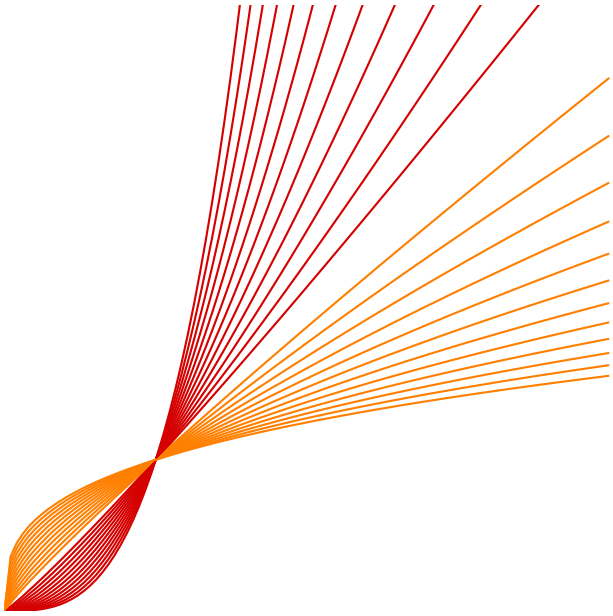
Funktionen 2

Stefan Rothe

09.03.2026



Inhaltsverzeichnis

1 Funktionseigenschaften **2**
2 Konstante Funktionen **7**
3 Lineare Funktionen **8**
4 Potenzfunktionen **9**
5 Exponential- und Logarithmusfunktionen **11**

© Gymnasium Kirchenfeld
Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)

1 Funktionseigenschaften

1.1 Gleichung und Graph

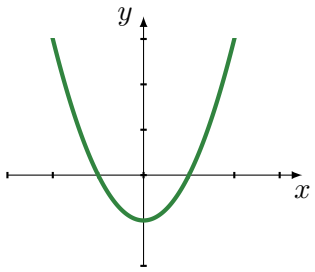
Funktionen können grundsätzlich auf drei unterschiedliche Arten dargestellt werden: als **Funktionsgleichung**, als **Wertetabelle** und als **Graph**.

$$f(x) = x^2 - 1$$

Funktionsgleichung

x	$f(x)$
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

Wertetabelle



Graph

Graph. Der Graph der Funktion f entsteht, indem für jedes x in der Definitionsmenge der Funktionswert $f(x)$ ermittelt wird und der Punkt $(x/f(x))$ in das Koordinatensystem eingetragen wird.

Eine wichtige Frage bei Funktionen ist es, wie der Graph zu einer vorgegebenen Funktionsgleichung aussieht. Mit Hilfe von verschiedenen **Funktionseigenschaften** lässt sich der Verlauf des Graphen besser verstehen. Hier werden die folgenden Eigenschaften von Funktionen betrachtet:

- Definitionsmenge
- Wertemenge
- Nullstellen
- y-Achsenabschnitt
- Symmetrien
- Periodizität

Diese Eigenschaften werden im folgenden anhand von Beispielen erläutert.

1.2 Definitionsmenge

Die Definitionsmenge einer Funktion ist die Menge aller reellen Zahlen, für welche die Funktion einen Wert besitzt.

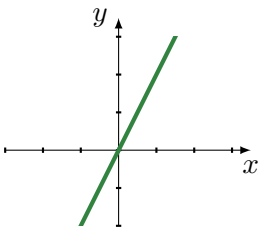
An Definitionsmenge kann abgelesen werden, an welchen Orten auf der **x-Achse** der Graph der Funktion vorhanden ist und wo er **Definitionslücken** aufweist.

Beispiel. *Die Funktion $f(x) = 2x$ hat die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$, da der Funktionswert für jede reelle Zahl x berechnet werden kann.*

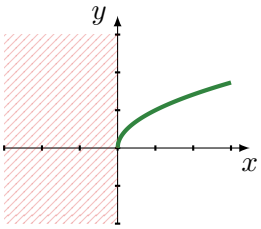
Die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ hat die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}_0^+$, da die Wurzel von negativen Zahlen nicht definiert ist.

Die Funktion $h(x) = \frac{1}{x-1}$ hat die Definitionsmenge $= \mathbb{R} \setminus \{1\}$, da für $x = 1$ der Nenner Null wird und der Funktionswert somit nicht definiert ist.

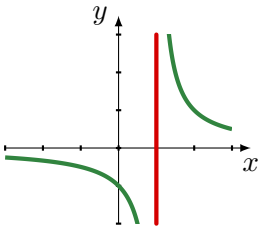
Die Graphen der Funktionen sind hier abgebildet. Die Definitionslücken sind rot markiert. Dort kann der Funktionsgraph sicherlich nicht durchgehen.



$f(x) = 2x$
$D = \mathbb{R}$



$g(x) = \sqrt{x}$
$D = \mathbb{R}_0^+$



$h(x) = \frac{1}{x-1}$
$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

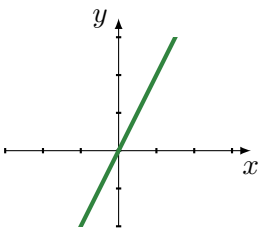
1.3 Wertemenge

Die Wertemenge ist die Menge aller reellen Zahlen, welche als Funktionswert der Funktion auftauchen können.

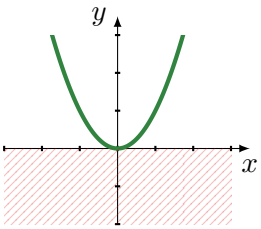
Beispiel. *Die Funktion $f(x) = 2x$ hat die Wertemenge $W = \mathbb{R}$, da jede mögliche reelle Zahl ein Wert der Funktion ist*

Die Funktion $g(x) = x^2$ hat die Wertemenge $W = \mathbb{R}_0^+$, da die Funktion nie negative Werte annehmen kann.

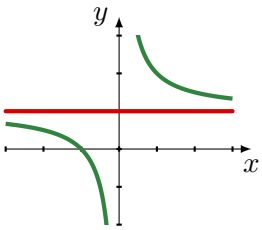
Die Funktion $h(x) = \frac{1}{x} + 1$ hat die Wertemenge $W = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, da die Funktion nie den Wert 1 annehmen kann.



$f(x) = 2x$
$W = \mathbb{R}$



$g(x) = x^2$
$W = \mathbb{R}_0^+$



$h(x) = \frac{1}{x} + 1$
$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1.4 Nullstellen / Nullpunkte

Nullstellen. Die Nullstellen einer Funktion f sind die Werte von x, für welche gilt:

$$f(x) = 0$$

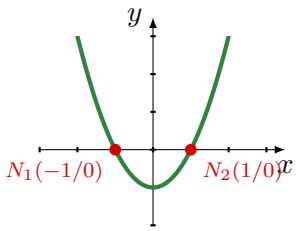
Nullpunkte. Die Nullpunkte einer Funktion f sind die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der x-Achse.

Die Nullstellen sind somit die x-Koordinaten der Nullpunkte. Die y-Koordinaten der Nullpunkte sind immer gleich Null.

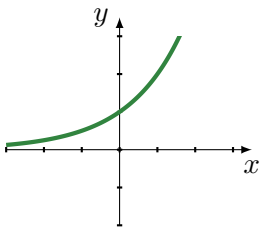
Beispiel. *Die Funktion $f(x) = x^2 - 5$ hat zwei Nullpunkte $N_1(-1/0)$ und $N_2(1/0)$.*

Die Funktion $g(x) = 2^x$ hat keine Nullpunkte. Weil die Wertemenge $W = R^+$ nur die positiven reellen Zahlen umfasst, kann der Funktionsgraph die x-Achse nie schneiden.

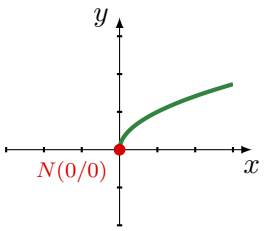
Die Funktion $h(x) = \sqrt{x}$ hat den Nullpunkt $N(0/0)$, da $\sqrt{0} = 0$.



$f(x) = x^2 - 1$



$g(x) = 2^x$



$h(x) = \sqrt{x}$

1.5 y-Achsenabschnitt

y-Achsenabschnitt. Der y-Achsenabschnitt einer Funktion f ist

$$f(0)$$

Der y-Achsenabschnitt ist also die y-Koordinate des Schnittpunkts des Funktionsgraphen mit der y-Achse.

Beispiel. *Der y-Achsenabschnitt von $f(x) = x^2 - 1$ ist*

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1$$

Der y-Achsenabschnitt von $g(x) = 2^x$ ist

$$g(0) = 2^0 = 1$$

Der y-Achsenabschnitt von $h(x) = \sqrt{x}$ ist

$$h(0) = \sqrt{0} = 0$$

1.6 Spiegelsymmetrie bezüglich y-Achse

Spiegelsymmetrie. Der Graph der Funktion f ist spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse, falls für alle Werte x gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

Dieser Zusammenhang soll an dem folgenden Beispiel verdeutlicht werden. Zunächst wird beliebige eine Position auf der x-Achse x gewählt. Nun wird der Punkt P ermittelt, der an dieser Stelle auf dem Funktionsgraph liegt. Er hat die Koordinaten $P(x/f(x))$. Nun wird der Punkt an der y-Achse gespiegelt. Der Spiegelpunkt hat die gleiche x-Koordinate wie der Originalpunkt, die y-Koordinate wird negiert. Somit hat der Spiegelpunkt die Koordinaten

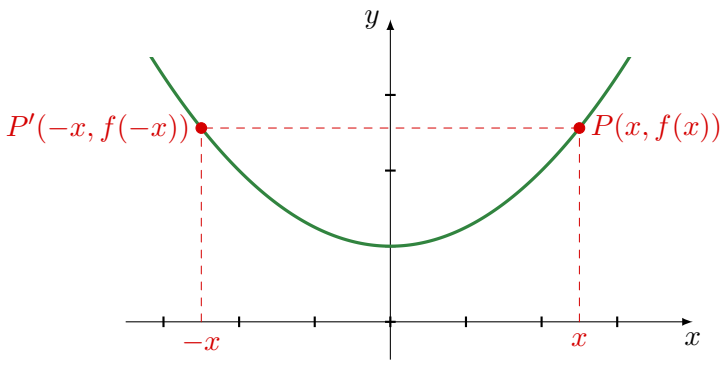
$$P'(-x/f(x))$$

Wenn aber der Spiegelpunkt auch auf dem Funktionsgraph liegen soll, muss er die Koordinaten

$$P'(-x/f(-x))$$

haben. Die y-Koordinate des Punkts P' ist immer gleich, also gilt

$$f(x) = f(-x)$$



Beispiel. *$f(x) = x^2$ ist spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse, da*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

1.7 Punktsymmetrie bezüglich Ursprung

Punktsymmetrie. Der Graph der Funktion f ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs, falls für alle Werte x gilt:

$$-f(x) = f(-x)$$

Dieser Zusammenhang soll an dem folgenden Beispiel verdeutlicht werden. Zunächst wird beliebige eine Position auf der x-Achse x gewählt. Nun wird der Punkt P ermittelt, der an dieser Stelle auf dem Funktionsgraph liegt. Er hat die Koordinaten $P(x/f(x))$. Nun wird der Punkt am Ursprung gespiegelt. Beim Spiegelpunkt werden beide Koordinaten negiert. Somit hat der Spiegelpunkt die Koordinaten

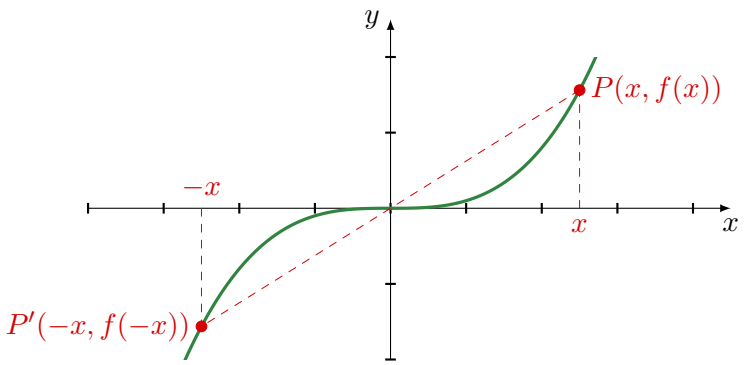
$$P'(-x/-f(x))$$

Wenn aber der Spiegelpunkt auch auf dem Funktionsgraph liegen soll, muss er die Koordinaten

$$P'(-x/f(-x))$$

haben. Die y-Koordinate des Punkts P' ist immer gleich, also gilt

$$-f(x) = f(-x)$$



Alle Potenzfunktionen mit einem ungeraden Exponenten sind punktsymmetrisch bezüglich dem Ursprung.

Beispiel. *$f(x) = x^3$ ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs, da*

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

2 Konstante Funktionen

2.1 Definition

Konstante Funktion. Eine Funktion mit der folgenden Funktionsgleichung wird als konstante Funktion bezeichnet.

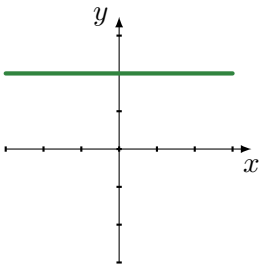
$$f(x) = a \qquad a \in \mathbb{R}$$

In der Funktionsgleichung einer konstanten Funktion kommt die Funktionsvariable x nicht vor. Somit liefert eine konstante Funktion für jede Stelle x den gleichen Wert zurück, nämlich a.

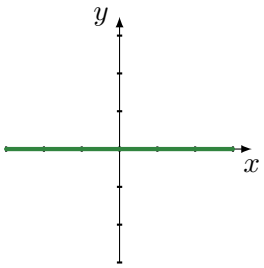
2.2 Graph

Der Graph einer konstanten Funktion ist eine **Gerade**, welche parallel zur x-Achse verläuft, also **horizontal** ist.

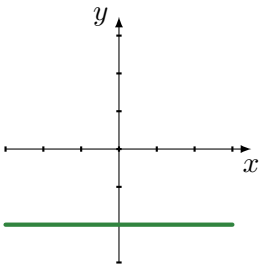
Im Spezialfall $f(x) = 0$ liegt der Graph der Funktion auf der x-Achse.



$f(x) = 2$



$f(x) = 0$



$f(x) = -2$

2.3 Eigenschaften

Definitionsmenge: Konstante Funktionen sind für alle reellen Zahlen definiert, also

$$D = \mathbb{R}$$

Wertemenge: Die Wertemenge der konstanten Funktion $f(x) = a$ enthält nur eine Zahl:

$$W = \{a\}$$

Symmetrien: Konstante Funktionen sind spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Funktion $f(x) = 0$ ist ausserdem punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

Nullstellen: Konstante Funktionen haben keine Nullstellen. Die Ausnahme bildet die Funktion $f(x) = 0$, welche unendlich viele Nullstellen hat.

3 Lineare Funktionen

3.1 Definition

Lineare Funktion. Eine Funktion mit der folgenden Funktionsgleichung wird als lineare Funktion bezeichnet.

$$f(x) = mx + q \qquad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad q \in \mathbb{R}$$

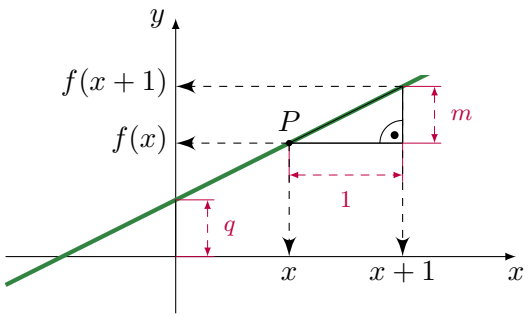
Dabei ist m die **Steigung** der Funktion und q ist deren **y-Achsenabschnitt**.

Der Spezialfall $m = 0$ wird dabei ausgeschlossen. Für $m = 0$ ergibt sich die Funktion $f(x) = 0 \cdot x + q = q$, was eine konstante Funktion ist.

3.2 Graph

Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**. Die Steigung m gibt an, um wie viel der Graph ansteigt, wenn die x-Koordinaten um eins vergrössert wird.

Der y-Achsenabschnitt gibt an, wo der Graph die y-Achse schneidet. Im Spezialfall $q = 0$ verläuft die Gerade durch den Ursprung.



3.3 Eigenschaften

Definitionsmenge: Lineare Funktionen sind für alle reellen Zahlen definiert, also

$$D = \mathbb{R}$$

Wertemenge: Lineare Funktionen haben alle reellen Zahlen als Werte, also

$$W = \mathbb{R}$$

Symmetrien: Lineare Funktionen mit $q = 0$ sind punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

Nullstellen: Lineare Funktionen haben genau eine Nullstelle.

4 Potenzfunktionen

Potenzfunktion. Eine Funktion mit der folgenden Funktionsgleichung wird als Potenzfunktion bezeichnet:

$$f(x) = a \cdot x^k \qquad k \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Die Exponenten $k = 0$ und $k = 1$ sind dabei nicht erlaubt. Für den Exponenten $k = 0$ ergibt sich die Funktion

$$f(x) = a \cdot x^0 = a$$

Dies ist eine konstante Funktion und somit keine Potenzfunktion. Für $k = 1$ ergibt sich die Funktion

$$f(x) = a \cdot x^1 = ax$$

Die ist eine lineare Funktion und somit ebenfalls keine Potenzfunktion.

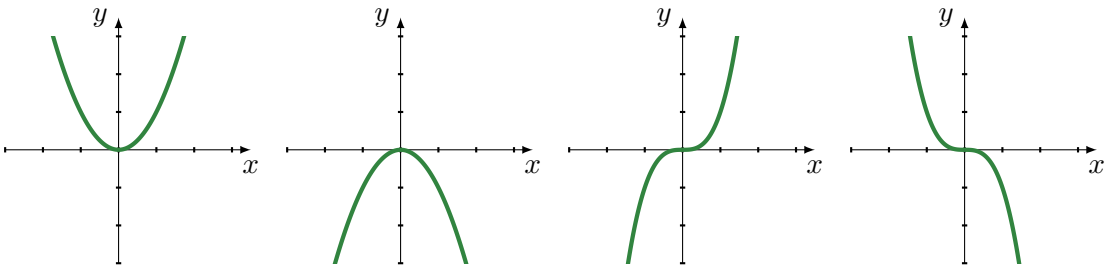
Je nach Art des Exponenten haben Potenzfunktionen unterschiedliche Graphen und Eigenschaften.

4.1 Natürliche Exponenten

In diesem Fall ist der Exponent eine positive natürliche Zahl, die Potenzfunktion sieht so aus:

$$f(x) = a \cdot x^k \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$$

Der Graph von Potenzfunktionen nimmt abhängig von k und a folgende Formen an:



$f(x) = x^2$	$f(x) = -x^2$	$f(x) = x^3$	$f(x) = -x^3$
$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
k gerade	k gerade	k ungerade	k ungerade

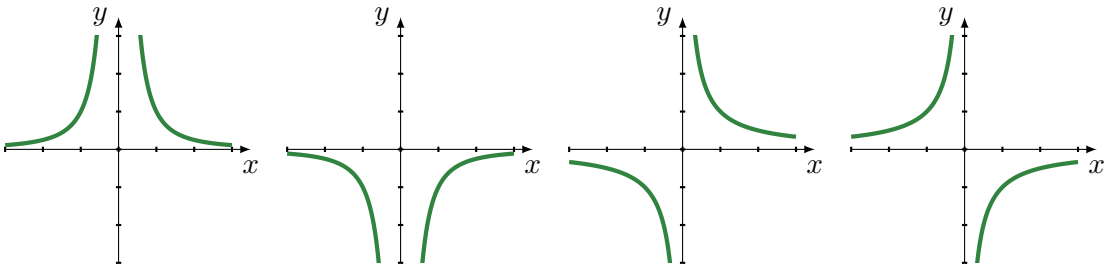
Potenzfunktionen mit geradem Exponenten sind spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse.
Potzenzfunktionen mit ungeradem Exponenten sind punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

4.2 Negative Exponenten

In diesem Fall ist der Exponent eine negative ganze Zahl, die Potenzfunktion sieht so aus:

$$f(x) = a \cdot x^{-k} = a \cdot \frac{1}{x^k} \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Der Graph von Potenzfunktionen nimmt abhängig von k und a folgende Formen an:



$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
$a > 0$
k gerade

$f(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$a < 0$
k gerade

$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$
$a > 0$
k ungerade

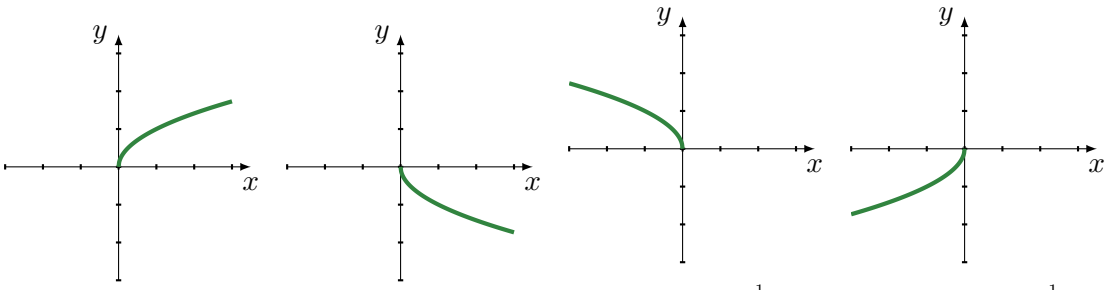
$f(x) = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$
$a < 0$
k ungerade

4.3 Rationale Exponenten

In diesem Fall ist der Exponent eine rationale Zahl, d.h. ein Bruch, und die Potenzfunktion sieht so aus:

$$f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{k}} = a \cdot \sqrt[k]{x} \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Hier ändert sich die Form des Funktionsgraphen mit der Veränderung von k nicht grundlegend. Da jedoch Wurzeln nur für Positive Zahlen definiert sind, entsteht ein an der y-Achse gespiegelter Funktionsgraph, wenn x durch $-x$ ersetzt wird.



$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$
$a > 0$

$f(x) = -x^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{x}$
$a < 0$

$f(x) = (-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-x}$
$a > 0$

$f(x) = -(-x)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{-x}$
$a < 0$

5 Exponential- und Logarithmusfunktionen

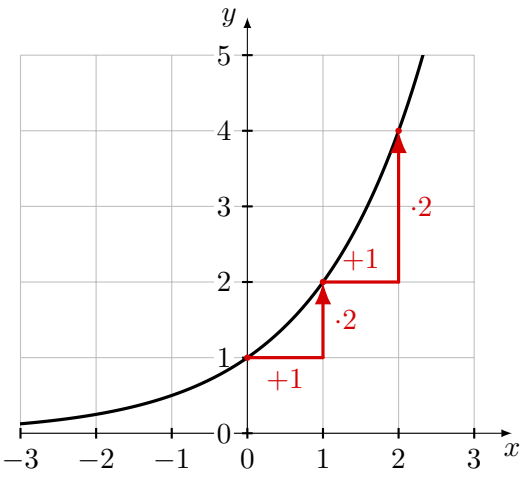
5.1 Exponentialfunktion

Die allgemeine Exponentialfunktion hat die Form

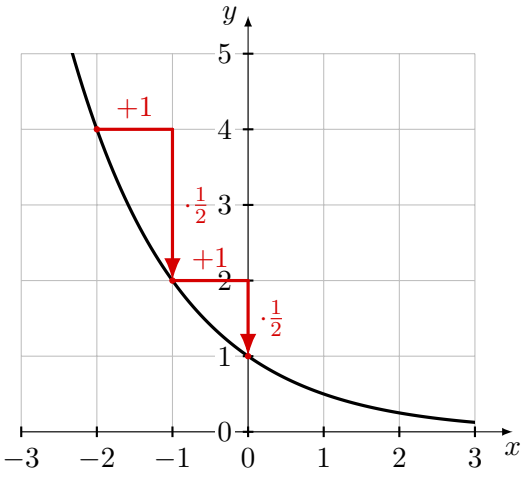
$$f(x) = a \cdot b^x \qquad b \in \mathbb{R}^+$$

Dabei ist die **Basis** b eine **positive Zahl**, welche angibt, um welchen Faktor sich der Funktionswert verändert, wenn x um eins erhöht wird. Die Basis wird auch **Wachstumfaktor** genannt.

Beispielsweise verdoppelt sich bei der Funktion $f(x) = 2^x$ der Funktionswert jedes Mal, wenn x um Eins erhöht wird. Bei der Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ halbiert sich der Funktionswert mit jedem Schritt. Die Exponentialfunktion wächst also, wenn die Basis grösser als Eins ist. Sie nimmt ab, wenn die Basis kleiner als Eins ist.

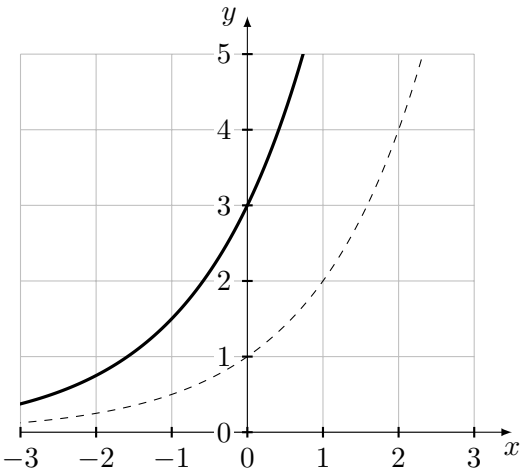


$f(x) = 2^x$

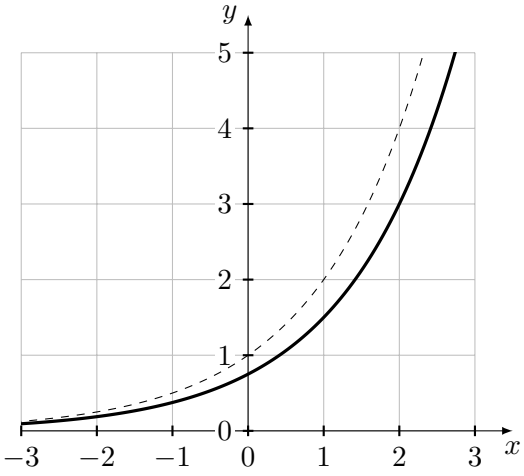


$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Der Parameter a ist ein Streckfaktor. Er bestimmt, wo die Funktion die y-Achse schneidet.



$f(x) = 3 \cdot 2^x$



$f(x) = \frac{3}{4} \cdot 2^x$

5.2 Logarithmusfunktion

Die allgemeine Logarithmusfunktion hat die Form

$$f(x) = \log_b(x) \qquad b \in \mathbb{R}^+$$

Das der Logarithmus die Umkehroperation des Exponentierens ist, ist die Logarithmusfunktion die Umkehroperation der Exponentialfunktion. Der Graph der Logarithmusfunktion entsteht somit durch Spiegelung and der ersten Winkelhalbierenden.

