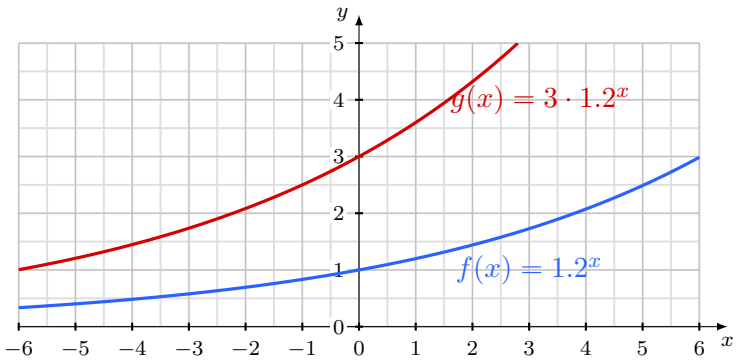
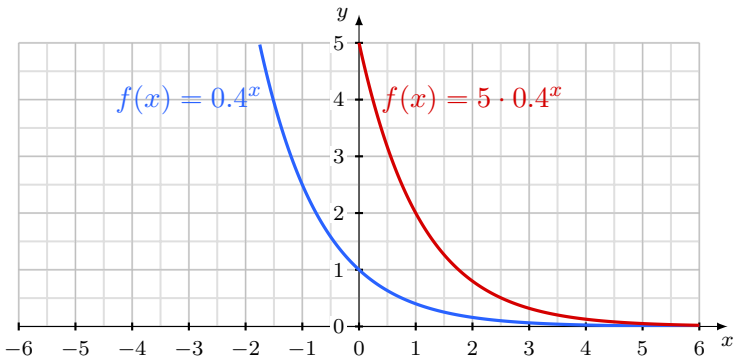
Exponential- und Logarithmusfunktionen

1. Zeichnen Sie die Graphen der Funktion f mithilfe einer Wertetabelle. Zeichnen Sie den Graphen von g durch Multiplikation der Funktionswerte von f mit dem Faktor.

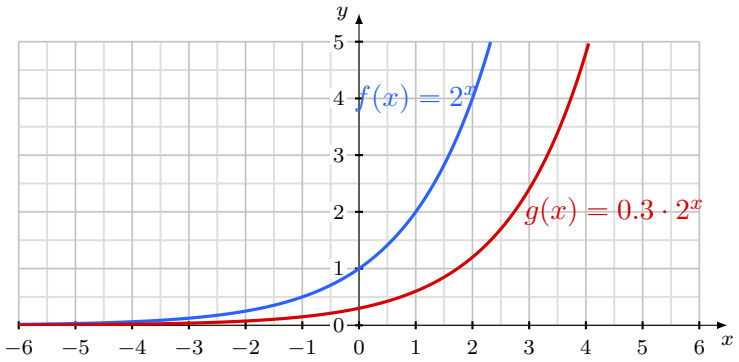
(a) $f(x) = 1.2^x$ $g(x) = 3 \cdot 1.2^x$



(b) $f(x) = 0.4^x$ $g(x) = 5 \cdot 0.4^x$



(c) $f(x) = 2^x$ $g(x) = 0.3 \cdot 2^x$



2. Der Graph der Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ verläuft durch den Punkt P. Bestimmen Sie b, geben Sie die vollständige Funktionsgleichung an und geben Sie an, ob die Funktion steigt oder fällt.

(a) $P(1/3)$

Lösung:

$$\begin{array}{rrl} & y &= b^x \\ \iff & 3 &= b^1 \end{array} \quad \Big| \text{ einsetzen}$$

Die Funktionsgleichung lautet

$$f(x) = 3^x$$

Die Funktion steigt.

(b) $P(1/0.25)$

Lösung:

$$\begin{array}{rrl} & y &= b^x \\ \iff & 0.25 &= b^1 \end{array} \quad \Big| \text{ einsetzen}$$

Die Funktionsgleichung lautet

$$f(x) = 0.25^x = \left(\tfrac{1}{4}\right)^x$$

Die Funktion fällt.

(c) $P(2/6)$

Lösung:

$$\begin{array}{rrl} & y &= b^x \\ \iff & 6 &= b^2 \\ \iff & \sqrt{6} &= b \end{array} \quad \Big| \begin{array}{l} \text{einsetzen} \\ \sqrt{} \end{array}$$

Die Funktionsgleichung lautet

$$f(x) = \sqrt{6}^x$$

Die Funktion steigt.

(d) $P(-1/3)$

Lösung:

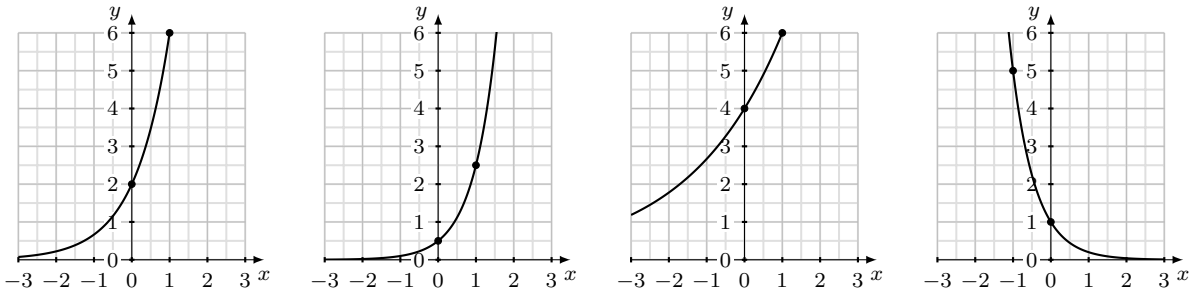
$$\begin{array}{rrl} & y &= b^x \\ \iff & 3 &= b^{-1} \\ \iff & 3b &= 1 \\ \iff & b &= \dfrac{1}{3} \end{array} \quad \Big| \begin{array}{l} \text{einsetzen} \\ \cdot a \\ :\, 3 \\ \end{array}$$

Die Funktionsgleichung lautet

$$f(x) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^x$$

Die Funktion fällt.

3. Die Graphen stellen Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ dar. In den markierten Punkten schneiden die Graphen das Koordinatengitter. Geben Sie die vollständige Funktionsgleichung an.



(a) (b) (c) (d)

Lösung:

(a) $f(x) = 2 \cdot 3^x$

(b) $f(x) = 0.5 \cdot 5^x$

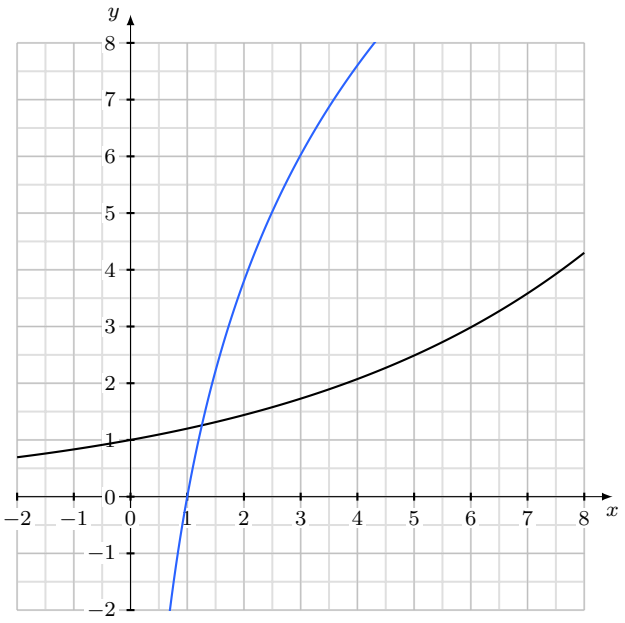
(c) $f(x) = 4 \cdot 1.5^x$

(d) $f(x) = 0.2^x$

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1.2^x$.

(a) Bestimmen Sie den Graphen der Umkehrfunktion geometrisch durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.

(b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion.



Lösung: Vorgehen mit Exponentialgleichung:

$$\begin{array}{rrl|l} & y &= 1.2^x & \text{Variablen tauschen} \\ \iff & x &= 1.2^y & \log \\ \iff & \log(x) &= \log\left(1.2^y\right) & \text{Logarithmengesetze} \\ \iff & \log(x) &= y \cdot \log(1.2) & \log(1.2) \\ \iff & \dfrac{\log(x)}{\log(1.2)} &= y & \end{array}$$

Vorgehen mit Definition Logarithmus:

$$x = 1.2^y \qquad \Longrightarrow \qquad y = \log_{1.2}(x)$$

Die Umkehrfunktion lautet:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{\log(x)}{\log(1.2)} = \log_{1.2}(x)}$$

5. Bestimmen Sie die Gleichung der Umkehrfunktion.

(a) $f(x) = 5^x$

Lösung:

$$f^{-1}(x) = \log_5(x)$$

(b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Lösung:

$$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$$

(c) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

Lösung:

$$f^{-1}(x) = \log_{\frac{2}{5}}(x)$$

(d) $f(x) = \sqrt{3}^x$

Lösung:

$$f^{-1}(x) = \log_{\sqrt{3}}(x)$$

(e) $f(x) = 100^x$

Lösung:

$$f^{-1}(x) = \log_{100}(x)$$

(f) $f(x) = \log_4(x)$

Lösung:

$$f^{-1}(x) = 4^x$$

(g) $f(x) = \log_{2.5}(x)$

Lösung:

$$f^{-1}(x) = 2.5^x$$

(h) $f(x) = \log_{0.6}(x)$

Lösung:

$$f^{-1}(x) = 0.6^x$$

(i) $f(x) = \log(x)$

Lösung:

$$f^{-1}(x) = 10^x$$

6. Bestimmen Sie a, sodass der Graph der Funktion $f(x) = \log_a(x)$ durch den Punkt P verläuft.

(a) $P(9/3)$

Lösung:

$$a = \sqrt[3]{9} \qquad f(x) = \log_{\sqrt[3]{9}}(x)$$

(b) $P(100/2)$

Lösung:

$$a = 10 \qquad f(x) = \log_{10}(x)$$

(c) $P(3/9)$

Lösung:

$a = \sqrt[9]{3}$ $f(x) = \log_{\sqrt[9]{3}}(x)$

(d) $P(0.5/-1)$

Lösung:

$a = 2$ $f(x) = \log_2(x)$

(e) $P\left(\sqrt{5}/\frac{1}{2}\right)$

Lösung:

$a = 5$ $f(x) = \log_5(x)$

(f) $P\left(\sqrt[3]{4}/\frac{2}{3}\right)$

Lösung:

$a = 2$ $f(x) = \log_2(x)$