Rationale Exponenten

Theorie

Allgemeine Wurzeln können auch als Potenzen mit rationalem Exponenten dargestellt werden.

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

Dabei gelten die bekannten Potenzgesetze:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

1. **Rationale Exponenten.** Vereinfachen Sie und stellen Sie als Potenz mit rationalem Exponenten dar.

   Beispiel. $\sqrt[4]{144} = \sqrt[4]{12^2} = 12^{\frac{2}{4}} = \boxed{12^{\frac{1}{2}}}$

   (a) $\sqrt[6]{625}$ (d) $\sqrt[3]{27}$ (g) $\sqrt[3]{64}$

   (b) $\sqrt[9]{125}$ (e) $\sqrt[4]{81}$ (h) $\sqrt[6]{4}$

   (c) $\sqrt[10]{32}$ (f) $\sqrt[5]{32}$ (i) $\sqrt[4]{36}$

2. **Als Wurzel.** Vereinfachen Sie und stellen Sie die Zahl als Wurzel mit möglichst kleinem Wurzelexponenten dar.

   Beispiel. $8^{\frac{1}{6}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \boxed{\sqrt[3]{2}}$

   (a) $25^{\frac{1}{8}}$ (d) $16^{\frac{1}{12}}$ (g) $216^{\frac{1}{6}}$

   (b) $125^{\frac{1}{6}}$ (e) $81^{\frac{1}{10}}$ (h) $32^{\frac{1}{15}}$

   (c) $27^{\frac{1}{9}}$ (f) $81^{\frac{1}{20}}$ (i) $256^{\frac{1}{8}}$

3. **Berechnen** Sie ohne Taschenrechner.

   (a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$ (d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{2} - \sqrt[3]{4}$

   (b) $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[6]{96}$ (e) $\left(\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}\right) \cdot \sqrt[6]{16}$

   (c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[12]{200}$ (f) $\left(\sqrt[4]{512} - \sqrt[4]{32} - \sqrt[4]{2}\right) \cdot \sqrt[4]{8}$

4. **Vereinfachen** Sie und stellen Sie das Resultat sowohl in Potenz- als auch in Wurzelschreibweise dar.

   (a) $3^{0.5} \cdot 9^{0.75}$ (d) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{36}$

   (b) $4^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{10}} : 8^{\frac{1}{4}}$ (e) $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{25}$

   (c) $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[20]{27}$ (f) $\sqrt[5]{\frac{8}{9}} : \sqrt[5]{\frac{27}{128}}$

5. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und stellen Sie in Potenz- und Wurzelschreibweise dar.

Beispiel. $\left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 16^{\frac{3}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = \boxed{8}$

(a) $\sqrt[4]{3^{16}}$

(b) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$

(c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$

(d) $\sqrt{\sqrt[3]{32}}$

(e) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{16}}}$

(f) $\sqrt{\sqrt{625}}$

(g) $\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[4]{8}}$

(h) $\sqrt[5]{9\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{27}}}$

(i) $\sqrt[6]{6\cdot\sqrt[4]{6\cdot\sqrt[3]{6}}}$

6. Wurzelterme. Vereinfachen Sie.

(a) $a^2\cdot\sqrt{a}$

(b) $c\cdot\sqrt[3]{c}$

(c) $\sqrt{k}\cdot\sqrt[3]{k}$

(d) $\sqrt[5]{s^3}\cdot\sqrt[5]{s^2}$

(e) $\dfrac{e}{\sqrt{e}}$

(f) $\dfrac{b^2}{\sqrt[4]{b}}$

(g) $\dfrac{\sqrt[3]{d}}{\sqrt[4]{d}}$

(h) $\dfrac{\sqrt[3]{y^2}}{y}$

(i) $\left(\sqrt[4]{a}\right)^2$

(j) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^9$

(k) $\sqrt[3]{\sqrt{u}}$

(l) $\sqrt{\sqrt[5]{z^4}}$

7. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und stellen Sie als Wurzel dar.

(a) $a^{\frac{3}{4}} : \left(a^{\frac{2}{3}} : a\right)$

(b) $\left(b^{\frac{1}{4}} : b^{\frac{1}{5}}\right)\cdot b^{\frac{1}{10}}$

(c) $c^{\frac{2}{3}}\cdot c^{\frac{3}{2}}$

(d) $d^{1.4}\cdot d^{1.5}\cdot d^{0.6}$

(e) $\sqrt[4]{e^9}\cdot\sqrt[5]{e^9}$

(f) $(2f)^{0.25}\cdot\left(8f^2\right)^{0.25}\cdot f^{0.25}$