分割された行列の行列式

分割された行列の「基本変形」やその行列式も通常の場合と同様に考えられる.
ここでは簡単の為，2×2 の形に対称に分割された行列と行列式の「基本変形」について述べる.
次の行列式については次数低下法により,

(1) $$\begin{vmatrix} A & B \\ O & E_n \end{vmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} A & O \\ C & E_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} E_m & B \\ O & D \end{vmatrix} = |D| = \begin{vmatrix} E_m & O \\ C & D \end{vmatrix}$$

ここで，A は m 次，D は n 次の正方行列，C は (m,n) 型, D は (n,m) 型の行列とする.
次の行列を分割された行列の「ブロック $(2,2)$ 型の基本行列」と考える.
P は m 次，Q は n 次の正則行列，R は (m,n) 型, S は (n,m) 型の行列として,

(2) (i) $\begin{bmatrix} E_m & R \\ O & E_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_m & O \\ S & E_n \end{bmatrix} \quad (\leftrightarrow r_i + sr_j),$ (ii) $\begin{bmatrix} P & O \\ O & E_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_m & O \\ O & Q \end{bmatrix} \quad (\leftrightarrow sr_i)$

これらの行列式は (1) より,

(3) (i) $\begin{vmatrix} E_m & R \\ O & E_n \end{vmatrix} = 1 = \begin{vmatrix} E_m & O \\ S & E_n \end{vmatrix},$ (ii) $\begin{vmatrix} P & O \\ O & E_n \end{vmatrix} = |P|, \begin{vmatrix} E_m & O \\ O & Q \end{vmatrix} = |Q|$

「基本行列」(i) を左から掛けてみると

$$\begin{bmatrix} E_m & R \\ O & E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+RC & B+RD \\ C & D \end{bmatrix}$$

積の行列式は行列式の積に等しく，左辺第１項の行列式は 1 より,

(4) $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & R \\ O & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+RC & B+RD \\ C & D \end{vmatrix}$$

(即ち,「第１行」に「第２行」の R 倍を加えても行列式は変化しない.）
「第１行」を正則行列倍（ P 倍）すると (3-ii) より

(5) $$|P| \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & O \\ O & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} PA & PB \\ C & D \end{vmatrix}$$

(「第１行」を P 倍すると行列式は $|P|$ 倍になる.）
即ち，分割された行列の行列式においてもブロック型の基本変形に対し通常の行列式に対する基本変形と同様の変化をする.
また，ブロック三角行列の行列式は対角成分の行列式の積になることが,

(6) $$|A||D| = |D||A| = \begin{vmatrix} E_m & O \\ O & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ O & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix}$$

同様にして,

(7) $$\begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

より分かる.（ブロック三角行列の行列式は対角成分の行列式の積.）

行交換，列交換については，行ベクトルや列ベクトルに分割して考える．列について書くと，$\boldsymbol{b}_1$ を第１列に移す巡回置換（m 回隣接互換）により，符号が $(-1)^m$ 倍になり，これを n 回繰り返すので $(-1)^{mn}$ 倍になる．即ち，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \cdots \boldsymbol{b}_n| &= (-1)^m |\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_2 \cdots \boldsymbol{b}_n| = \cdots \\ &= (-1)^{mn} |\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_m|\end{aligned}$$

行についても同様にすることにより，合わせて

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} C & D \\ A & B \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} B & A \\ D & C \end{vmatrix} \tag{8}$$

特に $m = n$ のとき $(-1)^{n^2} = (-1)^n$ より

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^{n} \begin{vmatrix} C & D \\ A & B \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^{n} \begin{vmatrix} B & A \\ D & C \end{vmatrix} \tag{9}$$

「ブロック基本行列」を左右から掛けることによる上述以外の変形を以下に列挙すると，

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} E_m & O \\ S & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ SA+C & SB+D \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & R \\ O & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AR+B \\ C & CR+D \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & O \\ S & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+BS & B \\ C+DS & D \end{vmatrix} \\
|Q| \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} E_m & O \\ O & Q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ QC & QD \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} |P| &= \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P & O \\ O & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AP & B \\ CP & D \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} |Q| &= \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & O \\ O & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & BQ \\ C & DQ \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

特に $m = n$ のときは A, B, C, D は全て n 次正方行列で，$R = S = sE$ （s はスカラー）とすれば

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A+sC & B+sD \\ C & D \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C+sA & D+sB \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & B+sA \\ C & D+sC \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+sB & B \\ C+sD & D \end{vmatrix}
\end{aligned}$$