Repetition Funktionen 2

- Sie haben 60 Minuten Zeit.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Sie dürfen den Taschenrechner und das Fundamentum verwenden.
- Runden Sie Resultate auf vier Nachkommastellen genau.

Aufgabe	1	2	3	4	Total	Note
max. Punkte	4	9	9	8	30	
Punkte						

1. Funktionsgleichung bestimmen. (4P)

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$, die durch die Punkte $A(0/2)$ und $B(4/4)$ verläuft.

Lösung: Damit beide Punkte auf dem Funktionsgraphen liegen, müssen die Koordinaten der Punkte die Funktionsgleichung erfüllen.

Wird der Punkt $A(0/2)$ eingesetzt, so kann a bestimmt werden (der y-Achsenabschnitt):

$$\begin{array}{rrl} & f(x) &= a \cdot b^x \quad \big| \; A \text{ einsetzen} \\ \iff & 2 &= a \cdot b^0 \quad \big| \; b^0 = 1 \\ \iff & 2 &= a \end{array}$$

Also ist $a = 2$. Jetzt wird der Punkt B eingesetzt:

$$\begin{array}{rrl} & f(x) &= 2 \cdot b^x \quad \big| \; B \text{ einsetzen} \\ \iff & 4 &= 2 \cdot b^4 \quad \big| \; :2 \\ \iff & 2 &= b^4 \quad \big| \; \sqrt[4]{} \\ \iff & \sqrt[4]{2} &= b \end{array}$$

Damit ist $b = \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$ und die Funktionsgleichung lautet (drei Varianten, alle korrekt):

$$\boxed{f(x) = 2 \cdot \left(\sqrt[4]{2}\right)^x = 2 \cdot \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^x = 2 \cdot 2^{\frac{x}{4}}}$$

Bewertung:

- Koordinaten in Gleichung einsetzen **1P**
- erste Gleichung auflösen **1P**
- zweite Gleichung auflösen **1P**
- korrekte Funktionsgleichung **1P**

2. Funktionseigenschaften. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$. **(9P)**

(a) Um was für eine Art Funktion handelt es sich? (1P)

◯ Lineare √ **Potenz-** ◯ Exponential- ◯ Logarithmus- Funktion

(b) Füllen Sie die Wertetabelle aus, indem Sie die Funktionswerte für die angegebenen x-Werte **auf eine Dezimalstelle genau** berechnen. (2P)

(c) Zeichnen Sie die Funktionsgraphen anhand der Wertetabelle. (2P)

(d) Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion an. (1P)

Lösung: Die reellen Zahlen ohne die Null.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(e) Geben Sie die Wertemenge der Funktion an. (1P)

Lösung: Die negativen reellen Zahlen.

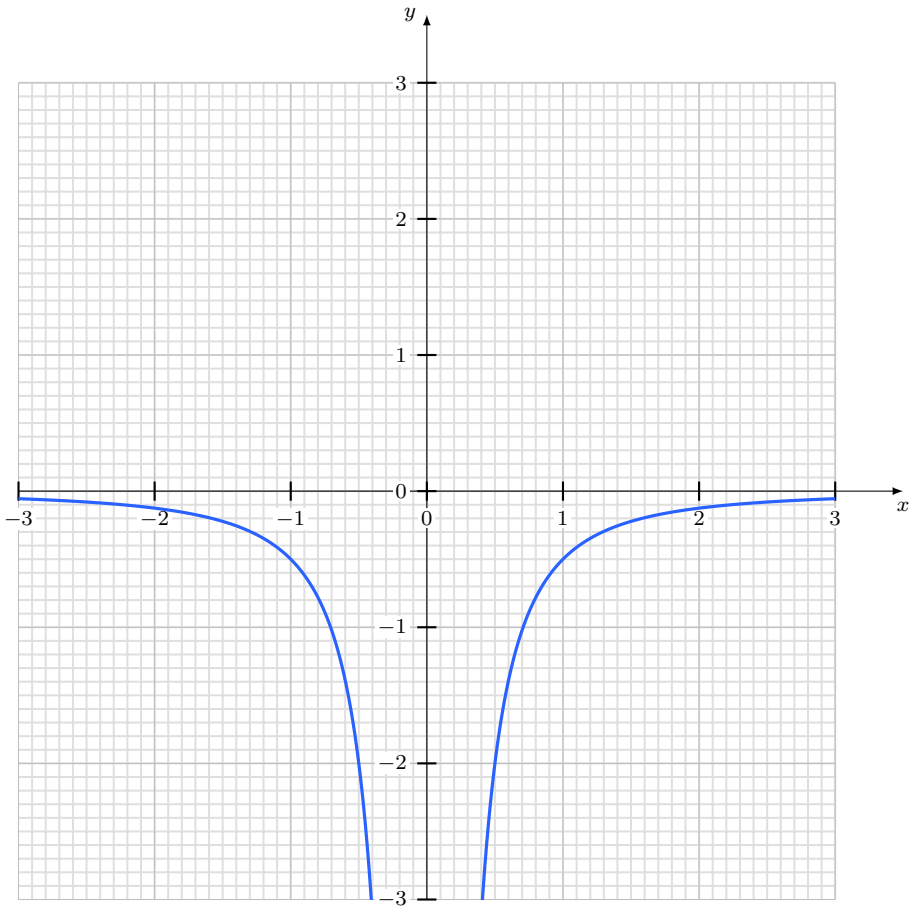
$$\mathbb{B} = \mathbb{R}^-$$

(f) Beschreiben Sie eine allfällige Symmetrie des Funktionsgraphen an und stellen Sie diese im Diagramm anhand des Punkts mit der x-Koordinate 3 im Diagramm dar. (2P)

Lösung: Der Graph ist spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse (**1P**).

Korrekt und präzise gezeichnet **1P**

x	$y = f(x)$
-3.0	-0.1
-2.0	-0.1
-1.0	-0.5
-0.8	-0.8
-0.5	-2.0
-0.4	-3.1
0.0	$n.def.$
0.4	-3.1
0.5	-2.0
0.8	-0.8
1.0	-0.5
2.0	-0.1
3.0	-0.1



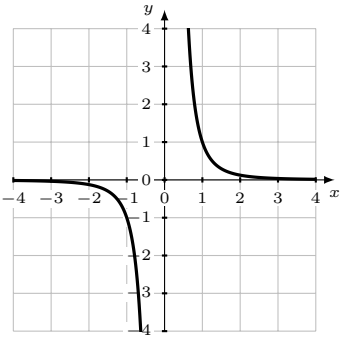
3. Zuordnung. Ordnen Sie die Funktionsgleichungen den Funktionsgraphen zu, indem Sie die passende Funktionsgleichung in den Kasten unter dem jeweiligen Graphen schreiben. (9P)

$f(x) = x^3$ $f(x) = x^{-3}$ $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

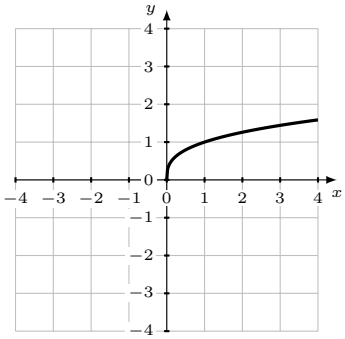
$f(x) = -x^3$ $4f(x) = -x^{-3}$ $f(x) = -x^{\frac{1}{3}}$

$f(x) = 3^x$ $f(x) = -3^x$ $f(x) = \log_3(x)$

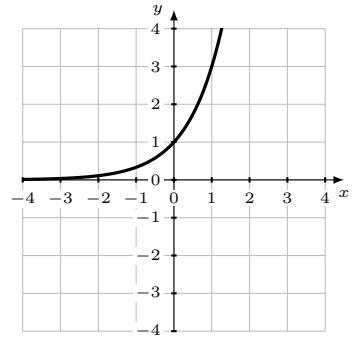
$f(x) = x^4$ $f(x) = x^{-4}$ $f(x) = x$



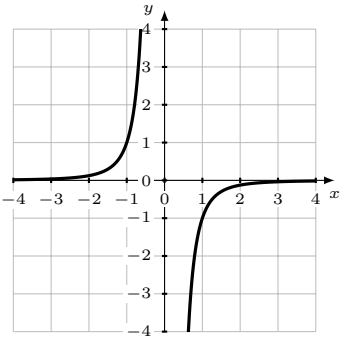
$f(x) = x^{-3}$



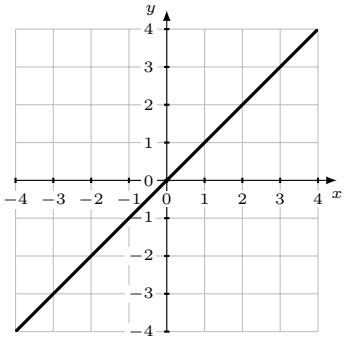
$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$



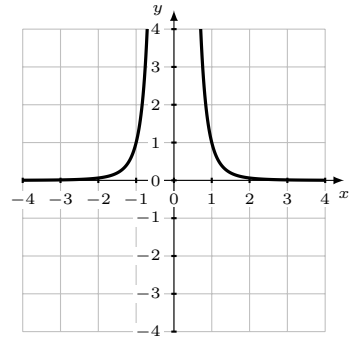
$f(x) = 3^x$



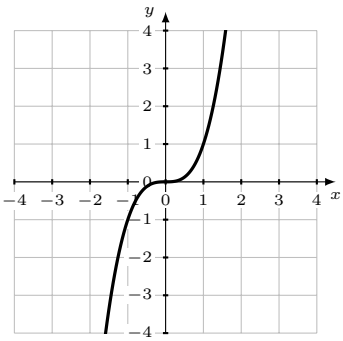
$f(x) = -x^{-3}$



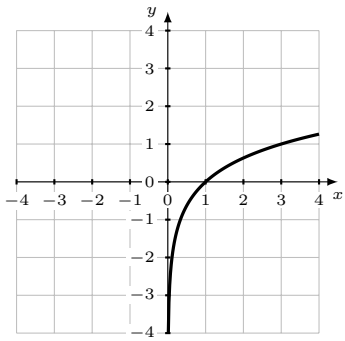
$f(x) = x$



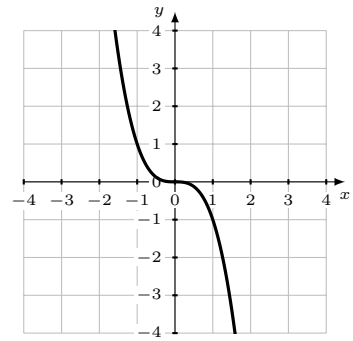
$f(x) = x^{-4}$



$f(x) = x^3$



$f(x) = \log_3(x)$



$f(x) = -x^3$

4. Umkehrfunktion. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - 3$. **(8P)**

(a) Bestimmen Sie durch algebraische Umformungen die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion f^{-1}. Halten Sie die einzelnen Schritte fest. (3P)

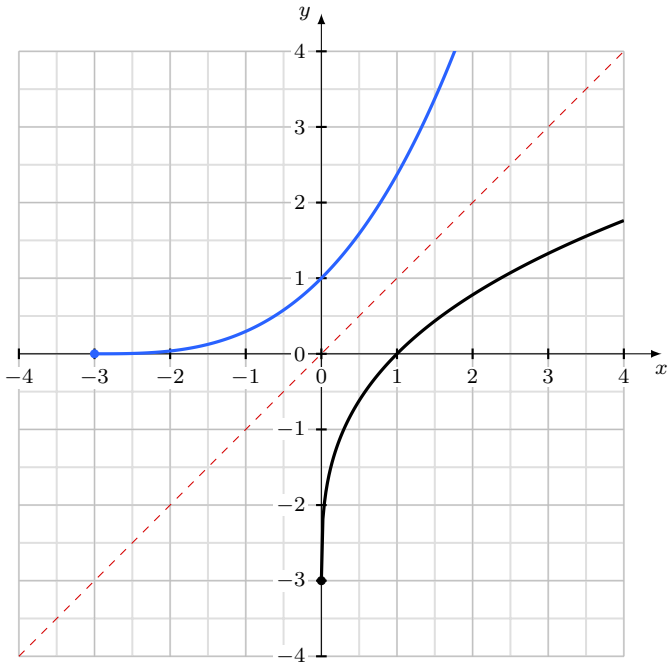
Lösung:

$$
\begin{array}{rrl|l}
 & y &= 3 \cdot \sqrt[3]{x} - 1 & \text{Variablen tauschen} \\
\iff & x &= 3 \cdot \sqrt[3]{y} - 3 & +3 \\
\iff & x + 3 &= 3 \cdot \sqrt[3]{y} & : 3 \\
\iff & \frac{x}{3} + 1 &= \sqrt[3]{y} & {}^{3} \\
\iff & \left(\frac{x}{3} + 1\right)^3 &= y &
\end{array}
$$

Die Gleichung der Umkehrfunktion lautet

$$\boxed{f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^3}$$

(b) Bestimmen Sie den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} geometrisch im vorgegebenen Koordinatensystem. (2P)



(c) Geben Sie Definitions- und Wertemenge von f sowie der Umkehrfuntion f^{-1} an. (3P)

Lösung: In der Wurzel dürfen keine negativen Zahlen stehen, also ist die Definitionsmenge D_f von f die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen:

$$D_f = \mathbb{R}_0^+$$

Da der Wert der Wurzel nicht negativ sein kann, ist der kleinste mögliche Wert von f die Zahl –3, also ist die Wertemenge W_f von f die Menge aller reellen Zahlen

grösser oder gleich –3:

$$W_f = \{z \mid z \in \mathbb{R} \text{ und } z \geq -3\}$$

Bei der Umkehrfunktion sind Definitions- und Wertemenge vertauscht:

$$D_{f^{-1}} = W_f = \{z \mid z \in \mathbb{R} \text{ und } z \geq -3\} \qquad W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}_0^+$$