit Kosinussatz b berechnen:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)} = \sqrt{68^2 + 41^2 - 2 \cdot 68 \cdot 41 \cdot \cos(108.5°)}$$
$$\approx 89.857\,\text{mm}$$

Mit Kosinussatz α berechnen:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \approx \arccos\left(\frac{89.857^2 + 41^2 - 68^2}{2 \cdot 89.857 \cdot 41}\right) \approx 45.861°$$

Mit Innenwinkelsumme γ berechnen:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 25.639°$$

Lösung:

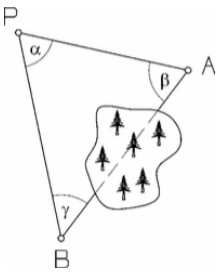
$$b \approx 89.857\,\text{mm} \qquad \alpha \approx 45.861° \qquad \gamma \approx 25.639°$$

3. **Tunnel.** Durch einen Berg soll ein Tunnel von Ort A nach Ort B gebaut werden. Von Ort C aus sind beide Orte in Luftlinie sichtbar. Die Strecke $\overline{AC}$ beträgt 20 km, die Strecke $\overline{BC}$ 30 km. Der Winkel zwischen den Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ beträgt 60°. Um den Bau planen zu können muss die Länge des Tunnels berechnet werden.

Lösung: Der Tunnel wird 26.458 km lang werden.

4. **Kabel.** Zwischen den Orten A und B soll ein Kabel gradlinig verlegt werden. Zwischen A und B besteht im Wald keine Sichtverbindung, deshalb kann diese Strecke nicht direkt

vermessen werden. Von Punkt P aus können aber A und B anvisiert werden. Dabei beträgt der Winkel zwischen $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ 43°, die Streck $\overline{PA}$ beträgt 2.365 km, die Strecke $\overline{PB}$ 3.876 km. Berechnen Sie die Länge des benötigten Kabels.



Lösung: Das Kabel muss 2685 m lang sein.

5. 🏆 **Uhr.** Eine analoge Uhr zeigt zehn nach zehn Uhr an. Der Minuten- und Stundenzeiger bilden einen Winkel von 115°. Der Stundenzeiger ist 5 cm lang, der Minutenzeiger 15 cm.



(a) Wie weit sind die Spitzen der beiden Zeiger voneinander entfernt?

Lösung: Um zehn nach zehn Uhr sind die Spitzen der Zeiger 17.703 cm voneinander entfernt.

(b) Erklären Sie, wieso der Winkel zwischen Stunden- und Minutenzeiger 115° beträgt.