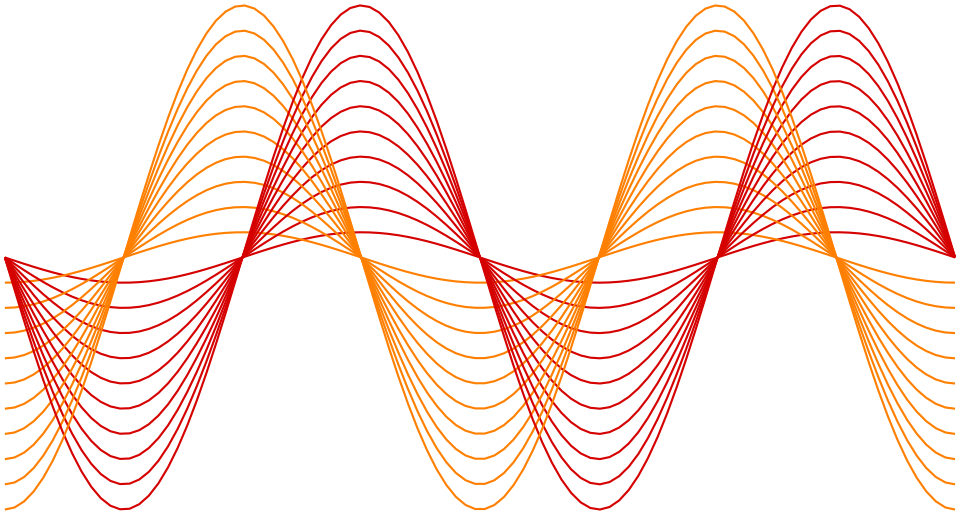
Trigonometrische Funktionen

Stefan Rothe

26.04.2025



Inhaltsverzeichnis

1 Bogenmass **2**
2 Definition am Einheitskreis **3**
3 Funktionseigenschaften **7**
4 Allgemeine Sinusfunktion **10**

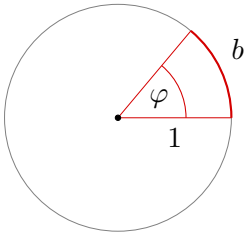
1 Bogenmass

1.1 Winkelmessung

Bisher haben wir Winkel in Grad gemessen. Der Vollwinkel beträgt dabei 360°. Die Einteilung des Vollwinkels in 360 ist aber willkürlich.

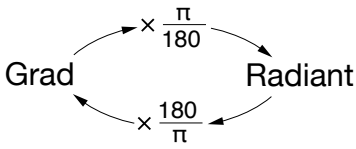
Grundlage für die Messung von Winkeln im Bogenmass bildet die Berechnung der Bogenlänge eines Kreissektors. Diese ist proportional zum Winkel. Beim Einheitskreis beträgt der Umfang des ganzen Kreises 2π. Diese Länge wird neu als Mass für den Vollwinkel genommen. Die anderen Winkel erhalten proportional ein entsprechendes Mass. So ist der halbe Winkel π, der rechte Winkel ist $\frac{\pi}{2}$.

Definition: Das **Bogenmass** eines Winkels φ ist die Länge b des Bogens über dem Winkel auf dem Einheitskreis.



1.2 Umrechnung

Um einen Winkel von Grad nach Radiant umzurechnen, wird der Winkel durch 180 geteilt und mit π multipliziert. Um einen Winkel von Radiant nach Grad umzurechnen, wird der Winkel mit 180 multipliziert und durch π geteilt:



TI-30X MathPrint: Winkelmass einstellen

- Radiant als Winkelmass einstellen:

  mode, **RADIAN** wählen, enter drücken, clear drücken.

- Grad als Winkelmass einstellen:

  mode, **GRAD** wählen, enter drücken, clear drücken.

2 Definition am Einheitskreis

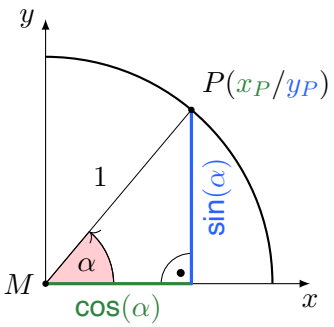
2.1 Definition am Dreieck

Bisher haben wir sin und cos am rechtwinkligen Dreieck definiert als Verhältnis von Gegenkathete bzw. Ankathete und Hypotenuse. Im rechtwinkligen Dreieck können aber Winkel höchtens 90° gross werden. Es ist also mit dieser Definition nicht möglich, den Sinus oder Kosinus eines grösseren Winkels zu berechnen.

Deshalb werden Sinus und Kosinus nun mit Hilfe des Einheitskreises definiert. Damit ist es möglich, die Winkelfunktionen für beliebige Winkel zu definieren.

2.2 Definition am Einheitskreis

Auf dem Einheitskreis wird ein Punkt P eingezeichnet. Der Punkt wird senkrecht nach unten mit der x-Achse verbunden und direkt mit dem Mittelpunkt M. So entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gerade den Koordinaten des Punkts P entsprechen.



Da die Hypotenuse des Dreiecks die Länge 1 hat, ergibt sich gemäss bisheriger Definition für Sinus und Kosinus:

$$x_P = \frac{\cos(\alpha)}{1} = \cos(\alpha) \qquad y_P = \frac{\sin(\alpha)}{1} = \sin(\alpha)$$

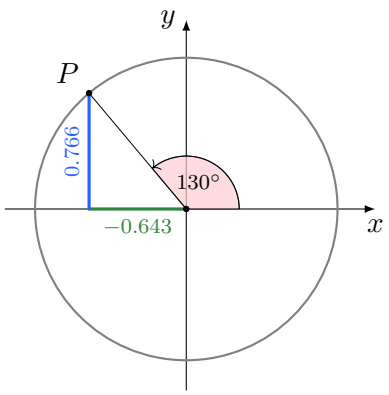
Daraus wird die neue Definition von Sinus und Kosinus am Einheitskreis abgeleitet.

Definition Sinus und Kosinus. Der Punkt $P(P_x/P_y)$ ist ein Punkt auf dem Einheitskreis, der Winkel α ist der Winkel zwischen der x-Achse und dem Strahl, der vom Mittelkpunkt M aus durch P geht. Dann ist der Sinus von α die y-Koordinate von P und der Kosinus von α ist die x-Koordinate von P.

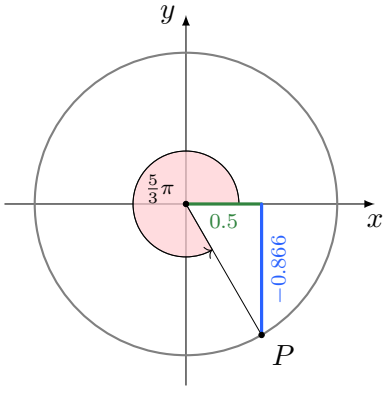
$$\sin(\alpha) := y_P \qquad \cos(\alpha) := x_P$$

Mit dieser Definition können Sinus und Kosinus für beliebige Winkel ermittelt werden.

Beispiel. *Sinus und Kosinus von* 130° *und* $\frac{5}{3}\pi$ rad *sollen ermittelt werden.*



$\alpha = 130°$



$\alpha = \frac{5}{3}\pi$ rad

Die Winkel werden ausgehend von der x-Achse im Gegenuhrzeigersinn abgemessen. Der Punkt P wird an der entsprechenden Position auf dem Einheitskreis eingetragen. Durch Messen der x- und y-Koordinate des Punkts können Kosinus und Sinus ermittelt werden.

$$\cos(130°) \approx -0.643 \qquad \sin(130°) \approx 0.766$$
$$\cos\left(\tfrac{5}{3}\pi \text{ rad}\right) = 0.5 \qquad \sin\left(\tfrac{5}{3}\pi \text{ rad}\right) \approx -0.866$$

Es fällt auf, dass Sinus und Kosinus auch negative Werte annehmen können.

2.3 Satz des Pythagoras

Am rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras. Wird dieser auf das betrachtete Dreieck im Einheitskreis angewendet, gilt:

$$x_P^2 + y_P^2 = 1$$

Werden nun x_P und y_P gemäss Definition durch Kosinus und Sinus ersetzt, so ergibt sich der folgende Satz.

Trigonometrischer Satz des Pythagoras. Für Sinus und Kosinus gilt:

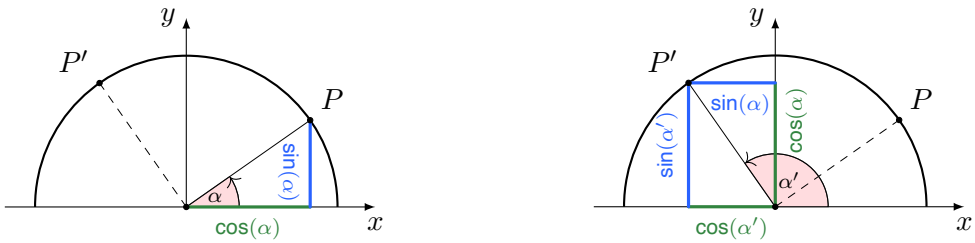
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Hinweis: Als Abkürzung wird das Quadrat bei Sinus und Kosinus direkt hinter sin bzw. cos geschrieben. Es gilt (analog für cos):

$$\sin^2(\alpha) = \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = (\sin(\alpha))^2$$

2.4 Drehung um 90°

Wenn der Punkt P um 90° um den Ursprung rotiert, dann entspricht die x-Koordinate des Bildpunkts P' der negativen y-Koordinate von P. Die y-Kooridnate des Bildpunkts ist gleich der x-Koordinaten von P.



Werden die Koordinaten mit Sinus und Kosinus ausgedrückt, ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\cos(\alpha') = -\sin(\alpha) \qquad \sin(\alpha') = \cos(\alpha)$$

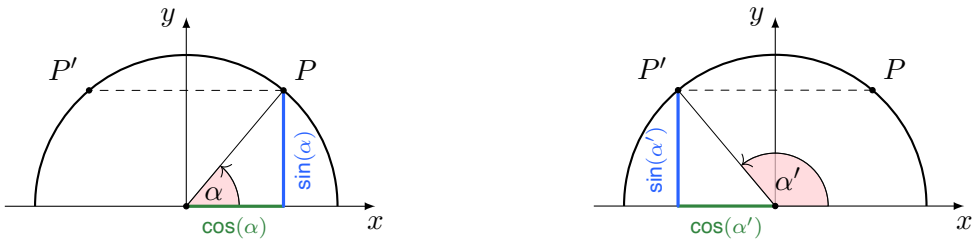
Wegen der Drehung um 90° ist $\alpha' = \alpha + 90°$. Damit ergeben sich folgende Formeln für Sinus und Kosinus:

Drehung um 90°. Für alle Winkel α gilt:

$$\cos(\alpha + 90°) = -\sin(\alpha) \qquad \sin(\alpha + 90°) = \cos(\alpha)$$

2.5 Spiegelung an y-Achse

Nun betrachten wir, was passiert, wenn der Punkt P an der y-Achse gespiegelt wird. Der Bildpunkt P' hat die gleiche y-Koordinate wie P, die x-Koordinate wird negiert.



Übertragen auf Kosinus und Sinus bedeutet dies:

$$\cos(\alpha') = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\alpha') = \sin(\alpha)$$

Ausserdem ist ersichtlich, dass sich die Winkel α und α' zu 180° ergänzen. Also ist $\alpha' = 180° - \alpha$. Damit ergeben sich die folgenden Gleichungen:

Spiegelung an y-Achse. Für alle Winkel α gilt:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$$

2.6 Periodizität

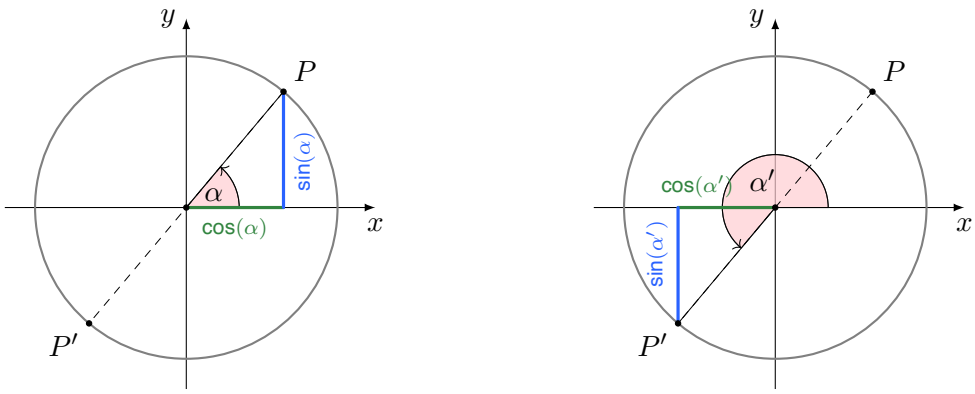
Ein Winkel grösser 360° beziehungsweise 2π rad am Einheitskreis bedeutet, dass der Punkt P mehr als eine ganze Umdrehung auf dem Kreis gemacht hat. Sinus und Kosinus bleiben aber für jede Umdrehung gleich. Diese Überlegung führt zu folgenden Formeln:

Periodizität. Für Sinus und Kosinus gelten folgende Eigenschaften:

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 360°) \qquad \sin(\alpha) = \sin(\alpha + 360°)$$

2.7 Punktspiegelung

Nun betrachten wir, was passiert, wenn der Punkt P am Ursprung gespiegelt wird. Dabei ergeben sich die Koordinaten des Bildpunkts P', indem das Vorzeichen der entsprechenden Koordinaten von P gewechselt wird.



Übertragen auf Kosinus und Sinus bedeutet dies:

$$\cos(\alpha') = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\alpha') = -\sin(\alpha)$$

Da eine Punktspiegelung identisch zu einer Drehung um 180° ist, gilt $\alpha' = \alpha + 180°$. Damit ergeben sich die folgenden Formeln:

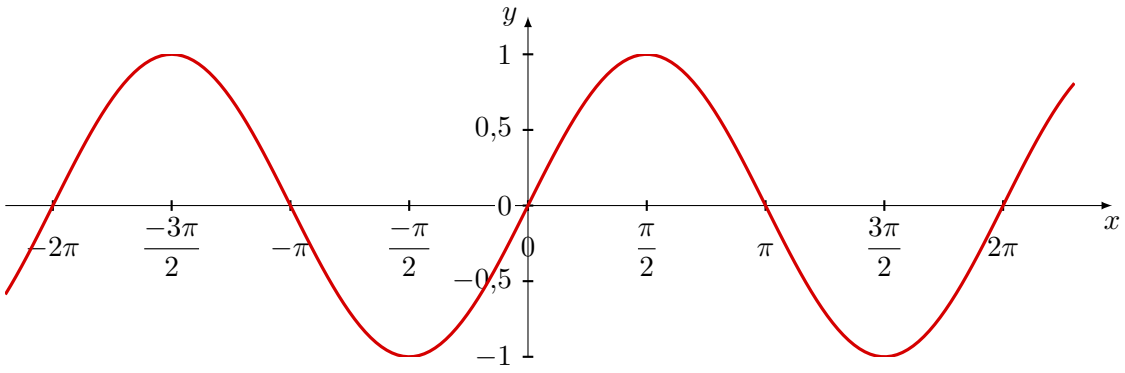
Punktspiegelung. Für alle Winkel α gilt:

$$\cos(\alpha + 180°) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\alpha + 180°) = -\sin(\alpha)$$

3 Funktionseigenschaften

3.1 Sinusfunktion

Die Sinusfunktion ist die Funktion, welche den Sinus $\sin(x)$ in Abhängigkeit des Winkels x berechnet. Dabei wird x in Radians gemessen. Der Definitionsbereich der Sinusfunktion ist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, der Wertebereich ist das Intervall $[-1; 1]$.



Die Sinusfunktion ist eine **periodische Funktion**. Das bedeutet, dass sich die Funktionswerte in regelmässigen Abständen wiederholen. Der kleinste Abstand, in dem sich die Werte wiederholen, heisst **Periode** der Funktion. Die Sinusfunktion hat die Periode 2π.

Die Periode der Sinusfunktion kann wie folgt als Gleichung ausgedrückt werden:

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$

Die Sinusfunktion ist eine **ungerade Funktion**. Das bedeutet, dass der Funktionsgraph punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist. Diese Eigenschaft kann wie folgt als Gleichung ausgedrückt werden:

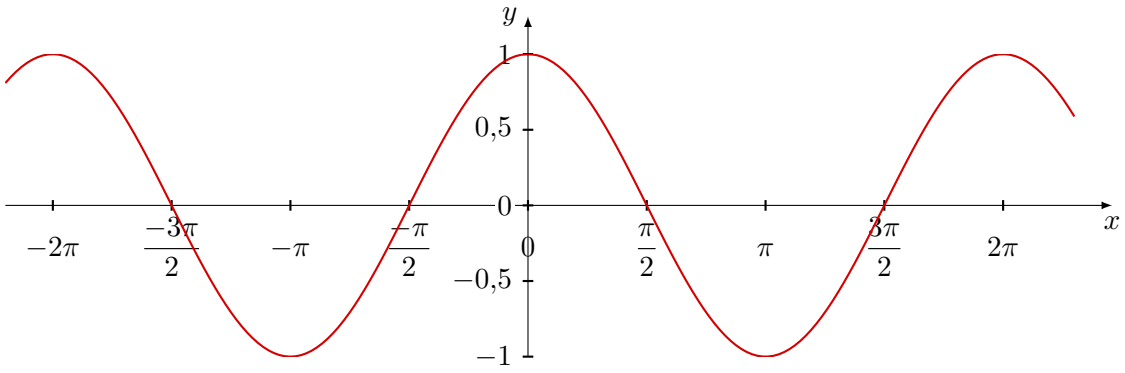
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Einige wichtige Funktionswerte der Sinusfunktion sind:

x in Radiant	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad
x in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3.2 Kosinusfunktion

Die Kosinusfunktion ist die Funktion, welche den Kosinus cos(x) in Abhängigkeit des Winkels x berechnet. Dabei wird x in Radians gemessen. Der Definitionsbereich der Kosinusfunktion ist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, der Wertebereich ist das Intervall $[-1;1]$.



Die Kosinusfunktion ist eine **periodische Funktion**. Das bedeutet, dass sich die Funktionswerte in regelmässigen Abständen wiederholen. Der kleinste Abstand, in dem sich die Werte wiederholen, heisst **Periode** der Funktion. Die Kosinusfunktion hat die Periode 2π.

Die Periode der Kosinusfunktion kann wie folgt als Gleichung ausgedrückt werden:

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$$

Die Kosinusfunktion ist eine **gerade Funktion**. Das bedeutet, dass der Funktionsgraph spiegelsymmetrsisch bezüglich der y-Achse ist. Diese Eigenschaft kann wie folgt als Gleichung ausgedrückt werden:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Einige wichtige Funktionswerte der Kosinusfunktion sind:

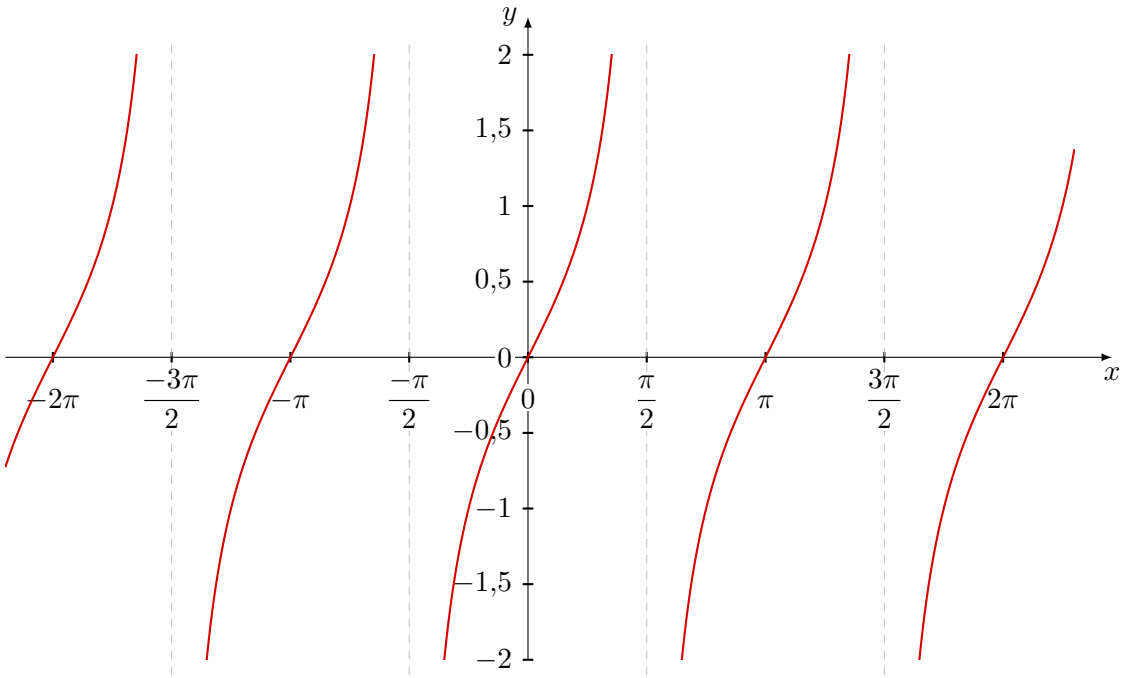
x in Radiant	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad
x in Grad	0°	30°	45°	60°	90°
tan(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

3.3 Tangensfunktion

Die Tangensfunktion ist die Funktion, welche den Tangens $\tan(x)$ in Abhängigkeit des Winkels x berechnet. Dabei wird x in Radians gemessen. Die Tangensfunktion dort nicht definiert, wo der Kosinus des Winkels gleich Null wird. Also lautet der Definitionsbereich der Tangensfunktion:

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Das der Tangens jeden möglichen Wert annehmen kann, ist der Wertebereich der Tangensfunktion die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.



Die Tangensfunktion ist eine periodische Funktion mit der Periode π.

Die Tangensfunktion ist eine **ungerade Funktion**. Der Funktionsgraph ist also punktsymmetrisch bezüglich dem Ursprung. Dies wird mit der folgenden Funktionsgleichung ausgedrückt:

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

Einige wichtige Funktionswerte der Tangensfunktion sind:

x in Radiant	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad
x in Grad	0°	30°	45°	60°	90°
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.def.

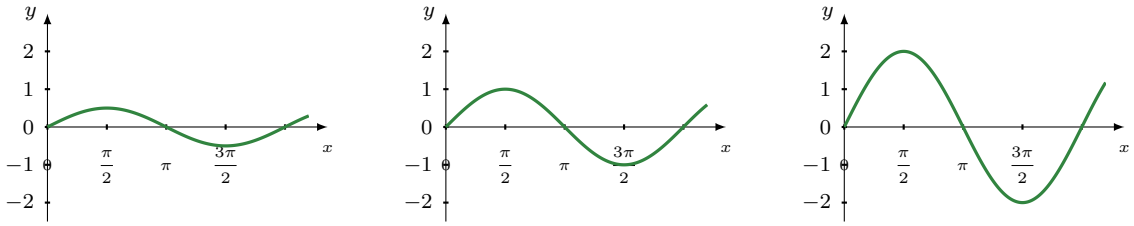
4 Allgemeine Sinusfunktion

4.1 Harmonische Schwingung

In der Natur gibt es viele Vorgänge, welche auf kreisförmige Bewegungen zurückzuführen sind. Solche Bewegungen entsprechen gleichförmigen Bewegung eines Punktes auf einem Kreis. Das bedeutet, dass der Winkel α sich gleichmässig mit der Zeit ändert.

4.2 Amplitude

Die Amplitude a einer Schwingung ist die maximale Auslenkung in eine Richtung. Die folgenden Diagramme zeigen Sinusfunktionen mit einer Amplitude von $\frac{1}{2}$, 1 und 2.



$\frac{1}{2} \cdot \sin(x)$ $\sin(x)$ $2 \cdot \sin(x)$

In der Funktionsgleichung ist die Amplitude der Faktor a, mit welchem die ursprüngliche Sinusfunktion multipliziert wird:

$$f(t) = a \cdot \sin(t)$$

Bei Schallwellen hängt die Lautstärke von der Amplitude ab: je grösser die Amplitude, desto lauter erscheint der Ton.

Die Amplitude wird bestimmt, indem die Differenz der maximalen Auslenkungen halbiert wird.

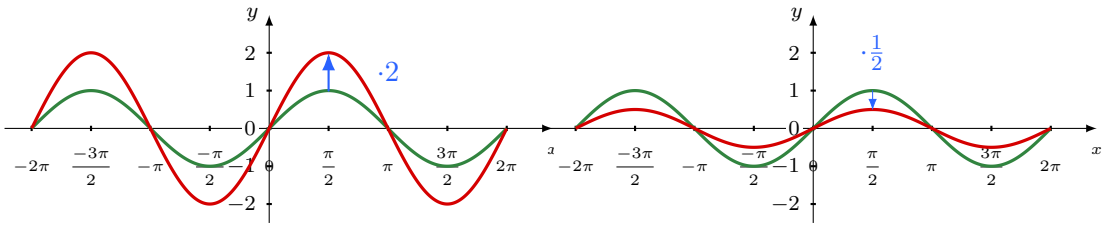
Beispiel. *Die mittlere Tagestemperatur in Helsinki schwankt zwischen* –4.9 °C *im Februar und* 18.3 °C *im Juli.*

Die Amplitude der Temperaturschwankung beträgt $\frac{1}{2} \cdot (18.3 - (-4.9)) = \frac{1}{2} \cdot 23.2 = 11.6\,°\text{C}$

4.3 Auswirkungen der Parameter

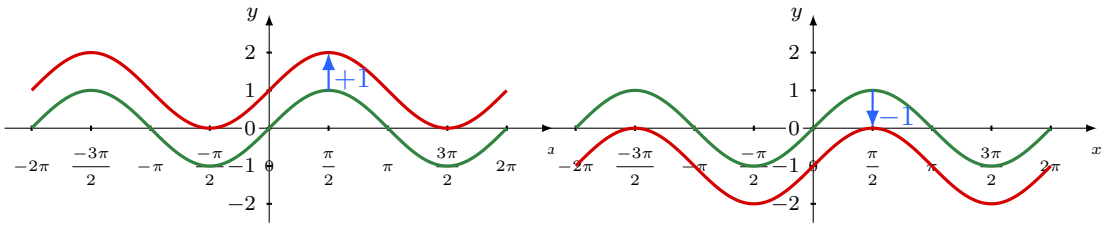
Die allgemeine Sinusfunktion lautet: $f(x) = a \cdot \sin(\omega \cdot x + c) + d$

Streckung in y-Richtung Mit dem Faktor a wird die Funktion in y-Richtung gestreckt:



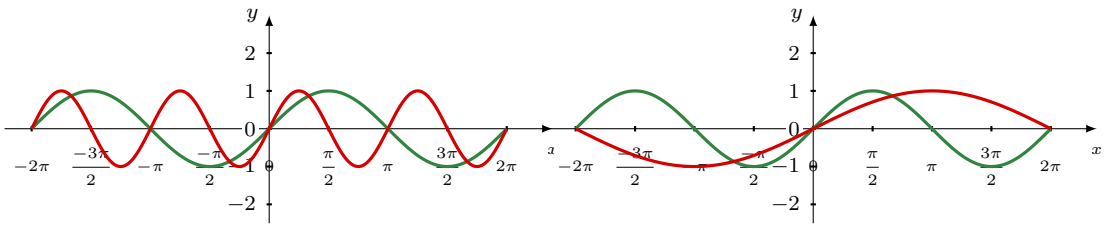
$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = 2 \cdot \sin(x)$ $f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(x)$

Verschiebung in y-Richtung Mit dem Faktor d wird die Funktion in y-Richtung verschoben:



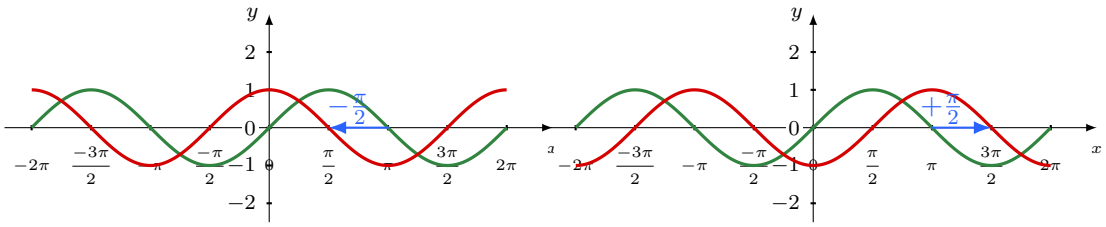
$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin(x) + 1$ $f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin(x) - 1$

Streckung in x-Richtung Mit dem Faktor ω wird die Funktion in x-Richtung gestreckt.



$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin(2 \cdot x)$ $f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$

Verschiebung in x-Richtung Mit dem Faktor c wird die Funktion in x-Richtung verschoben.



$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$