Wurzeln

1. **Berechnen** Sie ohne Taschenrechner.
   (a) $\sqrt{121} = 11$
   (b) $\sqrt{10000} = 100$
   (c) $\sqrt{64} = 8$
   (d) $\sqrt{0.01} = 0.1$
   (e) $\sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
   (f) $\sqrt{2^{12}} = 2^6$

2. **Multiplizieren.** Berechnen Sie ohne Taschenrechner.
   (a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{7 \cdot 14} = \sqrt{98}$
   (b) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{144} = 12$
   (c) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{144} = 12$
   (d) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{22} = \sqrt{11 \cdot 22} = \sqrt{242}$
   (e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9$
   (f) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{9 \cdot 15} = \sqrt{135}$

3. **Dividieren.** Berechnen Sie ohne Taschenrechner.
   (a) $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$
   (b) $-\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = -\sqrt{\frac{25}{4}} = -\sqrt{6.25} = -\frac{5}{2}$
   (c) $\frac{\sqrt{9}}{-\sqrt{16}} = -\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}$
   (d) $\frac{\sqrt{8}}{-\sqrt{32}} = -\sqrt{\frac{8}{32}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$
   (e) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$
   (f) $-\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{18}} = -\sqrt{\frac{50}{18}} = -\sqrt{\frac{25}{9}} = -\frac{5}{3}$

4. **Wurzelgesetze.** Welche dieser Gesetze sind korrekt? D.h. welche Gleichungen gelten für alle Zahlen a und b aus der Definitionsmenge?

   (a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ **korrekt**

   (b) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ **falsch**

   (c) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ **korrekt**

   (d) $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ **falsch**

   (e) $(\sqrt{a})^2 = a$ **korrekt**

   (f) $(\sqrt{a^2}) = a$ **falsch**

5. **Multiplizieren.** Vereinfachen Sie.

   (a) $\sqrt{3x} \cdot \sqrt{12x} = \sqrt{3 \cdot 12 \cdot x \cdot x} = \sqrt{36x^2} = 6x$

   (b) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a^3} = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot a \cdot a^3} = \sqrt{16a^4} = 4a^2$

   (c) $\sqrt{5b^3} \cdot \sqrt{20b} = \sqrt{5 \cdot 20 \cdot b^3 \cdot b} = \sqrt{100b^4} = 10b^2$

   (d) $\sqrt{4c^3} \cdot \sqrt{9c^{-1}} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot c^3 \cdot c^{-1}} = \sqrt{36c^2} = 6c$

   (e) $\sqrt{x^2y} \cdot \sqrt{16y^3} = \sqrt{x^2 \cdot 16 \cdot y \cdot y^3} = \sqrt{16x^2y^4} = 4xy^2$

   (f) $\sqrt{7m^4} \cdot \sqrt{28m^2} = \sqrt{7 \cdot 28 \cdot m^4 \cdot m^2} = \sqrt{196m^6} = 14m^3$

6. **Dividieren** Vereinfachen Sie.

   (a) $\frac{\sqrt{64x^3}}{\sqrt{4x}} = \sqrt{\frac{64x^3}{4x}} = \sqrt{16x^2} = 4x$

   (b) $\frac{\sqrt{18a^4}}{\sqrt{2a^2}} = \sqrt{\frac{18a^4}{2a^2}} = \sqrt{9a^2} = 3a$

   (c) $\frac{\sqrt{75b^3c}}{\sqrt{3bc^3}} = \sqrt{\frac{75b^2c}{3bc^3}} = \sqrt{\frac{25b^2}{c^2}} = \frac{5b}{c}$

   (d) $\frac{\sqrt{2m^3}}{\sqrt{98m}} = \sqrt{\frac{2m^3}{98m}} = \sqrt{\frac{m^2}{49}} = \frac{m}{7}$

   (e) $\frac{\sqrt{80x^6y^2}}{\sqrt{5x^2y^4}} = \sqrt{\frac{80x^6y^2}{5x^2y^4}} = \sqrt{\frac{16x^4}{y^2}} = \frac{4x^2}{y}$

   (f) $\frac{\sqrt{36a^5b^2}}{\sqrt{4a^3b}} = \sqrt{\frac{36a^5b^2}{4a^3b}} = \sqrt{9a^2b} = 3a\sqrt{b}$

7. **Vermischte Aufgaben.** Bringen Sie unter eine Wurzel und vereinfachen Sie.

   (a) $\dfrac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt{ab^5}} = \sqrt{\dfrac{a^3b}{ab^5}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{b^4}} = \dfrac{a}{b^2}$

   (b) $\sqrt{2ac} \cdot \sqrt{\dfrac{8a}{c}} = \sqrt{\dfrac{2ac \cdot 8a}{c}} = \sqrt{16a^2} = 4a$

   (c) $\sqrt{\dfrac{9m^3}{5n}} : \sqrt{\dfrac{49m}{20n^5}} = \sqrt{\dfrac{9m^3}{5n} \cdot \dfrac{20n^5}{49m}} = \sqrt{\dfrac{36m^2n^4}{49}} = \dfrac{6mn^2}{7}$

   (d) $\dfrac{ab}{4c} \cdot \sqrt{\dfrac{16c^3}{a^2b}} = \sqrt{\dfrac{a^2b^2 \cdot 16c^3}{16c^2a^2b}} = \sqrt{bc}$

   (e) $\sqrt{\dfrac{25x^4}{8y^2}} : \sqrt{\dfrac{100x^2y}{16y^3}} = \sqrt{\dfrac{25x^4}{8y^2} \cdot \dfrac{16y^3}{100x^2y}} = \sqrt{\dfrac{25 \cdot 16 \cdot x^4 \cdot y^3}{8 \cdot 100 \cdot x^2 \cdot y^3}} = \sqrt{\dfrac{400x^4y^3}{800x^2y^3}} = \sqrt{\dfrac{x^2}{2}} = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$

   (f) $\dfrac{2x^2y}{3z} \cdot \sqrt{\dfrac{36z^4}{4x^2y^2}} = \sqrt{\dfrac{(2x^2y)^2 \cdot 36z^4}{(3z)^2 \cdot 4x^2y^2}} = \sqrt{\dfrac{4x^4y^2 \cdot 36z^4}{9z^2 \cdot 4x^2y^2}} = \sqrt{\dfrac{36x^2z^2}{9}} = \sqrt{4x^2z^2} = 2xz$

8. **Allgemeine Wurzeln.** Das Wurzelziehen oder Radizieren ist die Umkehroperation des Potenzierens. Mit dem Radizieren wird die unbekannte, nicht-negative Basis der Potenz berechnet:

   $$x^n = a \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt[n]{a} \qquad (x \geq 0)$$

   Die Zahl a welche radiziert wird, heisst **Radikand**, die Zahl n heisst **Wurzelexponent**. Das Resultat des Wurzelziehens heisst n-te **Wurzel** oder n-tes **Radikal**.

   Beispiel. *Die dritte Wurzel von* 125 *ist* 5*, da* 5 *hoch drei gleich* 125 *ist.*

   $$\sqrt[3]{125} = 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5^3 = 125$$

   Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

   (a) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

   (b) $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{\underbrace{2 \cdot 2}_{} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{}} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

   (c) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

   (d) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

   (e) $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$

   (f) $\sqrt[4]{100'000'000} = \sqrt[4]{100^4} = 100$

9. **Multiplikation und Division.** Bei der Multiplikation und Division können Wurzeln mit **gleichem Wurzelexponenten** zusammengefasst oder aufgeteilt werden:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Damit können Wurzeln von Brüchen oder Dezimalbrüchen ohne Taschenrechner berechnet werden.

Beispiel. *Die dritte Wurzel von* 0.027 *ist* 0.3*:* $\sqrt[3]{0.027} = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{3}{10} = 0.3$

(a) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{32} = 2$

(b) $\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{1296} = 6$

(c) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{16 \cdot 64} = \sqrt[5]{1024} = 4$

(d) $\sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{64 \cdot 4} = \sqrt[6]{256} = 2$

(e) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{9 \cdot 27} = \sqrt[3]{243} = 3$

(f) $\sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{256 \cdot 16} = \sqrt[4]{4096} = 8$

(g) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \frac{\sqrt[7]{1}}{\sqrt[7]{128}} = \frac{1}{\sqrt[7]{2^7}} = \frac{1}{2} = 0.5$

(h) $\sqrt[4]{0.0001} = \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{1}{\sqrt[4]{10^4}} = \frac{1}{10} = 0.1$

(i) $\sqrt[3]{0.512} = \sqrt[3]{\frac{512}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{\sqrt[3]{8^3}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0.8$

(j) $\sqrt[6]{0.000001} = \sqrt[6]{\frac{1}{1000000}} = \sqrt[6]{\frac{1}{10^6}} = \frac{\sqrt[6]{1}}{\sqrt[6]{10^6}} = \frac{1}{10} = 0.1$

(k) $\sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{\sqrt[5]{3^5}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{3}{2}$