Repetition Trigonometrie

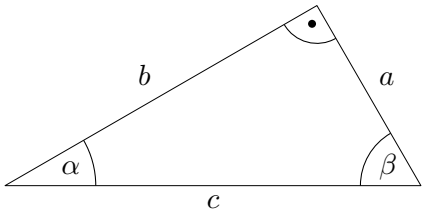
Beachten Sie:

- Sie haben 75 Minuten Zeit.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Sie können eine A4-Seite mit eigenen, handgeschriebenen Notizen verwenden.
- Sie dürfen den Taschenrechner und das Fundamentum verwenden.
- Runden Sie Zwischenresultate und Antworten auf **drei Nachkommastellen**.
- Wählen Sie aus den Anwendungsaufgaben 6 und 7 eine aus, welche Sie lösen. Streichen Sie die andere durch. Es wird nur eine dieser Aufgaben berwertet.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Total	Note
max. Punkte	3	5	4	4	10	0	8	34	
Punkte									

1. Rechtwinkliges Dreieck. Von dem abgebildeten rechtwinkligen Dreieck ist folgendes bekannt: (3P)

$c = 4\,\text{cm}$
$\beta = 37°$



Berechnen Sie die restlichen beschrifteten Seiten und Winkel. Geben Sie zu jeder Berechnung die verwendete Formel an.

Lösung:

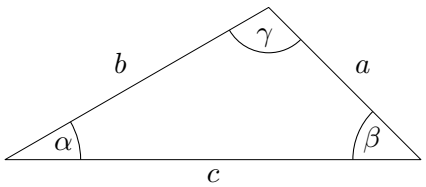
$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b = c \cdot \sin(\beta) = 4 \cdot \sin(37°) \approx 2.407\,\text{cm}$$

$$\cos(\beta) = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad a = c \cdot \cos(\beta) = 4 \cdot \cos(37°) \approx 3.194\,\text{cm}$$

$$\alpha + \beta = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - \beta = 53°$$

2. Allgemeines Dreieck. Von dem abgebildeten Dreieck ist folgendes bekannt: **(5P)**

$a = 13\,\text{cm}$
$b = 14\,\text{cm}$
$c = 15\,\text{cm}$



(a) Gemäss welchem Satz ist das Dreieck damit eindeutig festgelegt? (1P)

Lösung: SSS-Kongruenzsatz

(b) Berechnen Sie die restlichen beschrifteten Seiten und Winkel. Geben Sie zu jeder Berechnung die verwendete Formel an. (4P)

Lösung: Es handelt sich um den Kongruenzsatz SSS (**1P**).

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{5}{13} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 67.380°$$

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{33}{65} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 59.490°$$

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 59.490° - 67.380° = 53.130°$$

3. Steigung. Eine Strasse ist mit dem abgebildeten Signal beschriftet. **(4P)**



(a) Welchen Steigungswinkel hat die Strasse? (1P)

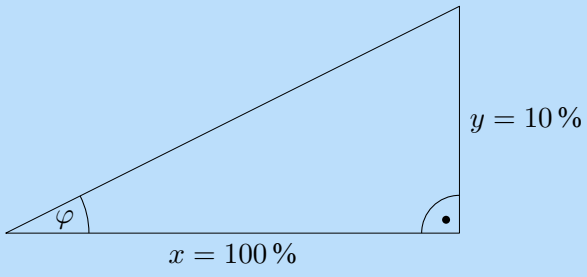
Lösung: Die Steigung entspricht dem Tangens des Steigungswinkels, also:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{10}{100}\right) = \arctan(0.1) \approx 5.711°$$

Der Steigungswinkel beträgt 5.711°. (**1P**)

(b) Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Skizze und einer Erklärung in vollständigen Sätzen. (3P)

Lösung: Die Steigung gibt an, um wie viel man sich auf einer bestimmten horizontale Distanz x senkrecht nach oben bewegt y. Bei einer Angabe in Prozent ist die horizontale Distanz 100 %. Die Steigung ist also das Verhältnis $\frac{y}{x}$ (**1P**)



Skizze **1P**

In der Trigonometrie ist das Verhältnis $\frac{y}{x}$ der Tangens vom Steigungswinkel φ. Der Steigungswinkel ist also der Arkustangens der Steigung (**1P**):

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

4. Spezielle Winkel. Erklären Sie mit Hilfe einer geeigneten Skizze und in vollständigen Sätzen, wieso $\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt. (4P)

Lösung: Es wird ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck betrachtet, d.h. ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei Winkeln von 45° (**1P**). Die Länge der Hypotenuse wird auf 1 festgelegt.

Die Seitenlänge der Katheten kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden (**1P**):

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Da beide Katheten gleich lang sind, kann $b = a$ gesetzt werden, ausserdem ist $c = 1$:

$$a^2 + a^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad 2a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \tfrac{1}{2}$$

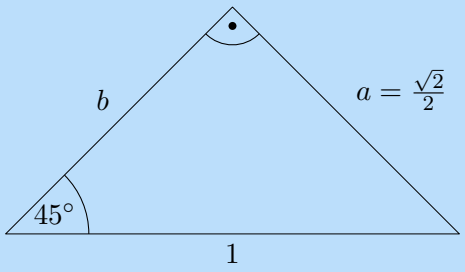
Diese Gleichung wird nach a aufgelöst:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nun wird die Definition des Sinus angewendet (mit $c = 1$) und $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ eingesetzt (**1P**):

$$\sin(45°) = \frac{a}{c} = a$$

Skizze **1P**:



5. SSW. Von einem Dreieck ist folgendes bekannt: **(10P)**

$a = 4\,\text{m} \qquad b = 6\,\text{m} \qquad \alpha = 30°$

(a) Wie viele verschiedene Dreiecke mit diesen Massen gibt es? Begründen Sie. (2P)

Lösung: Da die dem Winkel gegenüberliegende Seite die kürzere ist, kann es keine, eine oder zwei Lösungen geben. Rechnerisch kann die Anzahl Lösungen am Wert des Sinus von β abgelesen werden.

$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a} \quad \Rightarrow \quad \sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = \frac{6 \cdot \sin(30°)}{4} = 0.75$$

Da der Sinus von β kleiner als 1 ist, gibt es zwei Lösungen.

(b) Bestimmen Sie für alle Varianten die fehlenden Seiten und Winkel. (8P)

Lösung: Nun kann die erste Lösung für β bestimmt werden:

$$\beta_1 = \arcsin(0.75) \approx 48.590^\circ$$

Mit der Innenwinkelsumme wird γ_1 berechnet:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_1 = 180^\circ - 30^\circ - 48.590^\circ = 101.410^\circ$$

Schliesslich wird c_1 mit dem Sinussatz berechnet:

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{a \cdot \sin(\gamma_1)}{\sin(\alpha)} = \frac{4 \cdot \sin(101.41^\circ)}{\sin(30^\circ)} \approx 7.842$$

Die zweite Lösung β_2 ergibt sich mit dem Nebenwinkelsatz:

$$\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 180^\circ - 48.590^\circ \approx 131.410^\circ$$

Mit der Innenwinkelsumme wird γ_2 berechnet:

$$\gamma_2 = 180^\circ - 30^\circ - 131.410^\circ = 18.59^\circ$$

Schliesslich wird c_2 mit dem Sinussatz berechnet:

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = \frac{a \cdot \sin(\gamma_2)}{\sin(\alpha)} = \frac{4 \cdot \sin(18.59^\circ)}{\sin(30^\circ)} \approx 2.550$$

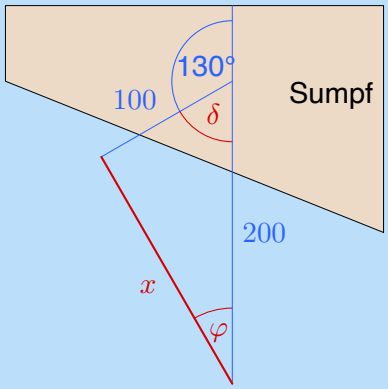
Die beiden Lösungen lauten:

$\beta_1 = 48.6^\circ$	$\gamma_1 = 101.4^\circ$	$c_1 = 7.8\,\mathrm{m}$
$\beta_2 = 131.4^\circ$	$\gamma_2 = 18.6^\circ$	$c_1 = 2.6\,\mathrm{m}$

6. **Schatzsuche.** Der Ort eines Schatzes wird wie folgt beschrieben: «Starte beim südlichsten Punkt der Insel und blicke nach Norden. Gehe 200 Schritte gerade aus, dann drehe dich um 130° nach links und gehe 100 Schritte gerade aus. Dort findest du den Schatz.» (8+)

   Der beschriebene Weg führt aber durch einen unzugänglichen Sumpf. Sie können jedoch versuchen, direkt auf den Schatz zuzugehen. Um wie viel Grad müssen Sie sich nach links drehen und wie viele Schritte gehen, damit Sie direkt zum Schatz gelangen?

Lösung:



Mit dem Nebenwinkelsatz wird der Winkel δ zwischen den beiden bekannten Seiten des Dreiecks berechnet:

$$\delta = 180° - 130° = 50°$$

Nun sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel des Dreiecks bekannt, also der Fall SWS. Die dritte Seite x kann mit dem Kosinussatz berechnet werden:

$$x = \sqrt{100^2 + 200^2 - 2 \cdot 100 \cdot 200 \cdot \cos(\delta)} \approx \sqrt{24288.496} \approx 155.848$$

Der Winkel δ kann nun ebenfalls mit dem Kosinussatz berechnet werden:

$$\delta = \arccos\left(\frac{200^2 + 155.848^2 - 100^2}{2 \cdot 200 \cdot 155.848}\right) \approx 29.441°$$

Wenn man sich am Ausgangspunkt um 29.5° nach links dreht und 156 Schritte geht, kommt man direkt zum Schatz.

Bewertung:

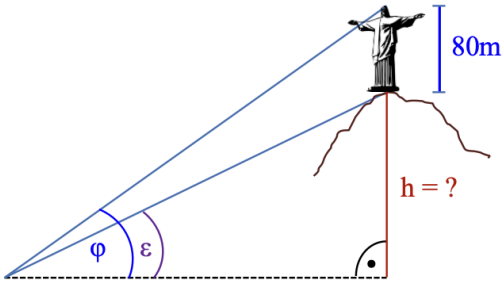
- korrekte Berechnung δ **1P**
- Korrekte Distanz x **1P**
- korrekter Winkel φ **1P**
- Berechnung Distanz x mit Kosinussatz **2P**
- Berechnung Winkel φ mit Kosinussatz **2P**
- Skizze **1P**

7. Corcovado. Die Figur Cristo Redentor ist das Wahrzeichen von Rio de Janeiro. Die 80 m hohe Figur steht auf dem Gipfel des Berges Corcovado. Vom Meeresstrand aus kann man die Figur sehen. Mit einem Theodolit werden die im Bild dargestellten Winkel sehr genau gemessen. **(8P)**

Folgende Winkel werden gemessen: $\varphi = 3.800°$ und $\epsilon = 3.413°$.

(a) Beschriften Sie sämtliche verwendeten Winkel und Längen in der Skizze. (2P)

(b) Bestimmen Sie aus den Messwerten die Höhe des Berges Corcovado. (6P)



Lösung:

5. $\alpha = \varphi - \varepsilon = 3{,}900° - 3{,}503° = 0{,}397°$ und $\beta = 90° - \varphi = 86{,}10°$

$$\frac{x}{80\text{m}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow x = 80\text{m} \cdot \frac{\sin 86{,}10°}{\sin 0{,}397°} = 11519{,}...\text{m}$$

$$\frac{h}{x} = \sin\varepsilon \Rightarrow$$

$$h = 11519{,}...\text{m} \cdot \sin 3{,}503° = 703{,}8...\text{m} \approx 704\text{m}$$

