Repetition Algebra 2

- Sie haben 75 Minuten Zeit.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Sie dürfen den Taschenrechner und das Fundamentum verwenden.
- Runden Sie Resultate auf vier Nachkommastellen genau.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Total	Note
max. Punkte	6	7	6	6	10	10	45	
Punkte								

1. Potenzgesetze. **(6P)**

Vereinfachen Sie mit Hilfe der Potenzgesetze und schreiben Sie das Ergebnis mit einem positiven Exponenten. Geben Sie mindestens einen Zwischenschritt an.

(a) $g^{-3} \cdot g^{-5}$ (2P)

Lösung:

$$g^{-3} \cdot g^{-5} = g^{-3-5} = g^{-8} = \boxed{\frac{1}{g^8}}$$

(b) $\frac{y^4}{y^7}$ (2P)

Lösung:

$$\frac{y^4}{y^7} = y^{4-7} = y^{-3} = \boxed{\frac{1}{y^3}}$$

(c) $\left(a^3\right)^{-2}$ (2P)

Lösung:

$$\left(a^3\right)^{-2} = a^{3\cdot(-2)} = a^{-6} = \boxed{\frac{1}{a^6}}$$

2. Wurzeln. **(7P)**

Vereinfachen Sie die folgenden Wurzelterme so weit wie möglich. Stellen Sie das Ergebnis mit einer einzelnen Wurzel dar.

(a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$ (2P)

Lösung:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}} = a^{\frac{6}{3\cdot 4}} = a^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{a}}$$

(b) $\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[5]{b}}$ (2P)

Lösung:

$$= \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[5]{b}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{5}}} = b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}} = b^{\frac{5}{15}-\frac{3}{15}} = b^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{b^2}$$

(c) $\sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}}$ (3P)

Lösung:

$$\sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}} = \left(c\cdot\left(c\cdot c^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(c\cdot\left(c^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(c\cdot c^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(c^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= c^{\frac{7}{8}} = \boxed{\sqrt[8]{c^7}}$$

3. Logarithmen. (6P)

(a) Vereinfachen Sie so weit wie möglich: $\log_a\left(\dfrac{1}{a^3}\right)$ (2P)

Lösung:

$$\log_a\left(\frac{1}{a^3}\right) = \log_a(1) - \log_a\left(a^3\right) = 0 - 3\cdot\log_a(a) = -3\cdot 1 = \boxed{-3}$$

(b) Welcher der Terme ist gleichwertig zu $\log\left(\frac{x}{y}\right)$? (1P)

- ○ $\dfrac{\log(x)}{\log(y)}$
- √ $\log(x) - \log(y)$
- ○ $\log(x) - \log\left(\frac{1}{y}\right)$
- ○ $\frac{1}{y}\cdot\log(x)$

(c) Lösen Sie die Gleichung nach x auf: $2^{2x+1} - 4^3 = 8$ (3P)

Lösung:

$$
\begin{aligned}
& 2^{2x+1} - 4^3 = 8 && | +4^3 \\
\iff \quad & 2^{2x+1} = 8 + 64 && | \log \\
\iff \quad & \log\left(2^{2x+1}\right) = \log(72) && | \text{Logarithmusgesetz} \\
\iff \quad & (2x+1) \cdot \log(2) = \log(72) && | : \log(2) \\
\iff \quad & 2x + 1 = \frac{\log(72)}{\log(2)} && | -1 \\
\iff \quad & 2x = \frac{\log(72)}{\log(2)} - 1 && | : 2 \\
\iff \quad & x = \frac{\log(72)}{2 \cdot \log(2)} - \frac{1}{2} && | \text{Taschenrechner} \\
\iff \quad & x \approx \boxed{2.58}
\end{aligned}
$$

Bewertung:

- Gleichung korrekt Logarithmieren **1P**
- Gleichung korrekt Auflösen und richtiges Resultat **1P**

4. Schweizer Bevölkerung. **(6P)**

2010 zählte die Schweiz 7'857'000 Einwohnerinnen und Einwohner. Gemäss dem Bundesamt für Statistik sind für den Zeitraum 2010 bis 2060 drei Szenarien der Bevölkerungsentwicklung möglich.

Berechnen Sie für jedes Szenario die jährliche Zu- oder Abnahme in Prozent anhand der Prognose für das Jahr 2060:

Lösung: Für alle Teilaufgaben muss die Wachstumsformel nach p aufgelöst werden:

$$
\begin{aligned}
& B(x) = B(0) \cdot (p+1)^t && | \text{Werte einsetzen} \\
\iff \quad & B(50) = 7.857 \cdot 10^6 \cdot (1+p)^{50} && | : 7.857 \\
\iff \quad & \frac{B(50)}{7.857 \cdot 10^6} = (1+p)^{50} && | \sqrt[50]{} \\
\iff \quad & \left(\frac{B(50)}{7.857 \cdot 10^6}\right)^{\frac{1}{50}} = 1 + p && | -1 \\
\iff \quad & \left(\frac{B(50)}{7.857 \cdot 10^6}\right)^{\frac{1}{50}} - 1 = p
\end{aligned}
$$

(a) Szenario «tief»: 6'758'000 Einwohner (2P)

Lösung:

$$= \left(\frac{6.758 \cdot 10^6}{7.857 \cdot 10^6}\right)^{\frac{1}{50}} - 1 \approx -0.003 = \boxed{-0.30\,\%}$$

(b) Szenario «mittel»: 8'992'000 Einwohner (2P)

Lösung:

$$= \left(\frac{8.992 \cdot 10^6}{7.857 \cdot 10^6}\right)^{\frac{1}{50}} - 1 \approx 0.0027 = \boxed{0.27\,\%}$$

(c) Szenario «hoch»: 11'315'000 Einwohner (2P)

Lösung:

$$= \left(\frac{11.315 \cdot 10^6}{7.857 \cdot 10^6}\right)^{\frac{1}{50}} - 1 \approx 1.0073 = \boxed{0.73\,\%}$$

5. Kapital. **(10P)**

Auf einer Bank wird mit dem Kapital von 10'000 Franken ein Sparkonto eröffnet und zu einem Zins von 3 % angelegt. Ende Jahr wird der Zins zum Kapital geschlagen.

(a) Berechnen Sie die Höhe des Kapitals nach 1, 2, 3 und 4 Jahren. (2P)

Jahre	1	2	3	4
Kapital	10'300	10'609	10'927	11'255

(b) Geben Sie die Wachstumsgleichung an, welche die Höhe des Kapitals $K(n)$ nach t Jahren beschreibt. (2P)

Lösung:

$$K(t) = K(0) \cdot (1+p)^t = 10'000 \cdot 1.03^t$$

(c) Wie gross ist das Kapital nach 20 Jahren? (2P)

Lösung:

$$K(20) = 10000 \cdot 1.03^{20} \approx 18061.1123$$

Nach 20 Jahren Beträgt das Kapital $\boxed{18'061.10 \text{ Franken}}$.

(d) Nach wie vielen Jahren ist das Kapital auf 15'000 Franken angestiegen? (2P)

Lösung:

$$\begin{aligned} & 15000 = 10000 \cdot 1.03^t && | : 10000 \\ \iff \quad & 1.5 = 1.03^t && | \log \\ \iff \quad & \log(1.5) = t \cdot \log(1.03) && | : \log(1.03) \\ \iff \quad & \frac{\log(1.5)}{\log(1.03)} = t && | \text{ Taschenrechner} \\ \iff \quad & 13.7172 \approx t \end{aligned}$$

Da der Zins jeweils Ende Jahr zum Kapital hinzugerechnet wird, wird das Kapital erst nach $\boxed{\text{14 Jahren}}$ auf 15'000 Franken angestiegen sein.

(e) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt? (2P)

Lösung:

$$\begin{aligned} & 20000 = 10000 \cdot 1.03^t && | : 10000 \\ \iff \quad & 2 = 1.03^t && | \log \\ \iff \quad & \log(2) = t \cdot \log(1.03) && | : \log(1.03) \\ \iff \quad & \frac{\log(2)}{\log(1.03)} = t && | \text{ Taschenrechner} \\ \iff \quad & 23.4498 \approx t \end{aligned}$$

Da der Zins jeweils Ende Jahr zum Kapital hinzugerechnet wird, wird sich das Kapital erst nach $\boxed{\text{24 Jahren}}$ verdoppelt haben.

6. Hasenpopulation. (10P)

Auf einer Insel werden $B(0) = 20$ Hasen ausgesetzt. Die Population verdoppelt sich alle zwei Monate.

(a) Bestimmen Sie die Grösse der Hasenpopulation nach 1, 2, 3 und 4 Jahren. (2P)

Jahre	1	2	3	4
Population	1280	81'920	$5.2 \cdot 10^6$	$3.4 \cdot 10^8$

Lösung: Bewertung:

- pro zwei korrekte Werte **1P**

(b) Geben Sie die Wachstumsgleichung $H(t)$ für die Hasenpopulation $H(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit **in Monaten** t an. Formen Sie die Gleichung so um, dass t alleine im Exponenten steht. (2P)

Lösung:

$$H(t) = 20 \cdot 2^{\frac{t}{2}} = \boxed{20 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^t = 20 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^t}$$

Bewertung:

- korrekte Wert in Basis **1P**
- korrekte Funktionsgleichung **1P**

(c) Geben Sie die Wachstumsgleichung $K(t)$ für die Hasenpopulation $K(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit **in Jahren** t an. Formen Sie die Gleichung so um, dass t alleine im Exponenten steht. (2P)

Lösung:

$$K(t) = 20 \cdot 2^{6t} = 20 \cdot \left(2^6\right)^t = \boxed{20 \cdot 64^t}$$

Bewertung:

- korrekte Wert in Basis **1P**
- korrekte Funktionsgleichung **1P**

(d) In wie vielen Monaten wird die Zahl der Hasen auf 20'000 angestiegen sein? (2P)

Lösung: Dazu wird die Wachstumsgleichung aus Teilaufgabe (b), d.h. in Monaten verwendet:

$$\begin{array}{rrl|l}
 & H(t) & = 20 \cdot 2^{\frac{t}{2}} & f(t) = 20'000 \\
\iff & 20'000 & = 20 \cdot 2^{\frac{t}{2}} & : 20 \\
\iff & 1000 & = 2^{\frac{t}{2}} & \log \\
\iff & \log(1000) & = \log\left(2^{\frac{t}{2}}\right) & \text{Logarithmengesetze} \\
\iff & 3 & = \frac{t}{2} \cdot \log(2) & \cdot 2 : \log(2) \\
\iff & \frac{6}{\log(2)} & = t & \text{Taschenrechner} \\
\iff & 19.93 & \approx t &
\end{array}$$

In $\boxed{20 \text{ Monaten}}$ wird die Population auf 20'000 angestiegen sein.

Bewertung:

- Lösungsweg **1P**
- korrektes Resultat **1P**

(e) In wie vielen Monaten wird die Zahl der Hasen auf 20 Millionen angestiegen sein? (2P)

Lösung: Dazu wird die Wachstumsgleichung aus Teilaufgabe (b), d.h. in Monaten verwendet:

$$\begin{array}{rrl|l}
 & f(t) & = 20 \cdot 2^{\frac{t}{2}} & f(t) = 20 \cdot 10^6 \\
\iff & 20 \cdot 10^6 & = 20 \cdot 2^{\frac{t}{2}} & : 20 \\
\iff & 10^6 & = 2^{\frac{t}{2}} & \log \\
\iff & \log\left(10^6\right) & = \log\left(2^{\frac{t}{2}}\right) & \text{Logarithmengesetze} \\
\iff & 6 & = \frac{t}{2} \cdot \log(2) & \cdot 2 : \log(2) \\
\iff & \frac{12}{\log(2)} & = t & \text{Taschenrechner} \\
\iff & 39.86 & \approx t &
\end{array}$$

In $\boxed{40 \text{ Monaten}}$ wird die Population auf 20 Millionen angestiegen sein.

Bewertung:

- Lösungsweg **1P**
- korrektes Resultat **1P**