

Aptus Estudios

De la evidencia a la práctica

*Serie: ¿Cómo aprenden las personas?*

# **PRACTICAR CÓMO CONECTAR LOS CONOCIMIENTOS: UN MARCO DE REFERENCIA PARA ORIENTAR EL DISEÑO INSTRUCCIONAL PARA DESARROLLAR LA COMPRENSIÓN EN CAMPOS ACADÉMICOS COMPLEJOS**

---

Publicado por Aptus en octubre de 2022

Documento original de



  
FUNDACIÓN EDUCACIONAL  
Hernán Briones Gorostiaga



**Aptus**  
POTENCIADORA EDUCACIONAL  
SP Red de Colegios | Fundación Hernando Sotari





# PRACTICAR CÓMO CONECTAR LOS CONOCIMIENTOS: UN MARCO DE REFERENCIA PARA ORIENTAR EL DISEÑO INSTRUCCIONAL PARA DESARROLLAR LA COMPREENSIÓN EN CAMPOS ACADÉMICOS COMPLEJOS

Laura Fries<sup>1</sup> • Ji Y. Son<sup>2</sup> • Karen B. Givvin<sup>1</sup> • James W. Stigler<sup>1</sup>

Publicado en línea: 17 de agosto de 2020  
© Los autores 2020  
Traducción al español realizada por Aptus.org en 2022

## Abstract

La ciencia sugiere que la comprensión conceptual de los expertos se caracteriza por representaciones mentales coherentes que presentan un alto nivel de conectividad entre sí. Este artículo propone que los educadores pueden facilitar este nivel de comprensión por medio del *marco teórico sobre cómo practicar la conexión entre conocimientos (practising connections framework)*: un marco de referencia práctico para guiar un diseño instruccional que logre desarrollar una comprensión profunda y conocimientos transferibles en campos académicos complejos. Comenzamos revisando lo que sabemos gracias a las ciencias del aprendizaje sobre la naturaleza y el desarrollo de los conocimientos transferibles, sosteniendo que la *interconectividad* es la clave para consolidar esquemas mentales coherentes que subyacen a la comprensión profunda y las habilidades transferibles. Luego, proponemos características de la enseñanza que podrían facilitar de forma única una comprensión profunda y sugerimos que las conexiones entre los *conceptos fundamentales y las representaciones clave* de un campo y los *contextos y prácticas del mundo* deben explicitarse y practicarse a lo largo del tiempo para que los estudiantes desarrollen una comprensión coherente. Ilustramos este enfoque *sobre cómo practicar la conexión entre conocimientos* para el desarrollo instruccional en el contexto de un nuevo libro de texto virtual interactivo e introductorio de estadística desarrollado por los autores.

**Palabras clave:** Aprendizaje en campos complejos – Enseñanza – Teoría del aprendizaje – Educación estadística – Diseño instruccional – Transferencia

## Introducción

A medida que avanzamos con rapidez por el siglo XXI, nuestros objetivos para la educación se vuelven más y más ambiciosos. Aunque quizás haya habido un momento en que aprender hechos y procedimientos por mera memorización fuera un resultado suficiente de la educación, ese ciertamente no es adecuado para nuestros tiempos.

✉ James W. Stigler [Stigler@psych.ucla.edu](mailto:Stigler@psych.ucla.edu)

<sup>1</sup> Departamento de Psicología, University of California at Los Angeles, Box 951563, CA 90095-1563 Los Angeles, EEUU.

<sup>2</sup> Departamento de Psicología, California State University, Los Angeles, CA, EEUU.

Cualquiera que tenga un teléfono puede buscar en Google para encontrar información que haya olvidado. Pero las lagunas en el pensamiento y la comprensión no se llenan fácilmente con búsquedas por internet. Cada vez más, valoramos a los ciudadanos que pueden pensar críticamente, coordinar ideas diferentes, resolver problemas novedosos y aplicar su conocimiento en todo tipo de situaciones que no se parezcan a las que hayan encontrado anteriormente. En resumen, queremos formar estudiantes con una comprensión profunda de los campos complejos que constituyen el panorama del conocimiento moderno (National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine 2018).

Aunque en las ciencias del aprendizaje tenemos una larga tradición de investigación relacionada con el problema de cómo enseñar para la comprensión y la transferencia, aún existe una brecha amplia entre, por un lado, la investigación y, por el otro, el diseño y la implementación de programas educacionales (Hiebert et al. 2002; Lagemann y Shulman 1999; Levin y O'Donnell 1999; Robinson 1998; Strauss 1998; Toth et al. 2000). Es probable que las razones de esta brecha sean varias, entre las cuales seguramente están las condiciones bajo las que se realizan muchas investigaciones. La comprensión y el conocimiento profundo de un campo se desarrollan lentamente, durante periodos largos de tiempo, especialmente en aquellos campos que son difíciles de aprender (Ericsson 2006). La investigación científica, por el otro lado, suele realizarse en laboratorios (Richland et al. 2007), en los que los participantes son estudiantes de pregrado que generalmente están disponibles durante alrededor de una hora.

Debido a esta limitación, gran parte de la investigación se ha concentrado en la forma en que los estudiantes aprenden datos y procedimientos aislados – “elementos” de conocimiento – que pueden dominarse y evaluarse en periodos de tiempo relativamente cortos (e.g., Goldwater and Schalk 2016). Hemos aprendido mucho de estas investigaciones; específicamente, sabemos mucho sobre cómo ayudar a los estudiantes a aprender elementos de conocimientos. Sin embargo, sabemos mucho menos sobre cómo ayudar a los estudiantes a conectar esos elementos en una representación coherente y flexible de un campo complejo (van Merriënboer 1997). Además, existe cada vez más evidencia de que el dominio de elementos aislados de información no es suficiente por sí solo para producir el tipo de comprensión flexible que tienen los expertos de un campo de conocimiento (National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine 2018; van Merriënboer 1997).

El excesivo énfasis en el dominio de elementos aislados de información se ha exacerbado con la aparición de tecnologías de aprendizaje modernas, especialmente con las plataformas de aprendizaje adaptables. Estas plataformas funcionan representando los campos de conocimiento como grandes listados de habilidades y conceptos a dominar y luego usan algoritmos sofisticados para entregarles recursos de aprendizaje a los estudiantes en base a su dominio previo de habilidades y conceptos, en una progresión de aprendizaje predeterminada (Tseng et al. 2008). Aunque tales tecnologías pueden ser una parte importante de la caja de herramientas disponible a los educadores y diseñadores instruccionales, en nuestras propias clases vemos estudiantes que dominan todos los elementos de información (u objetivos de aprendizaje micro) pero no consiguen comprender en profundidad el campo de conocimiento. Los expertos no perciben su dominio de conocimiento con foco en sus elementos; lo ven en base a su estructura profunda, lo que hace que sus conocimientos sean flexibles y transferibles (Bransford and Stein 1984; Ericsson, Hoffman, & Kozbelt, 2018; Ginsburg 1977; Hiebert and Carpenter 1992).

En este artículo, nuestro objetivo es presentar un sistema —el marco de referencia sobre *cómo practicar la conexión entre conocimientos*— para orientar el diseño instruccional para el logro de la comprensión en campos complejos. Basamos nuestro marco en las ciencias del aprendizaje, pero descubrimos que debíamos ir más allá de la literatura de investigación actual para abarcar completamente el tema de la comprensión. Por ejemplo, aunque muchos estudios se enfocan en el aprendizaje en periodos cortos de tiempo, nosotros asumimos como desafío el cómo diseñar experiencias de aprendizaje en periodos de tiempo más largos, como los que conforman el típico curso universitario de un semestre. Además, mientras los estudios suelen concentrarse en variables específicas, tales como la carga cognitiva o la práctica espaciada, nosotros estamos interesados en empezar con un análisis detallado de lo que significa alcanzar la experticia en un área y luego trazar el o los caminos que los estudiantes podrían seguir para llegar allí.

Otros sistemas de diseño instruccional se toman esta última idea en serio y diseñan caminos que acompañan a los estudiantes principiantes hasta convertirse en expertos en las prácticas reales de un campo (e.g., Koedinger et al. 2012; van Merriënboer et al. 2002). Uno de estos marcos es el sistema *diseño instruccional de cuatro componentes* (4C/ID por su sigla en inglés) (van Merriënboer et al. 2002). El sistema 4C/ID empieza con un análisis de las habilidades que constituyen el desempeño experto en un campo complejo. Luego, orienta al diseñador instruccional en una serie de decisiones de elaboración, especificando las tareas de aprendizaje, la información de apoyo, la información adecuada para cada momento y la práctica parcial de tareas para conducir a un desempeño experto. El marco 4C/ID se basa sólidamente en investigaciones sobre cómo aprenden las personas (Sarfo y Elen 2007; Susilo et al. 2013).

Aunque los marcos como el 4C/ID son un excelente punto de partida, tienden a aplicarse especialmente bien al desarrollo de *habilidades* complejas. Sin embargo, muchos campos académicos complejos requieren que los estudiantes no solo dominen habilidades complejas, sino que también aprendan a razonar con las ideas abstractas que forman la estructura conceptual del campo (van Merriënboer et al. 2002). Por ejemplo, campos tales como la estadística son un conjunto complejo de habilidades que conforman la práctica del análisis de datos. Pero un simple dominio de cada una de estas habilidades no es suficiente para garantizar que los estudiantes entiendan los conceptos fundamentales del área o que puedan usar conceptos estadísticos para pensar en distintos contextos (Richland et al. 2012; van Merriënboer et al. 2002).

El énfasis en habilidades por sobre conceptos ha sido señalado como una tendencia en educación que atraviesa las fronteras ideológicas. Por un lado, algunos educadores definen el aprendizaje esencialmente como el dominio de un conjunto de habilidades aisladas, enfocándose sobre todo en la práctica repetitiva de información básica y procedimientos divididos en pasos (e.g., Stigler and Hiebert 2009). Por otro lado, los partidarios de pedagogías constructivistas se enfocan más en insertar el desarrollo de habilidades dentro de las prácticas auténticas que definen el desempeño experto en un área, asumiendo que la comprensión conceptual necesaria evolucionará naturalmente de esta participación (e.g., Savery and Duffy 1995; van Merriënboer et al. 2002). Sin embargo, ninguno de los extremos de este continuo se enfoca en enseñar un campo como un “corpus de conocimientos” organizado por principios, conceptos y teorías (Handelsman et al. 2004; Hodson 1988; Kirschner et al. 2006).

En el marco sobre *cómo practicar la conexión entre conocimientos*, proponemos un complemento a sistemas tales como el 4C/ID poniendo los conceptos fundamentales y la estructura que organiza los campos de conocimiento al mismo nivel que las rutinas diseñadas para apoyar la práctica de habilidades cada vez más complejas y transferibles. Nuestra propia experiencia como profesores nos ha convencido de que existe una necesidad, al menos en los campos complejos en los que el conocimiento se desarrolla lentamente, de conectar el desarrollo de habilidades con la enseñanza deliberada de conceptos fundamentales y representaciones subyacentes al campo. La mejora gradual en la comprensión de los conceptos fundamentales de un área hace que el conocimiento sea más coherente, lo que, a su vez, hace que sea más flexible y transferible a nuevas situaciones (Hatano e Inagaki 1986; Richland et al. 2012).

## Resumen del artículo

En el resto de este artículo, describimos nuestro marco para *practicar cómo hacer conexiones*. Las ideas que presentamos se desarrollaron en el contexto de un proyecto en que hemos estado diseñando, desarrollando e implementando un libro de texto interactivo y virtual sobre introducción a la estadística (Stigler et al. 2020). Este artículo es un intento de hacer explícita la base sobre la cual estamos tomando decisiones de diseño y de justificar esas decisiones en base a teorías y hallazgos de las ciencias del aprendizaje. Los ejemplos que usamos para ilustrar nuestros argumentos provienen de nuestro manual en línea.

Empezaremos por discutir qué queremos decir con comprensión y el rol que la comprensión juega en el desarrollo del conocimiento transferible. Basándonos en la investigación, sostenemos que el conocimiento transferible se caracteriza principalmente por esquemas mentales con un alto nivel de coherencia y conectividad.

Luego, pasamos a la pregunta sobre cómo podemos ayudar a los estudiantes a desarrollar conocimientos interconectados y coherentes en un área. En resumen, nuestra respuesta es que los estudiantes necesitan oportunidades de *practicar cómo hacer conexiones entre conocimientos*.

Al abordar la pregunta de qué conexiones son más importantes practicar en un determinado campo, nos enfocamos en aquellas que ayudan a cimentar una comprensión profunda y el conocimiento transferible. Específicamente, proponemos tres tipos de conexiones que debieran ser el foco del diseño instruccional: *el mundo* (incluyendo sus prácticas y contextos); *conceptos fundamentales* que organizan el campo; y *representaciones clave* que se usan para comunicar y pensar dentro de un campo. Nuestra hipótesis es que todos estos necesitan estar conectados.

Entonces, después de decidir cuáles son las conexiones más importantes, exponemos los tipos de experiencias que ayudarán a los estudiantes a construir y fortalecer estas conexiones. En base a nuestra lectura de la literatura científica, proponemos tres principios a considerar en el diseño instruccional: hacer que las conexiones sean explícitas para los estudiantes (en vez de depender del descubrimiento propio), involucrar a los estudiantes en el esfuerzo de incorporar las conexiones en la comprensión del área que están desarrollando, y entregar oportunidades para que los estudiantes participen reiteradamente en este proceso a lo largo del tiempo, a medida que profundicen y extiendan su conocimiento del área.

## La comprensión como conocimiento interconectado

Hemos señalado que nuestro interés es el desarrollo de la comprensión y los conocimientos transferibles en áreas complejas. Queremos que los estudiantes desarrollen conocimientos robustos y flexibles que puedan llevar consigo al mundo, coordinar con otros conocimientos y aplicar a nuevos problemas y en nuevos contextos. Pero ¿qué es exactamente la comprensión? ¿Qué hace que el conocimiento sea ampliamente transferible? Un punto de partida útil es el corpus cada vez más grande de investigaciones sobre la naturaleza de la experticia y el desempeño experto (Ericsson et al. 2018; Ericsson et al. 2006; Ericsson y Pool 2016; Hatano e Inagaki 1986). Lo que queremos para nuestros estudiantes es similar al conocimiento específico de área que vemos entre expertos, que, en general, puede caracterizarse como coherente, conectado y relacional.

Supuestamente, después de un poco de enseñanza, los principiantes alcanzarán un cierto nivel de experticia. Pero Hatano e Inagaki (1986), en un artículo muy conocido, propusieron una distinción entre experticia *adaptativa* y *rutinaria*. Los expertos rutinarios tienen muchos conocimientos, tanto declarativos como procedimentales, que han dominado suficientemente bien como para desempeñarse con fluidez hasta cierto grado en circunstancias que les son familiares. En contraste, los *expertos adaptativos* se destacan por su habilidad de aplicar sus conocimientos de manera flexible en una amplia variedad de contextos, tanto familiares como novedosos.

En algunas áreas, la experticia *rutinaria* es suficiente, porque las condiciones son estables y la retroalimentación es confiable (por ejemplo, en áreas a las que Epstein 2019 denomina “amables” (*kind*), como el ajedrez o la música). Pero, aquí, nuestro foco está puesto en las áreas a las que Epstein denomina “perversas” (*wicked*). Las áreas perversas, que en nuestra opinión incluyen a la mayoría de los campos académicos complejos, se distinguen por contextos cambiantes y retroalimentación inconsistente o ambigua (Epstein 2019). Se podría decir que el objetivo de la enseñanza es crear experticia adaptativa, la que, supuestamente, impulsan lo que los psicólogos educacionales llaman “conocimientos transferibles” (Bransford y Schwartz 1999; Greeno et al. 1993; Renkl et al. 1996). Pero fracasos bien documentados de la transferencia en contextos académicos (Bransford y Schwartz 1999; Stigler et al. 2010) sugieren que, en el mejor de los casos, muchas prácticas docentes comunes hacen de los estudiantes expertos rutinarios, fundamentalmente incapaces de adaptar sus conocimientos a nuevas circunstancias.

En general, las investigaciones sobre la naturaleza de la comprensión experta presentan un panorama consistente:

los conocimientos de los expertos adaptativos se organizan de forma diferente (Bilalic y Campitelli 2018; Carbonell et al. 2014; Chase y Simon 1973; Chi 2011; Chi y Koeske 1983; de Groot 1965; Ericsson y Charness 1994; Ericsson et al. 2018). La organización de los conocimientos de los expertos adaptativos es más coherente, está más interconectada y refleja mejor la estructura relacional del campo (Bilalic y Campitelli 2018; Carbonell et al. 2014; Kellman et al. 2010; McKeithen et al. 1981).

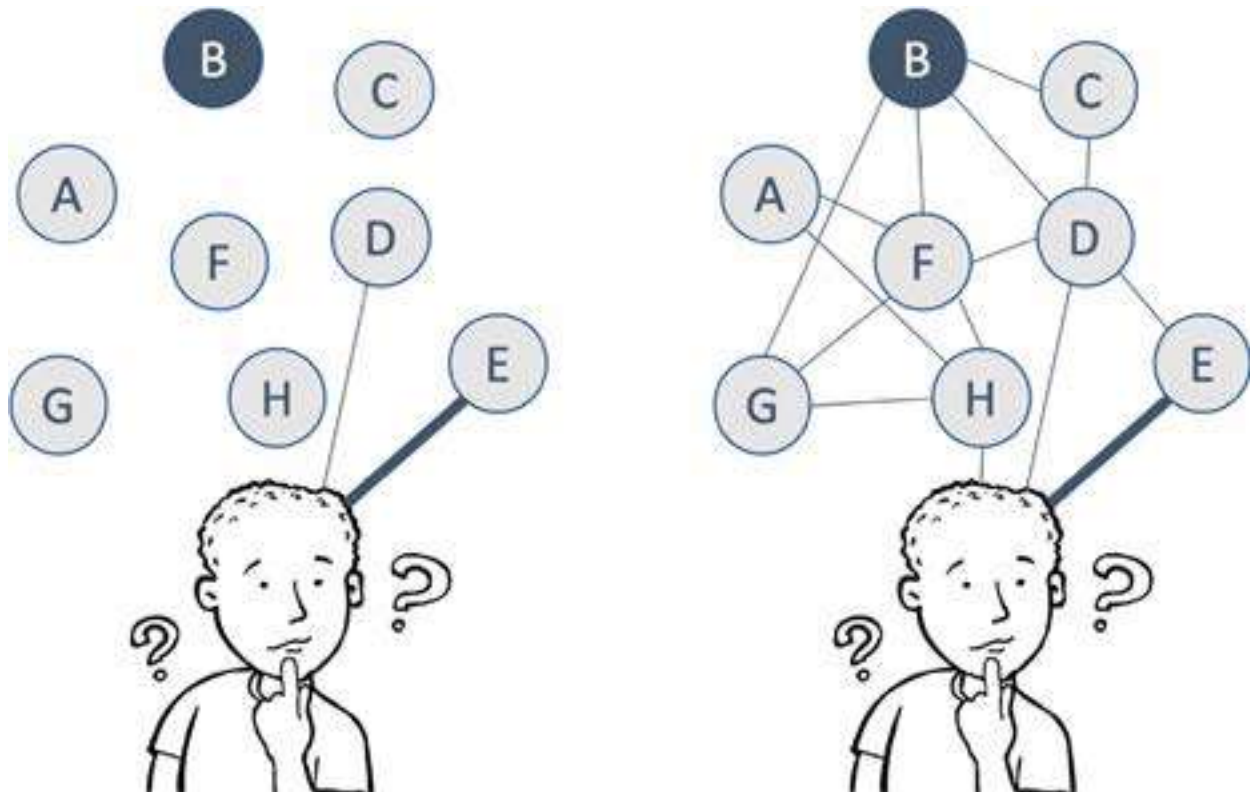
Los pilares de estos conocimientos transferibles, a veces denominados *esquemas mentales* (*schemas*), enfatizan las conexiones entre relaciones abstractas (tales como jerarquías, categorías integradas y sistemas funcionales), en vez de contener listas con datos y procedimientos en bruto (Bedard y Chi 1992; Chi et al. 1981; Chi et al. 1982; Ericsson et al. 2018; Kellman et al. 2010; North et al. 2011). Por ejemplo, los esquemas mentales de los físicos expertos para una variedad de situaciones problemáticas se organizan según relaciones fundamentales (por ejemplo, el principio de trabajo y energía, en vez de según detalles superficiales específicos a los contextos de los problemas (Chi et al. 1981). Los expertos también tienen esquemas mentales menos numerosos, pero más interconectados, que abarcan una mayor cantidad de instancias (Lachner et al. 2012).

Debido a que sus conocimientos están altamente organizados e interconectados, los expertos adaptativos perciben el mundo de forma diferente a los expertos rutinarios o los principiantes. Identifican y se ocupan rápida y fácilmente de la información de la estructura relevante de la situación que es fundamental para entender la situación en cuestión y filtran las características irrelevantes de un problema para enfocarse en una vía de solución (Campitelli y Gobet 2005; Endsley 2018). Se anticipan a la forma en que las modificaciones a un sistema influirán sobre los resultados y pueden explicar por qué y cómo los conceptos de una situación podrían aplicarse en otra (Carbonell et al. 2014; Hatano e Inagaki 1986; Holyoak 1991). Sus estructuras de conocimientos priorizan las conexiones entre conceptos, ejemplos y contextos (Bransford y Stein 1984; Ericsson et al. 2018; Ginsburg 1977; Hiebert y Carpenter 1992), de forma tal que son capaces de agrupar (*chunk*) información de manera eficiente, dejando disponibles más recursos dentro de la memoria de trabajo (Ericsson 2018; Ericsson y Kintsch 1995; Glaser y Chi 1988). Si la información simplemente se almacenara como entradas separadas en una lista mental, sin conexiones estructurales que le brindaran coherencia, sería difícil distinguir la información relevante y coordinar los conocimientos de manera eficiente (e.g., Reed 1985). Pero, ya que los esquemas mentales expertos codifican en la memoria una representación interconectada del área, los conocimientos se vuelven transferibles (Bedard y Chi 1992; van Merriënboer 1997).

Para nuestros fines, equiparamos la comprensión profunda con los conocimientos transferibles propios de la experticia adaptativa. De esta forma, proponemos la siguiente caracterización: la comprensión se caracteriza por la habilidad de percibir y hacer explícita la estructura subyacente de un área, sus conexiones y sus relaciones en forma de esquemas mentales coherentes, lo que hace posible la aplicación transferible y flexible de los principios del área (la transferencia de principios se considera como la forma más elevada de transferencia; ver Barnett y Ceci (2002) para una discusión en profundidad de la variedad de los tipos de transferencia).

A partir de esta caracterización de la comprensión, queda claro que las conexiones son importantes para que los conocimientos sean transferibles. Considere, como un caso hipotético, a los dos individuos que representa la Fig. 1. Ambos tienen los mismos conocimientos, representados como A, B, C, D, E, F, G y H, y ambos están intentando resolver el mismo problema novedoso, cuya solución exige que accedan a un conocimiento en específico, B, y lo apliquen. Debido a que el individuo de la izquierda tiene pocas conexiones entre sus fragmentos de conocimientos, no será capaz de transferir lo que sabe a esta nueva situación. Mientras intenta entender el problema, se encuentra constantemente con E (su conexión más fuerte). También intenta aplicar D. Aunque “cuenta” con ese conocimiento puntual, no tiene ninguna forma de llegar a B, porque no está conectado con las otras cosas que sabe o con el problema al que se enfrenta en el momento.





**Fig. 1** La importancia de los conocimientos interconectados para alcanzar la transferencia.

El individuo a la derecha (podemos llamarlo Mr. Right) aborda el mismo problema novedoso desde una posición mucho más sólida. Como el individuo de la izquierda, Mr. Left, lo primero que piensa es recuperar y aplicar E a la situación en cuestión. Entonces, como Mr. Left, podría pensar otra vez y encontrarse con D. Pero, desde D, tiene muchas más opciones, gracias a la naturaleza interconectada de sus conocimientos. Podría ir de D a B y luego resolver el problema. Podría ir de D a F y luego a B, de D a F, a G y a B, y así sucesivamente. El punto es que tiene muchas formas de llegar al conocimiento que necesita. Una vez que llega a B, por supuesto, debe coordinar B con otros conocimientos para elaborar una solución al problema. También debe ajustar su solución, una vez que la haya identificado, para que encaje dentro del contexto único en que este problema novedoso se presenta. Como sus conocimientos están interconectados, diríamos que ha alcanzado la comprensión. En base a esta comprensión, puede recuperar, coordinar y adaptar lo que sabe a casi cualquier situación.

Gran parte de la educación se enfoca en enseñarles a los estudiantes “elementos” de conocimientos y habilidades—A, B, C y así sucesivamente. No se necesita ir más lejos que un manual estándar de matemáticas para ver la falta de conexión de un capítulo a otro, mucho menos la falta de conexiones entre los contenidos dirigidos a grados diferentes. Aunque es importante aprender elementos de información, y algunos de los elementos requieren de un tiempo y esfuerzo considerable para ser dominados, el solo hecho de aprenderlos no conduce a la comprensión y la transferencia. Nuestro marco para practicar conexiones sigue un enfoque diferente: en vez de concentrar nuestra atención solamente en los elementos, intentamos encontrar formas de ayudar a los estudiantes a crear conexiones entre los elementos, con el objetivo de producir comprensión y conocimientos transferibles.

No somos los primeros en proponer este enfoque. Goldwater y Schalk (2016) propusieron que las categorías relacionales podrían ser un puente entre los estudios de las ciencias del aprendizaje y la educación, ya que son distintas a las categorías basadas en características que suelen ser tema de estudio de la psicología cognitiva. De manera similar, Schwartz y Goldstone (2015) sugieren un enfoque de “coordinación” al aprendizaje, en el cual el objetivo de la enseñanza es fortalecer las habilidades en relación con otras habilidades, no almacenarlas de forma aislada. Las habilidades que



se practican de forma aislada están destinadas a permanecer aisladas; lo que es peor, pueden convertirse en un obstáculo para el aprendizaje nuevo (Woltz et al. 2000). Schwartz y Goldstone han caracterizado este tipo de aprendizaje coordinado como “enseñar al cerebro a bailar”. Mucho de lo que queremos que los estudiantes entiendan en campos académicos es relacional.

Hemos abogado por el valor de la comprensión y la transferencia, y que ambas son el resultado de conocimientos interconectados. Lo que aún no hemos abordado es cómo esperamos que los estudiantes obtengan ese conocimiento. Aunque buscamos apartarnos del aprendizaje de elementos aislados, valoramos el mecanismo a través del cual estos elementos se aprenden tradicionalmente: la práctica. Más adelante, nos explayaremos sobre el tipo de práctica que nos imaginamos, pero, por ahora, nuestra hipótesis, en términos simples, es esta: los estudiantes debieran *practicar cómo hacer conexiones*. Si el objetivo de la enseñanza es apoyar a los estudiantes para que practiquen cómo hacer conexiones, surgen dos preguntas, las cuales abordamos en el resto de este artículo: (1) ¿Cuáles son las conexiones que se necesita practicar? Obviamente, esto dependerá mucho del campo, pero proponemos algunos principios para guiar a los diseñadores instruccionales; y (2) ¿Cómo podemos diseñar la enseñanza para darles a los estudiantes más oportunidades de practicar cómo hacer las conexiones clave que se han identificado para cada área de conocimiento? En las siguientes secciones, exponemos nuestro marco para responder a estas preguntas e ilustramos nuestros argumentos con ejemplos del área de la estadística introductoria.

## Practicar cómo hacer conexiones: ¿Qué conexiones practicar?

Empezamos con las conexiones. Es fácil afirmar que los conocimientos de los estudiantes debieran estar interconectados y ser coherentes. Pero si nos quedamos solo en decir esto, estamos eludiendo una pregunta importante: ¿qué conexiones, entre todas las posibles que los estudiantes podrían practicar, deberían ser el foco de nuestra enseñanza? Nuestro trabajo en estadística y nuestra lectura de la literatura científica nos lleva a proponer que existen tres tipos de conexiones que son fundamentales para aprender en cualquier campo complejo. Estas son: (1) conexiones con los *contextos y las prácticas en el mundo real* a las que se pretende aplicar los conocimientos de un campo específico (Engle et al. 2012; van Merriënboer 1997), (2) conexiones con *conceptos fundamentales* que sirven para organizar y brindar coherencia al campo (p. ej., National Council for Teachers of Mathematics 2000; National Governors Association 2010; Richland et al. 2012), y (3) conexiones con *representaciones clave* que son útiles para pensar y comunicar ideas en el campo en cuestión (p. ej., Ainsworth 2008; Kozma 2003; Strauss 1998).

### Conexiones #1: Conexiones y prácticas del mundo real

En su esencia, la enseñanza académica debiera estar motivada por las demandas del mundo más allá del aula. La esperanza de la enseñanza es que los estudiantes transfieran lo que están aprendiendo a situaciones auténticas del mundo real, pero las transferencias exitosas han resultado ser una meta escurridiza. La investigación sugiere que conectar continuamente el aprendizaje en el aula con las prácticas auténticas del campo podría ser una de las formas más efectivas de desarrollar conocimientos transferibles (Barnett y Ceci 2002; Bransford y Schwartz 1999).

Cuando desarrollamos nuestro programa de estudios de introducción a la estadística, empezamos por examinar la práctica del análisis de datos. Esta práctica podría describirse de muchas formas. Lo importante, en nuestra opinión, es que una cierta descripción del mundo fuera del aula sea explícita —para los autores de libros de texto, para los estudiantes y para los docentes a los que se les da la tarea de implementar programas de estudio. Nuestra descripción de la práctica del análisis de datos se ilustra en la Fig. 2, a la que volvemos con frecuencia cuando enseñamos este curso. Les decimos a los estudiantes desde el principio que el objetivo de la estadística es explicar la variación en el mundo, lo que descomponemos en tres prácticas centrales: (1) explorar la variación (en los datos), (2) modelar la variación y (3) evaluar y comparar modelos.

Organizamos nuestro manual alrededor de estas tres prácticas, para recordarles continuamente a los estudiantes en qué punto se conectan las habilidades y conceptos específicos que están estudiando con el trabajo que podrían hacer algún día si quisieran trabajar como científicos de datos. Por ejemplo, los científicos de datos exploran la variación cuando construyen un gráfico para complementar el reporte anual de una corporación. Modelan la variación cuando predicen el efecto de una variable en particular en las futuras ventas. Y evalúan modelos cuando comparan explicaciones rivales de satisfacción del cliente. Al basar la enseñanza en la práctica del análisis de datos, los estudiantes pueden participar desde el principio en actividades que tengan conexiones claras con los objetivos y rutinas que usan los expertos (Lave y Wenger 1991). En vez de enseñarles elementos aislados y esperar que los combinen para más tarde resolver un problema mayor, los estudiantes practican cómo reconocer la necesidad de desarrollar conocimientos en el contexto de tareas auténticas (National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine 2018).

Sin embargo, el mundo fuera del aula no puede ser descrito completamente solo en relación con la práctica del análisis de datos. También es importante identificar la variedad de situaciones y contextos a los que se debieran aplicar las habilidades y la comprensión en desarrollo de los estudiantes. Variar continuamente los contextos (que, en estadística, podría ser tan simple como variar los conjuntos de datos) ayuda a refinar la percepción y la comprensión que tienen los estudiantes de cuáles características de una situación son fundamentales y cuáles son superficiales para la aplicación del conocimiento de determinado campo (Gentner 1983; Kellman et al. 2010; Son et al. 2011). Cuando los estudiantes aprenden sobre una idea abstracta en un contexto, es como si se atara estrechamente una banda elástica alrededor del primer contexto de aprendizaje. A medida que los estudiantes experimentan más contextos, se produce un estiramiento gradual de esa banda elástica para incluir un rango cada vez más amplio de situaciones. Al estirarse para incluir más situaciones, el concepto se vuelve más diferenciado, coherente y flexible, y es más probable que pueda transferirse a nuevas situaciones.

Un ejemplo de cuando enseñamos estadística es el concepto de unidad observacional o unidad de muestreo. La mayoría de los conjuntos de datos que usamos en psicología emplean a las personas como unidades de análisis; por lo tanto, cada fila en una tabla de datos o cada punto en el diagrama de dispersión generalmente representa a una persona. Pero, si los estudiantes de estadística solo trabajan con datos en los que las personas son las unidades, desarrollarán un concepto limitado de qué es una unidad observacional y tendrán dificultades para aplicar el concepto en nuevas situaciones. Siguiendo con nuestra analogía de la banda elástica, desde el principio trabajamos para que los estudiantes practiquen con distintos conjuntos de datos en los que las filas no son personas, sino que representan familias, estados, países o empresas. De esta forma, el desarrollo del concepto de unidades observacionales por parte de los estudiantes se conecta con un conjunto más amplio y diverso de contextos.



**Fig. 2** La práctica del análisis de datos.

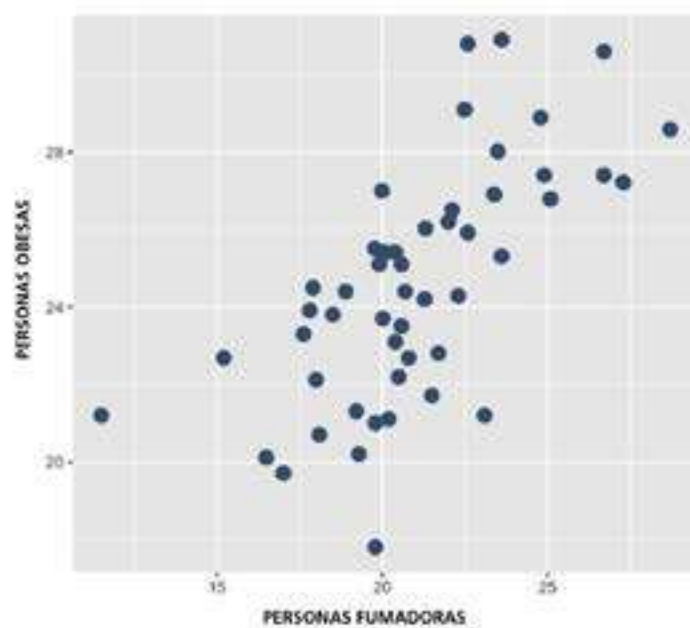
Queremos que los estudiantes activen el concepto de unidad de observación no solo en el contexto de diferentes conjuntos de datos, sino que también dentro de las diferentes actividades que comprenden la práctica del análisis de datos. Por ejemplo, en el contexto de explorar la variación en los datos, les presentamos a los estudiantes un diagrama de dispersión de datos en el que los estados (cada uno de los Estados Unidos) son la unidad de observación. Como cada punto representa un estado, pueden ver una correlación elevada entre el porcentaje de la población obesa del estado y el porcentaje de la población fumadora (ver Fig. 3). Al principio, los estudiantes interpretan esto como evidencia de que es más probable que los fumadores sean obesos. Para sobreponerse a este malentendido conceptual, los estudiantes deben aprender a conectar la variación que ven en el diagrama de dispersión con las unidades medidas; deben aprender a decir: “Los estados que tienen un alto porcentaje de residentes que fuman también tienen un alto porcentaje de residentes obesos”.

### Conexiones #2: Conceptos fundamentales que organizan un campo de conocimiento

El segundo tipo de conexión que queremos que los estudiantes establezcan son las conexiones con los conceptos fundamentales que estructuran los conocimientos de un área. Los estudios demuestran que el conocimiento experto en un campo generalmente está organizado en torno a un pequeño conjunto de conceptos fundamentales (p. ej., Lachner y Nückles 2015) que infunden coherencia incluso a las áreas perversas. Debido a que son altamente abstractos y están interconectados con otros conceptos, los conceptos fundamentales deben aprenderse gradualmente, durante periodos extendidos de tiempo y a través de práctica extendida. A medida que los estudiantes practican cómo conectar conceptos con otros conceptos, contextos y representaciones, estos conceptos fundamentales se vuelven más poderosos y los conocimientos de los estudiantes se vuelven más transferibles (p.ej., Baroody et al. 2007; National Council for Teachers of Mathematics 2000; Rittle-Johnson y Schneider 2015; Rittle-Johnson et al. 2001).

Si tan solo pudiéramos preguntarle a un experto cuáles son los conceptos fundamentales, podríamos planificar nuestro programa de estudios de estadística en torno a esos conceptos. Pero los conceptos que son más útiles para los principiantes que están en las etapas tempranas del aprendizaje podrían no ser los mismos que los expertos han desarrollado durante muchos años de experiencia (Kirschner et al. 2006). El desafío de este diseño es seleccionar conceptos que sean accesibles para los principiantes y, al mismo tiempo, reconocibles para los expertos como algo válido y útil en

**Fig. 3** Diagrama de dispersión que muestra el porcentaje de los residentes de un estado que son obesos en función del porcentaje que fuma (del *data set* de estados de los EEUU).



el campo. Críticamente, aunque los principios centrales que se les presentan a los principiantes podrían simplificarse de ciertas formas (de hecho, en los campos complejos, casi siempre se necesita simplificar conceptos para los estudiantes principiantes), es importante no simplificar los conceptos hasta el punto de introducir malentendidos conceptuales y que la simplificación no produzca una colección de conceptos que no logren formar un todo coherente.

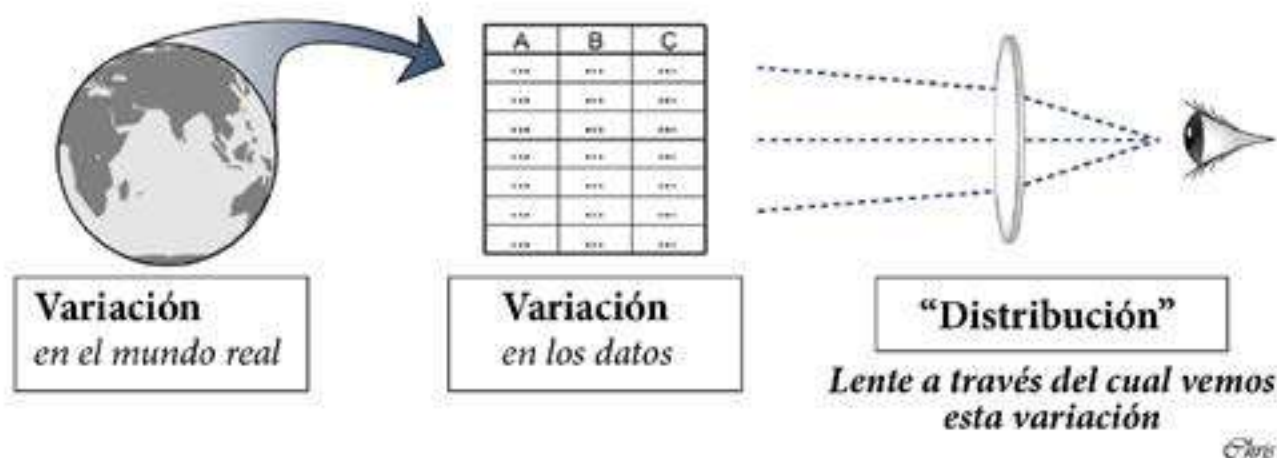
Por medio de un extenso proceso de estudio y discusión (que incluyó probar a través de la docencia), decidimos enfocar nuestro libro de texto en torno a tres conceptos fundamentales: *modelo estadístico*, *distribución* y *aleatoriedad*. Elegimos estos conceptos en base a varios criterios. Debían ser conceptos (1) con los que pudiéramos hacer conexiones continuamente durante el curso, (2) con que los principiantes pudieran involucrarse (es decir, que estuvieran dentro de su zona de desarrollo próximo), (3) que no tuvieran que reaprender desde cero más tarde, a medida que avanzaran a niveles de comprensión más altos y (4) que, en conjunto, ayudaran a los estudiantes a desarrollar una comprensión coherente del campo de la estadística (aunque describiremos brevemente los conceptos que elegimos, una explicación más desarrollada de nuestro enfoque a los conceptos fundamentales de la estadística está disponible en Son et al. en revisión).

**Modelo estadístico** Cualquier persona que estudie estadística a niveles avanzados estará familiarizada con el concepto de modelo estadístico. Sin embargo, el concepto casi nunca se menciona en el curso introductorio. Nuestra opinión es que, si queremos que los conocimientos de estadística introductoria de los estudiantes se transfieran a los cursos avanzados y a la práctica más amplia de análisis de datos, debemos conectar lo que aprenden con el concepto de hacer modelos desde el principio. Por lo tanto, intentamos hacer esto en nuestro libro introductorio. Empezamos por transmitir que el objetivo global del análisis de datos es explicar la variación en los datos. Luego, desde el principio al final del libro, conectamos todo lo que los estudiantes aprenden con la afirmación  $\text{DATOS} = \text{MODELO} + \text{ERROR}$ .

Por ejemplo, cuando introducimos la media, la conceptualizamos como el modelo más simple de todos los modelos estadísticos. Si usamos este modelo simple para predecir todos los puntos de una distribución, la mayoría de nuestras predicciones estarán erradas (aunque la media no será sesgada y será mejor que una suposición aleatoria). Si la media es un modelo, podemos conceptualizar el error como la desviación de la calificación real respecto a la calificación predicha. Entonces, la desviación estándar se introduce como un medio de cuantificar cuánto error en total existe en torno a las predicciones de cada modelo. A medida que le añadimos variables explicativas al modelo, la exactitud de las predicciones aumentará, mientras que el error disminuirá. Conectar las actividades de análisis de datos con estos conceptos abstractos fundamentales produce conocimientos que están más altamente interconectados y que, por lo tanto, son más fáciles de utilizar.

**Distribución** Siguiendo a Wild (2006), adoptamos la *distribución* como nuestro segundo concepto fundamental. Wild define la distribución como el “patrón de variación de una variable” (cf. Garfield y Ben-Zvi 2005). El concepto de distribución es el lente a través del cual vemos la variación (ver Fig. 4). En estadística, es fundamental situar el razonamiento en relación con tres tipos distintos de distribuciones: la muestra de datos, el proceso de generación de datos (DGP por su sigla en inglés) que levantó los datos (relacionado con el concepto de población) y la distribución muestral, que son distribuciones imaginarias a partir de las cuales se generan muestras estadísticas. En conjunto, nos referimos a estos tres tipos de distribución como la “tríada de la distribución”.

El concepto de distribución muestral es extremadamente difícil de entender para los estudiantes, pero es de una importancia fundamental para el proceso de inferencia estadística. Nos preocupamos de ayudar a los estudiantes a practicar cómo hacer conexiones entre diferentes distribuciones y las preguntas a las que se adecúan mejor para responder. Por ejemplo, preguntar sobre la probabilidad de que un grupo de personas tenga un peso promedio por sobre un límite prescrito (por ejemplo, 200 libras) requiere de una distribución muestral. En contraste, preguntar sobre la probabilidad de que un solo individuo pese más de 200 libras exigirá que usemos una distribución de datos de muestra o un modelo del proceso de generación de datos construido en base a una muestra de datos.



**Fig. 4** La variación en el mundo se captura a través de la medición y se convierte en variación en los datos, que analizamos a través del lente de la distribución (figura de Wild 2006).

**Aleatoriedad** El tercer concepto fundamental que enfatizamos es el concepto de aleatoriedad como un proceso de generación de datos. Naturalmente, los estudiantes piensan en explicaciones causales a la variación. Por otro lado, ver la variación como algo causado por procesos aleatorios no es algo a lo que los estudiantes lleguen naturalmente (Batanero 2016; Batanero et al. 1998; Kaplan et al. 2014). Por supuesto, la aleatoriedad juega un rol importante en el pensamiento estadístico, principalmente porque sabemos cómo hacer modelos de procesos aleatorios. Los estudiantes empiezan asociando la aleatoriedad con la “imprevisibilidad” (p. ej. un solo número generado aleatoriamente entre 1 y 10 es difícil de predecir). Por medio de técnicas computacionales como la simulación, el *bootstrapping* y la aleatorización, les proporcionamos a los estudiantes herramientas y experiencias que pueden usar para pensar en la aleatoriedad como un proceso que produce patrones predecibles de variación en el largo plazo, incluso si una sola muestra de datos permanece impredecible.

Los tres conceptos fundamentales —DATOS = MODELO + ERROR, *la tríada de distribución y la aleatoriedad como proceso*— proporcionan un marco organizador para conectar y brindar coherencia a las rutinas estadísticas y sus objetivos. Por ejemplo, aunque el análisis de la varianza univariado y la regresión simple generalmente se enseñan como dos conceptos separados en la mayoría de los cursos de estadística, enfatizamos que ambos son ejemplos de modelos lineales. Ambos tipos de modelo generan predicciones y ambos miden el error de la misma forma (p. ej. la diferencia entre calificaciones predichas y reales). En ambos, comparamos un modelo más complejo con uno simple, en que la distribución que resulta es producto de un proceso aleatorio de generación de datos (llamado tradicionalmente hipótesis nula). Nuestra hipótesis es que, si estas técnicas analíticas se enseñan como ejemplos de lo mismo, los conocimientos de estadística de los estudiantes serán más coherentes y será más probable que se transfieran a nuevas situaciones.

### Conexiones #3: Representaciones clave para pensar y comunicar

Además de desarrollar una comprensión interconectada de los conceptos fundamentales de los que está compuesto un campo, también queremos que los estudiantes aprendan a usar representaciones clave que encarnen esos conceptos y que puedan representar explícitamente la estructura relacional de un área (ver Ainsworth 2008; Gentner y Rattermann 1991; Star y Rittle-Johnson 2009; Uttal et al. 1997). La evidencia sugiere que enseñar con representaciones múltiples produce un aprendizaje más profundo y flexible (Ainsworth 2008; Ainsworth et al. 2002; Brenner et al. 1997; Pape y Tchoshanov 2001). Además, usar y entender representaciones simbólicas es necesario para comunicar y desarrollar habilidades de orden superior (p.ej., Gilbert y Treagust 2009). Sin embargo, como aprender a usar un sistema de representación requiere de invertir tiempo y esfuerzo (Ainsworth 2008; Star y Rittle-Johnson 2009), debemos decidir en qué representaciones enfocarnos para enseñárselas a los principiantes. Al hacer esta selección, queremos encontrar repre-



sentaciones que sean accesibles para los principiantes (Vygotsky 1980), importantes para el campo (Tabachneck-Schijf et al. 1997; Tsui y Treagust 2013) y más productivas para hacer conexiones (Kaput et al. 2017).

En nuestro curso de introducción a la estadística, decidimos enfocarnos en cinco representaciones clave: descripciones verbales, visualizaciones, ecuaciones con palabras, notación de MLG (modelo lineal generalizado) y código en R. Conforme a esto, durante nuestro curso les pedimos reiteradamente a los estudiantes que traduzcan y hagan conexiones usando descripciones verbales, visualizaciones, ecuaciones con palabras, notación de MLG y código en R. Podrán ver que no incluimos álgebra, en forma de fórmulas y ecuaciones, como una de nuestras representaciones clave, aunque se la enfatiza en la mayoría de los manuales. Nuestra razón es que nuestros estudiantes generalmente no consideran que el álgebra sea de fácil acceso o útil, como consecuencia –suponemos– de la educación escolar matemática en los Estados Unidos.

Los gráficos y las visualizaciones siempre han sido importantes para entender estadística y son mucho más importantes en la era de la ciencia de datos, en la que a menudo se les pide a los profesionales que creen figuras y gráficos que estén listos para ser publicados. La programación (p.ej., en R) también es una representación que se ha vuelto cada vez más importante en la estadística, a medida que la naturaleza del campo mismo se ha hecho más computacional. R también les da a los estudiantes un medio de participar en las rutinas emergentes del análisis de datos, que ponen cada vez más valor en producir y compartir análisis reproducibles.

Los gráficos y las visualizaciones siempre han sido importantes para entender estadística y son mucho más importantes en la era de la ciencia de datos, en la que a menudo se les pide a los profesionales que creen figuras y gráficos que estén listos para ser publicados. La programación (p.ej., en R) también es una representación que se ha vuelto cada vez más importante en la estadística, a medida que la naturaleza del campo mismo se ha hecho más computacional. R también les da a los estudiantes un medio de participar en las rutinas emergentes del análisis de datos, que ponen cada vez más valor en producir y compartir análisis reproducibles.

Al desarrollar la comprensión de modelos estadísticos de los estudiantes, empezamos por hacer que los estudiantes describan modelos simples con palabras (p.ej. “conocer la altura de alguien nos ayudará a hacer una mejor predicción, aunque no una predicción perfecta, del largo de su pulgar”). Luego, les enseñamos a escribir ecuaciones con palabras (p.ej. Largo del pulgar = Altura + otras cosas), lo que les ayuda a tomar su aprendizaje inicial (que las predicciones estadísticas no son perfectas) y conectarlo con el concepto de error (representado en la ecuación con palabras como “otras cosas”).

Más tarde, se les pide a los estudiantes que asocien las ecuaciones con palabras a una idea más general, representada de forma similar (p.ej. DATOS = MODELO + ERROR), y que luego empleen la misma estructura que se usa para escribir código en R para generar un gráfico (p.ej. scatterplot (Pulgar ~ Altura, data = data set) (ver Pruijm et al. 2017, y sus visualizaciones resultantes). Este corpus de conexiones luego sirve de apoyo para aprender notación matemática de MLG (p.ej.,  $Pulgari = b_0 + b_1 \text{Altura}_i + e_i$  y, más generalmente  $Y_i = b_0 + b_1 X_i + e_i$ ).

Queremos explicar un poco más sobre la decisión de usar notación de MLG. Es un sistema de representación que a los estudiantes les cuesta aprender, pero que ejemplifica las características que respaldan las conexiones: capacidad de



generalización (puede representar muchas situaciones, incluso aquellas que no están presentes en el curso) y capacidad de alineación (se alinea con las otras representaciones del programa de estudios). Además, ya que muchos profesionales la usan y se publica con frecuencia en artículos académicos, es muy válida ecológicamente. Por ejemplo, la notación de MLG representa explícitamente la semejanza estructural entre modelos en grupo, tales como la técnica de análisis de la varianza (p.ej.,  $\text{Resultado}_i = b_0 + b_1 \text{Grupo}_i + e_i$ ) y los modelos de regresión (e.g.,  $\text{Resultado}_i = b_0 + b_1 \text{Cantidad}_i + e_i$ ), lo que apoya a los estudiantes mientras se esfuerzan en reconocer las semejanzas estructurales entre ambos tipos de modelos.

## Diseñar experiencias de aprendizaje para apoyar la práctica de hacer conexiones entre conocimientos

Después de describir los tipos de conexiones que los estudiantes necesitan aprender a hacer, ahora nos enfocamos en la pregunta de cómo los educadores podemos diseñar una enseñanza que facilite este proceso. En base a nuestra lectura de la literatura científica, creemos que existen tres principios clave que debieran guiar el diseño instruccional. Primero, las conexiones identificadas anteriormente (conceptos fundamentales, representaciones clave y mundo) deben explicitarse en algún punto durante la enseñanza. Segundo, los estudiantes deben experimentar dificultades productivas. Las conexiones, por así decirlo, deben conseguirse con trabajo duro, por mucho que nos gustaría simplemente dárselas a los estudiantes. Y, finalmente, se les deben ofrecer oportunidades reiteradas para participar del trabajo de forjar conexiones durante periodos sostenidos de tiempo a medida que profundizan y amplían su conocimiento del campo. Discutiremos cada uno de estos principios a continuación.

### Principio #1: Hacer que las conexiones sean explícitas

Reconocer las relaciones estructurales es fundamental para la comprensión de los campos complejos (Bassok 2001; Chen y Klahr 1999; Novick 1988; Novick y Holyoak 1991; Reed 1985; Ross 1987). Sin embargo, los estudios sugieren que, con frecuencia, los estudiantes no reconocen las conexiones entre problemas estructuralmente similares, a menos que estas se indiquen explícitamente (Gick y Holyoak 1983). Con frecuencia, los estudiantes no son capaces de recurrir a sus conocimientos previos relevantes cuando los necesitan (Reeves y Weisberg 1994). Especialmente, los estudiantes principiantes suelen estancarse en las características superficiales de un problema y necesitan ayuda para conectar la representación superficial con conceptos subyacentes más profundos (Ross 1987).

Estos resultados son consistentes con hallazgos de la voluminosa literatura científica sobre el aprendizaje por descubrimiento. Aunque es probable que muchos expertos de alto nivel hayan adquirido los conocimientos específicos de sus áreas por sí solos, basándose principalmente en su propia persistencia y su extensa experiencia, la investigación sugiere que la mayoría de los estudiantes no se benefician de que simplemente les den la oportunidad de descubrir esas estructuras por sí solos (Alfieri et al. 2011). Como veremos en la siguiente sección, ciertamente se requiere de un esfuerzo por parte del estudiante, pero el esfuerzo por sí solo no suele ser suficiente (Mayer 2004). En cada nivel etario, *el descubrimiento guiado* es más efectivo que el simple aprendizaje por descubrimiento (e.g., Alfieri et al. 2011; Klahr y Nigam 2004; Weisberg et al. 2015).

Algunos paradigmas investigativos de la psicología cognitiva demuestran técnicas para hacer que las conexiones sean explícitas y los beneficios de tales técnicas. Los estudios sobre aprender de analogías (instancias superficialmente diferentes, pero estructuralmente paralelas) entregan un ejemplo. Cuando los estudiantes establecen paralelos entre dos casos y practican cómo alinear elementos similares entre dos sistemas (Gentner et al. 2003; Son et al. 2011), son más capaces de transferir sus conocimientos a problemas novedosos que sean superficialmente diferentes (Alfieri et al. 2013). Además de eliminar detalles distractorios, las tareas de aprendizaje que hacen explícitas las relaciones tienen como resultado conocimientos más portables y generalizables (Gentner y Markman 1997; Kaminski et al. 2008; Son et al. 2008; Uttal et al. 2009).

En nuestro manual en línea, usamos dos técnicas específicas para hacer que las conexiones sean explícitas. La primera es estructurar el libro de forma tal que les permita a los estudiantes ver las conexiones y luego indicar explícitamente estas conexiones en el texto mismo. En nuestro libro, las conexiones constantes con el concepto de hacer modelos estadísticos ejemplifican la primera estrategia. Después de elegir el hacer modelos como un concepto fundamental, estructuramos el libro alrededor de la acción de modelar —y luego probar y comparar modelos de— la variación en los datos. A medida que se introducen conceptos y procedimientos estadísticos, cada uno se relaciona explícitamente con la afirmación  $\text{DATOS} = \text{MODELO} + \text{ERROR}$ .

Por ejemplo, cuando se introduce la media aritmética, indicamos explícitamente que la media es un ejemplo de una función que podría llenar la posición de MODELO en la afirmación abstracta  $\text{DATOS} = \text{MODELO} + \text{ERROR}$ . De manera similar, los residuales, la suma de cuadrados, la varianza y la desviación estándar se conectan explícitamente con el concepto de error. Cuando se introduce la suma de cuadrados, indicamos que esta medición del error en particular se minimiza en la media y relacionamos este hecho con el objetivo general de minimizar el error como forma de aumentar la potencia de un modelo. Estas conexiones aumentan la coherencia en el campo, redistribuyendo lo que anteriormente se concebía como temas separados (por ejemplo, “mediciones de tendencia central” y “mediciones de variación”) como conceptos importantes que se relacionan con el trabajo en general del hacer modelos estadísticos.

La segunda estrategia para hacer que las conexiones sean explícitas es hacerles reiteradamente a los estudiantes preguntas cuyas respuestas sean las conexiones explícitas que estamos intentando fortalecer. Constantemente les pedimos a los estudiantes que expliquen, por ejemplo, cómo se relacionan los conceptos fundamentales y las representaciones entre sí (p. ej. Chi 2000; Lombrozo 2006).

En situaciones y representaciones diversas, les pedimos reiteradamente a los estudiantes que identifiquen explícitamente DATOS, MODELOS y ERROR. Les pedimos que conecten un punto de datos en un diagrama de dispersión con un valor en particular de una tabla de datos sin procesar. Después de pedirles que apliquen un modelo de regresión, les pedimos que incorporen las predicciones del modelo al marco de datos (con R) y que luego grafiquen las predicciones del modelo en función de la variable explicativa. Les pedimos que expliquen por qué las predicciones del modelo parecen coincidir con una línea de regresión lineal, mientras que los puntos de datos reales no. Les pedimos a los estudiantes que contextualicen constantemente lo que ven en los datos en términos de la acción de hacer modelos en general.

El mismo principio de hacer que las conexiones sean explícitas puede verse en las investigaciones sobre los ejemplos resueltos, en los que los estudiantes aprenden al examinar la solución de un experto a un problema (Atkinson et al. 2000; Paas et al. 2003). Cuando a los estudiantes se les pide que resuelvan un problema, gran parte de su esfuerzo se emplea en generar y ejecutar un método resolutorio, y les quedan pocos recursos de atención para reflexionar sobre los conceptos que subyacen a su solución. Sin embargo, cuando se les entrega la solución y se les pide que la estudien, los estudiantes pueden reflexionar sobre por qué la solución funciona, lo que tiene el potencial de esclarecer cómo se relaciona la solución con los principios subyacentes centrales al campo.

La literatura sobre ejemplos resueltos está estrechamente relacionada con la teoría de la carga cognitiva (TCC; Paas a y van Gog 2006; Paas et al. 2010). La TCC distingue tres tipos de carga: *intrínseca*, *relevante* y *ajena*. La carga intrínseca está determinada por la tarea en cuestión; si quiere realizar la tarea, necesitará lidiar con la carga intrínseca. Para aprender, el objetivo es reducir la carga ajena (los elementos extra y opcionales que rodean a la tarea) y aumentar la carga relevante (Sweller 1988; van Merriënboer y Sweller 2005). En nuestra conceptualización, la carga relevante es la parte de la atención y el esfuerzo que está enfocada en las conexiones fundamentales del área de conocimiento. Querer aumentar la carga relevante significa adecuarse a la necesidad de dejar más recursos cognitivos disponibles para la reflexión consciente sobre los principios y conceptos que subyacen a la estructura profunda del área.

Una de las razones por las que intercalamos el uso de R en nuestro programa del curso es que R se hace cargo de los cálculos con rapidez y, de esta forma, reduce la carga extrínseca y les deja a los estudiantes más recursos mentales disponibles para pensar en el significado de los resultados de los cálculos. Por ejemplo, usar una función simple de R para

calcular residuales les deja a los estudiantes más recursos que pueden emplear en ver que los residuales, como ERROR, pueden expresarse como DATOS – MODELO, una forma equivalente de nuestro marco conceptual central.

En vez de pedirles a los estudiantes que resten una y otra vez, los estudiantes corren un código simple en R (p.ej. `resid(model)`) y luego se concentran en explicar el significado de lo que encuentran, como por qué algunos residuales son negativos y otros son positivos, cómo se relacionan los residuales con la media y los datos originales y cómo los residuales se relacionan con el error agregado (p.ej. suma de cuadrados). Hacer estas conexiones es difícil, pero es parte de la carga relevante necesaria para fomentar la comprensión.

## Principio #2: Que los estudiantes lidien con dificultades productivas

Por importante que sea hacer que las conexiones que conducen a la comprensión de un campo sean explícitas, está claro que esto por sí solo no es suficiente para producir una comprensión profunda en los estudiantes. En nuestra cultura, existe una creencia muy difundida en el mito de que la comprensión llega de repente, como un relámpago, en un momento del tipo “¡ya lo tengo!” (*¡a-ha!*). Si tan solo fuera tan simple. En realidad, la comprensión es algo que se adquiere gradualmente con el tiempo, a través del esfuerzo de cada uno de los estudiantes. Si un estudiante experimenta el aprendizaje como algo fácil y sin esfuerzo, esto generalmente significa que no retendrá lo aprendido (Koriat y Bjork 2005). Todos hemos tenido la experiencia de observar a un profesor resolver un problema y pensar “Eso parece fácil. Yo también puedo hacerlo”. Pero, al final, cuando estamos solos, con frecuencia descubrimos que no podemos hacerlo

Esta mirada “quien quiere celeste que le cueste” del aprendizaje es consistente con un amplio corpus de investigación de las ciencias del aprendizaje. Muchos estudios demuestran la superioridad del aprendizaje activo por sobre el aprendizaje pasivo (Bean 2011; Michael 2006; Prince 2004). El neurocientífico Stanislas Dehaene (2020), en un análisis de amplio espectro de la literatura, considera el *involucramiento activa* como uno de los cuatro pilares del aprendizaje. Dehaene escribe: “un organismo pasivo no aprende casi nada, porque aprender requiere de una generación activa de hipótesis, con motivación y curiosidad” (p. xxvii). Bjork y Bjork (2011) acuñaron el término “dificultades deseables” para referirse a la dificultad que necesaria y productivamente acompaña al aprendizaje duradero. Por ejemplo, los estudios sobre el *efecto examen* (*testing effect*) muestran que los estudiantes aprenden más de tratar de responder preguntas para ponerse a prueba en contraste a que les vuelvan a presentar la misma información (McDaniel et al. 2007; Rowland 2014).

Las dificultades productivas no solo son importantes por sí solas, sino que también juegan un rol en la forma en que los estudiantes aprenden a formar conexiones explícitas. En una variedad de paradigmas de investigación, se ha demostrado que dar a los estudiantes oportunidades de esforzarse en resolver una tarea desafiante *antes* de presentarles las soluciones es más efectiva que la típica secuencia en que la enseñanza directa precede a la práctica (Hiebert et al. 1996; Vygotsky 1980). Cuando lidian con una tarea desafiante, los estudiantes inevitablemente se esfuerzan para conectar las características del problema con sus conocimientos previos. Esto no solo los ayuda a identificar lagunas en sus conocimientos, sino que también los prepara para la enseñanza posterior, que conectará explícitamente sus conocimientos previos con los conceptos y representaciones claves de un campo (Capon y Kuhn 2004; Lawson et al. 2019a; Schwartz y Bransford 1998).

En nuestro libro virtual, diseñamos cada página usando una pedagogía de “dificultades primero” y les pedimos a los estudiantes que respondan preguntas, a menudo en un formato de respuesta abierta, antes de presentarles la información y las conexiones explícitas que podrían necesitar para dar una respuesta bien formulada. Por ejemplo, antes de discutir las propiedades de la media y la mediana, les presentamos a los estudiantes una distribución de 5 puntos de datos y les preguntamos: “¿En qué sentido la mediana podría ser un mejor modelo para esta distribución? ¿En qué sentido la media podría ser un mejor modelo?”. Poner la pregunta antes de la respuesta es contrario a lo que los estudiantes esperan, y a veces nos indican, en un intento de ayudarnos, que “nos hemos equivocado en el orden”.

Otra estrategia que usamos para aumentar las dificultades productivas (y la carga cognitiva relevante) es eliminar las oportunidades de calcular del libro. Queremos que los estudiantes gasten su energía en lidiar con los conceptos fundamentales y con las conexiones entre estos. Pero, ya que los estudiantes universitarios de los Estados Unidos tienden a equiparar hacer matemáticas con hacer cálculos, con frecuencia, si se les da la oportunidad, empiezan a calcular antes de haber tenido la oportunidad de pensar en un problema, en cómo se relaciona con los conceptos fundamentales e, incluso, en cuáles cálculos podrían ser los más apropiados, dada la situación. Una forma de prevenir los cálculos prematuros y reservar la atención para las conexiones conceptuales es darles a los estudiantes problemas que no contengan números, lo que hace que los cálculos sean imposibles (Givvin et al. 2019; Lawson et al. 2019b). En nuestro libro, nos demoramos en presentar cualquier fórmula o cálculo hasta el capítulo 5 y, en lugar de esto, les pedimos a los estudiantes que trabajen en desarrollar sus ideas intuitivas sobre los modelos y la comparación entre modelos examinando y discutiendo representaciones gráficas de datos (p. ej., histogramas o diagramas de cajas).

Por ejemplo, en el capítulo 4, los estudiantes crean histogramas con facetas para comparar las distribuciones de propinas en restaurantes entre dos condiciones asignadas aleatoriamente en un experimento, una en la que el mesero pone una carita feliz en la cuenta y otra donde no lo hace. En vez de calcular o exponer las medias de los dos grupos, les preguntamos a los estudiantes si piensan que la variación en las propinas se explica por medio de la manipulación experimental. Esto conduce a una enriquecedora discusión de lo que significa “explicar” la variación. Trabajando con una definición intuitiva de “explicar”, reformulamos la pregunta como: “¿Saber en qué condición estaba una mesa nos ayuda a predecir mejor la propina?”. Pensar en esta pregunta ayuda a los estudiantes a ver que tanto la tendencia central como la variación son importantes para responder la pregunta. Gran parte de esta información se obviaría si los estudiantes se apuraran a calcular las diferencias entre las medias de los dos grupos.

### **Principio #3: Entregar oportunidades de realizar práctica deliberada**

Nuestros primeros dos principios funcionan en conjunto para dar forma a la experiencia real de una oportunidad de aprendizaje específica. Esforzarse productivamente para hacer conexiones entre los problemas y la estructura conceptual fundamental de un campo es el material en bruto a partir del cual se forja la comprensión. Pero desarrollar conocimientos transferibles en un campo complejo es una perspectiva de larga data (Ericsson 2018; Ericsson et al. 2007) y sucede a vaivenes (Felder y Silverman 1988). Para que los estudiantes desarrollen una comprensión profunda de un campo, necesitaremos encontrar formas de entregarles oportunidades reiteradas de esforzarse para hacer conexiones importantes durante periodos largos de tiempo. En otras palabras, los estudiantes deben practicar cómo hacer las conexiones. Generalmente se acepta que aprender una habilidad requiere de práctica; nosotros sostenemos que comprender requiere de práctica también.

Esto nos lleva al tercer principio de nuestro marco: la práctica deliberada. Práctica deliberada es un término proveniente de la literatura sobre la experticia (Ericsson 2017; Ericsson et al. 1993). Aunque normalmente se la discute en relación con actividades como música, ajedrez y conductas motoras, mucho de lo que se plantea sobre lo que hace que la práctica sea efectiva debiera ser igualmente aplicable cuando la tarea sea desarrollar competencias en conceptos y hacer conexiones entre ellos, como sucede cuando se la aplica a la adquisición de habilidades.

Vale la pena empezar por dejar en claro que la práctica deliberada no es lo mismo que la práctica repetitiva. La práctica repetitiva conduce a la fluidez, lo que genera en los estudiantes la sensación de que un concepto o habilidad se está volviendo más fácil con el tiempo (p.ej., Bjork et al. 2013). La automaticidad, que es la meta de la práctica repetitiva, también puede ser su pérdida. La sensación de fluidez es una señal de que los estudiantes se han estancado, no de que están profundizando su comprensión (Ericsson 2008).

El desafío más importante para los aspirantes a expertos es evitar el estancamiento en el desarrollo que se asocia con la automaticidad y adquirir las habilidades cognitivas que respalden su aprendizaje y mejora continua. Al buscar activamente tareas demandantes –a menudo entregadas por sus profesores o instructores– que los fueren a involucrarse en la resolución de problemas y ampliar el rango de su desempeño, los expertos se sobreponen a los efectos perjudiciales de la automaticidad y adquieren y refinan activamente mecanismos cognitivos para respaldar la mejora y aprendizaje continuos” (Ericsson 2006, p. 696).

Aunque reconocemos la necesidad de que ciertas habilidades sean de fácil acceso en el repertorio de un estudiante, nuestro fin último es que los estudiantes sean capaces de recurrir a ellos de una forma que no sea rutinaria, para que puedan hacer uso de ellos en situaciones novedosas.

La práctica deliberada exige que los materiales instructivos mantengan un nivel constante (y alto) de desafío a medida que se desarrollan las habilidades. Esto se logra aumentando la dificultad de las conexiones que se practican para cumplir con la capacidad de crecimiento de un individuo, todo en concordancia con una trayectoria de aprendizaje deseada. Como diseñadores de contenido (y profesores), debemos ayudar a definir y diseñar las tareas que se practican “para corregir alguna debilidad específica y preservar otros aspectos exitosos de la función al mismo tiempo (Ericsson 2006, p. 700). Debemos asegurar que los estudiantes sigan practicando conexiones en situaciones cada vez más desafiantes y que pasen más tiempo en los puntos en que tengan mayores debilidades. Volviendo a nuestra analogía de la banda elástica del principio del artículo, nuestro libro de texto debe expandir continuamente el alcance de la banda elástica para adelantarse al desarrollo de la comprensión del área de conocimientos por parte de los estudiantes y continuar abarcando lo que contenía inicialmente al mismo tiempo.

Una de las formas más efectivas de aumentar el desafío (y expandir la banda elástica) es variar continuamente el contexto, forzando a los estudiantes a adaptar continuamente su comprensión conceptual a situaciones nuevas. Una forma de hacer esto en un programa de estudios de estadística es introducir constantemente nuevos conjuntos de datos a los que los estudiantes deban aplicar sus conocimientos en desarrollo. En nuestro libro virtual, usamos un número muy limitado de conjuntos. Pero cuando enseñamos el curso, introducimos nuevos datos en prácticamente todas las sesiones de clases. Le dejamos esto al profesor, porque la estadística se enseña en muchas facultades académicas y los estudiantes de esas facultades tienen intereses diferentes. Los datos son la forma más directa de conectar la práctica de análisis de datos de los estudiantes con las cosas que más les importan. Queremos que los estudiantes lleguen a ver la estadística como una herramienta que pueden aplicar de forma general, en una variedad de contextos, para ayudarlos a entender el mundo.

Si los principios de la práctica deliberada se aplicaran por sí solos al aprendizaje de estadística, nos encontraríamos con estudiantes que aprenden gradualmente una serie de habilidades de análisis de datos con cada vez más complejidad. Incluso con un solo examen de estadística —por ejemplo, ANOVA o análisis de la varianza— podrían empezar con una simple factorial de  $2 \times 2$  y aprender gradualmente a manejar diseños experimentales con covariados, medidas repetidas y niveles anidados. Sin embargo, todo esto podría lograrse sin prestar atención a las conexiones conceptuales entre estos casos especiales y cómo estos conceptos podrían aplicarse a otros exámenes estadísticos. Entonces, aunque añadimos la práctica deliberada a nuestra tríada de principios que orientan el diseño de experiencias de aprendizaje, aplicarla en combinación con las dos primeras es fundamental.

Nuestro objetivo no es solo la adquisición de habilidades, sino apoyar la habilidad de los estudiantes de percibir conexiones entre contextos y prácticas, conceptos fundamentales del área y representaciones clave. Son estas conexiones las que harán posible que los estudiantes coordinen sus habilidades y las adapten a las necesidades de nuevos contextos y situaciones. Y creemos que la única forma de aumentar la fortaleza y la robustez de estas conexiones es por medio de experimentar dificultades productivas. Dicho de manera simple, si queremos que los estudiantes tengan conocimientos que sean flexibles y transferibles a situaciones nuevas e, incluso, imprevistas, queremos crear oportunidades para la práctica deliberada de la transferencia en sí misma.

## Conectar todo

En resumen, es útil situar el marco sobre cómo practicar conexiones en un escenario pedagógico más amplio. Una simple tabla de dos por dos nos ayuda a hacer esto (ver Fig. 5). En una dimensión, tenemos las dificultades productivas; en la otra, las conexiones explícitas. Cuando ninguna característica está presente, como en la esquina superior izquierda, tenemos la simple memorización de información y procedimientos desconectados. Los estudiantes solo escuchan al profesor y luego repiten lo que ha dicho o los pasos que ha demostrado.



Si logramos plantear desafíos, pero ningún intento de establecer conexiones explícitas con los conceptos o las representaciones fundamentales del campo, terminamos en la esquina inferior izquierda. Esta es el área del aprendizaje por descubrimiento. Si tenemos conexiones explícitas, pero no dificultades, tenemos una charla bien organizada. Una charla de este tipo entrega una sensación de fluidez porque un buen orador despliega la estructura de forma explícita y clara. Sin embargo, a menos que el estudiante se involucre en el trabajo activo de internalizar las conexiones en su propio modelo mental, el resultado no será la comprensión. El equilibrio ideal, como nosotros lo llamamos, está en el cuadrante inferior derecho. Aquí es donde tenemos tanto dificultades productivas como conexiones explícitas.

Sin embargo, solo encontrar este punto ideal una vez o, incluso, ocasionalmente, no es suficiente. La práctica deliberada añade la dimensión del tiempo. La comprensión se desarrolla lentamente. En campos académicos complejos, tales como la estadística, la comprensión se alcanza en semanas, meses y años. Por lo tanto, los diseñadores instruccionales necesitan pensar con cuidado en cómo establecer la secuencia de las actividades pedagógicas, para apoyar la profundización gradual de la comprensión conceptual. Se ha escrito mucho sobre el desarrollo de habilidades complejas (van Merriënboer 1997). Nuestro enfoque está puesto explícitamente en la parte de la comprensión. La comprensión está en el origen de la transferencia lejana y el conocimiento flexible (Barnett y Ceci 2002; Bedard y Chi 1992). Estamos recién empezando a pensar de forma explícita en diseñar un tipo de enseñanza que asuma específicamente el crecimiento de la comprensión conceptual como su objetivo.

## Resumen

En este artículo hemos propuesto un marco práctico de diseño instruccional en campos académicos complejos. Nuestro foco específico es el desarrollo de la comprensión. Siguiendo los estudios sobre la experticia, proponemos lo que creemos que se necesitaría para producir estudiantes que “vean la estructura” del campo de conocimiento en cuestión y sean capaces de transferir sus conocimientos a situaciones nuevas e imprevistas. Llamamos a nuestro sistema el marco *para practicar cómo hacer conexiones entre conocimientos*. Muchos estudiantes aprenden elementos de los conocimientos – datos, hechos y habilidades – que componen un campo, pero no logran ver cómo se relacionan entre sí. Nuestra hipótesis es que la interconectividad de los conocimientos es lo que los hace transferibles. Como diseñadores instruccionales, necesitamos darles a los estudiantes oportunidades de practicar cómo hacer conexiones durante periodos extendidos de tiempo.



**Fig. 5** Escenario pedagógico para practicar cómo hacer conexiones.



El marco que proponemos tiene dos partes, cada una de las cuales responde una pregunta importante. La primera pregunta que abordamos es: si las conexiones son importantes para la comprensión, ¿qué tipos específicos de conexiones, entre todas las posibles, queremos que hagan los estudiantes? Propusimos tres tipos de conexiones: con conceptos fundamentales, con representaciones claves y con el mundo real en el cual se espera aplicar el conocimiento del área. Revisamos la lógica de cada tipo de conexión y luego dimos algunos ejemplos de nuestra propia experiencia de aplicación de este marco al diseño y la implementación de un libro de texto introductorio de estadística.

La segunda pregunta que aborda el marco es: ¿cómo, considerando que ya hemos especificado cuáles son las conexiones fundamentales de un determinado campo, creamos oportunidades para que los estudiantes practiquen estas conexiones? Aunque la literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje es vasta, intentamos presentar un marco organizador simple. Los estudiantes necesitan experimentar dificultades productivas con conexiones explícitas y necesitan hacerlo continuamente durante periodos extendidos de tiempo (práctica deliberada). Existe un punto ideal para diseñar experiencias de aprendizaje, y creemos que este equilibrio está bien respaldado por la ciencia. Sí, hemos tratado muchos detalles superficialmente. Pero, en un sentido práctico, los vacíos existentes deben ser llenados por los educadores que están trabajando en las trincheras para lograr aprendizajes profundos en todos los estudiantes y en una amplia variedad de campos complejos.

## Desafíos de la implementación

Implementar este sistema no será fácil en la práctica, y queremos reconocer eso. Primero, identificar los conceptos fundamentales que estructuran un campo es difícil. Se requiere de un conocimiento profundo de los contenidos, así como de conocimientos pedagógicos del contenido. Segundo, identificar qué conexiones hacer explícitas a lo largo de un curso no es una tarea trivial. Este elemento fundamental de nuestro enfoque pedagógico es una de las cosas que lo distingue de la enseñanza más tradicional, y no existe una fuente accesible de listas de conexiones esperadas de la misma forma que sí existen listas de “elementos aislados” de conocimientos. Tercero, avanzar hacia un programa de estudios que sea el resultado de la aplicación de los tres principios de diseño que hemos descrito y ofrecerles a los estudiantes oportunidades suficientes de practicar cómo hacer conexiones es un proceso lento. Sin embargo, estamos convencidos de que la pedagogía “lenta y que se adhiere” (Hess y Azuma 1991) a la que esta perspectiva da origen contribuye a la habilidad de los estudiantes de retener su aprendizaje en el curso del tiempo.

Como docentes que intentaron descomponer un área perversa (estadística) en conexiones relevantes y luego hacer que nuestros estudiantes practicasen cómo hacer esas conexiones muchas veces durante un semestre, al mismo tiempo que lidiábamos con proyectores rotos, exámenes, horarios de oficina y todo el resto de los gajes de enseñar un curso, conocemos por experiencia propia cuán difícil es de implementar. También reconocemos que, aunque se basa en la experiencia puntual de haber identificado conceptos fundamentales e implementar un programa completo de estudios, nuestro marco para practicar cómo hacer conexiones se ha aplicado solo en un campo. Invitamos a otros educadores a aceptar el desafío de hacer lo mismo en otras áreas. Al hacerlo, sin duda contribuirán a perfeccionar y mejorar este marco. Nuestras experiencias han profundizado nuestra convicción de que este puede ayudar a guiarnos hacia un diseño instruccional más exitoso.

**Información de financiamiento:** Este proyecto se ha hecho posible en parte gracias a un fondo de la Chan Zuckerberg Initiative DAF, un fondo asesorado de la Silicon Valley Community Foundation (DRL-1229004) y a un fondo de la California Governor's Office of Planning and Research (OPR18115).

## Cumplimiento de estándares éticos

**Conflictos de interés:** Los autores declaran que no tienen conflictos de interés.

**Open Access.** Este artículo se encuentra bajo una licencia internacional de atribución de Creative Commons 4.0, lo que permite usar, compartir, adaptar, distribuir y reproducir este artículo en cualquier medio o formato, siempre y cuando se dé crédito apropiado al autor original y la fuente, se entregue un vínculo a la licencia de Creative Commons y se indique si se hicieron cambios. Las imágenes y otros materiales de terceros están incluidos en la licencia de Creative Commons, a menos que se indique algo al contrario en una línea que acredite el material. Si el material no se incluye en la licencia de Creative Commons del artículo y el uso que usted desea hacer de él no está permitido por las regulaciones reglamentarias o excede su uso permitido, necesitará obtener permiso directamente del poseedor de los derechos de autor. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

## Traducción

Traducción al español y adaptación realizada por Aptus ([aptus.org](http://aptus.org)) con el apoyo de la Fundación Educacional Hernán Briones Gorostiaga.

## Referencias

- Ainsworth, S. (2008). The educational value of multiple-representations when learning complex scientific concepts. In J. K. Gilbert, M. Reiner, & M. Nakhleh (Eds.), *Visualization: theory and practice in science education. Models and modeling in science education* (Vol. 3, pp. 191–203). Dordrecht: Springer.
- Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *The Journal of the Learning Sciences*, 11(1), 25–61.
- Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J., & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology*, 103(1), 1–18.
- Alfieri, L., Nokes-Malach, T. J., & Schunn, C. D. (2013). Learning through case comparisons: a meta-analytic review. *Educational Psychologist*, 48(2), 87–113.
- Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D. (2000). Learning from examples: instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research*, 70(2), 181–214.
- Barnett, S. M., & Ceci, S. J. (2002). When and where do we apply what we learn?: a taxonomy for far transfer. *Psychological Bulletin*, 128(4), 612–637.
- Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 115–131.
- Bassok, M. (2001). Semantic alignments in mathematical word problems. In D. Gentner, K. J. Holyoak, & B. N. Kokinov (Eds.), *The analogical mind: perspectives from cognitive science* (pp. 401–433). Cambridge, MA, US: The MIT Press.
- Batanero, C. (2016). Understanding randomness: challenges for research and teaching. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34–49). Prague: European Society for Research in Mathematics Education.
- Batanero, C., Green, D. R., & Serrano, L. R. (1998). Randomness, its meanings and educational implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(1), 113–123.
- Bean, J. C. (2011). *Engaging ideas: the professor's guide to integrating writing, critical thinking, and active learning in the classroom*. John Wiley & Sons.
- Bedard, J., & Chi, M. T. (1992). Expertise. *Current Directions in Psychological Science*, 1(4), 135–139.
- Bilalic, M., & Campitelli, G. (2018). Studies of the activation and structural changes of the brain associated with expertise. In K. A. Ericsson, R. R. Hoffman, A. Kozbelt, & A. M. Williams (Eds.), *The Cambridge handbook of expertise and expert performance* (pp. 233–249). Cambridge University Press.
- Bjork, E. L., & Bjork, R. A. (2011). Making things hard on yourself, but in a good way: creating desirable difficulties to enhance learning. In M. A. Gernsbacher & J. Pomerantz (Eds.), *Psychology and the real world: essays illustrating fundamental contributions to society* (2nd ed., pp. 55–64). New York, NY: Worth.
- Bjork, R. A., Dunlosky, J., & Kornell, N. (2013). Self-regulated learning: beliefs, techniques, and illusions. *Annual Review of Psychology*, 64(1), 417–444.
- Bransford, J. D., & Schwartz, D. L. (1999). Chapter 3: rethinking transfer: a simple proposal with multiple implications. *Review of Research in Education*, 24(1), 61–100.

- Bransford, J. D., & Stein, B. (1984). *The IDEAL Problem Solver: a guide for improving thinking, learning, and creativity*. New York: W.H. Freeman.
- Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B. S., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: the role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 34(4), 663–689.
- Campitelli, G., & Gobet, F. (2005). The mind's eye in blindfold chess. *European Journal of Cognitive Psychology*, 17(1), 23–45.
- Capon, N., & Kuhn, D. (2004). What's so good about problem-based learning? *Cognition and Instruction*, 22(1), 61–79.
- Carbonell, K. B., Stalmeijer, R. E., Könings, K. D., Segers, M., & van Merriënboer, J. J. (2014). How experts deal with novel situations: a review of adaptive expertise. *Educational Research Review*, 12, 14–29.
- Chase, W. G., & Simon, H. A. (1973). Perception in chess. *Cognitive Psychology*, 4(1), 55–81.
- Chen, Z., & Klahr, D. (1999). All other things being equal: acquisition and transfer of the control of variables strategy. *Child Development*, 70(5), 1098–1120.
- Chi, M. T. (2000). Self-explaining expository texts: the dual processes of generating inferences and repairing mental models. *Advances in Instructional Psychology*, 5, 161–238.
- Chi, M. T. (2011). Theoretical perspectives, methodological approaches, and trends in the study of expertise. In Y. Li & G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction* (pp. 17–39). Springer.
- Chi, M. T., & Koeske, R. D. (1983). Network representation of a child's dinosaur knowledge. *Developmental Psychology*, 19(1), 29–39.
- Chi, M. T., Feltovich, P. J., & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5(2), 121–152.
- Chi, M. T., Glaser, R., & Rees, E. (1982). Expertise in problem solving: advances in the psychology of human intelligence. *Erlbaum*, 1–75.
- de Groot, A. D. (1965). *Thought and choice in chess*. The Hague: Mouton (Original work published 1946).
- Dehaene, S. (2020). *How we learn: why brains learn better than any machine... for now*. Penguin.
- Endsley, M. R. (2018). Expertise and situation awareness. In K. A. Ericsson, R. R. Hoffman, A. Kozbelt, & A. M. Williams (Eds.), *The Cambridge handbook of expertise and expert performance*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781316480748.036>.
- Engle, R. A., Lam, D. P., Meyer, X. S., & Nix, S. E. (2012). How does expansive framing promote transfer? Several proposed explanations and a research agenda for investigating them. *Educational Psychologist*, 47(3), 215–231.
- Epstein, D. J. (2019). *Range: why generalists triumph in a specialized world*. New York, NY: Riverhead Books.
- Ericsson, K. A. (2006). The influence of experience and deliberate practice on the development of superior expert performance. In K. A. Ericsson, N. Charness, P. Feltovich, and R. Hoffman (Eds.), *The Cambridge handbook of expertise and expert performance* (p. 685–706). Cambridge University Press.
- Ericsson, K. A. (2008). Deliberate practice and acquisition of expert performance: a general overview. *Academic Emergency Medicine*, 15(11), 988–994.
- Ericsson, K. A. (2017). Expertise and individual differences: the search for the structure and acquisition of experts' superior performance. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Cognitive Science*, 8(1–2), e1382.
- Ericsson, K. A. (2018). Superior working memory in experts. In K. A. Ericsson, R. R. Hoffman, A. Kozbelt, & A. M. Williams (Eds.), *The Cambridge handbook of expertise and expert performance* (p. 696–713). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781316480748.036>.
- Ericsson, K. A., & Charness, N. (1994). Expert performance: its structure and acquisition. *American Psychologist*, 49(8), 725–747.
- Ericsson, K. A., & Kintsch, W. (1995). Long-term working memory. *Psychological Review*, 102(2), 211–245.
- Ericsson, K. A., & Pool, R. (2016). *Peak: secrets from the new science of expertise*. New York, NY: Houghton Mifflin Harcourt.
- Ericsson, K. A., Krampe, R. T., & Tesch-Römer, C. (1993). The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance. *Psychological Review*, 100(3), 363–406. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.100.3.363>.
- Ericsson, K. A., Hoffman, R. R., Kozbelt, A., & Williams, A. M. (Eds.). (2006). *The Cambridge handbook of expertise and expert performance*. New York, NY: Cambridge University Press.
- Ericsson, K. A., Prietula, M. J., & Cokely, E. T. (2007). The making of an expert. *Harvard Business Review*, 85(7/8), 11hoff4.
- Ericsson, K. A., Hoffman, R. R., & Kozbelt, A. (Eds.). (2018). *The Cambridge handbook of expertise and expert performance*. Cambridge University Press.
- Felder, R. M., & Silverman, L. K. (1988). Learning and teaching styles in engineering education. *Engineering Education*, 78(7), 674–681.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2005). A framework for teaching and assessing reasoning about variability. *Statistics Education Research Journal*, 4(1), 92–99 <http://www.stat.auckland.ac.nz/ser>.
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping: a theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7(2), 155–170.
- Gentner, D., & Markman, A. B. (1997). Structure mapping in analogy and similarity. *American Psychologist*, 52(1), 45–56.
- Gentner, D., & Rattermann, M. J. (1991). Language and the career of similarity. *Perspectives on Language and Thought: Interrelations in Development*, 225.
- Gentner, D., Loewenstein, J., & Thompson, L. (2003). Learning and transfer: a general role for analogical encoding. *Journal of Educational Psychology*, 95(2), 393–408.
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15(1), 1–38.

- Gilbert, J. K., & Treagust, D. F. (2009). Introduction: macro, submicro and symbolic representations and the relationship between them: key models in chemical education. In *Multiple representations in chemical education* (pp. 1–8). Dordrecht: Springer.
- Ginsburg, H. (1977). *Children's arithmetic: the learning process*. D. van Nostrand.
- Givvin, K. B., Moroz, V., Loftus, W., & Stigler, J. W. (2019). Removing opportunities to calculate improves students' performance on subsequent word problems. *Cognitive Research: Principles and Implications*, 4(1), 24.
- Glaser, R., & Chi, M. T. H. (1988). Overview. In M. T. H. R. Chi, Glaser, & M. J. Farr (Eds.), *The nature of expertise* (pp. 15–27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Goldwater, M. B., & Schalk, L. (2016). Relational categories as a bridge between cognitive and educational research. *Psychological Bulletin*, 142(7), 742–757.
- Greeno, J. G., Moore, J. L., & Smith, D. R. (1993). Transfer of situated learning. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: intelligence, cognition, and instruction* (pp. 99–127). Norwood, NJ: Ablex.
- Handelsman, J., Ebert-May, D., Beichner, R., Bruns, P., Chang, A., DeHaan, R., Gentile, J., Lauffer, S., Stewart, J., Tilghman, S. M., & Wood, W. B. (2004). Scientific teaching. *Science*, 23(304), 521–522.
- Hatano, G., & Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. In H. Stevenson, H. Azuma, & K. Hakuta (Eds.), *Child development and education in Japan* (pp. 262–272). New York, NY: Freeman.
- Hess, R. D., & Azuma, H. (1991). Cultural support for schooling: contrasts between Japan and the United States. *Educational Researcher*, 20(9), 2–9.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 65–97).
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A., & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: the case of mathematics. *Educational Researcher*, 25(4), 12–21.
- Hiebert, J., Gallimore, R., & Stigler, J. W. (2002). A knowledge base for the teaching profession: what would it look like and how can we get one? *Educational Researcher*, 31(5), 3–15.
- Hodson, D. (1988). Toward a philosophically more valid science curriculum. *Science Education*, 72(1), 19–40.
- Holyoak, K. J. (1991). 12 symbolic connectionism: toward third-generation theories of expertise. *Toward a general theory of expertise: Prospects and limits*, 301.
- Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science*, 320(5875), 454–455.
- Kaplan, J. J., Rogness, N. T., & Fisher, D. G. (2014). Exploiting lexical ambiguity to help students understand the meaning of random. *Statistics Education Research Journal*, 13(1).
- Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2017). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–56). Routledge.
- Kellman, P. J., Massey, C. M., & Son, J. Y. (2010). Perceptual learning modules in mathematics: enhancing students' pattern recognition, structure extraction, and fluency. *Topics in Cognitive Science*, 2(2), 285–305.
- Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: an analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, 41(2), 75–86.
- Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Por qué la instrucción con guía mínima no funciona: un análisis del fracaso de la enseñanza constructivista, por descubrimiento, basada en problemas, experiencial y basada en la indagación. *Educational Psychologist*, 41(2), 75–86.
- Klahr, D., & Nigam, M. (2004). The equivalence of learning paths in early science instruction: effects of direct instruction and discovery learning. *Psychological Science*, 15(10), 661–667.
- Koedinger, K. R., Corbett, A. T., & Perfetti, C. (2012). The Knowledge-Learning-Instruction framework: bridging the science-practice chasm to enhance robust student learning. *Cognitive Science*, 36(5), 757–798.
- Koriat, A., & Bjork, R. A. (2005). Illusions of competence in monitoring one's knowledge during study. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 31(2), 187.
- Kozma, R. (2003). The material features of multiple representations and their cognitive and social affordances for science understanding. *Learning and Instruction*, 13(2), 205–226.
- Lachner, A., & Nückles, M. (2015). Bothered by abstractness or engaged by cohesion? Experts' explanations enhance novices' deep-learning. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 21(1), 101–115.
- Lachner, A., Gurlitt, J., & Nückles, M. (2012). A graph-oriented approach to measuring expertise-detecting structural differences between experts and intermediates. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 34(34), 653–658.
- Lagemann, E. C., & Shulman, L. S. (1999). *Issues in education research: problems and possibilities*. San Francisco, CA: Jossey-Bass Inc.
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. New York, NY: Cambridge University press.
- Lawson, A. P., Davis, C., & Son, J. Y. (2019a). Not all flipped classes are the same: using learning science to design flipped classrooms. *Journal of Scholarship in Teaching and Learning*, 19(5), 77–104.
- Lawson, A. P., Mirinjian, A., & Son, J. Y. (2019b). Can preventing calculations help students learn math? *Journal of Cognitive Education and Psychology*, 17(2), 178–197.

- Levin, J. R., & O'Donnell, A. M. (1999). What to do about educational research's credibility gaps? *Issues in Education*, 5(2), 177–229.
- Lombrozo, T. (2006). The structure and function of explanations. *Trends in Cognitive Sciences*, 10(10), 464–470.
- Mayer, R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist*, 59(1), 14–19.
- McDaniel, M. A., Roediger, H. L., & McDermott, K. B. (2007). Generalizing test-enhanced learning from the laboratory to the classroom. *Psychonomic Bulletin & Review*, 14(2), 200–206.
- McKeithen, K. B., Reitman, J. S., Rueter, H. H., & Hirtle, S. C. (1981). Knowledge organization and skill differences in computer programmers. *Cognitive Psychology*, 13(3), 307–325.
- Michael, J. (2006). Where's the evidence that active learning works? *Advances in Physiology Education*, 30(4), 159–167.
- National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine. (2018). *How people learn II: learners, contexts, and cultures*. National Academies Press.
- National Council for Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics* (3rd ed.). National Council of Teachers of Mathematics.
- National Governors Association. (2010). *Common core state standards*. DC: Washington.
- North, J. S., Ward, P., Ericsson, A., & Williams, A. M. (2011). Mechanisms underlying skilled anticipation and recognition in a dynamic and temporally constrained domain. *Memory*, 19(2), 155–168.
- Novick, L. R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 14(3), 510.
- Novick, L. R., & Holyoak, K. J. (1991). Mathematical problem solving by analogy. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 17(3), 398.
- Paas, F., & van Gog, T. (2006). Optimising worked example instruction: different ways to increase germane cognitive load. *Learning and Instruction*, 16(2), 87–91.
- Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2003). Cognitive load theory and instructional design: recent developments. *Educational Psychologist*, 38(1), 1–4.
- Paas, F., van Gog, T., & Sweller, J. (2010). Cognitive load theory: new conceptualizations, specifications, and integrated research perspectives. *Educational Psychology Review*, 22(2), 115–121.
- Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory Into Practice*, 40(2), 118–127.
- Prince, M. (2004). Does active learning work? A review of the research. *Journal of Engineering Education*, 93(3), 223–231.
- Pruim, R., Kaplan, D. T., & Horton, N. J. (2017). The mosaic package: helping students to “think with data” using R. *The R Journal*, 9(1), 77–102.
- Reed, S. K. (1985). Effect of computer graphics on improving estimates to algebra word problems. *Journal of Educational Psychology*, 77(3), 285–298.
- Reeves, L., & Weisberg, R. W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin*, 115(3), 381–400.
- Renkl, A., Mandl, H., & Gruber, H. (1996). Inert knowledge: analyses and remedies. *Educational Psychologist*, 31(2), 115–121.
- Richland, L. E., Linn, M. C., & Bjork, R. A. (2007). Cognition and instruction: bridging laboratory and classroom settings. In *Handbook of Applied Cognition* (pp. 555–584).
- Richland, L. E., Stigler, J. W., & Holyoak, K. J. (2012). Teaching the conceptual structure of mathematics. *Educational Psychologist*, 47(3), 189–203.
- Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition*. Oxford University Press.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: an iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346–362. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346>.
- Robinson, V. M. (1998). Methodology and the research-practice gap. *Educational Researcher*, 27(1), 17–26.
- Ross, B. H. (1987). This is like that: the use of earlier problems and the separation of similarity effects. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 13(4), 629–639. <https://doi.org/10.1037/0278-7393.13.4.629>.
- Rowland, C. A. (2014). The effect of testing versus restudy on retention: a meta-analytic review of the testing effect. *Psychological Bulletin*, 140(6), 1432–1463. <https://doi.org/10.1037/a0037559>.
- Sarfo, F. K., & Elen, J. (2007). Developing technical expertise in secondary technical schools: the effect of 4C/ID learning environments. *Learning Environments Research*, 10(3), 207–221.
- Savery, J. R., & Duffy, T. M. (1995). Problem based learning: an instructional model and its constructivist framework. *Educational Technology*, 35(5), 31–38.
- Schwartz, D. L., & Bransford, J. D. (1998). A time for telling. *Cognition and Instruction*, 16(4), 475–5223.
- Schwartz, D. L., & Goldstone, R. (2015). Learning as coordination. In *Handbook of Educational Psychology* (pp. 61–75).
- Son, J. Y., Smith, L. B., & Goldstone, R. L. (2008). Simplicity and generalization: short-cutting abstraction in children's object categorizations. *Cognition*, 108(3), 626–638.
- Son, J. Y., Smith, L. B., & Goldstone, R. L. (2011). Connecting instances to promote children's relational reasoning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 108(2), 260–277.



- Son, J. Y., Blake, A., Fries, L., & Stigler, J. W. (under review). Modeling first: applying learning science to the teaching of introductory statistics.
- Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2009). Making algebra work: instructional strategies that deepen student understanding, within and between representations. *ERS Spectrum*, 27(2), 11–18.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2009). *The teaching gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. Simon and Schuster.
- Stigler, J. W., Givvin, K. B., & Thompson, B. J. (2010). What community college developmental mathematics students understand about mathematics. *MathAMATYC Educator*, 1(3), 4–16.
- Stigler, J. W., Son, J. Y., Givvin, K. B., Blake, A., Fries, L., Shaw, S. T., & Tucker, M. C. (2020). The Better Book approach for education research and development. *Teachers College Record*.
- Strauss, S. (1998). Cognitive development and science education: toward a middle level model. In W. Damon (Series Ed.) and I. Sigel, K. A. Renninger (Vol. Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. 4. Child psychology in practice* (5th edn., pp. 357–400). New York: Wiley.
- Susilo, A. P., van Merriënboer, J., van Dalen, J., Claramita, M., & Scherpbier, A. (2013). From lecture to learning tasks: use of the 4C/ID model in a communication skills course in a continuing professional education context. *The Journal of Continuing Education in Nursing*, 44(6), 278–284.
- Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: effects on learning. *Cognitive Science*, 12(2), 257–285.
- Tabachneck-Schijf, H. J., Leonardo, A. M., & Simon, H. A. (1997). CaMeRa: a computational model of multiple representations. *Cognitive Science*, 21(3), 305–350.
- Toth, E. E., Klahr, D., & Chen, Z. (2000). Bridging research and practice: a cognitively based classroom intervention for teaching experimentation skills to elementary school children. *Cognition and Instruction*, 18(4), 423–459.
- Tseng, S. S., Su, J. M., Hwang, G. J., Hwang, G. H., Tsai, C. C., & Tsai, C. J. (2008). An object-oriented course framework for developing adaptive learning systems. *Journal of Educational Technology & Society*, 11(2), 171–191.
- Tsui, C. Y., & Treagust, D. F. (2013). Introduction to multiple representations: their importance in biology and biological education. In D. Treagust & C. Y. Tsui (Eds.), *Multiple representations in biological education. Models and modeling in Science Education* (Vol. 7). Dordrecht: Springer.
- Uttal, D. H., Scudder, K. V., & DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: a new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18(1), 37–54.
- Uttal, D. H., O'Doherty, K., Newland, R., Hand, L. L., & DeLoache, J. (2009). Dual representation and the linking of concrete and symbolic representations. *Child Development Perspectives*, 3(3), 156–159.
- van Merriënboer, J. J. (1997). *Training complex cognitive skills: a four-component instructional design model for technical training*. Educational Technology Publications.
- van Merriënboer, J. J., & Sweller, J. (2005). Cognitive load theory and complex learning: recent developments and future directions. *Educational Psychology Review*, 17(2), 147–177.
- van Merriënboer, J. J., Clark, R. E., & de Croock, M. B. (2002). Blueprints for complex learning: the 4C/ID- model. *Educational Technology Research and Development*, 50(2), 39–61.
- Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Weisberg, D. S., Kittredge, A. K., Hirsh-Pasek, K., Golinkoff, R. M., & Klahr, D. (2015). Making play work for education. *Phi Delta Kappan*, 96(8), 8–13.
- Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 10–26.
- Woltz, D. J., Gardner, M. K., & Bell, B. G. (2000). Negative transfer errors in sequential cognitive skills: strong- but-wrong sequence application. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 26(3), 601–625.

**Publisher's Note** Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.