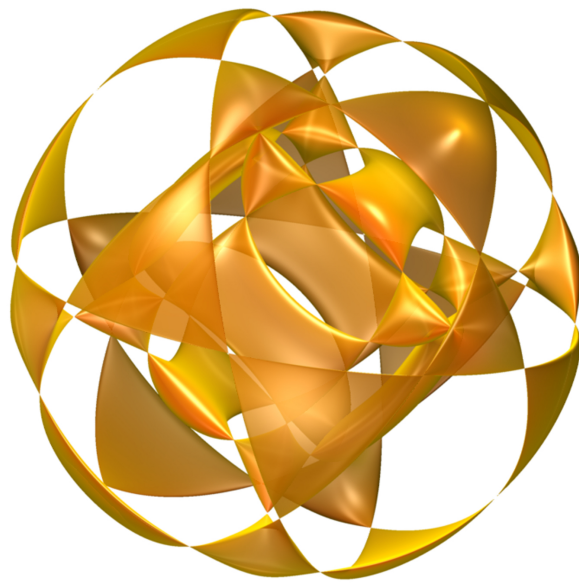


THOMAS AEBERHARD und DENIS MARTIN



# Mathematik für die kaufmännische Berufsmaturität

10. Auflage (2020)  
Gemäss Rahmenlehrplan 2012

**Denis Martin**, dipl. nat. ETH (†)

Unterrichtete von 1997 bis 2010 die Fächer Geografie, Wirtschaft & Gesellschaft und Mathematik.

**Thomas Aeberhard**, dipl. phil. II, Universität Zürich

Unterrichtet seit 2000 die Fächer Mathematik und T&U (Biologie) an technischen und kaufmännischen Berufsmaturitätsschulen.

**10. Auflage, Juni 2019** (Korrigiert und nachgeführt 2020)

**Hinweis an die Lehrpersonen:** Gegenüber der 9. Auflage sind neue Aufgaben durch eine rote Marginalie ★ am Rand gekennzeichnet.

Das Kapitel 20 «Datenanalyse» ist als Selbstlerneinheit «SOL» gestaltet und trägt am Blattrand das Zeichen **SOL**.

Die neunte Auflage (2018) kann ohne Einschränkung neben der aktuellen Auflage verwendet werden; ab S. 167 erhöht sich die Seitenzahl um +2 und ab Seite 264 im Kapitel 20 «Datenanalyse» kommen neue Aufgaben hinzu.

Allfällige Fehlerhinweise und ergänzendes Material finden Sie unter [www.liberabbaci.ch](http://www.liberabbaci.ch)

Das Lehrmittel einschliesslich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte liegen bei der Liberabbaci GmbH. Jede weitere Verwendung – auch nur auszugsweise – bleibt untersagt oder aber bedarf der Bewilligung der Liberabbaci GmbH. Jede Verwertung ausserhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung der Autoren unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen sowie das Abspeichern in Computern und Verarbeiten mittels digitalen Systemen.

Umschlagbild: «Kunst<sup>5</sup>+5» von Torolf Saueremann, Hannover

Verwendete Software: Layout und Text in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X mit Hilfe der Open-source-Software *TeX-Shop* (Version 4.44, [www.texshop.org](http://www.texshop.org)), Abbildungen und Grafiken mit Hilfe von *Mathematica* ([www.wolfram.com](http://www.wolfram.com), V.12.0) und *GeoGebra* (V. 5.0.570.0-d, [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org))

Gedruckt auf speziellem Sicherheitspapier, das Fotokopien verunmöglicht oder diese klar als solche kennzeichnet (abhängig vom Fotokopiergerät) und somit das Original schützt.

**Die 10. Auflage wurde mit integriertem E-Book hergestellt. Mit dem Kauf Ihres Exemplars haben Sie auch einen persönlichen Lizenzschlüssel erhalten.**

Druck und Produktion E-Book: Edubook AG und Edubase AG, 5634-Merenschwand

ISBN 978-3-9523665-2-3 Alle Rechte vorbehalten.

©Liberabbaci GmbH, Drosselstrasse 16, 8038 Zürich  
[www.liberabbaci.ch](http://www.liberabbaci.ch)

## 1 Vorwort und Einleitung

Warum eigentlich betreiben Menschen Mathematik? Es gibt verschiedene Gründe. Hier sind drei:

1. Um die Welt, wie wir sie vorfinden, besser zu verstehen
2. Um die Welt zu gestalten.
3. Um ihrer selbst willen

Wenn Sie die Wetterprognose im Fernsehen anschauen, im Zug, Auto oder Flugzeug unterwegs sind oder beim Arzt ein Computertomogramm machen, steckt oft unsichtbare Technik dahinter. Physik, Informatik, Computer spielen hier eine wichtige Rolle und eben auch die Mathematik als Grundlage, damit diese Technik funktioniert. Die Welt besser zu verstehen und wenn möglich Einfluss auf sie zu nehmen, ist seit dem 17. Jahrhundert eine Triebfeder für die Weiterentwicklung der Mathematik. Fragen wie warum fällt ein Stein oder warum bewegen sich Maschinen waren Zeichen der zunehmenden Technisierung in Europa.

Die Mathematik liefert auch Instrumente um Hypothesen zu testen. Etwas vom Faszinierendsten in der Mathematik ist es, wenn plötzlich unvermutete Zusammenhänge entdeckt werden. So hat der Franzose JACQUES LASKAR nachgerechnet, welche Wirkung es hätte, wenn es den Mond, unseren treuen Begleiter, nicht gäbe. Er kam zum Schluss: **Es gäbe uns nicht!** Warum? Bekanntlich rotiert die Erde einmal in 24 Stunden um sich selbst. Die Rotationsachse selbst ist gegenüber der Umlaufbahn um die Sonne um rund  $23^\circ$  Grad geneigt; damit entstehen wechselnde Jahreszeiten. Die Rotationsachse der Erde selbst, so fand LASKAR heraus, wird durch den Mond und seine Anziehungskraft stabilisiert. Wäre der Mond nicht da, würde diese stabile Neigung beginnen, stark zu schwanken.



*«Si la lune n'existait pas, l'orientation de l'axe de rotation de la Terre ne serait pas stable, et subirait de large variations chaotiques aux cours des âges. Les changements climatiques engendrés par ces variations auraient alors perturbé fortement le développement de la vie organisée.»*<sup>1</sup>

Wir geben Ihnen auf den folgenden 268 Seiten das nötige Rüstzeug in Mathematik mit auf Ihren Weg um die in der kaufmännischen Welt steckende Mathematik besser zu verstehen.

---

<sup>1</sup>J. LASKAR: La Lune et l'origine de l'homme. Dans la revue "Pour la science", janv. 1995, Dossier "Le chaos".

### Zum Gebrauch des Lehrmittels

Wir haben uns mit der Theorie bewusst sehr zurückgehalten; ihre Erarbeitung respektive Ergänzung soll durch die Lehrperson erfolgen. Der Lernende soll lernen, selbstständig mathematische Aufgaben und Probleme zu lösen um damit einen Schritt in Richtung Fachhochschulreife zu erlangen.

*«Sage es mir, und ich werde es vergessen,  
erkläre es mir und ich werde es behalten,  
lass es mich tun, und ich werde es verstehen.»*  
Lao-Tse

Der Aufbau ist weitgehend – angelehnt an bewährte didaktische Konzepte – zweiseitig: dadurch kann die wenige Theorie an kommentierten Beispielen und Übungen verdeutlicht werden. Damit ist das schrittweise Verfolgen von Lösungen möglich ohne die Darstellung unterbrechen zu müssen. Meist findet der Lernende auf der linken Seite einer Doppelseite mehrere kommentierte Beispiele, die ihn beim selbstständigen Üben mit den Aufgaben der rechten Seite unterstützen.

Die Lösungen sind oft (und dies mit Absicht) ohne Grafiken oder detaillierte Lösungswege gehalten und sind jeweils in Kurzform am unteren rechten Blattrand zu finden. **Schwere oder zeitaufwändige Aufgaben** sind mit einem \* versehen.

Das Kapitel «Datenanalyse» ist über weite Strecken als Selbstlerneinheit konzipiert und weicht vom Aufbau her ab. Die Lösungen sind in diesem Teil nicht abgedruckt und werden nur den Lehrpersonen zur Verfügung gestellt. Weitere Details sind unter [www.liberabbaci.ch](http://www.liberabbaci.ch) zu finden.

Mit unserem Partner EDUBASE AG zusammen haben wir die vorliegende Printversion auf einer webbasierten Plattform als **E-Book** zu einem umfangreichen Werkzeug ausgebaut, das allen Beteiligten – Lehrpersonen und Lernenden – viele Vorteile und Zusatzmöglichkeiten wie geräte- und publikationsübergreifende Notizfunktion, Kommentare, Verlinkungen, Fotos oder Audiokommentare erlaubt. Alles lässt sich auch in bestehende Lernsysteme integrieren. Ebenso ist kollaboratives Arbeiten innerhalb einer Klasse Teil des Angebots.

Zuletzt möchten wir unseren Kolleginnen und Kollegen danken, die uns immer wieder wertvolle Feedbacks und Tipps für die Weiterentwicklung dieses Lehrmittels geben.

Ergänzendes Material finden Sie unter [www.liberabbaci.ch](http://www.liberabbaci.ch).

Anregungen oder Tipps nehmen wir gerne via E-mail entgegen: [info@liberabbaci.ch](mailto:info@liberabbaci.ch)

Zürich, im Juni 2020

Thomas Aeberhard



# Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort und Einleitung	III
2	Zahlen und Mengen	1
2.1	Mathematische Zeichen und Abkürzungen	1
2.2	Aussagenlogik	3
2.3	Betrag einer Zahl	5
2.4	Geschlossene und offene Intervalle	5
3	Rechnen mit ganzen Zahlen ( $\mathbb{Z}$ )	7
3.1	Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen	7
3.2	Multiplikation und Division von ganzen Zahlen	9
3.3	Multiplikation von Summen und Differenzen	11
3.4	Zerlegung von Summen in Produkte – Faktorisieren, Ausklammern	13
3.5	Division von ganzen Zahlen und Summen	17
4	Rechnen mit rationalen Zahlen ( $\mathbb{Q}$ )	19
4.1	Erweitern und Kürzen von Brüchen	19
4.2	Addition und Subtraktion von Brüchen	21
4.3	Multiplikation von Brüchen	23
4.4	Division von Brüchen – Doppelbrüche	25
5	Lineare Gleichungen mit einer Variablen	29
5.1	Begriff der Gleichung	29
5.2	Das Lösen von Gleichungen, Lösungsverfahren	30
5.3	Gleichungen mit Formvariablen	33
5.4	Bruchgleichungen	35
5.5	Lineare Ungleichungen mit einer Unbekannten	37
5.6	Textaufgaben	39
6	Funktionen	53
6.1	Definition und Begriffe	53
6.2	Grafische Darstellung einer Funktion	54
7	Lineare Funktionen	55
7.1	Lineare Funktionen der Form $y = m \cdot x$	55
7.2	Lineare Funktionen der Form $y = m \cdot x + b$	57
7.3	Kommentierte Grundübungen zu linearen Funktionen	59
7.4	Schnittpunktberechnung zweier Geraden	63
8	Anwendungen linearer Funktionen – Textaufgaben	67
8.1	Angebotsvergleiche – Kosten- & Erlösfunktionen – Gewinnschwelle	67
8.2	Abschnittsweise definierte Funktionen	73
8.3	Angebot und Nachfrage, Marktgleichgewicht	77
8.4	Lineare Abschreibung	81
8.5	Alte BMP-Aufgaben	83
9	Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	89
9.1	Lösungsverfahren	89
9.2	Bruchgleichungssysteme	97
9.3	Lineare Gleichungssysteme mit Formvariablen (Parametern)	101
9.4	Lineare Gleichungssysteme – Textaufgaben	103
10	Lineare Optimierung	115
10.1	Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen	115
10.2	Lineare Optimierung – Musteraufgaben	118

10.3	Aufgaben zur linearen Optimierung . . . . .	123
10.4	Alte BMP-Aufgaben . . . . .	131
11	Quadratische Gleichungen mit einer Variablen . . . . .	139
11.1	Rein-quadratische Gleichungen . . . . .	139
11.2	Gemischt-quadratische Gleichungen . . . . .	141
11.3	Wurzelgleichungen . . . . .	145
11.4	Textaufgaben, die zu quadratischen Gleichungen führen . . . . .	147
12	Quadratische Funktionen . . . . .	153
12.1	Allgemeine quadratische Funktion . . . . .	153
12.2	Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion . . . . .	161
12.3	Alte BMP-Aufgaben . . . . .	163
12.4	Anwendungen quadratischer Funktionen . . . . .	165
12.5	Anwendung quadratischer Funktionen in der Ökonomie . . . . .	169
13	Potenzen . . . . .	171
13.1	Addition und Subtraktion von Potenzen . . . . .	171
13.2	Potenzgesetze . . . . .	173
14	Wurzeln . . . . .	179
14.1	Wurzelgesetze . . . . .	181
14.2	Potenzgleichungen . . . . .	187
15	Logarithmen . . . . .	189
15.1	Die logarithmischen Rechengesetze . . . . .	193
16	Exponentialgleichungen . . . . .	197
16.1	Lösungsverfahren . . . . .	197
17	Weitere Funktionen . . . . .	200
17.1	Exponentialfunktionen . . . . .	202
17.2	Logarithmusfunktionen . . . . .	203
17.3	Potenz- und Wurzelfunktionen . . . . .	204
17.4	Umkehrfunktionen . . . . .	205
17.5	Weitere Wachstums- und Zerfallsprozesse . . . . .	211
18	Finanzmathematik . . . . .	213
18.1	Zinseszinsrechnung . . . . .	213
18.2	Degressive Abschreibung . . . . .	219
19	Rentenrechnung . . . . .	221
19.1	Nachschüssige Rente . . . . .	221
19.2	Vorschüssige Rente . . . . .	223
19.3	Tilgungsrechnung . . . . .	227
20	Datenanalyse . . . . .	232
20.1	Einführung . . . . .	233
20.2	Daten sind nicht gleich Daten – Merkmale von Daten . . . . .	238
20.3	Darstellung und Kenngrößen einer Statistik . . . . .	239
20.4	Histogramme . . . . .	245
20.5	Die Kenngrößen einer Statistik . . . . .	247
20.6	Aufgaben zur Datenanalyse – ohne Lösungen . . . . .	255
20.7	Aufgaben zur Datenanalyse – mit Lösungen . . . . .	259
20.8	Aufgaben für Taschenrechner oder Computer . . . . .	267