Sinussatz

1. **WSW.** Eine Seite und zwei Winkel eines Dreiecks sind vorgegeben. Berechnen Sie den dritten Winkel und die zwei anderen Seiten.

   (a) $a = 4\,\text{cm}$ $\alpha = 60°$ $\beta = 50°$

   Lösung: Die Seite b kann dem Sinussatz berechnet werden:

   $$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{4 \cdot \sin(50°)}{\sin(60°)} \approx 3.538\,\text{cm}$$

   Nun muss erst der Winkel γ mit der Innenwinkelsumme berechnet werden:

   $$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 60° - 50° = 70°$$

   Nun kann auch die Seite c mit dem Sinussatz berechnet werden:

   $$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{4 \cdot \sin(70°)}{\sin(60°)} \approx 4.340\,\text{cm}$$

   (b) $c = 8\,\text{m}$ $\alpha = 75°$ $\beta = 40°$

   Lösung: Erst muss der Winkel γ mit der Innenwinkelsumme berechnet werden:

   $$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 75° - 40° = 65°$$

   Die Seite a kann dem Sinussatz berechnet werden:

   $$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{c \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \frac{8 \cdot \sin(75°)}{\sin(65°)} \approx 8.598\,\text{m}$$

   Die Seite b wird ebenfalls mit dem Sinussatz berechnet:

   $$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{c \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{8 \cdot \sin(40°)}{\sin(65°)} \approx 5.674\,\text{m}$$

2. **SSW.** Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks. Überprüfen Sie, ob es jeweils nur eine Lösung gibt.

   (a) $a = 4.5\,\text{cm}$ $b = 5.7\,\text{cm}$ $\beta = 70°$

   Lösung:

   $\alpha \approx 47.9°$ $\gamma \approx 62.1°$ $c \approx 5.36\,\text{cm}$

   (b) $a = 40\,\text{dm}$ $c = 5\,\text{m}$ $\gamma = 25°$

Lösung:

$\alpha \approx 19.8°$ $\beta \approx 135.2°$ $b \approx 8.33\,\mathrm{m}$

3. **SSW Spezialfälle.** In einem Dreieck $\triangle ABC$ sind zwei Seiten und ein Winkel bekannt. Berechnen Sie die restlichen Seiten und Winkel.

(a) $a = 6$ $b = 4.5$ $\alpha = 75°$

Lösung: Diese Aufgabe ist eindeutig lösbar, da der bekannte Winkel der grösseren Seite gegenüber liegt.

Der Sinussatz wird verwendet, um $\sin(\beta)$ zu bestimmen:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = \frac{4.5 \cdot \sin(75°)}{6} \approx 0.7244$$

Mit der $\arcsin$-Funktion wird der Winkel β berechnet:

$$\beta \approx \arcsin(0.724) \approx 46.42°$$

Mit der Innenwinkelsumme wird γ berechnet:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 75° - 46.42° = 58.58°$$

Der Sinussatz wird verwendet, um c zu bestimmen:

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{6 \cdot \sin(58.6°)}{\sin(75°)} \approx 5.3$$

(b) $a = 4$ $b = 5$ $\alpha = 35°$

Lösung: Hier liegt der bekannte Winkel der kleineren Seite gegenüber. Es kann also keine, eine oder zwei Lösungen geben.

Der Sinussatz wird verwendet, um $\sin(\beta)$ zu bestimmen:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = \frac{5 \cdot \sin(35°)}{4} \approx 0.7169$$

Mit der $\arcsin$-Funktion wird der Winkel β berechnet:

$$\beta_1 \approx \arcsin(0.7169) \approx 45.80°$$

Es gibt eine zweite Lösung:

$$\beta_2 = 180° - \beta_1 \approx 134.20°$$

Mit der Innenwinkelsumme wird γ berechnet:

$$\gamma_1 = 180° - 35° - 45.80° = 99.20°$$
$$\gamma_2 = 180° - 35° - 134.20° = 10.80°$$

Der Sinussatz wird verwendet, um c zu bestimmen:

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$$

Für die beiden Varianten ergibt sich:

$$c_1 = \frac{4 \cdot \sin(99.20°)}{\sin(35°)} \approx 6.9$$
$$c_2 = \frac{4 \cdot \sin(10.80°)}{\sin(35°)} \approx 1.3$$

(c) $a = 4 \qquad b = 5 \qquad \alpha = 65°$

Lösung: Hier liegt der bekannte Winkel der kleineren Seite gegenüber. Es kann also keine, eine oder zwei Lösungen geben.

Mit dem Sinussatz wird versucht, den Sinus von β zu bestimmen:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = \frac{5 \cdot \sin(65°)}{4} \approx 1.132$$

Der Sinuswert eines Winkels liegt immer zwischen -1 und 1. Somit gibt es hier keine Lösung.

4. 🏆 Bei einem Fluss wird von zwei Punkten A und B ein fester Punkt C auf dem gegenüberliegenden Ufer angepeilt. Die Winkel betragen $\alpha = 40°$ und $\beta = 61°$. Wie breit ist der Fluss?

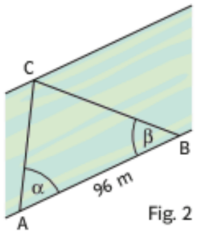


Fig. 2

Lösung: Die Flussbreite beträgt ca. 55 m.

5. 🏆 Um die Höhe eines Baumes zu messen, muss man nicht auf den Baum klettern. Auch die Höhe von Gebäuden und Bergen kann man folgendermassen bestimmen.

Von einem Hochsitz aus wird der Fusspunkt F eines Baumes unter dem Tiefenwinkel $\delta = 15°$ gesehen, der höchste Punkt H unter dem Erhebungswinkel $\epsilon = 48°$.

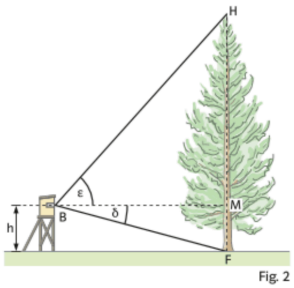


Fig. 2

(a) Wie hoch ist der Baum, wenn der Beobachtungspunkt B in der Höhe $h = 6.5\,\text{m}$ liegt?

Lösung: Der Baum ist etwa 33.4 m hoch.

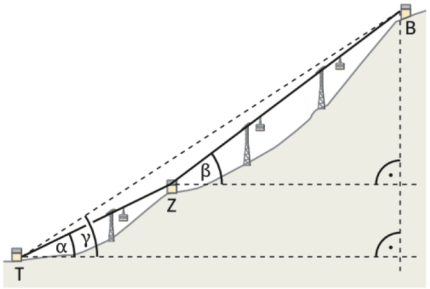
(b) Wie weit ist der Beobachtungspunkt B von den Punkten F und H entfernt (Luftlinie)?

Lösung: Die Distanz vom Beobachtungspunkt zum Fusspunkt beträgt 25.1 m.

Die Distanz vom Beobachtungspunkt zum höchsten Punkt beträgt 36.3 m.

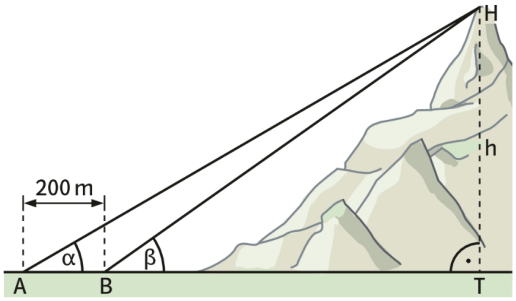
6. 🏆 Eine Seilbahn führt von einer Talstation T über eine Zwischenstation Z zu einer Bergstation B. Die durchschnittlichen Neigungswinkel des Seiles sind $\alpha = 26°$ und $\beta = 37°$, die Bergstation wird von der Talstation aus unter dem Erhebungswinkel $\gamma = 33°$ gesehen.

Wie hoch liegt die Bergstation oberhalb der Talstation, wenn die Zwischenstation 450 m höher liegt als die Talstation?



Lösung: Die Bergstation liegt etwa etwa 1530 m höher als die Talstation.

7. 🏆 Um die Höhe eines Berges zu bestimmen, wird der Gipfel von den Endpunkten einer 200 m langen, direkt auf den Berg zulaufenden Standlinie aus angepeilt. Berechne die Höhe des Berges, wenn für die beiden Erhebungswinkel $\alpha = 30.11°$ und $\beta = 35.25°$ gemessen wurden.



Lösung: Der Berg ist etwa 646.4 m hoch.