ESPAÑOL

Aprendizaje Bluebonnet™
Matemáticas de secundaria
EDICIÓN 1

Geometría

Guía para la familia

Aprendizaje Bluebonnet™

Matemáticas de secundaria

EDICIÓN 1

Geometría

Guía para la familia

Acknowledgment

Thank you to all the Texas educators and stakeholders who supported the review process and provided feedback. These materials are the result of the work of numerous individuals, and we are deeply grateful for their contributions.

Notice: These learning resources have been built for Texas students, aligned to the Texas Essential Knowledge and Skills, and are made available pursuant to Chapter 31, Subchapter B-1 of the Texas Education Code.

If you have further product questions or to report an error, please email openeducationresources@tea.texas.gov.

Reconocimiento:

Agradecemos a todos los educadores y partes interesadas de Texas que apoyaron el proceso de revisión y brindaron comentarios. Estos materiales son el resultado del trabajo de numerosas personas y estamos profundamente agradecidos por sus contribuciones.

Aviso: Estos recursos de aprendizaje han sido creados para estudiantes de Texas, alineados con los conocimientos y destrezas esenciales de Texas y están disponibles de conformidad con el Capítulo 31, Subcapítulo B-1 del Código de Educación de Texas.

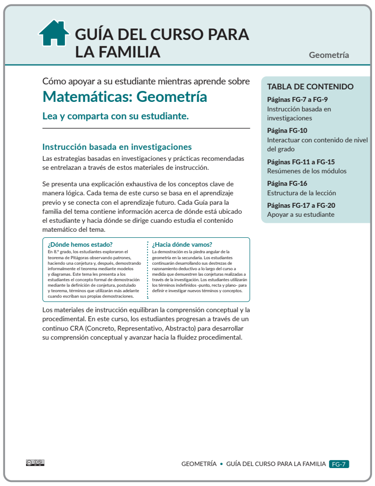
Si tiene más preguntas sobre el producto o desea informar un error, envíe un correo electrónico a openeducationresources@tea.texas.gov.

Estimada familia:

Sabemos que aprender fuera del salón de clases es fundamental para el éxito del estudiante en la escuela. Esta carta sirve como introducción a los recursos diseñados para ayudarlos a hablar con el estudiante sobre lo que está aprendiendo. Los recursos disponibles incluyen:

- Guía del curso para la familia
- Guías del tema para la familia
- Resúmenes del tema
- Glosario de matemáticas

Guía del curso para la familia



GUÍA DEL CURSO PARA LA FAMILIA

Geometría

Cómo apoyar a su estudiante mientras aprende sobre

Matemáticas: Geometría

Lea y comparta con su estudiante.

Instrucción basada en investigaciones

Las estrategias basadas en investigaciones y prácticas recomendadas se entrelazan a través de estos materiales de instrucción.

Se presenta una explicación exhaustiva de los conceptos clave de manera lógica. Cada tema de este curso se basa en el aprendizaje previo y se conecta con el aprendizaje futuro. Cada Guía para la familia del tema contiene información acerca de dónde está ubicado el estudiante y hacia dónde se dirige cuando estudia el contenido matemático del tema.

¿Dónde hemos estado?

En 8.º grado, los estudiantes exploraron el teorema de Pitágoras observando patrones, haciendo una conjetura y, después, demostrando informalmente el teorema mediante modelos y diagramas. Este tema les presenta a los estudiantes el concepto formal de demostración mediante la definición de conjetura, postulado y teorema, términos que utilizarán más adelante cuando escriban sus propias demostraciones.

¿Hacia dónde vamos?

La demostración es la piedra angular de la geometría en la secundaria. Los estudiantes continuarán desarrollando sus destrezas de razonamiento deductivo a lo largo del curso a medida que demuestren las conjeturas realizadas a través de la investigación. Los estudiantes utilizarán los términos indefinidos -punto, recta y plano- para definir e investigar nuevos términos y conceptos.

Los materiales de instrucción equilibran la comprensión conceptual y la procedimental. En este curso, los estudiantes progresan a través de un continuo CRA (Concreto, Representativo, Abstracto) para desarrollar su comprensión conceptual y avanzar hacia la fluidez procedimental.

TABLA DE CONTENIDO

Páginas FG-7 a FG-9
Instrucción basada en investigaciones

Página FG-10
Interactuar con contenido de nivel del grado

Páginas FG-11 a FG-15
Resúmenes de los módulos

Página FG-16
Estructura de la lección

Páginas FG-17 a FG-20
Apoyar a su estudiante

GEOMETRÍA • GUÍA DEL CURSO PARA LA FAMILIA FG-7

A continuación de esta carta, hay una Guía del curso para la familia que los guiará por el enfoque de enseñanza basada en la investigación, cómo está estructurado el curso, cómo romper mitos matemáticos, cómo emplear los temas de discusión de la Guía del curso para la familia y cómo usar los estándares de procesos matemáticos de TEKS para iniciar debates.

La investigación y la experiencia en el salón de clase guiaron el desarrollo del curso, con la base de un entendimiento científico de cómo aprenden las personas y en un conocimiento realista de cómo aplicar esa ciencia a los materiales de instrucción para las matemáticas. Los elementos de diseño didácticos que se presentan en la Guía del curso para la familia incorporan estrategias basadas en la investigación para desarrollar solucionadores de problemas creativos y con comprensión conceptual.

La Guía del curso para la familia proporciona un contenido general de la estructura del curso. El curso consiste de un componente Aprender juntos y un componente Aprender individualmente. El maestro facilita una experiencia de aprendizaje colaborativo durante los días de Aprender juntos y utiliza información para abordar destrezas específicas en los días de Aprender individualmente.

Después, la Guía del curso para la familia incluye el Contenido general de cada módulo en el curso, que incluye un resumen detallado de lo que el estudiante estudiará en cada tema dentro del módulo. Debajo del resumen de los temas hay datos e información que conectan los conceptos con la realidad. Lean y comenten la información debajo del resumen del tema con su estudiante y regrese a estas páginas a medida que su estudiante avanza de un tema al otro dentro de cada módulo.

La Guía del curso para la familia también resalta la estructura de la lección. Cada lección está estructurada de la misma manera e incluye cuatro partes: Objetivos y pregunta esencial, Inicio, Actividades y Demuestra lo que sabes.

Guía del tema para la familia

Cada curso se organiza en módulos. Cada módulo está conformado de temas con las Guías del tema para la familia correspondientes. Estas guías tienen las mismas estructuras. Esta consistencia le permitirá a usted y su estudiante comprender cómo hacer referencia al contenido de cada tema.

La Guía del tema para la familia comienza con un contenido general del contenido del tema. Esta introducción incluye una breve explicación de lo que aprenderá su estudiante en este tema, el contenido previo que empleará para ayudar a comprender este tema y una conexión con un aprendizaje futuro.

La siguiente sección de la Guía del tema para la familia es la sección Temas de discusión. La sección Temas de discusión proporciona destrezas que pueden comentar con su estudiante y una pregunta de muestra basada en la matemática del tema que puede comentar con él o ella.

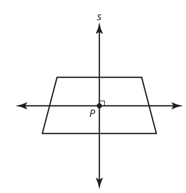
TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

Las secuencias de transformaciones rígidas de movimiento, incluyendo las traslaciones, rotaciones y reflexiones de , mantienen el tamaño y la figura de los objetos mientras se analizan los movimientos. Esto resulta útil en aplicaciones como el diseño de maquinaria, la creación de animaciones y el trazado de rutas en sistemas de navegación.

EJEMPLO DE PREGUNTA

La figura muestra dos rectas perpendiculares, *s* y *r*, que se cruzan en el punto *P* en el interior de un trapezoide. La recta *r* es paralela a las bases y biseca ambas patas del trapecio. La recta *s* biseca ambas bases del trapezoide.



¿Cuál transformación llevará siempre la figura sobre sí misma?

Un reflejo a través de la recta *s* llevará la figura sobre sí misma.

A continuación, la Guía del tema para la familia enumera todos los términos clave del tema y detalla algunas de las estrategias matemáticas que los estudiantes aprenderán en este tema. Por último, cada Guía del tema para la familia contiene una sección Matemáticas en el mundo real. Comprender cómo se aplica el contenido matemático en situaciones reales fomenta la participación de los estudiantes, conecta la teoría con la práctica y les permite reflexionar sobre las posibles conexiones con otros cursos y carreras de su interés.

Matemáticas en el mundo real

¿Alguna vez te has preguntado cómo los videojuegos se ven tan increíbles o cómo el GPS sabe exactamente dónde estás? ¡Todo es gracias a la magia del plano de coordenadas! Piensa en él como una gigantesca cuadrícula que nos ayuda a trazar el mundo, ¡o incluso mundos imaginarios!

Los desarrolladores de juegos usan coordenadas para ubicar personajes, obstáculos y cofres del tesoro en los lugares precisos. Los arquitectos lo usan para diseñar rascacielos, asegurándose de que todo esté perfectamente alineado. Incluso los atletas están involucrados en la acción: cuando un entrenador analiza jugadas en baloncesto o fútbol, esencialmente están trazando movimientos en un gigantesco plano de coordenadas invisible. ¡Así que la próxima vez que estés jugando a tu juego favorito o buscando la ruta más rápida para llegar a casa de un amigo, da las gracias a los ejes *x* e *y* por mantenerlo todo bajo control!

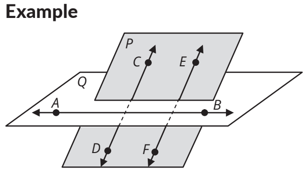
Resumen del tema

Se proporciona un Resumen del tema para los estudiantes al final de cada tema. El Resumen del tema enumera todo el vocabulario clave del tema y proporciona un resumen de cada lección. Cada resumen de la lección define el vocabulario clave y repasa conceptos clave, estrategias y/o ejemplos prácticos. El Resumen del tema proporciona una oportunidad para ustedes y su estudiante de debatir los conceptos clave de cada lección, revisar los ejemplos y hacer los cálculos juntos.

LESSON 1 **Points, Lines, Planes, Rays, and Line Segments**

There are three essential building blocks of geometry- the *point*, the *line*, and the *plane*. These three terms are called undefined terms; we can only describe and create mathematical models to represent them. A **point** is a location in space that has no size or shape. A **line** is a straight continuous arrangement of an infinite number of points. A **plane** is a flat surface that has an infinite length and width, but no depth. **Collinear points** are points that are located on the same line. **Coplanar** lines are two or more lines that are located in the same plane. **Non-collinear points** are points are points that do not lie on the same line. **Skew lines** are two or more lines that are not in the same plane.

Example



Points A and B lie on $\overline{AB}$, points C and D lie on $\overline{CD}$, and points E and F lie on $\overline{EF}$.

Line AB lies in plane Q. Lines CD and EF lie in plane P.

Points A and B are collinear. Points C and D are collinear. Points E and F are collinear.

Lines CD and EF are coplanar.

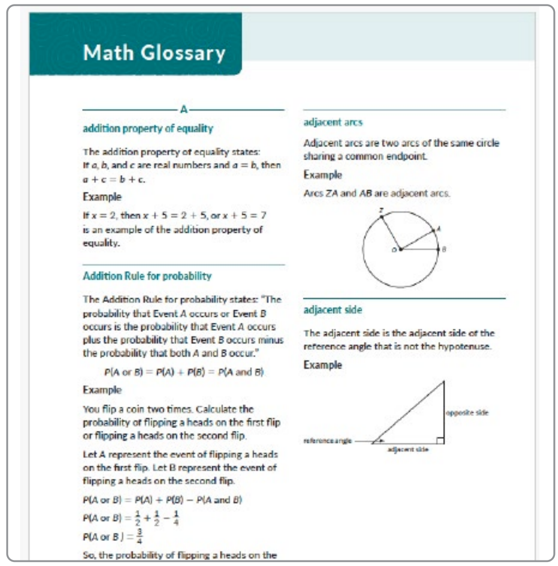
Lines AB and CD are skew. Lines AB and EF are skew.

Planes P and Q intersect.

Hay evidencia de que los estándares de procesos matemáticos de TEKS están presentes en el Resumen de los temas. Cada lección dentro del tema resalta uno o más de los estándares de procesos matemáticos de TEKS. Estos procesos ayudarán al estudiante a desarrollar destrezas de comunicación y colaboración efectivas que son esenciales para convertirse en un aprendiz exitoso. Comente con su estudiante las afirmaciones de "Yo puedo" asociadas con cada uno de los estándares de procesos matemáticos de TEKS para ayudarlo a desarrollar su aprendizaje y comprensión de las matemáticas. Las afirmaciones de "Yo puedo" para cada uno de los estándares de procesos matemáticos de TEKS se incluyen en la Guía del curso para la familia. Con su ayuda, su estudiante puede desarrollar los hábitos de un pensador matemático productivo.

Glosario de matemáticas

El Glosario de matemáticas de cada curso es una herramienta que su estudiante puede emplear y consultar durante su aprendizaje. Junto con la definición de una palabra de vocabulario, el glosario proporciona ejemplos para profundizar su entendimiento.



Math Glossary

A

addition property of equality

The addition property of equality states: If a, b, and c are real numbers and $a = b$, then $a + c = b + c$.

Example

If $x = 2$, then $x + 5 = 2 + 5$, or $x + 5 = 7$ is an example of the addition property of equality.

Addition Rule for probability

The Addition Rule for probability states: "The probability that Event A occurs or Event B occurs is the probability that Event A occurs plus the probability that Event B occurs minus the probability that both A and B occur."

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$$

Example

You flip a coin two times. Calculate the probability of flipping a heads on the first flip or flipping a heads on the second flip.

Let A represent the event of flipping a heads on the first flip. Let B represent the event of flipping a heads on the second flip.

$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$

$P(A \text{ or } B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$P(A \text{ or } B) = \frac{3}{4}$

So, the probability of flipping a heads on the

adjacent arcs

Adjacent arcs are two arcs of the same circle sharing a common endpoint.

Example

Arcs ZA and AB are adjacent arcs.

adjacent side

The adjacent side is the adjacent side of the reference angle that is not the hypotenuse.

Example

Todos tenemos la misma meta para su estudiante: que pueda solucionar problemas con éxito y utilice las matemáticas de forma eficiente y efectiva en la vida diaria. Anímelo a emplear las matemáticas que ya conoce al ver nuevos conceptos y comunicar sus pensamientos mientras proporciona un oído crítico a los pensamientos de los demás.

Gracias por apoyar a su estudiante.

GUÍA DEL CURSO PARA LA FAMILIA

Geometría

Cómo apoyar a su estudiante mientras aprende sobre

Matemáticas: Geometría

Lea y comparta con su estudiante.

TABLA DE CONTENIDO

Instrucción basada en investigaciones

Las estrategias basadas en investigaciones y prácticas recomendadas se entrelazan a través de estos materiales de instrucción.

Se presenta una explicación exhaustiva de los conceptos clave de manera lógica. Cada tema de este curso se basa en el aprendizaje previo y se conecta con el aprendizaje futuro. Cada Guía para la familia del tema contiene información acerca de dónde está ubicado el estudiante y hacia dónde se dirige cuando estudia el contenido matemático del tema.

¿Dónde hemos estado?

En 8.º grado, los estudiantes exploraron el teorema de Pitágoras observando patrones, haciendo una conjetura y, después, demostrando informalmente el teorema mediante modelos y diagramas. Este tema les presenta a los estudiantes el concepto formal de demostración mediante la definición de conjetura, postulado y teorema, términos que utilizarán más adelante cuando escriban sus propias demostraciones.

¿Hacia dónde vamos?

La demostración es la piedra angular de la geometría en la secundaria. Los estudiantes continuarán desarrollando sus destrezas de razonamiento deductivo a lo largo del curso a medida que demuestren las conjeturas realizadas a través de la investigación. Los estudiantes utilizarán los términos indefinidos -punto, recta y plano- para definir e investigar nuevos términos y conceptos.

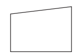
Los materiales de instrucción equilibran la comprensión conceptual y la procedimental. En este curso, los estudiantes progresan a través de un continuo CRA (Concreto, Representativo, Abstracto) para desarrollar su comprensión conceptual y avanzar hacia la fluidez procedimental.

Concreto	Representativo	Abstracto
Los estudiantes exploran las transformaciones dentro y fuera del plano de coordenadas. Los estudiantes empiezan calcando una figura en papel encerado y trasladando físicamente la figura al plano.	Los estudiantes trasladan figuras utilizando un segmento de recta dirigido dentro y fuera del plano.	Los estudiantes representan las traslaciones utilizando la notación de coordenadas.

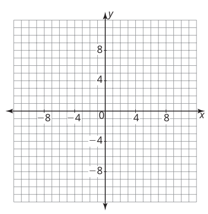
Getting Started

Translating Geometric Figures on the Coordinate Plane

Trace the figure shown onto patty paper and then cut out the figure.



1. Graph trapezoid *ABCD* by plotting the points *A* (3, 9), *B* (3, 4), *C* (11, 4), and *D* (11, 10).



A **translation** moves a set of points a specified distance in a specified direction along parallel lines. When an image is horizontally translated *c* units on the coordinate plane, the value of the *x*-coordinates change by *c* units. When an image is vertically translated *c* units on the coordinate plane, the value of the *y*-coordinate changes by *c* units. **Coordinate notation** describes how the original coordinates of a point are changed into new coordinates after one of more transformations. For example, the mapping $(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 2)$ represents a translation left 3 units and down 2 units. The coordinates of an image after a translation are summarized in the table.

Original Point	Horizontal Translation to the Left	Horizontal Translation to the Right	Vertical Translation Up	Vertical Translation Down
(x, y)	$(x - c, y)$	$(x + c, y)$	$(x, y + c)$	$(x, y - c)$

A **translation** moves a set of points a specified distance in a specified direction along parallel lines. When an image is horizontally translated *c* units on the coordinate plane, the value of the *x*-coordinates change by *c* units. When an image is vertically translated *c* units on the coordinate plane, the value of the *y*-coordinate changes by *c* units. **Coordinate notation** describes how the original coordinates of a point are changed into new coordinates after one of more transformations. For example, the mapping $(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 2)$ represents a translation left 3 units and down 2 units. The coordinates of an image after a translation are summarized in the table.

Original Point	Horizontal Translation to the Left	Horizontal Translation to the Right	Vertical Translation Up	Vertical Translation Down
(x, y)	$(x - c, y)$	$(x + c, y)$	$(x, y + c)$	$(x, y - c)$

Se brinda apoyo a los estudiantes a medida que perseveran en la resolución de problemas. Estos materiales de instrucción cuentan con un modelo de resolución de problemas, que incluye preguntas que el estudiante puede hacer cuando participa productivamente en problemas matemáticos y del mundo real. Las indicaciones invitarán al estudiante a utilizar el modelo de resolución de problemas a lo largo del curso.

Estos materiales de instrucción incluyen características que sirven de apoyo para los estudiantes. Los ejemplos prácticos a lo largo del producto brindan instrucciones explícitas y ofrecen un modelo al que su estudiante puede referirse continuamente.

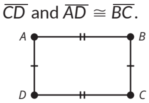
Cuando veas un Ejemplo práctico:

- Tómate el tiempo para leerlo completo.
- Cuestiona tu propia comprensión.
- Piensa en las conexiones entre los pasos.

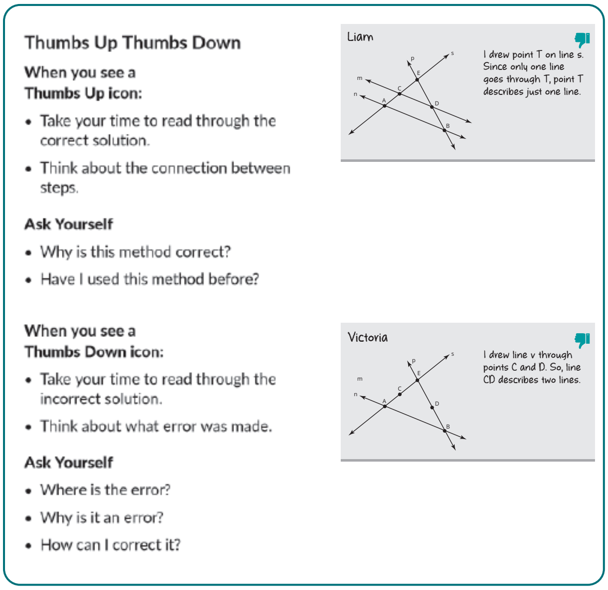
WORKED EXAMPLE

Markers are used to indicate congruent segments in geometric figures. If a diagram has more than one set of congruent segments then you use sets of markers.

The figure shows $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ and $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.



Las preguntas "Pulgar hacia arriba", "Pulgar hacia abajo" y "Quién tiene la razón" abordan los conceptos erróneos de su estudiante y brindan oportunidades para el análisis del trabajo entre los compañeros.


Thumbs Up Thumbs Down

When you see a Thumbs Up icon:

- Take your time to read through the correct solution.
- Think about the connection between steps.

Ask Yourself

- Why is this method correct?
- Have I used this method before?

When you see a Thumbs Down icon:

- Take your time to read through the incorrect solution.
- Think about what error was made.

Ask Yourself

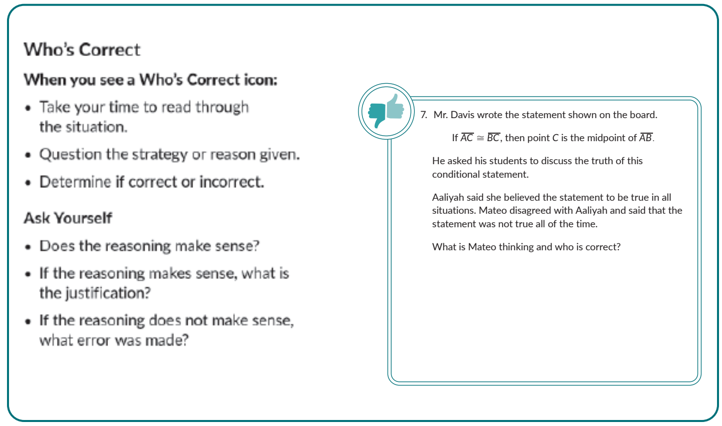
- Where is the error?
- Why is it an error?
- How can I correct it?

Liam

I drew point T on line s. Since only one line goes through T, point T describes just one line.

Victoria

I drew line v through points C and D. So, line CD describes two lines.


Who's Correct

When you see a Who's Correct icon:

- Take your time to read through the situation.
- Question the strategy or reason given.
- Determine if correct or incorrect.

Ask Yourself

- Does the reasoning make sense?
- If the reasoning makes sense, what is the justification?
- If the reasoning does not make sense, what error was made?

7. Mr. Davis wrote the statement shown on the board.

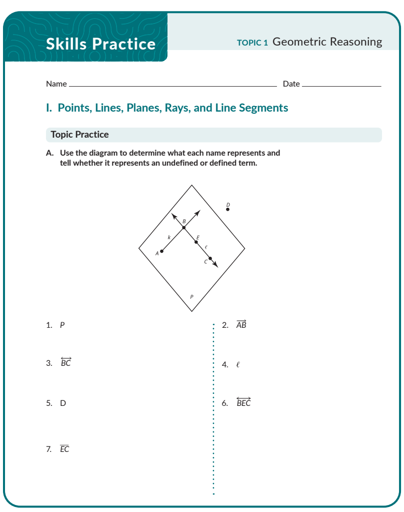
If $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, then point C is the midpoint of $\overline{AB}$.

He asked his students to discuss the truth of this conditional statement.

Aaliyah said she believed the statement to be true in all situations. Mateo disagreed with Aaliyah and said that the statement was not true all of the time.

What is Mateo thinking and who is correct?

La Práctica de destrezas enfocadas ayuda a su estudiante mientras trabaja para adquirir competencia en el material del curso. La Práctica espaciada proporciona una recuperación espaciada de conceptos clave para su estudiante. Las oportunidades de Extensión brindan problemas desafiantes para acelerar el aprendizaje de su estudiante.


Skills Practice

TOPIC 1 Geometric Reasoning

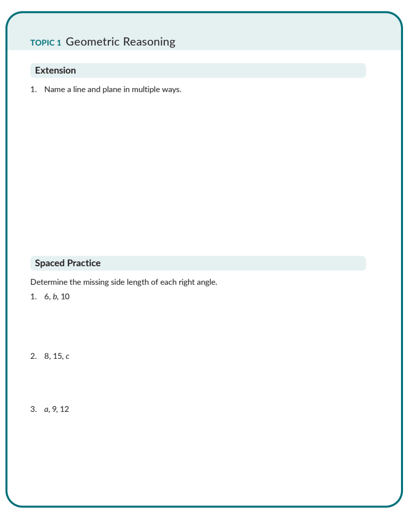
Name ______ Date ______

I. Points, Lines, Planes, Rays, and Line Segments

Topic Practice

A. Use the diagram to determine what each name represents and tell whether it represents an undefined or defined term.

1. P
2. $\overleftrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{BC}$
4. ℓ
5. D
6. $\angle BEC$
7. $\overline{EC}$


TOPIC 1 Geometric Reasoning

Extension

1. Name a line and plane in multiple ways.

Spaced Practice

Determine the missing side length of each right angle.

1. 6, b, 10
2. 8, 15, c
3. a, 9, 12

Cada lección presenta uno o más ELPS (Estándares de dominio del idioma inglés) y proporciona al maestro estrategias de implementación que incorporan las mejores prácticas para apoyar la adquisición del idioma. Además, los estudiantes reciben cognados para los Términos clave en los resúmenes de temas y las Guías del tema para la familia.

TÉRMINOS CLAVE

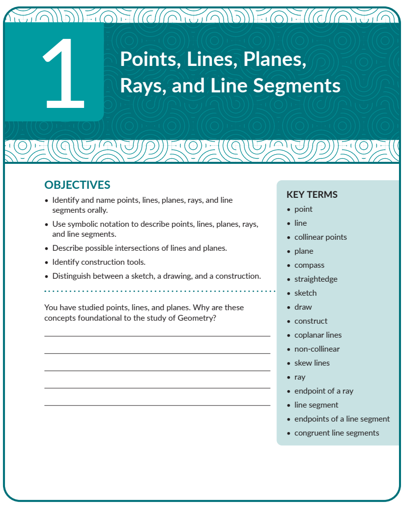
- arco [arc]
- punto medio [midpoint]
- bisectriz de segmento [segment bisector]
- bisectriz perpendicular [perpendicular bisector]
- transformación [transformation]
- movimiento rígido [rigid motion]
- fórmula de la distancia [distance formula]
- extraer cuadrados perfectos
- radical [radical]
- radicando [radicand]
- fórmula del punto medio [midpoint formula]
- figura compuesta [composite figure]
- polígono regular [regular polygon]
- apotema [apothem]

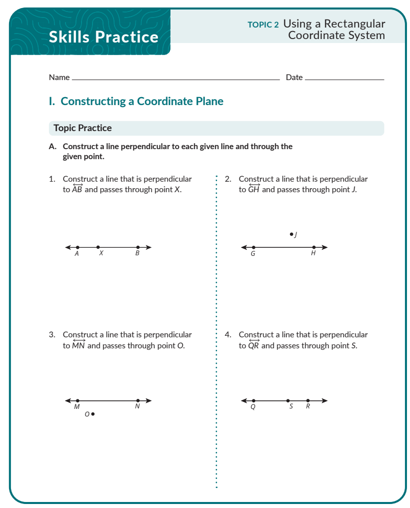
Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

Interactuar con contenido de nivel del grado

Su estudiante interactuará con el contenido de su nivel de grado de varias maneras con la ayuda del maestro.

Aprender juntos	Aprender individualmente
El maestro facilita el aprendizaje activo de las lecciones para que los estudiantes se sientan seguros al compartir ideas, escucharse unos a otros y aprender juntos. Los estudiantes se convierten en creadores de su conocimiento matemático.	La Práctica de destrezas brinda a los estudiantes la oportunidad de participar en el desarrollo de destrezas adicionales que se alinean con cada lección de Aprender juntos. Los días de Aprender individualmente se centran en destrezas discretas que pueden requerir práctica adicional para lograr el dominio.





Al final de cada tema, su estudiante tomará una evaluación relacionada con los estándares cubiertos en el tema. Esta evaluación consta de preguntas de opción múltiple, selección múltiple y abiertas diseñadas para que su estudiante demuestre su aprendizaje. Además, cada evaluación incluye una guía de puntuación para que los maestros garanticen una puntuación consistente. La guía de puntuación incluye formas de apoyar o desafiar a su estudiante en función de sus respuestas a las preguntas de la evaluación. El objetivo de la evaluación es que el maestro y el estudiante reflexionen sobre el aprendizaje. Los maestros utilizarán los resultados de la evaluación de su estudiante para enfocarse en las destrezas individuales que su estudiante necesita para dominar o para acelerar y desafiar a su estudiante.

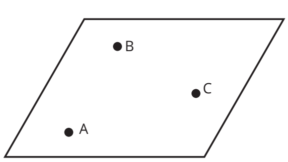
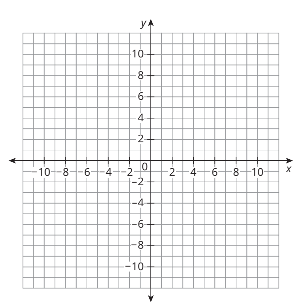
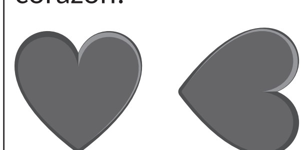
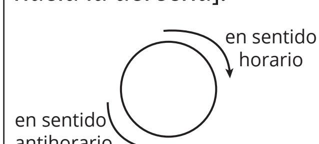
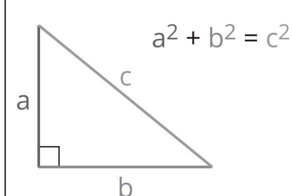
Response to Student Performance

TEKS	Question(s)	Recommendations
G.4A	1, 2, 5, 9, 10	**To support students:** • Review undefined terms, definitions, postulates, conjectures, and theorems. • Use Skills Practice Sets I.A, I.B, I.C, III.A, and III.B for additional practice. **To challenge students:** • Extend student knowledge with the Skills Practice Extension Set I.
G.4C	3, 6, 11	**To support students:** • Review counterexamples. • Use Skills Practice Set II.A for additional practice.
G.4D	4, 7, 8, 12	**To support students:** • Review the properties of parallel lines and sum of angles in a triangle in Euclidean and spherical geometries. • Use Skills Practice Set II.E for additional practice. **To challenge students:** • Extend student knowledge with the Skills Practice Extension Set II.

NOTE: Both teachers and administrators should refer to the Assessment Guidance and Analysis section of the Course & Implementation Guide for additional support in analyzing and responding to student data.

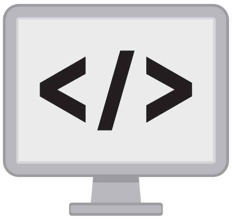
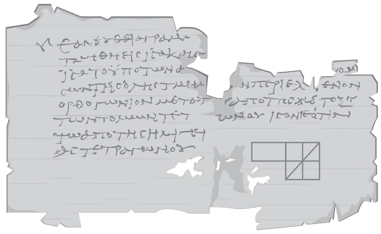
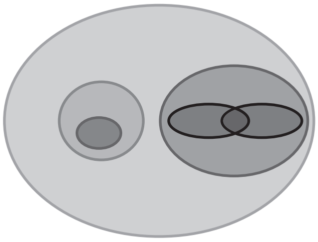
MÓDULO 1 Razonar con figuras

En este módulo, su estudiante dará los primeros pasos para pasar del razonamiento informal al formal. Los estudiantes empiezan a razonar sobre las características que definen las figuras que ya conocen: los cuadrados, los círculos y los triángulos. Hay cuatro temas en este módulo: *Razonamiento geométrico*, *Utilizar un sistema de coordenadas rectangulares*, *Secuencias de movimientos rígidos* y *Congruencia mediante transformaciones*.

TEMA 1 Razonamiento geométrico	TEMA 2 Utilizar un sistema de coordenadas rectangulares	TEMA 3 Secuencias de movimientos rígidos	TEMA 4 Congruencia mediante transformaciones
Su estudiante conocerá los componentes básicos de la geometría: los puntos, las rectas y los planos.	Su estudiante estudiará las propiedades de los cuadrados y aprenderá estrategias para determinar los perímetros y áreas de figuras en el plano de coordenadas.	Su estudiante estudiará el movimiento rígido con una máquina de transformación y después considerará cada uno como una función.	Su estudiante usará el razonamiento formal para probar teoremas geométricos.
¿Sabías que? Tres puntos no colineales cualesquiera determinan un plano único. Esto significa que si tomamos tres puntos que no están todos en la misma recta, deberá haber exactamente una superficie plana (un plano) que contenga a los tres puntos. 	Avión vs. Plano Un plano puede significar un aeroplano.  Un plano también puede ser una superficie plana. Un **plano de coordenadas** está formado por la intersección de rectas horizontales y rectas verticales. 	¿Sabías que? Una **máquina de transformación** es como preparar un batido. Colocas los ingredientes (la entrada), los mezclas (la transformación) y el resultado es un batido delicioso (la salida). ¿Cómo se transformó esta imagen de un corazón?  [*Esta figura de corazón ha sido rotada 90 grados hacia la derecha*]. 	¿Qué es un teorema? Un **teorema** es una regla matemática que se ha demostrado que es cierta.  Un ejemplo conocido es el Teorema de Pitágoras.

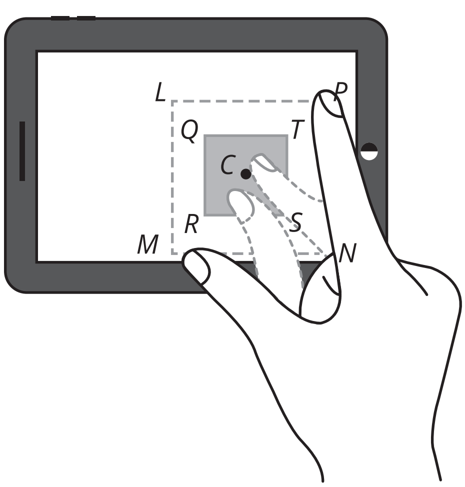
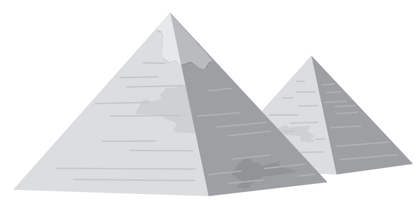
MÓDULO 2 Justificar ideas y argumentos matemáticos

En este módulo, el estudiante profundizará sus conocimientos sobre congruencia mediante la construcción y la deconstrucción de figuras y la definición de las relaciones entre rectas y ángulos que justifican la congruencia. Hay 3 temas en este módulo: *Componer y descomponer figuras*, *Justificar las relaciones entre rectas y ángulos*, y *Utilizar teoremas de congruencia*.

TEMA 1 Componer y descomponer figuras	TEMA 2 Justificar las relaciones entre rectas y ángulos	TEMA 3 Utilizar teoremas de congruencia
En este tema, su estudiante aprenderá y definirá muchos de los ángulos, rectas, arcos, figuras y partes de demostraciones necesarias para comprender y probar teoremas.	Su estudiante aprenderá a probar muchos de los teoremas sobre ángulos, rectas y figuras para después probar la congruencia en el siguiente tema.	Su estudiante usará los teoremas que demostró para probar nuevos teoremas sobre triángulos, cuadriláteros y ángulos formados en círculos.
Si... Entonces,... Comprender cómo funcionan las afirmaciones condicionales y ser capaz de usarlas de manera efectiva es fundamental en la programación y la codificación. 	¿Sabías que? Euclides de Alejandría, conocido como el "padre de la geometría", estableció las bases de las pruebas que aún utilizamos hoy en día, ¡y eso fue hace más de 2000 años! 	¡Tantos cuadriláteros! Hay muchos nombres para los cuadriláteros, pero también comparten muchas propiedades. Puede ayudar categorizarlos en un diagrama de Venn ¡como el siguiente! 

MÓDULO 3: Investigar la proporcionalidad

En este módulo, el estudiante profundizará sus conocimientos sobre la similitud y la proporcionalidad. Con estas ideas de proporcionalidad, los estudiantes desarrollarán razones trigonométricas para triángulos rectángulos. Hay 2 temas en este módulo: *Similitud* y *Trigonometría*.

TEMA 1 Similitud	**TEMA 2** Trigonometría
Su estudiante utilizará sus conocimientos sobre dilataciones para aprender sobre similitud y proporcionalidad.	Su estudiante conocerá la trigonometría y cómo utilizar razones trigonométricas para encontrar lados faltantes y medidas de ángulos en triángulos rectángulos.
¿Sabías que? Sin saberlo, estamos utilizando dilataciones todo el tiempo. Cada vez que hacemos zoom en la pantalla de un teléfono inteligente o cualquier otro dispositivo táctil, estamos aplicando una dilatación. 	Adelantados a su época... Los egipcios fueron los primeros en usar las razones trigonométricas al construir las pirámides. Usaron una variación de la tangente para asegurarse de que sus construcciones fueran correctas. 

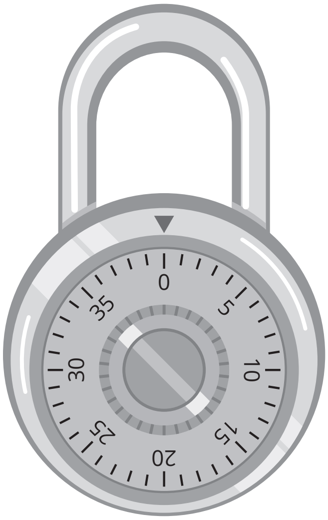
MÓDULO 4 Conectar descripciones geométricas y algebraicas

En este módulo, su estudiante profundizará sus conocimientos sobre los círculos y las figuras tridimensionales junto con sus atributos. Hay dos temas en este módulo: *Círculos* y *Crear figuras tridimensionales*.

TEMA 1 Círculos	TEMA 2 Crear figuras tridimensionales
Su estudiante demostrará teoremas sobre cuerdas, tangentes y secantes de los círculos. Los estudiantes escribirán ecuaciones para círculos en el plano de coordenadas.	Su estudiante calculará varios atributos para diferentes objetos tridimensionales.
¿Sabías que? Todos los círculos son similares entre sí. Esto significa que no importa el tamaño de un círculo—ya sea pequeño como una moneda o tan grande como una rueda de la fortuna—todos los círculos tienen la misma figura y se pueden redimensionar para coincidir perfectamente con cualquier otro círculo. Sus proporciones (como la relación entre la circunferencia y el diámetro, que siempre es π) permanecen constantes.	¿Sabías que? Arquímedes de Siracusa, Sicilia, quien vivió del 287 a. e. c. al 212 a. e. c., fue un antiguo matemático, físico e ingeniero griego. Arquímedes descubrió fórmulas para calcular el volumen de esferas, cilindros y conos. Se le ha honrado de muchas maneras por sus contribuciones. Ha aparecido en sellos postales de Alemania del Este, Grecia, Italia, Nicaragua, San Marino y España. 

MÓDULO 5 Tomar decisiones informadas

En este módulo, su estudiante profundizará su comprensión de la probabilidad y cómo determinar la probabilidad de ciertos resultados o resultados finales. Hay 2 temas en este módulo: *Independencia y probabilidad condicional*, y *Cálculo de probabilidades*.

TEMA 1 Independencia y probabilidad condicional	TEMA 2 Cálculo de probabilidades
Su estudiante aprenderá acerca de la probabilidad por medio de situaciones que involucran monedas, cubos numéricos, bolsas de canicas y naipes. Las diferentes probabilidades se calcularán de manera diferente si las situaciones usan palabras como *y* u *o*, así como si los elementos se reemplazan o no.	Su estudiante organizará eventos en tablas de frecuencia y tablas de doble entrada para ayudar a determinar la probabilidad de resultados específicos. Después, aprenderá las diferencias entre permutaciones o combinaciones y harán cálculos para ellas.
¡Hagamos un trato! Hay tres puertas. Detrás de una puerta hay un premio. Detrás de las otras dos puertas hay unos burros. Elige una puerta. El presentador del programa del juego abre una de las puertas que no elegiste para descubrir un burro. Después, pregunta si deseas quedarte con la puerta elegida o si deseas cambiarla por la otra puerta cerrada. ¿Deberías quedarte o cambiarla? O ¿no importa? 	¡Cerradura de permutación, no cerradura de combinación! Normalmente usamos una "cerradura de combinación" para casilleros, cajas fuertes, garajes, puertas e incluso bicicletas. Así que, siempre que sepas los 3 o 4 números necesarios para la cerradura, debería abrirse. Pero en realidad debería llamarse "cerradura de permutación" porque el orden en que se usan los números es importante. 

Estructura de la lección

Cada lección del curso se organiza de la misma manera para desarrollar un conocimiento profundo. Lea las partes de la lección para conocer más sobre la de aprendizaje del estudiante en el salón de matemáticas.

Objetivos y pregunta esencial

Cada lección comienza con objetivos que se incluyen para ayudar a los estudiantes a comprender los objetivos de aprendizaje. También se incluye una afirmación esencial que conecta el aprendizaje de los estudiantes con una pregunta para reflexionar. La pregunta se repite al final de cada lección para evaluar el nivel de comprensión del estudiante.

Inicio

La sección Inicio involucra a su estudiante en el aprendizaje. En la sección Inicio, el estudiante recurre a lo que ya conoce del mundo, lo que aprendió anteriormente y la intuición para que pueda pensar de forma matemática y prepararse para lo que vendrá en la lección.

Actividades

En las Actividades, los estudiantes desarrollan su conocimiento matemático y desarrollan una comprensión profunda de las matemáticas. Estas actividades le permiten al estudiante comunicarse y trabajar con otros compañeros en la clase de matemáticas.

Cuando su estudiante esté trabajando en estas actividades, tenga en cuenta:

- no se trata solo de buscar una respuesta. Es importante hacer el cálculo y hablar al respecto.
- cometer errores es una parte importante del aprendizaje, así que ¡arriésgate!
- a menudo hay más de una forma para resolver un problema.

Demuestra lo que sabes

La sección Demuestra lo que sabes le permite al estudiante reflexionar sobre las ideas principales de la lección y demostrar lo que ha aprendido.

Asignación de la lección

La Asignación de la lección proporciona a sus estudiantes práctica para desarrollar fluidez y competencia. La Asignación de la lección también incluye una sección para ayudar a preparar a los estudiantes para la siguiente lección.

Conceptos clave de la lección

Al final de cada tema, el Resumen del tema proporciona un resumen de cada lección del tema. Anime a su estudiante a utilizarlos como herramienta para revisar y recuperar los conceptos clave de una lección.

Apoyar a su estudiante

La Guía del tema para la familia

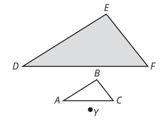
La Guía del tema para la familia proporciona una visión general de las matemáticas del tema, cómo están conectadas las matemáticas a lo que los estudiantes ya saben y cómo se utilizará ese conocimiento en el aprendizaje futuro. Proporciona un ejemplo de un modelo matemático o estrategia que su estudiante está aprendiendo en el tema, conexiones con el mundo real de las matemáticas, puntos de conversación para comentar y/o preguntas para hacerle a su estudiante, y los términos clave que su estudiante aprenderá. Tanto usted como su estudiante también pueden utilizar el Glosario de matemáticas para comprobar la terminología y las definiciones. Anime a su estudiante a consultar los términos clave en la Guía del tema para la familia y/o en el Glosario de matemáticas al completar tareas de matemáticas.

Aprender fuera del salón es crucial para el éxito de su estudiante. Si bien no esperamos que usted sea maestro de matemáticas, la Guía del tema para la familia puede ayudarlo mientras habla con su estudiante sobre el contenido matemático del curso. Se espera que tanto usted como su estudiante lean y se beneficien con estas guías.

¿En dónde estamos?

Una **dilatación** es una transformación de la figura en la que la figura se estira o encoge con respecto a un punto fijo o el centro de la dilatación.

El triángulo *DEF* es una dilatación del ΔABC. El centro de dilatación es el punto *Y*.



La **media geométrica** de dos números positivos *a* y *b* es el número positivo *x* de manera que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

La media geométrica de 3 y 12 es 6.

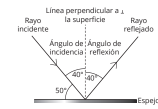
$$\frac{3}{x} = \frac{x}{12}$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6$$

El **ángulo de reflexión** es el ángulo que forma la semirrecta reflejada y una recta perpendicular a la superficie de un espejo.

En este ejemplo, el ángulo de reflexión mide 40°.



¿Dónde hemos estado?

En 8.º grado, los estudiantes exploraron el teorema de Pitágoras observando patrones, haciendo una conjetura y, después, demostrando informalmente el teorema mediante modelos y diagramas. Este tema les presenta a los estudiantes el concepto formal de demostración mediante la definición de conjetura, postulado y teorema, términos que utilizarán más adelante cuando escriban sus propias demostraciones.

¿Hacia dónde vamos?

La demostración es la piedra angular de la geometría en la secundaria. Los estudiantes continuarán desarrollando sus destrezas de razonamiento deductivo a lo largo del curso a medida que demuestren las conjeturas realizadas a través de la investigación. Los estudiantes utilizarán los términos indefinidos -punto, recta y plano- para definir e investigar nuevos términos y conceptos.

Matemáticas en el mundo real

Las matemáticas se utilizan en actividades cotidianas como la elaboración de presupuestos, la cocina y los deportes, lo que las convierte en una destreza valiosa para la vida. También, desempeñan un papel crucial en la alfabetización financiera, el razonamiento lógico y la toma de decisiones. Al conectar las matemáticas con situaciones de la vida real, los estudiantes ganan confianza, perciben su relevancia y desarrollan destrezas de pensamiento crítico que les beneficiarán tanto en lo académico como en su vida diaria. La sección de "Matemáticas en el mundo real" de la Guía para la familia del tema proporciona ejemplos de cómo se aplican los conceptos matemáticos del tema más allá del salón.

Algunos ejemplos de estas conexiones con el mundo real son:

Matemáticas en el mundo real: Imagínate que estás en un parque de atracciones y contemplas la montaña rusa más alta del mundo. ¿Cómo puedes saber cuánto mide sin subir a la cima? ¡Ahí es donde los triángulos similares vienen al rescate! Al medir la sombra de la montaña rusa y usar un triángulo más pequeño y similar que creas con un palo y su sombra, puedes calcular la altura de la montaña rusa sin despegar los pies del suelo.

Matemáticas en el mundo real

¿Alguna vez te has preguntado cómo los videojuegos se ven tan increíbles o cómo el GPS sabe exactamente dónde estás? ¡Todo es gracias a la magia del plano de coordenadas! Piensa en él como una gigantesca cuadrícula que nos ayuda a trazar el mundo, ¡o incluso mundos imaginarios!

Los desarrolladores de juegos usan coordenadas para ubicar personajes, obstáculos y cofres del tesoro en los lugares precisos. Los arquitectos lo usan para diseñar rascacielos, asegurándose de que todo esté perfectamente alineado. Incluso los atletas están involucrados en la acción: cuando un entrenador analiza jugadas en baloncesto o fútbol, esencialmente están trazando movimientos en un gigantesco plano de coordenadas invisible. ¡Así que la próxima vez que estés jugando a tu juego favorito o buscando la ruta más rápida para llegar a casa de un amigo, da las gracias a los ejes *x* e *y* por mantenerlo todo bajo control!

Apoyar a su estudiante

Los cartógrafos y topógrafos utilizan triángulos similares para medir ríos, montañas y paisajes urbanos, manteniendo los pies secos y el equipo ligero. La próxima vez que te tomes una selfie, piensa en esto: la forma en que el fondo se encoge mientras tu rostro se mantiene grande se debe a la perspectiva, que depende de—¡lo adivinaste!—los triángulos similares. Los artistas y diseñadores lo utilizan para crear dibujos realistas y efectos 3D. Así que, ya sea que estés ajustando el diseño de un edificio, mapeando tierras inexploradas o tomando la foto perfecta, los triángulos similares están involucrados.

Matemáticas en el mundo real: Puede que no te des cuenta, pero las rectas y los ángulos están por todas partes en tu vida, aunque no pienses activamente en ellos. Desde el momento en que te despiertas, ¡las estás usando! ¿Las esquinas de la pantalla de tu teléfono? Ángulos. ¿La forma en que el sol brilla a través de tu ventana? Es la luz siguiendo las reglas de los ángulos y la reflexión. Incluso cuando te tomas una selfie, colocas el teléfono en el ángulo justo para conseguir la mejor iluminación y mostrar tu mejor lado —¡esa es la geometría en acción!

Los arquitectos utilizan las relaciones entre rectas y ángulos para diseñar edificios que no se caigan. Los ingenieros las utilizan para crear carreteras, puentes y montañas rusas con curvas y apoyos perfectos. Una cancha de baloncesto o un campo de fútbol se basan en rectas paralelas (las rectas laterales) y transversales (pases y jugadas a través del campo) para crear estrategias y guiar el movimiento. ¡La geometría es básicamente el pase VIP para entender cómo se construye y se mueve el mundo!

Los estándares de procesos matemáticos de TEKS

Cada módulo se concentrará en los estándares de procesos matemáticos de TEKS que ayudarán al estudiante a convertirse en un pensador matemático. Los estándares de procesos matemáticos de TEKS se enumeran a continuación. Comente con su estudiante las afirmaciones de "Yo puedo" debajo de los estándares para ayudarlo a desarrollar su aprendizaje y comprensión de las matemáticas. Con su ayuda, su estudiante puede convertirse en un pensador matemático productivo.

Aplica matemáticas a los problemas que surgen en la vida diaria, en la sociedad y en el lugar de trabajo.

Puedo:

- usar las matemáticas que aprendí para resolver problemas del mundo real.
- interpretar resultados matemáticos en los contextos de una variedad de problemas matemáticos.

Apoyar a su estudiante

Utiliza un modelo de resolución de problemas que incluya analizar la información dada, formular un plan o una estrategia, determinar una solución, justificar una solución y evaluar el proceso de resolución de problemas y la razonabilidad de la solución.

Puedo:
- explicar qué "significa" un problema con mis propias palabras.
- crear un plan y cambiarlo cuando sea necesario.
- hacer preguntas útiles para comprender el problema.
- explicar mi razonamiento y defender mi solución.
- reflexionar si mis resultados tienen sentido.

Selecciona las herramientas, incluso objetos reales, manipulativos, papel y lápiz y tecnología, según corresponda, así como técnicas como cálculo mental, estimación y sentido numérico, según corresponda, para resolver problemas.

Puedo:
- usar una variedad de herramientas diferentes que tengo para resolver problemas.
- reconocer cuándo una herramienta que tengo para resolver problemas puede ser útil y cuándo tiene limitaciones.
- buscar métodos eficientes para resolver problemas.
- estimar antes de comenzar a calcular para ayudar a mi razonamiento.

Comunica las ideas matemáticas, el razonamiento y sus implicancias usando diferentes representaciones, entre ellas símbolos, diagramas, gráficas e idioma, según corresponda.

Puedo:
- explicar qué "significa" un problema con mis propias palabras.
- crear un plan y cambiarlo de ser necesario.
- hacer preguntas útiles al intentar comprender el problema.
- explicar mi razonamiento y defender mi solución.
- reflexionar si mis resultados tienen sentido.

Crea y utiliza representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas.

Puedo:
- considerar las unidades de medida involucradas en un problema.
- etiquetar diagramas y figuras de forma adecuada para aclarar el significado de diferentes representaciones.
- crear una representación comprensible de un problema matemático.

Apoyar a su estudiante

Analiza las relaciones matemáticas para conectar y comunicar las ideas matemáticas.

Puedo:

- identificar relaciones importantes en un problema matemático.
- recurrir a lo que sé para resolver problemas nuevos.
- analizar y organizar información.
- observar de cerca para identificar patrones o estructuras.
- buscar métodos generales y maneras más eficientes de resolver problemas.

Clasifica, explica y justifica las ideas y los argumentos matemáticos empleando lenguaje matemático preciso en comunicación oral o escrita.

Puedo:

- trabajar meticulosamente y verificar mi trabajo.
- distinguir el razonamiento correcto del razonamiento erróneo.
- utilizar vocabulario matemático apropiado cuando hablo con mis compañeros, mi maestro y otras personas.
- especificar las unidades de medida adecuadas cuando explico mi razonamiento.
- calcular correctamente y comunicarte de forma precisa con los demás.

Reflexionar sobre el aprendizaje y el progreso

Para apoyar a su estudiante, anímelo a reflexionar sobre el proceso de aprendizaje. Los recursos educativos incluyen una autorreflexión por parte del estudiante para cada tema. Anime a su estudiante a reflexionar con precisión y frecuencia sobre el aprendizaje y el progreso a lo largo de cada tema. Hable sobre los conceptos específicos de la Autorreflexión con su estudiante y celebre el avance desde el principio hasta el final del tema. Recuérdele a su estudiante que consulte la Autorreflexión del tema en los días de Aprender individualmente después de centrarse en destrezas y conceptos específicos. Puede pedirle a su estudiante que le explique los conceptos de la autorreflexión utilizando los resúmenes de los temas o las tareas de las lecciones para demostrar su comprensión.

TOPIC 1 SELF-REFLECTION

Name: ______________________

Geometry Reasoning

When you reflect on what you are learning, you develop your understanding and know when to ask for help.

Reflect on these statements. Place a number in each circle from 1–3, where 1 represents **the skill is new to me,** 2 represents **I am building proficiency of the skill,** and 3 represents **I have demonstrated proficiency of the skill**.

I can demonstrate an understanding of the standards in the *Geometry Reasoning* topic by:

TOPIC 1: *Geometry Reasoning*	Beginning of Topic	Middle of Topic	End of Topic
distinguishing between undefined terms, definitions, conjectures, postulate, theorems, and proofs.			
explaining the difference between the terms draw, sketch, and construct.			
verifying a conjecture is false using a counterexample.			
identifying the hypothesis and conclusion given a conditional statement.			
determining the validity of a conditional statement.			
recognizing a linear, exponential, or quadratic function by its equation or graph.			
explaining the difference between Euclidean geometry and spherical geometry.			
making a conjecture and using deductive reasoning to validate it.			

continued on the next page

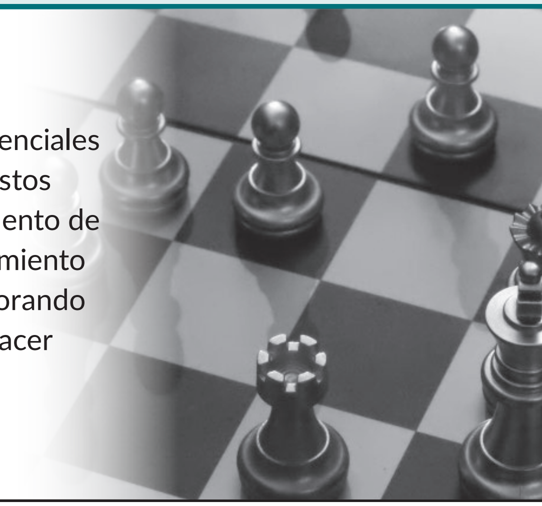
¡Gracias!

¡Disfrute de la divertida aventura matemática que le espera a usted y a su estudiante! Recuerde que tiene recursos disponibles a su disposición. Agradecemos por apoyar el aprendizaje de su estudiante.

MÓDULO 1

Razonar con figuras

TEMA 1 Razonamiento geométrico



En este tema, los estudiantes son introducidos a los tres elementos esenciales de la geometría: el punto, la recta y el plano. Los estudiantes utilizan estos tres términos indefinidos para definir términos adicionales como segmento de recta, rayo y rectas oblicuas. Los estudiantes diferencian entre razonamiento inductivo y deductivo y empiezan a sentar las bases de la prueba explorando las afirmaciones condicionales. Después, los estudiantes aprenden a hacer conjeturas y exploran la diferencia entre postulados y teoremas.

¿Dónde hemos estado?

En 8.º grado, los estudiantes exploraron el teorema de Pitágoras observando patrones, haciendo una conjetura y, después, demostrando informalmente el teorema mediante modelos y diagramas. Este tema les presenta a los estudiantes el concepto formal de demostración mediante la definición de conjetura, postulado y teorema, términos que utilizarán más adelante cuando escriban sus propias demostraciones.

¿Hacia dónde vamos?

La demostración es la piedra angular de la geometría en la secundaria. Los estudiantes continuarán desarrollando sus destrezas de razonamiento deductivo a lo largo del curso a medida que demuestren las conjeturas realizadas a través de la investigación. Los estudiantes utilizarán los términos indefinidos -punto, recta y plano- para definir e investigar nuevos términos y conceptos.

TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

La gente utiliza el razonamiento deductivo todos los días para tomar decisiones lógicas, resolver problemas y sacar conclusiones basadas en hechos en la escuela, el trabajo y la vida cotidiana.

EJEMPLO DE PREGUNTA

Si la afirmación "Si un número es divisible entre 6, entonces es divisible entre 3" es cierta, ¿cuál de las siguientes debe ser también cierta?

A. Si un número es divisible entre 3, entonces es divisible entre 6.
B. Si un número no es divisible entre 6, entonces no es divisible entre 3.
C. Si un número no es divisible entre 3, entonces no es divisible entre 6.
D. Si un número es divisible entre 6, entonces no es divisible entre 3.

Los estudiantes pueden utilizar un contraejemplo para demostrar que A, B y D no son ciertas. Por ejemplo, para la opción A, 3 es divisible entre 3 pero no es divisible entre 6.

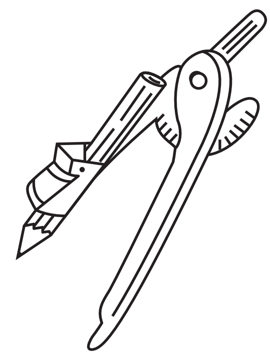
La afirmación "si un número no es divisible entre 3, entonces no es divisible entre 6" es verdadera.

TÉRMINOS CLAVE

- punto [point]
- recta
- puntos colineales [collinear points]
- plano [plane]
- puntos no colineales [noncollinear points]
- compás [compass]
- regla de borde recto
- esquema
- dibujar
- construir [construct]
- rectas coplanares
- rectas oblicuas
- rayo [ray]
- punto final de un rayo
- segmento de línea/recta
- puntos extremos de un segmento de recta
- segmentos de recta congruentes
- afirmación condicional
- afirmación bicondicional
- contraejemplo [counterexample]
- hipótesis [hypothesis]
- conclusión [conclusion]
- postulado [postulate]
- teorema [theorem]
- prueba [proof]
- validez [validity]
- geometría euclidiana [Euclidean geometry]
- gran círculo

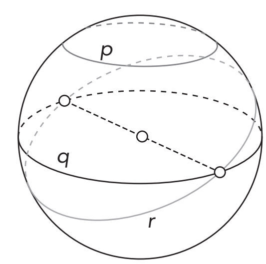
¿En dónde estamos?

Un **compás** es una herramienta que se utiliza para crear arcos y círculos.



Un **contraejemplo** es un solo ejemplo que muestra que la afirmación no es verdadera.
Por ejemplo, un amigo afirma que se suman fracciones sumando los numeradores y luego sumando los denominadores.
Un contraejemplo es $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Si utilizas el método de tu amigo, el resultado es $\frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4}$ o $\frac{1}{2}$. El contraejemplo demuestra que el método de tu amigo es incorrecto.

La geometría esférica es una geometría que sustituye el plano por una esfera, lo que la diferencia significativamente de la geometría plana.
En geometría esférica, las rectas se definen como *gran círculos* de una esfera, que dividen la esfera en dos hemisferios congruentes. Un **gran círculo** es la intersección de una esfera y un plano que pasa por el centro de la esfera.



En la **Lección 1: Puntos, rectas, rayos y segmentos de recta**, se presentan a los estudiantes los tres términos indefinidos - *punto*, *recta* y *plano* - que forman los bloques de construcción de la geometría.

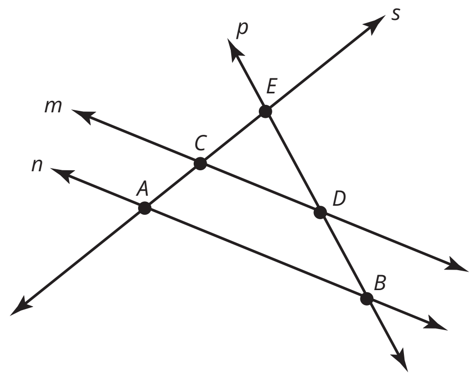
Puntos, rectas y planos

Aunque los términos punto, recta y plano no están definidos, podemos describirlos y utilizar modelos matemáticos para representarlos.

Un **punto** se describe simplemente como un lugar. En geometría, un punto no tiene figura ni tamaño, pero con frecuencia se representa mediante eso mismo: un punto.

Una **recta** se describe como una disposición recta y continua de un número infinito de puntos. Una recta tiene una longitud infinita, pero no tiene ancho.

Se muestra un modelo matemático de varios puntos y rectas.



Un **plano** se describe como una superficie plana. Un plano tiene una longitud y una ancho infinitos pero ninguna profundidad y se extiende infinitamente en todas direcciones. Un modelo del mundo real de un plano es la superficie de un cuerpo de agua en calma.

Lección 2: Razonamiento formal en la geometría euclidiana, introduce el razonamiento formal como base para demostrar teoremas geométricos.

Afirmaciones condicionales

Una **afirmación condicional** es una afirmación que se puede escribir en la forma "Si p, entonces q". Se puede escribir utilizando símbolos como $p \rightarrow q$, que se lee como "p implica q". En una afirmación condicional, la **hipótesis** es la parte de la afirmación "si-entonces" que sigue al "si". La **conclusión** es la parte de la afirmación "si-entonces" que sigue al "entonces".

afirmación condicional

$$\underbrace{\text{Si } x^2 = 36,}_{\text{Hipótesis}}\ \underbrace{\text{entonces } x = 6 \text{ o } x = -6}_{\text{Conclusión}}.$$

En la **Lección 3: Formulación de conjeturas y razonamiento deductivo**, se introduce a los estudiantes en el razonamiento inductivo y deductivo y se exploran varios postulados fundamentales.

- geometría esférica [spherical geometry]
- conjetura [conjeture]
- razonamiento inductivo [inductive reasoning]
- razonamiento deductivo [deductive reasoning]
- diagonal [diagonal]
- ángulo [angle]
- vértice de un ángulo [vertex of an angle]
- postulado del par lineal [linear pair postulate]
- postulado de la suma de segmentos
- postulado de la suma de ángulos
- recta auxiliar

Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

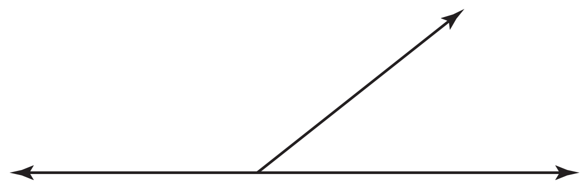
Matemáticas en el mundo real

El razonamiento deductivo no sólo sirve para resolver rompecabezas de ángulos o demostrar la congruencia de triángulos, ¡es tu arma secreta para la vida! Es el poder de comenzar con hechos y construir pasos lógicos para llegar a una conclusión, ya sea que estés resolviendo una demostración de geometría o descubriendo por qué tu amigo siempre llega tarde a las reuniones. Esta destreza impulsa todo, desde el diseño de rascacielos hasta debatir sobre quién se queda con la última rebanada de pizza. Ayuda a los científicos a desarrollar teorías, a los abogados a construir casos y a los detectives a resolver misterios. Así que la próxima vez que estés resolviendo una demostración, recuerda: ¡no solo estás aprendiendo matemáticas; estás entrenando para ser un superhéroe de la resolución de problemas en cualquier campo que elijas!

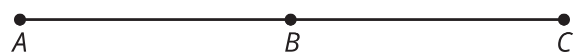
Postulado del par lineal, postulado de suma de segmentos y postulado de suma de segmentos

Se pueden utilizar tres postulados fundamentales (el postulado de par lineal, el postulado de suma de segmentos y el postulado de suma de ángulos) para realizar diversas conjeturas. Si las conjeturas se demuestran, entonces se convierten en teoremas.

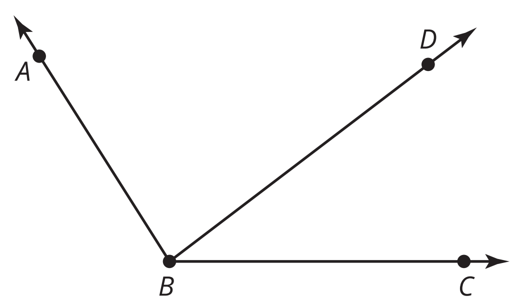
El **postulado de par lineal** establece que, "Si dos ángulos forman un par lineal, entonces los ángulos son suplementarios".



El **postulado de suma de segmentos** establece que "si un punto B está en $\overline{AC}$ y entre los puntos A y C, entonces $AB + BC = AC$."



El **postulado de suma de ángulos** establece que "si un punto D se encuentra en el interior de $\angle ABC$, entonces $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$."



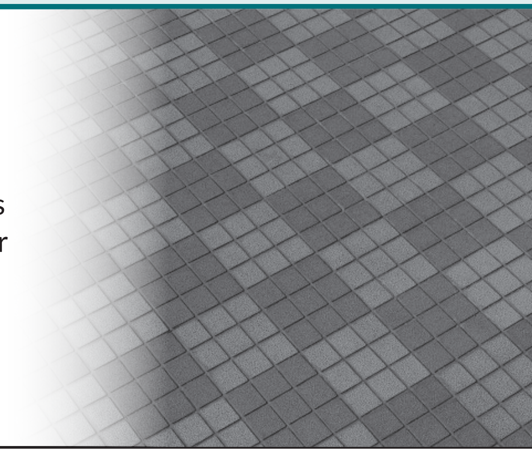
Guía para la familia

MÓDULO 1 Razonar con figuras

Geometría

TEMA 2 Utilizar un sistema de coordenadas rectangulares

Los estudiantes comienzan este tema repasando las propiedades de los cuadrados y los movimientos rígidos. Utilizan construcciones para crear un sistema de coordenadas rectangulares creando y transformando cuadrados. Después, los estudiantes utilizan el plano de coordenadas para estudiar las relaciones lineales paralelas y perpendiculares, clasificar polígonos y determinar el área y perímetro de figuras.



¿Dónde hemos estado?

Los estudiantes han realizado transformaciones de movimiento rígido de objetos geométricos y han explorado las propiedades de los triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares. Ellos han estudiado demostraciones informales de congruencia geométrica utilizando rectas paralelas y tienen amplia experiencia con el plano de coordenadas desde la escuela primaria hasta la escuela intermedia.

¿Hacia dónde vamos?

En este tema, los estudiantes se inician en la formulación de conjeturas, contenido que continuará en las primeras partes del siguiente tema. Los estudiantes utilizan lo que han aprendido en cursos anteriores para hacer preguntas formales acerca de figuras y rectas. Estas preguntas serán abordadas formalmente con demostraciones a medida que los estudiantes pasan a temas posteriores en este curso.

TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

El plano de coordenadas es fundamental en matemáticas y tiene numerosas aplicaciones en el mundo real. Proporciona una forma estructurada de representar y analizar relaciones entre números, objetos o sucesos en dos dimensiones, lo que permite la precisión y la visualización en diversos campos, como la navegación, la planificación urbana y la ingeniería.

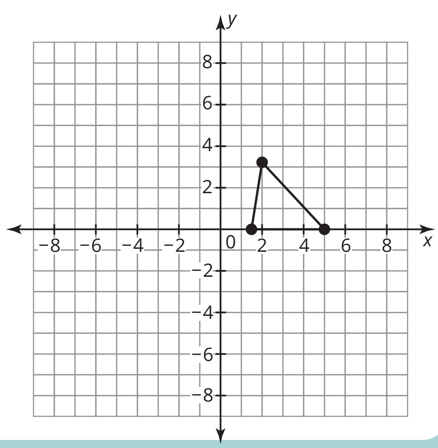
EJEMPLO DE PREGUNTA

En el plano *xy*, un triángulo tiene vértices en (5, 0), ($\sqrt{2}$, 0), y (2, $\sqrt{10}$). ¿Cuál es el área aproximada del triángulo?

Puedes considerar la base como el segmento de recta horizontal. Su base es $5 - \sqrt{2}$ y su altura es $\sqrt{10}$. Entonces, el área es

$$\frac{1}{2}(5 - \sqrt{2})(\sqrt{10}) \approx 5.67$$

De modo que, el área del triángulo es aproximadamente 5.67 unidades cuadradas.



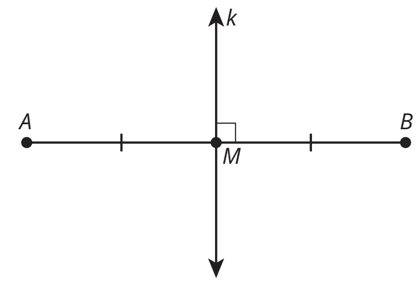
TÉRMINOS CLAVE

- arco [arc]
- punto medio [midpoint]
- bisectriz de segmento [segment bisector]
- bisectriz perpendicular [perpendicular bisector]
- transformación [transformation]
- movimiento rígido [rigid motion]
- fórmula de la distancia [distance formula]
- extracción de cuadrados perfectos
- radical [radical]
- radicando [radicand]
- fórmula del punto medio [midpoint formula]
- figura compuesta [composite figure]
- polígono regular [regular polygon]
- apotema [apothem]

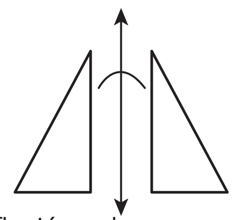
Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

¿En dónde estamos?

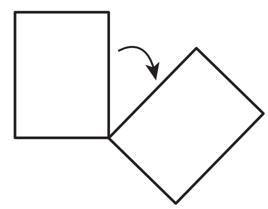
Una **bisectriz perpendicular** es una recta, segmento de recta o rayo que interseca el punto medio de un segmento de recta en un ángulo de 90°. La recta k es la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.



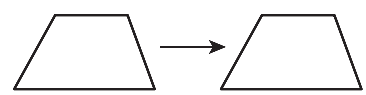
Una **transformación** es una operación que mapea o mueve una figura, llamada imagen inversa, para formar una nueva figura llamada imagen. Tres tipos de transformaciones son reflexiones, rotaciones y traslaciones.



reflexión sobre una recta

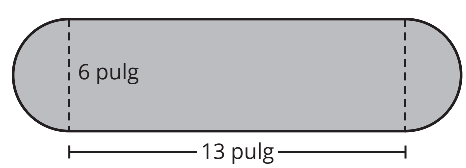


rotación alrededor de un punto



translación

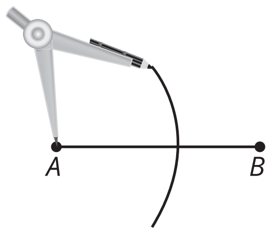
Una **figura compuesta** es una figura formada al combinar diferentes figuras. Por ejemplo, esta figura compuesta combina un rectángulo y dos semicírculos.

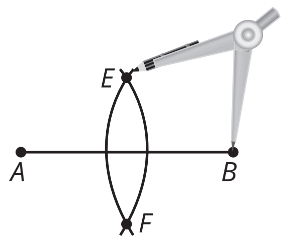


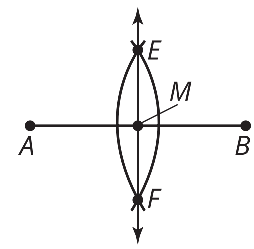
En la **Lección 1: Construcción de un plano de coordenadas**, los estudiantes aprenden algunas construcciones básicas. Construyen un cuadrado y utilizan transformaciones para utilizar el cuadrado para construir un plano de coordenadas.

Construir una bisectriz de un segmento

Para construir la bisectriz de un segmento utilizando solo un compás y la regla de borde recto, se utiliza el hecho de que todos los radios de un círculo tienen la misma longitud.







Traza un arco

Abre el radio del compás a más de la mitad de la longitud de $\overline{AB}$. Usa el extremo A como centro y construye un arco.

→

Traza otro arco

Mantén el radio del compás y utiliza el punto B como centro mientras construyes un arco. Etiqueta los puntos formados por la intersección de los arcos del punto E y el punto F.

→

Traza una recta

Utiliza una regla de borde recto para conectar los puntos E y F. El segmento de recta EF es la bisectriz del segmento $\overline{AB}$. El punto M representa el punto medio de $\overline{AB}$.

La recta EF bisecta $\overline{AB}$. El punto M es el punto medio de $\overline{AB}$.

En la **Lección 2: Rectas paralelas y perpendiculares**, los estudiantes amplían su comprensión de las relaciones lineales para escribir ecuaciones de rectas paralelas y perpendiculares.

Escribir una ecuación paralela a una recta dada

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente. Por ejemplo, para escribir la ecuación de una recta paralela a la recta $y = 2x + 1$ que pasa por el punto (4, 11), primero hay que determinar la pendiente de la recta.

Utilizando el punto dado y la forma punto-pendiente, puedes escribir una ecuación paralela a la recta dada.

$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$

$y - 11 = 2(x - 4)$

$y - 11 = 2x - 8$

$y = 2x + 3$

Así, la recta paralela a $y = 2x + 1$ que pasa por el punto (4, 11) es $y = 2x + 3$.

Matemáticas en el mundo real

¿Alguna vez te has preguntado cómo los videojuegos se ven tan increíbles o cómo el GPS sabe exactamente dónde estás? ¡Todo es gracias a la magia del plano de coordenadas! Piensa en él como una gigantesca cuadrícula que nos ayuda a trazar el mundo, ¡o incluso mundos imaginarios!

Los desarrolladores de juegos usan coordenadas para ubicar personajes, obstáculos y cofres del tesoro en los lugares precisos. Los arquitectos lo usan para diseñar rascacielos, asegurándose de que todo esté perfectamente alineado. Incluso los atletas están involucrados en la acción: cuando un entrenador analiza jugadas en baloncesto o fútbol, esencialmente están trazando movimientos en un gigantesco plano de coordenadas invisible. ¡Así que la próxima vez que estés jugando a tu juego favorito o buscando la ruta más rápida para llegar a casa de un amigo, da las gracias a los ejes *x* e *y* por mantenerlo todo bajo control!

En la **Lección 3: Clasificación de cuadriláteros en el plano de coordenadas** y la **Lección 4: Clasificación de triángulos en el plano de coordenadas**, los estudiantes deducen y utilizan la *fórmula de la pendiente*, la *fórmula de la distancia* y la *fórmula del punto medio*. Los estudiantes utilizan estas fórmulas para resolver problemas en el plano de coordenadas.

La fórmula de la distancia

Puedes utilizar el teorema de Pitágoras para obtener la fórmula de la distancia, que determina la distancia entre dos puntos del plano de coordenadas. La fórmula de la distancia establece que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos en el plano de coordenadas, entonces la distancia *d*, entre si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es dada por $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Por ejemplo, determina la distancia entre los puntos (3, 7) y (−1, 4).

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (4 - 7)^2}$$

$$d = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$

$$d = \sqrt{16 + 9}$$

$$d = \sqrt{25}$$

$$d = 5$$

La distancia entre los puntos (3, 7) y (−1, 4) es 5 unidades.

La fórmula del punto medio

La **fórmula del punto medio** establece que si (x_1, x_2) y (x_2, y_2) son dos puntos en el plano de coordenadas, entonces el punto medio del segmento de recta que une estos dos puntos es $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Para determinar el punto medio del segmento con puntos extremos (2, 3) y (8, 5), sustituye los valores *x* e *y* de los pares ordenados en la fórmula del punto medio y luego reescribe el par ordenado.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$\left(\frac{2 + 8}{2}, \frac{3 + 5}{2}\right)$$

$$\left(\frac{10}{2}, \frac{8}{2}\right)$$

$$(5, 4)$$

El punto medio del segmento con los puntos finales (2, 3) y (8, 5) está situado en (5, 4).

En la **Lección 5: Área y perímetro en el plano de coordenadas**, los estudiantes aplican las fórmulas de distancia y punto medio para determinar el área y el perímetro de figuras en el plano de coordenadas. Los estudiantes también determinan el área de los *polígonos regulares*.

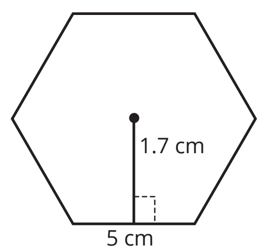
Determinar el área de un polígono regular

Un **polígono regular** es un polígono con todos los lados congruentes y todos los ángulos congruentes. La **apotema** de un polígono regular es un segmento perpendicular desde el centro de un polígono regular a uno de sus lados. La fórmula para el área de un polígono regular es $A = \frac{1}{2}aP$ donde P representa el perímetro del polígono regular, y a representa la longitud del apotema.

Por ejemplo, determina el área del hexágono regular.

El perímetro del hexágono es $5 \cdot 6 = 30$ cm.

La longitud de la apotema es de 1.7 cm.



$A = \frac{1}{2}aP$

$A = \frac{1}{2} \cdot 1.7 \cdot 30$

$A = 25.5$

El área del hexágono regular es 25.5 cm^2.

Guía para la familia

MÓDULO 1 Razonar con figuras **Geometría**

TEMA 3 Secuencias de movimientos rígidos

En este tema, los estudiantes se basan en su comprensión de los movimientos rígidos de la escuela intermedia que consideran cada uno de los movimientos rígidos —traslaciones, reflexiones y rotaciones— en un plano de coordenadas y fuera del plano de coordenadas. Después, los estudiantes realizan secuencias de transformaciones de movimiento rígido. También utilizan secuencias de transformaciones para demostrar que dos figuras son congruentes.

¿Dónde hemos estado?

En la escuela intermedia, los estudiantes exploraron las traslaciones, las reflexiones y las rotaciones. Describieron el efecto del movimiento rígido en figuras bidimensionales usando coordenadas. Este tema se basa en estos conocimientos, exigiendo a los estudiantes que utilicen el razonamiento geométrico para realizar secuencias de transformaciones de movimientos rígidos.

¿Hacia dónde vamos?

En este tema, los estudiantes comienzan el estudio formal de la congruencia y sientan las bases para su estudio de similitud y trigonometría. Este tema forma parte de una larga progresión en la comprensión de las transformaciones geométricas y algebraicas. En el siguiente tema, los estudiantes explican cómo las condiciones para la congruencia de triángulos (LLL, LAL y ALA) se derivan de la definición de congruencia en términos de movimiento rígido. Usarán los teoremas de congruencia triangular en futuros temas para demostrar una amplia gama de teoremas geométricos.

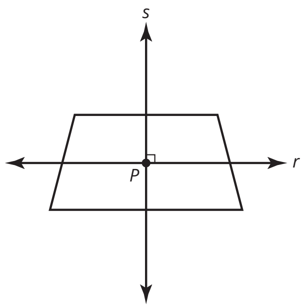
TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

Las secuencias de transformaciones rígidas de movimiento, incluyendo las traslaciones, rotaciones y reflexiones de , mantienen el tamaño y la figura de los objetos mientras se analizan los movimientos. Esto resulta útil en aplicaciones como el diseño de maquinaria, la creación de animaciones y el trazado de rutas en sistemas de navegación.

EJEMPLO DE PREGUNTA

La figura muestra dos rectas perpendiculares, *s* y *r*, que se cruzan en el punto *P* en el interior de un trapezoide. La recta *r* es paralela a las bases y biseca ambas patas del trapecio. La recta *s* biseca ambas bases del trapezoide.



¿Cuál transformación llevará siempre la figura sobre sí misma?

Un reflejo a través de la recta *s* llevará la figura sobre sí misma.

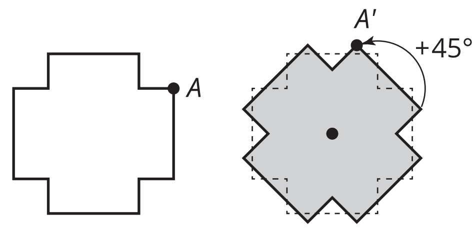
TÉRMINOS CLAVE

- notación de coordenadas [coordinate notation]
- ángulos congruentes [congruent angles]
- triángulos congruentes [congruent triangles]
- traslación [translation]
- bisectriz de un ángulo [angle bisector]
- reflexión [reflection]
- teorema de la bisectriz perpendicular [perpendicular bisector theorem]
- rotación [rotation]
- ángulo de rotación [angle of rotation]
- ángulo central [central angle]
- círculo concéntrico [concentric circle]

Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

¿En dónde estamos?

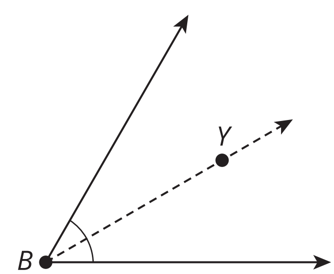
Un **ángulo de rotación** es un ángulo dirigido basado en un círculo. Los ángulos de rotación positivos giran en sentido contrario a las manecillas del reloj y los ángulos de rotación negativos giran en el sentido de las manecillas del reloj. El ángulo de rotación que se muestra rota el punto *A* 45° hacia la izquierda.



La **notación de coordenadas** describe cómo las coordenadas originales de un punto se convierten en nuevas coordenadas tras una o varias transformaciones. La notación de coordenadas de un mapeo se escribe de la forma $(x, y) \rightarrow$ (expresión nueva en términos de x, expresión nueva en términos de y).

Por ejemplo, $(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$ describe que el punto (x, y) se desplazó 2 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia abajo.

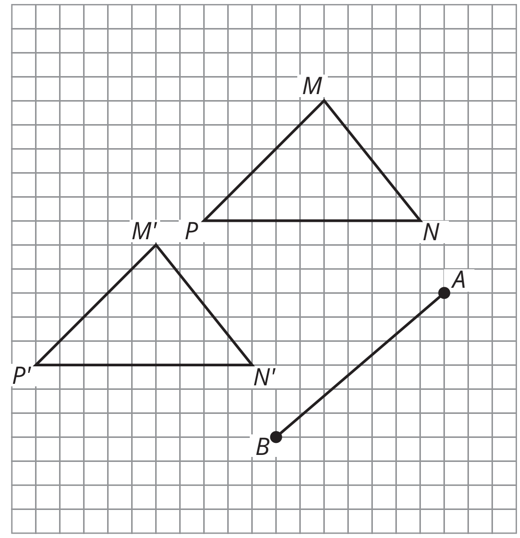
Una **bisectriz de un ángulo** es un rayo dibujado a través del vértice de un ángulo que lo divide en dos ángulos de igual medida o dos ángulos congruentes.



En la **Lección 1: Traslaciones dentro y fuera del plano**, los estudiantes repasan lo aprendido sobre traslaciones en la escuela intermedia y utilizan herramientas de construcción para completar traslaciones fuera del plano de coordenadas. Después, en la **Lección 2: Secuencias de traslaciones múltiples,** los estudiantes utilizan lo que saben sobre traslaciones para describir una secuencia de traslaciones que mapean una imagen previa en su imagen.

Traslaciones

Una traslación se puede medir como un segmento de recta dirigido.



$\triangle MNP$ se trasladó para producir $\triangle M'N'P'$. El triángulo se trasladó una distancia igual a la distancia entre los puntos *A* y *B*. Se lo trasladó en la dirección desde el punto *A* hacia el punto *B*.

Entonces, $\overline{AB}$ es el segmento de recta dirigido que se utiliza para medir esta traslación.

En la **Lección 3: Reflexiones dentro y fuera del plano de coordenadas**, los estudiantes continúan explorando las transformaciones rígidas del movimiento. Esta vez, los estudiantes exploran las reflexiones.

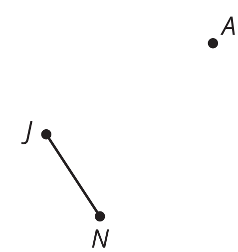
Reflexiones

Cuando una imagen en el plano de coordenadas se refleja al otro lado del eje *x*, el valor de la coordenada *y* de la imagen es opuesto a la coordenada *y* de la imagen previa. Las coordenadas de una imagen después de una reflexión en el plano de coordenadas se resumen en la tabla.

Punto original	Coordenadas de la imagen tras una reflexión sobre el eje *x*	Coordenadas de la imagen tras una reflexión sobre el eje *y*
(x, y)	$(x, -y)$	$(-x, y)$

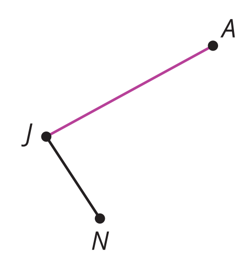
A continuación, los estudiantes exploran las rotaciones en la **Lección 4: Rotaciones dentro y fuera del plano de coordenadas**.

Rotaciones fuera del plano de coordenadas



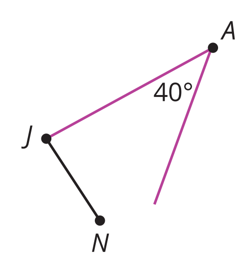
Rota $\overline{JN}$ 40°, utilizando el punto *A* como el centro de rotación.

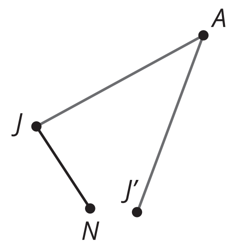
1. Dibuja un segmento de recta desde el centro de rotación, *A*, hacia un extremo del segmento de recta.



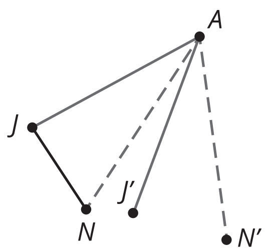
2. Utilizando un transportador, dibuja un ángulo de 40°. Utiliza el centro de rotación, *A*, como el vértice y el segmento de recta dibujado, $\overline{AJ}$ como un lado del ángulo.

   Dado que la medida del ángulo es positiva, traza el ángulo en sentido contrario a las manecillas del reloj del segmento de recta dibujado.

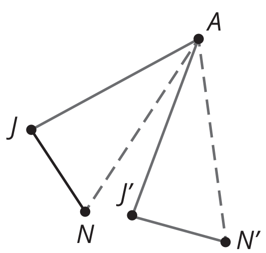




3. Utiliza un borde recto para extender el lado del ángulo para que tenga la misma longitud que $\overline{AJ}$. Etiqueta al otro extremo J'.



4. Repite los pasos 1, 2 y 3 utilizando el otro extremo del segmento de recta original.



5. Conecta los extremos J' y N'.

   El segmento $\overline{J'N'}$ es el resultado de una rotación de 40° de $\overline{JN}$ sobre el punto A.

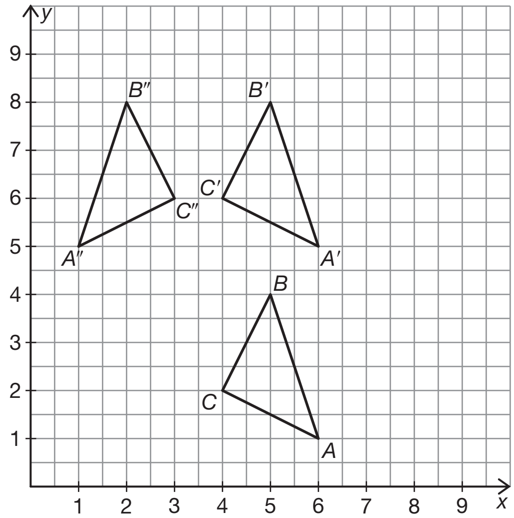
En la **Lección 5**: **Composiciones de funciones**, los estudiantes combinan lo aprendido a lo largo del tema para realizar composiciones de transformaciones de movimiento rígido en el plano de coordenadas. Los estudiantes identifican posibles secuencias de transformaciones de movimiento rígido que mapean un rectángulo en el plano de coordenadas a su imagen.

Transformaciones múltiples

Puedes realizar una composición de transformaciones de movimiento rígido en el plano de coordenadas.

Por ejemplo, $\triangle A''B''C''$ es el resultado de una composición de movimientos rígidos en $\triangle ABC$.

- Una traslación de 4 unidades hacia arriba
- Una reflexión sobre la recta $x = 3\frac{1}{2}$



Las coordenadas de $\triangle ABC$ son $A(6, 1)$, $B(5, 4)$, $C(4, 2)$.

- Traslada $\triangle ABC$ 4 unidades hacia arriba. Las coordenadas de $\triangle A'B'C'$ son $A'(6, 5)$, $B'(5, 8)$, $C'(4, 6)$.
- Refleja $\triangle A'B'C'$ sobre la recta $x = 3\frac{1}{2}$. Las coordenadas de $A''B''C''$ son $A''(1, 5)$, $B''(2, 8)$, $C''(3, 6)$.

Matemáticas en el mundo real

Imagina intentar diseñar una montaña rusa o coreografiar una rutina de baile: ambos se tratan de mover objetos mientras se mantienen intactas sus figuras y tamaños. ¡Representan secuencias de transformaciones de movimiento rígido! Estas transformaciones incluyen traslaciones (deslizar objetos sobre una superficie), rotaciones (hacerlos girar alrededor de un punto) y reflexiones (darles la vuelta como si se miraran en un espejo).

Las transformaciones de movimiento rígido ayudan a arquitectos e ingenieros a garantizar que las estructuras se construyan correctamente y de manera consistente. Son responsables de crear animaciones realistas en películas y programar robots que puedan moverse con precisión para completar tareas como ensamblar autos. Los videojuegos usan estos conceptos para crear movimientos suaves de los personajes y entornos realistas. Así que la próxima vez que veas un giro impecable en gimnasia, una rueda de la fortuna girando o una escena animada sin interrupciones, recuerda: ¡las secuencias de movimientos rígidos hacen que todo eso sea posible!

Guía para la familia

MÓDULO 1 Razonar con figuras

Geometría

TEMA 4 Congruencia mediante transformaciones

En este tema, los estudiantes utilizan lo que saben sobre movimientos rígidos para probar teoremas de congruencia triangular por construcción. Demuestran los teoremas de congruencia lado-lado-lado, lado-ángulo-lado, ángulo-lado-ángulo, ángulo-ángulo-lado y ángulo hipotenusa. Para demostrar estos teoremas de congruencia, los estudiantes usan una secuencia de transformaciones que mapea un triángulo sobre otro, dado que son congruentes tres partes correspondientes. Al integrar sus conocimientos de geometría y álgebra, los estudiantes se encuentran con triángulos en el plano de coordenadas que les obligan a utilizar la fórmula de la distancia para aplicar los teoremas de congruencia a triángulos con medidas dadas en el plano.

¿Dónde hemos estado?

En el grado 6, los estudiantes construyeron triángulos a partir de tres medidas de ángulos o lados, observando cuándo las condiciones determinan un triángulo único, más de un triángulo o ningún triángulo. A través de esa exploración práctica, desarrollaron una intuición sobre los criterios mínimos para determinar si los triángulos son congruentes.

¿Hacia dónde vamos?

En este tema, los estudiantes utilizan pruebas por construcción. En el Módulo 2, los estudiantes aprenderán a escribir pruebas de dos columnas, diagramas de flujo y párrafos. Desarrollarán sus destrezas de razonamiento deductivo a medida que demuestren las conjeturas que han hecho a través de la investigación. Los teoremas de congruencia triangular demostrados en este tema serán utilizados en muchas de estas próximas pruebas.

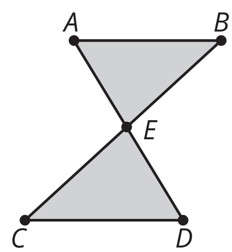
TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

Los triángulos congruentes son importantes para garantizar la precisión en la construcción y la ingeniería y para aplicaciones como el reconocimiento facial y la animación.

EJEMPLO DE PREGUNTA

En la figura, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ están a 8 cm de distancia y son congruentes y paralelas. Si $AB = 4$ cm, ¿cuál es el área sombreada?



$\angle AEB \cong \angle CED$ porque son ángulos verticales. Los ángulos internos alternativos también son congruentes, por lo que los dos triángulos son congruentes por ángulo-lado-ángulo.

Dado que los triángulos son congruentes, tienen alturas congruentes, por lo que cada uno tiene una altura de 4 cm. Así, el área de cada triángulo es $\frac{1}{2}(4)(4)$, o sea 8 centímetros cuadrados. El área total sombreada, entonces, mide 16 centímetros cuadrados.

TÉRMINOS CLAVE

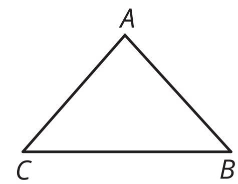
- simetría de reflexión [reflectional symmetry]
- simetría de rotación [rotational symmetry]
- Teorema de congruencia lado-lado-lado (LLL)
- las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes [corresponding parts of congruent triangles are congruent (CPTTC)]
- Teorema de congruencia de lado-ángulo-lado (LAL)
- ángulo incluido [included angle]
- Teorema de congruencia de ángulo-lado-ángulo (ALA)
- lado incluido
- Teorema de congruencia del ángulo hipotenusa [Hypotenuse Angle congruence theorem (HA)]
- Teorema de congruencia de ángulo-ángulo-lado (AAL)
- propiedad reflexiva de la congruencia [reflexive property of congruence]

Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

¿En dónde estamos?

Un **lado incluido** es un segmento de recta entre dos ángulos consecutivos de una figura.

En ΔABC, $\overline{AB}$ es el lado incluido formado por los ángulos consecutivos A y B.

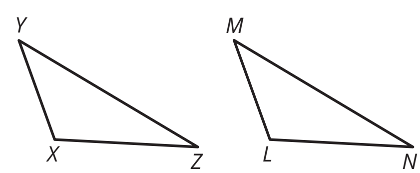


Un **ángulo incluido** es un ángulo entre dos segmentos de recta consecutivos de una figura. En ΔABC, $\angle C$ es el ángulo incluido formado por los lados consecutivos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$.

Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes (CPCTC), lo que indica que, si dos triángulos son congruentes, entonces cada parte de un triángulo es congruente con la parte correspondiente del otro triángulo.

En los triángulos mostrados, $\Delta XYZ \cong \Delta LMN$. Debido a que las partes correspondientes de los triángulos congruentes son congruentes (CPCTC), las siguientes partes correspondientes son congruentes.

- $\angle X \cong \angle L$
- $\angle Y \cong \angle M$
- $\angle Z \cong \angle N$
- $\overline{XY} \cong \overline{LM}$
- $\overline{YZ} \cong \overline{MN}$
- $\overline{XZ} \cong \overline{LN}$

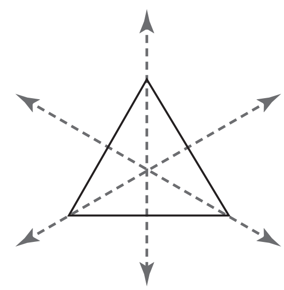


En la **Lección 1: Simetría reflexiva y de rotación**, los estudiantes identifican la simetría reflexiva y de rotación en figuras geométricas, letras del alfabeto y títulos de actividades. También identifican la relación entre las simetrías de rotaciones de una figura regular y la medida de su ángulo interior.

Simetría reflexiva y de rotación

Una figura plana tiene **simetría reflexiva** si puedes dibujar una recta para que la figura de un lado de la recta sea una reflexión de la figura del otro lado de la recta. La recta que puedes dibujar en cada figura se conoce como la recta de simetría. Una figura puede tener más de una recta de simetría. Por ejemplo, el triángulo mostrado tiene tres rectas de simetría de reflexión.

Una figura plana también puede tener **simetría de rotación** si puedes girar la figura más de 0°, pero menos de 360° y la figura resultante es la misma que la figura original en la posición original. Por ejemplo, un rectángulo tiene simetría de rotación. Una rotación de 180° lleva un rectángulo sobre sí mismo.



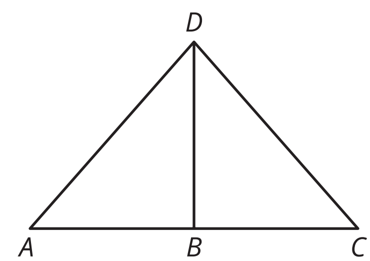
En la **Lección 2: Probar los teoremas de congruencia de los triángulos**, los estudiantes verifican las pruebas de los teoremas de congruencia lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-lado-ángulo utilizando transformaciones. También demuestran y aplican el teorema de congruencia ángulo-ángulo-lado.

El **teorema de congruencia lado-lado-lado (LLL)** establece que: "Si tres lados de un triángulo son congruentes con los correspondientes lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes".

Dado: $\overline{AD} \cong \overline{DC}$ y $\overline{DB}$ biseca $\overline{AC}$.

Puedes utilizar el Teorema de congruencia lado-lado-lado para demostrar que ΔADB es congruente con ΔCDB.

- Utilizando la definición de una bisectriz, B es el punto medio de $\overline{AC}$ y por lo tanto $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.
- Dado que $\overline{DB}$ es el mismo lado de cada uno de los triángulos, entonces $\overline{DB} \cong \overline{DB}$.
- Por lo tanto, $\Delta ADB \cong \Delta CDB$ por LLL.

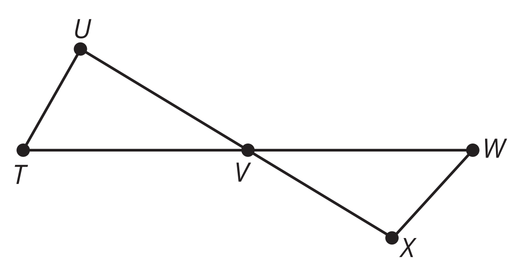


Teorema de congruencia de lado-ángulo-lado (LAL)

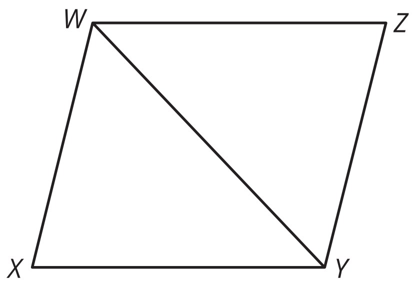
El **teorema de congruencia lado-ángulo-lado (LAL)** establece que: "Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con los correspondientes dos lados y el ángulo incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes".

Dado que: V es el punto medio de $\overline{UX}$ y V es el punto medio de $\overline{TW}$. Puedes utilizar el teorema de congruencia de lado-ángulo-lado para demostrar que el ΔUVT es congruente con ΔXVW.

- Por la definición de un punto medio, $\overline{UV} \cong \overline{XV}$ y $\overline{TV} \cong \overline{WV}$.
- Utilizando la definición de ángulos verticales, $\angle UVT \cong \angle XVW$.
- Por lo tanto, $\Delta UVT \cong \Delta XVW$ por LAL.



Teorema de congruencia de ángulo-lado-ángulo (ALA)

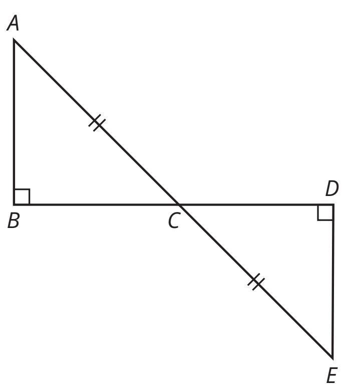


El **teorema de congruencia de ángulo-ángulo-lado (AAL)** establece que: "Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con los dos ángulos y el lado incluido correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes".

Dado: $\overline{WZ} \parallel \overline{XY}$ y $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$.

Puedes utilizar el teorema de congruencia ángulo-lado-ángulo para demostrar que el ΔWXY es congruente con ΔYZW.

- Utilizando la definición de ángulos internos alternativos, $\angle ZWY \cong \angle XYW$ y $\angle XWY \cong \angle ZYW$.
- Dado que $\overline{WY}$ es el mismo lado en cada uno de los triángulos, entonces $\overline{WY} \cong \overline{WY}$.
- Por lo tanto, $\Delta WXY \cong \Delta YZW$ por ALA.

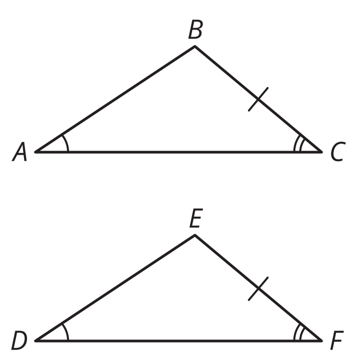


El **teorema de congruencia hipotenusa-ángulo (HA)** establece que: "Si la hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes".

En el triángulo rectángulo ABC, $\overline{AC}$ es la hipotenusa y en el triángulo rectángulo EDC, $\overline{EC}$ es la hipotenusa. Dado que $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ y $\angle ACB \cong \angle ECD$ por el teorema de ángulos verticales, entonces $\Delta ABC \cong \Delta EDC$.

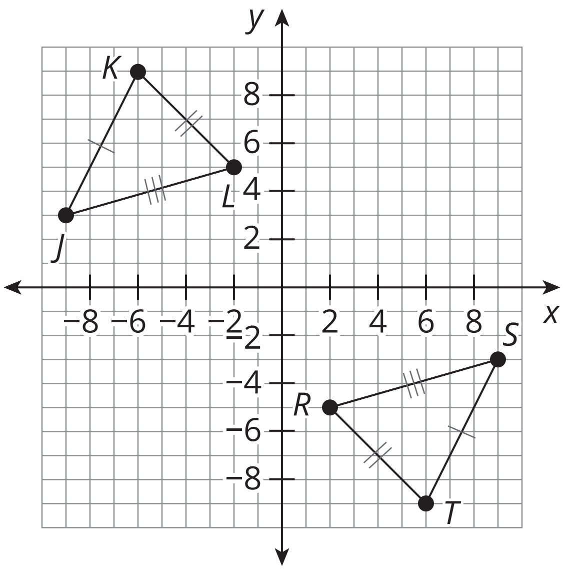
El **teorema de congruencia de ángulo-ángulo-lado (AAL)** establece que: "Si dos ángulos y el lado no incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado no incluido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes".

Por ejemplo, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle A \cong \angle D$ y $\angle C \cong \angle F$. Por lo tanto, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por AAS.



En la **Lección 3: Aplicación de los teoremas de congruencia**, los estudiantes combinan sus conocimientos de geometría para resolver problemas utilizando los teoremas de congruencia de los triángulos. Utilizan la fórmula de la distancia para aplicar los teoremas de congruencia a triángulos con medidas dadas en el plano de coordenadas.

Utilizar la fórmula de la distancia para demostrar que dos triángulos son congruentes por LLL



Utiliza la fórmula de la distancia para determinar la longitud de cada lado.

$$JK = \sqrt{(-9-(-6))^2 + (3-9)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$KL = \sqrt{(-6-(-2))^2 + (9-5)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$JL = \sqrt{(-9-(-2))^2 + (3-5)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

$$ST = \sqrt{(9-6)^2 + (-3-(-9))^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$RT = \sqrt{(6-2)^2 + (-5-(-9))^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$RS = \sqrt{(2-9)^2 + (-5-(-3))^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

Las longitudes de los lados correspondientes son iguales. Por lo tanto, los triángulos son congruentes por el teorema de congruencia LLL.

Matemáticas en el mundo real

¿Cómo sabe el software de chat dónde aplicar el filtro de cara divertida, incluso cuando mueves tu rostro en la pantalla? El programa utiliza una tecnología avanzada denominada reconocimiento facial. Esta tecnología identifica puntos clave del rostro, como los ojos, la nariz y la boca, y los conecta con rectas imaginarias para crear una malla de triángulos. Usa los triángulos para entender la figura y la posición de tu rostro. Por ejemplo, si levantas una ceja o inclinas la cabeza, el software detecta cómo cambian los triángulos y ajusta el filtro para mantenerse alineado con tu rostro.

Para hacer esto de manera eficiente, el software depende de triángulos congruentes. Los triángulos congruentes son triángulos que tienen la misma figura y tamaño, incluso si se rotan, reflejan o trasladan. Al identificar los triángulos congruentes, el software puede seguir rápida y precisamente cómo se mueve tu rostro sin necesidad de procesar cada detalle de tu apariencia. Esto permite que el filtro funcione en tiempo real, incluso si mueves tu rostro rápidamente o haces expresiones divertidas.

MÓDULO

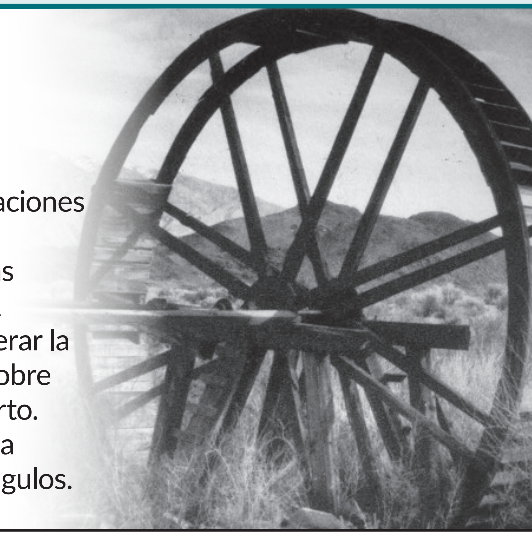
2

Justificar ideas y argumentos matemáticos

Guía para la familia

MÓDULO 2 Justificar ideas y argumentos matemáticos **Geometría**

TEMA 1 Componer y descomponer figuras



En este tema, los estudiantes utilizan círculos para conjeturar sobre las relaciones entre las rectas y los ángulos. Los estudiantes también usan círculos para conjeturar acerca de los cuadriláteros. Después, los estudiantes analizan las propiedades de triángulos isósceles y hacen conjeturas sobre triángulos. A medida que los estudiantes empiezan a formalizar sus conjeturas y considerar la veracidad de las afirmaciones y sus contrarios, consideran una conjetura sobre los ángulos base de los triángulos isósceles y prueban si lo contrario es cierto. Para concluir el tema, los estudiantes investigan los puntos de concurrencia construyendo el circuncentro, incentro, centroide y ortocentro de los triángulos.

¿Dónde hemos estado?

A lo largo de la escuela primaria e intermedia, los estudiantes han investigado informalmente muchas de las relaciones exploradas en este tema. Por ejemplo, en el grado 8, ellos utilizaron argumentos informales para establecer operaciones básicas sobre pares de ángulos que se crean cuando rectas transversales cortan rectas paralelas. Los estudiantes tienen un conocimiento intuitivo sobre las propiedades de muchas de las figuras consideradas en este tema.

¿Hacia dónde vamos?

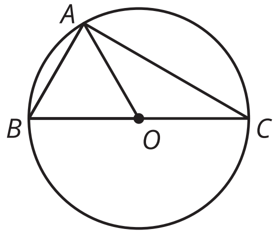
En temas futuros, los estudiantes probarán formalmente muchas de las conjeturas que escriben en este tema. A través de análisis, construcción y conjetura, los estudiantes pueden desarrollar un conocimiento intuitivo de si creen que una relación en realidad es verdadera. Una vez que se sientan que es verdadero, estarán mejor preparados para probar que es verdadero en todas las clases.

TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

Las conjeturas son un tema importante que hay que conocer para fomentar el pensamiento crítico y la innovación, ya que animan a proponer y probar ideas que pueden conducir a avances y soluciones en el mundo real.

ESTE ES UN EJEMPLO DE PREGUNTA



$\overline{BC}$ es el diámetro del círculo O y el triángulo $\triangle ABC$ está inscrito dentro del círculo. Sí $AB = AO$, ¿cuál es la medida del grado de $\angle ABO$?

Para resolver este problema, debes notar que $\overline{AO}$ es un radio del círculo. Todos los radios de un círculo son congruentes, por lo tanto $AB = AO = OB$ y $\triangle ABO$ es un triángulo equilátero.

Un triángulo equilátero tiene tres medidas de ángulos congruentes que deben sumar 180°, por lo que la medida de $\angle ABO$ debe ser 60°.

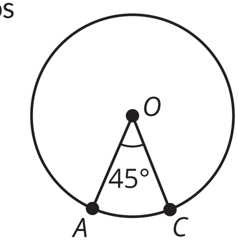
TÉRMINOS CLAVE

- ángulo central [central angle]
- arco mayor [major arc]
- arco menor [minor arc]
- secante [secant]
- cuerda [chord]
- ángulo inscrito [inscribed angle]
- arco interceptado [intercepted arc]
- tangente [tangent]
- ángulo circunscrito [circumscribed angle]
- radio [radius]
- diámetro [diameter]
- coincidente [coincident]
- ángulo interior de un polígono [interior angle of a polygon]
- cometa
- trapecio isósceles [isosceles trapezoid]
- segmento medio [midsegment]
- cuadrilátero inscrito en un círculo [quadrilateral inscribed in a circle]
- polígono convexo [convex polygon]
- polígono cóncavo [concave polygon]

¿En dónde estamos?

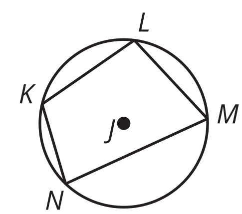
Un **ángulo central** de un círculo es un ángulo cuyos lados son radios. La medida de un ángulo central es igual a la medida de su arco interceptado.

En el círculo O, $\angle AOC$ es un ángulo central y $\overset{\frown}{AC}$ es su arco interceptado. Si $m\angle AOC = 45°$, entonces $m\overset{\frown}{AC} = 45°$.



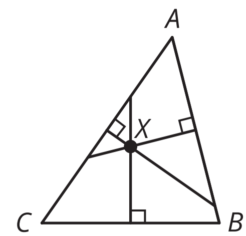
Un **polígono inscrito** es un polígono dibujado adentro de otro polígono o círculo en el que todos los vértices del polígono interior se encuentran sobre la figura exterior.

El cuadrilátero $KLMN$ está inscrito en el círculo J.



El **circuncentro** de un triángulo es el punto en el que las bisectrices perpendiculares se intersecan.

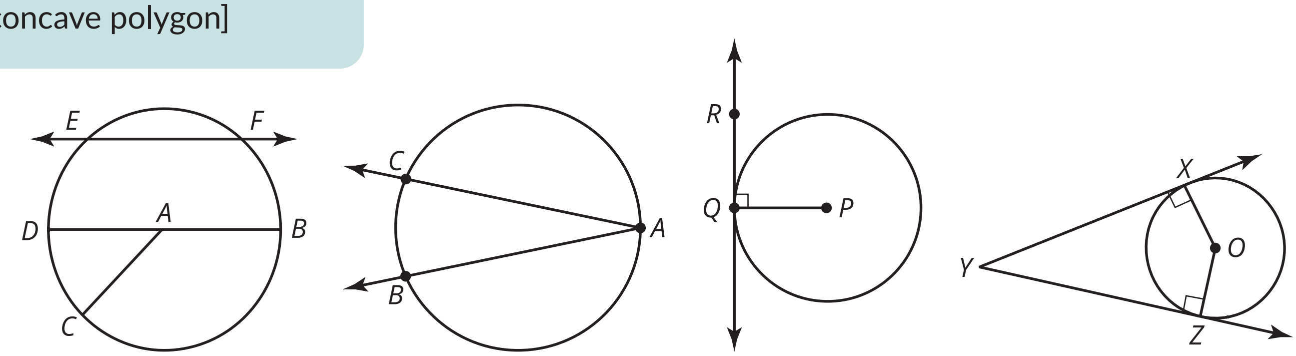
El punto X es el circuncentro de ΔABC.



En la **Lección 1: Utilizar círculos para hacer conjeturas**, los estudiantes exploran e identifican rectas y ángulos asociados con el interior y el exterior de un círculo.

Ángulos y arcos

Es posible que los estudiantes ya conozcan los nombres de algunas de las partes básicas de la geometría como **radios** y **diámetro** en su relación con los círculos, pero, ahora, las utilizarán para definir los arcos y ángulos que forman como los arcos mayores, menores e interceptados y los ángulos inscritos, centrales y circunscritos. Cada uno de estos ángulos tiene sus propiedades específicas y tendrá teoremas y postulados que se le relacionen.



¡Vea cuál parte de estos diagramas sus estudiantes ya conocen y pueden identificar!

En la **Lección 2: Conjeturas sobre cuadriláteros**, los estudiantes investigan las propiedades de los cuadriláteros y las utilizan para hacer conjeturas. Construyen varios cuadriláteros a partir de los diámetros de círculos concéntricos.

Propiedades de los cuadriláteros

Algunos cuadriláteros se definen por sus propiedades y por los triángulos que se forman cuando se divide al cuadrilátero a lo largo de cualquiera de sus diagonales.

Propiedad	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado	Trapecio isósceles	Cometa
Los lados opuestos son paralelos.	X	X	X	X		
Solo un par de lados opuestos es paralelo.					X	

En la **Lección 3: Construir un polígono regular inscrito**, los estudiantes aprenden a construir tres polígonos regulares: hexágonos regulares, cuadrados y triángulos equiláteros.

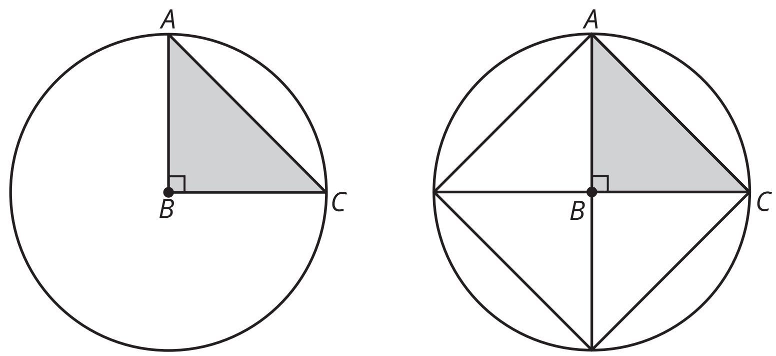
- polígono inscrito [inscribed polygon]
- ángulos de la base [base angles]
- ángulo exterior [exterior angle]
- ángulos interiores remotos [remote interior angles]
- Teorema de la desigualdad triangular [Triangle Inequality theorem]

Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

Construir un cuadrado

Para construir un cuadrado, puedes utilizar una transformación de un polígono inscrito.

Por ejemplo, el círculo B contiene un triángulo rectángulo, $\triangle ABC$, con los puntos A y C en el círculo y el punto B en el centro. Para crear un cuadrado, gira $\triangle ABC$ para crear un cuadrado inscrito cuyos 4 vértices tocan el círculo.



En la **Lección 4: Conjeturas sobre triángulos**, los estudiantes descomponen cuadriláteros para investigar los triángulos. Los estudiantes construyen un triángulo equilátero utilizando círculos y conjeturan sobre la suma de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo.

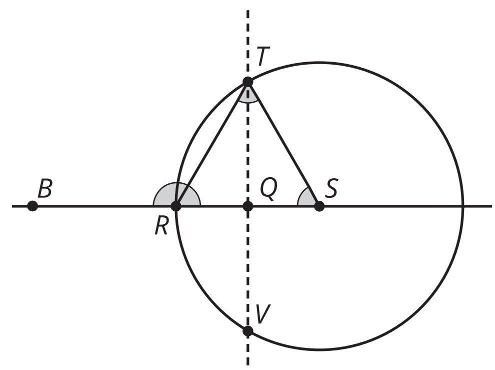
Explorar los triángulos

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

Un **ángulo exterior** de un polígono es un ángulo que forma un par lineal con un ángulo interior del polígono.

Por ejemplo, $\angle TRB$ es un ángulo exterior de $\triangle RST$.

Los **ángulos interiores remotos** de un triángulo son los dos ángulos que no son adyacentes al ángulo exterior especificado.



Por ejemplo, $\angle RST$ y $\angle STR$ son ángulos interiores remotos de $\triangle RST$.

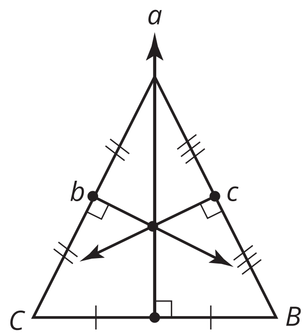
La medida del ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores remotos.

En la **Lección 5: Puntos de concurrencia**, los estudiantes exploran rectas, rayos y segmentos de recta *concurrentes*.

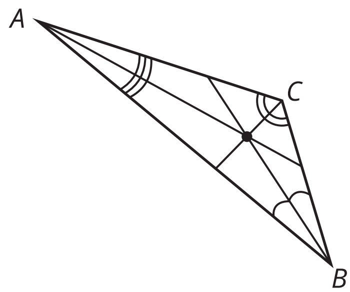
Concurrencia

Las rectas, las semirrectas y los segmentos de recta **concurrentes** son tres o más rectas, semirrectas o segmentos de recta que se intersecan en un solo punto. El **punto de concurrencia** es el punto en el que se intersecan las rectas, las semirrectas o los segmentos concurrentes.

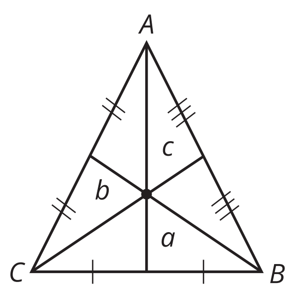
El **circuncentro** es el punto de concurrencia de las tres bisectrices perpendiculares de un triángulo. Es equidistante de los vértices.



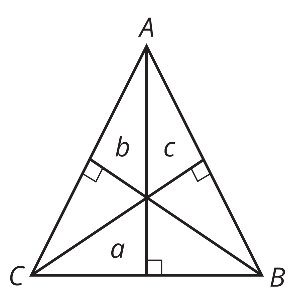
El **incentro** es el punto de concurrencia de las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo. Es equidistante de los lados.



Una **mediana** de un triángulo es un segmento de recta que conecta un vértice con el punto medio del lado opuesto. El **centroide** es el punto de concurrencia de las tres medianas de un triángulo.



La **altura** de un triángulo es un segmento de recta que es perpendicular a un lado del triángulo y tiene un extremo en el vértice opuesto. El **ortocentro** es el punto de concurrencia de las tres alturas de un triángulo.



Matemáticas en el mundo real

Los círculos están por todas partes en el mundo real, desde las ruedas de las bicicletas hasta la luna en el cielo nocturno, pero quizás una de las creaciones circulares más icónicas es la rueda de la fortuna.

La invención de la rueda de la fortuna se le atribuye a George Washington Gale Ferris, Jr., quien debutó su nueva atracción en la Exposición Mundial de Chicago, Illinois, en 1893. Tenía 264 pies de altura, capacidad para 2160 personas, tomaba 10 minutos en completar una revolución y costaba 50 centavos por viaje.

Los ingenieros y arquitectos dependen de construcciones precisas de círculos al diseñar todo, desde puentes hasta edificios, asegurando la integridad estructural y el equilibrio. Los urbanistas utilizan diseños circulares en las rotondas para mejorar el flujo de tráfico, mientras que los astrónomos mapean objetos celestes usando órbitas circulares. Incluso en tareas cotidianas como fabricar engranajes o crear diseños artísticos, la geometría de los círculos resulta esencial para la precisión y la eficiencia.

Guía para la familia

MÓDULO 2 Justificar ideas y argumentos matemáticos

Geometría

TEMA 2 Justificar las relaciones entre rectas y ángulos

Este tema pasa de las conjeturas hechas en el tema previo hacia la demostración formal. El desarrollo de la escritura de demostraciones es lento y pausado. En preparación para escribir demostraciones de forma independiente, los estudiantes interactúan con las demostraciones en varios niveles: leyendo y analizando demostraciones completas, terminando demostraciones que han sido parcialmente completadas, proporcionando las razones para las afirmaciones dadas y replicando una demostración en dos columnas a partir de una demostración en diagrama de flujo. Los estudiantes tienen la oportunidad de experimentar las demostraciones antes de tener que escribirlas completamente sin ayuda.

¿Dónde hemos estado?

En la primaria y la escuela intermedia, los estudiantes investigaron rectas, ángulos, triángulos y cuadriláteros. En el grado 8, los estudiantes argumentos informales para establecer hechos sobre la suma de los ángulos y los ángulos exteriores de los triángulos, así como los ángulos que se crean cuando una recta transversal corta rectas paralelas. En el tema previo, los estudiantes analizaron e hicieron conjeturas sobre cada uno de los conceptos que demostrarán en este tema.

¿Hacia dónde vamos?

Dado que los teoremas que se demuestran en este tema se utilizan para demostrar otros teoremas en temas posteriores, los estudiantes construirán un sistema de relaciones geométricas y verán cómo se relacionan estas ideas geométricas. Ver un sistema de relaciones les permite a los estudiantes razonar y generalizar más allá de la especificidad de cualquier figura dada y los prepara para resolver problemas más complicados.

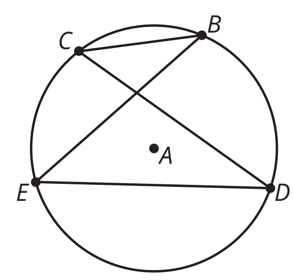
TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

Las relaciones entre rectas y ángulos son un tema importante que hay que conocer para diseñar y construir estructuras, garantizar la precisión en ingeniería y optimizar los trazados en campos como la arquitectura, el transporte y la tecnología.

EJEMPLO DE PREGUNTA

En la figura mostrada, $\angle BED$ y $\angle BCD$ están inscritos en el círculo A. ¿Cuál es la relación entre $\angle BED$ y $\angle BCD$?



Para resolver este problema, necesitas conocer el teorema del ángulo inscrito. Ambos ángulos inscritos son la mitad de la medida del ángulo central, $\angle BAD$, porque intersecan el mismo arco, $\overset{\frown}{BD}$. Dado que ambos tienen la mitad de la medida del mismo ángulo, los dos ángulos inscritos han de ser congruentes.

TÉRMINOS CLAVE

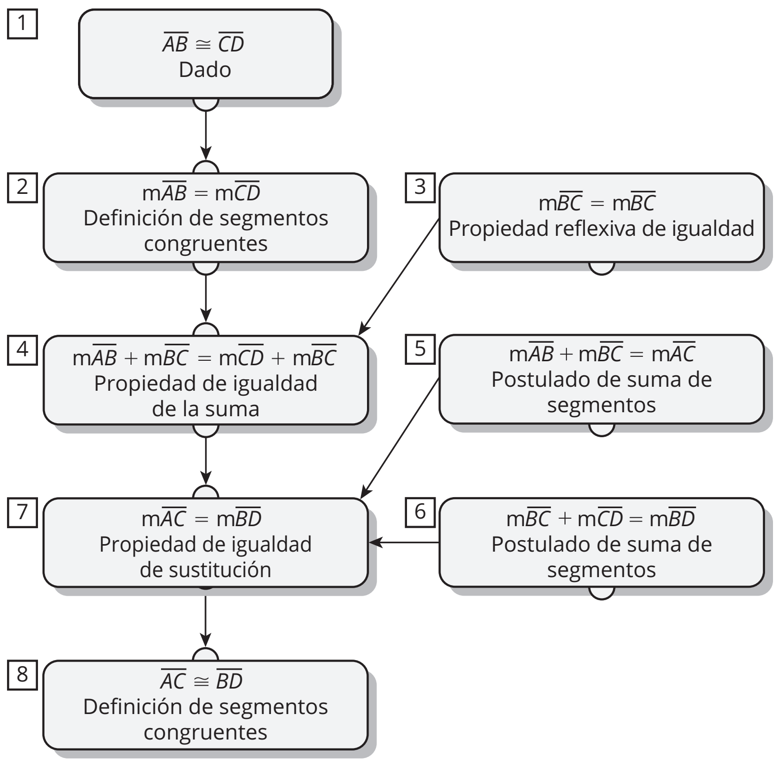
- propiedad aditiva (de adición/suma) de la igualdad
- propiedad de igualdad de la resta
- propiedad de sustitución de la igualdad [substitution property of equality]
- propiedad transitiva de la igualdad [transitive property of equality]
- prueba/demostración en diagrama de flujo
- prueba a dos columnas [two-column proof]
- postulado de congruencia de ángulos rectos
- teorema del suplemento congruente [congruent supplement theorem]
- teorema de los ángulos opuestos por el vértice
- prueba en párrafo [paragraph proof]
- teorema de los ángulos correspondientes [corresponding angles theorem]
- teorema inverso de ángulos correspondientes
- teorema de ángulos interiores del mismo lado
- teorema de los ángulos interiores alternos [alternate interior angles theorem]

¿En dónde estamos?

Una demostración en **diagrama de flujo** es una demostración en la cual los pasos y razones correspondientes se escriben en cuadros.

Flechas conectan los recuadros e indican cómo se genera cada paso y cada razón a partir de uno o más pasos y razones.

Demostración en diagrama de flujo



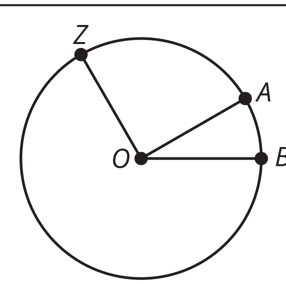
Racionalizar el denominador es el proceso de eliminar un radical del denominador de una expresión.

Para **racionalizar el denominador**, multiplica por un equivalente de 1 para que el radicando del radical en el denominador sea un cuadrado perfecto.

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$$
$$= \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Los **arcos adyacentes** son dos arcos del mismo círculo que comparten un punto final común.

Los arcos ZA y AB son arcos adyacentes.



En la **Lección 1: Formas de demostración**, los estudiantes aplican propiedades de los números reales a ángulos medidas y distancias. Se les presentan las demostraciones por construcción, las demostraciones de diagrama de flujo, las demostraciones de dos columnas y las demostraciones de párrafo.

Las propiedades de igualdad

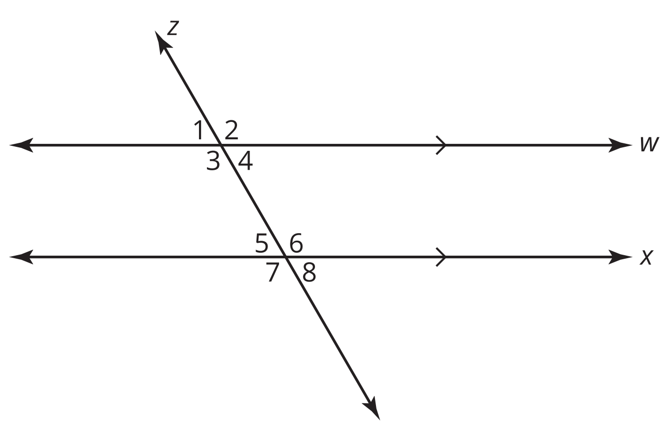
Muchas propiedades de los números reales se pueden aplicar en geometría. Estas propiedades son importantes a la hora de hacer conjeturas y probar nuevos teoremas.

Propiedad	Afirmaciones
propiedad de igualdad de la suma	Si a, b, y c son números reales y $a = b$, entonces $a + c = b + c$.
propiedad de igualdad de la resta	Si a, b, y c son números reales y $a = b$, entonces $a - c = b - c$.
propiedad de igualdad reflexiva	Si a es un número real, entonces $a = a$.
propiedad de sustitución de la igualdad	Si a y b son números reales y $a = b$, entonces a puede sustituirse por b.
propiedad de igualdad transitiva	Si a, b, y c son números reales, $a = b$, y $b = c$, entonces $a = c$.

En la **Lección 2: Demostración de teoremas de rectas paralelas**, los estudiantes demuestran relaciones angulares cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal.

Teorema de ángulos correspondientes

El **teorema de ángulos correspondientes** establece que: "si a dos rectas paralelas las interseca una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes". Por ejemplo, $\angle 1 \cong \angle 5$, $\angle 2 \cong \angle 6$, $\angle 3 \cong \angle 7$ y $\angle 4 \cong \angle 8$.



- teorema de los ángulos exteriores alternos [alternate exterior angles theorem]
- teorema de ángulos exteriores del mismo lado
- teorema inverso de ángulos interiores alternativos
- teorema inverso de ángulos interiores del mismo lado
- teorema inverso de ángulos exteriores alternativos
- teorema inverso de ángulos exteriores del mismo lado
- teorema de líneas perpendiculares y paralelas [perpendicular/parallel line theorem]
- teorema de la suma del triángulo [triangle sum theorem]
- teorema del ángulo exterior [exterior angle theorem]
- teorema inverso de la bisectriz perpendicular
- teorema de los ángulos de la base del triángulo isósceles [isosceles triangle base angles theorem]
- teorema inverso de los ángulos base del triángulo isósceles
- teorema del triángulo 30°-60°-90° [30°-60°-90° triangle theorem]
- teorema del triángulo 45°-45°-90° [45°-45°-90° triangle theorem]

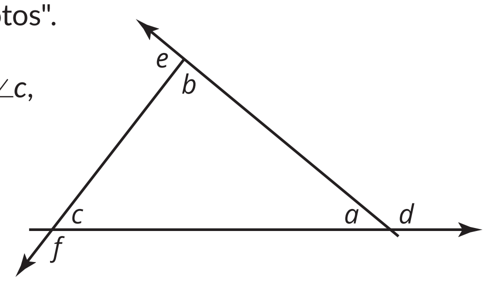
- racionalizar el denominador [rationalize the denominator]
- inverso [inverse]
- contrapositivo [contrapositive]
- prueba directa [direct proof]
- prueba indirecta o prueba indirecta contradicción [indirect proof or proof by contradiction]
- teorema de la bisagra
- teorema inverso de la bisagra
- medida en grados de un arco
- postulado de la adición de arcos
- arcos adyacentes [adjacent arcs]
- teorema del ángulo inscrito [inscribed angle theorem]
- teorema del triángulo rectángulo inscrito-diámetro
- teorema del cuadrilátero inscrito-ángulos opuestos [inscribed quadrilateral-opposite angles theorem]
- teorema de los ángulos interiores de un círculo [interior angles of a circle theorem]

En la **Lección 3: Ángulos interiores y exteriores de polígonos**, los estudiantes siguen investigando los polígonos y sus ángulos. Los estudiantes exploran el teorema de la suma de triángulos y el teorema del ángulo exterior.

Teorema del ángulo exterior

El **teorema del ángulo exterior** establece que: "La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores remotos".

Por ejemplo, $m\angle d = m\angle b + m\angle c$, $m\angle e = m\angle a + m\angle c$ y $m\angle f = m\angle a + m\angle b$.



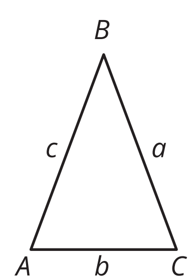
En la **Lección 4: Teoremas de triángulo isósceles y bisectriz perpendicular**, los estudiantes continúan demostrando los teoremas que exploraron en el tema anterior.

El teorema de los ángulos base del triángulo isósceles

El **teorema de los ángulos base del triángulo isósceles** establece que: "Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes".

Por ejemplo, en ΔABC, si el lado a es congruente con el lado c,

Entonces, $\angle A \cong \angle C$.



En la **Lección 5: Inversa, contrapositiva, demostración directa y demostración indirecta**, los estudiantes analizan afirmaciones condicionales y escriben la inversa y la contrapositiva.

Inversa y contrapositiva de una afirmación condicional

La **inversa** de una afirmación condicional niega ambas hipótesis y conclusión. Para enunciar el **contrapositivo** de una afirmación condicional, niega tanto la hipótesis como la conclusión y luego inviértelas.

Por ejemplo, considera la afirmación condicional: "Si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles".

Inversa: Si un triángulo no es equilátero, entonces no es isósceles.

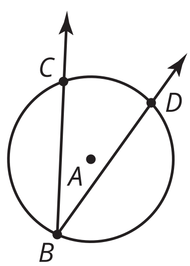
Contrapositiva: Si un triángulo no es isósceles, entonces no es equilátero.

En la **Lección 6: Relaciones de ángulos dentro y fuera de círculos**, los estudiantes exploran y demuestran teoremas para determinar las medidas de ángulos dentro y fuera de un círculo.

Teorema del ángulo inscrito

El **teorema del ángulo inscrito** establece que: "La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco interceptado".

Por ejemplo, $m\angle CBD = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{CD}$.



- teorema de los ángulos exteriores de un círculo/una circunferencia [exterior angles of a circle theorem]
- teorema de la tangente a un círculo/una circunferencia [tangent to a circle theorem]

Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

Matemáticas en el mundo real

Puede que no te des cuenta, pero las rectas y los ángulos están por todas partes en tu vida, aunque no pienses activamente en ellos. Desde el momento en que te despiertas, ¡las estás usando! ¿Las esquinas de la pantalla de tu teléfono? Ángulos. ¿La forma en que el sol brilla a través de tu ventana? Es la luz siguiendo las reglas de los ángulos y la reflexión. Incluso cuando te tomas una selfie, colocas el teléfono en el ángulo justo para conseguir la mejor iluminación y mostrar tu mejor lado —¡esa es la geometría en acción!

Los arquitectos utilizan las relaciones entre rectas y ángulos para diseñar edificios que no se caigan. Los ingenieros las utilizan para crear carreteras, puentes y montañas rusas con curvas y apoyos perfectos. Una cancha de baloncesto o un campo de fútbol se basan en rectas paralelas (las rectas laterales) y transversales (pases y jugadas a través del campo) para crear estrategias y guiar el movimiento. La geometría es básicamente el pase VIP para entender cómo se construye y se mueve el mundo.

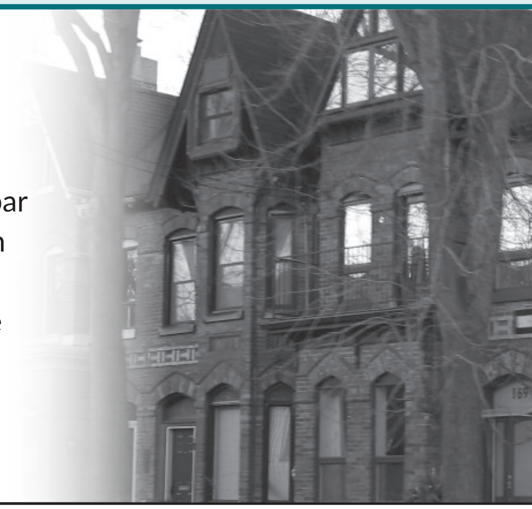
Guía para la familia

MÓDULO 2 Justificar ideas y argumentos matemáticos

Geometría

TEMA 3 Utilizar teoremas de congruencia

En este tema, los estudiantes usan los teoremas que demostraron probar nuevos teoremas sobre triángulos, cuadriláteros y ángulos formados en círculos. Los estudiantes usan teoremas de congruencia triangular para verificar las propiedades de los paralelogramos, y usan los teoremas de congruencia que demostraron probar teoremas relacionados con las cuerdas de los círculos.



¿Dónde hemos estado?

Los estudiantes construyen a partir de los fundamentos de demostración que aprendieron en temas anteriores. Los estudiantes ya explicado cómo las condiciones para los teoremas LLL, LAL y ALA se derivan de la definición de congruencia en términos de movimiento rígido. Además, los estudiantes ya han demostrado el teorema de congruencia AAL y el teorema de congruencia HA de los triángulos rectángulos. Ahora utilizan estos teoremas para demostrar otros tres teoremas de congruencia de triángulos rectángulos.

¿Hacia dónde vamos?

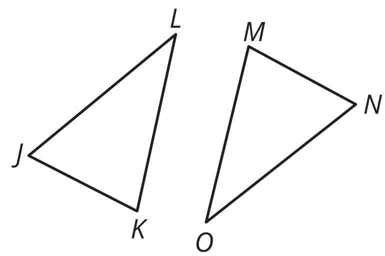
Los estudiantes utilizarán el razonamiento lógico no solo en geometría, también lo utilizarán a medida que avanzan hacia matemáticas más complejas. El sentido de las matemáticas es la comprensión y la creación de razones válidas sobre por qué existen las relaciones numéricas, las algebraicas y las geométricas, y si existen o no en todos los casos.

TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

Los teoremas de congruencia de triángulos son un tema importante que hay que conocer para aplicaciones del mundo real como la construcción, donde garantizar que dos estructuras o componentes son idénticos en figura y tamaño es crucial para la estabilidad y la precisión.

EJEMPLO DE PREGUNTA



En el diagrama anterior, $\overline{LJ} \cong \overline{ON}$ y $\overline{LK} \cong \overline{OM}$.
Enumere una relación de congruencia que sería suficiente para demostrar que los dos triángulos son congruentes.

Para demostrar que dos triángulos son congruentes por *LLL*, puedes demostrar que $\overline{JK} \cong \overline{NM}$.

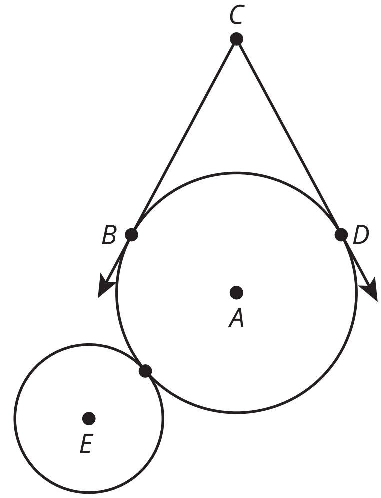
TÉRMINOS CLAVE

- Teorema de congruencia hipotenusa-cateto
- teorema de congruencia del cateto-cateto (CC)
- teorema de congruencia del cateto-ángulo (CA)
- teorema del segmento tangente [tangent segment theorem]
- círculos tangentes [tangent circles]
- teorema de diámetro y cuerda [diameter chord theorem]
- teorema de las cuerdas equidistantes [equidistant chord theorem]
- teorema inverso de la cuerda equidistante
- congruent chord-congruent arc theorem [teorema de cuerda congruente-arco congruente]
- teorema inverso de cuerda congruente-arco congruente
- teorema del paralelogramo/lados paralelos congruentes [parallelogram/congruent parallel sides theorem]
- ángulos base de un trapecio [base angles of a trapezoid]
- teorema del segmento medio del trapecio [trapezoid midsegment theorem]

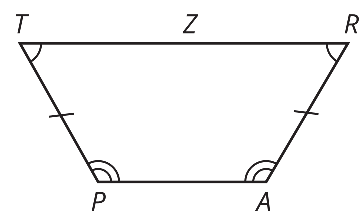
Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

¿En dónde estamos?

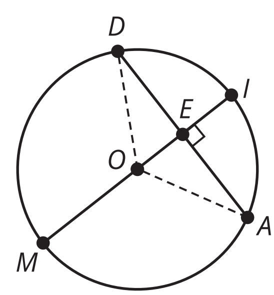
Un **segmento tangente** es un segmento de recta formado al conectar un punto fuera del círculo con un punto de tangencia. Los **círculos tangentes** son círculos que se encuentran en el mismo plano y se cortan exactamente en un punto.



Los **ángulos de base de un trapecio** son cualquiera de los pares de ángulos que comparten una base como un lado común. Un trapecio isósceles es un trapecio con lados congruentes no paralelos. Los ángulos de la base de un trapezoide isósceles son congruentes.



El **teorema de diámetro y cuerda** establece que: "si el diámetro de un círculo es perpendicular a una cuerda, entonces el diámetro biseca la cuerda y biseca el arco determinado por la cuerda".



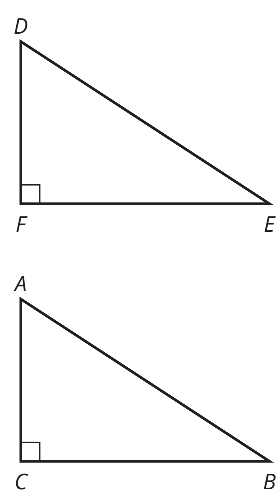
En la **Lección 1: Utilizar congruencia de triángulos para determinar relaciones entre segmentos**, los estudiantes demuestran el teorema de congruencia cateto-hipotenusa. También comparan el teorema de congruencia cateto-cateto y el teorema de congruencia cateto-ángulo con los teoremas de congruencia del triángulo que ya han demostrado.

Más teoremas de congruencia de triángulos rectángulos

El **teorema de congruencia hipotenusa-cateto (HC)** establece que: "Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un cateto de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes". Por ejemplo, dado que $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

El **teorema de congruencia cateto-cateto (CC)** establece que: "Si los dos catetos correspondientes más cortos de dos triángulos rectángulos son congruentes, entonces los dos triángulos son congruentes". Por ejemplo, dado que $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

El **teorema de congruencia cateto-ángulo (CA)** establece que: "Si el cateto y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes con el cateto y el ángulo agudo correspondientes de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes". Por ejemplo, dado que $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle A \cong \angle D$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



En la **Lección 2: Utilizar triángulos congruentes para determinar relaciones entre cuerdas y tangentes**, los estudiantes demuestran relaciones entre cuerdas y tangentes.

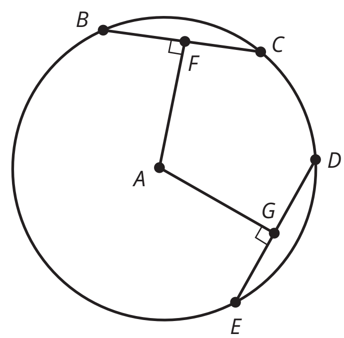
Teoremas de cuerdas

El **teorema de la cuerda equidistante** establece que: "Si dos cuerdas del mismo círculo o de círculos congruentes son congruentes, entonces son equidistantes del centro del círculo". Por ejemplo, en el círculo A, la cuerda $\overline{BC} \cong$ la cuerda $\overline{DE}$. Por lo tanto, $AF = AG$.

El **teorema inverso de la cuerda equidistante** establece que: "Si dos cuerdas del mismo círculo o de círculos congruentes son equidistantes del centro del círculo, entonces las cuerdas son congruentes".

El **teorema de la cuerda congruente-arco congruente** establece que: "Si dos cuerdas del mismo círculo o de círculos congruentes son congruentes, entonces sus arcos correspondientes son congruentes". Por ejemplo, en el círculo A, $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{DE}$.

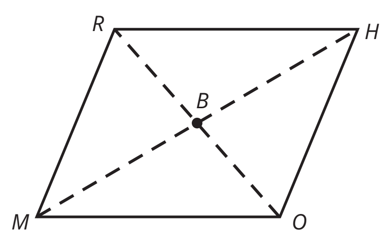
El **teorema inverso de la cuerda congruente-arco congruente** establece que: "Si dos arcos del mismo círculo o de círculos congruentes son congruentes, entonces sus cuerdas correspondientes son congruentes".



En la **Lección 3: Propiedades de los cuadriláteros**, los estudiantes demuestran las propiedades de paralelogramos, rectángulos, cuadrados, rombos y trapecios.

Teorema de lados congruentes y paralelos de un paralelogramo

Un paralelogramo es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos. El **teorema de lados congruentes y paralelos de un paralelogramo** establece que: "Si un par de lados opuestos de un cuadrilátero es tanto congruente como paralelo, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo". Por ejemplo, dado el cuadrilátero $RHOM$, $\overline{RM} \cong \overline{OH}$, y $\overline{RM} \parallel \overline{OH}$, entonces el cuadrilátero $RHOM$ es un paralelogramo.



Matemáticas en el mundo real

Las cuerdas están relacionadas con muchas situaciones del mundo real, especialmente en ingeniería, diseño y construcción. Una cuerda es una línea recta que une dos puntos de un círculo, y los teoremas sobre las cuerdas nos ayudan a averiguar las relaciones entre longitudes, ángulos y distancias en los círculos. Por ejemplo, los arquitectos utilizan estos principios al diseñar estructuras curvas como cúpulas, arcos o ventanas redondas. Saber cómo funcionan las cuerdas y sus propiedades les permite calcular medidas precisas y garantizar que el diseño sea estable y simétrico.

En campos como la robótica y el diseño de automóviles, los teoremas de cuerda son útiles cuando los ingenieros trabajan con engranajes, ruedas o cualquier objeto circular. Pueden utilizar teoremas de cuerdas para averiguar cómo interactúan las distintas partes entre sí. Incluso en actividades cotidianas como la cartografía o el GPS, estas ideas ayudan a calcular distancias y posiciones al trabajar con trayectorias o áreas circulares.

Pero no se trata solo de grandes proyectos. Piense en el diseño de logotipos, la creación de obras de arte o incluso el corte de una pizza en porciones iguales: los teoremas de las cuerdas ayudan a garantizar que todo tenga un aspecto equilibrado y proporcionado. Las cuerdas son herramientas realmente útiles para resolver todo tipo de problemas creativos y prácticos en el mundo real.

MÓDULO 3

Investigar la proporcionalidad

Guía para la familia

MÓDULO 3 Investigar la proporcionalidad **Geometría**

TEMA 1 Similitud

Este tema comienza con una revisión de lo que los estudiantes ya saben sobre dilataciones desde el grado 8. Los estudiantes realizan secuencias de transformaciones rígidas y no rígidas dentro y fuera del plano de coordenadas. Los estudiantes resuelven problemas de medidas indirectas utilizando la similitud y los triángulos rectángulos.

¿Dónde hemos estado?

En la escuela intermedia, los estudiantes desarrollaron su conocimiento del razonamiento proporcional a través de las exploraciones de relaciones multiplicativas. Los estudiantes han utilizado factores de escala para resolver problemas. Los estudiantes ya han investigado informalmente las dilataciones y han descrito su efecto en figuras bidimensionales utilizando coordenadas.

¿Hacia dónde vamos?

La comprensión de la similitud desarrolla aún más el razonamiento proporcional, que comenzó en la escuela intermedia y continúa a lo largo de las matemáticas de la escuela secundaria. Brinda la oportunidad a los estudiantes de conectar el razonamiento espacial y numérico y crea las bases para el conocimiento de las razones trigonométricas, las cuales se analizarán en el siguiente tema.

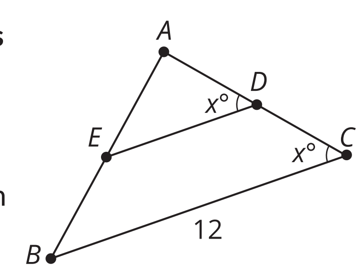
TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

La similitud es un tema importante que hay que conocer para resolver problemas del mundo real, como calcular la altura de objetos altos, crear mapas precisos y diseñar modelos a escala en ingeniería y arquitectura.

ESTE ES UN EJEMPLO DE PREGUNTA

En la figura, si $AE = EB$, ¿cuál es la longitud de $\overline{ED}$?



Puedes observar que los ángulos correspondientes son congruentes, por lo que $\overline{ED}$ y $\overline{BC}$ son paralelos. Puesto que $\overline{AE} = \overline{EB}$ y $\overline{ED}$ y $\overline{BC}$ son paralelos, el segmento de recta ED es un segmento intermedio de $\triangle ABC$. Como es un segmento intermedio, el teorema del segmento intermedio del triángulo nos dice que es la mitad de la longitud de $\overline{BC}$. Entoces, m $\overline{ED} = 6$.

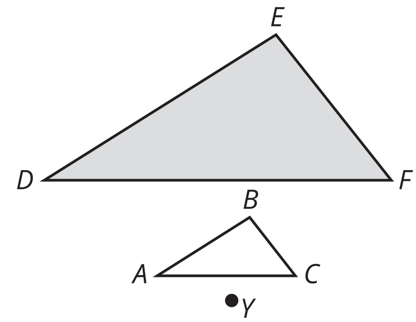
TÉRMINOS CLAVE

- dilatación [dilation]
- figuras similares/ semejantes [similar figures]
- triángulos similares/ semejantes [similar triangles]
- teorema de similitud (semejanza) ángulo-ángulo (AA) [Angle-Angle similarity theorem]
- teorema de similitud lado-lado-lado
- teorema de similitud lado-ángulo-lado
- teorema de la bisectriz del ángulo/lado proporcional [angle bisector/ proportional side theorem]
- teorema de proporcionalidad del triángulo [Triangle Proportionality theorem]
- Inverso del teorema de proporcionalidad del triángulo
- teorema de segmentos proporcionales [proportional segments theorem]
- teorema del segmento medio del triángulo [triangle midsegment theorem]
- teorema de similitud de altitud/triángulo rectángulo
- media geométrica [geometric mean]
- teorema de hipotenusa/ altura del triángulo rectángulo
- teorema de la altura/ cateto del triángulo rectángulo

¿En dónde estamos?

Una **dilatación** es una transformación de la figura en la que la figura se estira o encoge con respecto a un punto fijo o el centro de la dilatación.

El triángulo *DEF* es una dilatación del ΔABC. El centro de dilatación es el punto *Y*.



La **media geométrica** de dos números positivos *a* y *b* es el número positivo *x* de manera que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

La media geométrica de 3 y 12 es 6.

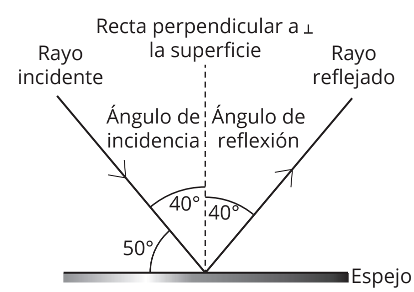
$$\frac{3}{x} = \frac{x}{12}$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6$$

El **ángulo de reflexión** es el ángulo que forma la semirrecta reflejada y una recta perpendicular a la superficie de un espejo.

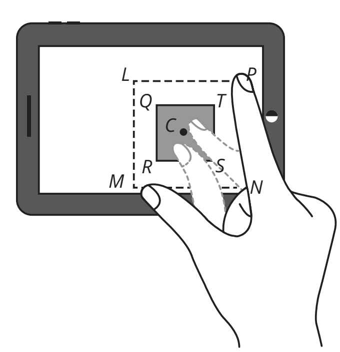
En este ejemplo, el ángulo de reflexión mide 40°.



En la **Lección 1: Dilatar figuras para crear figuras similares**, los estudiantes dilatan figuras dentro y fuera del plano de coordenadas. Los estudiantes investigan las relaciones entre los lados correspondientes y los ángulos correspondientes en triángulos semejantes.

Dilatación para crear figuras similares

Una *dilatación* puede producir un crecimiento, una reducción o una figura congruente. Por ejemplo, cuando se reduce y amplía en una tableta, puedes crear dilataciones.

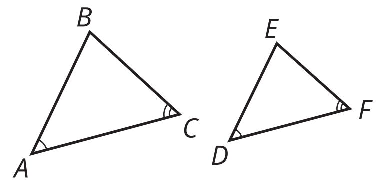


En la **Lección 2: Establecer criterios de similitud de los triángulos**, los estudiantes demuestran los teoremas de similitud ángulo-ángulo, lado-lado-lado y lado-ángulo-lado.

Teorema de similitud de ángulo-ángulo

El **teorema de similitud ángulo-ángulo** establece que: "Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son similares".

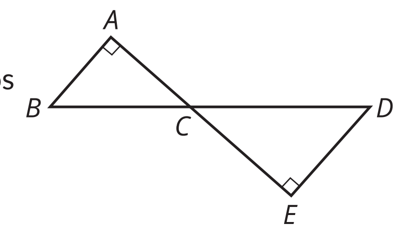
Por ejemplo, si $m\angle A = m\angle D$ y $m\angle C = m\angle F$, entonces $\angle ABC \sim \angle DEF$.



Puedes aplicar el teorema de similitud ángulo-ángulo para verificar que dos triángulos son similares.

Para los triángulos *ABC* y *EDC*, sabes que:

- $\angle A \cong \angle E$ porque los dos ángulos son ángulos rectos.
- $\angle ACB \cong \angle ECD$ porque los dos ángulos son ángulos opuestos por el vértice.



El teorema de similitud ángulo-ángulo te indica que los triángulos *ABC* y *EDC* son semejantes porque tienen dos pares de ángulos congruentes.

En la **Lección 3: Teoremas sobre la proporcionalidad**, los estudiantes demuestran teoremas sobre la proporcionalidad, incluyendo el teorema de la proporcionalidad del triángulo, la inversa del teorema de la proporcionalidad del triángulo y el teorema de la bisectriz del ángulo/lado proporcional.

Teorema del lado proporcional/bisectriz de un ángulo

Considera $\triangle ABC$. Si $\overline{CD}$ biseca $\angle C$, podemos utilizar el teorema de lado proporcional/bisectriz del ángulo para determinar $\overline{BD}$.

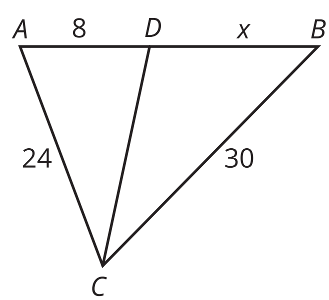
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

$$\frac{24}{30} = \frac{8}{x}$$

$$24x = 240$$

$$x = 10$$

$$\overline{BD} = 10$$



Los estudiantes continúan explorando teoremas relacionados con triángulos semejantes en la **Lección 4: Más triángulos semejantes**. Después, en la **Lección 5: Aplicaciones de los triángulos semejantes**, los estudiantes aplican lo que han aprendido sobre triángulos semejantes para resolver problemas del mundo real.

- medida indirecta [indirect measurement]
- ángulo de incidencia [angle of incidence]
- ángulo de reflexión [angle of reflection]
- ley de la reflexión [law of reflection]
- segmento de recta/recta dirigido

Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

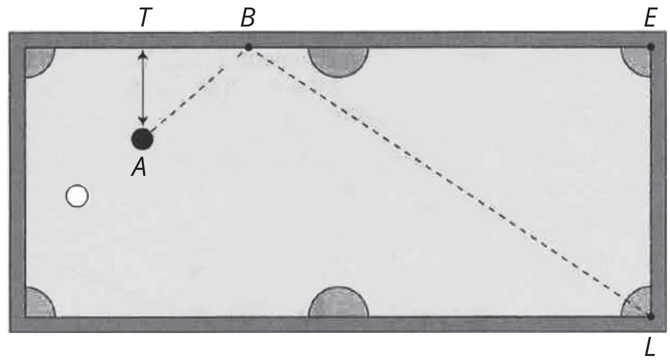
Matemáticas en el mundo real

Imagínese que está en un parque de atracciones y contempla la montaña rusa más alta del mundo. ¿Cómo puedes saber cuánto mide sin subir a la cima? Ahí es donde los triángulos similares vienen al rescate. Al medir la sombra de la montaña rusa y usar un triángulo más pequeño y similar que creas con un palo y su sombra, puedes calcular la altura de la montaña rusa sin despegar los pies del suelo.

Los cartógrafos y topógrafos utilizan triángulos similares para medir ríos, montañas y paisajes urbanos, manteniendo los pies secos y el equipo ligero. La próxima vez que te tomes una selfie, piensa en esto: la forma en que el fondo se encoge mientras tu rostro se mantiene grande se debe a la perspectiva, que depende de —¡lo adivinaste!— triángulos similares. Los artistas y diseñadores lo utilizan para crear dibujos realistas y efectos 3D. Así que, ya sea que estés ajustando el diseño de un edificio, mapeando tierras inexploradas o tomando la foto perfecta, los triángulos similares están involucrados.

Aplicaciones de la similitud y la proporcionalidad

Los estudiantes utilizarán lo que aprendieron para resolver problemas con aplicación en el mundo real: calcular la altura de objetos basándonos en sus sombras, el ancho de arroyos y cañones e incluso trucos para el billar.

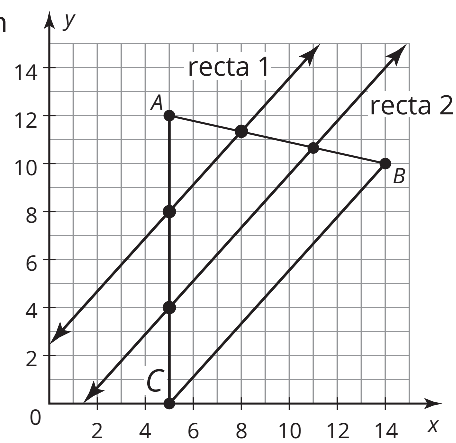


En la **Lección 6: Dividir segmentos en razones dadas**, los estudiantes utilizan las fórmulas de distancia y punto medio para determinar los puntos medios de segmentos en el plano de coordenadas. También dividen segmentos de recta y rectas numéricas en proporciones dadas.

Dividir un segmento de recta directa

Divide el segmento dirigido AB en una razón 1 : 2, dibuja $\overline{AC}$ tal que el punto C esté en (5, 0) y dibuja $\overline{BC}$ para formar $\triangle ABC$.

Traza puntos en $\overline{AC}$ para dividir el segmento en tercios. Dibuja rectas que sean paralelas a $\overline{BC}$ y pasa a través de cada punto que trazaste. La recta 1 divide el segmento dirigido AB en una razón 1 : 2. Determina la ecuación de la recta.



Recta 1: $y = \frac{10}{9}x + \frac{22}{9}$

Escribe y resuelve un sistema de ecuaciones para determinar las coordenadas del punto en el segmento dirigido AB que lo dividan en una razón de 1 : 2.

$$\begin{cases} y = \frac{10}{9}x + \frac{22}{9} & \longleftarrow \text{ ecuación de la recta 1} \\ y = -\frac{2}{9}x + \frac{118}{9} & \longleftarrow \text{ ecuación de la recta que contiene } \overline{AB} \end{cases}$$

El punto $\left(8, \frac{102}{9}\right)$ divide el segmento dirigido AB en una razón de 1 : 2.

Guía para la familia

MÓDULO 3: Investigar la proporcionalidad — Geometría

TEMA 2 Trigonometría

Este tema introduce a los estudiantes a las razones trigonométricas mediante una investigación de triángulos rectángulos. Los estudiantes descubrirán y analizarán estas razones y las utilizarán para resolver problemas de aplicación. Los estudiantes también exploran las inversas de las razones trigonométricas básicas para determinar medidas de ángulos desconocidas. Los estudiantes exploran relaciones de ángulos complementarios en triángulos rectángulos y, después, resuelven problemas de la vida real.

¿Dónde hemos estado?

En la escuela intermedia, los estudiantes aprendieron que la pendiente es la inclinación y la dirección de una recta. Utilizaron triángulos semejantes para explicar por qué la pendiente entre dos puntos en una recta es la misma. Este conocimiento sienta las bases para el desarrollo de la tangente como la razón entre el lado opuesto (la distancia vertical de un triángulo de pendiente) y el lado adyacente (la distancia horizontal de un triángulo de pendiente). Por esto, se desarrolla primero la razón de la tangente, seguida por el seno y el coseno.

¿Hacia dónde vamos?

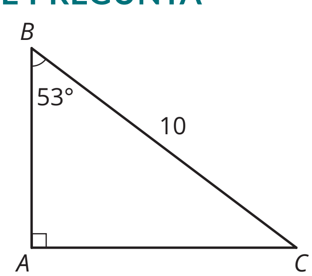
La trigonometría proporciona una importante puente entre la geometría y el álgebra. La comprensión de las razones trigonométricas en términos de relaciones de longitudes laterales prepara a los estudiantes para estudiar las funciones trigonométricas en cursos futuros. Los estudiantes experimentan una representación concreta de las razones trigonométricas utilizando triángulos en este curso.

TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

La trigonometría es un tema importante para comprender las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos, lo que tiene aplicaciones en campos como la construcción, la arquitectura y la ingeniería.

EJEMPLO DE PREGUNTA



Según la figura anterior, ¿cuál es la longitud aproximada del lado $\overline{AB}$?

Utiliza $\angle B$ *como* ángulo de referencia y x para el lado desconocido. El coseno del ángulo de referencia es la razón $\frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$, o $\frac{x}{10}$. Utiliza una calculadora para determinar que $\cos(53°) \approx 0.602$. Entonces, $0.602 \approx \frac{x}{10}$, lo que significa que x, el lado desconocido, tiene una longitud de aproximadamente 6.

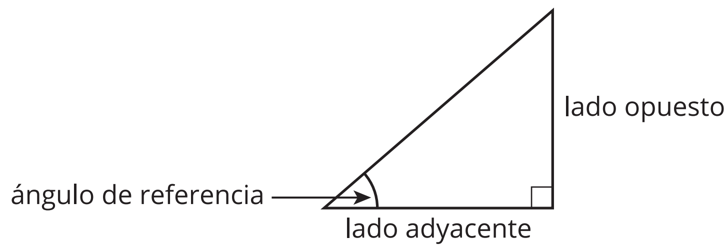
TÉRMINOS CLAVE

- ángulo de referencia [reference angle]
- lado opuesto
- lado adyacente
- tangente (tan) [tangent]
- tangente inversa/ arco tangente [inverse tangent]
- seno (sen) [sin]
- seno inverso/arco seno [inverse sine]
- coseno (cos) [cosine]
- coseno inverso/arco coseno [inverse cosene]

Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

¿En dónde estamos?

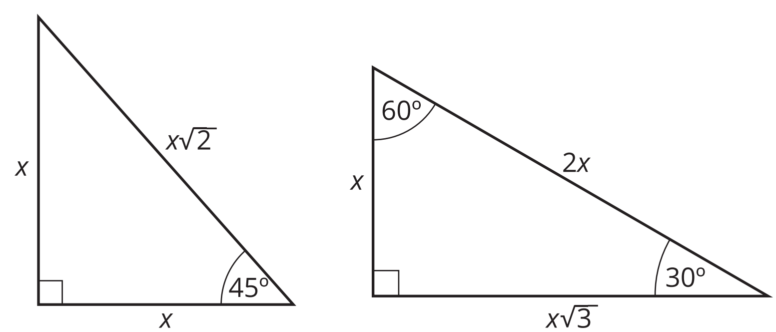
Los catetos de un triángulo rectángulo a menudo se denominan *lado opuesto* y *lado adyacente*. Estas referencias se basan en el ángulo del triángulo que estés analizando, el cual se conoce como **ángulo de referencia**. El **lado opuesto** es el lado opuesto al ángulo de referencia. El **lado adyacente** es el lado que está adyacente al ángulo de referencia que *no* es la hipotenusa.



En la **Lección 1: Introducción a la trigonometría**, los estudiantes aprenden que hay razones comunes que existen entre las longitudes de los lados dentro de un triángulo. Primero, van ganando conocimiento sobre las razones a través de mediciones y, luego, generalizan o sacan conclusiones con base en la investigación de múltiples triángulos.

Triángulos 30°-60°-90° y 45°-45°-90°

Los estudiantes utilizan lo que saben sobre los triángulos 30°-60°-90° y 45°-45°-90° para empezar a explorar informalmente las razones trigonométricas en. Primero, van ganando conocimiento sobre las razones a través de mediciones y, luego, generalizan o sacan conclusiones con base en la investigación de múltiples triángulos.



En la **Lección 2: Razón de la tangente y tangente inversa**, los estudiantes formalizan lo que descubrieron sobre la razón de la tangente en la Lección 1.

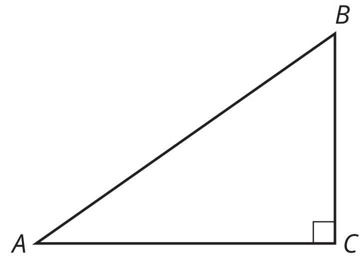
La razón de la tangente

La **tangente** (**tan**) de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo es la razón entre la longitud del lado opuesto al ángulo de referencia y la longitud del lado adyacente al ángulo de referencia. La expresión "tan *A*" significa "la tangente de $\angle A$". La tangente de un ángulo se puede utilizar para describir la pendiente de una recta.

Considera $\angle A$ en el triángulo rectángulo.

La razón de la tangente describe la relación entre $\angle A$, el lado opuesto de $\angle A$ y el lado adyacente a $\angle A$.

$$\tan A = \frac{\text{longitud del lado opuesto de } \angle A}{\text{longitud del lado opuesto a } \angle A} = \frac{BC}{AC}$$

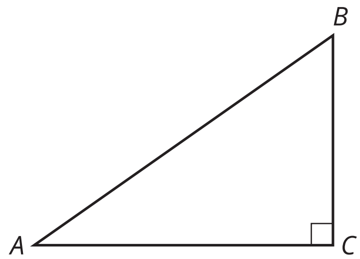


Recuerda que las razones de las longitudes laterales correspondientes entre dos triángulos semejantes son congruentes. Los valores de la tangente de ángulos congruentes en triángulos semejantes son siempre los mismos.

En la **Lección 3: Explorar las razones de senos y cosenos**, los estudiantes formalizan su comprensión de las razones seno y coseno que exploraron en la Lección 1.

Las razones del seno y coseno

El **seno** (**sen**) de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo es la razón entre la longitud del lado opuesto al ángulo y la longitud de la hipotenusa. La expresión "sen *A*" significa "el seno de $\angle A$."



En el triángulo rectángulo *ABC*, sen $A \; \frac{\text{longitud del lado opuesto de } \angle A}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{BC}{AB}$.

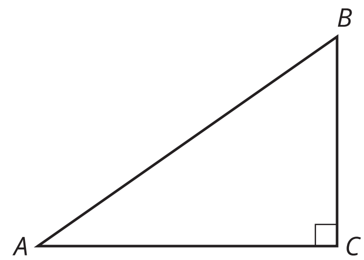
El **coseno** (**cos**) de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo es la razón entre la longitud del lado adyacente al ángulo y la longitud de la hipotenusa. La expresión "cos *A*" significa "el coseno de $\angle A$."

Matemáticas en el mundo real

La trigonometría del triángulo rectángulo puede parecer un tema matemático más, pero tiene muchas aplicaciones prácticas en el mundo real y en muchas carreras. Tomemos la arquitectura y la ingeniería, por ejemplo. Al diseñar un rascacielos, los ingenieros usan trigonometría para calcular la pendiente correcta y la longitud de las vigas de soporte para asegurar que la estructura sea tanto funcional como segura. O piensa en un topógrafo trabajando para mapear tierras para una nueva carretera. Utilizan trigonometría para medir distancias y ángulos que serían imposibles de medir directamente, como el ancho de un río o la pendiente de una colina. Sin la trigonometría, proyectos como carreteras, puentes y edificios no podrían planearse con tal precisión.

Las aplicaciones van mucho más allá de la construcción. Los pilotos usan trigonometría para calcular los ángulos de descenso y determinar a qué distancia deben comenzar a descender para un aterrizaje seguro, especialmente en pistas más cortas. En la medicina, los técnicos en ultrasonido dependen de la trigonometría para interpretar las ondas sonoras que rebotan en los tejidos, ayudando a los médicos a diagnosticar y tratar a los pacientes. Ya sea que sueñes con diseñar rascacielos, mapear paisajes, volar aviones o trabajar en el sector salud, la trigonometría juega un papel fundamental para hacer realidad esos objetivos.

En el triángulo rectángulo ABC, $\cos A = \dfrac{\text{longitud del lado adyacente de } \angle A}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{AC}{AB}$.



En la **Lección 4: Relaciones complementarias de ángulos**, los estudiantes exploran las relaciones complementarias implicadas con las razones trigonométricas y las utilizan para resolver problemas matemáticos del mundo real.

La tabla muestra las razones trigonométricas para un ángulo 30°, 60° y 45° basadas en el teorema de Pitágoras y las relaciones complementarias.

Ángulo de referencia	sen	cos
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Conectar descripciones geométricas y algebraicas

Guía para la familia

MÓDULO 4: Conectar descripciones geométricas y algebraicas

Geometría

TEMA 1 Círculos

En este tema, los estudiantes aplican el razonamiento proporcional para resolver problemas que implican círculos. Los estudiantes utilizan la traslación y la dilatación para establecer la similitud de todos los círculos, lo cual juega un papel muy importante en un argumento informal de la fórmula del círculo. Los estudiantes comienzan utilizando la fórmula de la distancia para derivar ecuaciones para un círculo con centro en el origen y un círculo con centro en el punto (h, k).

¿Dónde hemos estado?

En módulos anteriores, los estudiantes estudiaron distintas formas de demostración y criterios de similitud de triángulos. Los estudiantes desarrollaron una comprensión de las razones equivalentes en 6.° grado y comenzaron a identificar la constante de proporcionalidad en 7.° grado. Los estudiantes aprendieron el teorema de Pitágoras en el grado 8 y lo han utilizado para resolver distancias en el plano de coordenadas.

¿Hacia dónde vamos?

En precálculo, los estudiantes utilizarán medidas en radianes y las razones trigonométricas para desarrollar su comprensión del círculo unitario. "Desenrollarán" el círculo unitario a lo largo del eje x del plano de coordenadas para representar gráficamente las funciones seno, coseno y tangente. Entender las funciones trigonométricas en el plano de coordenadas les permite a los estudiantes modelar el comportamiento periódico y resolver problemas de la vida real que son más complejos.

TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

Las funciones son un tema importante que hay que conocer para dar forma a todo, desde ruedas y engranajes para el transporte hasta relojes, tuberías e incluso órbitas planetarias, garantizando la eficacia, la simetría y la funcionalidad en la vida cotidiana.

EJEMPLO DE PREGUNTA

$$x^2 + (y + 1)^2 = 4$$

La gráfica de la ecuación anterior es un círculo en el plano de coordenadas. Si se disminuye el centro del círculo en 2 unidades y se aumenta el radio en 1 unidad, ¿cuál es la ecuación del círculo resultante?

Un círculo con centro en (h, k) se describe por la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, donde r es el radio. Por lo tanto, el centro del círculo original se encuentra en $(0, -1)$ y tiene un radio de 2. El centro nuevo se ubicará en $(0, -3)$ y su radio será 3.

Por lo tanto, la ecuación para el círculo resultante será $x^2 + (y + 3)^2 = 9$.

TÉRMINOS CLAVE

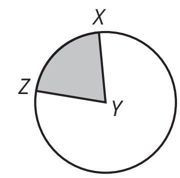
- segmentos de una cuerda [segmentos of a chord]
- teorema del segmento-cuerda [segment chord theorem]
- segmento secante externo [external secant segment]
- teorema del segmento secante [secant segment theorem]
- teorema de la secante-tangente [secant tangent theorem]
- longitud de arco [arc length]
- radián [radián]
- sector de un círculo [sector of a circle]
- segment of a circle [segmento circular]

Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

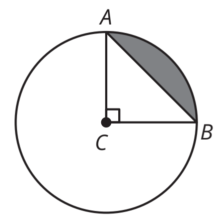
¿En dónde estamos?

Un **sector de un círculo** es una región del círculo delimitada por dos radios y el arco incluido.

En el círculo Y, $\widehat{XZ}$, el radio $\overline{XY}$, y el radio $\overline{YZ}$ forman un sector.



Un **segmento de un círculo** es una región del círculo delimitada por una cuerda y el arco incluido.



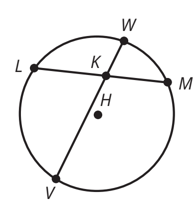
En la **Lección 1: Tangentes, segmentos y más cuerdas,** los estudiantes exploran y demuestran teoremas relacionados con segmentos de cuerdas, secantes y tangentes de un círculo.

Teorema del segmento-cuerda

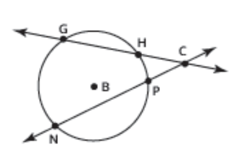
Los **segmentos de una cuerda** son los segmentos que se forman en una cuerda cuando se cruzan dos cuerdas de un círculo.

El **teorema de segmento-cuerda** establece que: "Si dos cuerdas en un círculo se intersecan, el producto de las longitudes de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos de la segunda cuerda".

Por ejemplo, en el círculo H, las cuerdas $\overline{LM}$ y $\overline{VW}$ se intersecan para formar $\overline{LK}$ y $\overline{MK}$ de la cuerda $\overline{LM}$ y $\overline{WK}$ y $\overline{VK}$ de la cuerda $\overline{VW}$. Entonces, $LK \cdot MK = WK \cdot VK$.



El teorema de los segmentos secantes establece: “Si dos segmentos secantes se intersecan en el exterior de un círculo, entonces el producto de las longitudes de un segmento secante y su segmento externo es igual al producto de las longitudes del segundo segmento secante y su segmento externo.”
Por ejemplo, en el círculo B, los segmentos secantes GH y NP se intersecan en el punto C, fuera del círculo. Entonces: GC · HC = NC · PC.



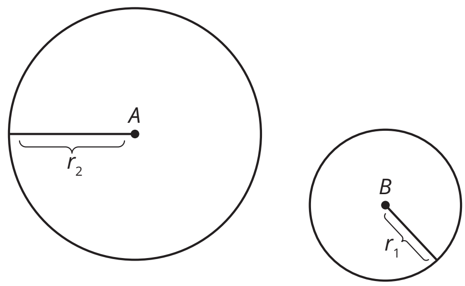
En la **Lección 2: Relaciones de similitud en los círculos**, los estudiantes utilizan dilataciones para demostrar que todos los círculos son semejantes.

Similitud en círculos

Para demostrar que dos círculos cualesquiera son similares, solo son necesarias una traslación y una dilatación. Para determinar su factor de escala, encuentra la razón de los radios.

Se necesita de una dilatación para aumentar el círculo *B* al tamaño del círculo *A*.

El factor de escala, *k*, es $k = \frac{r_2}{r_1}$



En la **Lección 3: Sectores y segmentos de un círculo,** los estudiantes exploran y describen métodos para determinar el área de un sector y el área de un segmento de un círculo.

Área de un sector

Para determinar el área de un sector, *A*, multiplica el área del círculo por una fracción que represente la parte del área determinada por la medida de ángulo central, *m*. Hay una relación proporcional entre la medida del sector del área de un círculo, *A*, y el área de un círculo.

$$A = \frac{m}{360°} \cdot \text{área de un círculo}$$

$$\frac{A}{\text{área de un círculo}} = \frac{m}{360°}$$

La fórmula para el área del sector también se puede escribir como se indica a continuación:

$$A = \frac{m}{360°} \cdot \pi r^2$$

Matemáticas en el mundo real

Imagina que estás diseñando una fuente de agua con arcos perfectamente redondos de agua disparándose al aire. Las ecuaciones de los círculos ayudan a los ingenieros y diseñadores a determinar el camino exacto del agua, asegurando que cada chorro caiga precisamente donde debe. Utilizando ecuaciones para círculos, ellos pueden calcular la curvatura perfecta para tuberías y boquillas para crear exhibiciones fascinantes. Ya sea en el diseño de caminos circulares en jardines o los bordes curvados de un techo de estadio, estas ecuaciones aseguran belleza, equilibrio y funcionalidad en el diseño.

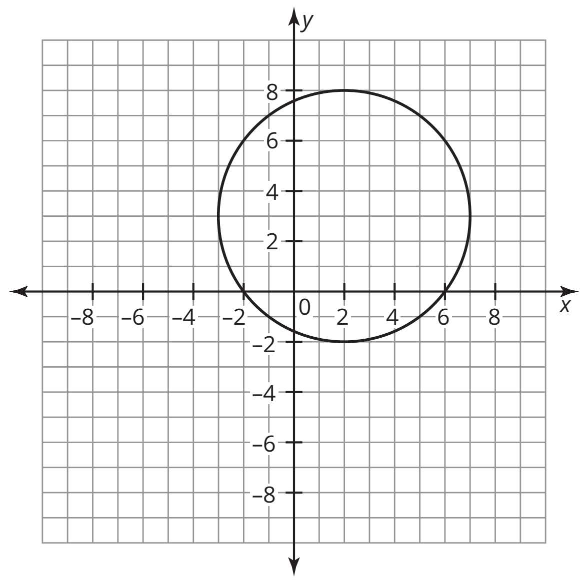
Más allá de fuentes y arquitectura, los círculos juegan un papel fundamental en la tecnología y la navegación. Cuando los astrónomos rastrean el movimiento de los planetas o los científicos diseñan las lentes de cámaras y telescopios, dependen de las ecuaciones de los círculos para asegurar la precisión. Incluso los ingenieros que trabajan en rotondas en la planificación urbana o diseñando los engranajes giratorios perfectos para máquinas utilizan estas fórmulas para mantener la precisión. Así que, la próxima vez que veas un telescopio masivo capturando imágenes de galaxias distantes o un reloj redondo marcando el tiempo perfectamente, recuerda: ¡en algún momento del proceso, una ecuación de un círculo hizo todo eso posible!

En la **Lección 4: Derivar la ecuación de un círculo** y **la Lección 5: Determinación de los puntos en un círculo**, los estudiantes exploran la ecuación de un círculo en el plano de coordenadas.

Ecuación de un círculo

La ecuación de un círculo con centro en el origen es $x^2 + y^2 = r^2$, donde r es el radio del círculo.

La forma estandarizada de la ecuación de un círculo centrado en (h, k) con radio r se puede expresar como $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.



Por ejemplo, un círculo con un centro en (2, 3) y un radio de 5 tiene la ecuación $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Guía para la familia

MÓDULO 4: Conectar descripciones geométricas y algebraicas

Geometría

TEMA 2 Crear figuras tridimensionales

En este tema, los estudiantes construyen figuras tridimensionales. Los estudiantes también determinan las fórmulas de volumen, área de la superficie y área de la superficie lateral de cada figura tridimensional. Los estudiantes aplican estos conceptos a problemas matemáticos y del mundo real.

¿Dónde hemos estado?

Los estudiantes conocieron por primera vez la fórmula para el volumen de un prisma rectangular en 5.º grado. De 6.º a 8.º grado, aprendieron y utilizaron las fórmulas del volumen y el área de la superficie de numerosos sólidos para resolver problemas. En *Crear figuras tridimensionales*, los estudiantes desarrollan argumentos informales para cada fórmula, comprendiendo cómo cada una surge de la estructura de la figura.

¿Hacia dónde vamos?

Los estudiantes desarrollan una comprensión de la estructura de los sólidos tridimensionales que les permite representar sólidos como figuras geométricas y aplicar fórmulas de volumen o área de la superficie para aproximar medidas.

TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

El volumen y el área de la superficie son temas importantes que hay que conocer para diseñar cualquier cosa, desde envases y arquitectura hasta medicina e ingeniería, garantizando la eficiencia, la capacidad adecuada y el uso de materiales.

EJEMPLO DE PREGUNTA

El nivel de agua en una pecera de 4 pies de largo por 3 pies de ancho y 2 pies de alto es de 1 pie. Toda esta agua se vierte en una pecera de 3 pies de largo por 2 pies de ancho y 4 pies de alto. ¿Cuál es la altura del agua en la segunda pecera?

El volumen del agua del primer tanque es de $4 \cdot 3 \cdot 1$, o 12 pies^3. Esto se vierte en una pecera con una base cuya área es de 6 pies^2. Para obtener un volumen de 12 pies^3, hay que multiplicar 6 pies^2 por 2 pies.

Entonces, la altura del agua en la segunda pecera debe ser 2 pies.

TÉRMINOS CLAVE

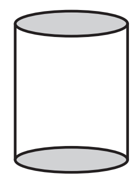
- disco [disc]
- cara lateral
- papel isométrico [isometric paper]
- prisma triangular recto [right triangular prism]
- prisma triangular oblicuo [oblique triangular prism]
- prisma rectangular recto [right rectangular prism]
- prisma rectangular oblicuo [oblique rectangular prism]
- cilindro recto [right cylinder]
- cilindro oblicuo [oblique cylinder]
- sección transversal
- esfera [sphere]
- radio de una esfera [radius of a sphere]
- diámetro de una esfera [diameter of a sphere]
- hemisferio [hemisphere]
- área de superficie lateral [lateral surface area]
- área de superficie total [total surface area]

Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

¿En dónde estamos?

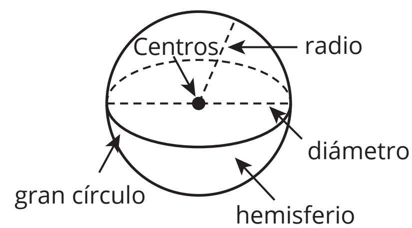
Un **disco** es el conjunto de todos los puntos en el círculo y en el interior del círculo.

Un disco se trasladó a través del espacio en una dirección que es perpendicular al plano que contiene el disco que forma un **cilindro recto**.



Una **esfera** es el conjunto de todos los puntos que están a una distancia dada de un punto fijo llamado el centro de la esfera.

Se muestra una esfera.



En la **Lección 1: Crear figuras tridimensionales**, los estudiantes utilizan transformaciones para construir figuras tridimensionales a partir de figuras de dos dimensiones.

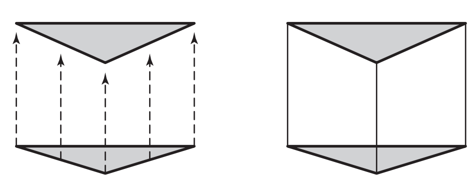
Crear figuras tridimensionales

Puedes efectuar rotaciones en el espacio tridimensional para crear un modelo de una figura tridimensional.

Por ejemplo, un cilindro se forma al girar un rectángulo en torno a uno de sus lados, o en torno a un eje de simetría. Una esfera se forma al girar un disco en torno a un eje de simetría. Un cono se forma al girar cualquier triángulo en torno a un eje de simetría, o al girar un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos.

Puedes trasladar una figura de dos dimensiones a través del espacio para crear un modelo de una figura tridimensional. Puedes utilizar **papel isométrico**, o papel punteado, para crear una representación de dos dimensiones de una figura tridimensional.

Cuando trasladas un triángulo a través del espacio en una dirección que es perpendicular al plano que contiene al triángulo, el sólido formado es un **prisma recto triangular**, tal como se muestra. Cada cara lateral de un prisma recto triangular es un rectángulo. Una **cara lateral** de un objeto tridimensional es una cara que no es una base.

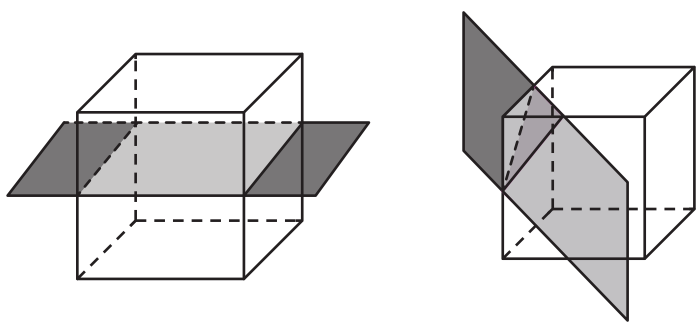


En la **Lección 2: Secciones transversales**, los estudiantes razonan sobre cuándo la intersección de un plano y un sólido geométrico crea una sección transversal que es un único punto o un segmento de recta.

Secciones transversales

Una **sección transversal** de un sólido tridimensional es el resultado de la intersección de un plano con el sólido. Cuando el plano atraviesa el sólido, se forma la sección transversal bidimensional. Un punto o un segmento de recta pueden ser la sección transversal de un plano y un sólido si el plano interseca solo un vértice o un borde del sólido.

Por ejemplo, considera algunas de las secciones transversales formadas por la intersección de un plano y un cubo.



En la **Lección 3: Crear fórmulas de volumen para pirámides, conos y esferas**, los estudiantes construyen y aplican las fórmulas de volumen de figuras tridimensionales.

Volumen

En la tabla siguiente se muestran las fórmulas para determinar el volumen de algunos objetos tridimensionales. Los estudiantes elaborarán un conjunto de fórmulas para hallar el área de la superficie, tanto lateral como total, de diferentes figuras.

Prismas	Pirámides	Cilindros	Conos	Esferas	hemisferio
$V =$ (área de la base)(altura) $V = Bh$	$V = \frac{1}{3}Bh$	$V = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \frac{2}{3}\pi r^2$

En la **Lección 4: Construir fórmulas del área lateral y del área de la superficie para pirámides, conos y esferas**, los estudiantes construyen y aplican las fórmulas de superficie lateral y superficie total para figuras tridimensionales.

Fórmulas del área de la superficie

Se muestran las fórmulas de algunas de las figuras que exploran los estudiantes.

Figura	Área de superficie lateral	Área de superficie total
Prisma recto rectangular	$2\ell h + 2ancho$ ℓ = longitud w = ancho h = altura	$2\ell w + 2\ell h + 2ancho$, o $2B + L$ ℓ = longitud b = ancho h = altura B = área de la base L = área de superficie lateral
Pirámide cuadrangular	$2\ell s$ ℓ = longitud del cuadrado s = altura inclinada	$2\ell s + \ell^2$, o $B + L$ ℓ = longitud del cuadrado s = altura inclinada B = área de la base L = área de superficie lateral
Cilindro recto	$2\pi rh$ r = radio del cilindro h = altura de un cilindro	$2\pi r^2 + 2\pi rh$, o $2B + L$ r = radio del cilindro h = altura de un cilindro B = área de la base L = área de superficie lateral

Matemáticas en el mundo real

Imagina que estás diseñando el cono de helado perfecto. Quieres que el cono contenga la mayor cantidad de helado posible sin desbordarse y hacer un desastre. Ahí es donde entra en juego la fórmula del volumen de un cono: te ayuda a calcular exactamente cuánto helado cabe dentro. Mientras tanto, la fórmula del área de la superficie es igual de importante porque determina cuánto material de cono de waffles se necesita para envolver el helado. Ya se trate de diseñar envases para alimentos, medir la cantidad de refresco que cabe en una lata o incluso calcular cuánta masa de pastel llena un molde, entender el volumen y el área de la superficie garantiza que todo tenga el tamaño correcto.

Más allá de la comida, ¡estos conceptos matemáticos están por todas partes! Los arquitectos usan el área de la superficie para calcular cuánto vidrio se necesita para las ventanas de rascacielos, mientras que los ingenieros que diseñan tanques de combustible para cohetes deben calcular el volumen para asegurarse de que haya suficiente espacio para el combustible sin agregar peso innecesario. Incluso los profesionales médicos dependen de estas fórmulas al crear botellas de medicina para garantizar la dosis correcta y la capacidad de almacenamiento. Así que, la próxima vez que tomes un sorbo de una botella de agua o viajes en un automóvil con un tanque de combustible perfectamente diseñado, solo recuerda: ¡el área de la superficie y el volumen jugaron un papel fundamental para que todo funcione!

MÓDULO
5

Tomar decisiones informadas

TEMA 1 Independencia y probabilidad condicional

En este tema, los estudiantes investigan la probabilidad compuesta con un énfasis en la elaboración de modelos y el análisis de espacios muestrales para determinar las reglas para calcular las probabilidades en diferentes situaciones. Los estudiantes exploran varios modelos de probabilidad y calculan probabilidades compuestas con independientes y eventos dependientes en una variedad de problemas matemáticos.

¿Dónde hemos estado?

En el 7.º grado, los estudiantes aprendieron acerca de la probabilidad simple que involucra eventos simples y describieron las probabilidades de esos eventos tanto de manera informal como formal. Los estudiantes también exploraron la probabilidad tanto experimental como teórica y espacios muestrales para eventos compuestos.

¿Hacia dónde vamos?

Los estudiantes formalizan nociones sobre probabilidad. En el siguiente tema, los estudiantes profundizan su comprensión tanto de la probabilidad como de los espacios muestrales para incluir combinaciones, permutaciones y el valor esperado. El razonamiento probabilístico es una parte importante del razonamiento estadístico mientras los estudiantes estudian la aleatoriedad en cursos avanzados.

TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

Su estudiante está aprendiendo sobre probabilidades. También puede apoyar el aprendizaje de sus estudiantes hablando de la probabilidad en la vida cotidiana, como en la previsión meteorológica, la probabilidad de encontrarse con tráfico al conducir a distintas horas del día o en los juegos.

EJEMPLO DE PREGUNTA

Una maestra reparte chicles de un frasco a sus estudiantes de manera aleatoria. Si el frasco tiene un total de 50 chicles: 15 de regaliz, 10 de banana, 20 de sandía y 5 de toronja, ¿cuál es la probabilidad de que los tres primeros chicles que se repartan tengan sabor a regaliz?

La probabilidad de que el primer chicle que tomes sea de regaliz es $\frac{15}{50}$. Para la segunda oportunidad, habrá 49 chicles y 14 serán de regaliz; por lo tanto, la probabilidad en esta segunda oportunidad será $\frac{14}{49}$.
La probabilidad en la tercera será $\frac{13}{48}$.
Como vemos, es una probabilidad con la palabra "y", así que todas las probabilidades se multiplican:

$$\frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} \cdot \frac{13}{48} = \frac{2730}{117{,}600} = \frac{13}{560}$$

TÉRMINOS CLAVE

- resultado
- espacio muestral
- evento [event]
- probabilidad [probability]
- modelo de probabilidad [probability model]
- modelo de probabilidad uniforme [uniform probability model]
- modelo de probabilidad no uniforme [non-uniform probability model]
- complemento de un evento [complement of an event]
- diagrama de árbol
- lista organizada [organized list]
- conjunto
- elemento [element]
- conjuntos desconectados
- conjuntos intersecantes
- unión de conjuntos
- eventos independientes [independent events]
- eventos dependientes [dependent events]
- Principio fundamental de conteo [Fundamental Counting Principle]
- evento compuesto [compound event]
- regla de probabilidad compuesta con "y" [compound probability rule involving and]

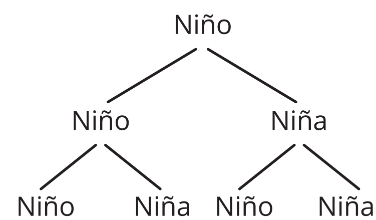
¿En dónde estamos?

Un **modelo de probabilidad** enumera los resultados posibles y la probabilidad de cada resultado. En un modelo de probabilidad, la suma de las probabilidades debe ser igual a 1.

La tabla muestra un modelo de probabilidad para lanzar una moneda una vez.

Resultados	Cara (H)	Cruz (T)

Un **diagrama de árbol** es un diagrama que ilustra de forma secuencial los posibles resultados de una situación dada.



Una **lista organizada** es un modelo visual para determinar el espacio muestral de los eventos.
El espacio muestral para lanzar una moneda al aire 3 veces se puede representar como una lista organizada.

HHH	THH
HHT	THT
HTH	TTH
HTT	TTT

En la **Lección 1: Espacios muestrales compuestos,** los estudiantes aprenden estrategias para determinar el espacio muestral de sucesos compuestos.

Espacios muestrales

Un **resultado** es el resultado de un experimento. El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Un **evento** es un resultado o un conjunto de resultados en un espacio muestral.

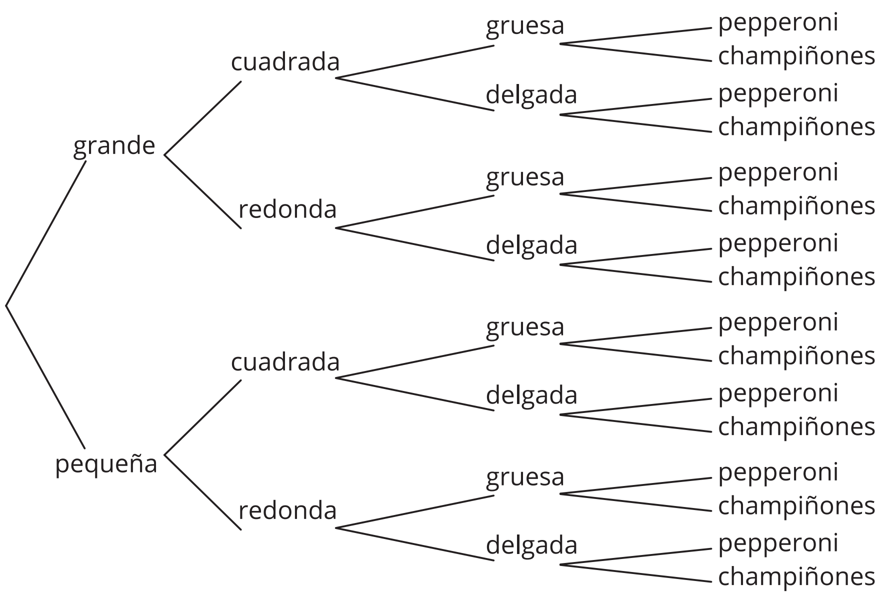
La **probabilidad** de un evento es la razón del número de resultados deseados con respecto al número total de resultados posibles. La probabilidad de un evento A es $P(A) = \frac{\text{resultados deseados}}{\text{resultados posibles}}$.

- probabilidad condicional [conditional probability]
- regla de suma de probabilidades

Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

Un **diagrama de árbol** es un modelo visual para determinar el espacio muestral de varios eventos.

Por ejemplo, se representa el espacio muestral para todos los posibles tipos de pizzas que se pueden conseguir en la pizzería en el siguiente diagrama de árbol.



Una **lista organizada** es un modelo visual para determinar el espacio muestral de los eventos. Puedes abreviar los nombres de los resultados siempre y cuando se proporcione una clave.

Por ejemplo, una lista organizada para el diagrama en árbol de la pizza podría usar la siguiente clave de abreviaturas: lg-grande, sm-pequeña, sq-cuadrada, ro-redonda, thk-gruesa, thn-delgada, pepp-pepperoni, mush-champiñones. La lista resultante sería la siguiente:

Lg-sq-thk-pepp	Lg-ro-thk-pepp	Sm-sq-thk-pepp	Sm-ro-thk-pepp
Lg-sq-thk-mush	Lg-ro-thk-mush	Sm-sq-thk-mush	Sm-ro-thk-mush
Lg-sq-thn-pepp	Lg-ro-thn-pepp	Sm-sq-thn-pepp	Sm-ro-thn-pepp
Lg-sq-thn-mush	Lg-ro-thn-mush	Sm-sq-thn-mush	Sm-ro-thn-mush

El *Principio fundamental del conteo* se utiliza para averiguar el número de resultados en el espacio muestral. El **Principio fundamental del conteo** establece que, si una acción A puede ocurrir de m maneras y para cada una de estas m maneras puede ocurrir una acción B de n maneras, entonces las acciones A y B puede ocurrir de $m \cdot n$ maneras. El Principio fundamental del conteo se puede generalizar a más de dos acciones que sucedan en sucesión. Si para cada una de las m y n maneras en que A y B ocurren, también existe una acción C que puede ocurrir en s maneras, entonces las acciones A, B y C pueden ocurrir en $m \cdot n \cdot s$ maneras.

Por ejemplo, si fueras a visitar una heladería que vende helado de chocolate, vainilla o fresa en un cono o vaso, con o sin chispas de colores, tendrías $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ resultados posibles.

En la **Lección 2: Probabilidad compuesta con Y,** los estudiantes determinan la probabilidad de dos o más sucesos independientes y dos o más sucesos dependientes.

Regla de probabilidad compuesta con la palabra *y*

Un **evento compuesto** es un evento que consiste de dos o más eventos.

La **regla de la probabilidad compuesta** que **involucra *y*** establece que: "Si el evento *A* y el evento *B* son eventos independientes, entonces la probabilidad de que ocurran tanto el evento *A* como el evento *B* es el producto de la probabilidad de que ocurra el evento *A* y la probabilidad de que ocurra el evento *B*, dado que el evento *A* ya ha ocurrido".

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Si el evento *A* y el evento *B* son dependientes, entonces la probabilidad de que ocurra tanto el evento *A* como el evento *B* es el producto de la probabilidad de que ocurra el evento *A* y la probabilidad de que ocurra el evento *B*, dado que el evento *A* ya ha ocurrido.

Por ejemplo, supón que tienes 2 calcetines rojos, 1 azul y 3 verdes en una gaveta. Introduces la mano en la gaveta sin mirar y eliges un calcetín, lo vuelves a colocar y luego eliges otro calcetín. En total, tomaste 2 calcetines.

Estos son eventos independientes, así que utiliza la regla de probabilidad compuesta para calcular. $P(\text{verde y rojo}) = P(\text{verde}) \cdot P(\text{rojo}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Ahora supón que metes la mano en el cajón sin mirar y eliges un calcetín, no lo devuelves y luego eliges otro calcetín. En total, tomaste 2 calcetines.

Estos son eventos dependientes, por lo que $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B, \text{ dado } A)$. Por lo tanto, $P(\text{verde y rojo}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Una **probabilidad condicional** es la probabilidad del evento *B*, considerando que el evento *A* ya ocurrió. La notación para la probabilidad condicional es $P(B|A)$, que se puede leer como "la probabilidad del evento *B*, si sucede el evento *A*".

En la **Lección 3: Probabilidad compuesta con *O*,** los estudiantes determinan la probabilidad de dos o más sucesos independientes y dos o más sucesos dependientes.

Regla de suma de probabilidades

En un evento compuesto que se relaciona con la palabra *o*, existen resultados posibles que se encuentran en el mismo espacio muestral para cada evento. Estos resultados solo se deben contar una vez al determinar la probabilidad compuesta.

La **regla de la suma de probabilidades** establece lo siguiente: "La probabilidad de que ocurra el evento *A* o el evento *B* es la probabilidad de que ocurra el evento *A* más la probabilidad de que ocurra el evento *B* menos la probabilidad de que ocurran ambos, *A* y *B*".

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Por ejemplo, considera determinar la probabilidad de sacar una jota o un trébol de una baraja de cartas. Sea A = una jota y B = un trébol.

$$P(\text{jota o trébol}) = P(\text{jota}) + P(\text{trébol}) - P(\text{jota y trébol})$$
$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

En la **Lección 4: Calcular probabilidades compuestas,** los estudiantes determinan la probabilidad de los eventos independientes $P(A \text{ y } B)$ con reemplazo, los eventos independientes $P(A \text{ o } B)$ con reemplazo, los eventos dependientes $P(A \text{ y } B)$ sin reemplazo, y eventos dependientes $P(A \text{ o } B)$ sin reemplazo.

Probabilidad compuesta

Puedes utilizar los mismo métodos para calcular las probabilidades para más de dos eventos compuestos.

Con frecuencia leerás frases como "con reemplazo" y "sin reemplazo" en los problemas de probabilidad. Estas hacen referencia a si el espacio muestral cambia o no desde el primer evento hasta el último.

Por ejemplo, la probabilidad de obtener un trío de un número o figura específica al sacar cartas de una baraja con reemplazo es

$$P(\text{3 del mismo tipo}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{2197}.$$

La probabilidad de sacar 3 del mismo tipo sin reemplazo es

$$P(\text{3 del mismo tipo}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{1}{5525}.$$

Matemáticas en el mundo real

Las personas utilizan la probabilidad para tomar decisiones, evaluar riesgos y prever resultados. Por ejemplo, podrías consultar el pronóstico del clima para saber qué ropa ponerte al día siguiente. Este pronóstico se basa en la probabilidad. Los meteorólogos emplean datos de satélites y estaciones meteorológicas para calcular la probabilidad de lluvia, nieve o sol. Un analista deportivo usa la probabilidad para estimar las chances de que un equipo gane un partido. Los analistas financieros aplican la probabilidad para predecir el comportamiento de los precios de las acciones. Las compañías de seguros también dependen de la probabilidad para calcular las posibilidades de que hagas una reclamación y así determinar cuánto cobrar.

La probabilidad es una herramienta muy poderosa. Comprender cómo funciona te puede ayudar a tomar decisiones más informadas y a ver el mundo de una manera completamente diferente. Ya sea que decidas si llevar un paraguas o busques el mejor momento para comprar un boleto de avión, la probabilidad te guía para tomar decisiones más acertadas.

Guía para la familia

MÓDULO 5 Tomar decisiones informadas **Geometría**

TEMA 2 Cálculo de probabilidades

En este tema, los estudiantes aplican y amplían los conceptos de probabilidad que aprendieron en el tema previo para explorar el valor esperado y la probabilidad condicional. También utilizan técnicas combinatorias para construir y razonar con grandes espacios muestrales. Los estudiantes analizan interacciones de eventos simples y complejos en este tema y las organizan para obtener información sobre probabilidades.

¿Dónde hemos estado?

En el tema anterior, los estudiantes revisaron la probabilidad simple y profundizaron su conocimiento de la probabilidad compuesta en preparación para este tema. Los estudiantes fueron introducidos al Principio fundamental de conteo en el tema anterior como un precursor de las combinaciones y permutaciones presentadas en este tema.

¿Hacia dónde vamos?

Las combinaciones y permutaciones utilizadas para construir grandes espacios muestrales son conceptos ampliamente utilizados en una variedad de subcampos matemáticos, incluyendo la teoría de números y la informática. La probabilidad condicional y el valor esperado son conceptos importantes en campos como la economía y la estadística.

TEMAS DE DISCUSIÓN

COMENTE CON SU ESTUDIANTE

La probabilidad condicional es importante porque nos ayuda a tomar decisiones más informadas. Comprender la probabilidad condicional nos ayuda a entender cómo un suceso influye en otro y se utiliza en muchos campos, como la estadística, la ciencia , las finanzas y la inteligencia artificial.

PREGUNTAS A REALIZAR

Un comité de 10 personas elige tres representantes. ¿Cuántos grupos diferentes de tres representantes pueden elegir?

Es posible que elijan dos grupos de las mismas tres personas, que solo se diferencien en el orden de elección. Esos grupos serían permutaciones el uno del otro. Sin embargo, lo que buscamos son combinaciones, donde no existan dos grupos con las mismas personas.

Existe una fórmula para elegir *r* combinaciones de un conjunto de *n* elementos: $\frac{n!}{(n-r)!r!}$. Por lo tanto, el número de grupos diferentes de tres representantes que se puede elegir es:

$$\frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{3{,}628{,}800}{30{,}240} = 120$$

TÉRMINOS CLAVE

- tabla de doble entrada
- tabla de frecuencia(s) [frequency table]
- tabla de frecuencias de doble entrada
- datos categóricos [categorical data]
- frecuencial relativa [relative frequency]
- tabla de frecuencia relativa de doble entrada
- factorial [factorial]
- permutación [permutarion]
- permutación circular [circular permutation]
- combinación [combination]
- probabilidad geométrica [geometric probability]
- valor esperado [expected value]

Consulte el Glosario de matemáticas para obtener las definiciones de los Términos clave.

¿En dónde estamos?

Una **tabla de frecuencias** muestra la frecuencia de un objeto, número o evento que aparece en un espacio muestral.

La tabla de frecuencias muestra el número de veces que se produce la suma de dos cubos numéricos.

Suma de dos dados	Frecuencia
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

Los **datos cualitativos**, o datos categóricos, son datos para los que cada dato encaja exactamente en uno de diversos grupos o categorías diferentes.

Animales: leones, tigres, osos, etc.
Colores: azul, verde, rojo, etc.

El **factorial** de n, escrito como $n!$, es el producto de todos los enteros no negativos menores o iguales que n.
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

En la **Lección 1: Probabilidad compuesta para datos mostrados en tablas de doble entrada**, analizar tablas de dos vías y determinar probabilidades compuestas y eventos compuestos.

Probabilidades compuestas

Una **frecuencia relativa** es la razón de ocurrencias en una categoría en comparación con el número total de las ocurrencias. Para determinar la razón de cada categoría, determina la razón de parte al entero de cada una. En una **tabla de frecuencias relativas de doble entrada** se muestran las frecuencias relativas de dos categorías de datos.

Participación en los deportes

	Individual	**Equipo**	**No juega**	**Total**
Zurdo	$\frac{3}{63} \approx 4.8$ %	$\frac{13}{63} \approx 25.4$ %	$\frac{8}{63} \approx 12.7$ %	$\frac{24}{63} \approx 38.1$ %
Diestro	$\frac{6}{63} \approx 9.5$ %	$\frac{23}{63} \approx 36.5$ %	$\frac{4}{63} \approx 6.3$ %	$\frac{33}{63} \approx 52.4$ %
Ambas manos	$\frac{1}{63} \approx 1.6$ %	$\frac{3}{63} \approx 4.8$ %	$\frac{2}{63} \approx 3.2$ %	$\frac{6}{63} \approx 9.5$ %
Total	$\frac{10}{63} \approx 15.9$ %	$\frac{39}{63} \approx 61.9$ %	$\frac{14}{63} \approx 22.2$ %	$\frac{63}{63} = 100$ %

Puedes utilizar una tabla de frecuencias relativas de doble entrada para calcular la probabilidad de que los eventos ocurran.

Por ejemplo, $P(\text{zurdo}) = \frac{24}{63} \approx 38.1$ %, $P(\text{diestro en un equipo deportivo}) = \frac{23}{63} \approx 36.5$ %, o $P(\text{ambas manos o no juego}) = P(\text{ambas manos}) + P(\text{no juega}) - P(\text{ambas manos y no juega}) = \frac{6}{63} + \frac{14}{63} - \frac{2}{63} = \frac{18}{63} \approx 28.6$ %.

En la **Lección 2: Probabilidad condicional**, los estudiantes deducen una fórmula para calcular la probabilidad condicional y aplican la fórmula en varias situaciones diferentes.

Calcular probabilidades condicionales

Una probabilidad condicional es la probabilidad del evento *B*, considerando que el evento *A* ya ocurrió.

La notación para la probabilidad condicional es $P(B|A)$, que se puede leer como "la probabilidad del evento *B*, si sucede el evento *A*".

La probabilidad condicional, $P(B|A)$, para eventos independientes se puede representar como $\frac{\text{resultados deseados}}{\text{resultados totales}}$.

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{\text{resultados deseados}}{\text{resultados totales}} \\ &= \frac{A \text{ y } B}{A} \\ &= \frac{A \text{ y } B}{A} \cdot \frac{\frac{1}{\text{total}}}{\frac{1}{\text{total}}} \\ &= \frac{\frac{A \text{ y } B}{\text{total}}}{\frac{A}{\text{total}}} \\ &= \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)} \end{aligned}$$

Por ejemplo, considera las sumas posibles al lanzar dos dados.

Sea A = la posibilidad de obtener un 5

Sea B = la posibilidad de obtener la suma de 10

$P(B|A) = \frac{\frac{1}{72}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{12}$

También puedes averiguar si estos dos eventos son independientes calculando $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Así, se puede ver que son independientes.

En la **Lección 3: Probabilidad condicional**, los estudiantes deducen las fórmulas para calcular permutaciones y combinaciones y las aplican en diferentes situaciones.

Permutaciones o combinaciones

A una disposición ordenada de objetos sin repetición se le llama **permutación**. Por ejemplo, poder determinar las diferentes disposiciones de tres letras entre las primeras cuatro letras del abecedario. Existen distintas notaciones para las permutaciones de r elementos tomados de un conjunto de n elementos.

$${}_nP_r = P(n, r) = P^n_r$$

Puedes calcular las permutaciones utilizando la fórmula ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Por ejemplo, imagina el número de permutaciones de dos letras de las primeras cuatro letras del abecedario.

$${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

Existen 12 combinaciones distintas de dos letras utilizando solo las primeras cuatro letras del abecedario.

Una **combinación** es un conjunto desordenado de elementos. Existen distintas notaciones para las combinación de r elementos tomados de un conjunto de n elementos.

$$_nC_r = C(n, r) = C^n_r$$

Puedes calcular las combinaciones utilizando la fórmula $_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Por ejemplo, las posibles combinaciones de cadenas de tres letras con DEFG

$$_4C_3 = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4!}{1!3!} = 4.$$

En la **Lección 4: Ensayos independientes**, los estudiantes aplican una fórmula utilizando combinaciones para calcular probabilidades de dos sucesos independientes a lo largo de varios ensayos.

Ensayos múltiples

Los eventos independientes pueden suceder en más de una manera al efectuar múltiples pruebas. La probabilidad de que sucedan los eventos se multiplica por el número de formas diferentes en las que los eventos pueden ocurrir.

Por ejemplo, la tabla que se encuentra a continuación resume la probabilidad de que un jugador de baloncesto enceste todos los tiros libres, utilizando combinaciones.

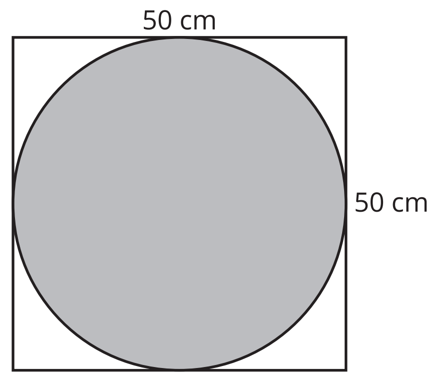
Número de tiros libres	Número de tiros libres	Probabilidad de anotar	Probabilidad de fallar	Probabilidad de encestar *r*
Intentos	Anotaciones	Cada tiro libre	Cada tiro libre	En *n* intentos
n	r	p	$(1-p)$	$_nC_r(p)^r\,(1-p)^{n-r}$
1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$_1C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^1$
	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$_1C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^0$
2	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$_2C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^2$
	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1$
	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$_2C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^0$
3	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$_3C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3$
	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$_3C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2$
	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1$
	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0$

En la **Lección 5: Valor esperado**, los estudiantes aplican la probabilidad geométrica a tableros de dardos que contienen figuras geométricas y utilizan el valor esperado para tomar decisiones.

Probabilidad geométrica

Para averiguar la probabilidad de que un dardo caiga en la sección sombreada de un tablero, puedes utilizar la *probabilidad geométrica*. La **probabilidad geométrica** incluye una medida geométrica, como longitud, área, volumen, entre otras.

Por ejemplo, considera el tablero de dardos mostrado, que es un cuadrado de 50 cm por 50 cm.



La probabilidad de que un dardo caiga en la región sombreada del tablero es $\frac{\text{área de la región sombreada}}{\text{área del tablero}}$.

$$\frac{\text{área de la región sombreada}}{\text{área del tablero}} = \frac{\pi(25)^2}{50 \cdot 50} \approx \frac{1962.5}{2500}$$

La probabilidad de que el dardo caiga en la región sombreada es $\frac{1962.5}{2500}$, o alrededor de 78.5 %.

Matemáticas en el mundo real

La probabilidad condicional juega un papel clave en diversos campos como los seguros, las finanzas y la inteligencia artificial. Por ejemplo, les permite a los profesionales tomar decisiones fundamentadas a partir de condiciones específicas y datos disponibles.

En el sector de seguros, la probabilidad condicional se usa para calcular la probabilidad de una reclamación según ciertas condiciones, como el historial del conductor o el clima. En finanzas, se emplea para evaluar si una inversión tendrá un buen rendimiento en función de ciertas condiciones del mercado. También se emplea para predecir si una persona podría fallar en el pago de un préstamo con base en su historial financiero. En inteligencia artificial, la probabilidad condicional es esencial en numerosos algoritmos, como los filtros de spam.
Por ejemplo, se usa para calcular la probabilidad de que un correo electrónico sea spam si contiene ciertas palabras o frases, lo que permite a los sistemas tomar decisiones más precisas basadas en la información disponible.

ISBN: 978-1-970198-71-3

Printed in the USA

Impreso en los Estados Unidos

Aprendizaje Bluebonnet™
Matemáticas de secundaria

EDICIÓN 1

ISBN 978-1-970198-71-3

90000>

9 781970 198713