Wurzeln

1. **Berechnen** Sie ohne Taschenrechner.

   (a) $\sqrt{121}$ (c) $\sqrt{64}$ (e) $\sqrt{\frac{36}{81}}$

   (b) $\sqrt{10000}$ (d) $\sqrt{0.01}$ (f) $\sqrt{2^{12}}$

2. **Multiplizieren.** Berechnen Sie ohne Taschenrechner.

   (a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{14}$ (c) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$ (e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

   (b) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$ (d) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{22}$ (f) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{15}$

3. **Dividieren.** Berechnen Sie ohne Taschenrechner.

   (a) $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}}$ (c) $\frac{\sqrt{9}}{-\sqrt{16}}$ (e) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

   (b) $-\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$ (d) $\frac{\sqrt{8}}{-\sqrt{32}}$ (f) $-\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{18}}$

4. **Wurzelgesetze.** Welche dieser Gesetze sind korrekt? D.h. welche Gleichungen gelten für alle Zahlen a und b aus der Definitionsmenge?

   (a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

   (b) $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

   (c) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   (d) $\sqrt{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

   (e) $(\sqrt{a})^2 = a$

   (f) $(\sqrt{a^2}) = a$

5. **Multiplizieren.** Vereinfachen Sie.

   (a) $\sqrt{3x} \cdot \sqrt{12x}$ (c) $\sqrt{5b^3} \cdot \sqrt{20b}$ (e) $\sqrt{x^2y} \cdot \sqrt{16y^3}$

   (b) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a^3}$ (d) $\sqrt{4c^3} \cdot \sqrt{9c^{-1}}$ (f) $\sqrt{7m^4} \cdot \sqrt{28m^2}$

6. **Dividieren** Vereinfachen Sie.

   (a) $\frac{\sqrt{64x^3}}{\sqrt{4x}}$ (c) $\frac{\sqrt{75b^3c}}{\sqrt{3bc^3}}$ (e) $\frac{\sqrt{80x^6y^2}}{\sqrt{5x^2y^4}}$

   (b) $\frac{\sqrt{18a^4}}{\sqrt{2a^2}}$ (d) $\frac{\sqrt{2m^3}}{\sqrt{98m}}$ (f) $\frac{\sqrt{36a^5b^2}}{\sqrt{4a^3b}}$

7. **Vermischte Aufgaben.** Bringen Sie unter eine Wurzel und vereinfachen Sie.

   (a) $\dfrac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt{ab^5}}$

   (b) $\sqrt{2ac}\cdot\sqrt{\dfrac{8a}{c}}$

   (c) $\sqrt{\dfrac{9m^3}{5n}} : \sqrt{\dfrac{49m}{20n^5}}$

   (d) $\dfrac{ab}{4c}\cdot\sqrt{\dfrac{16c^3}{a^2b}}$

   (e) $\sqrt{\dfrac{25x^4}{8y^2}} : \sqrt{\dfrac{100x^2y}{16y^3}}$

   (f) $\dfrac{2x^2y}{3z}\cdot\sqrt{\dfrac{36z^4}{4x^2y^2}}$

8. **Allgemeine Wurzeln.** Das Wurzelziehen oder Radizieren ist die Umkehroperation des Potenzierens. Mit dem Radizieren wird die unbekannte, nicht-negative Basis der Potenz berechnet:

   $$x^n = a \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt[n]{a} \qquad (x \geq 0)$$

   Die Zahl a welche radiziert wird, heisst **Radikand**, die Zahl n heisst **Wurzelexponent**. Das Resultat des Wurzelziehens heisst n-te **Wurzel** oder n-tes **Radikal**.

   Beispiel. *Die dritte Wurzel von* 125 *ist* 5*, da* 5 *hoch drei gleich* 125 *ist.*

   $$\sqrt[3]{125} = 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5^3 = 125$$

   Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

   (a) $\sqrt[3]{8}$

   (b) $\sqrt[3]{8^2}$

   (c) $\sqrt[3]{27}$

   (d) $\sqrt[5]{32}$

   (e) $\sqrt[3]{1000}$

   (f) $\sqrt[4]{100'000'000}$

9. **Multiplikation und Division.** Bei der Multiplikation und Division können Wurzeln mit **gleichem Wurzelexponenten** zusammengefasst oder aufgeteilt werden:

   $$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b} \qquad\qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

   Damit können Wurzeln von Brüchen oder Dezimalbrüchen ohne Taschenrechner berechnet werden.

   Beispiel. *Die dritte Wurzel von* 0.027 *ist* 0.3*:* $\sqrt[3]{0.027} = \sqrt[3]{\dfrac{27}{1000}} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}} = \dfrac{3}{10} = 0.3$

   (a) $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{4}$

   (b) $\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{81}$

   (c) $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{64}$

   (d) $\sqrt[6]{64}\cdot\sqrt[6]{4}$

   (e) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{27}$

   (f) $\sqrt[4]{256}\cdot\sqrt[4]{16}$

   (g) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{128}}$

   (h) $\sqrt[4]{0.0001}$

   (i) $\sqrt[3]{0.512}$

   (j) $\sqrt[6]{0.000001}$

   (k) $\sqrt[5]{\dfrac{243}{32}}$