Gelson **Iezzi** · David **Degenszajn**
Marcio **Tamari** · Guilherme **Pasmanik**

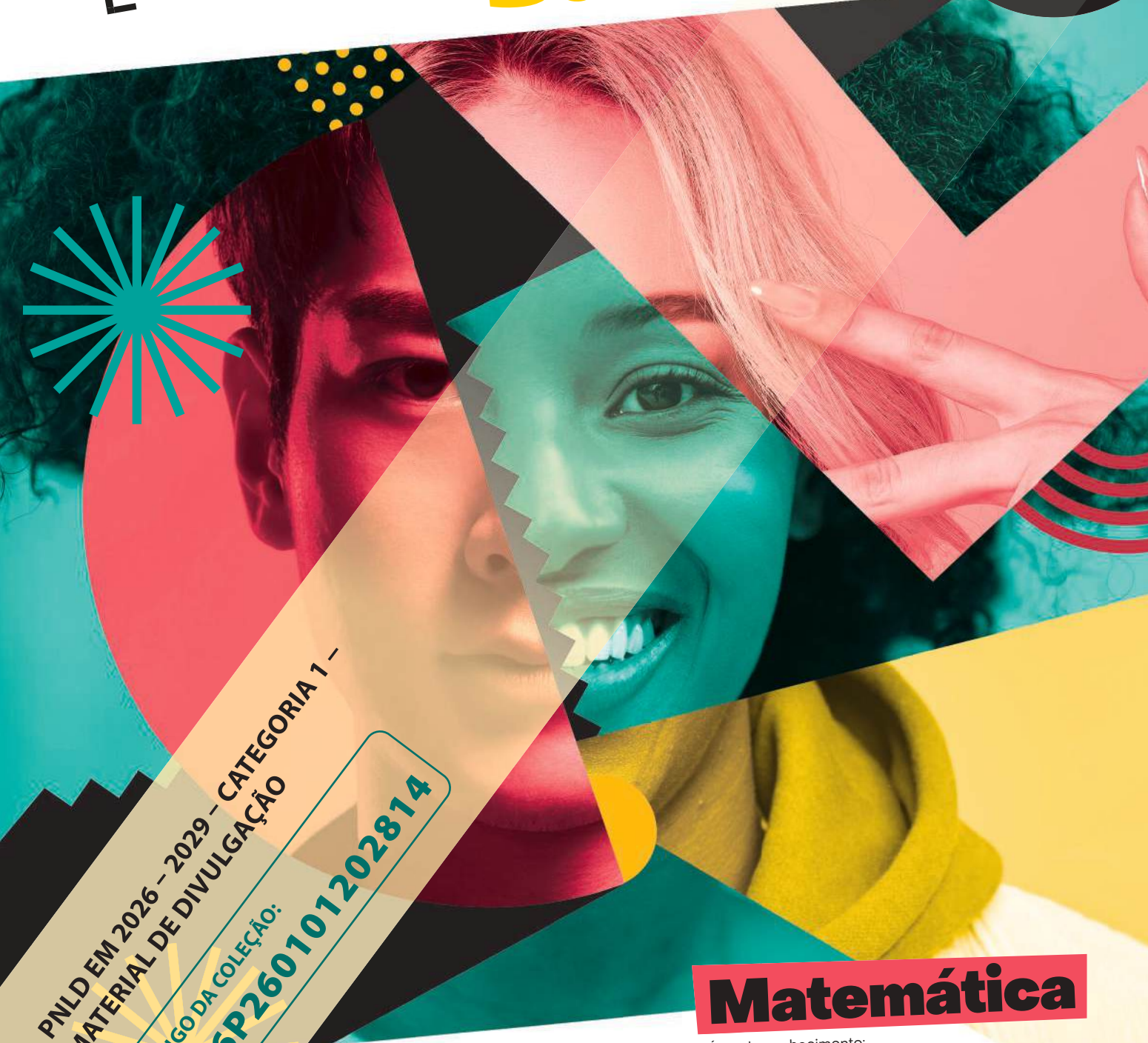
MANUAL DO PROFESSOR

Identidade Saraiva

Ensino Médio

2º ANO

Volume II



PNLD EM 2026 – 2029 – CATEGORIA 1 – MATERIAL DE DIVULGAÇÃO

CÓDIGO DA COLEÇÃO: 0086P26010120214

Matemática

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Editora Saraiva

Identidade Saraiva

Ensino Médio

2º ANO

Volume II

Matemática

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Gelson Iezzi

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP).

Engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP).

Atuou como professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Atuou como professor do Ensino Médio na rede particular de ensino.

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

David Degenszajn

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP).

Professor da rede particular de ensino há mais de 30 anos.

Marcio Tamari

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP).

Mestre em Matemática pela Universidade Federal do ABC (UFABC-SP).

Professor da rede particular de ensino de São Paulo.

Guilherme Pasmanik

Graduado em Engenharia Elétrica com ênfase em Computação pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP).

Licenciado em Matemática pelo Centro Universitário Nove de Julho (Uninove-SP).

Professor da rede particular de ensino de São Paulo.

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição, São Paulo, 2024.

Editora Saraiva

Editora Saraiva

Direção executiva de negócio e editorial: Flavia Alves Bravin

Direção de negócio: Volnei Korzenieski

Direção editorial: Lidiane Vivaldini Olo

Gerência de conteúdo: Alice Ribeiro Silvestre

Edição: Pamela Hellebrekers Seravalli (ger.), Victor Hugo dos Santos Gois, Marianna Capani Dominguez, Gabriela Barbosa da Silva, Heitor Pooli (assist.), Julia Lima Souza, Juliana Aparecida Bomjardim Soares, Daniela Gratner Schuck, João Paulo Caixeta, Saulo Augusto Nascimbem e Julia Correa Bueno (assist.)

Produção editorial: Renata Galdino

Revisão: Letícia Bento Pieroni (ger.), Carlos Eduardo Sigrist (coord.), Anderson Félix (líder de projeto), Aline Vieira, Ana Paula C. Malfa, Bruno Freitas, Daniela Lima, Danielle Modesto, Diego Carbone, Gabriela M. Andrade, Helena Settecerze, Heloísa Schiavo, Kátia Godoi, Luciana B. Azevedo, Luis Boa Nova, Luiz Gustavo Bazana, Luiza Thomaz, Malvina Tomaz, Marilia Lima, Paula de Jesus, Raquel Taveira, Ricardo Miyake e Vanessa P. Santos

Arte: Fernanda Costa da Silva (ger.), Elen Coppini Camioto e Erika Tiemi Yamauchi (coord.), Nilza Shizue Yoshida (ed. arte) e Teclas Editorial (diagramação)

Digital: Daniela Teves Nardi (ger.), Rafael Pereira de Paula Freitas (coord. produção multimídia), Daniella dos Santos Di Nubila (coord. produção digital) e Rogério Fábio Alves (coord. conteúdo digital e publicação)

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano, Luis Moura, [SIC] Comunicação e Zapt

Cartografia: Fernanda Costa da Silva (ger.), Eric Fuzii (coord.) e Alexandre Bueno

Design: Fernanda Costa da Silva (ger.), Erik Taketa (coord.), Luis Vassallo (proj. gráfico) e Gustavo Vanini (capas)

Licenciamentos: Flávio Matuguma

Licenciamento e iconografia: Roberta Bento (ger.), Iron Mantovanello (coord.), Alice Matoso, Claudia Balista, Douglas Cometti, Mariana Valeiro, Paula Squaiella, Roberta Freire, Thaisi Albarracin Lima (pesquisa e licenciamento), Fernanda Crevin (tratamento de imagens), Beatriz Alves dos Santos, Daniel Scucuglia, Ligia Dona, Liliane Rodrigues, Raísa Maris Reina, Sabrina Regina de Marinho e Sueli Ferreira (analista de licenciamento)

Fotos de capa: insta_photos/Adobe Stock, mimagephotos/Adobe Stock, Prostock-studio/Adobe Stock, BlueJeanImages/Shutterstock e m.jrn/Shutterstock

Pré-impressão: Michel Shimamoto (coord.), Alessandro de Oliveira Queiroz, Camilla Félix Cianelli Chaves, Debora Fernandes, Diego Rodrigues de Lima, Fernanda de Oliveira, Lucas Meireles dos Santos e Valmir da Silva Santos

Todos os direitos reservados por Saraiva Educação S.A.

Alameda Santos, 960, 4ª andar, setor 3
Cerqueira César – São Paulo – SP – CEP 01418-002
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
contato@saber.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Identidade Saraiva : Matemática : área de Matemática e suas Tecnologias : volume 2 : Ensino médio / Gelson Iezzi...[et al]. -- 1. ed. -- São Paulo : Saraiva, 2024.

Outros autores: David Degenszajn, Marcio Tamari, Guilherme Pasmanik
ISBN 978-65-5766-412-4 - aluno
ISBN 978-65-5766-413-1 - professor

1. Matemática (Ensino médio) I. Iezzi, Gelson

24-4410 CDD 510.7

Angélica Ilacqua - Bibliotecária - CRB-8/7057

2024
Código da obra CL 821250
CAE 876606 (AL) / 876607 (PR)
1ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Envidamos nossos melhores esforços para localizar e indicar adequadamente os créditos dos textos e imagens presentes nesta obra didática. Colocamo-nos à disposição para avaliação de eventuais irregularidades ou omissões de créditos e consequente correção nas próximas edições. As imagens e os textos constantes nesta obra que, eventualmente, reproduzam algum tipo de material de publicidade ou propaganda, ou a ele façam alusão, são aplicados para fins didáticos e não representam recomendação ou incentivo ao consumo.

Impressão e acabamento

SOBRE SEU LIVRO

Caros estudantes,

É sempre um grande desafio para um autor definir os conteúdos a serem ministrados no Ensino Médio, distribuindo-os pelos 3 anos de ensino. Por isso, depois de uma leitura cuidadosa da BNCC de Matemática do Ensino Médio e de ouvir a opinião de inúmeros professores e professoras, optamos pelo programa de conteúdos explicado a seguir.

Buscamos iniciar a apresentação dos conteúdos considerando fatos do cotidiano ou situações-problema. Ao longo dos capítulos, sempre que possível, relacionamos a Matemática a práticas sociais e a outras áreas do conhecimento, empregando uma linguagem mais cotidiana. Entretanto, ao formalizar os conceitos em estudo, optamos por garantir um rigor matemático.

Outra estratégia adotada é a ampla utilização de imagens variadas, gráficos, matérias de jornais e revistas, bem como textos científicos e textos não científicos veiculados na internet, para aproximar a Matemática de seu cotidiano juvenil. Essas temáticas despertam a curiosidade e podem dialogar com temas como cidadania, meio ambiente, saúde, população e Educação financeira. Além disso, ao debater alguns assuntos, procuramos apresentar um breve relato histórico do desenvolvimento das descobertas associadas ao tópico em estudo.

As atividades e os problemas estão organizados em ordem crescente de dificuldade. Alguns desafios exigem raciocínio mais elaborado, articulação e criatividade na busca da solução, proporcionando a oportunidade de vivenciar a resolução de problemas. Ao final de cada Unidade, há uma seção com questões do Enem e de vestibulares de todo o país, bem como perguntas para autoavaliação, que auxiliam na verificação da aprendizagem dos conteúdos estudados.

Esperamos que esta coleção colabore não apenas para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, mas também para a ampliação de seu repertório cultural, que é essencial para entender e transformar o mundo à nossa volta. Aproveite ao máximo esta coleção!

Os autores

VOLUME 1

Noções de conjuntos, conjuntos numéricos, noções gerais sobre funções, função afim, função quadrática, semelhança de triângulos, trigonometria no triângulo retângulo, áreas das principais figuras geométricas planas, trigonometria na circunferência, trigonometria em um triângulo qualquer e noções básicas de Estatística.

VOLUME 2

Função exponencial, função logarítmica, matrizes, sistemas lineares, geometria espacial de posição, áreas e volumes dos principais sólidos geométricos, medidas estatísticas e funções trigonométricas.

VOLUME 3

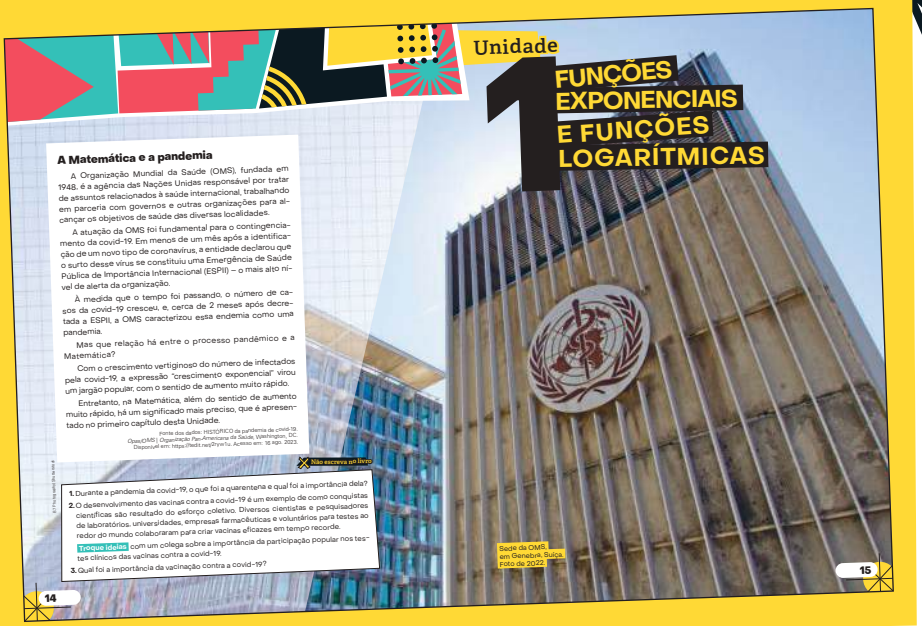
Sequências, progressões, matemática financeira, grandezas e medidas, pensamento computacional, análise combinatória, probabilidades, noções de geometria analítica plana, transformações geométricas no plano e ladrilhamento do plano.

CONHEÇA SEU LIVRO

Cada Volume desta coleção está organizado em Unidades e capítulos. Conheça a seguir um pouco da estrutura de Unidades, capítulos, seções e boxes deste Volume.

ABERTURA DE UNIDADE

A abertura de cada uma das 5 Unidades do Volume, organizada em dupla de páginas, apresenta uma ou mais imagens e textos relacionados a temas interdisciplinares e contemporâneos que vão despertar sua curiosidade.



Dica

Neste boxe, há sugestões de *sites*, textos, tecnologias digitais, entre outros recursos que podem auxiliá-lo a compreender, ampliar ou aprofundar os estudos ao longo dos capítulos.

Observação

Em momentos oportunos, são apresentadas observações que complementam o estudo com informações adicionais sobre os conteúdos abordados.

PRODUÇÕES EM FOCO

Vídeos, *podcasts*, infográficos, *blogs* e outros recursos e mídias podem ser muito úteis para a produção e o compartilhamento de conteúdos. Nesta seção, disposta antes da Unidade **1**, há dicas relacionadas a esses e outros tipos de mídia para serem consultadas ao longo de todo o ano letivo.

Em alguns momentos do livro, também indicamos um ícone para relembrá-lo de que pode retomar essas dicas para a produção sugerida na seção.

CAPÍTULO

Dois ou três capítulos estão reunidos em uma mesma Unidade e organizados em assuntos seguidos por blocos de atividades, boxes e seções variadas para o desenvolvimento dos conteúdos propostos.



capítulo 6

Prismas e pirâmides

Sólidos geométricos

As imagens não estão representadas em proporção.

Obras de Engenharia, Arquitetura ou Artes plásticas, entre outras áreas, evidenciam a imensa quantidade de objetos que podem ser relacionados a figuras estudadas na Geometria espacial.

Museu de Arte de São Paulo (Masp). Obra da arquiteta Lina Bo Bardi construída em 1968. Foto de 2021.

Pirâmide de vidro no Museu do Louvre, em Paris, França, construída em 1988. Foto de 2018.

Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida, em Brasília (DF). Obra do arquiteto Oscar Niemeyer construída em 1960. Foto de 2024.

Porta de Europa, em Madri, Espanha, construída em 1989. Foto de 2022.

Muitos objetos do cotidiano têm formato parecido com **sólidos geométricos**, que são figuras tridimensionais.

Forno de micro-ondas.

Lata de atum.

Casquinha de sorvete.

Globo terrestre.

Paralelepípedo reto-retângulo.

Cilindro.

Cone.

Esfera.

134

EXPERIMENTE

Esta seção propõe o desenvolvimento de atividades com o apoio de tecnologias digitais, como *softwares* de Geometria dinâmica e planilhas eletrônicas.

História da Matemática

Os textos deste boxe põem você em contato com o processo de construção do conhecimento e a criatividade na resolução de problemas enfrentados pela humanidade ao longo da história, situando os acontecimentos na linha do tempo.

ATIVIDADES

Nesta seção, presente em todos os capítulos, você encontrará uma grande variedade de atividades e problemas para consolidar os conteúdos e conceitos abordados. Algumas atividades são acompanhadas dos destaques **Experimente**, incentivando o uso de tecnologias digitais, e **Troque ideias**, que sugere a troca de ideias e opiniões em duplas ou grupos.

Atividades resolvidas

Neste boxe, você encontra a resolução detalhada de atividades que ajudam a compreender melhor os conceitos estudados e ampliam seu repertório de técnicas de resolução de problemas.

Pense nisto

Neste boxe há chamadas curtas, intercaladas em meio ao texto, convidando você a refletir sobre algum detalhe, propriedade ou solução de um problema. Além disso, incentivam o levantamento de hipóteses e o uso de estratégias pessoais para responder às perguntas.

Interligando

Esta seção apresenta, por meio de textos, recursos visuais diversificados e atividades, assuntos relevantes da área de Matemática e suas Tecnologias, relacionando-os com outros temas da própria área ou de outras áreas do conhecimento.

Educação financeira

Na seção há textos, imagens, gráficos e tabelas que abordam temas de Educação financeira em situações reais, incentivando a reflexão sobre atitudes que devem ser incorporadas à nossa rotina.

PROJETO

A seção oferece, por meio de questões e situações-problema, a oportunidade de você e os colegas colocarem em prática conhecimentos e habilidades, seguindo um percurso construído coletivamente. Os projetos propostos abordam temas relevantes para os contextos juvenis e sociais, mobilizando o trabalho com diferentes Temas Contemporâneos Transversais e com os Objetivos do Desenvolvimento Sustentável.



PROJETO

Não escreva no livro

Utilização de energia sustentável em propriedades rurais

Leia a reportagem a seguir.

2024: O ano da energia solar no Brasil

A geração de energia solar está entre os segmentos que tiveram um crescimento exponencial, pode-se dizer, nos últimos cinco anos. [...] De acordo com a Associação Brasileira de Energia Solar Fotovoltaica (Absolar) em 2023 a fonte solar representou 36 GW de geração de energia, significando cerca de 16% da matriz elétrica, com expectativa de 45,5 GW para 2024. [...]

Estamos falando [...] de uma fonte renovável que ainda gera muita economia para o bolso e [...] contribui pela questão de sustentabilidade. De acordo com a Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel), o Brasil conta com 89,9 milhões de unidades consumidoras de energia elétrica, sendo apenas 3,2 milhões beneficiadas pela geração solar distribuída.

[...]

HELTE, Junior. 2024: O ano da energia solar no Brasil. *Associação Brasileira de Energia Solar Fotovoltaica*. 15 mar. 2024. Disponível em: https://tedi.ee/f7Rqv9. Acesso em: 15 ago. 2024.

Agora, leia esta outra reportagem.

A importância das energias renováveis em propriedades rurais

A geração de energias renováveis pode ser uma aliada importante para garantir a estabilidade de propriedades rurais, baixar os custos e proteger o meio ambiente. [...]

– No interior do Brasil, o fornecimento de energia não é tão estável quanto nas grandes metrópoles. Um temporal pode ser responsável por fazer com que o produtor perca toda a sua produção, como acontece com quem produz leite e frangos – explica o Coordenador do Programa de Energia Sustentável do SEBRAE RS, Luis Guilherme Menezes.

[...]

MENEZES, Luis Guilherme. Campo sustentável. A importância das energias renováveis em propriedades rurais. *Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas (SEBRAE)*, 10 jan. 2017. Disponível em: https://tedi.ee/q6EtV5. Acesso em: 8 jun. 2024.

Painéis solares em propriedade rural.

Pensando em um projeto

Que tal criar um infográfico para apresentar informações sobre energia sustentável em propriedades rurais? Para isso, será preciso levar em conta as reportagens apresentadas, buscar dados recentes e refletir sobre o crescimento da demanda por energia ao longo do tempo.

Para começar

- Organizem-se em 6 grupos.

Plano de ação

Etapa 1

Em grupo, pesquisem em fontes confiáveis reportagens ou artigos sobre o uso de energia sustentável em propriedades rurais. Depois, façam um resumo das informações e dos dados que encontrarem, de modo que possam ser utilizados na organização textual do infográfico. Pontos a serem considerados:

- tipos e características de sistemas de energias renováveis viáveis para propriedades rurais;
- selo verde de eficiência e selo solar;
- vantagens de um sistema de energia renovável;
- oportunidade para proteção do meio ambiente.

Etapa 2

Pesquisem por dados recentes que informem a quantidade de instalações de sistemas de painéis fotovoltaicos em propriedades rurais e a evolução da geração de energia (potência) por fonte solar fotovoltaica no Brasil e em áreas rurais.

Etapa 3

Depois de realizarem as pesquisas nas etapas **1** e **2**, envolvendo os benefícios de energias renováveis e a quantidade de energia gerada por fonte solar em áreas rurais, agora vocês deverão buscar informações a respeito dos gastos e do retorno financeiro da energia elétrica gerada por painéis fotovoltaicos.

Consultem, em fontes confiáveis, o preço da instalação de painéis solares em propriedades rurais para geração de energia elétrica voltada à produção agrícola.

Pesquisem também em quanto tempo um produtor rural que investiu dinheiro na utilização de energia elétrica produzida por painéis solares recuperaria o dinheiro investido, por não precisar pagar por todo o consumo de energia elétrica a uma empresa de distribuição.

Etapa 4

A partir das pesquisas realizadas por vocês, criem um infográfico sobre o uso de energia sustentável, dando ênfase principalmente à evolução da utilização da energia solar fotovoltaica, ao preço dela e como ela pode ser aproveitada em propriedades rurais.

Etapa 5

Com o professor, definam local, datas e horários para a socialização dos infográficos com a turma e a organização de uma plenária para debaterem os resultados encontrados e organizados por cada grupo.

Produto final: divulgação dos infográficos na turma.

Os grupos devem se preparar para a plenária com a turma para socializarem a organização dos resultados;

Analisem a possibilidade da divulgação posterior dos infográficos para a comunidade escolar.

36

37

VIRALIZE!

Nesta seção constam textos de diferentes mídias, envolvendo alguns Temas Contemporâneos Transversais, e questões de interpretação e opinião pessoal com argumentação.



VIRALIZE!

População quilombola

População quilombola é de 1,3 milhão, indica recorte inédito do censo

Dos 5 568 municípios do Brasil, 1 696 possuem população quilombola. Pesquisa é importante para orientar políticas públicas necessárias a essas comunidades

Pela primeira vez na história, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) investigou integrantes dos povos e comunidades tradicionais. De acordo com dados do Censo 2022, a população quilombola do país é de 1,32 milhão de pessoas, ou 0,65% do total de habitantes do país.

Os dados mostram que foram identificados 473 970 domicílios onde residia pelo menos uma pessoa quilombola, espalhados por 1 696 municípios brasileiros. O Nordeste concentra 68,19% (ou 905,415 pessoas) do total de quilombolas.

O Censo apontou que os territórios quilombolas oficialmente delimitados abrigam 203 918 pessoas, sendo 167 202 quilombolas, ou 12,6% do total de quilombolas do país. Apenas 4,3% da população quilombola reside em territórios já titulados no processo de regularização fundiária.

"Essa pesquisa é importante para mostrar que nós, quilombolas, podemos estar onde quisermos. A luta continua. Eu acredito que esses números se estendem, vão além. Foi difícil fazer essa pesquisa porque muita gente não sabe da importância desses números, mas sei que isso pode melhorar nossa vida, porque precisamos que políticas públicas sejam criadas para atender às nossas necessidades", disse Gisele dos Santos, recenseadora quilombola.

POPULAÇÃO quilombola é de 1,3 milhão, indica recorte inédito do censo. *Gov.br*. Disponível em: https://tedi.ee/4AkYqJ. Acesso em: 27 ago. 2024.

Comunidade Quilombola Maria Joaquina, localizada na cidade de Cabo Frio (RJ), participando da coleta do Censo 2022 do IBGE. Foto de 2022.

Não escreva no livro

O termo **quilombo**, que na língua banto significa "povoação", é utilizado para designar espaços de resistência à escravidão, onde negros fugidos das plantações formavam núcleos habitacionais organizados social, econômica e politicamente. Localizados em áreas de difícil acesso, esses agrupamentos dispunham de armas e estratégias de defesa contra invasões.

Durante o período colonial no Brasil, havia centenas de comunidades quilombolas, especialmente nos estados da Bahia, de Pernambuco, de Goiás, do Mato Grosso, de Minas Gerais e de Alagoas.

O mais famoso quilombo brasileiro foi Palmares, localizado na Serra da Barriga, em União dos Palmares (AL). Palmares resistiu por quase 100 anos a ataques holandeses, lusos-brasileiros e de bandeirantes paulistas, sendo destruído em 1695 após a morte de Zumbi.

Zumbi dos Palmares nasceu em 1655, em Alagoas. Ele foi um dos principais líderes da resistência negra à escravidão durante o Brasil Colonial e liderou o Quilombo dos Palmares, a mais significativa comunidade de escravizados fugitivos.

Fonte dos dados: O QUE significa aquilombo. *Gov.br*. Disponível em: https://tedi.ee/tZuPnD; QUILOMBO dos Palmares: antigo refúgio de negros escravizados é patrimônio cultural internacional. *g1*, 20 nov. 2021. Disponível em: https://tedi.ee/4UmLgE. Acesso em: 27 ago. 2024.

Quilombo de Muquém em União dos Palmares (AL). Foto de 2022.

1. Por que é tão importante para a sociedade brasileira reconhecer, preservar e valorizar as comunidades quilombolas?
2. Quais são os estados brasileiros com maiores contingentes de população quilombola? Faça uma pesquisa para descobrir a resposta.
3. Determine no caderno a população quilombola, segundo o Censo de 2022, dos estados da Bahia, do Maranhão, de Minas Gerais e do Pará, sabendo que:
   - O Nordeste reúne os estados com maior população quilombola entre os 4 citados, e a Bahia concentra o maior contingente;
   - A população quilombola no Maranhão é o dobro da população quilombola no Pará;
   - As populações quilombolas dos estados com menor contingente quilombola (entre os 4 estados) são iguais;
   - A média entre as populações quilombolas da Bahia e Maranhão é da 333 500.
   - A diferença entre a maior e a menor população quilombola, entre os estados citados, é de 262 000.

Nota: alguns valores sofreram arredondamentos mínimos.

108

109

Para fundamentar saberes

Para finalizar cada Unidade, propomos atividades do Enem e de vestibulares relacionadas aos conteúdos abordados. Em seguida, são propostas perguntas para que você reflita sobre o próprio aprendizado.

SUMÁRIO

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) 11

PRODUÇÕES EM FOCO 12

UNIDADE 1

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS 14

Capítulo 1 – Função exponencial 16
Introdução 16
Potência de expoente natural 16
Propriedades de potências de expoente natural 17
Potência de expoente inteiro negativo 18
Propriedades de potências de expoente inteiro negativo 18
Raiz *n*-ésima aritmética 19
Propriedades de raízes *n*-ésimas aritméticas 19
Potência de expoente racional 20
Propriedades de potências de expoente racional 21
Potência de expoente real 23
Função exponencial 23
Gráfico de função exponencial 24
Gráficos com translação 25
Experimente usar um *software* de Geometria dinâmica para estudar o gráfico de funções exponenciais 26
O número *e* 26
Propriedades do gráfico da função exponencial 27
Interligando – Decaimento radioativo 32
Equação exponencial 34
Projeto – Utilização de energia sustentável em propriedades rurais 36

Capítulo 2 – Função logarítmica 38
Introdução 38
Logaritmos 39
Consequências 40
Sistemas de logaritmos 42
Propriedades dos logaritmos 43
Logaritmo do produto 43
Logaritmo do quociente 43
Logaritmo da potência 44
Mudança de base 47
Caso especial 49
Interligando – Os sons, a audição humana e a escala logarítmica 50
Função logarítmica 52
Gráfico da função logarítmica 52
Experimente comparar os gráficos das funções exponencial e logarítmica 53
Propriedades do gráfico da função logarítmica 55
Equações exponenciais usando logaritmos 57
Viralize! – Os terremotos e os logaritmos 60
Para fundamentar saberes 62

UNIDADE 2

MATRIZES E SISTEMAS LINEARES 64

Capítulo 3 – Matrizes 66
Informações em tabelas 66
Definição de matrizes 67
Matrizes especiais 68
Igualdade de matrizes 70
Operações com matrizes 71
Adição 71
Subtração 71
Multiplicação 72
Interligando – Matrizes e imagens digitais 76
Projeto – Análise do consumo de energia elétrica em uma residência 78

Capítulo 4 – Sistemas lineares 80
Equação linear 80
Solução de uma equação linear 80
Sistema linear 2 × 2 83
Experimente representar o gráfico de uma equação linear 84
Classificação e interpretação geométrica 86
Experimente usar um *software* de Geometria dinâmica para encontrar soluções de sistemas de equações lineares 88
Sistema linear *m* × *n* 90
Solução de um sistema linear 90
Escalonamento de um sistema linear 91
Resolução de um sistema linear escalonado 91
Processo prático 92
Escalonamento 95
Experimente usar um *software* de Geometria dinâmica para resolver sistemas lineares de 3 equações com 3 incógnitas 97
Interligando – Vias de tráfego 101

Sistemas homogêneos ... 102
Matrizes associadas a um sistema linear ... 103
Determinantes ... 104
Caso 2 × 2 ... 104
Caso 3 × 3 ... 105
Viralize! – População quilombola ... 108
Para fundamentar saberes ... 110

UNIDADE 3

GEOMETRIA ESPACIAL ... 112

Capítulo 5 – Noções de Geometria espacial de posição ... 114
Introdução ... 114
Noções primitivas ... 115
Proposições primitivas ... 116
Postulados da existência ... 116
Postulados da determinação ... 117
Postulado da inclusão ... 117
Postulado das paralelas (ou postulado de Euclides) ... 117
Determinação de planos ... 118
Posições relativas de 2 planos ... 119
Planos secantes ... 119
Planos paralelos ... 119
Posições relativas de uma reta e um plano ... 119
Posições relativas de 2 retas ... 120
Algumas proposições de retas e planos ... 121
Ângulos entre 2 retas ... 124
Retas que formam ângulo reto ... 125
Reta e plano perpendiculares ... 125
Planos perpendiculares ... 126
Projeções ortogonais ... 126
Distâncias ... 128
Teoremas fundamentais ... 130
Teorema 1 ... 130
Teorema 2 ... 130
Teorema 3 ... 131
Interligando – Geometria e as navegações ... 133

Capítulo 6 – Prismas e pirâmides ... 134
Sólidos geométricos ... 134
Corpos redondos ... 135
Poliedros ... 135
Experimente representar poliedros com um *software* de Geometria dinâmica ... 138
Prisma ... 140
Definição ... 140
Elementos e classificação ... 140
Paralelepípedo ... 141
Princípio de Cavalieri ... 147
Medidas de área e de volume ... 148
Pirâmide ... 152
Definição ... 152
Elementos e classificação ... 153
Pirâmide regular ... 154
Medidas de área e de volume ... 154
Experimente investigar a medida de volume de prismas e pirâmides ... 155
Tetraedro regular ... 158
Pirâmides semelhantes ... 162
Tronco de pirâmide ... 164
Interligando – Reduzir o impacto ambiental se tornou uma preocupação recorrente para grandes marcas ... 168

Capítulo 7 – Cilindros, cones e esferas ... 169
Cilindro ... 169
Definição ... 169
Elementos e classificação ... 170
Medidas de área do cilindro circular reto ... 170
Experimente representar corpos redondos em um *software* de Geometria dinâmica ... 172
Medida de volume (V) do cilindro ... 173
Secção meridiana e cilindro equilátero ... 174
Interligando – A Matemática e as chuvas ... 176
Cone ... 179
Definição ... 179
Elementos e classificação ... 179
Medidas de área do cone circular reto ... 180
Experimente investigar a medida de volume de cilindros e cones ... 182
Medida de volume (V) do cone ... 182
Secção meridiana e cone equilátero ... 184
Tronco de cone ... 185
Cones semelhantes ... 188
Projeto – Sistemas de captação e armazenamento de água ... 190
Esfera ... 192
Definição ... 192
Secção de uma esfera ... 192
Elementos de uma esfera ... 193
Coordenadas geográficas ... 194
Projeções cônicas e cilíndricas do globo terrestre ... 195
Experimente investigar a deformação de ângulos e de áreas em projeções cartográficas cilíndricas ... 197
Medida de volume (V) da esfera ... 198
Medida de área (A) da superfície esférica ... 199
Partes da esfera ... 202
Esfera inscrita em outro sólido geométrico ... 203
Esfera circunscrita a outro sólido geométrico ... 204
Viralize! – Eu identifico formas geométricas... de diferentes maneiras! ... 206
Para fundamentar saberes ... 208

UNIDADE 4

ANÁLISE DE MEDIDAS E REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS ... 210

Capítulo 8 – Medidas em Estatística 212
Medidas de posição e dispersão dos dados 212
Interligando – As pesquisas eleitorais 213
Medidas de posição (ou centralidade) 214
Média aritmética 214
Educação financeira – Taxas de inflação 218
Mediana 220
Moda 220
Medidas de dispersão (ou variabilidade) 222
Amplitude 223
Variância 223
Desvio padrão 225
Experimente utilizar uma planilha eletrônica para estudar os dados sobre a cobertura vacinal no Brasil 228
Projeto – Índices de mortalidade infantil 230

Capítulo 9 – Quartis, percentis e *box-plot* 232
Representações gráficas 232
Quartis e *box-plot* 232
Interligando – A relação entre tempo de estudo e desempenho acadêmico 236
Percentis 238
Medidas de posição e medidas de dispersão para dados agrupados 240
Cálculo do desvio padrão 241
Determinação da classe modal 241
Cálculo da mediana 242
Viralize! – Tempo de tela 244
Para fundamentar saberes 246

Brasileiros passam em média 56% do dia em frente às telas de *smartphones* e computadores.



A_B_C/Shutterstock



Mistervlad/Shutterstock

Roda-gigante London Eye, em Londres, Inglaterra. Foto de 2024.

UNIDADE 5

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS ... 248

Capítulo 10 – Fenômenos periódicos e função seno 250
Fenômenos periódicos 250
As fases da Lua 251
Estudo de funções periódicas 252
Funções trigonométricas 254
Retomando a circunferência trigonométrica ... 254
As demais voltas na circunferência trigonométrica 255
Função seno 257
Experimente representar o gráfico da função seno utilizando um *software* de Geometria dinâmica 262
Projeto – Estudo das marés 263
Período da função seno 265
Interligando – A Trigonometria e a roda-gigante 269

Capítulo 11 – Função cosseno 271
Introdução 271
Experimente construir o gráfico da função cosseno usando um *software* de Geometria dinâmica 273
Interligando – A Trigonometria e o fenômeno das marés 275
Gráfico da função cosseno 277
Experimente utilizar um *software* para estudar os gráficos das funções trigonométricas 282
Viralize! – Campanhas anuais de vacinação 284
Para fundamentar saberes 286

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS 288
RESPOSTAS 289
LISTA DE SIGLAS 305
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS 306
TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIOS 309

OBJETOS EDUCACIONAIS DIGITAIS (OEDs)



Do micro ao macro 18



Raízes quadradas 19



Poluição sonora 50



Sistemas de equações de 1º grau
com 2 incógnitas 83



Soluções gráficas de sistemas
de equações 86



As maiores comunidades
quilombolas do Brasil 108



Princípio de Cavalieri 147



Geometria e as grandes pirâmides
do Egito antigo 152



Formas geométricas e a natureza 206



Eleições ao redor do mundo 213



Medidas de dispersão 222



O ressurgimento de doenças
e a importância da vacina 284



Transcrição de áudios 309

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A BNCC é o documento que define as aprendizagens mínimas que o estudante deve desenvolver em cada etapa da Educação Básica, de modo a estabelecer um currículo básico comum a todos os estudantes brasileiros.

Esse documento foi elaborado considerando os conhecimentos e as habilidades essenciais para o desenvolvimento dos estudantes na sociedade do século XXI e visando garantir uma educação de qualidade e com equidade.

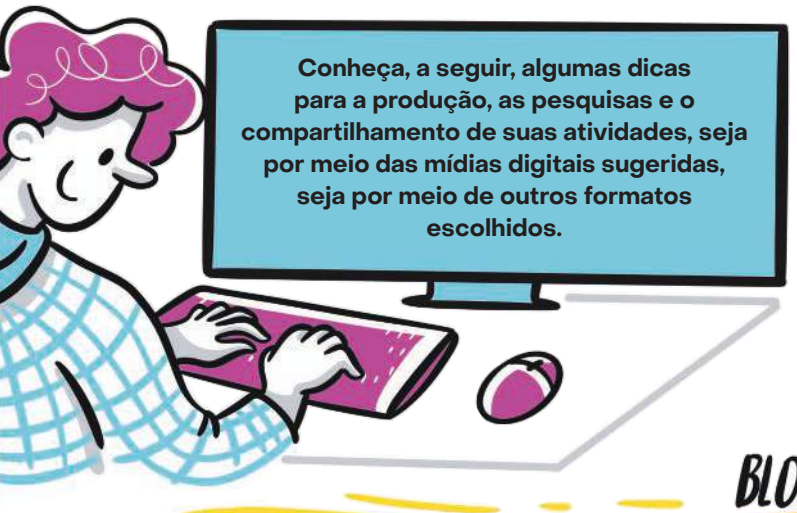
Ao longo dos 3 Volumes desta coleção, todas as competências e as habilidades da BNCC e os Temas Contemporâneos Transversais são trabalhados. A seguir apresentamos aqueles que são trabalhados em cada Unidade deste Volume.

Os textos correspondentes aos códigos indicados podem ser consultados no documento oficial da BNCC. Disponível em: https://tedit.net/0blon1. Acesso em: 4 ago. 2024.

VOLUME 2

Unidade	Competência geral da Educação Básica (CG)	Competência específica de Matemática e suas Tecnologias (CEMAT)	Habilidade de Matemática e suas Tecnologias (EM13MAT)	Tema Contemporâneo Transversal (TCT)
Unidade 1	CG02, CG04	CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04	EM13MAT101, EM13MAT304, EM13MAT305, EM13MAT315, EM13MAT403, EM13MAT404	*Ciência e Tecnologia*; *Saúde*
Unidade 2	CG01, CG02, CG06	CEMAT03	EM13MAT301, EM13MAT314, EM13MAT315	*Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Alimentar e Nutricional*; *Educação para o Consumo*; *Educação para o Trânsito*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*
Unidade 3	CG02, CG03, CG04, CG05, CG06, CG07	CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03, CEMAT05	EM13MAT103, EM13MAT201, EM13MAT301, EM13MAT307, EM13MAT308, EM13MAT309, EM13MAT314, EM13MAT504, EM13MAT509	*Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Ambiental*; *Educação para o Consumo*
Unidade 4	CG01, CG02, CG03, CG04, CG07, CG08, CG10	CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03, CEMAT04	EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT202, EM13MAT316, EM13MAT406, EM13MAT407	*Direitos da Criança e do Adolescente*; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação Financeira*; *Educação Fiscal*; *Saúde*; *Vida Familiar e Social*
Unidade 5	CG01, CG02, CG08, CG10	CEMAT03, CEMAT04	EM13MAT306, EM13MAT307, EM13MAT404	*Saúde*; *Vida Familiar e Social*

PRODUÇÕES EM FOCO



Conheça, a seguir, algumas dicas para a produção, as pesquisas e o compartilhamento de suas atividades, seja por meio das mídias digitais sugeridas, seja por meio de outros formatos escolhidos.

- Escolha a mídia (digital ou não) que será usada e o público-alvo a quem ela se destina.
- Defina o formato da mídia e como o conteúdo deve ser apresentado.
- Em suas pesquisas, só use informações de fontes confiáveis.
- Ao final, revise detalhadamente cada aspecto de seu trabalho (texto, imagens, fontes, etc.).

BLOG





Blog é um *site* que permite postagens de textos, imagens, vídeos, áudios e *links*, possibilitando a interação com o público por meio de comentários.

- Você pode usar qualquer estilo textual (conto, reportagem, crônica, entrevista, poesia, etc.) para abordar o assunto escolhido.
- Hospede o *blog* em um *site* que ofereça endereço e acesso. Há vários *sites* que dispõem gratuitamente desses serviços.

VÍDEO



- Elabore um roteiro com todos os itens que devem ser observados.
- Escolha o local e o cenário para a gravação.
- Use um *smartphone* para gravar os sons e as imagens. Dica! Você pode utilizar outro *smartphone* como microfone ou o microfone de um fone de ouvido.
- Insira legendas da locução.
- Pesquise na internet aplicativos ou *softwares* gratuitos para fazer a edição do vídeo.
- Não esqueça de inserir uma trilha sonora (gratuita) ao vídeo.

INFOGRÁFICO

Trata-se de um recurso visual que combina textos e imagens para transmitir uma mensagem.

- Os textos devem ser curtos e objetivos.
- As imagens (fotografias, ilustrações, gráficos e mapas) e o texto devem ser complementares.
- Para começar, elabore um rascunho do que pretende colocar no infográfico (textos e imagens).
- Junto a cada imagem, identifique o nome do fotógrafo ou do ilustrador.
- Existem aplicativos e programas *on-line* gratuitos que permitem fazer infográficos digitalmente. Escolha um deles e siga as instruções do tutorial.

Gabi Emmerich/Arquivo da editora



PODCAST

Podcasts são arquivos de áudio que podem ser ouvidos tanto *on-line* como *off-line*. Podem ser entrevistas, contos, debates, etc.

- Seja responsável quanto ao conteúdo que vai publicar, pois qualquer pessoa poderá acessá-lo.
- Prepare o texto e um roteiro sobre o tema escolhido e que possa ser consultado durante a gravação.
- A narração deve ser clara e organizada.
- Procure na internet aplicativos e *softwares* gratuitos para gravar e editar o seu *podcast*.

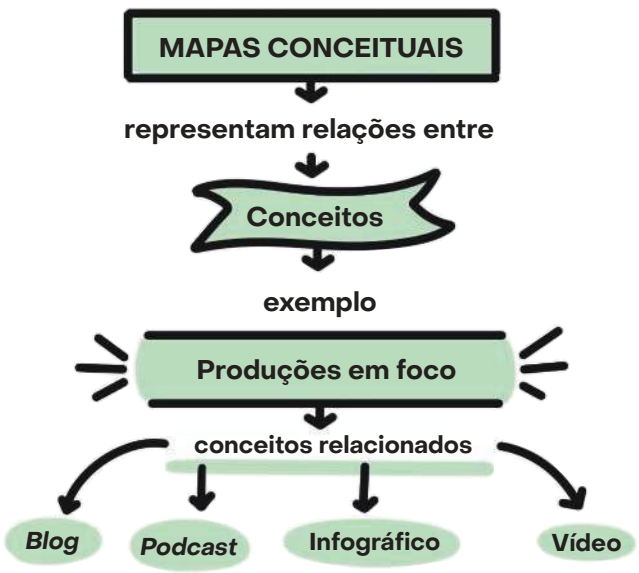


CITAÇÃO

- Escolha um buscador de *sites* e digite nele as palavras-chave de sua pesquisa. Vai ser apresentada uma lista de *sites*.
- Dê preferência aos *sites* governamentais, de instituições de Ensino Superior e de ONGs, além de revistas e jornais de grande circulação.
- Escolha os *sites* com data de publicação ou de atualização mais recentes.
- Cite os nomes dos *sites* consultados em seu trabalho.
- Na parte final do material produzido (escrito ou oral), cite todas as fontes de onde obteve as informações de suas pesquisas: livro, revista, *site*, jornal, documentário, etc.
- Para citar um *site*, indique o título da matéria, o nome do *site*, o ano de publicação, o endereço do *site* e a data de acesso.

MAPAS CONCEITUAIS

São diagramas que indicam as relações entre conceitos e palavras-chave. O conceito principal deve vir no topo do mapa conceitual. Ele se conecta aos conceitos relacionados por linhas, que trazem os conectivos (palavras ou frases) que explicam a relação entre eles.



Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Saúde*.

A Matemática e a pandemia

A Organização Mundial da Saúde (OMS), fundada em 1948, é a agência das Nações Unidas responsável por tratar de assuntos relacionados à saúde internacional, trabalhando em parceria com governos e outras organizações para alcançar os objetivos de saúde das diversas localidades.

A atuação da OMS foi fundamental para o contingenciamento da covid-19. Em menos de um mês após a identificação de um novo tipo de coronavírus, a entidade declarou que o surto desse vírus se constituiu uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional (ESPII) – o mais alto nível de alerta da organização.

À medida que o tempo foi passando, o número de casos da covid-19 cresceu, e, cerca de 2 meses após decretada a ESPII, a OMS caracterizou essa endemia como uma pandemia.

Mas que relação há entre o processo pandêmico e a Matemática?

Com o crescimento vertiginoso do número de infectados pela covid-19, a expressão "crescimento exponencial" virou um jargão popular, com o sentido de aumento muito rápido.

Entretanto, na Matemática, além do sentido de aumento muito rápido, há um significado mais preciso, que é apresentado no primeiro capítulo desta Unidade.

Fonte dos dados: HISTÓRICO da pandemia de covid-19. *Opas/OMS | Organização Pan-Americana da Saúde*, Washington, DC. Disponível em: https://tedit.net/2ryw1u. Acesso em: 16 ago. 2023.

B7 Photography/Shutterstock

Não escreva no livro

1. Durante a pandemia da covid-19, o que foi a quarentena e qual foi a importância dela?

2. O desenvolvimento das vacinas contra a covid-19 é um exemplo de como conquistas científicas são resultado do esforço coletivo. Diversos cientistas e pesquisadores de laboratórios, universidades, empresas farmacêuticas e voluntários para testes ao redor do mundo colaboraram para criar vacinas eficazes em tempo recorde.

Troque ideias com um colega sobre a importância da participação popular nos testes clínicos das vacinas contra a covid-19.

3. Qual foi a importância da vacinação contra a covid-19?

1. A quarentena foi uma medida de saúde pública que restringiu a circulação de pessoas com o intuito de impedir a exposição da população ao novo coronavírus. Deve ser realizada pelo período máximo de incubação da doença, compreendido entre a infecção e a manifestação dos sintomas. Ela foi importante para reduzir a taxa de crescimento do número de infectados, evitando que o sistema de saúde ficasse sobrecarregado e entrasse em colapso.

2. Resposta pessoal.

3. Depois que a população começou a ser vacinada, o número de mortes diminuiu drasticamente.

Unidade

1 FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS



Sede da OMS, em Genebra, Suíça. Foto de 2022.

capítulo 1

Função exponencial

Introdução

Assim como alguns vírus, inclusive o da covid-19, as bactérias também podem ter um crescimento populacional exponencial. Considere a situação a seguir.

Numa experiência de deterioração de alimentos, verificou-se que a quantidade de bactérias dobrava a cada hora. Essa quantidade era da ordem de 100 mil na amostra no instante em que foi coletada para análise.

Como podemos expressar a quantidade de bactérias em função das horas passadas desde o início da experiência?

- 1 hora após o início, a população de bactérias era de $2 \cdot 100$ mil $=$ $=$ 200 mil. I
- Após 2 horas, a população dobrou em relação ao valor obtido em I, isto é, $2 \cdot (2 \cdot 100 \text{ mil}) = 2^2 \cdot 100$ mil (ou 400 mil). II
- Após 3 horas, a população dobrou em relação ao valor obtido em II: $2 \cdot (2^2 \cdot 100 \text{ mil}) = 2^3 \cdot 100$ mil (ou 800 mil).

Desse modo, passadas x horas após o início da experiência, a população de bactérias, em milhares, é dada por $2^x \cdot 100$.

A função que associa a população de bactérias (y), em milhares, à medida de intervalo de tempo decorrido a partir do início da experiência (x), em horas, é dada pela lei $y = 2^x \cdot 100$. Esse é um exemplo de variação de **função exponencial**.

Antes de estudar com mais detalhes as funções exponenciais, vamos fazer uma revisão de potências e raízes, bem como das propriedades de ambas – assuntos já abordados nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Potência de expoente natural

Dados um número real a e um número natural n, com $n \geqslant 2$ (lemos "n maior ou igual a 2"), chama-se potência de base a e expoente n o número a^n, que é o produto de n fatores iguais a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Dessa definição decorre que:

- $a^2 = a \cdot a$
- $a^3 = a \cdot a \cdot a$
- $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$

E assim sucessivamente.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Há 2 casos especiais.

I. Para $n = 1$, definimos $a^1 = a$.

II. Para $n = 0$ e supondo $a \neq 0$, definimos $a^0 = 1$.

Acompanhe alguns exemplos de potência.

- $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
- $(-6)^4 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = 1296$
- $(3{,}2)^2 = (3{,}2) \cdot (3{,}2) = 10{,}24$
- $\left(\frac{3}{10}\right)^0 = 1$
- $3^1 = 3$

As calculadoras científicas auxiliam no cálculo de potências, que, em alguns casos, pode ser bastante trabalhoso de se fazer manualmente. Atualmente, calculadoras científicas estão disponíveis como aplicativos em *smartphones*, *tablets* e computadores.

Comente com os estudantes que algumas calculadoras usam o ponto em vez da vírgula para indicar as casas decimais.

Para calcular potências na calculadora científica, identifique a tecla [^].

- Para calcular $(1{,}3)^5$, pressionamos [1] [.] [3] [^] [5] [=] e obtemos 3.71293.
- Para calcular $(2{,}3)^8$, pressionamos [2] [.] [3] [^] [8] [=]. Devido à limitação no número de casas decimais da calculadora, é provável que a calculadora apresente o resultado aproximado 783.1098528.

Comente com os estudantes que, em alguns modelos, há uma tecla x^y, em que x representa a base da potência, e y, o expoente.

Cabe ressaltar que existem muitos modelos de calculadora e, em alguns modelos, a tecla [^] é substituída pela tecla [y^x], em que y representa a base da potência, e x, o expoente. Assim, para calcular $(2{,}3)^8$, pressionamos [2] [.] [3] [y^x] [=] 783.1098528.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Propriedades de potências de expoente natural

Sendo a e b números reais e m e n números naturais, valem as seguintes propriedades.

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, com $a \neq 0$ e $m \geqslant n$.

III. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

IV. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, com $b \neq 0$.

V. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Essas propriedades podem ser usadas para simplificar expressões. Vamos aplicá-las em um exemplo.

Supondo $a \cdot b \neq 0$, $y = \frac{(a^2b^3)^5}{(a^2)^3b^7}$ pode ser simplificada da seguinte maneira:

$$y = \frac{(a^2b^3)^5}{(a^2)^3b^7} = \frac{a^{10}b^{15}}{a^6b^7} = a^{10-6} \cdot b^{15-7} = a^4b^8$$

Observação

Na definição de potência com expoente natural, temos: para todo $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, $a^0 = 1$. Isso garante a validade das propriedades apresentadas. Acompanhe a aplicação nas 2 primeiras propriedades.

- Fazendo $m = 0$ de acordo com a propriedade **I**:
  $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$
- Fazendo $m = n$ de acordo com a propriedade **II**, por um lado, $\frac{a^n}{a^n} = 1$, que é o quociente de 2 números iguais; por outro lado, aplicando a propriedade, temos:
  $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

Convenciona-se, então, $a^0 = 1$.

Potência de expoente inteiro negativo

Carrossel de imagens

Vamos definir as potências de expoente inteiro negativo de modo que as propriedades estudadas no item anterior continuem valendo.

Considere os exemplos a seguir.

- $2^3 \cdot 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1$; assim, $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.
- $\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2}$. Por outro lado, temos $\frac{7^3}{7^5} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2}$. Daí, $7^{-2} = \frac{1}{7^2}$.

Dados um número real a, não nulo, e um número natural n, chama-se potência de base a e expoente $-n$ o número a^{-n}, que é o inverso de a^n. Logo, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Vamos considerar alguns exemplos:

- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $(0{,}4)^{-2} = \left(\frac{4}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{25}} = \frac{25}{4}$
- $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
- $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$
- $1^{-8} = \frac{1}{1^8} = \frac{1}{1} = 1$

Não escreva no livro

Pense nisto

Por que essa definição não vale para $a = 0$?

Se tivéssemos $a = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \neq 0$, $0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$, o que é uma indefinição na Matemática.

Propriedades de potências de expoente inteiro negativo

As 5 propriedades enunciadas para potência de expoente natural são válidas para potência de expoente inteiro negativo, quaisquer que sejam os valores dos expoentes m e n inteiros.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. Calcule no caderno.

a) 5^3 125 **b)** $(-5)^3$ −125 **c)** 5^{-3} $\frac{1}{125}$ **d)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ $-\frac{8}{27}$ **e)** $\left(\frac{1}{50}\right)^{-2}$ 2 500 **f)** $\left(-\frac{11}{7}\right)^0$ 1 **g)** $\left(\frac{3}{2}\right)^1$ $\frac{3}{2}$ **h)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$ 1 **i)** $-(-2)^5$ 32 **j)** -10^2 −100 **k)** 10^{-3} $\frac{1}{1\,000}$ **l)** $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ −4 **m)** $(0{,}2)^2$ 0,04 **n)** $(0{,}1)^{-1}$ 10 **o)** $(3{,}4)^1$ 3,4 **p)** $(-4{,}17)^0$ 1 **q)** $(0{,}05)^{-2}$ 400 **r)** $(1{,}25)^{-1}$ 0,8

2. Calcule, no caderno, o valor de cada uma das expressões.

a) $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-2)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1$

b) $B = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

c) $C = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 1^{15} - (-2)^1$

d) $D = \left[\left(-\frac{5}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right]^{-1}$

e) $E = [3^{-1} - (-3)^{-1}]^{-1}$

f) $F = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$

3. Transforme cada expressão em uma única potência.

a) $\frac{11^3 \cdot (11^4)^2 \cdot 11}{11^6}$ 11^6

b) $\frac{(2^4)^3 \cdot 2^7 \cdot 2^3}{(2^{11})^2}$ 1

c) $\frac{10 \cdot 10^{-5} \cdot (10^2)^{-3}}{(10^{-4})^3}$ 10^2

d) $\frac{2^{3^2} \cdot 3^4}{3 \cdot (2^3)^2}$ 6^3

e) $\frac{10^{-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-3}}{(0{,}01)^{-1}}$ 10^{-1}

2. a) $A = \frac{9}{16} \cdot (-8) - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{10}{2} = -5$

b) $B = 2^2 + 3^1 = 4 + 3 = 7$

c) $C = -2 \cdot \frac{27}{8} + 1 - (-2) = -\frac{27}{4} + 3 = -\frac{15}{4}$

2. d) $D = \left[-\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right]^{-1} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} = -5$

e) $E = \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^1\right]^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

f) $F = 6 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{9} + \frac{16}{9} = \frac{40}{9}$

5. $a = \dfrac{2^{48} + 2^{44} - 2^{46}}{2^6 \cdot 2^{18}} = \dfrac{2^{44} \cdot (2^4 + 1 - 2^2)}{2^{24}} = 2^{20} \cdot 13$

Daí, $\dfrac{1}{26} \cdot a = \dfrac{1}{26} \cdot 13 \cdot 2^{20} = \dfrac{2^{20}}{2} = 2^{19}$.

4. Escreva no caderno cada item como uma única potência.

a) a metade de 2^{100}; $\dfrac{2^{100}}{2} = 2^{100-1} = 2^{99}$

b) o triplo de 3^{20}; $3 \cdot 3^{20} = 3^{1+20} = 3^{21}$

c) a oitava parte de 4^{32}; $\dfrac{4^{32}}{8} = \dfrac{(2^2)^{32}}{2^3} = \dfrac{2^{64}}{2^3} = 2^{61}$

d) o quadrado do quíntuplo de 25^{10}.

$(5 \cdot 25^{10})^2 = [5 \cdot (5^2)^{10}]^2 = (5 \cdot 5^{20})^2 = (5^{21})^2 = 5^{42}$

5. Sendo $a = \dfrac{2^{48} + 4^{22} - 2^{46}}{4^3 \cdot 8^6}$, obtenha o valor de $\dfrac{1}{26} \cdot a$.

6. Sendo a e b números reais tais que $a \cdot b \neq 0$, simplifique as expressões a seguir.

a) $(a^{-1} + b^{-1}) \cdot ab$ $a + b$

b) $a^{-2} - b^{-2}$ $\dfrac{(b+a)(b-a)}{a^2b^2}$

c) $(a^{-1})^2 + (b^2)^{-1} + 2(ab)^{-1}$ $\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^2$

Raiz *n*-ésima aritmética

Antes de definir as potências com expoentes racionais, vamos relembrar a definição de raiz *n*-ésima (lê-se "enésima") aritmética.

Dados um número real não negativo a e um número natural n, com $n \geqslant 1$, chama-se **raiz *n*-ésima aritmética** de a o número real não negativo b tal que $b^n = a$.

O símbolo $\sqrt{\ }$ é chamado **radical**, e $\sqrt[n]{a}$ indica a raiz n-ésima aritmética de a, com a chamado de **radicando** e n de **índice**.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ e } b \geqslant 0$$

Considere estes exemplos:

- $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$.
- $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$.
- $\sqrt[6]{0} = 0$, pois $0^6 = 0$.
- $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}} = \dfrac{1}{2}$, pois $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{32}$.
- $\sqrt[8]{1} = 1$, pois $1^8 = 1$.
- $\sqrt[5]{32} = 2$, pois $2^5 = 32$.

Observação

O símbolo lógico $\Leftrightarrow$ é lido como "se, e somente se" e usado quando queremos indicar que, se a primeira condição é verdadeira, então a segunda também é; e que, se a segunda condição é verdadeira, então a primeira também é. Caso uma das condições seja falsa, a outra também deve ser falsa.

Propriedades de raízes *n*-ésimas aritméticas

Sendo a e b números reais não negativos, m número inteiro e n e p números naturais não nulos, valem as seguintes propriedades.

- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, com $b \neq 0$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$

Podcast Transcrição de áudio

Atividades resolvidas

1. Simplifique cada uma das expressões.

a) $\sqrt{8} + \sqrt{18}$

b) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{32y^4x}$, com x e y números reais positivos.

Solução:

a) $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{2^2 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3^2} =$

$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} =$

$= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{32y^4x} = \sqrt{32y^4x^2} =$

$= \sqrt{2^4 \cdot 2y^4x^2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{y^4} \cdot \sqrt{x^2} =$

$= 2^2\sqrt{2}y^2x = 4y^2x\sqrt{2}$

2. Racionalize o denominador de cada fração.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}$ **c)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$

Solução:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

7. b) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{1}{2}$ **c)** $\sqrt[3]{0{,}125} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

9. a) $\sqrt{54} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3^2} = 3\sqrt{6}$ **c)** $\sqrt[4]{240} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3 \cdot 5} = 2\sqrt[4]{15}$
b) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = 3\sqrt[3]{2}$ **d)** $\sqrt[3]{3\,000} = \sqrt[3]{3 \cdot 10^3} = 10\sqrt[3]{3}$

b) $\frac{4}{\sqrt{3}-1} = \frac{4}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} =$
$= \frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{2} =$
$= 2(\sqrt{3}+1)$

c) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \sqrt[3]{9}$

Pense nisto

No item **b** da atividade resolvida **2** foi usado um produto notável. Identifique-o.
$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

7. Calcule, no caderno, o valor de cada raiz.

a) $\sqrt[3]{512}$ $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{8^3} = 8$
b) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$
c) $\sqrt[3]{0{,}125}$
d) $\sqrt[5]{100\,000}$ $\sqrt[5]{100\,000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$

8. Calcule, no caderno, o valor de cada expressão.

a) $\sqrt[4]{256} \cdot \sqrt{25 - 16}$ $4 \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$
b) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{49}}$ $\sqrt[3]{1 + 7} = \sqrt[3]{8} = 2$
c) $\left(\sqrt[3]{1000} - \sqrt[6]{64}\right)^2$ $(10 - 2)^2 = 8^2 = 64$

9. Simplifique no caderno as raízes *n*-ésimas aritméticas.

a) $\sqrt{54}$
b) $\sqrt[3]{54}$
c) $\sqrt[4]{240}$
d) $\sqrt[3]{3\,000}$

10. Calcule no caderno o valor de cada expressão.

a) $\sqrt{32} + \sqrt{50}$ $\sqrt{32} + \sqrt{50} = 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$
b) $\sqrt{200} - 3\sqrt{72} + \sqrt{12}$
c) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$
d) $\sqrt{1200} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{27}$

11. Efetue no caderno as operações.

a) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$
b) $\sqrt{48} : \sqrt{2}$
c) $\sqrt[4]{162} : \sqrt[4]{2}$
d) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}}$

12. Desenvolva cada um dos produtos notáveis.

a) $(3 - \sqrt{2})^2$ $11 - 6\sqrt{2}$
b) $(\sqrt{11} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{2})$ 9
c) $(\sqrt[4]{3} + 1)^2$ $\sqrt{3} + 2\sqrt[4]{3} + 1$
d) $(2 + \sqrt{2})^3$ $20 + 14\sqrt{2}$

13. Calcule no caderno as expressões.

a) $\sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ 2
b) $\sqrt{8 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{8 - \sqrt{15}}$ 7
c) $\sqrt[3]{\sqrt{12} + 2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{12} - 2}$ 2
d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$ 4

14. Racionalize o denominador de cada fração.

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$
c) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
e) $\frac{25}{\sqrt[5]{5^2}}$ $5\sqrt[5]{125}$
f) $\frac{2}{\sqrt[9]{32}}$ $\sqrt[9]{16}$

15. Racionalize o denominador de cada uma das seguintes expressões.

a) $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$ $2(\sqrt{2} - 1)$
b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ $2 + \sqrt{2}$
c) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ $\frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - \sqrt{5}}$ $2 + \sqrt{2}$

16. Efetue, no caderno, as expressões.

a) $\left(\sqrt[6]{2}\right)^3$
b) $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[6]{4}$
c) $\left(\sqrt[6]{2}\right)^4$

11. a) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = 3$
b) $\sqrt{48} : \sqrt{2} = \sqrt{48 : 2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
c) $\sqrt[4]{162} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{162 : 2} = \sqrt[4]{81} = 3$
d) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 12}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{6}{2} = 3$

10. b) $\sqrt{200} - 3\sqrt{72} + \sqrt{12} =$
$= 10\sqrt{2} - 18\sqrt{2} + 2\sqrt{3} =$
$= -8\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
c) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} =$
$= 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$
d) $\sqrt{1\,200} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{27} =$
$= 20\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$

16. a) $\left(\sqrt[6]{2}\right)^3 = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^{3 \cdot 1}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$
c) $\left(\sqrt[6]{2}\right)^4 = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^{2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

Potência de expoente racional

Para dar significado às potências de expoente racional, por exemplo $\left(3^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}, \ldots\right)$, devemos lembrar que a definição deve garantir a validade das propriedades já apresentadas neste capítulo.

Considere os exemplos:

- $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 3^1 = 3$; assim, $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3$, ou seja, $3^{\frac{1}{2}}$ é a raiz quadrada aritmética de $3 \Rightarrow \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$.

16. b) $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[6]{4} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[6]{4} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}} \cdot \sqrt[6]{4} =$
$= \sqrt{\sqrt[3]{2^4}} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

- $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 2$; assim, $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2$, ou seja, $2^{\frac{1}{3}}$ é a raiz cúbica aritmética de $2 \Rightarrow \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$. Esses exemplos ilustram a seguinte definição:

> Para $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Acompanhe os exemplos a seguir.

- $8^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} = 8^{2 \cdot \frac{3}{2}} = 8^3$

Assim, $\left(8^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 8^3$ e, portanto, a raiz quadrada aritmética de 8^3 é igual a $8^{\frac{3}{2}}$, ou seja, $\sqrt[2]{8^3} = 8^{\frac{3}{2}}$.

- $4^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = 4^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 4^2$

Assim, $\left(4^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 4^2$ e, portanto, a raiz cúbica aritmética de 4^2 é igual a $4^{\frac{2}{3}}$, ou seja, $\sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}$.

Esses exemplos ilustram a seguinte definição:

> Dados um número real não negativo a, um número inteiro m e um número natural n (com $n \geqslant 1$), chama-se potência de base a e expoente $\frac{m}{n}$ a raiz n-ésima aritmética de a^m.
>
> $$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
- $0^{\frac{11}{3}} = 0$
- $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $64^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$
- $100^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{100^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$
- $1^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{1^7} = 1$
- $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Observação

Quando um conjunto numérico (por exemplo, $\mathbb{N}$) aparece acrescido de *, é indicação de que estamos excluindo dele o número zero.

Observação

Para $a = 0$, m um número inteiro e n um número natural, com $n \geqslant 1$ e $\frac{m}{n} > 0$,

então define-se: $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Propriedades de potências de expoente racional

Sendo a e b números reais não negativos e $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ racionais, com p e r números inteiros e q e s números naturais não nulos, valem as seguintes propriedades.

- $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$
- $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$
- $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$
- $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$
- $(a : b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} : b^{\frac{p}{q}}$

Note que as 5 propriedades da potência de expoente inteiro enunciadas são válidas para a potência de expoente racional.

Atividades resolvidas

3. Calcule o valor de $y = 27^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{3}{4}}$.

Solução:

Podemos resolver de 2 maneiras.

I. Escrever as potências na forma de raízes:

$$y = \sqrt[3]{27^2} - \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[3]{729} - \sqrt[4]{4\,096} = 9 - 8 = 1$$

II. Usar as propriedades das potências:

$$y = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} - \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$$

22. País **1**: $4{,}1 \cdot 10^{12} \cdot 5{,}20 = 21{,}32 \cdot 10^{12} = 2{,}132 \cdot 10^{13}$; ou seja, $2{,}132 \cdot 10^{13}$ reais.
País **2**: $2{,}2 \cdot 10^{13} \cdot 0{,}04 = 0{,}088 \cdot 10^{13}$; ou seja, $0{,}88 \cdot 10^{13}$ reais.
País **3**: $7{,}2 \cdot 10^{11} \cdot 5{,}50 = 39{,}6 \cdot 10^{11} = 0{,}396 \cdot 10^{13}$; ou seja, $0{,}396 \cdot 10^{13}$ reais.
A soma é $2{,}132 \cdot 10^{13} + 0{,}088 \cdot 10^{13} + 0{,}396 \cdot 10^{13} = 2{,}616 \cdot 10^{13}$; ou seja, $2{,}616 \cdot 10^{13}$ reais. Alternativa **e**.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

17. Calcule, no caderno, o valor de cada potência.

a) $27^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{27} = 3$

b) $256^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{256} = 16$

c) $32^{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[5]{32} = 2$

d) $64^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{64} = 4$

e) $576^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{576} = 24$

f) $0{,}25^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

g) $\left(\frac{27}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}$

h) $\left(\frac{1}{81}\right)^{0{,}25}$

i) $0{,}5^{0{,}5}$

18. Calcule, no caderno, o valor das potências a seguir.

a) $8^{\frac{2}{3}}$ $(2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

b) $144^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{144^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{144}} = \frac{1}{12}$

c) $(0{,}2)^{-\frac{1}{2}}$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} = (5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

d) $16^{\frac{5}{2}}$ $\sqrt{16^5} = \sqrt{16^4 \cdot 16} = 16^2 \cdot \sqrt{16} = 1\,024$

e) $27^{\frac{2}{3}}$ $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

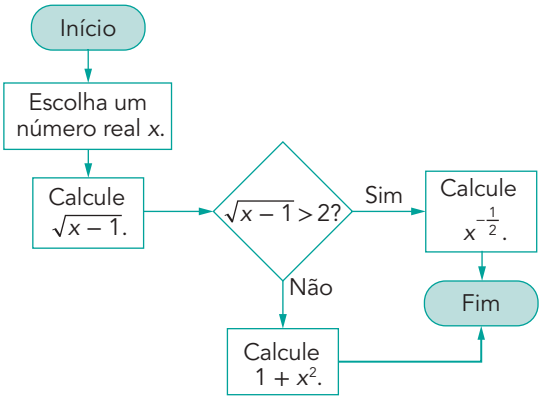
f) $0{,}09^{-\frac{1}{2}}$ $\left(\frac{9}{100}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{100}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$

g) $16^{\frac{3}{4}}$ $(2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$

h) $8^{-\frac{1}{2}}$ $\sqrt{8^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

i) $0{,}001^{-\frac{2}{3}}$ $0{,}001^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{-\frac{2}{3}} = (10^{-3})^{-\frac{2}{3}} = 10^2 = 100$

19. Considere o fluxograma a seguir.



a) Execute o fluxograma para $x = 10$, $x = \frac{5}{4}$ e $x = \sqrt{2}$. Qual é o resultado do cálculo realizado antes do fim do processo? $\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\frac{41}{16}$ e 3.

b) Determine no caderno o valor de $x \in \mathbb{R}$ para os quais é possível executar o fluxograma. Será possível executar o fluxograma para qualquer número real x maior ou igual a 1.

c) Para certo $x \in \mathbb{R}$, o fluxograma gerou o valor 26. Qual é o valor de x? $x = 5$

20. $\left.\begin{array}{l} a = 16 + 9 = 25 \\ b = \frac{2 \cdot 3 - 4}{2^2} = \frac{6-4}{4} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} a^b = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

20. Determine no caderno o valor de a^b, considerando que:

- $a = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$;
- $b = \dfrac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$.

17. g) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}} = \frac{3}{10}$

h) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

21. A medida de área da superfície corporal (ASC) de uma pessoa, em metros quadrados, pode ser estimada pela fórmula de Mosteller:

$$\text{ASC} = \left(\frac{h \cdot m}{3\,600}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sendo h a medida da altura da pessoa em centímetros e m a medida de massa da pessoa em quilogramas.

a) Calcule a medida de área da superfície corporal de um indivíduo de 1,69 m e 75 kg. Use $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.

b) Jorge tem ASC igual a 2 m² e medida de massa igual a 80 kg. Qual é a medida da altura estimada de Jorge? 1,80 m

c) Considere 2 amigos, Rui e Eli, ambos com 81 kg de medida de massa. A medida da altura de Rui é 21% maior do que a medida da altura de Eli. A ASC de Rui é x% maior do que a ASC de Eli. Qual é o valor de x? $x = 10$

22. **(FCMSCSP)** A tabela indica o orçamento anual destinado à saúde de três países e as conversões de suas respectivas moedas em reais.

País	Orçamento anual	Conversão para real
1	$4{,}1 \cdot 10^{12}$ (US$)	1 US$ = R$ 5,20
2	$2{,}2 \cdot 10^{13}$ (¥)	1 ¥ = R$ 0,04
3	$7{,}2 \cdot 10^{11}$ (€)	1 € = R$ 5,50

[Nota do autor: US$, dólar estadunidense; ¥, iene japonês; e €, euro.]

A soma do orçamento anual destinado à saúde desses três países, em reais, é igual a:

a) $1{,}489 \cdot 10^{14}$

b) $1{,}004 \cdot 10^{14}$

c) $6{,}100 \cdot 10^{13}$

d) $5{,}232 \cdot 10^{13}$

e) $2{,}616 \cdot 10^{13}$

21. a) $\text{ASC} = \left(\frac{169 \cdot 75}{3600}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{169 \cdot 75}{3600}} = \frac{13 \cdot 5\sqrt{3}}{60} \simeq 1{,}84$; ou seja, aproximadamente 1,84 m².

Potência de expoente real

Vamos agora dar significado às potências do tipo a^x, em que $a \in \mathbb{R}_+^*$, e o expoente x é um número irracional. Por exemplo: $2^{\sqrt{5}}$, $10^{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{7}}$, $4^{-\sqrt{5}}$, ...

Vamos analisar a potência $2^{\sqrt{2}}$.

Como $\sqrt{2}$ é irracional, vamos considerar aproximações racionais para esse número por falta e por excesso e, com auxílio de uma calculadora científica, obter o valor das potências de expoentes racionais: $\sqrt{2} \simeq 1{,}41421356$.

Por falta	Por excesso
$2^1 = 2$	$2^2 = 4$
$2^{1,4} \simeq 2{,}64$	$2^{1,5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \simeq 2{,}828$
$2^{1,41} \simeq 2{,}657$	$2^{1,42} \simeq 2{,}676$
$2^{1,414} \simeq 2{,}6647$	$2^{1,415} \simeq 2{,}6666$
$2^{1,4142} \simeq 2{,}6651$	$2^{1,4143} \simeq 2{,}6653$
⋮	⋮

Note que, à medida que os expoentes se aproximam de $\sqrt{2}$ por valores racionais, tanto por falta quanto por excesso, os valores das potências tendem a um mesmo valor, definido por $2^{\sqrt{2}}$, que é aproximadamente igual a 2,665.

Já apresentamos os diferentes tipos de potências a^x, com x um número racional ou irracional. Qualquer caso em que $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, tem-se $a^x > 0$, isto é, toda potência de base real positiva e expoente real é um número positivo.

Para essas potências, continuam válidas todas as propriedades apresentadas nos tópicos anteriores deste capítulo.

Observação

O sinal + indica que consideramos apenas os valores não negativos do conjunto numérico. Quando escrevemos $\mathbb{R}_+^*$, consideramos, portanto, apenas o conjunto dos números reais maiores do que zero.

Função exponencial

Até aqui abordamos potências e raízes. Agora, vamos tratar da função exponencial. Retomaremos também o exemplo do início deste capítulo: Passadas x horas após o início da experiência sobre o crescimento da quantidade de bactérias em alimentos, a população de bactérias (y), em milhares, é dada por $y = 2^x \cdot 100$.

Para facilitar o entendimento, considere a construção da tabela com as informações apresentadas, levando em conta que as análises das quantidades foram feitas num período de 10 horas.

Estudo das bactérias

Medida de intervalo de tempo (em horas)	Quantidade de bactérias (em milhares)
0	$2^0 \cdot 100 = 100$
1	$2^1 \cdot 100 = 200$
2	$2^2 \cdot 100 = 400$
3	$2^3 \cdot 100 = 800$
⋮	⋮
t	$2^t \cdot 100$
⋮	⋮
10	$2^{10} \cdot 100 = 102\,400$

Dados elaborados para fins didáticos.

Cores fantasia.



DAVID SCHARF/SPL/Fotoarena

A *Salmonella entertidis* é uma bactéria que pode ser transmitida pela ingestão de carnes, leite e ovos contaminados, causar a salmonelose não tifoide e, em casos mais graves, a febre tifoide, com risco de morte. Imagem colorida artificialmente, ampliada aproximadamente 6 350 vezes.

Note que há 2 grandezas (variáveis) que se relacionam: a medida de intervalo de tempo, decorrido desde o início do experimento, e a quantidade de bactérias. Além disso, a cada medida de intervalo de tempo diferente, corresponde uma única quantidade de bactérias. Assim, podemos dizer que existe uma função que relaciona a quantidade de bactérias e a medida de intervalo de tempo em um experimento, isto é, a quantidade de bactérias em dado momento depende da medida de intervalo de tempo transcorrido desde o início do experimento.

Tal exemplo relaciona-se ao conceito de **função exponencial**.

Chama-se **função exponencial** qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real dado, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

São exemplos de leis de funções exponenciais: $y = 10^x$; $y = 2^x$, $y = \left(\frac{5}{6}\right)^x$, etc.

Note que, na definição de função exponencial, há restrições em relação à base a. De fato:

- se $a < 0$, nem sempre o número a^x é real, por exemplo, $(-3)^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}$;
- se $a = 0$, temos:

$$\begin{cases} \text{se } x > 0,\ y = 0^x = 0 \text{ (função constante)} \\ \text{se } x < 0, \text{ indefinição matemática} \\ \text{se } x = 0, \text{ indefinição matemática} \end{cases}$$

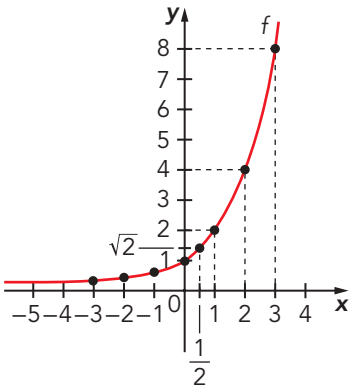
- se $a = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, a função dada por $y = 1^x = 1$ é constante.

Gráfico de função exponencial

Vamos construir os gráficos que representam algumas funções exponenciais no plano cartesiano e, em seguida, destacar algumas propriedades.

Começaremos construindo o gráfico que representa a função f cuja lei é dada por $y = 2^x$. Vamos localizar alguns pontos do gráfico e conectá-los por meio de uma curva.

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2} \simeq 1{,}41$	2	4	8

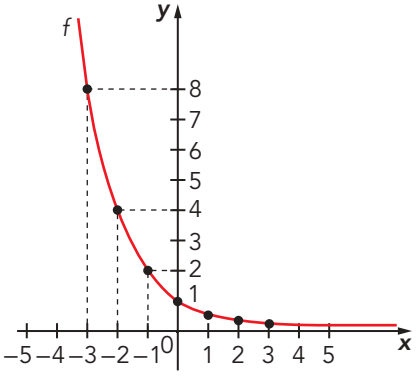


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0$ e, desse modo, $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Vamos agora construir o gráfico que representa a função f cuja lei é dada por $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Note que $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

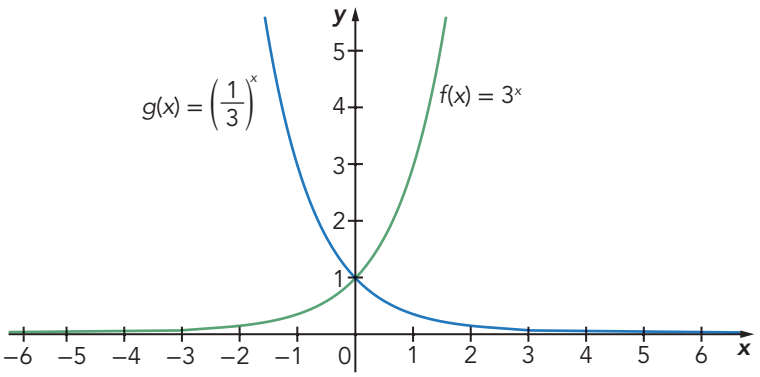
Considere a seguir os gráficos traçados em um *software* de Geometria dinâmica que representam as funções f e g definidas pelas leis $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Note que, tanto para a função f como para a função g, temos: $Im(f) = Im(g) = \mathbb{R}_+^*$

Verifique que a abscissa do ponto de intersecção das 2 curvas é obtida de:

$$3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow x = 0$$

As curvas f e g obtidas nos exemplos são chamadas **curvas exponenciais**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráficos com translação

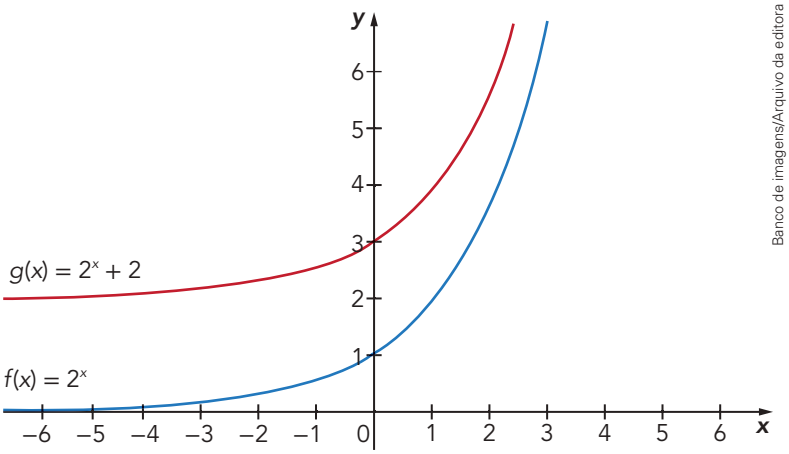
Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^x + 2$, respectivamente.

O gráfico que representa g pode ser obtido do gráfico que representa f "deslocando-o" 2 unidades para cima. Verifique os 2 gráficos construídos no mesmo plano cartesiano com um *software* de Geometria dinâmica.

Note que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0 \Rightarrow 2^x + 2 > 0 + 2$, isto é, $g(x) > 2$. Desse modo, o conjunto imagem da função g é $Im(g) =]2, +\infty[$.

Perceba que a curva correspondente à função g está contida na região em que $y > 2$.

De modo geral, o gráfico de $y = a^x + k$, em que $a > 0$, $a \neq 1$ e k é uma constante real, pode ser obtido do gráfico de $y = a^x$ deslocando-o k unidades para cima, se k for positivo, ou $|k|$ unidades para baixo, se k for negativo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro

Pense nisto

Essas 2 curvas podem se intersectar? Explique sua resposta.

Não, pois, por $f(x) = g(x) \Rightarrow 2^x = 2^x + 2 \Rightarrow 0 = 2$, verifica-se impossível.

Observação

Podemos determinar o conjunto imagem da função real dada por $h(x) = 2^x - 2$ sem construir o gráfico. Basta lembrar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0$. Adicionando -2 aos 2 membros, temos $2^x - 2 > 0 - 2$, isto é, $h(x) > -2$, $Im(h) =]-2, +\infty[$.

EXPERIMENTE

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Não escreva no livro

Usar o *software* de Geometria dinâmica para estudar o gráfico de funções exponenciais

Vamos tratar das mudanças no gráfico de uma função exponencial. Para isso, vamos comparar a função de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 2^x$ com a variação de função exponencial de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = k \cdot 2^x$, em que k assume valores reais (com $k \in \mathbb{R}^*$).

Inicialmente vamos construir o gráfico de $f(x) = 2^x$. Para isso, no campo de Álgebra, digite "y=2^x" e pressione a tecla *Enter*. Construa também o gráfico de $g(x) = k \cdot f(x)$ digitando "y=k*2^x" e pressione a tecla *Enter*.

O *software* exibirá os gráficos correspondentes às funções e um controle deslizante correspondente ao parâmetro k. Conforme esse parâmetro varia, o *software* exibe os gráficos de $g(x) = k \cdot 2^x$.

• Se $k > 1$, a concavidade do gráfico da função está voltada para cima e é mais fechada. Se k varia entre 0 e 1, a concavidade do gráfico da função está voltada para cima e é mais aberta. Se $k < -1$, a concavidade do gráfico da função está voltada para baixo e é mais fechada. Se k varia entre -1 e 0, a concavidade do gráfico da função está voltada para baixo e é mais aberta.

1. Comparando o gráfico de $g(x) = k \cdot f(x)$ com o gráfico de $f(x)$, o que podemos notar em relação ao:

- formato do gráfico?
- ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas Oy?
- conjunto imagem de cada função?

• O ponto de intersecção do gráfico com o eixo y tem sempre coordenadas $(0, k)$.

• Se $k > 0$, a imagem é $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$. Se $k < 0$, a imagem é $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$.

2. Obtenha o conjunto imagem e o domínio de cada função a seguir e determine se ela é crescente ou decrescente.

a) $g(x) = 2 \cdot 4^x$ $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$; $D(g) = \mathbb{R}$; crescente.

b) $g(x) = 1 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; $D(g) = \mathbb{R}$; decrescente.

c) $g(x) = 3 - 2 \cdot 3^x$ $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 3\}$; $D(g) = \mathbb{R}$; decrescente.

d) $g(x) = 1 + 4^x$ $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; $D(g) = \mathbb{R}$; crescente.

e) $g(x) = -5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$; $D(g) = \mathbb{R}$; crescente.

f) $g(x) = 1 + 3^{-x}$ $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; $D(g) = \mathbb{R}$; decrescente.

3. Determine a lei de uma função exponencial cujo conjunto imagem seja:

a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$ Exemplo de resposta: $y = 4 + 2^x$.

b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$ Exemplo de resposta: $y = 2 - 3^x$.

4. Escreva no caderno a lei de uma função exponencial crescente cujo conjunto imagem seja: $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 10\}$ Exemplo de resposta: $y = 10 - \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Use o *software* de Geometria dinâmica para verificar suas respostas.

O número *e*

Um importante número associado a crescimento exponencial é o número irracional $e = 2{,}718281828459\ldots$ O número e é chamado de número neperiano ou número de Euler e ele tem uma série de aplicações importantes para disciplinas de cursos de Ensino Superior como Cálculo, Cálculo Numérico, Estatística, Circuitos Elétricos, etc.

Para obtê-lo, vamos considerar a expressão $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, definida em $\mathbb{R}^*$, e verificar os valores que ela assume quando x se aproxima de zero.

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$\simeq 2{,}5937$	$\simeq 2{,}7048$	$\simeq 2{,}7169$	$\simeq 2{,}7181$	$\simeq 2{,}7183$

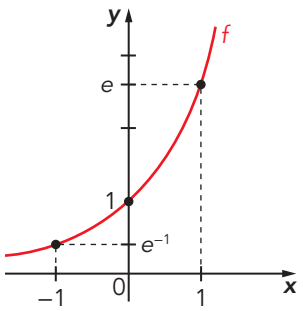
Na tabela, podemos notar que, à medida que x se aproxima de zero, os valores de $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ ficam mais próximos do número $e \simeq 2{,}7183$.

Considerando valores negativos de x cada vez mais próximos de zero (por exemplo, $x = -0{,}1$; $x = -0{,}01$; $x = -0{,}001$; etc.), a expressão também fica cada vez mais próxima de $e \simeq 2{,}7183$.

Dizemos então que o limite de $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, quando x tende a zero, é igual ao número e. Representamos esse fato por $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

A descoberta do número e é atribuída ao escocês John Napier (1550-1617) no trabalho com logaritmos datado de 1614. Nele, Napier apresentou, de maneira não explícita, o que hoje conhecemos como número e. Um século depois, com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, esse número teve sua grande importância reconhecida. O símbolo e foi apresentado pelo suíço Leonhard Euler (1707-1783) em 1739.

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = e^x$ é a função exponencial de base e, cujo ponto $(0, 1)$ também pertence a essa curva.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Atualmente você pode usar uma calculadora financeira ou científica para calcular o valor de potências do número e.

Muitas calculadoras científicas têm a tecla e^x colocada como segunda função. Para ativar a segunda função de uma tecla na calculadora científica é utilizada a tecla SHIFT ou, em alguns modelos, a segunda função de uma tecla da calculadora científica é acionada por meio da tecla 2ndF. No modelo de calculadora que estamos considerando, o cálculo de e^x é feito por meio da segunda função da tecla ln (e^x e) (ℓn, cujo significado será apresentado no capítulo seguinte).

Desse modo, em geral, não é necessário substituir e por alguma aproximação racional. Basta inserir o expoente x para o resultado da potência e^x ser conhecido.

Verifique as indicações a seguir.

- Para calcular e^2, pressionamos 2 SHIFT ln (e^x e) = e obtemos o valor aproximado 7.389056.
- Para calcular e^{10}, pressionamos 1 0 SHIFT ln (e^x e) = e obtemos o valor aproximado 22026.46579.

Em alguns modelos de calculadora, a sequência das "operações" pode ser invertida. O cálculo de e^{10} também pode ser feito por:

SHIFT ln (e^x e) 1 0 = 22026.46579

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Propriedades do gráfico da função exponencial

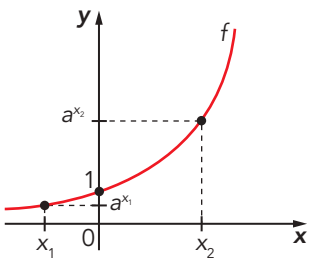
- Na função exponencial cuja lei é $y = a^x$, quando $x = 0 \Rightarrow y = a^0 = 1$, temos o par ordenado $(0, 1)$, que satisfaz a lei $y = a^x$ para todo a (com $a > 0$ e $a \neq 1$). Isso quer dizer que o gráfico que representa a função dada pela lei $y = a^x$ intersecta o eixo y no ponto de ordenada 1.
- Se $a > 1$, a função definida por $f(x) = a^x$ é **crescente** e uma curva genérica que a representa está dado no gráfico **1**.

Dados x_1 e x_2 reais, temos:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

São crescentes, por exemplo, as funções definidas pelas leis:

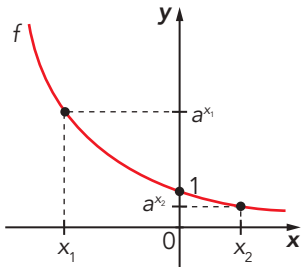
$$y = 2^x;\ y = 3^x;\ y = e^x;\ y = \left(\frac{3}{2}\right)^x;\ y = 10^x;\ \text{etc.}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico **1**.

- Se $0 < a < 1$, a função definida por $f(x) = a^x$ é **decrescente**, e uma curva genérica que a representa está dada no gráfico **2**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico **2**.

Dados x_1 e x_2 reais, temos:
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

São decrescentes, por exemplo, as funções definidas pelas leis:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; y = \left(\frac{1}{3}\right)^x; y = \left(\frac{1}{10}\right)^x; y = 0{,}2^x; \text{ etc.}$$

- Para todo $a > 0$, $a \neq 1$, temos: $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
- Para todo a e x números reais, com $a > 0$, temos $a^x > 0$. Portanto, o gráfico que representa a função definida por $y = a^x$ está sempre acima do eixo x.
- Se $a > 1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores negativos cada vez menores, como no gráfico **1**.
- Se $0 < a < 1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores positivos cada vez maiores, como no gráfico **2**.

Tudo isso pode ser resumido dizendo-se que o conjunto imagem da função exponencial dada por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é: Caso julgue pertinente, relembre aos estudantes que o símbolo | se lê "tal que".

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} = \mathbb{R}_+^*$$

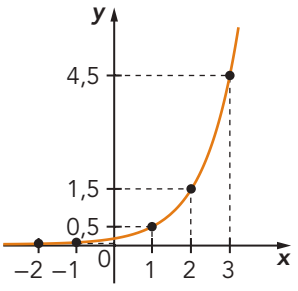
Existem outras funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujas leis apresentam a variável x no expoente de alguma potência (com base positiva e diferente de 1), como:

$$y = 3 \cdot 2^x; y = \frac{1}{4} \cdot 10^x; y = 2^{x-1} + 3; y = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 2; y = 1{,}012^x \cdot 191, \text{ entre outras.}$$

Essas funções têm como gráficos curvas com crescimento (ou decrescimento) exponencial, similares às apresentadas nos exemplos anteriores. Elas serão tratadas como variações das funções exponenciais, já que as propriedades apresentadas anteriormente não são necessariamente satisfeitas nesses casos.

Vamos representar, como exemplo, o gráfico da função cuja lei é $y = \frac{1}{6} \cdot 3^x$.

x	y
–3	≃ 0,006
–2	≃ 0,019
–1	0,0555...
0	0,1666...
1	0,5
2	1,5
3	4,5



Não escreva no livro

Pense nisto

Se a lei da função f fosse $f(x) = \frac{1}{6} \cdot 3^x + 2$, qual seria o conjunto imagem dessa função?

Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto: $\forall x \in \mathbb{R}, 3^x > 0 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 3^x > \frac{1}{6} \cdot 0 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 3^x > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 3^x + 2 > 0 + 2 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 3^x + 2 > 2$. Portanto $Im(f) =]2, +\infty[$.

Note que a função é crescente, o conjunto imagem é $\mathbb{R}_+^*$ e o gráfico é análogo ao gráfico de $y = a^x$, quando $a > 1$.

23. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

26. a) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -2\}$; crescente.

b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; decrescente.

c) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$; crescente.

d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 3\}$; crescente.

23. Esboce no caderno os gráficos que representam as funções definidas pelas seguintes leis; determine o domínio e a imagem dessas funções e indique se são crescentes ou decrescentes. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

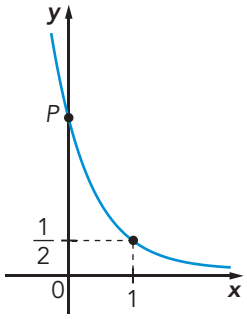
a) $f(x) = 4^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$

d) $f(x) = 3 \cdot 2^{-x}$

24. Na figura, está esboçado o gráfico que representa a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = m \cdot 6^{-x}$, em que m é uma constante real. Determine em seu caderno:



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) o valor de m; $m = 3$

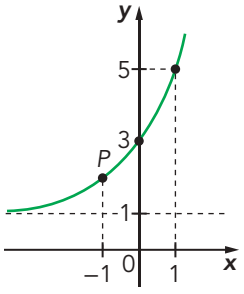
b) $f(-1)$; 18

c) a ordenada de P; 3

d) o domínio e a imagem de f; $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

e) se f é uma função crescente ou decrescente. Decrescente.

25. No sistema de coordenadas a seguir, está esboçado o gráfico que representa a função f. A lei que define f é $f(x) = a + b \cdot 2^x$, em que a e b são constantes reais positivas. Determine no caderno:



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) os valores de a e b; $a = 1$, $b = 2$

b) o conjunto imagem de f; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$

c) as coordenadas do ponto $P \in f$;

d) o ponto no qual o gráfico de f intersecta o eixo x; Não existe esse ponto.

e) o domínio de f; $D(f) = \mathbb{R}$

f) se a função é crescente ou decrescente. Crescente.

26. Esboce no caderno o gráfico que representa cada uma das funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ pelas leis a seguir; destaque o domínio e a imagem e classifique a função em crescente ou decrescente. Os gráficos encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $f(x) = 2^x - 2$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

c) $f(x) = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $f(x) = 3^x + 3$

27. Constatou-se num laboratório que uma colônia de certo tipo de bactéria triplicava a população a cada meia hora. No instante em que começaram os estudos, o número de bactérias na amostra era estimado em 10 mil.

a) No caderno, represente numa tabela a população de bactérias, em milhares, nos instantes (a partir do início da contagem) 0,5 hora, 1 hora, 1,5 hora, 2 horas, 3 horas e 5 horas. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Obtenha em seu caderno a lei que relaciona o número (n) de milhares de bactérias em função da medida de intervalo de tempo (t), em horas. $n(t) = 3^{2t} \cdot 10$

c) Determine no caderno o domínio e a imagem da função que relaciona o número (n) de bactérias a medida de intervalo de tempo (t). Essa função é crescente ou decrescente? $D(n) = \mathbb{R}_+$; $Im(n) = \mathbb{R}_+^*$; crescente.

28. Elabore e resolva no caderno um problema usando os dados a seguir, referentes aos valores de uma motocicleta de acordo com a idade dela. Suponha que a tendência apresentada na tabela seja mantida por até 10 anos de uso.

Idade (em anos)	Valor (em R$)
0	18.000,00
1	16.200,00
2	14.580,00
3	13.122,00

29. Uma das formas de investir dinheiro é emprestá-lo a alguma instituição, como o governo do Brasil, no caso do Tesouro Direto. Suponha que o rendimento médio bruto de um desses títulos do governo prefixado seja de 12% ao ano. Isso significa que, a cada ano, em média, o saldo a ser devolvido pelo governo até o final do empréstimo (vencimento) cresce 12% em relação ao saldo do ano anterior.

25. c) $f(x) = 1 + 2 \cdot 2^x$; $f(-1) = 1 + 2 \cdot 2^{-1} = 1 + 1 = 2$
Logo, $P(-1, 2)$.

28. Exemplos de problema: Qual é, em porcentagem, a variação anual no valor dessa motocicleta?

29. c) $s(10) = 1\,000 \cdot (1,12)^{10} \simeq 1\,000 \cdot 3,11 = 3\,110$, ou seja, aproximadamente R$ 3.110,00. Logo, o saldo não quadruplica.
e) A expressão "em média" indica que, ao final de 5 anos, o saldo será obrigatoriamente $1\,000 \cdot (1,12)^5$. No entanto, os saldos estimados a cada ano provavelmente não representarão a realidade, uma vez que os preços dos títulos públicos prefixados variam de acordo com o cenário econômico.

Não escreva no livro

a) Eduardo aplicou hoje R$ 1.000,00 no Tesouro Direto. Monte no caderno um quadro para representar, ano a ano, o saldo previsto desse investimento nos próximos 5 anos. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Qual é a lei da função que relaciona o saldo (s), em reais, desse investimento de Eduardo e o número de anos (x) transcorridos a partir de hoje ($x = 0$)? $s(x) = 1\,000 \cdot (1,12)^x$

c) É possível que, em 10 anos, o saldo desse investimento quadruplique? Use $(1,12)^{10} \simeq 3,11$.

d) Determine no caderno o domínio e a imagem da função que relaciona o saldo (s) do investimento de Eduardo e o número de anos transcorridos (x). Essa função é crescente ou decrescente? $D(s) = \mathbb{R}_+$; $Im(s) = \mathbb{R}_+^*$; crescente.

e) Durante os 5 anos, Eduardo anotou o saldo dele anualmente para comparar com a tabela feita no item **a**. Em alguns anos, ele se assustou por estar com um saldo menor que o planejado, mas, no final do período de 5 anos, no vencimento do empréstimo que fez ao governo, ele obteve o saldo final que era esperado. Qual expressão usada no enunciado desta questão indica que essas variações de saldo poderiam ocorrer durante os anos da aplicação?

30. Em uma região litorânea, a população de uma espécie de alga tem crescido de modo que a medida de área da superfície coberta por elas aumenta 75% a cada ano em relação à medida de área coberta no ano anterior. Atualmente, a medida de área da superfície coberta pelas algas é de, aproximadamente, 4 000 m^2. Suponha que essa taxa de crescimento seja mantida.



Alexandre Brum/Estadão Conteúdo

Praia de Copacabana, na cidade do Rio de Janeiro, com grande presença de algas vermelhas. Foto de 2021.

a) Qual é a lei da função que representa a medida de área (y), em metros quadrados, que a população de algas ocupará daqui a x anos? $y = 4\,000 \cdot (1 + 0,75)^x = 4\,000 \cdot (1,75)^x$

b) No caderno, faça uma estimativa da medida de área coberta pelas algas daqui a 3, 6 e 9 anos se a população de algas mantiver essa mesma taxa de crescimento. Considere $1,75^3 \simeq 5,4$. 3 anos: 21 600 m^2; 6 anos: 116 640 m^2; 9 anos: 629 856 m^2.

31. Em uma indústria alimentícia, verificou-se que, após t semanas de experiência e treinamento, um funcionário consegue empacotar p unidades de certo produto a cada hora de trabalho. A lei que relaciona p e t é $p(t) = 40 - 24 \cdot e^{-0,2t}$.

a) Quantas unidades desse produto o funcionário sem experiência alguma consegue empacotar a cada hora de trabalho? 16 unidades.

b) Em quantas unidades um funcionário aumentará sua produtividade de empacotamento, por hora, ao passar da 1ª para a 2ª semana de experiência? Use $e^{0,2} \simeq 1,2$. O acréscimo é de 3 unidades.

c) Qual é o limite máximo teórico de unidades que um funcionário pode empacotar por hora? 40 unidades.

32. Os municípios **A** e **B** têm, atualmente, praticamente a mesma quantidade de habitantes, estimada em 100 mil pessoas. Estudos demográficos indicam que o município **A** deve aumentar em 25 000 habitantes a cada ano e o município **B** à taxa de 20% ao ano. Mantidas essas condições, classifique no caderno como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as afirmações a seguir e corrija as falsas.

a) Em 2 anos, a população do município **B** será de 140 mil habitantes. Falsa.

b) Em 3 anos, a população do município **A** será de 180 mil habitantes. Falsa.

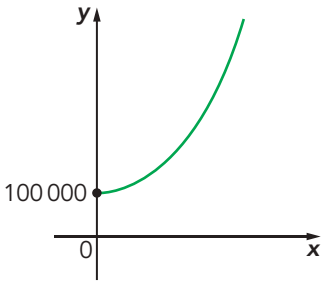
c) Em 4 anos, o município **A** será mais populoso que o município **B**. Falsa.

d) A lei da função que expressa a população (y) do município **A** daqui a x anos é $y = 25\,000x$. Falsa.

e) Um esboço do gráfico que representa a função que expressa a população (y) do município **B** daqui a x anos pode ser como o dado a seguir. Verdadeira.

33. Exemplo de problema: Certo dia, o número de pessoas que visualizaram uma postagem feita por um influenciador digital dobra a cada 3 horas. A quantidade de pessoas que visualizaram a postagem assim que ela foi publicada é de 1 000 pessoas. Qual é o número de visualizações da postagem após 1 dia da publicação?

Banco de imagens/Arquivo da editora

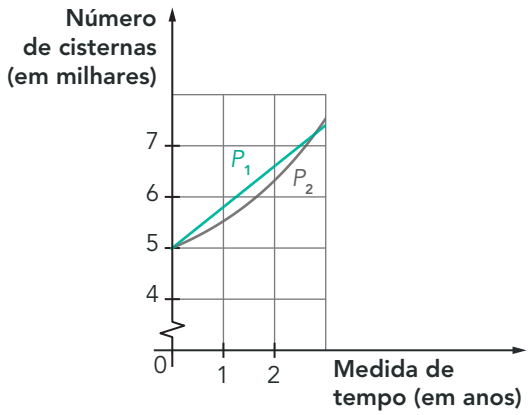


- **Experimente** usar o *software* de Geometria dinâmica para conferir a resposta dos itens **c**, **d** e **e**. O gráfico encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

33. Elabore e resolva no caderno um problema cujo enunciado contenha a frase "dobra de valor a cada 3 horas".

34. Para garantir o fornecimento de água à população, a prefeitura de certo município, que sofre com um problema de seca, elaborou 2 planos de investimentos para aumentar, ao longo de 3 anos, o número de cisternas lá. Um dos planos considera um aumento linear e o outro, um crescimento exponencial da quantidade de cisternas presentes no município, em milhares, em função do tempo, em anos. No gráfico a seguir estão os desenvolvimentos esperados caso sejam aplicados o plano P_1 ou o plano P_2.

Banco de imagens/Arquivo da editora



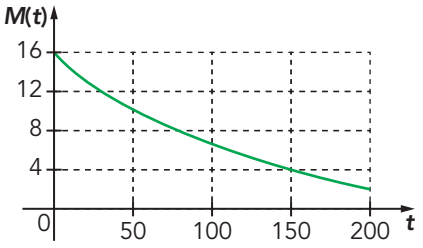
a) Em qual dos planos há um crescimento exponencial da quantidade de cisternas? No plano P_1.

b) Cite uma vantagem na adoção de cada plano em relação ao outro.

c) Qual dos planos você aplicaria? Justifique. Resposta pessoal.

35. **(Unicamp-SP)** Em uma xícara que já contém certa quantidade de açúcar, despeja-se café. A curva a seguir representa a função exponencial $M(t)$, que fornece a quantidade de açúcar não dissolvido (em gramas), t minutos após o café ser despejado. Pelo gráfico, podemos concluir que: Alternativa **a**.

Banco de imagens/Arquivo da editora



a) $M(t) = 2^{4-\frac{t}{75}}$

b) $M(t) = 2^{4-\frac{t}{50}}$

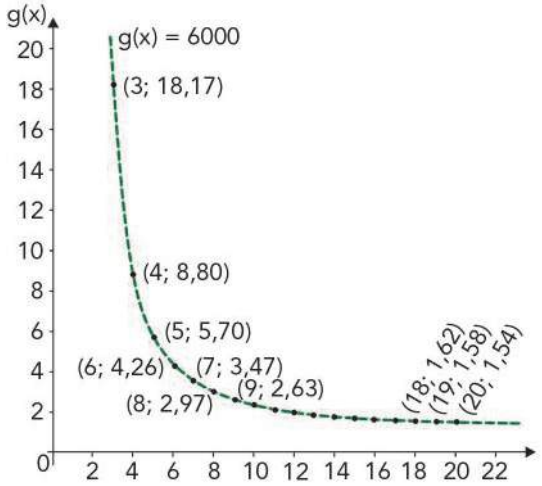
c) $M(t) = 2^{5-\frac{t}{50}}$

d) $M(t) = 2^{5-\frac{t}{150}}$

36. **(Unesp-SP)** Três insetos da mesma espécie foram introduzidos em um ambiente no instante zero. Sete meses depois, constatou-se que havia uma população de 18 000 desses insetos no ambiente. Considere que o modelo de crescimento da população desses insetos é exponencial, dado por $f(x) = t \cdot u^x$, em que t e u são constantes reais e $f(x)$ é a população de insetos após x meses do início da cultura.

Observe o gráfico da função $g(x) = 6000^{\frac{1}{x}}$, em que x é um número inteiro maior do que 2, e que apresenta os valores aproximados das ordenadas de alguns de seus pontos.

Reprodução/Unesp, 2024.



Com os dados fornecidos, segue que $t + u$ é, aproximadamente, Alternativa **c**.

a) 5,09.

b) 10,26.

c) 6,47.

d) 7,62.

e) 7,26.

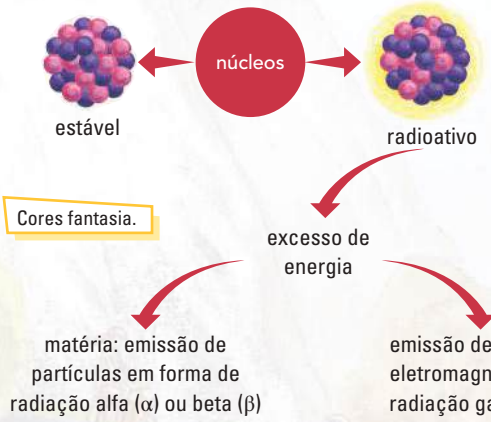
34. b) No plano P_1 a quantidade final de cisternas na cidade é maior, porém, na maior parte do decorrer dos 3 anos de implementação dos planos, o plano P_2 fornece maior quantidade de cisternas.

INTERLIGANDO

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Química, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Decaimento radioativo

O núcleo de um átomo instável tende a se estabilizar emitindo um grupo de partículas (radiação alfa ou beta) ou ondas eletromagnéticas (radiações gama). Em cada emissão do tipo alfa ou beta, há variação do número de prótons e nêutrons no núcleo e, desse modo, um elemento químico se transforma em outro.



[SIC] Comunicação/Arquivo da editora

Cores fantasia.

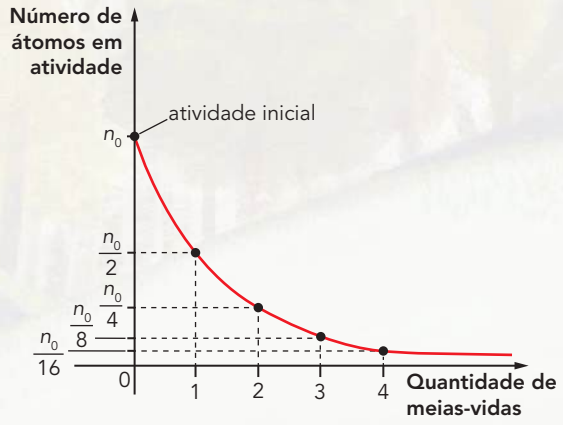
O processo pelo qual se dá a emissão dessas partículas é chamado de **decaimento radioativo**.

As imagens não estão representadas em proporção.

Meia-vida

É a medida de intervalo de tempo necessário para que a atividade radioativa seja reduzida à metade da atividade inicial.

Considerando uma grande quantidade de átomos de um mesmo elemento químico radioativo, espera-se certo número de emissões por unidade de tempo. Essa "taxa de emissões" é a atividade da amostra. Cada elemento radioativo se transmuta (desintegra) a uma taxa que lhe é característica. Após o primeiro período de meia-vida, a atividade da amostra se reduz à metade da atividade inicial; passado o segundo período, a atividade se reduz a $\frac{1}{4}$ da atividade inicial; e assim por diante, como apresentado no gráfico.



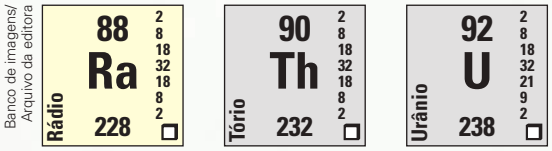
Banco de imagens/Arquivo da editora

A lei que define essa função exponencial é $n(x) = \frac{n_0}{2^x}$, em que x é a quantidade de meias-vidas, n_0, o número de átomos correspondente à atividade inicial e $n(x)$, o número de átomos em atividade após x meias-vidas.

Exemplo de meia-vida

O iodo-131 é um elemento químico radioativo usado na Medicina nuclear, em exames e tratamentos de tireoide. Esse elemento emite partículas beta e radiação gama e tem meia-vida de 8 dias. Isso significa que, em 8 dias, metade dos átomos deixam de emitir elementos radioativos.

Outros exemplos de elemento radioativos:



Banco de imagens/Arquivo da editora



[SIC] Comunicação/Arquivo da editora

Símbolo internacional de alerta para radioatividade.

[SIC] Comunicação/Arquivo da editora

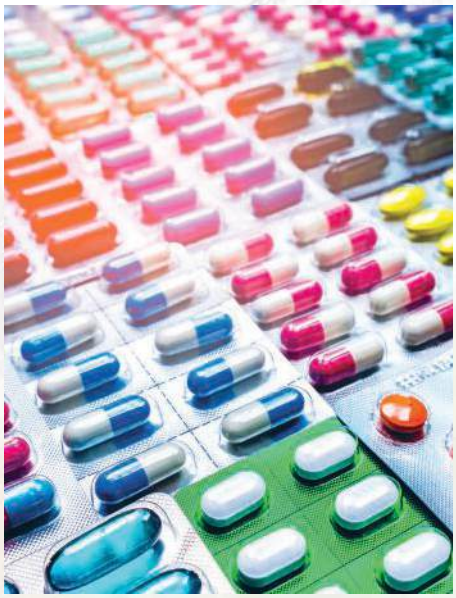
Não escreva no livro

Os medicamentos e a Matemática

Os antibióticos são utilizados no tratamento de infecções causadas por bactérias. A má utilização desse tipo de medicamento leva ao surgimento de bactérias cada vez mais resistentes (superbactérias), tornando alguns antibióticos ineficazes.

A Amoxicilina é um conhecido antibiótico usado no tratamento de diversas infecções não complicadas e receitado por médicos no Brasil. A bula da Amoxicilina, como a de todos os medicamentos, contém, entre outros tópicos, a composição, as informações ao paciente, as informações técnicas e a posologia. Nas informações técnicas, é possível ler que a meia-vida da Amoxicilina, após a administração do produto, é de 1,3 hora. E o que essa informação significa? A cada período de 1,3 hora, ou 1 hora e 18 minutos (para facilitar, vamos considerar 1 hora e 20 minutos), a quantidade de Amoxicilina no organismo decresce em 50% do valor que havia no início do período.

Professor, se desejar, apresente aos estudantes um artigo veiculado pela Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa) sobre "Superbactérias: de onde vêm, como vivem e se reproduzem". Disponível em: https://tedit.net/yilk12. Acesso em: 14 set. 2024.



Fahroni/Shutterstock

A fim de inibir a automedicação e o uso indiscriminado, a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa) publicou uma resolução que determina que as farmácias devem comercializar antibióticos mediante a retenção da 2ª via da receita médica, devendo a 1ª via ser devolvida ao paciente. Ainda assim, é importante utilizar antibióticos apenas nos casos realmente necessários, seguindo as orientações médicas e respeitando a posologia e a duração do tratamento.

Fonte dos dados: CARVALHO, Regina P. de; OLIVEIRA, Silvia M. V. de. *Aplicações da energia nuclear na saúde*. São Paulo: SBPC; Viena: Iaea, 2017. Disponível em: https://tedit.net/0t72i4. CARDOSO, Eliezer de M. *Aplicações da energia nuclear*. Rio de Janeiro: Cnen, [2020?]. Disponível em: https://tedit.net/j08t0q. BRASIL. Ministério da Saúde. *Resolução – RDC nº 471*. Brasília, DF: Anvisa, 23 fev. 2021. Disponível em: https://tedit.net/m3rb6x. Acesso em: 15 ago. 2024.

- Considere que um adulto tenha ingerido uma cápsula com 500 mg de Amoxicilina e faça o que se pede, no caderno. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Copie a tabela e complete as informações que faltam.

Dados da Amoxicilina

Número de meias-vidas	0	1	2	3	4	5	6
Quantidade de Amoxicilina no organismo (em mg)	500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Construa o gráfico da função que relaciona a quantidade de Amoxicilina no organismo (em miligramas) à medida de intervalo de tempo (em horas) transcorrido após a ingestão.

c) Qual é a lei da função que relaciona a quantidade (q) de Amoxicilina no organismo ao número (n) de meias-vidas?

d) Considerando a quantidade de Amoxicilina ingerida em uma cápsula de 500 mg, qual é a porcentagem desse fármaco no organismo após 8 horas da ingestão?

e) Qual é o domínio e a imagem da função obtida no item **c**? Ela é crescente ou decrescente?

37. a) $3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$; $S = \{4\}$
b) $2^x = 2^8 \Rightarrow x = 8$; $S = \{8\}$
c) $7^x = 7^1 \Rightarrow x = 1$; $S = \{1\}$
d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow x = 5$; $S = \{5\}$
e) $5^{x+2} = 5^3 \Rightarrow x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$; $S = \{1\}$
f) $10^{3x} = 10^5 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$; $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$
g) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \Rightarrow x = 4$; $S = \{4\}$
h) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \Rightarrow 2^{-x} = 2^1 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$; $S = \{-1\}$
i) $(0,1)^x = (0,1)^2 \Rightarrow x = 2$; $S = \{2\}$

Equação exponencial

Vamos agora tratar de equações exponenciais.

Uma **equação exponencial** é aquela que apresenta a incógnita no expoente em pelo menos uma das potências.

São exponenciais, por exemplo, as equações $4^x = 8$, $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$ e $9^x - 3^x = 72$.

Um método usado para resolver equações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da equação à potência de mesma base a (com $a > 0$ e $a \neq 1$) e então aplicar a propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Quando isso é possível, a equação exponencial pode ser resolvida sem qualquer outro tipo de informação.

Atividades resolvidas

4. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^x = 64$

c) $(0,5)^{-2x-1} \cdot 4^{3x+1} = 8^{x-1}$

Solução:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81 \Rightarrow \left(3^{-1}\right)^x = 3^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{-x} = 3^4 \Rightarrow x = -4$; $S = \{-4\}$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^x = 64 \Rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = 6 \Rightarrow x = 12$; $S = \{12\}$

c) $0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

$\left(2^{-1}\right)^{-2x-1} \cdot \left(2^2\right)^{3x+1} = \left(2^3\right)^{x-1}$

É preciso usar propriedades das potências.

$2^{2x+1} \cdot 2^{6x+2} = 2^{3x-3} \Rightarrow 2^{(2x+1)+(6x+2)} = 2^{3x-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{8x+3} = 2^{3x-3} \Rightarrow 8x + 3 = 3x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{6}{5}$; $S = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$

5. Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação exponencial:

$$3^{x+1} - 3^x - 3^{x-1} = 45$$

Solução:

Vamos usar as propriedades das potências.

Podemos fazer: $3^x \cdot 3^1 - 3^x - \frac{3^x}{3} = 45$.

Colocando 3^x em evidência, temos:

$$3^x \cdot \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^x \cdot \frac{5}{3} = 45 \Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3; S = \{3\}$$

6. Resolva a equação $4^x - 2^x = 12$ em $\mathbb{R}$.

Solução:

Note, inicialmente, que $4^x = \left(2^2\right)^x = \left(2^x\right)^2$.

Assim, chamando 2^x de y, temos:

$y^2 - y = 12 \Rightarrow y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4$ ou $y = -3$

Como $y = 2^x$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ 2^x = -3 \Rightarrow \text{não existe } x \in \mathbb{R} \end{array}\right\}; S = \{2\}$$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

37. Resolva no caderno, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais.

a) $3^x = 81$

b) $2^x = 256$

c) $7^x = 7$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{32}\right)$

e) $5^{x+2} = 125$

f) $10^{3x} = 100\,000$

g) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{625}\right)$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$

i) $(0,1)^x = 0,01$

j) $3^x = -3$

k) $(0,4)^x = 0$

j) $\forall x \in \mathbb{R}$, $3^x > 0$; assim, a equação $3^x = -3$ não tem solução real; $S = \varnothing$
k) $S = \varnothing$ (análogo ao item **j**).

40. b) $v(1) = 250\,000 \cdot (1{,}05)^1 = 262\,500$; ou seja, R$ 262.500,00.
Valorização: $262\,500 - 250\,000 = 12\,500$; ou seja, R$ 12.500,00.
c) $v(6) = 250\,000 \cdot (1{,}05)^6 = 250\,000 \cdot (1{,}05)^3 \cdot (1{,}05)^3 = 250\,000 \cdot (1{,}15)^2 = 330\,625$; ou seja, R$ 330.625,00.

38. Resolva no caderno, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais.

a) $8^x = 16$ $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

b) $27^x = 9$ $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

c) $4^x = 32$ $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

d) $25^x = 625$ $S = \{2\}$

e) $9^{x+1} = \sqrt[3]{3}$ $S = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$

f) $4^x = \frac{1}{2}$ $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

g) $(0{,}2)^{x+1} = \sqrt{125}$ $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

h) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{8}$ $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

39. Devido a um processo de seca, estima-se que o nível de água de um reservatório, em metros, daqui a t meses, seja dado por $n(t) = 7{,}6 \cdot 4^{-0{,}2t}$. Qual é a medida de intervalo de tempo necessário para que o nível de água se reduza à oitava parte do nível atual? 7,5 meses.

40. Analistas do mercado imobiliário de um município estimam que o valor (v), em reais, de um apartamento nesse lugar seja dado pela lei $v(t) = 250\,000 \cdot (1{,}05)^t$, em que t é a quantidade de anos ($t = 0, 1, 2, \cdots$) contados a partir da data de entrega do imóvel.

a) Qual será o valor do apartamento na data de entrega? $v(0) = 250\,000 \cdot (1{,}05)^0 = 250\,000$; ou seja, 250 000 reais.

b) Qual deve ser a valorização, em reais, desse apartamento 1 ano após a entrega, de acordo com esses analistas?

c) Qual será o valor estimado do imóvel 6 anos após a entrega? Use $(1{,}05)^3 \simeq 1{,}15$.

d) De acordo com o modelo dado, depois de quantos anos da data da entrega o apartamento deverá valer 1,525 milhão de reais? Use as aproximações da tabela a seguir.

t	35	36	37	38	40
$(1{,}05)^t$	5,5	5,8	6,1	6,4	7,0

41. Resolva no caderno, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais.

a) $(11)^{2x^2 - 5x + 2} = 1$ $S = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$

b) $(0{,}8)^x = \frac{5}{4}$ $S = \{-1\}$

c) $(0{,}25)^{x-4} = (0{,}5)^{-2x+1}$ $S = \left\{\frac{9}{4}\right\}$

d) $\left(\sqrt[3]{25}\right)^x = \left(\frac{1}{25}\right)^{-x+3}$ $S = \left\{\frac{9}{2}\right\}$

42. Resolva no caderno, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir.

a) $2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x-1} = 20$ $S = \{3\}$

b) $25^x - 23 \cdot 5^x = 50$ $S = \{2\}$

40. d) Devemos determinar t tal que $v(t) = 1\,525\,000$.
$1\,525\,000 = 250\,000 \cdot (1{,}05)^t \Rightarrow (1{,}05)^t = 6{,}1$
Pela tabela, $t = 37$, ou seja, 37 anos.

43. A lei que permite estimar a depreciação do valor de certo equipamento industrial é $v(t) = 8\,000 \cdot 4^{-0{,}025t}$, em que $v(t)$ é o valor, em reais, do equipamento t meses após a aquisição.

a) Por qual valor esse equipamento foi adquirido? $v(0) = 8\,000 \cdot 4^0 = 8\,000$; ou seja, R$ 8.000,00.

b) Em quanto tempo ele passará a valer 12,5% do valor da aquisição? 60 meses.

44. A lei que representa uma estimativa do número de pessoas que serão infectadas por uma virose em uma grande região metropolitana, no período de 8 dias, é $N(t) = a \cdot 2^{bt}$, em que $N(t)$ é o número de infectados t dias após a divulgação dessa previsão e a e b são constantes reais positivas. Considerando que, no dia em que foi anunciada tal previsão, 3 000 pessoas já haviam sido diagnosticadas com a virose e que 2 dias depois o número já havia aumentado para 24 000 pessoas, determine no caderno:

a) os valores de a e b; $a = 3\,000$; $b = 1{,}5$

b) o número de infectados pela virose 16 horas após a divulgação da previsão; 6 000 pessoas.

c) o número de infectados pela virose 4 dias após a divulgação da previsão; 192 000 pessoas.

d) o menor número inteiro de dias transcorridos até que a quantidade de infectados pela virose ultrapasse 3 milhões de pessoas. Use $10^3 \simeq 2^{10}$. Aproximadamente 7 dias.

45. A lei $n(t) = 15\,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t+k}$ é um modelo criado por um cientista de dados para estimar a população que certo município terá daqui a t anos. Nessa lei, k é uma constante real e $n(t)$ representa o número de habitantes. Sabendo que a população atual do município é de 10 000 habitantes, determine no caderno:

a) o valor de k; $k = -1$

b) a população do município daqui a 3 anos. 33 750 habitantes.

46. Uma reserva florestal tem atualmente 400 000 árvores. Estima-se que, devido ao desmatamento, a quantidade de árvores será reduzida à metade a cada 3 anos.

a) Qual é a lei da função que relaciona a quantidade de árvores (q) que a reserva terá daqui a t anos? $q(t) = 400\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$

b) Daqui a quantos anos a quantidade de árvores estará reduzida a $\frac{1}{512}$ da quantidade atual? 27 anos.

PROJETO

Não escreva no livro

Reprodução/ ONU

Esta seção favorece o desenvolvimento da competência geral **4** da BNCC.

Utilização de energia sustentável em propriedades rurais

Leia a reportagem a seguir.

2024: O ano da energia solar no Brasil

A geração de energia solar está entre os segmentos que tiveram um crescimento exponencial, pode-se dizer, nos últimos cinco anos. [...] De acordo com a Associação Brasileira de Energia Solar Fotovoltaica (Absolar) em 2023 a fonte solar representou 36 GW de geração de energia, significando cerca de 16% da matriz elétrica, com expectativa de 45,5 GW para 2024. [...]

Estamos falando [...] de uma fonte renovável que ainda gera muita economia para o bolso e [...] contribui pela questão de sustentabilidade. De acordo com a Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel), o Brasil conta com 89,9 milhões de unidades consumidoras de energia elétrica, sendo apenas 3,2 milhões beneficiadas pela geração solar distribuída.

[...]

HELTE, Junior. 2024: O ano da energia solar no Brasil. *Associação Brasileira de Energia Solar Fotovoltaica*, 15 mar. 2024. Disponível em: https://tedit.net/78zvj4. Acesso em: 15 ago. 2024.

Agora, leia esta outra reportagem.

A importância das energias renováveis em propriedades rurais

A geração de energias renováveis pode ser uma aliada importante para garantir a estabilidade de propriedades rurais, baixar os custos e proteger o meio ambiente. [...]

– No interior do Brasil, o fornecimento de energia não é tão estável quanto nas grandes metrópoles. Um temporal pode ser responsável por fazer com que o produtor perca toda a sua produção, como acontece com quem produz leite e frangos – explica o Coordenador do Programa de Energia Sustentável do SEBRAE RS, Luis Guilherme Menezes.

[...]

Professor, promova uma conversa com os estudantes sobre as possibilidades de energia renováveis e seu uso em propriedades rurais. Na conversa, debatam a pertinência e adequação de cada possibilidade a diferentes regiões.

MENEZES, Luis Guilherme. Campo sustentável. A importância das energias renováveis em propriedades rurais. *Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas (SEBRAE)*, 10 jan. 2017. Disponível em: https://tedit.net/4567v5. Acesso em: 8 jun. 2024.

Thomaz Vita Neto/Pulsar Imagens



Painéis solares em propriedade rural.

Pensando em um projeto

Que tal criar um infográfico para apresentar informações sobre energia sustentável em propriedades rurais? Para isso, será preciso levar em conta as reportagens apresentadas, buscar dados recentes e refletir sobre o crescimento da demanda por energia ao longo do tempo.

Para começar

- Organizem-se em 6 grupos.

Plano de ação

Etapa 1

Em grupo, pesquisem em fontes confiáveis reportagens ou artigos sobre o uso de energia sustentável em propriedades rurais. Depois, façam um resumo das informações e dos dados que encontrarem, de modo que possam ser utilizados na organização textual do infográfico. Pontos a serem considerados:

- tipos e características de sistemas de energias renováveis viáveis para propriedades rurais;
- selo verde de eficiência e selo solar;
- vantagens de um sistema de energia renovável;
- oportunidade para proteção do meio ambiente.

Etapa 2

Pesquisem por dados recentes que informem a quantidade de instalações de sistemas de painéis fotovoltaicos em propriedades rurais e a evolução da geração de energia (potência) por fonte solar fotovoltaica no Brasil e em áreas rurais.

Etapa 3

Depois de realizarem as pesquisas nas etapas **1** e **2**, envolvendo os benefícios de energias renováveis e a quantidade de energia gerada por fonte solar em áreas rurais, agora vocês deverão buscar informações a respeito dos gastos e do retorno financeiro da energia elétrica gerada por painéis foltovoltaicos.

Consultem, em fontes confiáveis, o preço da instalação de painéis solares em propriedades rurais para geração de energia elétrica voltada à produção agrícola.

Pesquisem também em quanto tempo um produtor rural que investiu dinheiro na utilização de energia elétrica produzida por painéis solares recuperaria o dinheiro investido, por não precisar pagar por todo o consumo de energia elétrica a uma empresa de distribuição.

Etapa 4

A partir das pesquisas realizadas por vocês, criem um infográfico sobre o uso de energia sustentável, dando ênfase principalmente à evolução da utilização da energia solar fotovoltaica, ao preço dela e como ela pode ser aproveitada em propriedades rurais.

Etapa 5

Com o professor, definam local, datas e horários para a socialização dos infográficos com a turma e a organização de uma plenária para debaterem os resultados encontrados e organizados por cada grupo.

Produto final: divulgação dos infográficos na turma.

Os grupos devem se preparar para a plenária com a turma para socializarem a organização dos resultados;

Analisem a possibilidade da divulgação posterior dos infográficos para a comunidade escolar.



Dario Huck/Shutterstock

Professor, a realização deste projeto contribui para o ODS **7**, pois oportuniza a reflexão sobre o consumo eficiente de energia renovável nas propriedades rurais, tema relevante envolvendo o uso de energia limpa, e incentiva a conscientização dos estudantes sobre outras possibilidades de geração de energia.

capítulo 2

Função logarítmica

Introdução

Vamos analisar algumas situações.

Situação 1

Você sabia que uma pessoa com audição plena é capaz de ouvir uma grande variedade de sons, de medidas de intensidade bem diversas? Existe um valor mínimo de medida de intensidade de som, abaixo do qual não se ouve nada: é o limiar de audibilidade, cujo valor é igual a 10^{-12} W/m^2, em que W representa a unidade de medida de potência watt. Há também um valor de medida de intensidade a partir do qual podem ocorrer danos fisiológicos, chamado **limiar de dor**: 1 W/m^2.

Manipular e comparar valores nessa faixa numérica, de 10^{-12} (isto é, 0,000000000001) até 1,0 (além da faixa de sons cujas medidas de intensidade superam o limiar de dor), não é tarefa fácil nem prática. A saída encontrada pela ciência é a utilização de uma **escala logarítmica**, cuja estrutura e cujas vantagens vamos conhecer neste capítulo.

Fonte dos dados: IAZZETTA, Fernando. Limites de audibilidade. *Tutoriais de áudio e acústica*, 26 jun. 2007. Disponível em: https://tedit.net/lq8we6. Acesso em: 16 ago. 2024.

Situação 2

Suponha que um caminhão zero-quilômetro custe R$ 600.000,00 e sofra uma desvalorização de 10% por ano de uso. Depois de quanto tempo de uso o valor do veículo será igual a R$ 300.000,00?

A cada ano que passa, o valor do caminhão reduz-se a 90% do que era 1 ano antes. Então, o valor evolui da seguinte maneira.

- Após 1 ano de uso: 90% de 600 000 reais, ou seja, 540 000 reais.
- Após 2 anos de uso: 90% de 540 000 reais, ou seja, 486 000 reais.

O valor do veículo em reais evolui, ano a ano, de acordo com a sequência:

600 000; $(0{,}9) \cdot 600\,000$; $(0{,}9)^2 \cdot 600\,000$; $(0{,}9)^3 \cdot 600\,000$; ...; $(0{,}9)^x \cdot 600\,000$, em que x indica o número de anos de uso.

Para responder à pergunta feita inicialmente, devemos resolver a equação $(0{,}9)^x \cdot 600\,000 = 300\,000$, ou seja, $(0{,}9)^x = 0{,}5$, que é uma equação exponencial.

No entanto, não é possível reduzir as potências a uma mesma base. Então, para resolver essa equação, usamos logaritmos.

Com esses exemplos apresentados, percebemos a importância de estudar a **função logarítmica** e os **logaritmos**.

Luciana Whitaker/Pulsar Imagem



No Brasil, o transporte rodoviário é um dos principais meios de distribuição de cargas.

Logaritmos

Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se **logaritmo de b na base a** o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Observação

As restrições para a ($a > 0$ e $a \neq 1$) e para b ($b > 0$) indicadas na definição garantem a existência e a unicidade de $\log_a b$.

Dizemos que:

- a é a **base** do logaritmo;
- b é o **logaritmando**;
- x é o **logaritmo**.

Analise alguns exemplos de logaritmo.

- $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$.
- $\log_4 1 = 0$, pois $4^0 = 1$.
- $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, pois $2^{-2} = \frac{1}{4}$.
- $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$.
- $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$.
- $\log_{0,5} 0{,}25 = 2$, pois $(0{,}5)^2 = 0{,}25$.

Nesses exemplos, o cálculo do logaritmo poderia até ser feito mentalmente. Há casos, porém, em que isso é mais complexo, como mostra o exemplo a seguir.

Vamos realizar os cálculos utilizando a definição de logaritmo.

- $\log_{\sqrt[3]{9}} 3$

Vamos fazer $\log_{\sqrt[3]{9}} 3 = x$. Assim, temos:

$$\left(\sqrt[3]{9}\right)^x = 3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{3^2}\right)^x = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{3^{2x}} = 3 \Rightarrow 3^{\frac{2x}{3}} = 3^1 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

- $\log_{16} 0{,}25$

Vamos fazer $\log_{16} 0{,}25 = y$. Assim, temos:

$$16^y = 0{,}25 \Rightarrow \left(2^4\right)^y = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{4y} = 2^{-2} \Rightarrow 4y = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Atividades resolvidas

1. Qual é o número real x em $\log_x 4 = -2$?

Solução:

O número x deve ser tal que $x > 0$ e $x \neq 1$.

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$x^{-2} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \xRightarrow{x > 0} x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Convencionou-se que, ao escrever o logaritmo de um número na base 10, omitimos a base, isto é:

$$\log_{10} x = \log x$$

Assim, por exemplo:

- $\log 10\,000 = 4$ (pois $10^4 = 10\,000$);
- $\log \frac{1}{1000} = -3$ $\left(\text{pois } 10^{-3} = \frac{1}{1000}\right)$.

Os logaritmos de base 10 são conhecidos como **logaritmos decimais**.

Não escreva no livro

Pense nisto

- O que aconteceria se a base do logaritmo fosse igual a 1 e o logaritmando fosse diferente de 1? Confira tentando calcular $\log_1 5$ ou $\log_1 4$.
- O que aconteceria se o logaritmando fosse um número negativo? Confira tentando calcular $\log_2 (-4)$.
- E se a base e o logaritmando fossem iguais a 1? Que problemas teríamos ao calcular $\log_1 1$?

- Não existiria logaritmo. Como $1^x = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $1^x = 5$ ou $1^x = 4$.
- Não existiria logaritmo. Como $2^x > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, não se pode calcular $\log_2 (-4)$, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $2^x = -4$.
- $\log_1 1$ seria indeterminado, pois qualquer expoente serviria ($1^x = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$).

Consequências

Sejam a, b e c números reais com $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$. Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades.

- O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1.$$

- O logaritmo de a na base a é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a.$$

- A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b.$$

Para justificar essa propriedade, podemos fazer $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$. Daí, $a^{\log_a b} = a^c = b$.

Outro modo de justificá-la é reconhecer que o logaritmo de b na base a é o expoente que se deve dar à base a para que a potência obtida seja igual a b. Assim, por exemplo, temos:

$$2^{\log_2 3} = 3;\ 5^{\log_5 4} = 4; \text{ etc.}$$

- Se 2 logaritmos na mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais. Reciprocamente, se 2 números reais positivos são iguais, os logaritmos deles na mesma base também são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Para justificar a primeira afirmação, temos: $\log_a b = \log_a c \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} a^{\log_a c} = b$.
E, pela propriedade anterior, segue que $c = b$.

Para justificar a recíproca, temos que $b = c$ e queremos mostrar que $\log_a b = \log_a c$.

Sejam $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, então temos $a^x = b$ e $a^y = c$. Como $b = c$, segue que $a^x = a^y \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y$, ou seja, $\log_a b = \log_a c$.

Vamos verificar uma aplicação dessas propriedades.

- Qual é o número real x tal que $\log_5 (2x + 1) = \log_5 (x + 3)$?
Inicialmente, é importante lembrar que esses logaritmos estão definidos se $2x + 1 > 0$ e $x + 3 > 0$, ou seja, $x > -\frac{1}{2}$ e $x > -3$. Como x precisa ser maior do que $-\frac{1}{2}$ e, também, maior do que -3, podemos apenas dizer que $x > -\frac{1}{2}$ (*). De $\log_5 (2x + 1) = \log_5 (x + 3)$, segue que:
$2x + 1 = x + 3 \Rightarrow x = 2$ (Esse valor satisfaz (*)).

Atividades resolvidas

2. Qual é o valor de $9^{\log_3 5}$?

Solução:

Como $9 = 3^2$, podemos escrever $\left(3^2\right)^{\log_3 5}$ e, trocando a posição dos expoentes, temos $\left(3^{\log_3 5}\right)^2 =$ $= 5^2 = 25$.

2. c) $\frac{4}{3}$, pois $8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{(2^3)^4} = \sqrt[3]{(2^4)^3} = 2^4 = 16$. **d)** $\frac{7}{2}$, pois $4^{\frac{7}{2}} = \sqrt{4^7} = \sqrt{(2^2)^7} = \sqrt{(2^7)^2} = 2^7 = 128$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

2. e) $\frac{1}{4}$, pois $36^{\frac{1}{4}} = (6^2)^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{2}{4}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$.

1. Usando a definição, calcule o valor dos seguintes logaritmos. Procure fazer isso mentalmente.

a) $\log_2 16$ 4, pois $2^4 = 16$.
b) $\log_4 16$ 2, pois $4^2 = 16$.
c) $\log_3 81$ 4, pois $3^4 = 81$.
d) $\log_5 125$ 3, pois $5^3 = 125$.
e) $\log 100\,000$ 5, pois $10^5 = 100\,000$.
f) $\log_8 64$ 2, pois $8^2 = 64$.
g) $\log_2 32$ 5, pois $2^5 = 32$.
h) $\log_6 216$ 3, pois $6^3 = 216$.

2. Use a definição para calcular no caderno o valor de cada logaritmo.

a) $\log_2 \frac{1}{4}$ -2, pois $2^{-2} = \frac{1}{4}$.
b) $\log_3 \sqrt{3}$ $\frac{1}{2}$, pois $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.
c) $\log_8 16$
d) $\log_4 128$
e) $\log_{36} \sqrt{6}$
f) $\log 0{,}01$
g) $\log_9 \frac{1}{27}$
h) $\log_{0,2} \sqrt[3]{25}$
i) $\log_{1,25} 0{,}64$
j) $\log_{\frac{5}{3}} 0{,}6$

3. Calcule no caderno o que se pede.

a) O logaritmo de 4 na base $\frac{1}{8}$. $-\frac{2}{3}$
b) O logaritmo de $\sqrt{3}$ na base 27. $\frac{1}{6}$
c) O logaritmo de 0,125 na base 16. $-\frac{3}{4}$
d) O logaritmo de 7 na base $\sqrt[5]{7}$. 5
e) O número cujo logaritmo na base 3 vale -2. $\frac{1}{9}$
f) A base na qual o logaritmo de $\frac{1}{4}$ vale -1. 4

4. Calcule no caderno o valor de cada uma das expressões a seguir.

a) $\log_5 5 + \log_3 1 - \log 10$ $1 + 0 - 1 = 0$
b) $\log_{\frac{1}{4}} 4 + \log_4 \frac{1}{4}$ $-1 + (-1) = -2$
c) $\log 1000 + \log 100 + \log 10 + \log 1$ $3 + 2 + 1 + 0 = 6$
d) $3^{\log_3 2} + 2^{\log_2 3}$ $2 + 3 = 5$
e) $\log_8 (\log_3 9)$ $\log_8 (\log_3 9) = \log_8 2 = \frac{1}{3}$
f) $\log_9 (\log_4 64) + \log_4 (\log_3 81)$ $\log_9 3 + \log_4 4 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

5. Sabendo que $\log a = 2$ e $\log b = -1$, calcule no caderno o valor de:

a) $\log_b a$ -2
b) $\log_a b$ $-\frac{1}{2}$
c) $\log_a b^2$ -1
d) $\log (a \cdot b)$ 1
e) $\log \left(\frac{a}{b}\right)$ 3
f) $\log_{\sqrt{b}} a$ -4

6. Obtenha no caderno, em cada caso, o número real x.

a) $\log_5 x = \log_5 16$ 16
b) $\log_x (2x - 3) = \log_x (-4x + 8)$ $\frac{11}{6}$

7. Determine no caderno o número real x de modo que seja satisfeita cada igualdade.

a) $\log_3 x = 4$ 81
b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$ 4
c) $\log_3 (4x - 1) = \log_3 x$ $\frac{1}{3}$
d) $\log x^2 = \log x$ 1
e) $\log_x 1 = 0$ $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$ e $x \neq 1$.
f) $\log_3 (2x - 1) = 2$ 5

8. Para cada valor de x, calcule no caderno o valor de $\log_5 x$.

a) $x = \frac{1}{25}$ $\log_5 \frac{1}{25} = -2$
b) $x = \sqrt[7]{25}$ $\log_5 \sqrt[7]{25} = \log_5 \sqrt[7]{5^2} = \log_5 5^{\frac{2}{7}} = \frac{2}{7}$
c) $x = 5^{12}$ $\log_5 5^{12} = 12$
d) $x = \frac{1}{\sqrt[9]{625}}$ $\log_5 625^{-\frac{1}{9}} = \log_5 (5^4)^{-\frac{1}{9}} = \log_5 5^{-\frac{4}{9}} = -\frac{4}{9}$
e) $x = 0{,}2$ $\log_5 0{,}2 = \log_5 \frac{1}{5} = -1$

9. Disponha no caderno os números reais A, B, C e D em ordem crescente.

$A = \log_{15} 15^{41}$
$B = \log_{17} 17^{40}$
$C = \log_{17^2} 17^{80}$
$D = \log_{15^3} 15^{132}$

$A = \log_{15} 15^{41} = 41$
$B = \log_{17} 17^{40} = 40$
$C = \log_{17^2} 17^{80} \Rightarrow (17^2)^C = 17^{80} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2C = 80 \Rightarrow C = 40$
$D = \log_{15^3} 15^{132} \Rightarrow (15^3)^D = 15^{132} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3D = 132 \Rightarrow D = 44$
Logo, $B = C < A < D$.

10. Determine no caderno m, com $m \in \mathbb{R}$, a fim de que a equação $x^2 + 4x + \log_2 m = 0$, na incógnita x, admita uma raiz real dupla. Qual é essa raiz? $m = 16$, e a raiz é -2.

11. Calcule no caderno o valor de cada expressão.

a) $4^{3 + \log_4 2}$ 128
b) $5^{1 - \log_5 4}$ $\frac{5}{4}$
c) $8^{\log_2 7}$ 343
d) $81^{\log_3 2}$ 16
e) $5^{\log_{25} 7}$ $\sqrt{7}$

12. Sejam a e b números reais positivos tais que $\log_{\sqrt{11}} a = 2018$ e $\log_{\sqrt[3]{11}} b = 3018$. Qual é o valor de $\frac{a}{b}$? 1 331

2. f) -2, pois $10^{-2} = 0{,}01$.
g) $-\frac{3}{2}$, pois $9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9^3}} = \frac{1}{\sqrt{(3^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(3^3)^2}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.
h) $-\frac{2}{3}$, pois $(0{,}2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(0{,}2)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{1}{0{,}2}\right)^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$.
2. i) -2, pois $(1{,}25)^{-2} = \left(\frac{1}{1{,}25}\right)^2 = (0{,}8)^2 = 0{,}64$.
j) -1, pois $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Sistemas de logaritmos

O conjunto formado por todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base a ($a > 0$ e $a \neq 1$) é chamado **sistema de logaritmos de base *a***. Por exemplo, o conjunto formado por todos os logaritmos de base 2 dos números reais positivos é o sistema de logaritmos de base 2.

Existem 2 sistemas de logaritmos que são os mais usados em Matemática.

- O **sistema de logaritmos decimais**, de base 10, desenvolvido pelo matemático inglês Henry Briggs de acordo com os trabalhos do matemático, físico e astrônomo escocês John Napier.

  Briggs também publicou a primeira tábua dos logaritmos de 1 a 1000, em 1617.

  Como já apresentado, representamos por $\log_{10} x$, ou simplesmente $\log x$, o logaritmo decimal de x.



Reprodução/Biblioteca da Universidade de Edimburgo, Escócia.

John Napier (1550-1617). Merchiston, Escola Escocesa (século XVII). Óleo sobre tela.

- O **sistema de logaritmos neperianos**, de base e. O termo **neperiano** deriva de Napier. Os trabalhos dele envolviam, de modo não explícito, o que hoje conhecemos como número irracional e ($e = 2{,}71828\ldots$). Com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, um século depois reconheceu-se a importância desse número.

  Representamos o logaritmo neperiano de x com $\log_e x$ ou apenas $\ell n\, x$. Assim, por exemplo, $\ell n\, 3 = \log_e 3$; $\ell n\, e^4 = \log_e e^4 = 4$; etc.

  É comum nos referirmos ao logaritmo neperiano de x como o **logaritmo natural de *x*** ($x > 0$).

As calculadoras científicas têm as teclas log e ln, que fornecem, respectivamente, os valores dos logaritmos decimais e neperianos de um número real positivo.

Para saber o valor de log 2 e de ℓn 2, pressionamos:



Obtemos os respectivos valores aproximados:



Para saber o valor de log 15 e de ℓn 15, basta pressionar:



Obtemos os respectivos valores aproximados:



Dependendo do modelo da calculadora, a ordem em que pressionamos as teclas pode variar, ou seja, em algumas calculadoras digitamos o número antes de pressionar a tecla do logaritmo.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

ATIVIDADES

Não escreva no livro

13. Calcule no caderno, sem o uso da calculadora, o valor de:

a) $\ln e$ $\ln e = \log_e e = 1$

b) $\ln 1$ $\ln 1 = \log_e 1 = 0$

c) $\log 0{,}1$
$\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1$

d) $\log 10^8$ 8

e) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$
$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \log_e\left(\frac{1}{e}\right) = -1$

f) $e^{\ln 3}$
$e^{\ln 3} = e^{\log_e 3} = 3$

g) $10^{\log 8}$
$10^{\log 8} = 10^{\log_{10} 8} = 8$

h) $\log 10^{-3} + \log 10^{-2} + \log 10^{-1} + \log 1$
$(-3) + (-2) + (-1) + 0 = -6$

i) $e^{2\ln 5}$
$(e^2)^{\ln 5} = (e^{\ln 5})^2 = 5^2 = 25$

j) $e^{2 + \ln 2}$
$e^2 \cdot e^{\ln 2} = e^2 \cdot 2 = 2e^2$

Propriedades dos logaritmos

Agora vamos estudar 3 propriedades operatórias envolvendo logaritmos.

Logaritmo do produto

Em qualquer base, o logaritmo do produto de 2 números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos deles; isto é, se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b \cdot c) = z$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a (b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Logo, $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Exemplo:

- $\log_3 (27 \cdot 9) = \log_3 243 = 5$
  Aplicando a propriedade do logaritmo do produto, temos:
  $$\log_3 27 + \log_3 9 = 3 + 2 = 5$$

Acompanhe mais alguns exemplos.

- $\log_2 6 = \log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$
- $\log_{0,4} 30 = \log_{0,4} (2 \cdot 15) = \log_{0,4} 2 + \log_{0,4} 15 = \log_{0,4} 2 + \log_{0,4} (5 \cdot 3) = \log_{0,4} 2 + \log_{0,4} 5 + \log_{0,4} 3$
- $\ln 30 = \ln (2 \cdot 3 \cdot 5) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 5$

Logaritmo do quociente

Em qualquer base, o logaritmo do quociente de 2 números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do numerador e o logaritmo do denominador; isto é, se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

Logo, $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

Exemplo:

- $\log_2 \left(\frac{32}{4}\right) = \log_2 8 = 3$

Aplicando a propriedade do logaritmo do quociente, temos:

$$\log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$$

Acompanhe mais alguns exemplos.

- $\log_3 \left(\frac{7}{2}\right) = \log_3 7 - \log_3 2$
- $\ell n \left(\frac{5}{3}\right) = \ell n\, 5 - \ell n\, 3$
- $\log \left(\frac{3}{100}\right) = \log 3 - \log 100 = \log 3 - 2$

Logaritmo da potência

Em qualquer base, o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, isto é, se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, então:

$$\log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

Demonstração

Fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^r = y$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a b^r = y \Rightarrow a^y = b^r \end{array}\right\} \Rightarrow a^y = (a^x)^r = a^{rx} \Rightarrow y = rx$$

Logo, $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$.

Exemplo:

- $\log_2 8^2 = \log_2 64 = 6$

Aplicando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos:

$$\log_2 8^2 = 2 \cdot \log_2 8 = 2 \cdot 3 = 6$$

Acompanhe mais alguns exemplos.

- $\log_5 27 = \log_5 3^3 = 3 \cdot \log_5 3$
- $\log_2 \frac{1}{27} = \log_2 3^{-3} = -3 \cdot \log_2 3$
- $\log_{10} \sqrt{2} = \log_{10} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_{10} 2$
- $\ell n\, 625 = \ell n\, 5^4 = 4 \cdot \ell n\, 5$

Observação

Atualmente, dispomos de calculadoras científicas para calcular o valor de uma expressão numérica que envolva várias operações (multiplicação, divisão, potenciação e radiciação), como a seguinte.

$$x = \frac{(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}}{(1{,}103)^{11}}$$

Assim, em poucos segundos descobrimos o valor de x. No passado, sem os recursos tecnológicos de que dispomos hoje, o cálculo dessa expressão era feito com auxílio das tabelas de logaritmos e das propriedades operatórias, em que as multiplicações se transformam em adições, as divisões, em subtrações e as potenciações, em multiplicações. Exemplo:

$$x = \frac{(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}}{(1{,}103)^{11}} \Rightarrow \log x = \log\left(\frac{(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}}{(1{,}103)^{11}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x = \log\left[(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}\right] - \log\,(1{,}103)^{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x = \log\,(11{,}2)^5 + \log\sqrt[7]{2{,}07} - \log\,(1{,}103)^{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x = 5 \cdot \log 11{,}2 + \frac{1}{7} \cdot \log 2{,}07 - 11 \cdot \log 1{,}103$$

As antigas tabelas de logaritmos forneciam os valores de log 11,2; log 2,07 e log 1,103. Em seguida, calculava-se o valor de log x e, pela mesma tabela, chegava-se ao valor de x.

Nesta obra, não apresentaremos as tabelas de logaritmos, mas, sempre que necessário, forneceremos os valores para o cálculo.

Atividades resolvidas

3. Calcule o valor de $\log_b (x^2 \cdot y)$ e de $\log_b \left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{y}}\right)$ sabendo que $\log_b x = 3$ e $\log_b y = -4$ ($x > 0, y > 0, b > 0$ e $b \neq 1$).

Solução:

Aplicando as propriedades operatórias, escrevemos:

- $\log_b (x^2 \cdot y) = \log_b x^2 + \log_b y =$
  $= 2 \cdot \log_b x + \log_b y = 2 \cdot 3 + (-4) = 2$
- $\log_b \left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{y}}\right) = \log_b x^4 - \log_b \sqrt[3]{y} =$
  $= 4 \cdot \log_b x - \log_b y^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot \log_b x - \frac{1}{3} \cdot \log_b y =$
  $= 4 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot (-4) = 12 + \frac{4}{3} = \frac{40}{3}$

4. Considerando log 2 ≃ 0,3, qual é o valor de $\log \sqrt[5]{64}$?

Solução:

Temos:

$$\log \sqrt[5]{64} = \log 64^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \log 64 = \frac{1}{5} \cdot \log 2^6 = \frac{6}{5} \cdot \log 2 \simeq \frac{6 \cdot 0{,}3}{5} = 0{,}36$$

Não escreva no livro

Pense nisto

Dizer que log 2 ≃ 0,3 equivale a dizer que $10^{0{,}3} \simeq 2$. Como você explica, sem usar a calculadora, que $10^{0{,}3} \simeq 2$?

Pense nisto: Note que $10^{0{,}3} = 10^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{10^3} = \sqrt[10]{1\,000} \simeq 2$, pois $2^{10} = 1\,024$, que está próximo de 1 000. Lembre-se de que, se tivéssemos usado uma aproximação para log 2, com mais casas decimais (já que log 2 ≃ 0,3010299957), teríamos um resultado ainda mais próximo.

19. c) $\log x^{-1} = \log\left(\frac{1}{3} \cdot 9\right) \Rightarrow \log(x^{-1}) = \log 3 \Rightarrow x^{-1} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

d) $\log_3 x^{\frac{1}{2}} = \log_3 10^2 - \log_3 4 \Rightarrow \log_3 \sqrt{x} = \log_3\left(\frac{10^2}{4}\right) \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{10^2}{4} \Rightarrow \sqrt{x} = 25 \Rightarrow x = 625$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

14. Sejam x, y e b números reais positivos e $b \neq 1$. Sabendo que $\log_b x = -2$ e $\log_b y = 3$, calcule no caderno o valor de cada logaritmo.

a) $\log_b (x \cdot y)$ 1

b) $\log_b \left(\frac{x}{y}\right)$ -5

c) $\log_b \left(x^3 \cdot y^2\right)$ 0

d) $\log_b \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)$ 7

e) $\log_b \left(\frac{x \cdot \sqrt{y}}{b}\right)$ $-\frac{3}{2}$

f) $\log_b \sqrt{\sqrt{x} \cdot y^3}$ 4

15. Desenvolva no caderno os logaritmos seguintes aplicando as propriedades. Suponha a, b e c números reais positivos.

a) $\log_5 \left(\frac{5a}{bc}\right)$ $1 + \log_5 a - \log_5 b - \log_5 c$

b) $\log \left(\frac{b^2}{10a}\right)$ $2 \cdot \log b - 1 - \log a$

c) $\log_3 \left(\frac{ab^2}{c}\right)$ $\log_3 a + 2 \cdot \log_3 b - \log_3 c$

d) $\log_2 \left(\frac{8a}{b^3c^2}\right)$ $3 + \log_2 a - 3 \cdot \log_2 b - 2 \cdot \log_2 c$

e) $\log_2 \sqrt{8a^2b^3}$ $\frac{3}{2} + \log_2 a + \frac{3}{2} \cdot \log_2 b$

16. Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule no caderno cada logaritmo em função de a e b.

a) $\log 6$

b) $\log 1{,}5$

c) $\log 5$

d) $\log 30$

e) $\log \frac{1}{4}$

f) $\log 72$

g) $\log 0{,}3$

h) $\log \sqrt[3]{1{,}8}$

i) $\log 0{,}024$

j) $\log 0{,}75$

k) $\log 20\,000$

16. a) $\log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$

b) $\log \left(\frac{3}{2}\right) = \log 3 - \log 2 = b - a$

c) $\log \left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - a$

d) $\log (2 \cdot 3 \cdot 5) = \log 2 + \log 3 + \log 5 = a + b + (1 - a) = b + 1$

e) $\log 2^{-2} = (-2) \cdot \log 2 = -2a$

f) $\log (2^3 \cdot 3^2) = 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 3a + 2b$

g) $\log \left(\frac{3}{10}\right) = \log 3 - \log 10 = b - 1$

h) $\log (1{,}8)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log \left(\frac{18}{10}\right) = \frac{1}{3} \cdot \log 18 - \frac{1}{3} \cdot \log 10 = \frac{1}{3} \cdot \log \left(2 \cdot 3^2\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (\log 2 + 2 \log 3) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot (a + 2b) - \frac{1}{3}$

17. Sejam a, b e c números reais positivos. Em cada caso, obtenha no caderno a expressão cujo desenvolvimento logarítmico, na respectiva base, é dado por:

a) $\log a + \log b + \log c$ abc

b) $3 \cdot \log_2 a + 2 \cdot \log_2 c - \log_2 b$ $\frac{a^3 \cdot c^2}{b}$

c) $\log_3 a - \log_3 b - 2$ $\frac{a}{9b}$

d) $\frac{1}{2} \cdot \log a - \log b$ $\frac{\sqrt{a}}{b}$

18. Obtenha no caderno o valor de cada expressão.

a) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$ 1

b) $\log_3 72 - \log_3 12 - \log_3 2$ 1

c) $\frac{1}{3} \cdot \log_{15} 8 + 2 \cdot \log_{15} 2 + \log_{15} 5 - \log_{15} 9\,000$ -2

16. i) $\log 0{,}024 = \log \left(\frac{24}{1\,000}\right) = \log 24 - \log 1\,000 = \log (2^3 \cdot 3) - 3 = 3 \cdot \log 2 + \log 3 - 3 = 3a + b - 3$

j) $\log \left(\frac{3}{4}\right) = \log 3 - 2 \cdot \log 2 = b - 2a$

k) $\log 20\,000 = \log (2 \cdot 10\,000) = \log 2 + \log 10\,000 = a + 4$

19. Calcule no caderno o valor de x usando, em cada caso, as propriedades dos logaritmos adequadas.

a) $\log x = \log 5 + \log 4 + \log 3$ $\log x = \log (5 \cdot 4 \cdot 3) \Rightarrow x = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) $2 \cdot \log x = \log 3 + \log 4$ $\log x^2 = \log (3 \cdot 4) \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, pois $x > 0$.

c) $\log \left(\frac{1}{x}\right) = \log \left(\frac{1}{3}\right) + \log 9$

d) $\frac{1}{2} \cdot \log_3 x = 2 \cdot \log_3 10 - \log_3 4$

20. Considerando os valores $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$, calcule no caderno o valor de cada logaritmo a seguir.

a) $\log 3\,000$ Aproximadamente 3,48.

b) $\log 0{,}002$ Aproximadamente $-2{,}7$.

c) $\log \sqrt{3}$ Aproximadamente 0,24.

d) $\log 20$ Aproximadamente 1,3.

e) $\log 0{,}06$ Aproximadamente $-1{,}22$.

f) $\log 48$ Aproximadamente 1,68.

g) $\log 125$ Aproximadamente 2,1.

23. a) $t = 9 \Rightarrow S = (-18) \cdot \log (9 + 1) + 86 \Rightarrow$
$\Rightarrow S = (-18) \cdot \log 10 + 86 \Rightarrow S = (-18) + 86 = 68$; ou seja, 68%.

b) $50 = (-18) \cdot \log (t + 1) + 86 \Rightarrow -36 = (-18) \cdot \log (t + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log (t + 1) = 2 \Rightarrow 10^2 = t + 1 \Rightarrow t = 99$; ou seja, 99 minutos.

21. Considerando que $\log_2 5 \simeq 2{,}32$, obtenha no caderno os valores dos logaritmos a seguir.

a) $\log_2 10$ Aproximadamente 3,32.

b) $\log_2 500$ Aproximadamente 8,96.

c) $\log_2 1600$ Aproximadamente 10,64.

d) $\log_2 \sqrt[3]{0{,}2}$ Aproximadamente $-0{,}77\overline{3}$.

e) $\log_2 \left(\frac{64}{125}\right)$ Aproximadamente −0,96.

22. (Unesp-SP) O brilho de uma estrela percebido pelo olho humano, na Terra, é chamado de *magnitude aparente* da estrela. Já a *magnitude absoluta* da estrela é a magnitude aparente que a estrela teria se fosse observada a uma distância padrão de 10 parsecs (1 parsec é aproximadamente 3×10^{13} km). As magnitudes aparente e absoluta de uma estrela são muito úteis para se determinar sua distância ao planeta Terra. Sendo m a magnitude aparente e M a magnitude absoluta de uma estrela, a relação entre m e M é dada aproximadamente pela fórmula

$$M = m + 5 \cdot \log_3 (3 \cdot d^{-0{,}48}),$$

onde d é a distância da estrela em parsecs. A estrela Rigel tem aproximadamente magnitude aparente 0,2 e magnitude absoluta −6,8. Determine a distância, em quilômetros, de Rigel ao planeta Terra. $729 \cdot 10^{13}$ km

23. (UFPR) Para determinar a rapidez com que se esquece de uma informação, foi efetuado um teste em que listas de palavras eram lidas a um grupo de pessoas e, num momento posterior, verificava-se quantas dessas palavras eram lembradas. Uma análise mostrou que, de maneira aproximada, o percentual S de palavras lembradas, em função do tempo t, em minutos, após o teste ter sido aplicado, era dado pela expressão: $S = -18 \cdot \log (t + 1) + 86$.

a) Após 9 minutos, que percentual da informação inicial era lembrado?

b) Depois de quanto tempo o percentual S alcançou 50%?

24. Considerando x e y números reais positivos, é possível que tenhamos $\log (x + y) = \log x + \log y$? Em caso afirmativo, dê exemplos numéricos em que isso ocorre. Sim; $x = \frac{5}{2}$ e $y = \frac{5}{3}$.

25. (UFPR) O pH de uma substância é um valor que expressa a concentração de íons de hidrogênio $[H^+]$, medida em mol por litro (mol/L), em uma solução aquosa. Para o cálculo do pH de uma substância, usa-se a expressão:

$$pH = -\log [H^+].$$

a) Sabendo que a água possui pH = 7 e que uma bebida energética tem pH = 3, quantas vezes a concentração de íons hidrogênio $[H^+]$ é maior na bebida energética em relação à concentração na água?

b) Constatou-se em laboratório que o suco de limão possui uma concentração de íons de hidrogênio $[H^+] = 0{,}0072$ mol/L. Supondo que $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule o pH do suco de limão. Dê sua resposta na forma decimal.

25. a) Sejam a e b, respectivamente, a concentração de íons de hidrogênio na água e a concentração de íons de hidrogênio na bebida energética. Do enunciado, temos: $pH_{água} = -\log a = 7 \Rightarrow a = 10^{-7}$ e $pH_{bebida} = -\log b = 3 \Rightarrow b = 10^{-3}$.

Assim, $\frac{b}{a} = \frac{10^{-3}}{10^{-7}} = 10^{-3-(-7)} = 10^4$. Isto é, a concentração de íons de hidrogênio $[H^+]$ é 10 mil vezes maior na bebida energética em relação à concentração na água.

Mudança de base

Há situações em que nos defrontamos com um logaritmo em certa base e temos de convertê-lo a outra base.

Por exemplo, quando aplicamos as propriedades operatórias, os logaritmos devem estar todos na mesma base. Assim, caso não estejam, precisamos de uma forma para escrevê-los de maneira equivalente, numa mesma base.

Outro exemplo é quando, dispondo de uma calculadora científica, desejamos obter o valor de um logaritmo cuja base não seja decimal (base 10) nem neperiana (base e), por exemplo, $\log_2 5$.

25. b) Sendo $[H^+] = 0{,}0072$ mol/L, tem-se: $pH = -\log 0{,}0072 = -\log \left(\frac{2^3 \cdot 3^2}{10^4}\right) = -(\log (2^3 \cdot 3^2) - \log 10^4) =$
$= \log 10^4 - \log (2^3 \cdot 3^2) = 4 \cdot \log 10 - 3 \cdot \log 2 - 2 \cdot \log 3 \simeq 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0{,}3 - 2 \cdot 0{,}48 = 2{,}14$

As calculadoras trazem, em geral, apenas as teclas log e ln, isto é, não fornecem diretamente o valor do logaritmo que não esteja nessas bases. Assim, para obtermos o valor de $\log_2 5$, precisamos conhecer a relação que ele tem com o logaritmo decimal ou com o logaritmo neperiano.

Suponha a, b e c números reais positivos, com a e b diferentes de 1. Temos:

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

Demonstração

Sejam $x = \log_a c$, $y = \log_b c$ e $z = \log_b a$. Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$x = \log_a c \Rightarrow a^x = c \quad \text{I}$$
$$y = \log_b c \Rightarrow b^y = c \quad \text{II}$$
$$z = \log_b a \Rightarrow b^z = a \quad \text{III}$$

Substituindo III e II em I, temos:

$$(b^z)^x = b^y \Rightarrow b^{z \cdot x} = b^y \Rightarrow z \cdot x = y \xrightarrow[(\text{pois } a \neq 1)]{z \neq 0} x = \frac{y}{z}$$

Logo, $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.

Analisemos agora como é possível obter o valor de $\log_2 5$ usando a calculadora. Podemos transformar $\log_2 5$ para base 10 ou para base e.

- Base 10: $\log_2 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \simeq \dfrac{0{,}699}{0{,}3010} \simeq 2{,}32$.
- Base e: $\log_2 5 = \dfrac{\log_e 5}{\log_e 2} = \dfrac{\ell n\, 5}{\ell n\, 2} \simeq \dfrac{1{,}609}{0{,}693} \simeq 2{,}32$.

Atividades resolvidas

5. Calcule o valor de $\log_{100} 72$ considerando os valores $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$.

Solução:

Vamos usar a fórmula da mudança de base para expressar $\log_{100} 72$ em base 10. Temos:

$$\log_{100} 72 = \frac{\log 72}{\log 100} = \frac{\log\left(2^3 \cdot 3^2\right)}{2} = \frac{\log 2^3 + \log 3^2}{2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3}{2} \simeq \frac{0{,}9 + 0{,}96}{2} = 0{,}93$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Freepik

Caso especial

Sejam a e b números reais, positivos e diferentes de 1. Temos que:

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1 \text{ ou } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Demonstração

Basta escrever $\log_b a$ na base a, de acordo com a propriedade da mudança de base, e teremos:

$\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b}$; ou seja, $\log_b a \cdot \log_a b = 1$.

Note que, como $b \neq 1$, o denominador $\log_a b$ é diferente de zero.

Assim, por exemplo, $\log_3 2 \cdot \log_2 3 = 1$ e $\log_4 5 = \dfrac{1}{\log_5 4}$.

Atividades resolvidas

6. Mostre que $\log_{49} 25 = \log_7 5$.

Solução:

Vamos escrever $\log_{49} 25$ na base 7:

$$\log_{49} 25 = \frac{\log_7 25}{\log_7 49} = \frac{\log_7 5^2}{2} = \frac{2 \cdot \log_7 5}{2} = \log_7 5$$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

26. Represente na base 2 os seguintes logaritmos.

a) $\log_5 3$ $\log_5 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}$

b) $\log 5$ $\log 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 10}$

c) $\log_3 4$

d) $\ell n\, 3$

27. Considerando $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$, calcule no caderno o valor aproximado de:

a) $\log_3 2$

b) $\log_5 3$

c) $\log_2 5$

d) $\log_3 100$

e) $\log_4 18$

f) $\log_{36} 0{,}5$

28. Sejam x e y números reais, positivos e diferentes de 1. Se $\log_y x = 2$, calcule no caderno:

a) $\log_x y$

b) $\log_{x^3} y^2$

c) $\log_{\frac{1}{x}} \dfrac{1}{y}$

d) $\log_{y^2} x$

29. Sabendo que $\log_{12} 5 = a$, calcule no caderno, em função de a, o valor dos seguintes logaritmos:

a) $\log_5 12$

b) $\log_{25} 12$

c) $\log_5 60$

d) $\log_{125} 144$

30. Qual é o valor de:

a) $y = \log_7 3 \cdot \log_3 7 \cdot \log_{11} 5 \cdot \log_5 11$? 1

b) $z = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5$? $\log_6 2$

c) $w = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$? $\dfrac{3}{8}$

d) $t = 5^{\log_5 4 \cdot \log_4 7 \cdot \log_7 11}$? 11

27. a) $\log_3 2 = \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \simeq \dfrac{0{,}3}{0{,}48} = 0{,}625$

b) $\log_5 3 = \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = \dfrac{\log 3}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} = \dfrac{\log 3}{1 - \log 2} \simeq \dfrac{0{,}48}{1 - 0{,}3} = \dfrac{0{,}48}{0{,}7} \simeq 0{,}686$

27. c) $\log_2 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \dfrac{\log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)}{\log_{10} 2} = \dfrac{\log 10 - \log 2}{\log 2} \simeq \dfrac{1 - 0{,}3}{0{,}3} = \dfrac{7}{3} = 2{,}\overline{3}$

d) $\log_3 100 = \dfrac{\log 100}{\log 3} \simeq \dfrac{2}{0{,}48} = 4{,}1\overline{6}$

e) $\log_4 18 = \dfrac{\log 18}{\log 4} = \dfrac{2 \cdot \log 3 + \log 2}{2 \cdot \log 2} \simeq \dfrac{2 \cdot 0{,}48 + 0{,}3}{2 \cdot 0{,}3} = 2{,}1$

27. f) $\log_{36} 0{,}5 = \dfrac{\log 2^{-1}}{\log 6^2} = \dfrac{(-1) \cdot \log 2}{2 \cdot \log(2 \cdot 3)} \simeq \dfrac{-0{,}3}{2 \cdot (0{,}3 + 0{,}48)} \simeq -0{,}1923$

29. a) $\log_5 12 = \dfrac{1}{\log_{12} 5} = \dfrac{1}{a}$

b) $\log_{25} 12 = \dfrac{\log_{12} 12}{\log_{12} 25} = \dfrac{1}{\log_{12} 5^2} = \dfrac{1}{2 \cdot \log_{12} 5} = \dfrac{1}{2 \cdot a} = \dfrac{1}{2a}$

c) $\log_5 60 = \dfrac{\log_{12} 60}{\log_{12} 5} = \dfrac{\log_{12}(12 \cdot 5)}{a} = \dfrac{1 + \log_{12} 5}{a} = \dfrac{1 + a}{a}$

d) $\log_{125} 144 = \dfrac{\log_{12} 144}{\log_{12} 125} = \dfrac{2}{\log_{12} 5^3} = \dfrac{2}{3 \cdot \log_{12} 5} = \dfrac{2}{3a}$

28. a) $\log_x y = \dfrac{1}{\log_y x} = \dfrac{1}{2}$

b) $\log_{x^3} y^2 = \dfrac{\log_y y^2}{\log_y x^3} = \dfrac{2}{3 \cdot \log_y x} = \dfrac{2}{3 \cdot 2} = \dfrac{1}{3}$

26. c) $\log_3 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 3} = \dfrac{2}{\log_2 3}$ **d)** $\ell n\, 3 = \log_e 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 e}$

28. c) $\log_{\left(\frac{1}{x}\right)}\left(\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{\log_y\left(\frac{1}{y}\right)}{\log_y\left(\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{-1}{\log_y x^{-1}} = \dfrac{-1}{(-1) \cdot \log_y x} = \dfrac{1}{\log_y x} = \dfrac{1}{2}$

28. d) $\log_{y^2} x = \dfrac{\log_y x}{\log_y y^2} = \dfrac{2}{2} = 1$

INTERLIGANDO

Infográfico clicável

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Os sons, a audição humana e a escala logarítmica

Vamos retomar o problema apresentado na introdução deste capítulo (situação **1**): Como construir uma escala para representar valores de 10^{-12} (limiar de audibilidade) até 1,00 (limiar de dor – embora níveis abaixo desse valor também possam causar danos e incômodos dependendo do tempo, da exposição e da frequência)?

A intensidade (I) de um som é uma grandeza que mede a quantidade de energia que uma onda sonora emite a cada medida de intervalo de tempo por medida de área da superfície atravessada. No Sistema Internacional de Unidades (SI), a intensidade é medida em W/m^2 (1 watt equivale a 1 joule por segundo, e joule é a unidade de medida do SI para energia).

sima/Shutterstock



Trabalhador da construção civil usando uma britadeira para quebrar o asfalto. A britadeira tem medida de intensidade sonora alta. Por isso, para operá-la, entre os equipamentos de proteção individual necessários está o protetor auricular.

Na tabela a seguir, estão relacionadas as medidas de intensidade de alguns sons entre o limiar de audibilidade e o limiar da dor (os valores podem mudar de acordo com o modelo dos aparelhos).

Algumas fontes sonoras e a respectiva medida de intensidade

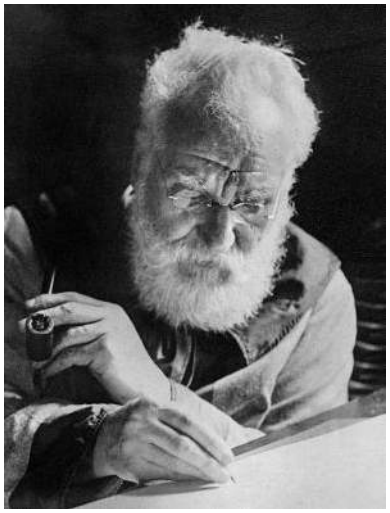
Som	Medida de intensidade sonora (em W/m^2)
Limiar de audibilidade	$I_0 = 10^{-12}$
Pessoas cochichando	10^{-11}
Escritório privado	10^{-8}
Escritório movimentado	10^{-6}
Via movimentada	10^{-4}
Pequenos caminhões acelerando	10^{-3}
Britadeira	10^{-1}
Limiar de dor	1,0

As imagens não estão representadas em proporção.

Fonte dos dados: PAVAN, Theo Z. Medidas da onda sonora. *E-Disciplinas*, [202?]. Disponível em: https://tedit.net/7vnpek. Acesso em: 17 ago. 2024.

A primeira ideia é determinar, para um som qualquer, a razão entre a medida de intensidade (I) e o limiar de audibilidade (I_0). Do valor obtido, calculamos o logaritmo decimal e obtemos o chamado bel (B) – homenagem ao cientista escocês Alexander Graham Bell, considerado o inventor do telefone.

Everett Collection/Shutterstock



Alexander Graham Bell (1847-1922) escrevendo em sua mesa de escritório em Washington. Foto de 1913.

Não escreva no livro

Assim, o bel é definido como:

$$B = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

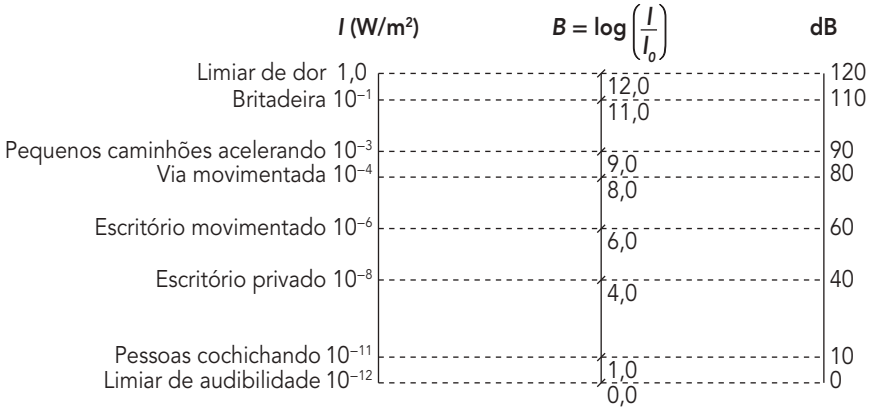
- Por exemplo, para o limiar de audibilidade, temos $I = I_0$ e o bel correspondente é $\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \log 1 = 0$, que é o novo limiar de audibilidade.
- Para o som de uma via movimentada, por exemplo, temos $I = 10^{-4} \Rightarrow \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \log\left(\frac{10^{-4}}{10^{-12}}\right) = 8$ bels, o que significa que esse som está 8 bels acima do limite inferior.

Repetindo esse raciocínio para os demais valores da tabela anterior, podemos construir uma correspondência.

Reduzindo-se a faixa da escala em excesso (de 10^{-12} até 1,0, podemos obter uma correspondência de 0 a 12). A saída encontrada foi subdividir o bel (B). Assim, criou-se o decibel (dB), que corresponde a um décimo do bel. A escala mais utilizada é a dos decibels (embora amplamente usado, o plural decibéis não é correto).

Temos, a seguir, a correspondência entre os diversos sons listados, em bel e decibel.

Escala em bels e decibels



Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, temos:

1. Para o som S_1, temos

$90 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \Rightarrow 9 = \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^9 = \frac{I_1}{I_0} \Rightarrow I_1 = I_0 \cdot 10^9$.

$$\text{dB} = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Para o som S_2, temos

$100 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \Rightarrow 10 = \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{10} = \frac{I_2}{I_0} \Rightarrow I_2 = I_0 \cdot 10^{10}$.

Assim, $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{10}$, isto é, $I_2 = 10 \cdot I_1$.

Perceba que nem o bel, nem o decibel são unidades de medida, e sim escalas (dadas pelo logaritmo de razões entre medidas de intensidade sonora).

Com a escala em decibels, é possível comparar facilmente valores que se encontravam em uma faixa numérica extremamente ampla. Esse exemplo mostra a vantagem do uso de uma escala logarítmica quando a grandeza em estudo assume valores muito pequenos (ou muito grandes).

Fontes dos dados: FERREIRA NETO, Maria de Fátima. 60 + 60 = 63? *Portal Pion*, 2024. Disponível em: https://tedit.net/hkqnnq; MELLO, Vera Lucia Martins de. Aula 11: ondas sonoras. *Centro de Educação Superior a Distância – CESAD*, [201?]. Disponível em: https://tedit.net/w4x6vv. Acesso em: 17 ago. 2024.

1. Como você pode relacionar a medida de intensidade de 2 sons, S_1 e S_2, correspondentes a 90 dB e 100 dB, respectivamente? Um aumento de 10 dB acarreta uma medida de intensidade de som 10 vezes maior.

2. O que se pode concluir sobre a relação existente entre os decibels e as medidas de intensidade de 2 sons? Um aumento de 10 dB acarreta uma medida de intensidade de som 10 vezes maior; um aumento de 20 dB acarreta uma medida de intensidade de som 100 vezes maior; um aumento de 30 dB acarreta uma medida de intensidade de som 1 000 vezes maior; e assim por diante. Assim, se a medida de intensidade de um som é multiplicada por 10^x ($x > 0$), o número de decibels aumenta em $10x$ unidades.

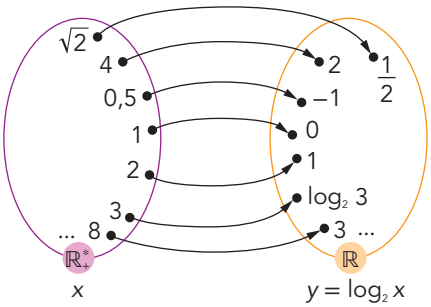
Função logarítmica

Acompanhe a definição a seguir.

Dado um número real a (com $a > 0$ e $a \neq 1$), chama-se **função logarítmica de base a** a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \log_a x$.

A função logarítmica associa cada número real positivo ao logaritmo dele na base a. Um exemplo de função logarítmica é a função f definida por $f(x) = \log_2 x$.

São logarítmicas também as funções dadas pelas leis: $y = \log_3 x$, $y = \log x$ (ou $y = \log_{10} x$), $y = \log_e x$ (ou $\ell n\, x$), $y = \log_{\frac{1}{4}} x$, etc.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico da função logarítmica

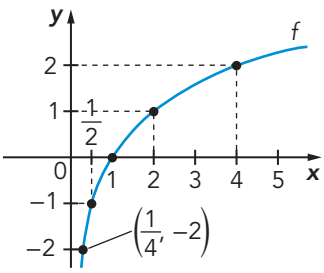
Vamos construir o gráfico da função f, com domínio $\mathbb{R}_+^*$ definida por $y = \log_2 x$. Para isso, podemos construir uma tabela dando valores a x e calculando os correspondentes valores de y.

Note que, nesse caso, os valores atribuídos a x são potências de base 2. Verifique, ainda, que:

- o gráfico de f está inteiramente no 1º e no 4º quadrantes, pois f está definida apenas para $x > 0$;
- o conjunto imagem de f é $\mathbb{R}$. De fato, todo número real y é imagem de algum x.

Por exemplo, $y = 200$ é imagem de $x = 2^{200}$; $y = -300$ é imagem de $x = 2^{-300}$; etc. Em geral, o número real y_0 é imagem do número real positivo $x = 2^{y_0}$.

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2



Banco de imagens/Arquivo da editora

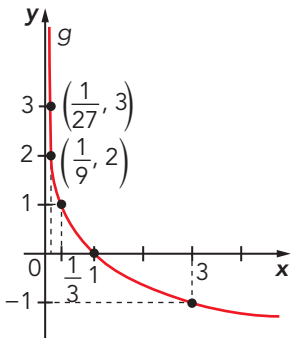
Quando x varia de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$, y aumenta 1 unidade. O mesmo ocorre quando x varia de $\frac{1}{2}$ a 1, de 1 a 2, de 2 a 4, e assim por diante. Isso indica que essa função é **crescente**.

Consideremos agora a função g dada por $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, definida para todo x real, $x > 0$. Vamos construir o gráfico utilizando os valores da tabela.

Como feito anteriormente, os valores atribuídos a x são potências de base $\frac{1}{3}$. Verifique, ainda, que:

- o gráfico de g está inteiramente no 1º e no 4º quadrantes, pois g está definida apenas para $x > 0$;
- o conjunto imagem de g é $\mathbb{R}$.

x	$y = \log_{\frac{1}{3}} x$
$\frac{1}{27}$	3
$\frac{1}{9}$	2
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	−1



Banco de imagens/Arquivo da editora

Quando x varia de $\frac{1}{27}$ a $\frac{1}{9}$, y diminui 1 unidade. O mesmo ocorre quando x varia de $\frac{1}{9}$ a $\frac{1}{3}$, de $\frac{1}{3}$ a 1, de 1 a 3, e assim por diante. Isso indica que essa função é **decrescente**.

EXPERIMENTE

Não escreva no livro

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Comparar os gráficos das funções exponencial e logarítmica

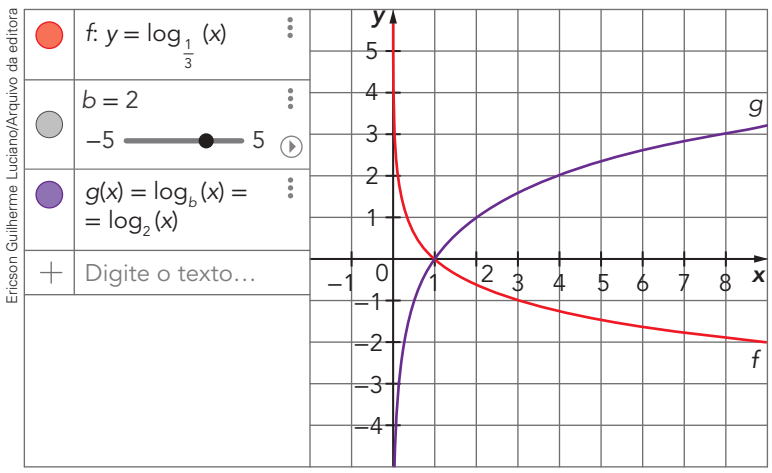
Função logarítmica

Vamos construir o gráfico da função logarítmica definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ em um *software* de Geometria dinâmica. Para isso, no campo de entrada, digite "y=log(1/3, x)" e pressione a tecla *Enter*.

Agora, construa também o gráfico da função logarítmica definida por $g(x) = \log_b x$. Digite "y=log(b, x)" e pressione a tecla *Enter*.

O *software* exibirá os gráficos correspondentes à função e o controle deslizante correspondente ao parâmetro *b* (esse recurso controla a variação de *b*). Para iniciar a variação desse parâmetro, arraste o ponto em destaque do controle deslizante.

O *software* exibirá os gráficos obtidos à medida que *b* varia.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Gráfico gerado por *software* de Geometria dinâmica das curvas dadas por $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ e por $g(x) = \log_b x$.

Responda no caderno ao que se pede a seguir.

1. A função *f* definida pela lei $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ é crescente ou decrescente? Decrescente.

2. O gráfico da função *f* definida pela lei $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ intersecta o eixo das ordenadas? Explique sua resposta e dê o domínio da função. Não, pois *x* não pode assumir o valor zero. O domínio dessa função é $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.

3. Para a função *f* definida pela lei $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ existe algum valor real de *x* correspondente a $y = -40$? E a $y = 100$? Qual é o conjunto imagem dessa função?

3. Sim, para $y = -40$, temos $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-40} = 3^{40}$. Já para $y = 100$, temos $x = \frac{1}{3^{100}}$. O conjunto imagem da função é $\mathbb{R}$.

4. O que ocorre com $y = \log_b x$ quando $b < 0$?
A expressão não está definida para $b < 0$. É esperado que o *software* não gere gráfico algum.

5. O que ocorre com o gráfico de $y = \log_b x$ se $0 < b < 1$? E se $b > 1$?
O gráfico da função logarítmica é decrescente quando $0 < b < 1$ e é crescente quando $b > 1$.

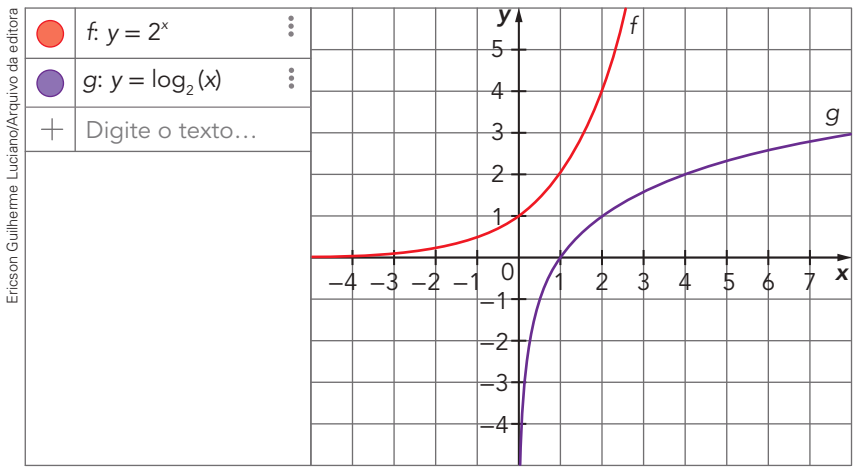
Relação entre as funções exponencial e logarítmica

Vamos estabelecer uma importante relação entre os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.

Considere a função exponencial *f* e a função logarítmica *g*, dadas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$, e a comparação dos gráficos delas.

Vamos construir o gráfico de $f(x) = 2^x$ no *software* de Geometria dinâmica. Para isso, abra uma nova aba e no campo de entrada, digite "y=2^x" e pressione a tecla *Enter*. Em seguida, digite "y=log(2, x)" e pressione a tecla *Enter*.

O *software* exibirá os seguintes gráficos.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Gráfico gerado por *software* de Geometria dinâmica das curvas dadas por $f(x) = 2^x$ e por $g(x) = \log_2 x$.

Responda às perguntas a seguir no caderno.

Para $x = -2$, temos $f(-2) = \frac{1}{4}$. Para $x = -1$, $f(-1) = \frac{1}{2}$. Para $x = 0$, $f(0) = 1$. Para $x = 1$, $f(1) = 2$. Para $x = 2$, $f(2) = 4$. Para $x = 3$, $f(3) = 8$.

6. Qual é o valor de $f(x)$ quando $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$?

7. Para quais valores de x a função g assume os valores -2, -1, 0, 1, 2 e 3?

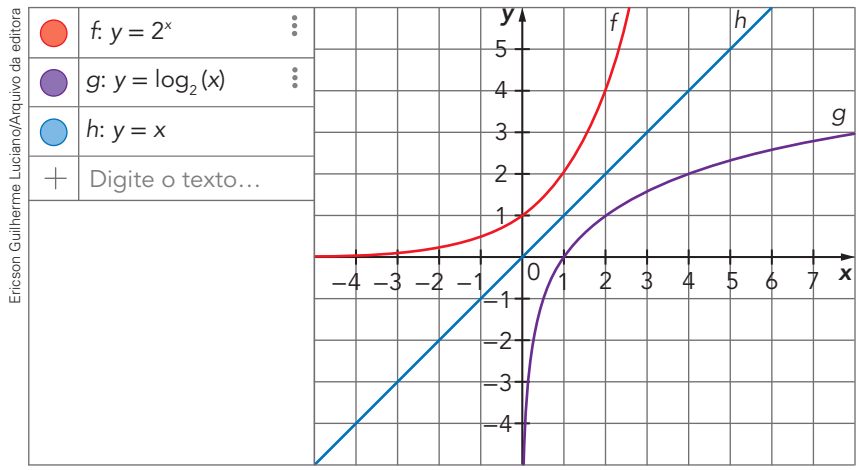
A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

8. Comparando o gráfico de $f(x) = 2^x$ com o gráfico de $g(x) = \log_2 x$, o que podemos notar em relação aos valores de x e y?

Oriente os estudantes a ampliar ou reduzir a janela de visualização para verificar os valores correspondentes. Espera-se que os estudantes percebam que, se $b = f(a)$, então $a = g(b)$.

Agora, no campo de entrada, digite "y=x" e pressione a tecla *Enter*.

O *software* exibirá os seguintes gráficos.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Gráfico gerado por *software* de Geometria dinâmica das curvas dadas por $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$ e $h(x) = x$.

Responda às perguntas a seguir no caderno.

São comparados os gráficos de f e g em relação ao gráfico de $y = x$.

9. Comparando o gráfico de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$ com o gráfico de $y = x$, o que podemos notar?

O gráfico da função f é simétrico ao de g em relação à reta, gráfico de $y = x$.

10. O que se percebe em relação aos pontos pertencentes ao gráfico de $y = x$?

A reta correspondente ao gráfico de $y = x$ é formada por pontos com coordenadas iguais (a, a), com $a \in \mathbb{R}$.

11. A reta correspondente ao gráfico de $y = x$ também é chamada **bissetriz dos quadrantes ímpares**. Analisando os gráficos das funções f e g, podemos notar uma propriedade geométrica em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Qual é essa propriedade geométrica?

Os gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

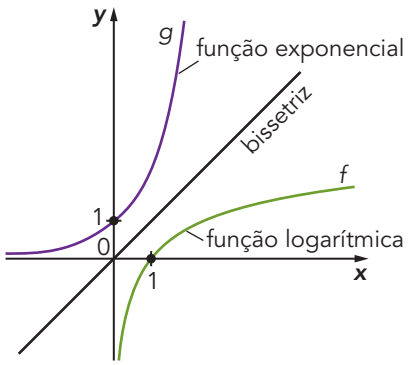
Propriedades do gráfico da função logarítmica

De modo geral, o gráfico de uma função f definida por $f(x) = \log_a x$ tem as seguintes características.

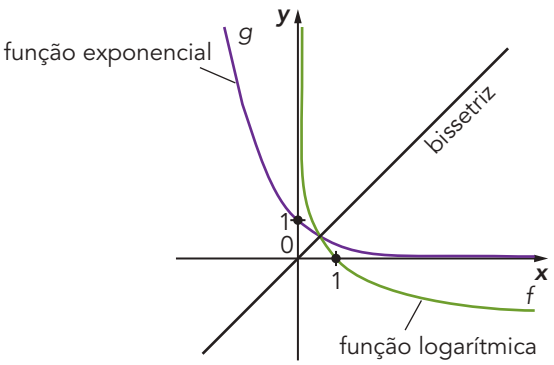
- Localiza-se à direita do eixo y, isto é, todos os pontos dela pertencem ao 1º e ao 4º quadrantes, pois o domínio de f é $\mathbb{R}_+^*$.
- Intersecta o eixo x no ponto de coordenadas (1, 0), pois, se $x = 1$, $y = \log_a 1 = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.
- É simétrico ao gráfico da função exponencial g (de mesma base) definida por $g(x) = a^x$ em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Considere os gráficos a seguir, cujas leis são $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = a^x$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

- Quando $a > 1$:



- Quando $0 < a < 1$:



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- O conjunto imagem de f é $\mathbb{R}$, pois todo número real y é imagem do número real positivo $x = a^y$.
- Quando $a > 1$, a função logarítmica cuja lei é $f(x) = \log_a x$ é **crescente**.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

Assim, por exemplo:

- $13 > 5 \Leftrightarrow \log_2 13 > \log_2 5$
- $2{,}5 < 4 \Leftrightarrow \log_5 2{,}5 < \log_5 4$

- Quando $0 < a < 1$, a função logarítmica f cuja lei é $f(x) = \log_a x$ é **decrescente**.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

Assim, por exemplo:

- $13 > 5 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} 13 < \log_{\frac{1}{2}} 5$
- $2{,}5 < 4 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} 2{,}5 > \log_{\frac{1}{3}} 4$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

31. Dadas a função exponencial f e a função logarítmica g tais que $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \ell n\, x$, responda no caderno ao que se pede.

a) Quais são o domínio e a imagem de cada função? Para $f(x)$: $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; para $g(x)$: $D(g) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(g) = \mathbb{R}$.

b) As funções são crescentes ou decrescentes? As funções são crescentes.

c) Qual função cresce (ou decresce) mais rápido do que a outra a partir de $x = 1$ ($x > 1$)?

A função exponencial f cresce mais rápido a partir de $x = 1$.

33. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas.

32. Estabeleça o domínio D de cada uma das funções logarítmicas seguintes, definidas por:

a) $f(x) = \log_5 (x - 1)$ **b)** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (3x - 2)$

33. Construa, no caderno, o gráfico das funções logarítmicas de domínio $\mathbb{R}_+^*$ definidas pelas leis a seguir e identifique se são crescentes ou decrescentes. Os gráficos encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

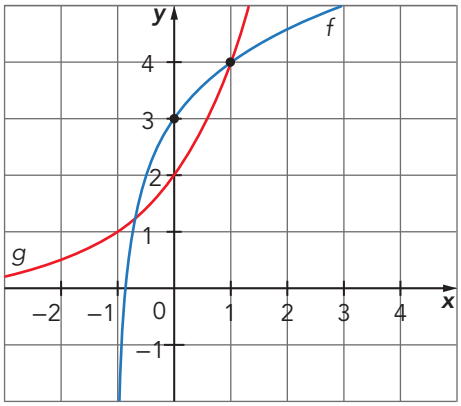
a) $y = \log_3 x$ Crescente.

b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ Decrescente.

c) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ Decrescente.

d) $y = \log_4 x$ Crescente.

34. No gráfico a seguir estão representadas as funções f e g, definidas, respectivamente, pelas leis $f(x) = 3 + \log_2 (1 + x)$ e $g(x) = 2^{x+1}$. De acordo com essas informações, responda no caderno ao que se pede.



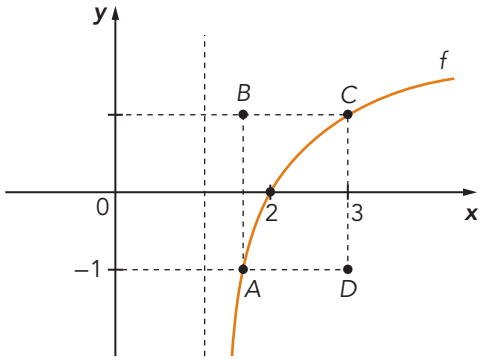
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

a) Quais são os valores de a e b, respectivamente? $a = 3$; $b = 2$.

b) Qual é o domínio e a imagem de cada uma das funções? $f(x)$: $D(f) =]-1, +\infty[$ e $Im(f) = \mathbb{R}$; $g(x)$: $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$.

c) As funções são crescentes ou decrescentes? Crescentes.

35. O gráfico a seguir representa a função f, definida por $f(x) = \log_2 (x + k)$, sendo k uma constante real. De acordo com essas informações, responda no caderno ao que se pede.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é o valor de k? $k = -1$

b) Qual é a medida de área da região retangular $ABCD$? 3 u.a.

c) Qual é o valor de $f(1001)$? Considere $\log 2 \simeq 0{,}30$. 10

36. A lei seguinte representa uma estimativa sobre a quantidade de funcionários de uma empresa em função do tempo t, em anos ($t = 0, 1, 2, \ldots$), de existência dela.

$$f(t) = 400 + 50 \cdot \log_4 (t + 2)$$

a) Quantos funcionários a empresa tinha quando foi fundada? 425 funcionários.

b) Quantos funcionários foram incorporados à empresa do 2º ao 6º ano? Admita que nenhum funcionário tenha saído. 25 funcionários.

c) Calcule a taxa média de variação da quantidade de funcionários da empresa do 6º ao 14º ano. Cerca de 3 funcionários/ano.

37. **(FGV-SP)** Os diretores de uma empresa de consultoria estimam que, com x funcionários, o lucro mensal que pode ser obtido é dado pela função:

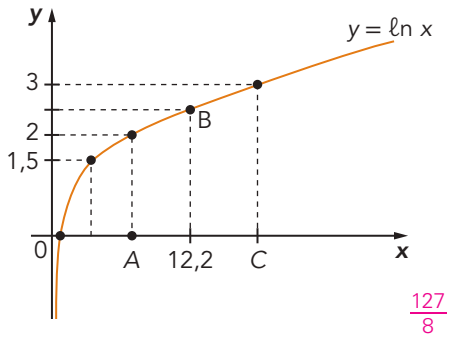
$$P(x) = 20 + \ell n \left(\frac{x^2}{25}\right) - 0{,}1x \text{ mil reais.}$$

Atualmente a empresa trabalha com 20 funcionários. Use as aproximações $\ell n\ 2 \simeq 0{,}7$, $\ell n\ 3 \simeq 1{,}1$ para responder às questões seguintes:

a) Qual é o valor do lucro mensal da empresa? R$ 20.800,00

b) Se a empresa tiver necessidade de contratar mais 10 funcionários, o lucro mensal vai aumentar ou diminuir? Quanto? O lucro mensal vai diminuir R$ 200,00.

38. O gráfico da função f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $y = \ell n\ x$, é dado a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Determine a medida de área da região limitada pelo triângulo ABC. Para isso considere: $e^2 \simeq 7{,}4$, $e^{2,5} \simeq 12{,}2$, $e^3 \simeq 20{,}1$. $\frac{127}{8}$ u.a.

32. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$

39. Em várias soluções aquosas (leite, suco de fruta, sangue, detergente, etc.), verifica-se, em geral, que as concentrações de íons H^+ e OH^- são diferentes, o que permite classificar tais soluções em ácidas ou básicas (ou, ainda, em neutras, quando essas concentrações são iguais). O potencial hidrogeniônico (pH) é uma escala logarítmica usada em Química para indicar o grau de acidez (ou basicidade) de uma solução aquosa. Para o cálculo do pH, usa-se a expressão $pH = -\log[H^+]$, sendo $[H^+]$ a medida de concentração de íons hidrogênio em mol/L (mol é uma unidade de medida usada para determinar a quantidade de partículas – átomos, moléculas, íons, etc.).

- Quando $0 \leqslant pH < 7$, a solução é ácida.
- Quando $pH = 7$, a solução é neutra.
- Quando $7 < pH \leqslant 14$, a solução é básica.

Dadas as informações, no caderno, faça o que se pede.

a) Determine a concentração hidrogeniônica $[H^+]$ de uma solução de suco de limão e uma solução de amoníaco, sendo o pH delas respectivamente iguais a 2 e 11.
10^{-2} mol/L e 10^{-11} mol/L.

b) Sabendo que o pH de uma solução de vinagre é igual a 2,8, determine a concentração hidrogeniônica $[H^+]$ dela. Use $\log 6{,}3 \simeq 0{,}8$. Aproximadamente $1{,}59 \cdot 10^{-3}$ mol/L.

c) Calcule a razão entre as concentrações hidrogeniônicas de uma solução de tomate (pH = 4) e de uma solução de urina (pH = 6). Qual das duas soluções é "mais ácida"? Quantas vezes? A solução de tomate é 100 vezes "mais ácida" do que a solução de urina.

d) **Experimente** usar um *software* de Geometria dinâmica para construir o gráfico da função $y = -\log x$, em que y é o pH e x é a concentração de íons de hidrogênio em mol/L. A resposta depende do *software* utilizado pelo estudante.

40. O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida resumida do progresso, em longo prazo, dos países-membros da Organização das Nações Unidas (ONU) em 3 dimensões básicas do desenvolvimento humano: saúde, educação e renda. O valor do IDH varia de 0 a 1, de modo que, quanto mais próximo de 1, maior é o desenvolvimento humano. A fórmula usada atualmente é $IDH = \sqrt[3]{IDH_S \cdot IDH_E \cdot IDH_R}$, na qual IDH_S, IDH_E e IDH_R são, respectivamente, os índices de saúde, educação e renda.

Fonte dos dados: PNUD. *Human Develoment Report 2023/2024 technical notes*. Documentação e *downloads*, [2024]. Disponível em: https://tedit.net/kazxu8. Acesso em: 20 set. 2024.

Na divulgação feita em março de 2024, com dados referentes a 2022, o Brasil ficou em 89º lugar, com IDH igual a 0,760 – índice considerado de desenvolvimento humano médio. Índices acima de 0,799 são considerados elevados. Para calcular o índice de renda, usa-se a fórmula:

$$IDH_R = \frac{\ell n(RNB) - \ell n\, 100}{\ell n\, 75\,000 - \ell n\, 100}$$

Sendo **RNB** a Renda Nacional Bruta *per capita* ajustada ao poder de compra, em dólares PPC (Paridade no Poder de Compra). Os valores 100 e 75 000 (em dólares PPC) são, respectivamente, a RNB *per capita* mínima e máxima.

Considere $\ell n\, 2 \simeq 0{,}7$, $\ell n\, 3 \simeq 1{,}1$, $\ell n\, 10 \simeq 2{,}3$ e $\ell n\, 14\,616 \simeq 9{,}6$ para fazer o que se pede.

a) Sabendo que, para o estudo divulgado em 2024, a RNB do Brasil em 2022 foi considerada de 14 616 dólares PPC, calcule no caderno o índice IDH_R do Brasil.
Aproximadamente 0,7576.

b) Sabendo que o índice IDH_R de determinado país foi igual a $\frac{23}{66} \simeq 0{,}348$, calcule no caderno a RNB desse país. Use o valor na forma de fração. Aproximadamente 1 000 dólares PPC.

c) Qual deve ser a RNB *per capita* para que o IDH_R de um país seja máximo, isto é, igual a 1?
75 000 dólares PPC.

Equações exponenciais usando logaritmos

Há equações que não podem ser reduzidas a uma igualdade de potências de mesma base pela simples aplicação das propriedades das potências. A resolução de uma equação desse tipo se baseia na definição de logaritmo.

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b, \text{ com } a > 0,\ a \neq 1 \text{ e } b > 0.$$

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Não escreva no livro

Pense nisto

Como pode ser resolvido o problema no início do capítulo (situação **2**) sobre a desvalorização do caminhão?

Considere a equação $3^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_3 5$.

Para conhecer esse valor, podemos usar uma calculadora científica e aplicar a propriedade da mudança de base.

$$x = \log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \simeq \frac{0{,}6990}{0{,}4771} \simeq 1{,}465$$

Um processo equivalente consiste em "aplicar" logaritmo decimal aos 2 membros da igualdade $3^x = 5$ e obter disso uma nova igualdade.

$$3^x = 5 \Rightarrow \log 3^x = \log 5 \Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3}$$

História da Matemática

Professor, você pode complementar o texto com o vídeo *Como a matemática guia nossos navios no mar? – George Christoph* (4 min 18 s), disponível em: https://tedit.net/owyue1 (acesso em: 17 ago. 2024). Habilite as legendas disponíveis em português.

A invenção dos logaritmos

Credita-se ao escocês John Napier (1550-1617) a descoberta dos logaritmos, embora outros matemáticos da época, como o suíço Joost Bürgi (1552-1632) e o inglês Henry Briggs (1561-1630), também tenham feito importantes contribuições.

A invenção dos logaritmos causou grande impacto nos meios científicos da época, pois eles representavam um poderoso instrumento de cálculo numérico que impulsionaria o desenvolvimento do comércio, da navegação e da Astronomia. Até então, efetuar multiplicações e divisões com números muito grandes, por exemplo, números que representavam medidas de distância astronômicas, era muito trabalhoso.

Basicamente, a ideia de Napier foi associar os termos da sequência $(b, b^2, b^3, b^4, b^5, \ldots, b^n)$ aos termos de outra sequência $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n)$, de modo que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência $(b^x \cdot b^y = b^{x+y})$ estivesse associado à soma $x + y$ dos termos da segunda.

Acompanhe um exemplo.



Reprodução/Coleção Particular

Frontispício da obra de *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição do Maravilhoso Cânone dos Logaritmos), de John Napier sobre logaritmos, datada de 1614.

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
II	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

Para calcular 512 · 64, note que: o termo 512 de **II** corresponde ao termo 9 de **I**; o termo 64 de **II** corresponde ao termo 6 de **I**; assim, a multiplicação 512 · 64 corresponde à soma de 9 + 6 = 15 em **I**, cujo correspondente em **II** é 32768, que é o resultado procurado.

No trabalho *Descrição do Maravilhoso Cânone dos Logaritmos*, datado de 1614, Napier considerou outra sequência cujos termos eram muito próximos uns dos outros. Ao ter contato com essa obra, Briggs sugeriu a Napier uma pequena mudança: fazer o uso de potências de 10. Era o surgimento dos logaritmos decimais, como conhecemos até hoje.

Durante um bom tempo, os logaritmos se prestaram à finalidade com a qual foram inventados: facilitar cálculos envolvendo números muito grandes. Com o desenvolvimento tecnológico e o surgimento de calculadoras eletrônicas, computadores, etc., os logaritmos e a função exponencial hoje já são pouco usados para isso. Ainda são usados, porém, para representar diversos fenômenos físicos, biológicos e econômicos.

Comente com os estudantes que, em linguagem atual, os elementos da 1ª linha do quadro correspondem ao logaritmo na base 2 dos respectivos elementos da 2ª linha do quadro.

Fonte dos dados: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

44. b) Exemplo de problema: Nessas condições, qual é a medida de intervalo de tempo mínimo (em anos inteiros) que o valor de R$ 2.000,00 precisa ficar investido para que se possa resgatar R$ 4.000,00?

Não escreva no livro

41. Considerando $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$, resolva no caderno as seguintes equações exponenciais.

a) $3^x = 10$ $S = \{2,08\overline{3}\}$

b) $4^x = 3$ $S = \{0{,}8\}$

c) $2^x = 27$ $S = \{4{,}8\}$

d) $10^x = 6$ $S = \{0{,}78\}$

e) $2^x = 5$ $S = \{2,\overline{3}\}$

f) $3^x = 2$ $S = \{0{,}625\}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{9}$ $S = \{2{,}2\}$

h) $2^x = 3$ $S = \{1{,}6\}$

42. Economistas afirmam que a dívida externa de determinado país crescerá segundo a lei $y = 40 \cdot 1{,}2^x$.
Sendo y o valor da dívida (em bilhões de dólares) e x o número de anos transcorridos após a divulgação dessa previsão, em quanto tempo a dívida estará estimada em 90 bilhões de dólares? Use $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$. Aproximadamente 4,5 anos.

43. Dentro de t décadas, contadas a partir de hoje, o valor (em reais) de um imóvel será estimado por $v(t) = 600\,000 \cdot (0{,}9)^t$. Considerando essas informações, responda às questões no caderno.

a) Qual é o valor atual desse imóvel? R$ 600.000,00

b) Qual é a perda (em reais) no valor desse imóvel durante a primeira década? R$ 60.000,00

c) Qual é a desvalorização percentual desse imóvel em uma década? 10% por década.

d) Qual é a medida de intervalo de tempo mínimo necessário, em anos, para que o valor do imóvel seja de 450 mil reais? Use $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$. 30 anos.

44. Um investimento financeiro muito conhecido dos brasileiros é a caderneta de poupança, que rende aproximadamente 6% ao ano. Ao aplicar hoje R$ 2.000,00, uma pessoa terá, daqui a n anos, um valor v, em reais, dado por $v(n) = 2\,000 \cdot (1{,}06)^n$.

a) Elabore e resolva no caderno 2 questões com os dados do enunciado. Use $(1{,}06)^3 \simeq 1{,}2$.

b) Elabore e resolva no caderno outras 2 questões com os dados do enunciado. Use nas resoluções, simultaneamente, $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 1{,}06 \simeq 0{,}025$.

44. a) Exemplo de problema: Que valor terá o poupador daqui a 3 anos? E daqui a 6 anos? Use $(1{,}06)^3 \simeq 1{,}2$.

45. A população de uma espécie de mamífero em uma região da Amazônia cresce segundo a lei $n(t) = 5\,000 \cdot e^{0{,}02t}$, em que $n(t)$ é o número estimado de elementos da espécie no ano t, contado a partir de hoje ($t = 0$). Determine no caderno o número inteiro mínimo de anos necessários para que a população atinja os números de elementos a seguir. Use $\ell n\, 2 \simeq 0{,}69$ e $\ell n\, 5 \simeq 1{,}6$.

a) 8 000; 24 anos.

b) 10 000. 35 anos.

46. (Unicamp-SP) O decaimento radioativo do estrôncio-90 é descrito pela função $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$, onde t é um instante de tempo, medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial do estrôncio-90, ou seja, a concentração no instante $t = 0$.

a) Se a concentração de estrôncio-90 cai pela metade em 29 anos, isto é, se a meia-vida do estrôncio-90 é de 29 anos, determine o valor constante de b. $\frac{1}{29}$

b) Dada uma concentração inicial P_0 de estrôncio-90, determine o tempo necessário para que a concentração seja reduzida a 20% de P_0. Considere $\log_2 10 \simeq 3{,}32$. 67,28 anos.

47. (Enem) Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por $M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br.
Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2? Alternativa **c**.

a) $E_1 = E_2 + 2$

b) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$

c) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$

d) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$

e) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

VIRALIZE!

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*. Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Os terremotos e os logaritmos

Por que o terremoto na Turquia foi tão fatal, um dos mais letais deste século

[...]

Um dos terremotos mais fortes a atingir a região em um século [...] [ocorreu] na província turca de Gaziantep [...], informou o Serviço Geológico dos Estados Unidos (USGS).

[...]

O USGS descreve um terremoto como "o tremor do solo causado por um deslizamento repentino em uma falha".

[...]

A força de um terremoto é conhecida como magnitude. [...] .Na escala de magnitude, cada aumento de um número inteiro se traduz em 32 vezes mais energia.

[...]

A Turquia não é estranha a fortes terremotos, pois está situada ao longo dos limites das placas tectônicas. Sete terremotos com magnitude 7,0 ou superior atingiram o país nos últimos 25 anos – mas o de segunda-feira [06/02/2023] foi um dos mais fortes.

[...]

SAID-MOORHOUSE, Lauren *et al*. Por que o terremoto da Turquia foi tão fatal, um dos mais letais deste século. *CNN Brasil*, 9 fev. 2023. Disponível em: https://tedit.net/lg7jjk. Acesso em: 17 ago. 2024. Adaptado.

Local onde ocorreu o terremoto na Turquia, em 6/2/2023



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 49.

A escala Richter e os efeitos relacionados

Magnitude Richter	Efeitos
menor do que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
de 3,5 a 5,4	Às vezes sentido, mas raramente causa danos.
de 5,5 a 6,0	No máximo, causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
de 6,1 a 6,9	Pode ser destrutivo em regiões em torno de até 100 km do epicentro.
de 7,0 a 7,9	Grande terremoto. Pode causar sérios danos em grandes faixas.
8,0 ou mais	Enorme terremoto. Pode causar graves danos em muitas regiões, mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

Fonte dos dados: WEBER, Demétrio. Exemplo 5: a escala Richter – "Tremor de terra de 3,4 pontos atinge Brasília". *E-Cálculo*, [20–]. Disponível em: https://tedit.net/7mi6gx. Acesso em: 17 ago. 2024.

O que é a escala Richter?

A escala Richter foi desenvolvida em 1935 por Charles Richter e Beno Gutenberg, no Instituto de Tecnologia da Califórnia. Trata-se de uma escala logarítmica sem limites. No entanto, a própria natureza impõe um limite superior a essa escala, já que ela está condicionada ao próprio limite de resistência das rochas na crosta terrestre.

Amplitude

A amplitude é uma maneira de medir a movimentação do solo e está diretamente associada à intensidade das ondas registradas nos sismógrafos. A fórmula usada é:

$$M = \log A - \log A_0$$

Em que A é a amplitude máxima medida no sismógrafo a 100 km do epicentro do terremoto, A_0 é a medida de amplitude de referência ($\log A_0$ é constante) e M é a magnitude do terremoto.

Desse modo, se quisermos comparar as magnitudes (M_1 e M_2) de 2 terremotos em função da medida de amplitude das ondas geradas, podemos considerar:

$$M_1 - M_2 = (\log A_1 - \log A_0) - (\log A_2 - \log A_0) =$$
$$= \log A_1 - \log A_2 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$$

Em particular, se $M_1 - M_2 = 1$ (terremotos que diferem de 1 magnitude na escala Richter), temos:

$$1 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \Rightarrow 10^1 = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_1 = 10 \cdot A_2$$

Desse modo, cada ponto de magnitude equivale a 10 vezes a medida de amplitude do ponto anterior.

Energia

A energia liberada em um abalo sísmico é um indicador do poder destrutivo de um terremoto. A relação entre a magnitude M de Richter e a medida de energia liberada E é dada por:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Sendo $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh (quilowatt-hora) um valor padrão (constante).

Vamos comparar as medidas de energia liberada E_1 e E_2 em 2 terremotos, T_1 e T_2, que diferem de 1 magnitude na escala Richter, a saber, de magnitudes M_1 e $M_2 = M_1 + 1$. De *, podemos escrever:

$$\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = \frac{3M}{2} \Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{\frac{3M}{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E = E_0 \cdot 10^{\frac{3M}{2}}$$

Assim, para o terremoto T_1, temos $E_1 = E_0 \cdot 10^{\frac{3M_1}{2}}$; e, para o terremoto T_2, temos:

$$E_2 = E_0 \cdot 10^{\frac{3M_2}{2}} = E_0 \cdot 10^{\frac{3 \cdot (M_1 + 1)}{2}} =$$
$$= E_0 \cdot 10^{\frac{3M_1}{2}} \cdot 10^{\frac{3}{2}} = E_1 \cdot 10^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E_2 = E_1 \cdot 10^{\frac{3}{2}}.$$

Como $10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} = \sqrt{1000} \simeq 31{,}62$, concluímos que a medida de energia liberada no terremoto T_2 é, aproximadamente, 32 vezes a medida de energia liberada no terremoto T_1.

Assim, cada ponto na escala Richter equivale a aproximadamente 32 vezes a medida de energia do ponto anterior.

Fonte dos dados: CONCEITOS de sismicidade. *Maxwell PUC-Rio*, 2023. Disponível em: https://tedit.net/t77rbt; WEBER, Demétrio.Exemplo 5: a escala Richter – "Tremor de terra de 3,4 pontos atinge Brasília". *E-Cálculo*, [20–]. Disponível em: https://tedit.net/k3djcl; POR QUE terremotos na Turquia são tão devastadores? *BBC News Brasil*, 6 fev. 2023. Disponível em: https://tedit.net/39n4yl. Acesso em: 17 ago. 2024.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

1. Considere 2 terremotos, T_1 e T_2, de 6 e 9 graus na escala Richter, respectivamente. Compare-os em relação às medidas de:

a) amplitude das ondas sísmicas geradas;

b) energia liberada no terremoto.

2. A medida de energia liberada em um terremoto T_3 é igual a 2^{25} vezes a medida de energia liberada em um terremoto T_4. Quantos pontos na escala Richter T_3 alcançou a mais do que T_4?

3. Além de terremotos, quais outros fenômenos naturais podem gerar grandes catástrofes?

PARA FUNDAMENTAR SABERES

1. O consumo médio de farinha de trigo, em quilogramas, por semana, será de $4{,}8 \cdot 10^3 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 = 48\,384\,000 \simeq 4{,}8 \cdot 10^7$. Alternativa **d**.

1. **(FGV-SP)** Estima-se que, em determinado país, o consumo médio por minuto de farinha de trigo seja 4,8 toneladas. Nessas condições, o consumo médio por semana de farinha de trigo, em quilogramas, será aproximadamente:

a) $4{,}2 \cdot 10^5$.
b) $4{,}4 \cdot 10^6$.
c) $4{,}6 \cdot 10^6$.
d) $4{,}8 \cdot 10^7$.
e) $5{,}0 \cdot 10^7$.

2. **(Enem)** O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria. Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geqslant 1$? Alternativa **e**.

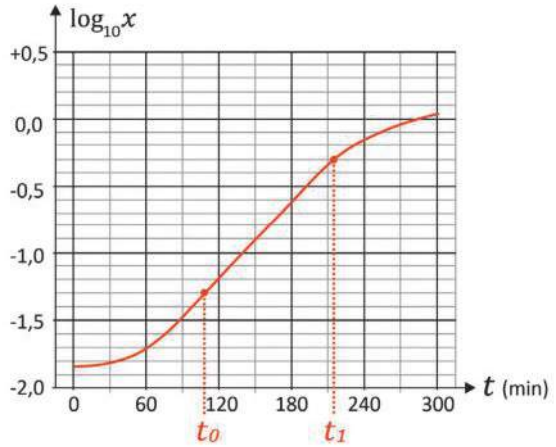
a) $P(t) = 0{,}5 \cdot t^{-1} + 8\,000$
b) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8\,000$
c) $P(t) = 4\,000 \cdot t^{-1} + 8\,000$
d) $P(t) = 8\,000 \cdot (0{,}5)^{t-1}$
e) $P(t) = 8\,000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$

3. **(ESA-MG)** A altitude (h) acima do nível do mar, em quilômetros, durante o voo de um avião é dada em função da pressão atmosférica p, em atm, por $h(p) = 30 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{p}\right)$. Em determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro desse avião era de 0,8 atm. Nesse instante, a altitude do avião, em quilômetros, considerando $\log_{10} 2 = 0{,}3$, era de:

a) 2.
b) 3.
c) 6.
d) 8.
e) 9.

Alternativa **b**.

4. **(Fuvest-SP)** A quantidade de bactérias em um líquido é diretamente proporcional à medida da *turbidez* desse líquido. O gráfico mostra, em escala logarítmica, o crescimento da turbidez x de um líquido ao longo do tempo t (medido em minutos), isto é, mostra $\log_{10} x$ em função de t. Os dados foram coletados de 30 em 30 minutos, e uma curva de interpolação foi obtida para inferir valores intermediários.



Reprodução/Fuvest, 2022.

Disponível em https///fankhauserblog.wordpress.com/.

Com base no gráfico, em quantas vezes a população de bactérias aumentou, do instante t_0 para o instante t_1?

a) 2
b) 4
c) 5
d) 10
e) 100

Alternativa **d**.

5. **(Enem)** Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono-14 nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono-14 é de 5 730 anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há 5 730 anos haverá metade do carbono-14 que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula para saber a idade de um fóssil encontrado: $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$ em que t é o tempo,

medido em ano, $Q(t)$ é a quantidade de carbono-14 medida no instante t e Q_0 é a quantidade de carbono-14 no ser vivo correspondente. Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou 5 fósseis de espécies conhecidas e mediram a quantidade de carbono-14 neles existente. Na tabela temos esses valores juntamente com a quantidade de carbono-14 nas referidas espécies vivas.

Fóssil	Q_0	$Q(t)$
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1024	512
5	2048	128

O fóssil mais antigo encontrado nessa expedição foi:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Alternativa **b**.

6. **(Enem)** A exposição a alguns níveis sonoros pode causar lesões auditivas. Por isso, em uma indústria, são adotadas medidas preventivas de acordo com a máquina que o funcionário opera e o nível N de intensidade do som, medido em decibel (dB), a que o operário é exposto, sendo $N = \log_{10} I^{10} - \log_{10} I_0^{10}$, I a intensidade do som e $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

Disponível em: www.sofisica.com.br. Acesso em: 8 jul. 2015 (adaptado).

Quando o som é considerado baixo, ou seja, $N = 48$ dB ou menos, deve ser utilizada a medida preventiva I. No caso de o som ser moderado, quando N está no intervalo (48 dB, 55 dB), deve ser utilizada a medida preventiva II. Quando o som é moderado alto, que equivale a N no intervalo (55 dB, 80 dB), a medida preventiva a ser usada é a III. Se N estiver no intervalo (80 dB, 115 dB), quando o som é considerado alto, deve ser utilizada a medida preventiva IV. E se o som é considerado muito alto, com N maior que 115 dB, deve-se utilizar a medida preventiva V.

Uma nova máquina, com $I = 8 \times 10^{-8}$ W/m^2, foi adquirida e será classificada de acordo com o nível de ruído que produz.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

O funcionário que operará a nova máquina deverá adotar a medida preventiva

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

$N = \log (8 \cdot 10^{-8})^{10} - \log (10^{-12})^{10} =$
$= 10 [\log (2^3) + \log (10^{-8})] + 120 =$
$= 10 \cdot (3 \cdot 0{,}3 - 8) + 120 =$
$= -71 + 120 = 49$; logo, 49 decibels.
Alternativa **b**.

Nesta Unidade, estudamos duas importantes funções: a exponencial e a logarítmica. Também revisamos e aprofundamos alguns conceitos já trabalhados no Anos Finais do Ensino Fundamental relacionados a essas funções. Assim, pense nas seguintes questões. Respostas pessoais.

1. Reconheço situações reais que podem ser modeladas a partir de uma função exponencial ou logarítmica?
2. Sei representar, analisar e comparar os gráficos dessas funções?
3. Consigo resolver equações exponenciais ou logarítmicas utilizando propriedades de potência e/ou dos logaritmos?
4. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
5. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas, exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

Unidade

2 MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de História, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* e do TCT *Educação Alimentar e Nutricional.*

Adriano Kirihara/Pulsar Imagens



Trabalhadoras confeccionando peças com as fibras do buriti (uma espécie de palmeira), no povoado quilombo Marcelino, em Barreirinhas (MA). Foto de 2024.

Agricultura quilombola

O direito à alimentação, um direito humano essencial, está assegurado no artigo 6º da Constituição Federal de 1988. No Brasil, ele é fortemente vinculado à agricultura familiar, que, por sua vez, é responsável por grande parte dos alimentos consumidos, conforme dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Comunidades quilombolas, que dependem da agricultura familiar, adotam práticas de uso comum da terra, promovendo desenvolvimento rural sustentável e soberania alimentar.

Uma dessas práticas de uso comum da terra é o sistema de plantio do Vale do Ribeira, em São Paulo, declarado Patrimônio Cultural do Brasil pelo Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional (Iphan) em 2018, e que abrange cerca de 88 comunidades quilombolas e é um exemplo desse modelo. No entanto, faltam políticas públicas para apoiar pequenos produtores.

Políticas que promovem monocultura e a ausência de medidas para democratização fundiária agravam a situação, resultando em conflitos de terra, desmatamento e insegurança alimentar. Após 2019, a redução de recursos para a agricultura familiar quilombola intensificou a fome e a pobreza nessas comunidades.

O Quilombo Marobá dos Teixeira, em Minas Gerais, é um exemplo dos benefícios da agricultura familiar. Reconhecida como quilombola em 2009, a comunidade se dedica à produção de farinha, feijão, milho, mandioca, cacau e hortaliças, além de se dedicar ao artesanato e ao extrativismo.

Fonte dos dados: DA TERRA à mesa: agricultura familiar quilombola e o direito à alimentação. *Fundo Brasil*. Disponível em: https://tedit.net/gba072; BRASIL. Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional. *Sistema agrícola tradicional do Vale do Ribeira agora é Patrimônio Cultural do Brasil*. 20 set. 2018. Disponível em: https://tedit.net/s15zuq; ASSOCIAÇÃO Quilombola Marobá dos Teixeira. *Fundo Brasil*. Disponível em: https://tedit.net/4pldw3. Acesso em: 20 ago. 2024.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Não escreva no livro

1. De acordo com o texto, a comunidade quilombola Marobá dos Teixeira produz, entre outros alimentos, feijão, milho e mandioca. Pesquise as informações nutricionais desses alimentos e monte no caderno uma tabela comparativa dos valores energéticos, carboidratos, proteínas e gorduras totais deles.

2. Você costuma ler o rótulo dos alimentos que consome? Troque ideias com o professor e com os colegas sobre a importância de fazer escolhas conscientes na hora de comprar alimentos, especialmente os processados e ultraprocessados. Resposta pessoal.

1. Tabela nutricional para 100 g de cada alimento citado:

Informação nutricional / Alimento	Valor energético (em kcal)	Carboidratos (em g)	Proteínas (em g)	Gorduras totais (em g)
Feijão*	29	4,1	4,2	0,5
Milho**	365	74,26	9,42	4,74
Mandioca***	160	38,06	1,36	0,28

Fonte dos dados: UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO. *Tabnut – Tabelas Nutricionais de Alimentos Consumidos no Brasil*. Disponível em: https://tedit.net/kmu6bv. Acesso em: 20 ago. 2024.
*Semente madura crua. **Amarelo. ***Crua

capítulo 3

Matrizes

Informações em tabelas

Em panfletos, embalagens, imagens da internet, entre outros locais, é comum encontrarmos informações numéricas organizadas em tabelas, com linhas e colunas.

As embalagens dos alimentos, por exemplo, devem obrigatoriamente conter uma tabela com as principais informações nutricionais.

Arroz branco (grão longo e cru)

Informação nutricional Porção de 100 g (1 xícara de chá)		
Quantidade por porção		**VD (em %)***
Valor energético	365 kcal	18,3
Carboidratos	79,95 g	26,7
Proteínas	7,13 g	9,9
Gorduras totais	0,66 g	1,3
Gorduras saturadas	0,18 g	1,8
Gorduras trans	0,00 g	0,0
Fibra alimentar	1,3 g	5,4
Sódio	5 mg	0,2

*Valores diários de referência baseados em uma dieta de 2 000 kcal. Seus valores diários podem ser maiores ou menores, dependendo de suas necessidades energéticas.

Arroz integral (grão médio e cru)

Informação nutricional Porção de 100 g (1 xícara de chá)		
Quantidade por porção		**VD (em %)***
Valor energético	362 kcal	18,1
Carboidratos	76,17 g	25,4
Proteínas	7,5 g	10,4
Gorduras totais	2,68 g	5,4
Gorduras saturadas	0,536 g	5,4
Gorduras trans	0,00 g	0,0
Fibra alimentar	3,4 g	14,2
Sódio	4 mg	0,2

*Valores diários de referência baseados em uma dieta de 2 000 kcal. Seus valores diários podem ser maiores ou menores, dependendo de suas necessidades energéticas.

Professor, você pode consultar as novas regras de rotulagem nutricional disponíveis em: https://tedit.net/ph9p49 (acesso em: 19 ago. 2024).

Fonte dos dados: UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO. Departamento de Informática em Saúde. Escola Paulista de Medicina. *Tabnut – Tabelas Nutricionais de Alimentos Consumidos no Brasil*. Disponível em: https://tedit.net/kmu6bv. Acesso em 19 ago. 2024.

Essas 2 tabelas são compostas de 8 linhas (filas horizontais) e 2 colunas (filas verticais), se considerarmos apenas os valores numéricos. Podemos especificar, por exemplo, que, para encontrar o valor, em porcentagem de valores diários (VD%), da quantidade de proteína do arroz branco ou do arroz integral, devemos consultar a linha 3 e a coluna 2 de ambas as tabelas. Porém, se o valor desejado for a quantidade de sódio desses alimentos (em uma porção de 100g), devem ser consultadas a linha 8 e a coluna 1.

Em Matemática, podemos representar essas tabelas formadas por números reais e dispostas em linhas e colunas utilizando **matrizes**.

Definição de matrizes

Sejam m e n números naturais não nulos. Uma matriz do tipo $m \times n$, ou simplesmente matriz $m \times n$, é um tipo especial de tabela de $m \times n$ números reais dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais).

Representamos usualmente uma matriz colocando os elementos (números ou variáveis) entre parênteses ou entre colchetes.

Vamos analisar alguns exemplos.

- $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz com 1 linha e 3 colunas. Isto é, uma matriz do tipo 1×3.
- $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz com 2 linhas e 2 colunas. Isto é, uma matriz do tipo 2×2.
- $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz com 3 linhas e 4 colunas. Isto é, uma matriz do tipo 3×4.
- $D = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz com 3 linhas e 1 coluna. Isto é, uma matriz do tipo 3×1.

Considere uma matriz A do tipo $m \times n$, sendo m e n números naturais não nulos. Um elemento qualquer dessa matriz pode ser representado pelo símbolo a_{ij}, de modo que o índice i refere-se à linha e o índice j, à coluna em que tal elemento se encontra.

É convencionado, além disso, que as linhas são numeradas de cima para baixo; e as colunas, da esquerda para a direita.

De modo geral, uma matriz A do tipo $m \times n$ é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que i e j são números naturais, tais que $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, sendo, portanto, a_{ij} um elemento qualquer de A.

Por exemplo: considere a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- O elemento que está na linha **1**, coluna **1**, é $a_{11} = -1$.
- O elemento que está na linha **1**, coluna **2**, é $a_{12} = 0$.
- O elemento que está na linha **2**, coluna **1**, é $a_{21} = -2$.
- O elemento que está na linha **2**, coluna **2**, é $a_{22} = 5$.
- O elemento que está na linha **3**, coluna **1**, é $a_{31} = 3$.
- O elemento que está na linha **3**, coluna **2**, é $a_{32} = 4$.

Dica

Livro *Guia Alimentar para a População Brasileira*, do Ministério da Saúde

O Ministério da Saúde disponibilizou um guia que traz importantes informações referentes à alimentação brasileira, tais como sugestões de combinações de alimentos para compor refeições completas, modos de escolher alimentos saudáveis, modos de aproveitar os alimentos sem desperdício, etc. O material está disponível em: https://tedit.net/j09fgw. Acesso em: 19 ago. 2024.

Atividades resolvidas

1. Represente a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$.

Solução:

A é uma matriz do tipo 2×3 e pode ser genericamente representada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Considerando $a_{ij} = i - j$, temos:

- $a_{11} = 1 - 1 = 0$
- $a_{12} = 1 - 2 = -1$
- $a_{13} = 1 - 3 = -2$
- $a_{21} = 2 - 1 = 1$
- $a_{22} = 2 - 2 = 0$
- $a_{23} = 2 - 3 = -1$

Assim, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Matrizes especiais

Acompanhe alguns tipos especiais de matrizes.

- **Matriz linha**: é uma matriz formada por uma única linha. Por exemplo:
  - $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz linha 1×3;
  - $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha 1×2.
- **Matriz coluna**: é uma matriz formada por uma única coluna. Por exemplo:
  - $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 4×1;
  - $B = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 3×1.
- **Matriz nula**: é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero. Pode-se indicar a matriz nula $m \times n$ por $0_{m \times n}$. Por exemplo:
  - $0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2×3;
  - $0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2×2.
- **Matriz quadrada**: é uma matriz que tem número de linhas igual ao número de colunas. Por exemplo:
  - $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2. Dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem 2;
  - $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 7 \\ \sqrt{3} & 1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 3×3. Dizemos que B é uma matriz quadrada de ordem 3.

  Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Temos que:

  - os elementos de A cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a diagonal principal de A. Assim, se A é uma matriz quadrada de ordem 3, os elementos a_{11}, a_{22} e a_{33} formam a **diagonal principal** de A;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- os elementos de A cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n + 1$ constituem a **diagonal secundária** de A. Retomando o exemplo anterior, os elementos a_{13}, a_{22} e a_{31} formam a diagonal secundária de A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- **Matriz transposta**: considerando uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se transposta de A (indicada por A^t) a matriz:

$$A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$$

Tal que $a'_{ji} = a_{ij}$ para todo i e todo j.

Em outras palavras, a matriz A^t é obtida de A, trocando-se, ordenadamente, as linhas pelas colunas. Por exemplo:

- a transposta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ é $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$;
- a transposta de $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$;
- a transposta de $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ é $C^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Pense nisto

Qual é a matriz cuja transposta tem o mesmo tipo da original?

A matriz quadrada.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. Qual é o tipo de cada uma das seguintes matrizes?

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ 3×2

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ Matriz linha, 1×4.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ Matriz quadrada, 2×2.

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ Matriz quadrada, 3×3.

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & -1 \\ 3 & 9 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 3×4

f) $F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Matriz coluna, 3×1.

2. Em cada caso, escreva no caderno o elemento a_{22}, se existir.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ 4

b) $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$ Não existe.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 1

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 7 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 1

3. Escreva no caderno a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, na qual $a_{ij} = 3i - 2j$.

4. Determine, no caderno, a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, sendo $b_{ij} = 2 + i + j$.

5. Qual é a soma dos elementos da matriz $C = (c_{ij})_{2 \times 4}$, em que $c_{ij} = 1 + i - j$? 0

6. Qual é o elemento a_{46} da matriz $A = (a_{ij})_{8 \times 8}$, na qual $a_{ij} = \frac{2j}{i} \cdot (-1)^{i+j}$? $a_{46} = \frac{2 \cdot 6}{4} \cdot (-1)^{4+6} = 3 \cdot (-1)^{10} = 3$

7. Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = i \cdot j$. Quais são os elementos que pertencem à diagonal principal de A? E à diagonal secundária de A?

Diagonal principal: 1, 4 e 9; diagonal secundária: 3, 4 e 3.

8. Na matriz A, estão representadas as quantidades de sorvetes de 1 bola e de 2 bolas comercializados mensalmente no 1º bimestre de um ano em uma sorveteria: $A = \begin{pmatrix} 1320 & 1850 \\ 1485 & 2040 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 & 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

4. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1+1 & 2+1+2 \\ 2+2+1 & 2+2+2 \\ 2+3+1 & 2+3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

9. a) **X** e **Y**: $d_{12} = d_{21} = 15$ km.
Z e **X**: $d_{13} = d_{31} = 27$ km.
Y e **Z**: $d_{23} = d_{32} = 46$ km.

b) Note que os números da linha 1 são iguais aos da coluna 1, e assim por diante; logo, $D^t = D$.

Cada elemento a_{ij} dessa matriz representa o número de unidades do sorvete do tipo i vendidas no mês j. Para responder às questões, considere que $i = 1$ representa uma bola e $i = 2$, 2 bolas; e que $j = 1$ representa janeiro e $j = 2$, fevereiro.

a) Quantos sorvetes de 2 bolas foram vendidos em janeiro? 1 485 sorvetes.

b) Em fevereiro, quantos sorvetes de 2 bolas foram vendidos a mais do que os de 1 bola? 190 sorvetes.

c) Se o sorvete de 1 bola é vendido por R$ 6,00 e o de 2 bolas é vendido por R$ 10,00, qual foi o total arrecadado pela sorveteria no 1º bimestre com a venda desses 2 tipos de sorvete? R$ 54.270,00

9. A matriz $D = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 27 \\ 15 & 0 & 46 \\ 27 & 46 & 0 \end{bmatrix}$ representa as medidas de distância (em quilômetros) entre as cidades **X**, **Y** e **Z**. Cada elemento a_{ij} dessa matriz fornece a medida de distância entre as cidades na linha i e na coluna j, com $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$.

a) Se a cidade **X** é representada pelo número 1, a **Y** por 2 e a **Z** por 3, determine no caderno as medidas de distância entre as cidades **X** e **Y**, **Z** e **X**, e **Y** e **Z**.

b) Qual é a transposta da matriz D?

10. Escreva no caderno a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$, na qual $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \geqslant j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

11. O quadrangular final de um torneio pan-americano de futebol feminino reúne as seleções da Argentina, do Brasil, do Canadá e do México, que jogam entre si, uma única vez, no sistema "todas contra todas". Na matriz Q seguinte, cada elemento q_{ij} representa a quantidade de gols que a seleção do país i marcou no jogo contra a seleção do país j, com i e j pertencentes a {1, 2, 3, 4}; e os índices 1, 2, 3 e 4 representam, respectivamente, as seleções da Argentina, do Brasil, do Canadá e do México (se $i = j$, o elemento q_{ij} será indicado por x).

$$Q = \begin{pmatrix} x & 0 & 2 & 2 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 3 & x & 0 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Neste torneio, a vitória vale 3 pontos, o empate vale 1 e a derrota não pontua. Considerando essas informações, responda no caderno.

a) Qual foi o placar do jogo entre Canadá e México? Canadá 0 × 1 México.

b) Qual seleção terminou com a menor pontuação? Qual foi essa pontuação? Argentina, com 3 pontos.

Igualdade de matrizes

Dizemos que 2 matrizes A e B de mesmo tipo $m \times n$ são iguais se todos os elementos correspondentes (que estão na mesma posição) são iguais, isto é, sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, temos que $A = B$ se $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i, com $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$; e para todo j, com $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Por exemplo, para que as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & d \\ c & -5 \end{pmatrix}$ sejam iguais, devemos ter: $a = 3$; $1 = d$; $2 = c$; e $b = -5$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

12. Determine no caderno os números reais a, b, c e d para que tenhamos $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ d & 6 \end{pmatrix}$. $a = 2$, $b = 1$, $c = 6$ e $d = 4$.

13. Determine no caderno números x, y e z reais que satisfaçam $\begin{pmatrix} x + y & 2 \\ 4 & x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & z \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$. $x = 4$, $y = 3$ e $z = 2$.

14. Em cada item, determine no caderno, o número real m que satisfaz a igualdade, caso exista.

a) $\begin{pmatrix} m - 1 & 0 \\ 1 - m & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2m \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 9 - m^2 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 7 \end{pmatrix}$ $m = -3$

14. a) Não existe número real m que satisfaça, simultaneamente, as igualdades entre os elementos correspondentes das matrizes.

Operações com matrizes

Adição

Dadas 2 matrizes do mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, é a **soma de *A* e *B*** (representada por $A + B$).

Em outras palavras, a matriz soma C é do mesmo tipo que A e B e é tal que cada um dos elementos de C é a soma de elementos correspondentes de A e B. Acompanhe os exemplos a seguir.

- $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & \frac{5}{2} \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

Subtração

Considere a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

A **matriz oposta** de A é representada por $-A$, tal que $A + (-A) = 0_{m \times n}$, sendo $0_{m \times n}$ a matriz nula do tipo $m \times n$. Note nos exemplos que a matriz $-A$ é do mesmo tipo que a matriz A e $-A$ é obtida de A, trocando-se o sinal de cada um dos elementos dela.

- $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; então $-A = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

- $B = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0{,}5 & 5 \end{bmatrix}$; então $-B = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -0{,}5 & -5 \end{bmatrix}$.

Dadas 2 matrizes do mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se **diferença entre *A* e *B*** (representada por $A - B$) a matriz resultante da adição de A com a oposta de B, isto é:

$$A - B = A + (-B)$$

Acompanhe os exemplos a seguir.

- $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

Não escreva no livro

Pense nisto

Se a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é oposta à matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então qual é a relação entre os elementos b_{ij} e a_{ij}?

Pense nisto: Se B é oposta a A e $A + B = 0$, conclui-se que, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_{ij} + b_{ij} = 0$, isto é, $a_{ij} = -b_{ij}$.

Atividades resolvidas

2. Resolva a equação $X - A + B = C$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solução:

A matriz X desconhecida é do tipo 3×1 e pode ser representada por $X = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$. Assim, temos:

$$X - A + B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m - 1 \\ n + 1 \\ p - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m - 1 = 2 \\ n + 1 = -2 \\ p - 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -3 \\ p = 6 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

15. Efetue as operações entre matrizes no caderno.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -5 & -1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

16. Considere as matrizes $A = (a_{ij})_{10 \times 12}$, em que $a_{ij} = 2i - j$, e $B = (b_{ij})_{10 \times 12}$, em que $b_{ij} = i + j$. Sendo $C = A + B$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, faça o que se pede.

a) Obtenha no caderno os valores dos elementos c_{78} e c_{95}. $c_{78} = 21$ e $c_{95} = 27$.

b) Obtenha no caderno a fórmula que fornece o valor de um elemento genérico c_{ij} em função de i e j. $c_{ij} = 3i$

17. Resolva, no caderno, as equações matriciais.

a) $X + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $X - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 18 \\ -5 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

17. c) $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$

Multiplicação

Multiplicação de um número real por uma matriz

Considere a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Sendo k um número real, o produto de k pela matriz A (indicado por: $k \cdot A$) é a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, em que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Isso significa que B é obtida de A multiplicando-se por k cada um dos elementos de A.

Considere os exemplos a seguir.

- Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ e $k = 3$, então $B = 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 21 \end{pmatrix}$.
- Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$ e $k = \frac{1}{2}$, então $B = \frac{1}{2} \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
- Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & 0 \end{pmatrix}$ e $k = -2$, então $B = (-2) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -2\sqrt{2} \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Multiplicação de matrizes

A tabela representa as notas obtidas em um curso de espanhol pelos estudantes **X**, **Y** e **Z** em cada bimestre do ano letivo.

Notas no curso de espanhol

Bimestre / Estudantes	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Estudante X	7	8	6	8
Estudante Y	4	5	5	7
Estudante Z	8	7	9	10

Dados elaborados para fins didáticos.

Observação

- A definição garante a existência do produto $A \cdot B$ apenas se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.
- A matriz produto $C = A \cdot B$ tem o número de linhas igual ao número de linhas de A e o número de colunas igual ao número de colunas de B. Acompanhe o esquema.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

(garante a existência do produto)

- De modo geral, o produto $A \cdot B$ é diferente do produto $B \cdot A$.

Atividades resolvidas

3. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, determine $A \cdot B$ e $B \cdot A$, se existirem.

Solução:

Como A é do tipo 2×2 e B também, concluímos que existem $A \cdot B$ e $B \cdot A$, pois:

$$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} = (A \cdot B)_{2 \times 2}$$

(garante a existência do produto)

$$B_{2 \times 2} \cdot A_{2 \times 2} = (B \cdot A)_{2 \times 2}$$

(garante a existência do produto)

Assim, temos:

- $A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

$c_{11} = (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 7$

$c_{12} = (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 7 = 18$

$c_{21} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 39$

$c_{22} = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 7 = 16$

Daí, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 39 & 16 \end{bmatrix}$.

- $B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$

$d_{11} = 5 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -17$

$d_{12} = 5 \cdot 2 + (-4) \cdot 4 = -6$

$d_{21} = 6 \cdot (-1) + 7 \cdot 3 = 15$

$d_{22} = 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4 = 40$

Daí, $B \cdot A = \begin{bmatrix} -17 & -6 \\ 15 & 40 \end{bmatrix}$.

Note, neste caso, que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Pense nisto

a) É sempre possível multiplicar 2 matrizes quadradas de mesma ordem? O que se pode afirmar em relação ao tipo da matriz produto?

b) Dê um exemplo de uma matriz A e uma matriz B de modo que o produto $A \cdot B$ exista, mas o produto $B \cdot A$ não possa ser definido.

Pense nisto: a) Sim; qualquer que seja a ordem n dessas matrizes, temos: $(n \times n) \cdot (n \times n)$. A matriz produto também será quadrada de ordem n. **b)** Resposta pessoal. Espera-se que o estudante escreva 2 matrizes não quadradas, em que quantidade de colunas da matriz A seja igual a quantidade de linhas da matriz B, mas a quantidade de linhas da matriz A seja diferente da quantidade de colunas da matriz B.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

18. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, determine no caderno as matrizes a seguir.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $4 \cdot A$ **b)** $\frac{1}{3} \cdot A$ **c)** $-2 \cdot A$

19. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Determine, no caderno, as matrizes a seguir.

a) $3 \cdot A + B$ **b)** $A - 3 \cdot B$

20. Resolva no caderno a equação matricial $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 3 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

21. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, determine no caderno a matriz X que satisfaz a equação $2A + B = X + 2C$.

20. $2 \cdot X = \begin{pmatrix} 18 & -2 & 2 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

24. a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Para números reais, se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Para matrizes, ela não é válida. É possível que $A \cdot B$ seja a matriz nula, sem que A ou B sejam matrizes nulas, como mostra o item **a**.

22. Sejam as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determine, no caderno, se existirem:

a) $A \cdot B$; **b)** $B \cdot A$; **c)** $A \cdot C$; **d)** $B \cdot C$.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

23. Determine, no caderno, os valores dos números reais x e y, tais que: $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. $x = 2$; $y = -4$.

24. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ para fazer o que se pede.

a) Determine no caderno o produto $A \cdot B$.

b) Relacione o resultado obtido no item **a** com uma conhecida propriedade dos números reais $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Essa propriedade também é válida para matrizes?

25. Se $n \in \mathbb{N}^*$ e A é uma matriz quadrada, definimos: $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ fatores}}$. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine as seguintes matrizes no caderno.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) A^2 **b)** A^3 **c)** A^4 **d)** A^5 **e)** A^{35}

26. Nas matrizes A e B, a seguir, estão representadas, respectivamente, as quantidades de cálcio e magnésio, em miligramas, encontradas em 100 g de algumas verduras e a quantidade de porções de 100 g de cada uma dessas verduras usadas em 3 receitas diferentes (receitas **I**, **II**, e **III**).

	Couve-manteiga refogada	Couve-flor	Espinafre cru	Acelga crua	Alface-americana	
$A =$	177	16	98	43	14	← Cálcio
	26	5	82	10	6	← Magnésio

	Receita **I**	Receita **II**	Receita **III**	
	1	0	2	← Couve-manteiga
	0	1	1	← Couve-flor
$B =$	1	2	1	← Espinafre
	1	1	1	← Acelga
	1	3	3	← Alface-americana

a) Determine no caderno a matriz $C = A \cdot B$. $\begin{bmatrix} 332 & 297 & 553 \\ 124 & 197 & 167 \end{bmatrix}$

b) Explique no caderno o significado do valor encontrado para o elemento c_{12} da matriz C.

297 mg é a quantidade total de cálcio encontrada na receita **II**.

c) Explique no caderno o significado do valor encontrado para o elemento c_{23} da matriz C.

167 mg é a quantidade total de magnésio encontrada na receita **III**.

27. Um laboratório fabrica um antiácido efervescente em 2 versões: tradicional (**T**) e especial (**E**). Na tabela, temos a composição de envelopes de 5 g, nas 2 versões.

Antiácidos efervescentes

Componente \ Versão	T	E
Bicarbonato de sódio	2,3 g	2,5 g
Carbonato de sódio	0,5 g	0,5 g
Ácido cítrico	2,2 g	2 g

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Em um certo mês foram fabricados 6 000 envelopes na versão **T** e 4 000 envelopes na versão **E**. Calcule, em quilogramas, a quantidade necessária de cada componente para a fabricação dessas 10 000 unidades.

Bicarbonato de sódio: 23,8 kg; carbonato de sódio: 5 kg; e ácido cítrico: 21,2 kg.

b) Represente no caderno, por meio de multiplicação de matrizes, os valores encontrados no item **a**.

c) Certo mês foram produzidos 15 000 envelopes do antiácido. Calcule no caderno a quantidade produzida de cada versão, sabendo que o consumo total de bicarbonato de sódio foi de 35,6 kg.

9 500 envelopes na versão **T** e 5 500 na versão **E**.

27. b) $\begin{pmatrix} 2{,}3 & 2{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 2{,}2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\,000 \\ 4\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23\,800 \\ 5\,000 \\ 21\,200 \end{pmatrix}$

INTERLIGANDO

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Computação, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Educação digital.

Matrizes e imagens digitais

Tanto uma imagem na tela de um computador quanto uma foto tirada em uma câmera digital podem ser representadas por matrizes. Esses equipamentos eletrônicos interpretam fotografias como uma matriz de cores. A quantidade de *pixels* de uma imagem tem relação com a quantidade de matrizes utilizadas na codificação das cores.

Uma imagem digital é formada de um grande número de pontos. Cada um desses pontos é chamado *pixel* (do inglês *picture element*). O *pixel* é a menor unidade (elemento) de uma imagem digital.





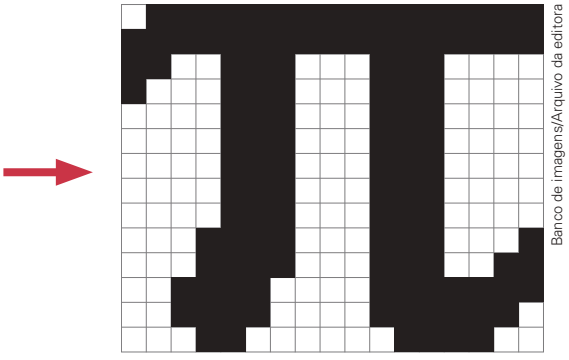
Fotos: Uwe Bergwitz/Shutterstock

Quanto maior o número de *pixels*, maior será o número de detalhes capturados no momento da composição da foto e, desse modo, maior é a resolução de imagem e, portanto, maior sua qualidade na expressão de detalhes, especialmente quando impressa.

Para compreender o modo pelo qual uma imagem digital é processada e digitalizada, podemos considerar um exemplo simples, no qual apenas 2 cores (imagens binárias) são usadas: preto e branco. Determinada imagem pode ser associada por meio de um algoritmo computacional a uma matriz cujos elementos são os números 0 e 1. Convencionaremos que 0 indica a cor preta e 1 indica a cor branca.

Considere que uma matriz M seja 14×17, conforme dado a seguir. Temos, então, representada junto dela, a imagem equivalente quando substituímos os valores numéricos pelas cores.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

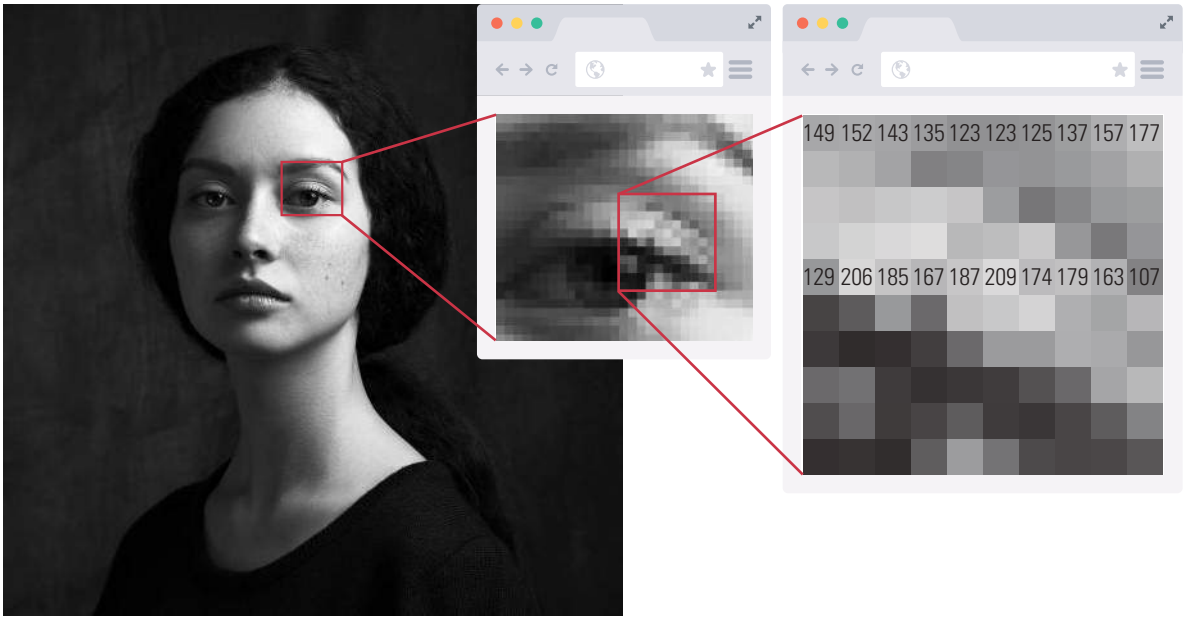
Imagem de fundo: kjpargeter/Freepik

Não escreva no livro

Reprodução/Vecteezy.com

O número de valores distintos possíveis que podem ser associados a um *pixel* varia entre 0 a 255, em que 0 indica cor preta (ausência total de intensidade luminosa) e 255 indica cor branca (intensidade luminosa máxima).

Fotos: Paradise studio/Shutterstock



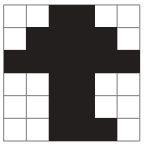
É por meio dessa codificação que são formadas as imagens digitais em preto e branco, com as tonalidades intermediárias de cinza (tons de cinza).

Podemos verificar os *pixels* no recorte do olho da mulher em um esquema 10×10 (ou seja, 100 *pixels*, pois $10 \cdot 10 = 100$), associada a essa parte destacada. Cada um dos elementos desse esquema é um número inteiro entre 0 e 255, correspondente à tonalidade de cinza utilizada em cada *pixel* indicado.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

1. Dada a matriz quadrada E de ordem 6 e a respectiva imagem binária representadas, responda no caderno às perguntas a seguir.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

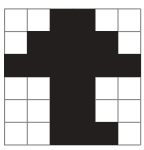


a) Qual das imagens a seguir representa a matriz transposta E^t.

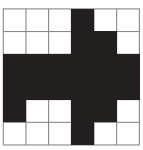
b) Qual das imagens a seguir representa a soma das matrizes $E + A$, em que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

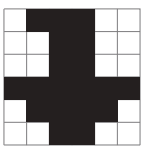
I.



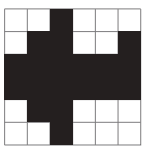
II.



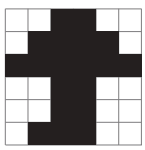
III.



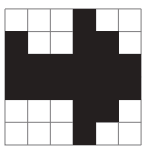
IV.



V.



VI.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

PROJETO

Não escreva no livro



Reprodução/ ONU

Esta seção favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC.

Análise do consumo de energia elétrica em uma residência

Leia os textos a seguir.

Texto **1**.

Simulador de Consumo

Entenda melhor o seu consumo de energia

Projeto Simulador de Consumo

O Simulador de Consumo foi desenvolvido para você conhecer melhor a energia elétrica consumida por cada aparelho da sua casa. Você seleciona cômodos e equipamentos, informa a potência e o tempo de uso dos aparelhos e o Simulador estima o consumo total. Ao final, ainda recebe dicas dos equipamentos mais eficientes do mercado, de acordo com o seu perfil de uso. A leitura na sua conta de luz é feita em quilowatt-hora (kWh).

[...]

ENEL RJ. *Simulador de consumo*: entenda melhor o seu consumo de energia. Disponível em: https://tedit.net/2lixf2. Acesso em: 19 ago. 2024.

Texto **2**.

Programa Nacional de Conservação de Energia Elétrica – Procel

[...]

As ações do Procel são responsáveis pela identificação, por meio do Selo Procel, dos equipamentos e eletrodomésticos mais eficientes, o que induz o desenvolvimento e ao aprimoramento tecnológico dos produtos disponíveis no mercado brasileiro.

[...]

O Selo Procel é concedido anualmente aos equipamentos que apresentam os melhores índices de eficiência energética, normalmente caracterizados pela faixa **A** da Etiqueta Nacional de Conservação de Energia – Ence, dentro das suas categorias.

[...]

NASCIMENTO, Rodrigo Limp. *Política de eficiência energética no Brasil*. Câmara dos Deputados, Brasília, DF, out. 2015. Disponível em: https://tedit.net/gehzol. Acesso em: 19 ago. 2024.



Joa Souza/Shutterstock

Selo Procel em uma geladeira.

Pensando em um projeto

Que tal aprender a calcular o consumo de energia usando matrizes e aproveitar para planejar a redução de custos da sua residência? Para isso, você vai precisar pesquisar programas de produção e de consumo de energia elétrica sustentáveis e ações que reduzam o consumo de energia elétrica, entender o padrão de consumo de energia em uma residência, aprender a calculá-lo usando matrizes e apresentar os resultados em um infográfico.

Para começar

- Organizem-se em grupos.

Plano de ação

Etapa 1

Pesquisem, em fontes confiáveis de informações, conteúdo sobre:

Professor, oriente os estudantes para que deem preferência a informações provenientes de *sites* governamentais, de instituições de ensino superior e de pesquisa, de ONGs e de revistas e jornais de maior circulação. Entre os *sites*, peça que escolham as publicações mais recentes.

1) características do consumo de energia elétrica de uma residência;
2) programas de incentivo ao consumo consciente de energia elétrica na região em que vocês vivem;
3) ações necessárias para planejar a redução de consumo de energia elétrica em uma residência.



Irina Gutyryak/Shutterstock

Lâmpadas econômicas reduzem o consumo de energia elétrica e favorecem a redução do consumo de energia elétrica.

Etapa 2

Providenciem previamente a fatura de energia elétrica de alguma residência da cidade onde vocês vivem.

Escolham 5 dispositivos e/ou aparelhos elétricos mais utilizados na residência que teve a fatura selecionada. Organizem informações sobre a marca de cada aparelho, a medida de potência, a quantidade de tempo de uso e a medida de consumo (em kWh), que corresponde à medida de consumo por hora. Para isso, pesquisem na internet um simulador de medida de consumo de energia elétrica, que estima, em kWh, a quantidade de energia elétrica consumida por aparelhos residenciais.

Etapa 3

Organizem os dados de consumo de energia da residência escolhida durante um período de 4 meses em uma matriz linha: os dados do mês **1** devem compor a 1ª linha e a 1ª coluna; os dados do mês **2**, a 1ª linha e a 2ª coluna, e assim sucessivamente.

Agora, organizem em uma matriz coluna o valor do quilowatt-hora em cada mês selecionado e efetuem a multiplicação das matrizes para obter o valor pago em cada mês. O resultado será uma matriz 1×1 que apresenta a soma dos valores pagos nesses 4 meses.

Depois, confirmem na conta de luz a quantidade de energia elétrica consumida, o valor pago pelo fornecimento e o quanto o valor pago pelo consumo dos 5 dispositivos que vocês escolheram representa do total da conta de energia elétrica.

Etapa 4

Após a análise dos dados feita na etapa anterior, debatam as melhorias que podem ser feitas visando à redução do consumo de energia elétrica na residência.

Depois, compartilhem os resultados e as melhorias com a turma.

Etapa 5

Ainda em grupo, organizem um relatório em forma de infográfico que apresente os dados coletados na pesquisa e os resultados das análises realizadas. Para criá-lo, consulte a seção *Produções em foco*.

Etapa 6

Definam com o professor o melhor momento para a socialização dos infográficos com a turma. Aproveitem a oportunidade para debater as propostas que cada grupo apresentou para a redução do consumo de energia elétrica.

Etapa 7

Produto final: divulgação dos infográficos na turma.

Os grupos devem se preparar para o debate com a turma. Cada grupo deve se organizar para que possa expor as principais ideias apresentadas no infográfico.

Verifiquem a possibilidade de divulgar os infográficos produzidos para toda a comunidade escolar.

capítulo

4 Sistemas lineares

Equação linear

Augusto precisa sacar R$ 90,00 em um caixa eletrônico que só dispõe de cédulas de R$ 10,00 e de R$ 20,00. Como pode ser feita a distribuição das cédulas a fim de totalizar R$ 90,00? Vamos analisar uma maneira de resolver esse problema utilizando os conhecimentos de Matemática.

Para fazer esse cálculo, podemos utilizar x para representar a quantidade de cédulas de R$ 10,00, e y, para a quantidade de cédulas de R$ 20,00.

Em seguida, devemos determinar os possíveis valores de x e de y de modo que $10 \cdot x + 20 \cdot y = 90$.

Essa equação é um exemplo de **equação linear**.



Ernesto Reghran/ Pulsar Imagens

Pessoa usando um caixa eletrônico em Londrina (PR). Foto de 2019.

Equação linear de incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é toda equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Em que $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são coeficientes reais, com pelo menos um coeficiente diferente de zero e $b \in \mathbb{R}$.

Chamamos b de **coeficiente** (ou **termo**) **independente** da equação. Acompanhe, a seguir, alguns exemplos de equações lineares.

- $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 27$
- $\sqrt{3}x - 2y + z = -\frac{1}{5}$
- $4x - 2y + 3z - t = 0$
- $\frac{1}{2} \cdot x = -3$

Observação

- Em uma equação linear, os expoentes de todas as incógnitas são sempre iguais a 1. Desse modo, os exemplos indicados a seguir não são equações lineares.
  $2x_1^{-1} - x_2 = 5$ $\quad y - \sqrt{x} = 0$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- Uma equação linear não apresenta termo misto (aquele que contém o produto de 2 ou mais incógnitas). Desse modo, os exemplos apresentados a seguir também não são equações lineares.
  $2x_1 + x_2x_3 = 5$ $\quad x + y + zw = 0$ $\quad x^2 + yz = 24$

Solução de uma equação linear

A sequência de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ se a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira. Isso significa que, quando substituímos x_1 por α_1, x_2 por α_2, e assim por diante, obtemos uma sentença verdadeira após efetuar as operações.

Vamos analisar alguns exemplos.

- Para elucidar a situação relacionada ao saque no caixa eletrônico apresentada no início deste capítulo, vamos analisar as soluções da equação $10x + 20y = 90$. Para isso, vamos considerar que x e y, nesse caso, são números naturais, já que não faz sentido pensar em uma quantidade de cédulas negativa, fracionária ou irracional.

  Organizando em um quadro todas as possibilidades, temos:

Quantidade de cédulas de R$ 10,00 (x)	1	3	5	7	9
Quantidade de cédulas de R$ 20,00 (y)	4	3	2	1	0

  Assim, os pares ordenados (1, 4), (3, 3), (5, 2), (7, 1), (9, 0) são soluções da equação.

- A terna ou tripla ordenada $(-1, -1, 2)$ é solução da equação $2a - 3b + c = 3$, pois $2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = -2 + 3 + 2 = 3$.

  Já a tripla (5, 4, 1) não é solução dessa equação, pois $2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 10 - 12 + 1 = -1 \neq 3$.

Note que, ao representarmos a solução de uma equação linear, obedecemos à ordem alfabética de suas incógnitas. No caso da solução da equação $2a - 3b + c = 3$, a terna $(-1, -1, 2)$ representa $a = -1$, $b = -1$ e $c = 2$.

Não escreva no livro

Pense nisto

Mostre que as soluções da equação linear $10x + 20y = 90$ são iguais às da equação $x + 2y = 9$.

$10x + 20y = 90 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10 \cdot (x + 2y) = 90 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 2y = 9.$

Professor, comente com os estudantes que podemos multiplicar ou dividir os membros de uma equação linear por um número real não nulo para obter equações equivalentes, isto é, com as mesmas soluções.

Atividades resolvidas

1. José tem exatamente R$ 39,00 para gastar apenas com latas de 350 mL de suco e/ou com garrafas de 500 mL de água com gás. Os valores unitários de cada lata e garrafa são, respectivamente, R$ 4,00 e R$ 3,00. Considerando que José gaste todo o valor que tem, de quantos modos distintos ele poderá fazer essa compra?

Solução:

Sejam x e y as quantidades compradas de latas de suco e garrafas de água com gás respectivamente, é preciso descobrir a quantidade de soluções inteiras não negativas que a equação linear $4x + 3y = 39$ apresenta.

Note que o segundo membro da equação é um número ímpar. Como o produto de um número par por um número natural qualquer resulta sempre em um número par, ou seja, $4x$ é par, a segunda parcela da adição no primeiro membro ($3y$) deve ser um número ímpar, pois um número par adicionado a um número ímpar tem como resultado um número ímpar. E isso ocorre apenas se y for ímpar.

Como $3 \cdot 13 = 39$, devemos analisar as seguintes possibilidades como solução da equação:

x	0	~~1,5~~	3	~~4,5~~	6	~~7,5~~	9
y	13	~~11~~	9	~~7~~	5	~~3~~	1

Eliminando as opções que incluem valores não inteiros, já que eles não são possíveis, José poderá comprar uma das opções a seguir:

- apenas 13 garrafas de água com gás;
- 3 latas de suco e 9 garrafas de água com gás;
- 6 latas de suco e 5 garrafas de água com gás;
- 9 latas de suco e 1 garrafa de água com gás.

2. Obtenha 3 soluções da equação linear $x - 3y = -2$, em que x e y são números reais. Essa equação apresenta outras soluções? Em caso afirmativo, quantas?

Solução:

Podemos escolher, arbitrariamente, um valor real para uma das incógnitas (por exemplo, x) e, a partir disso, determinar o valor da outra incógnita. Logo, vamos utilizar os valores arbitrários $x = 1$, $x = 0$ e $x = 7$.

- $x = 1$: $1 - 3y = -2 \Rightarrow y = 1$; ou seja, $(1, 1)$ é solução.
- $x = 0$: $0 - 3y = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$; ou seja, $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ é solução.
- $x = 7$: $7 - 3y = -2 \Rightarrow y = 3$; ou seja, $(7, 3)$ é solução.

Como podemos escolher qualquer valor real para x e calcular o valor de y correspondente obtendo a solução (x, y), concluímos que essa equação tem infinitas soluções.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. Verifique no caderno se os pares ordenados apresentados são soluções da equação linear $2x - y = 7$.

a) $(2, -3)$ $2 \cdot 2 - (-3) = 4 + 3 = 7$; ou seja, $(2, -3)$ é solução.

b) $(2, 7)$ $2 \cdot 2 - 7 = 4 - 7 = -3 \neq 7$; ou seja, $(2, 7)$ não é solução.

c) $(5, 3)$ $2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7$; ou seja, $(5, 3)$ é solução.

2. Verifique no caderno se as ordenadas triplas apresentadas são soluções da equação $x + 2y + 4z = 1$.

a) $(-1, 3, -1)$ $-1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 + 6 - 4 = 1$; ou seja, $(-1, 3, -1)$ é solução.

b) $(0, -4, -1)$ $0 + 2 \cdot (-4) + 4 \cdot (-1) = 0 - 8 - 4 = -12 \neq 1$; ou seja, $(0, -4, -1)$ não é solução.

c) $\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$ $0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$; ou seja, $\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$ é solução.

3. A equação linear $3x - 2y + z = 1$ admite como solução $(1, -3, m)$. Qual é o valor de m?

$3 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + m = 1 \Rightarrow 3 + 6 + m = 1 \Rightarrow m = -8$

4. Cíntia tem de pagar uma compra de R$ 35,00. Determine no caderno a quantidade de maneiras distintas que podem ser utilizadas para fazer o pagamento, supondo que Cíntia dispõe apenas de:

a) moedas de R$ 1,00 e cédulas de R$ 5,00; 8 maneiras distintas.

b) cédulas de R$ 2,00, R$ 5,00 e R$ 10,00. 10 maneiras distintas.

5. Uma equação linear com 2 incógnitas apresenta os pares ordenados $(1, 1)$ e $(-2, -3)$ como possíveis soluções.

a) Escreva, no caderno, uma equação linear que satisfaça tais condições. $-4x + 3y = -1$

b) Obtenha mais 3 soluções dessa equação. $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$; $\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right)$

6. Escreva, no caderno, uma equação linear com 2 incógnitas em cada caso tal que:

a) o par ordenado $(2, -1)$ seja solução da equação; Exemplo de resposta: $x + y = 1$

b) o par ordenado $(0, 0)$ seja solução da equação. Exemplo de resposta: $x + y = 0$

7. Considere a equação linear $a \cdot x + b = 0$, em que a e b são números reais quaisquer e x é a incógnita. Elabore no caderno um fluxograma para determinar o conjunto solução dessa equação de acordo com os valores de a e b. Resposta pessoal.

6. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Sistema linear 2 × 2

Vídeo

Martina passeava pelo calçadão da praia quando avistou um quiosque que vendia queijo coalho e água de coco. No cartaz havia algumas sugestões de pedidos promocionais.



Luis Moura/Arquivo da editora

Ao ler o cartaz, ela ficou interessada em saber os preços unitários do queijo coalho e da água de coco, que estavam incluídos nos combos. O vendedor informou a Martina que o preço de cada água de coco e de cada queijo coalho era o mesmo nos 2 combos. Assim, para descobrir esses preços, ela representou por x e y os valores da água de coco e do queijo coalho, respectivamente, compondo as seguintes equações:

$3x + 2y = 30$ I $\qquad\qquad 2x + y = 17$ II

O conjunto dessas 2 equações lineares é um exemplo de **sistema linear** de 2 equações (I e II) e 2 incógnitas (x e y).

Um **sistema linear 2 × 2** é um sistema composto de 2 equações lineares e 2 incógnitas.

Para resolver o problema, Martina preferiu utilizar o método da adição. Esse método consiste em escrever as equações de modo conveniente para, ao adicionarmos uma equação à outra, obtermos uma equação com apenas uma incógnita. Acompanhe a seguir.

Inicialmente, considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + \ \ y = 17 \end{cases}$$

Ao multiplicar a segunda equação por -2 e, em seguida, adicioná-la à primeira, eliminaremos a incógnita y, de modo que restará apenas a incógnita x.

$$\begin{cases} 3x + 2y = \ \ 30 \\ -4x - 2y = -34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + \cancel{2y} = \ \ 30 \\ \underline{-4x - \cancel{2y} = -34} \ + \end{cases}$$

$$-x \ \ = \ -4 \Rightarrow x = 4$$

Logo, de acordo com o resultado do sistema, a água de coco custa R$ 4,00. Podemos substituir esse valor em qualquer uma das equações anteriores, obtendo, assim, o valor de y:

$$3x + 2y = 30 \Rightarrow 3 \cdot 4 + 2y = 30 \Rightarrow 2y = 18 \Rightarrow y = 9$$

Desse modo, no combo, o queijo coalho custa R$ 9,00.

Com os 2 resultados, conseguimos definir o par ordenado que satisfaz as 2 equações do sistema: (4, 9).

Logo, o conjunto solução do sistema é: $S = \{(4, 9)\}$.

Note que o método de resolução utilizado por Martina recorre a 2 propriedades a seguir de uma igualdade com números reais.

- A igualdade é mantida quando multiplicamos os 2 membros de uma igualdade por um número real não nulo:

  Se $x = y$ e $z \in \mathbb{R}^*$, então $x \cdot z = y \cdot z$.

  Exemplo: $x = y \Leftrightarrow x \cdot 3 = y \cdot 3$.

- Uma nova igualdade é obtida quando adicionamos (ou subtraímos) 2 igualdades, membro a membro:

  Se $x = y$ e $z = w$, então $x + z = y + w$.

Pense nisto:

- Comparação: $2y = 30 - 3x \Rightarrow y = \frac{30 - 3x}{2}$;
  $2x + y = 17 \Rightarrow y = 17 - 2x$
  Daí: $\frac{30 - 3x}{2} = 17 - 2x \Rightarrow x = 4$ e $y = 9$
- Substituição: de $y = 17 - 2x$, obtemos:
  $3x + 2 \cdot (17 - 2x) = 30 \Rightarrow -x + 34 = 30 \Rightarrow x = 4$ e $y = 9$

Professor, se julgar necessário, revise com os estudantes os 2 métodos (comparação e subtração) considerando as respostas que os estudantes apresentarem.

Pense nisto

Não escreva no livro

Quais outros processos de resolução podem ser adotados para resolver o sistema linear na situação-problema da Martina?

EXPERIMENTE

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Representar o gráfico de uma equação linear

Existem *softwares* de acesso gratuito que podem ser usados para trabalhar com diversas áreas da Matemática, como Geometria plana e Geometria espacial, Álgebra, Funções, Estatística, entre outras.

A seguir, vamos verificar como um *software* de Geometria dinâmica pode ser utilizado para o estudo de equações lineares.

Um estudante obteve as seguintes soluções para a equação $x + 2y = 5$:

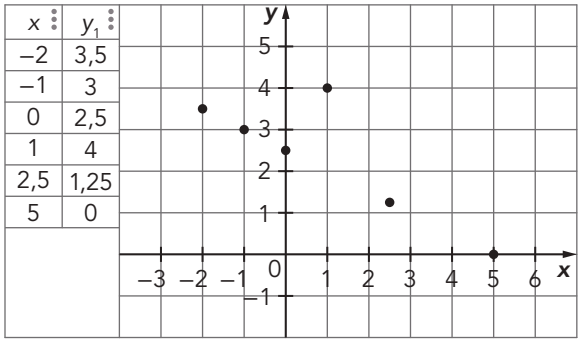
x	–2	–1	0	1	2,5	5
y	3,5	3	2,5	4	1,25	0

Ele resolveu, então, utilizar o *software* para conferir se todos os pares ordenados (x, y) que ele encontrou são soluções corretas para a equação linear, representando-os no plano cartesiano.

Para isso, ele utilizou a tabela do *software* e digitou os valores de cada par ordenado.

É possível verificar que 5 dos 6 pontos que representam os pares ordenados (x, y) da tabela estão alinhados, enquanto um deles, o ponto (1, 4), destoa dos demais. Isso chamou a atenção do estudante, e ele resolveu conferir se esse ponto é realmente uma solução para a equação que estava estudando:

$$1 + 2 \cdot 4 = 9 \neq 5$$

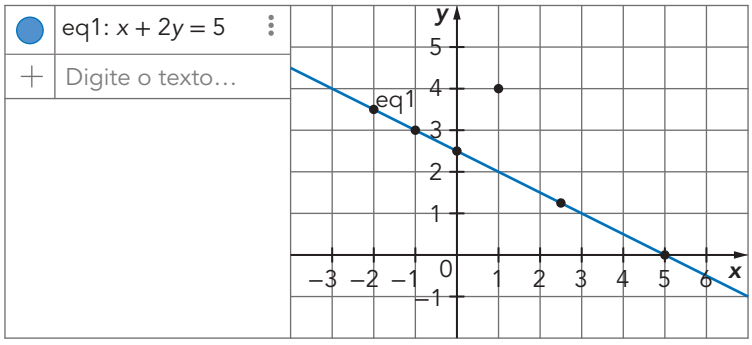


Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Janela do *software* de Geometria dinâmica com os pontos obtidos pelo estudante como solução para uma equação linear.

Portanto, o estudante concluiu que o par ordenado (1, 4) realmente não é solução da equação linear $x + 2y = 5$ e que sua inserção na tabela do *software* não estava correta.

Então ele digitou a equação linear e pôde verificar que a representação gráfica dessa equação linear com 2 incógnitas é uma reta no plano cartesiano. De fato, ele verificou, ainda, que os pares ordenados encontrados por ele que são soluções da equação linear pertencem à reta que representa a equação, enquanto o par ordenado que não é solução não pertence à reta.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Imagem exibida pelo *software* de Geometria dinâmica com a reta que representa a equação linear investigada pelo estudante.

A representação das soluções de uma equação linear feita pelo estudante é um exemplo de como é a representação gráfica de uma equação linear.

A representação gráfica de uma equação linear com 2 incógnitas é uma reta no plano cartesiano.

1. Utilize um *software* de Geometria dinâmica para determinar se os pares ordenados a seguir são solução para a equação linear $x - 3y = 6$, sem traçar a reta que representa a equação. Como você chegou a essa conclusão?

O par ordenado (0, 4) não é uma solução da equação linear, pois não está alinhado com os demais pontos.

x	−3	0	3	9	15
y	−3	4	−1	1	3

2. Utilize um *software* de Geometria dinâmica para traçar a reta que representa a equação linear $3x - 4y = 11$. Determine, no caderno, 5 soluções para a equação e use o *software* para testar se as soluções encontradas estão corretas.

Resposta pessoal. A resolução depende do *software* utilizado pelo estudante.

Classificação e interpretação geométrica

Como estudamos, um sistema linear 2 × 2 pode ser resolvido por meio de um processo algébrico. No entanto, é também possível chegar ao conjunto solução graficamente. Acompanhe as situações a seguir.

I. João e Carolina compraram, em uma loja de calçados, um par de tênis cada um. Na hora de escolher, Carolina preferiu um tênis R$ 33,00 mais caro do que o de João, sendo que o valor total da compra foi de R$ 257,00.

Carolina pagou toda a compra, e, quando João foi pagar o valor do tênis a Carolina, eles não encontraram a nota fiscal, mas lembravam do valor total e da diferença de preço dos 2 calçados.

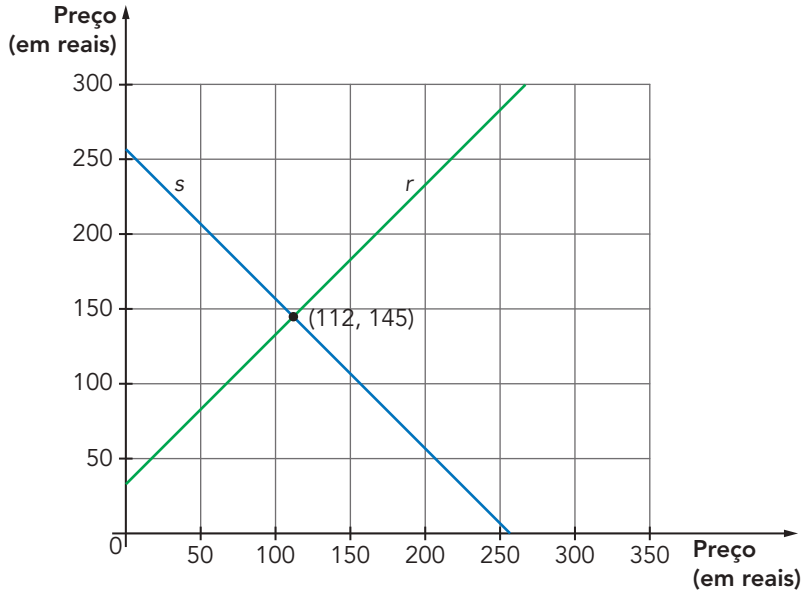
Com essas informações, eles formularam um sistema linear 2 × 2 para resolver o problema. Vamos chamar de x o valor do tênis de João e de y o valor do tênis de Carolina. Assim, temos:

$$\begin{cases} x + y = 257 \\ y - x = 33 \end{cases}$$

Quando eles resolveram esse sistema de equações algebricamente, concluíram que $x = 112$ e $y = 145$, ou seja, que o tênis de João custou R$ 112,00 e o de Carolina, R$ 145,00.

Note que também é possível verificar a representação das 2 equações lineares no plano cartesiano, como mostra a imagem.





Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

A reta r representa a equação linear $y - x = 33$. Já a reta s representa a equação linear $x + y = 257$. As retas r e s se intersectam unicamente no ponto $P(112, 145)$, que é a única solução possível do sistema.

O sistema linear decorrente da situação exposta é classificado como **possível** e **determinado**.

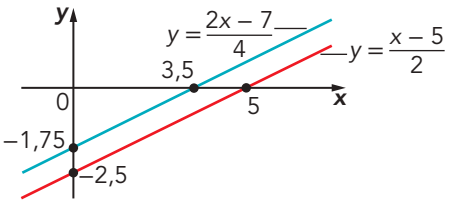
II. Considere o sistema $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases}$. Resolvendo-o pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \leftarrow (-2) \cdot (1^{\text{a}}\ \text{eq.}) \\ 2x - 4y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = -10 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases} +$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = -3$$

Perceba que, quaisquer que sejam os valores reais de x e y, a equação obtida nunca é satisfeita, pois o 1º membro sempre será nulo, enquanto o 2º membro será diferente de zero. Assim, o sistema não admite solução.

Graficamente, as representações das equações lineares $x - 2y = 5$ $\left(\text{ou } y = \frac{x-5}{2}\right)$ e $2x - 4y = 7$ $\left(\text{ou } y = \frac{2x-7}{4}\right)$ são retas distintas e paralelas, como mostrado a seguir.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Pense nisto

Você lembra o que as equações entre parênteses, indicadas anteriormente, representam?

Ambas são exemplos de leis de funções polinomiais de 1º grau.

Como as retas são distintas e paralelas, não há ponto de intersecção entre elas. Assim, o sistema não admite solução. Logo, seu conjunto solução é $S = \varnothing$.

Nesse caso, o sistema é classificado como **impossível**.

III. Considere o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$. Resolvendo-o pelo método da adição, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 1 \leftarrow (-2) \cdot (1^{a} \text{ eq.}) \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} +$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \ (\text{ou } 0 = 0)$$

Agora, considere a 2ª equação: $2x + 2y = 2$.

Dividindo os 2 membros por 2, obtemos $x + y = 1$, ou seja, a 1ª equação. Desse modo, o sistema proposto se reduz à equação $x + y = 1$, que tem infinitas soluções, por exemplo:

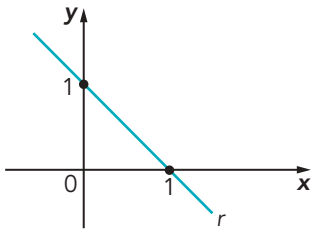
$$(0, 1);\ (2, -1);\ (1, 0);\ \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right);\ (-5, 6);\ \text{etc.}$$

Ao expressar y em função de x, obtemos $y = 1 - x$ e, desse modo, todo par ordenado na forma $(x, 1 - x)$ é solução do sistema, em que $x \in \mathbb{R}$, podendo, portanto, ser escrito como: $S = \{(x, 1 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ I.

Nesse caso, o sistema é classificado como **possível** e **indeterminado**. Poderíamos, analogamente, expressar x em função de y. De $x + y = 1$, obtemos $x = 1 - y$. Desse modo, o conjunto solução do sistema seria $S = \{(1 - y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ II. É possível verificar que I e II são formas equivalentes de expressar a solução do sistema.

Graficamente, as representações das equações lineares $x + y = 1$ e $2x + 2y = 2$ são retas coincidentes e, portanto, têm como intersecção todos os pontos da reta. Como uma reta tem infinitos pontos, o sistema admite infinitas soluções.

Desse modo, um sistema linear 2 × 2 pode ser classificado de acordo com a posição relativa de 2 retas, que são as representações gráficas das equações que compõem o sistema.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Pense nisto

No caderno, construa um fluxograma em que um sistema linear 2 × 2 possa ser classificado de acordo com a posição relativa das retas, considerando que essas retas são representações gráficas das equações que formam o sistema. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

EXPERIMENTE

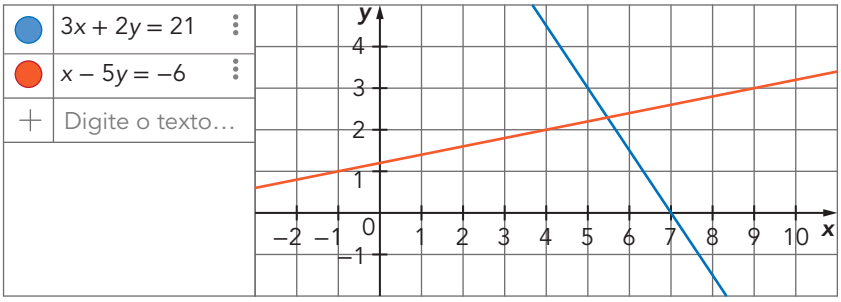
Professor, explique aos estudantes que pode haver pequenas variações entre os comandos indicados na seção e os usados no *software* de Geometria dinâmica escolhido por eles, mas o resultado obtido ao final deverá ser o mesmo em todos eles.

Não escreva no livro

Usar um *software* de Geometria dinâmica para encontrar soluções de sistemas de equações lineares

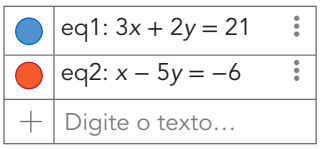
Para encontrar a solução de um sistema linear, é preciso começar inserindo as equações no campo de entrada, onde é possível digitar a equação.

Por exemplo, para determinar a solução do sistema de equações $\begin{cases} 3x + 2y = 21 \\ x - 5y = -6 \end{cases}$ digitamos as equações, como indicado a seguir.



Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Em seguida, rotulamos cada uma dessas equações. Para isso, é preciso clicar nas opções que aparecem do lado direito de cada equação e, em seguida, solicitar a inclusão do rótulo. Após esse procedimento, as equações receberam os nomes "eq1" e "eq2".

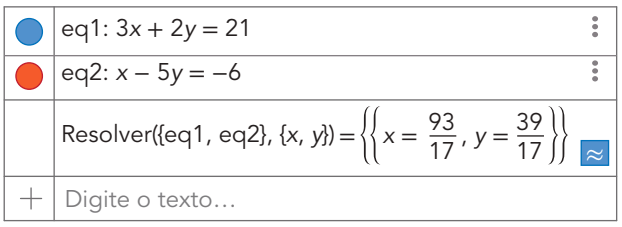


Para encontrar a solução do sistema de equações, no campo de entrada, é preciso digitar as letras "RES" para visualizar um menu de opções que será aberto e selecionar a opção para resolver o sistema por meio de uma lista de equações e de variáveis.

O *software* pedirá as equações e as variáveis para calcular a solução, que nesse caso são as equações eq1 e eq2 e as variáveis x e y. Esses dados devem ser informados da seguinte maneira:

"Resolver({eq1, eq2}, {x, y})"

O resultado será o seguinte:



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Ou seja, para o sistema linear de equações dado, a solução é $x = \frac{93}{17} \simeq 5{,}5$ e $y = \frac{39}{17} \simeq 2{,}3$.

1. Utilize um *software* de Geometria dinâmica para:

a) resolver o sistema linear $\begin{cases} 3x + 5y = 89 \\ -x + 7y = 83 \end{cases}$. $x = 8$ e $y = 13$. A resolução depende do *software* utilizado pelo estudante.

b) confirmar que o sistema $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 3x - 9y = 19 \end{cases}$ é impossível. A resolução depende do *software* utilizado pelo estudante.

c) comprovar que o sistema $\begin{cases} -2x + 4y = 13 \\ -8x + 16y = 52 \end{cases}$ tem infinitas soluções. A resolução depende do *software* utilizado pelo estudante.

8. Resolva no caderno os sistemas de equações algébrica e graficamente, classificando-os.

a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$ S = {(3, −1)}; sistema possível e determinado.

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ $S = \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$; sistema possível e determinado.

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$ $S = \{(5 - y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$; ou $S = \{(x, 5 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado.

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases}$ $S = \varnothing$; sistema impossível.

10. Exemplo de problema: Determine os valores de x e y sabendo que, nessa padaria, 2 cafés e 7 pães de queijo custam R$ 52,30 e que 3 cafés e 15 pães de queijo custam R$ 87,30.

9. Para uma festa infantil, foram compradas 72 embalagens de suco de uva integral, algumas de 2 L e outras de 1,5 L, totalizando 129 L. De acordo com essas informações, escreva no caderno 2 equações lineares associadas a esse problema, traçando as retas que representam essas equações no plano cartesiano, a fim de determinar a quantidade comprada de embalagens de suco de uva de 1,5 L. 30 unidades de 1,5 L. O gráfico encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

10. Em uma padaria, os preços de um café e da unidade de pão de queijo são, respectivamente, x e y reais. Quem comprar mais de 10 unidades de pão de queijo recebe um desconto de 20% no valor de cada pão de queijo. Considerando essas informações, elabore e resolva no caderno um problema que possa ser resolvido por meio de um sistema linear.

11. Luís e Maíra foram fazer compras, cada um com certa quantia. Se Maíra desse R$ 40,00 a Luís, eles ficariam com a mesma quantia; se Luís tivesse R$ 30,00 a menos, teria a metade do que Maíra possui. Quantos reais eles têm juntos? Escreva, no caderno, 2 equações lineares que expressam o problema e, para resolvê-lo, trace as retas que representam graficamente esse sistema linear.
R$ 360,00. O gráfico encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

12. Em uma prova com 20 testes, cada resposta correta vale 5 pontos, mas cada resposta incorreta, ou não respondida, leva à perda de 2 pontos. Considerando que cada teste tem apenas uma alternativa correta, responda às questões a seguir.

a) Maurício acertou 13 testes. Qual foi sua pontuação? 51 pontos.

b) Amanda fez 23 pontos. Quantas questões ela errou? 11 questões.

c) É possível terminar a prova com 17 pontos? Não.

13. Ao resolver graficamente o sistema $\begin{cases} x + y = m \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$, em que $m \in \mathbb{R}$, obtêm-se 2 retas distintas e paralelas. Quais são os possíveis valores de m?

13. Se as retas não se intersectam, o sistema não tem solução.

$\begin{cases} x + y = m \\ 2x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$

Se $m \neq \frac{5}{2}$, as equações do sistema ficam incompatíveis e ele não apresenta solução.

14. As retas r e s correspondem, respectivamente, às representações gráficas das equações lineares: $y = x + 2$ e $y = -2x + m$, em que $m \in \mathbb{R}$. Se r e s intersectam-se no ponto (3, 5), qual é o valor de m?

15. Determine no caderno os números reais m e n, para os quais a solução gráfica do sistema linear $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ mx + ny = -6 \end{cases}$ é formada por infinitos pontos. $m = -4$; $n = 2$.

16. Escreva, no caderno, um sistema linear de 2 equações e 2 incógnitas cujo conjunto solução é:

a) (3, −2);

b) vazio;

c) $\{(y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Os exemplos de respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

14. (3, 5) é solução do sistema $\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y = m \end{cases}$.

Aplicando os valores (3, 5) na 2ª equação, temos: $2 \cdot 3 + 5 = m \Rightarrow m = 11$.

17. c) O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Não escreva no livro

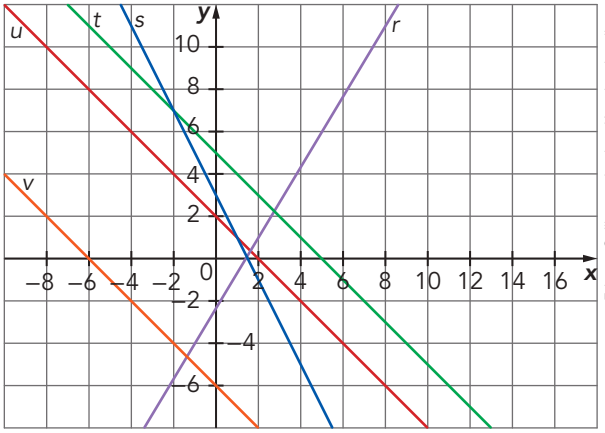
17. Um estudante representou as equações lineares seguintes em um mesmo plano cartesiano, utilizando um *software* de Geometria dinâmica.

- Equação **I**: $2x + 2y = 4$
- Equação **II**: $5x - 3y = 7$
- Equação **III**: $x + y = 5$
- Equação **IV**: $-2x - 2y = 12$
- Equação **V**: $2x + y = 3$

b) Exemplo de resposta:
$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x + \ \ y = 3 \end{cases}$

a) Estabeleça a correspondência entre cada equação linear e a representação gráfica dela.

b) Usando as equações dadas, elabore no caderno um exemplo de sistema 2×2 com uma única solução e apresente a respectiva solução.



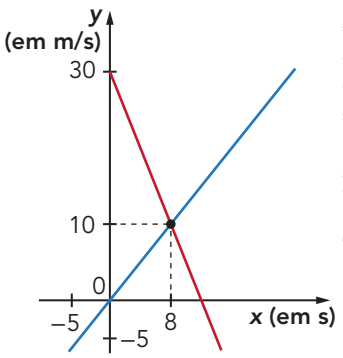
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

17. a) Equação **I**: reta *u*; Equação **II**: reta *r*; Equação **III**: reta *t*; Equação **IV**: reta *v*; Equação **V**: reta *s*.

c) Usando as equações dadas, elabore no caderno um exemplo (caso seja possível) de sistema que não tem solução e um exemplo (caso seja possível) de um sistema que tem infinitas soluções.

18. Em um experimento, um físico causou aceleração de um corpo **A** enquanto desacelerava um corpo **B**. O gráfico representa a medida de velocidade *y* dos corpos (em m/s) em função da medida de intervalo de tempo *x* (em segundos), decorrido desde o começo do experimento.

Qual será a medida de velocidade do corpo **A** quando o corpo **B** chegar ao repouso? 15 m/s



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sistema linear $m \times n$

Um conjunto de m equações lineares e n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é chamado de sistema linear $m \times n$, conforme os seguintes exemplos:

- $\begin{cases} x + y + z + \ \ w = 1 \\ x - y - z + 2w = 7 \end{cases}$ é um sistema linear 2×4, ou seja, com 2 equações e 4 incógnitas;
- $\begin{cases} \ \ x + \ \ y - 2z = \ \ 1 \\ \ \ x - 2y + \ \ z = -2 \\ 2x - \ \ y - \ \ z = \ \ 0 \end{cases}$ é um sistema linear 3×3, ou seja, com 3 equações e 3 incógnitas.

Os sistemas lineares 2×2 são um caso particular de sistema linear $m \times n$, em que $m = n = 2$.

Solução de um sistema linear

É possível afirmar que a sequência de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é **solução de um sistema linear** de n incógnitas se esta for solução de cada uma das equações do sistema.

Considere as seguintes situações:

- O par ordenado (4, 1) é solução do sistema:

$\begin{cases} \ \ x + \ \ y = \ \ 5 \\ \ \ x - \ \ y = \ \ 3 \\ -6x + 10y = -14 \end{cases}$, pois satisfaz as 3 equações;

- A tripla ordenada (5, 3, 2) é solução do sistema:

$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - y + z = 4 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$, pois, ao substituir esses valores nas equações ($x = 5$, $y = 3$ e $z = 2$), obtemos sentenças verdadeiras:

$$5 + 3 + 2 = 10;\ 5 - 3 + 2 = 4;\ 5 - 3 - 2 = 0.$$

Entretanto, a tripla ordenada (5, 4, 1) não é solução do sistema anterior, pois, ao substituir esses valores nas equações ($x = 5$, $y = 4$ e $z = 1$), obtemos uma sentença falsa:

$$5 + 4 + 1 = 10;\ 5 - 4 + 1 \neq 4;\ 5 - 4 - 1 = 0.$$

Escalonamento de um sistema linear

Considere os sistemas lineares a seguir.

- $\begin{cases} 4x - y + 2z = 5 \\ 0x + y - 3z = 7 \\ 0x + 0y + z = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4x - y + 2z = 5 \\ y - 3z = 7 \\ z = -2 \end{cases}$
- $\begin{cases} 4a + b - c + d = 0 \\ -2b + c + 3d = 1 \\ -2c + d = 3 \\ -5d = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3x - y + 2z = -4 \\ 3y - z = 7 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x - y + z - 4w = 3 \\ y + 3w = 2 \end{cases}$

Todos eles apresentam as seguintes características comuns:

- Em cada equação existe ao menos um coeficiente (de alguma incógnita) não nulo.
- Considerando a ordem "de cima para baixo", o número de coeficientes nulos, antes do 1º coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Os sistemas lineares que apresentam essas características são denominados **sistemas escalonados**.

Resolução de um sistema linear escalonado

Vamos estudar, a seguir, 2 tipos de sistemas escalonados.

Sistema com número de equações igual ao número de incógnitas

Considerando o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -5 \quad \text{I} \\ y + 2z = -3 \quad \text{II} \\ 3z = -6 \quad \text{III} \end{cases}$$

Partindo da equação III, obtemos o valor de z. Substituindo-o na equação II, obtemos y. Por fim, substituindo y e z na equação I, obtemos x. Acompanhe:

$$3z = -6 \Rightarrow z = -2 \quad \text{III}$$

$$y + 2 \cdot (-2) = -3 \Rightarrow y - 4 = -3 \Rightarrow y = 1 \quad \text{II}$$

$$x - 2 \cdot 1 + (-2) = -5 \Rightarrow x - 4 = -5 \Rightarrow x = -1 \quad \text{I}$$

Assim, a solução do sistema é (–1, 1, –2).

Se um sistema escalonado apresentar o número de equações igual ao número de incógnitas, ele é possível e determinado, isto é, tem uma única solução.

Sistema com número de equações menor do que o número de incógnitas

Não escreva no livro

Pense nisto

Determine pelo menos uma solução para o problema descrito. Quantas soluções você acha que esse problema tem?

Exemplos de respostas: (1, 2, 97); (–3, –6, 109); (20, 40, 40); etc. O sistema apresenta infinitas soluções.

Vamos considerar o seguinte problema: precisamos encontrar 3 números reais (x, y e z) cuja soma seja 100, sendo um deles o dobro de outro.

Podemos, por tentativa, encontrar algumas soluções desse sistema seguindo os passos a seguir.

- Escolha um número qualquer z.
- Determine y de modo que $y = 2z$.
- Determine x de modo que $x = 100 - (y + z) = 100 - 3z$.

Em geral, se $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

z	y	x
10	20	70
30	60	10
4,5	9	86,5
–30	–60	190
80	160	–140
⋮	⋮	⋮
α	2α	$100 - 3\alpha$
⋮	⋮	⋮

Sejam x, y e z os números procurados, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ \quad y \quad\;\; = 2z \end{cases} \text{ ou, ainda, } \begin{cases} x + y + \;\; z = 100 \\ \quad y - 2z = \;\; 0 \end{cases}$$

Note que a segunda representação revela um sistema escalonado. Para cada escolha do primeiro número (z), encontramos uma única solução para o sistema. Como z pode assumir qualquer valor real, concluímos que o sistema apresenta infinitas soluções. O conjunto solução do sistema é $S = \{(100 - 3\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Processo prático

Agora, vamos apresentar um procedimento que permitirá obter diretamente a solução geral de um sistema escalonado com um número de equações menor do que o número de incógnitas.

Como exemplo, vamos utilizar o seguinte sistema linear escalonado:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ \quad\;\; y - 2z = 1 \end{cases}$$

Acompanhe os passos:

1º) Identificamos a incógnita que não aparece no início de cada uma das equações do sistema, chamada **variável livre**, que poderá assumir qualquer valor real e, para cada valor assumido por ela, obtemos os valores das demais incógnitas, encontrando uma solução do sistema. Nesse sistema, a variável livre é ***z***.

2º) Reescrevemos cada equação do sistema de modo que o termo com a variável livre fique no 2º membro e obtemos:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 - 3z \\ y = 1 + 2z \end{cases} \quad \text{I}$$

3º) Se atribuirmos um valor para z, obteremos um sistema (escalonado) determinado. Resolvendo-o, encontraremos uma solução do sistema. Se atribuirmos outro valor para z, obteremos outro sistema, também determinado, que, após ser resolvido, fornecerá outra solução do sistema, e assim por diante.

Ao considerar, então, $z = \alpha$ (α é um número real qualquer) em I teremos:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 - 3\alpha \quad \text{II} \\ y = 1 + 2\alpha \quad \text{III} \end{cases}$$

4º) Substituímos III em II:

$$x - 2 \cdot (1 + 2\alpha) = 5 - 3\alpha \Rightarrow x - 2 - 4\alpha = 5 - 3\alpha \Rightarrow x = 7 + \alpha$$

5º) Por fim, as soluções do sistema podem ser representadas pela solução geral $(7 + \alpha, 1 + 2\alpha, \alpha)$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$; ou também por $S = \{(7 + \alpha, 1 + 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Esse tipo de sistema apresenta sempre infinitas soluções, sendo, portanto, um sistema possível e indeterminado.

Atribuindo valores reais para α, obtemos algumas de suas soluções:

- $\alpha = 0 \Rightarrow S = \{(7, 1, 0)\}$;
- $\alpha = 1 \Rightarrow S = \{(8, 3, 1)\}$;
- $\alpha = -2 \Rightarrow S = \{(5, -3, -2)\}$;
- $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{\left(\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)\right\}$; etc.

Quando um sistema escalonado apresenta um número de equações menor do que o número de incógnitas, ele é possível e indeterminado, isto é, tem infinitas soluções.

Observação

- É importante destacar que, na identificação da(s) variável(is) livre(s), levamos em consideração que, em cada equação do sistema, os termos que contêm as incógnitas aparecem sempre na mesma ordem (em geral, na ordem alfabética).
- A escolha da variável livre é, na verdade, arbitrária. Poderíamos, por exemplo, ter escolhido y como variável livre. No caso do sistema que acabamos de resolver, teríamos $z = \frac{y - 1}{2}$ e $x = \frac{y + 13}{2}$.

  Considerando $y = \beta$, com $\beta \in \mathbb{R}$, o conjunto solução do sistema seria:

$$S = \left\{\left(\frac{\beta + 13}{2}, \beta, \frac{\beta - 1}{2}\right) \mid \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

  É possível demonstrar que os 2 conjuntos solução obtidos são iguais, isto é, têm os mesmos elementos. No entanto, vamos seguir a convenção adotada a fim de facilitar a verificação das respostas e estabelecer um procedimento comum.

Atividades resolvidas

3. Encontre a solução geral do sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$ e, em seguida, apresente 3 possíveis triplas ordenadas que são soluções particulares do sistema.

Solução:

O sistema linear proposto está escalonado e tem o número de equações menor do que o número de incógnitas. Trata-se de um sistema possível e indeterminado. A variável livre do sistema é z. Reescrevendo o sistema de modo que z fique no 2º membro, temos:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - z \\ y = 1 + 3z \end{cases}$$

Considerando $z = \alpha$ (com $\alpha \in \mathbb{R}$), obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - \alpha \quad \text{I} \\ y = 1 + 3\alpha \quad \text{II} \end{cases}$$

Substituindo II em I, obtemos:

$x + 2 \cdot (1 + 3\alpha) = 2 - \alpha \Rightarrow x = -7\alpha$

Assim: $S = \{(-7\alpha, 1 + 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Consideremos alguns exemplos de soluções particulares:

- $\alpha = 3 \Rightarrow S = \{(-21, 10, 3)\}$;
- $\alpha = -2 \Rightarrow S = \{(14, -5, -2)\}$;
- $\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \left\{\left(-\frac{7}{3}, 2, \frac{1}{3}\right)\right\}$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

19. Verifique se cada um dos sistemas a seguir está escalonado.

a) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2y = 5 \end{cases}$ Sim.

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 5 \\ 2z = 8 \end{cases}$ Sim.

c) $\begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y + 7z = -2 \\ 2y - 5z = 3 \end{cases}$ Não.

20. Resolva no caderno e classifique os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ -2z = 8 \end{cases}$

20. a) $z = -4$; $y - 4 = -1 \Rightarrow y = 3$; $x + 3 - 4 = 2 \Rightarrow x = 3$; $S = \{(3, 3, -4)\}$; sistema possível e determinado.

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ y - 3z = 2 \end{cases}$

b) 2ª equação: $y = 2 + 3z$; 1ª equação: $x - (2 + 3z) + 2z = 5 \Rightarrow x = 7 + z$. Se $z = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, a solução é dada por: $S = \{(7 + \alpha, 2 + 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado.

c) $\begin{cases} x + y + z - 2w = 5 \\ y - z + 3w = 3 \\ 2z - w = 4 \\ 3w = 6 \end{cases}$

c) $w = 2$; $z = 3$; $y = 0 \Rightarrow x = 6$. A solução é $S = \{(6, 0, 3, 2)\}$; sistema possível e determinado.

21. O sistema $\begin{cases} a + b - c = \alpha \\ 2b + c = \beta \\ 3c = \gamma \end{cases}$, com as incógnitas a, b e c, é possível e determinado, e sua solução é $(-1, 2, -2)$. Determine no caderno os valores das constantes reais α, β e γ.

21. 3ª equação: $3 \cdot (-2) = \gamma \Rightarrow \gamma = -6$; 2ª equação: $2 \cdot 2 + (-2) = \beta \Rightarrow \beta = 2$; 1ª equação: $-1 + 2 - (-2) = \alpha \Rightarrow \alpha = 3$; $\alpha = 3$; $\beta = 2$ e $\gamma = -6$.

22. Uma das soluções de $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - 2z = m \end{cases}$ é $(1, -1, 0)$. Determine no caderno o conjunto solução desse sistema.

Como $(1, -1, 0)$ é solução, na 2ª equação obtemos: $-1 - 2 \cdot 0 = m \Rightarrow m = -1$. Temos: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$

Da 2ª equação, $y = -1 + 2z$. Na 1ª equação: $x - (-1 + 2z) + z = 2 \Rightarrow x + 1 - z = 2 \Rightarrow x = 1 + z$. Para um valor real qualquer α atribuído a z, segue a solução: $S = \{(1 + \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

Escalonamento

Sarah Stier/Getty Images/AFP



Partida de vôlei feminino entre Brasil e Turquia, durante os Jogos Olímpicos de Paris 2024, em Paris, na França. Seleção brasileira venceu a turca por 3 × 1 e conquistou medalha de bronze. Foto de 2024.

O vôlei é uma modalidade esportiva que se tornou muito popular entre os brasileiros principalmente a partir da década de 1980. Hoje, milhares de pessoas praticam tanto a modalidade de praia como a de quadra. As seleções nacionais de vôlei do Brasil têm obtido resultados excelentes em competições internacionais, assim como as duplas de vôlei de praia.

Nos campeonatos da Federação Internacional de Voleibol (FIVB), ao final de uma partida na quadra, as equipes podem obter as seguintes pontuações, de acordo com o resultado do jogo:

- 3 × 0 ou 3 × 1: 3 pontos para o time que venceu e 0 ponto para o que perdeu;
- 3 × 2: 2 pontos para o time que venceu e 1 ponto para o que perdeu.

Imagine que, em certo campeonato, a equipe nacional brasileira jogou 15 vezes, totalizando 29 pontos, sendo que deixou de pontuar em apenas 2 das partidas. Sabendo que a quantidade de vitórias por 3 × 0 ou 3 × 1 excede em 2 a quantidade de vitórias por 3 × 2, queremos determinar quantas partidas o Brasil venceu por 3 × 2.

Assim, vamos considerar a quantidade de vezes que a seleção marcou 3 pontos como x (vitória por 3 × 0 ou 3 × 1), a quantidade de vezes que a seleção marcou 2 pontos como y (vitória por 3 × 2) e a quantidade de vezes que a seleção marcou 1 ponto como z (derrota por 3 × 2).

Como foram 15 jogos e em 2 a equipe não pontuou (perdeu por 3 × 0 ou por 3 × 1), em 13 partidas ocorreu pontuação, isto é: $x + y + z = 13$.

Como a pontuação final foi 29, temos que: $3x + 2y + z = 29$. Adicionalmente, sabemos que $x = y + 2$. Logo, a representação do sistema linear é:

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ 3x + 2y + z = 29 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

É possível resolver esse problema por meio do método de escalonamento, que será estudado a seguir, mas para isso devemos primeiro definir o que são sistemas equivalentes.

Considere 2 sistemas lineares, S_1 e S_2. Eles são equivalentes se toda solução de S_1 é solução de S_2, e vice-versa.

Os sistemas S_1: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ e S_2: $\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$, por exemplo, são equivalentes, pois ambos admitem apenas o par (3, –1) como solução.

Dado um sistema linear qualquer, nosso objetivo é transformá-lo em outro equivalente, porém na forma escalonada. Para isso, podemos usar os seguintes procedimentos:

I. Multiplicar por k, com $k \in \mathbb{R}^*$, os 2 membros de uma equação qualquer do sistema.

II. Substituir uma equação do sistema, adicionando-a, membro a membro, a alguma outra equação. Cada uma dessas equações pode ou não estar previamente multiplicada por um número real não nulo, e a soma substituirá uma das equações originais do sistema.

III. Trocar a posição de 2 equações do sistema.

Note que os 2 primeiros procedimentos já foram usados quando estudamos a resolução de sistemas lineares 2×2. Para compreender o método do escalonamento, vamos acompanhar a resolução do problema apresentado sobre as partidas de vôlei.

Acompanhe o sistema linear que representa as pontuações das partidas de vôlei:

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ 3x + 2y + z = 29 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

a) Vamos anular os coeficientes de x na 2ª e na 3ª equação, usando o procedimento **II**:

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ -y - 2z = -10 \\ -2y - z = -11 \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela adição dela com a 1ª multiplicada por -3:

$$\begin{array}{r} -3x - 3y - 3z = -39 \\ 3x + 2y + z = 29 \\ \hline -y - 2z = -10 \end{array} \; +$$

Substituímos a 3ª equação pela adição dela com a 1ª multiplicada por -1:

$$\begin{array}{r} -x - y - z = -13 \\ x - y = 2 \\ \hline -2y - z = -11 \end{array} \; +$$

b) Fixamos a 1ª equação e aplicamos o mesmo procedimento na 2ª e na 3ª equação para anular o coeficiente y na 3ª equação:

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ -y - 2z = -10 \\ 3z = 9 \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela adição dela com a 2ª multiplicada por -2:

$$\begin{array}{r} 2y + 4z = 20 \\ -2y - z = -11 \\ \hline 3z = 9 \end{array} \; +$$

Com esses passos, obtemos um sistema escalonado.

Da 3ª equação, segue que $z = 3$, ou seja, a equipe teve 3 derrotas por 3×2.

Substituindo $z = 3$ na 2ª equação, temos que: $-y - 2 \cdot 3 = -10 \Rightarrow y = 4$, que indica que a equipe venceu 4 vezes por 3×2, que era a resposta que procurávamos.

Por fim, substituindo os valores de $y = 4$ e $z = 3$ na 1ª equação, temos ainda que: $x + 4 + 3 = 13 \Rightarrow x = 6$, que significa que a equipe obteve 6 vitórias por 3×0 ou 3×1.

Pense nisto

Não escreva no livro

Por que, na etapa **b**, para anular o coeficiente de y, foi mais conveniente utilizar a 2ª e a 3ª equações, e não a 1ª e a 3ª?

Porque, se utilizássemos a 1ª equação para anular o y da 3ª equação, obteríamos uma equação com termos em x e z, o que não seria conveniente, pois os termos em x já foram anulados na etapa anterior e o objetivo é obter um sistema de equações escalonado.

EXPERIMENTE

Não escreva no livro

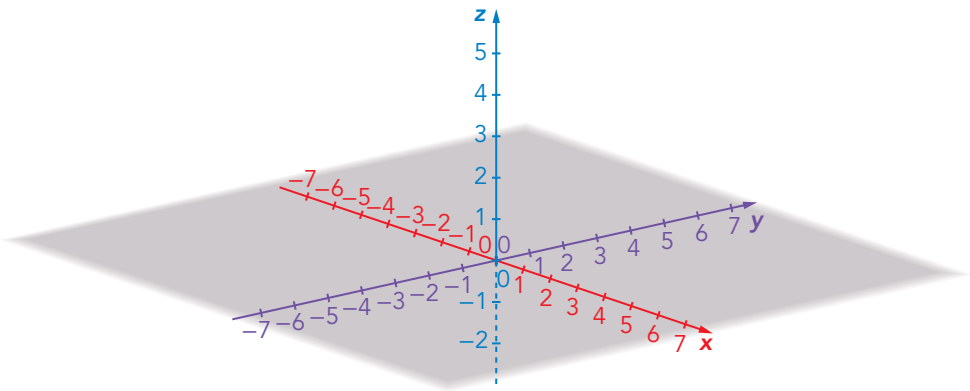
Usar um *software* de Geometria dinâmica para resolver sistemas lineares de 3 equações com 3 incógnitas

Vamos inserir em um *software* de Geometria dinâmica o sistema de equações do problema do campeonato de vôlei e verificar a resposta.

A interpretação geométrica dos sistemas de 3 equações e 3 incógnitas não faz parte dos nossos objetivos. Mas, como curiosidade, diferentemente de uma equação linear com 2 incógnitas, que pode ser representada por uma reta no plano cartesiano, uma equação com 3 incógnitas pode ser representada por um plano em um conjunto tridimensional de coordenadas. Acompanhe, a seguir, um exemplo.

●	eq1: $x + y + z = 13$
●	eq2: $3x + 2y + z = 29$
●	eq3: $x - y = 2$
	Resolver({eq2, eq1, eq3}, {x, y, z}) = {{x = 6, y = 4, z = 3}}
+	Digite o texto...

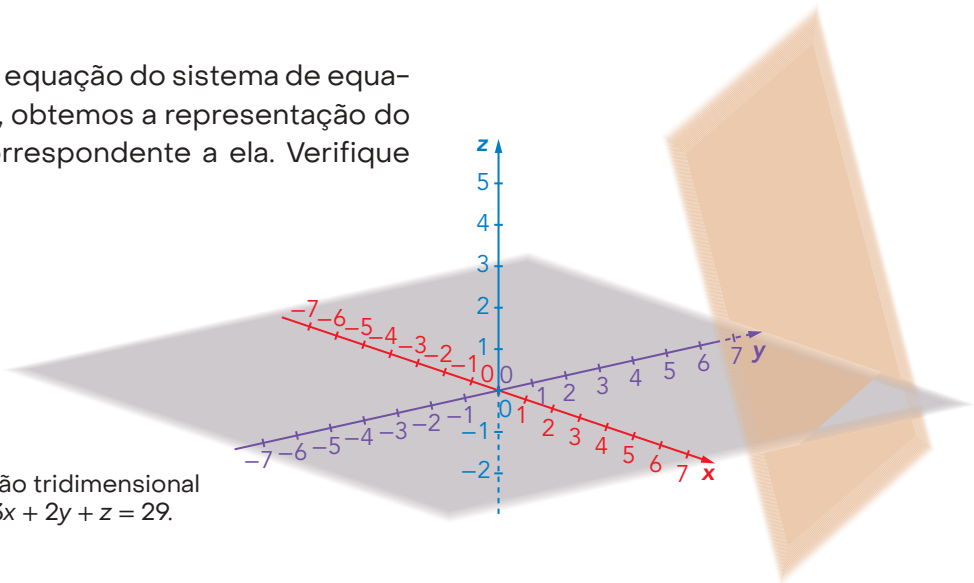
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

É possível notar na imagem a projeção de um sistema tridimensional de coordenadas, em que a reta vermelha representa o eixo *x*, a reta roxa representa o eixo *y* e a reta azul representa o eixo *z*.

Se digitarmos a 2ª equação do sistema de equações, $3x + 2y + z = 29$, obtemos a representação do plano geométrico correspondente a ela. Verifique na imagem a seguir.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Representação tridimensional da equação $3x + 2y + z = 29$.

Geometricamente, um sistema 3 × 3 está relacionado à posição relativa entre 3 planos no espaço, mas não nos aprofundaremos esse assunto nesta coleção.

Atividades resolvidas

Pense nisto. Sem a troca, para anular o coeficiente x na 3ª equação, seria necessário multiplicar a 1ª equação por -2 e multiplicar a terceira equação por 3, para depois poder adicioná-las $\left(\text{ou multiplicar a 1ª equação por } -\frac{2}{3} \text{ e adicionar à 3ª}\right)$. Com a troca, bastou multiplicar a 1ª por -2 para eliminar o coeficiente de x na 3ª equação.

4. Resolva por escalonamento o sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Solução:

Vamos começar trocando as posições das 2 primeiras equações, a fim de que o 1º coeficiente de x seja igual a 1: $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x - y + z = 2. \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$

Geralmente, esse procedimento facilita algumas contas, mas não é obrigatório.

Precisamos anular os coeficientes de x na 2ª e na 3ª equação.

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \\ 5y + 4z = 2 \end{cases}$$

$(-3) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (2ª \text{ eq.}):$

$$\begin{array}{r} -3x + 6y + 3z = 0 \\ 3x - y + z = 2 \\ \hline 5y + 4z = 2 \end{array} +$$

$(-2) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}):$

$$\begin{array}{r} -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ \hline 5y + 4z = 2 \end{array} +$$

Não escreva no livro

Pense nisto

Como a inversão da posição das 2 primeiras equações facilitou que o coeficiente x fosse anulado nas outras equações?

Como a 2ª e a 3ª equações obtidas são iguais, podemos eliminar uma delas do sistema.

Assim, temos o sistema escalonado $\begin{cases} x - 2y - z = 0 & \text{I} \\ 5y + 4z = 2 & \text{II} \end{cases}$, cujo número de equações é menor que o número de incógnitas e, portanto, é um sistema possível e indeterminado.

A variável livre do sistema é z. Considerando $z = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos:

- em II: $y = \frac{2 - 4\alpha}{5}$;
- em I: $x = 2y + z \Rightarrow x = 2\left(\frac{2 - 4\alpha}{5}\right) + \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-3\alpha + 4}{5}$$

Assim, $S = \left\{\left(\frac{-3\alpha + 4}{5}, \frac{2 - 4\alpha}{5}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

Observação

No processo de escalonamento, podemos também encontrar 2 equações com os coeficientes da mesma incógnita iguais (ou proporcionais) e o mesmo ocorrer com os coeficientes independentes. Nesses casos, já podemos retirar uma delas do sistema, pois são equações equivalentes.

5. Escalone e resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 5 \\ -4x + y = -3 \end{cases}$$

Solução:

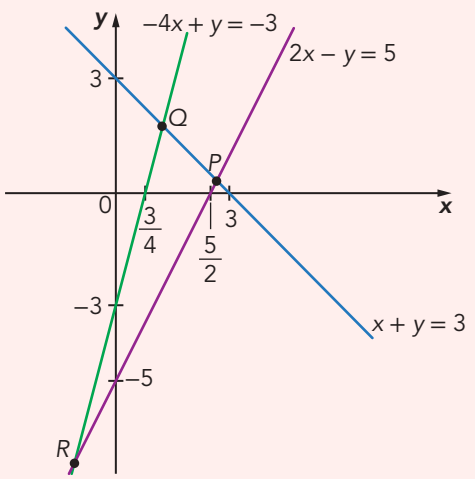
É preciso anular o coeficiente de x na 2ª e na 3ª equação. Logo, temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -3y = -1 \leftarrow (-2) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (2ª \text{ eq.}) \\ 5y = 9 \leftarrow (4) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}) \end{cases}$$

Esse sistema é impossível, pois a 2ª e a 3ª equações não podem ser satisfeitas simultaneamente.

Assim, $S = \varnothing$. É interessante interpretar graficamente esse sistema. Considerando que uma equação linear com 2 incógnitas é representada, graficamente, por uma reta no plano, verifique no plano cartesiano, a representação das 3 retas desse sistema.

Note que as 3 retas obtidas são, 2 a 2, concorrentes entre si (de acordo com os pontos *P*, *Q* e *R*), mas não existe um ponto que pertença, simultaneamente, às 3 retas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto

Como podemos determinar as coordenadas dos pontos *P*, *Q* e *R*?

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

24. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

23. Resolva no caderno os seguintes sistemas, por meio do escalonamento, e classifique-os.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$ $S = \{(1, 3, 2)\}$; sistema possível e determinado.

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 3z = 1 \\ 3x - 2z = 3 \end{cases}$ $S = \varnothing$; sistema impossível.

c) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$ $S = \varnothing$; sistema impossível.

d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - z = -1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ $S = \left\{\left(\frac{-1+\alpha}{2}, \frac{5-3\alpha}{2}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; sistema possível e indeterminado.

24. Escreva, no caderno, um sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas cuja solução seja:

a) $S = \{(1, -1, 2)\}$;

b) $S = \{\ \}$;

c) $S = \{(0, 0, 1)\}$.

Os exemplos de respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

25. Considere que 3 amigos fizeram um pedido para cada um em um restaurante árabe.

- O primeiro pediu 1 quibe, 6 esfirras e 1 suco, e pagou R$ 48,80.
- O segundo pediu 2 quibes, 4 esfirras e 1 suco, e pagou R$ 48,70.
- O terceiro pediu 3 quibes, 1 esfirra e 1 suco, e pagou R$ 43,80.

Qual é o preço unitário do quibe, da esfirra e do suco nesse restaurante? Quibe: R$ 9,50; esfirra: R$ 4,80; suco: R$ 10,50.

Experimente utilizar uma calculadora para auxiliar nos cálculos ou um *software* de Geometria dinâmica para resolver o sistema de equações. A resolução do sistema de equações depende do *software* utilizado pelo estudante.

26. Resolva no caderno, por escalonamento, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}$ $S = \{(7, 3)\}$

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 3x + 7y = 11 \end{cases}$ $S = \varnothing$

27. Resolva no caderno, graficamente, os sistemas da atividade anterior.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

28. Um supermercado vende 3 tipos de cesta, que se diferem apenas pela quantidade de artigos utilizados de cada tipo, como listado a seguir:

- cesta **1**: 2 panetones, 2 sucos e 4 porções de frutas secas;

28. a) Exemplo de problema: Determine os preços unitários de cada artigo, sabendo que a cesta **1** custa R$ 108,00, a cesta **2** custa R$ 128,00 e a cesta **3** custa R$ 75,00.
b) Exemplo de problema: Durante o mês de férias, em um supermercado, foram consumidos ao todo 396 panetones, 280 sucos e 756 porções de frutas secas. Determine as quantidades de cestas de cada tipo vendidas.

Não escreva no livro

- cesta **2**: 3 panetones, 1 suco e 5 porções de frutas secas;
- cesta **3**: 1 panetone, 2 sucos e 3 porções de frutas secas.

a) Elabore e resolva em seu caderno um problema cujas incógnitas sejam os preços unitários de cada um dos artigos.

b) Elabore e resolva em seu caderno um problema cujas incógnitas sejam as quantidades de cestas vendidas de cada tipo.

29. Uma vendedora de loja de roupas atendeu, no mesmo dia, 3 clientes e efetuou as seguintes vendas dos mesmos produtos:

- cliente **1**: 1 calça, 2 camisas e 3 pares de meias; valor: R$ 287,00.
- cliente **2**: 2 calças, 5 camisas e 7 pares de meias; valor: R$ 674,00.
- cliente **3**: 2 calças, 3 camisas e 4 pares de meias; valor: R$ 462,00.

Quanto custou cada camisa? R$ 88,00

30. Ana, Beatriz e Carolina, têm juntas R$ 340,00. Se Ana gastar R$ 10,00, passará a ter o dobro do que tem Beatriz. Se Ana gastar 40% do total que possui, passará a ter R$ 9,00 a menos que Carolina. Quanto tem cada uma?
Ana tem R$ 160,00, Beatriz tem R$ 75, 00 e Carolina R$ 105,00.

31. Em uma papelaria foram feitos os seguintes pedidos:

- pedido **I**: 4 canetas, 3 lápis e 6 borrachas.
- pedido **II**: 2 canetas, 2 lápis e 3 borrachas.

Os valores dos pedidos **I** e **II** eram, respectivamente, R$ 37,20 e R$ 20,60.

De acordo com essas informações, determine no caderno, se possível:

a) o preço unitário do lápis; R$ 4,00

b) o preço de cada caneta; Não é possível determinar.

c) o preço pago por 5 lápis, 2 canetas e 3 borrachas; R$ 32,60

d) a diferença entre o preço da caneta e o preço da borracha. Não é possível determinar.

32. **Troque ideias** com os colegas para resolver o problema seguinte.

Nas aulas de Química, você provavelmente já aprendeu a balancear uma equação química. A reação seguinte representa a decomposição térmica do clorato de potássio ($KC\ell O_3$):

$$2\ KC\ell O_3 \xrightarrow{\Delta} 2\ KC\ell + 3\ O_2$$

Ela está balanceada. Os números inteiros 2, 2 e 3 são coeficientes estequiométricos dos compostos $KC\ell O_3$, $KC\ell$ e O_2, respectivamente. Note que as quantidades de átomos de potássio (K), cloro ($C\ell$) e oxigênio (O) são as mesmas nos 2 lados (reagentes e produtos) da reação. Professor, o símbolo Δ significa calor, pois é uma decomposição térmica.

Agora, vamos conhecer outro método de balanceamento, baseado na resolução de sistemas lineares. A reação seguinte não está balanceada e representa o processo de obtenção do etanol (C_2H_5OH) a partir da sacarose ($C_{12}H_{22}O_{11}$). A sacarose é o chamado "açúcar de mesa" ou "açúcar comercial comum", encontrado em frutas e na cana-de-açúcar.

$$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O \rightarrow C_2H_5OH + CO_2$$

Vamos atribuir incógnitas aos coeficientes de cada composto envolvido na equação:

$$x\ C_{12}H_{22}O_{11} + y\ H_2O \rightarrow z\ C_2H_5OH + w\ CO_2$$

a) Para cada elemento químico da reação, faça a contagem da quantidade de átomos, igualando a quantidade no lado dos reagentes à quantidade no lado dos produtos, e escreva, no caderno, as equações lineares obtidas. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

I. oxigênio (O)

II. carbono (C)

III. hidrogênio (H)

b) Escreva, no caderno, o sistema linear de 3 equações e 4 incógnitas obtido.

c) Escalone o sistema linear obtido no item **b**.

d) Classifique o sistema escalonado no item **c** e obtenha a solução geral em função de *w*.

e) Como *w* pode assumir qualquer valor real, escolha *w* de modo a obter uma solução em que os valores de todas as incógnitas sejam os menores inteiros positivos possíveis. Em seguida, escreva no caderno a equação balanceada.

f) **Experimente** fazer o balanceamento da equação química $A\ell_2(CO_3)_3 \rightarrow A\ell_2O_3 + CO_2$ com o apoio de um *software* que resolve sistemas lineares. A resolução depende do *software* utilizado pelo estudante.

Sugerimos que a atividade **32** seja trabalhada em conjunto com o professor de Química, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Vias de tráfego

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação para o Trânsito*.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

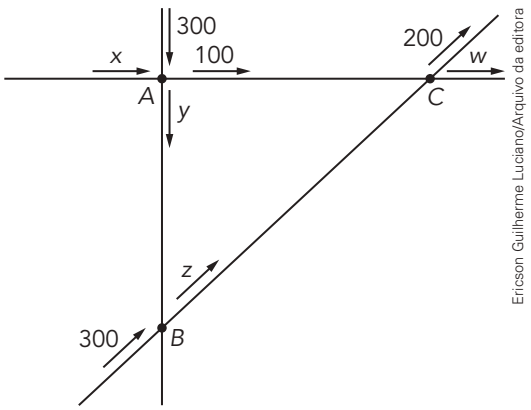
Sabia que a invenção e a popularização dos veículos automotores são as grandes responsáveis pela transformação dos espaços urbanos que culminou na formação das estruturas das cidades modernas? Para viabilizar o uso desse modo de transporte, a organização das vias nos espaços urbanos deve ser eficiente. Assim, visando à segurança e ao bem-estar das pessoas, usuárias ou não de automóveis, em seus deslocamentos pela cidade e à fluidez do trânsito, surgiu uma área de estudo denominada Engenharia de tráfego.

Atualmente, um projeto de Engenharia do tráfego conta com 3 eixos norteadores: econômico, estético e ambiental. Para cumprir seus objetivos, os engenheiros de tráfego não apenas consideram a capacidade de uma via funcionar perfeitamente, mas também os impactos que sua construção e utilização terão na região, além responder às demandas atuais da sociedade, como acessibilidade dos espaços para pessoas com deficiência.

Se, por um lado, o carro traz comodidades, há fatores negativos relacionados à sua utilização, como poluição atmosférica, congestionamentos, acidentes (que, além de colocar vidas em risco, oneram o sistema público de saúde) e necessidade de grandes investimentos em obras viárias e sistemas de controle de tráfego.

Incentivar o uso do transporte público e de bicicletas e patinetes, bem como a realização de percursos a pé e a prática de caronas solidárias, investir em linhas de metrô (nas cidades grandes) e desenvolver tecnologias para veículos movidos a energia solar são exemplos de medidas que podem ser tomadas para reduzir o número de veículos em circulação.

Uma das tarefas da Engenharia de tráfego é organizar o trânsito de veículos a fim de possibilitar maior fluidez, por meio do controle do tempo de funcionamento dos semáforos. A imagem mostra parte de uma rede viária formada por ruas com mão única, cujo sentido é indicado pelas setas. Vamos chamar de nó o cruzamento de 2 (ou mais) ruas. No exemplo, há 3 nós: *A*, *B* e *C*. Os números indicam o fluxo de veículos que passam por hora, em média, em cada rua. Para manter a fluidez e evitar congestionamentos, o fluxo de entrada em um nó deve ser igual ao fluxo de saída do mesmo nó.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

1. Considerando os fluxos de entrada e de saída em cada nó, escreva um sistema linear que descreva a situação apresentada. Quantas equações e quantas incógnitas tem o sistema?

2. Resolva o sistema de equações obtido na atividade **1** para $x = 250$.

3. Ao verificar o sentido das vias da rede, é razoável supor que os fluxos y, z e w dependem de x. Assim, escreva a solução geral desse sistema de equações obtido na atividade **1** em função de x.

Sistemas homogêneos

Um sistema linear é homogêneo se o termo (ou coeficiente) independente de cada uma de suas equações for igual a zero.

Assim, são exemplos de sistemas homogêneos:

- $S_1: \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$
- $S_2: \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ -x + 5y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$
- $S_3: \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

Agora, vamos conhecer uma propriedade característica dos sistemas homogêneos:

- Em S_1, o par ordenado (0, 0) é uma solução, pois satisfaz as 2 equações.
- Em S_2, a tripla ordenada (0, 0, 0) é uma solução, pois satisfaz as 3 equações.
- Em S_3, o par ordenado (0, 0) é uma solução, pois satisfaz as 3 equações.

De modo geral, um sistema homogêneo com n incógnitas sempre admite a sequência $\underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ zeros}}$ como solução. Essa solução é chamada solução **nula**, **trivial** ou **imprópria**.

Desse modo, um sistema homogêneo é sempre possível, pois tem, ao menos, a solução nula.

Se o sistema só tiver a solução nula, ele é possível e determinado.

Quando há outras soluções, além da solução nula, ele é possível e indeterminado. Essas soluções recebem o nome de **soluções próprias** ou **não triviais**.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

33. Resolva e classifique no caderno os seguintes sistemas homogêneos:

a) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$

$S = \{(0, 0)\}$; sistema possível e determinado.

b) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 7x - 14y = 0 \end{cases}$

$S = \{(2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado.

c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

$S = \{(0, 0, 0)\}$; sistema possível e determinado.

d) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$

$S = \{(-\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado.

34. Considere o sistema $\begin{cases} x - y + 4z = m - 2 \\ mx + 3y - z = 0 \\ 6x + (m - 3)y + 15z = 0 \end{cases}$.

a) Determine no caderno m, número real, para que o sistema seja homogêneo. $m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

b) Com o resultado do item **a**, obtenha uma solução (não nula) desse sistema em que x, y e z sejam números inteiros. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

35. Considere o sistema escalonado a seguir.

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ (m + 1)y = 0 \end{cases}$$

Para quais valores reais de m o sistema admite somente a solução nula ou trivial? $m \neq -1$

Matrizes associadas a um sistema linear

É possível associar a um sistema linear 2 matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações do sistema.

Considere os sistemas lineares a seguir.

- Ao sistema $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$, podemos associar a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, chamada de **matriz incompleta**, formada pelos coeficientes das incógnitas, e a matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, chamada de **matriz completa**.
- Ao sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 3 \\ 2x - y - z = -4 \end{cases}$, podemos associar as matrizes M e N, incompleta e completa, respectivamente:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Note que as 3 primeiras colunas de N são iguais às 3 primeiras colunas de M e que a coluna restante corresponde aos coeficientes independentes de cada uma das equações do sistema.

Representação matricial de um sistema linear

Utilizando o processo de multiplicação de matrizes e a matriz incompleta de um sistema, é possível representá-lo na forma matricial. Acompanhe, a seguir, 2 exemplos.

- O sistema $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$ na forma matricial é $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- O sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ na forma matricial é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

36. Com relação ao sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$:

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) verifique em seu caderno se os pares ordenados $(3, -2)$ e $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ são soluções dele;

b) represente-o no caderno como uma equação matricial.

37. Considere o sistema linear obtido pela multiplicação matricial seguinte e indique quais triplas ordenadas são soluções dele.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

a) $(2, 1, 3)$ Não é solução. **b)** $\left(2, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ É solução. **c)** $(-1, 1, 0)$ Não é solução.

38. Represente no caderno a matriz incompleta A e a completa B de cada um dos seguintes sistemas:
As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 8 \\ y + z = 9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x - z = -5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + y + 3z = -13 \\ -x + y + 10z = 4 \end{cases}$

39. Escreva, no caderno, em cada caso, o sistema de equações associado à representação matricial dada: As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$

40. Dado o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$:

a) represente-o no caderno como uma equação matricial;

b) verifique que $(-5, 4, 2)$ é uma solução desse sistema, mas $(1, 1, 1)$ não é;

c) verifique que, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, a terna ordenada $(-15 + 5\alpha, 10 - 3\alpha, \alpha)$ é solução desse sistema;

d) se $(p, 16, -2)$ é solução desse sistema, determine no caderno o valor de p.
As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Determinantes

Algumas operações que envolvem os coeficientes das incógnitas de um sistema linear possibilitam classificá-lo como possível (determinado ou indeterminado) ou impossível.

Se o número de equações do sistema é igual ao número de incógnitas, há um método geral de discussão.

Caso 2 × 2

Considere o sistema linear $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$, com incógnitas x e y.

Vamos construir um sistema equivalente a ele, porém na forma escalonada:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ (ad - bc) \cdot y = af - ce \quad (*) \end{cases}$$

$(-c) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (a) \cdot (2ª \text{ eq.})$

$$\begin{array}{r} -aex - bcy = -ce \\ aex + ady = af \\ \hline (ad - bc)y = af - ce \end{array} \quad +$$

Podemos obter:

- $ad - bc \neq 0$: nesse caso, é possível calcular o valor de y, que é único, e, em seguida, obter o valor de x, que também é único. Trata-se de um sistema possível e determinado;
- $ad - bc = 0$: nesse caso, o 1º membro de $(*)$ se anula. Se o 2º membro de $(*)$ também se anular, teremos $0 = 0$, e o sistema se reduziria à sua 1ª equação, sendo, portanto, possível e indeterminado.

  Se o 2º membro de $(*)$ não se anular, a 2ª equação seria uma sentença falsa, para todo $y \in \mathbb{R}$. Logo, o sistema não teria solução: seria um sistema impossível.

Assim, dependendo do anulamento ou não de $(ad - bc)$, é possível classificar o sistema em possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

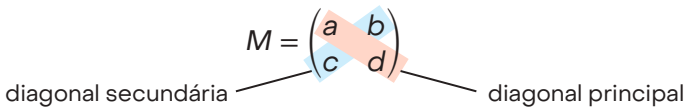
O número real $(ad - bc)$ é definido como o **determinante** da matriz incompleta (M) dos coeficientes do sistema apresentado. Logo:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } \det M = a \cdot d - b \cdot c$$

Indicaremos esse número por:

$$\det M \text{ ou } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Note que $\det M$ é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal de M e o produto dos elementos de sua diagonal secundária.



Logo: $\det M = a \cdot d - b \cdot c$.

Atividades resolvidas

6. Calcule o determinante D das matrizes a seguir:

a) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Solução:

a) $D = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) = 18 + 4 = 22$

b) $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) = -2$

Caso 3×3

Considere o sistema linear seguinte com as incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = p \end{cases}$$

Seguindo raciocínio análogo ao desenvolvido no caso 2×2, definimos como determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ o número real:

$$D = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$ *

Outra maneira de obter esse valor, sem precisar memorizar a sequência dos números da definição, é a **regra prática de Sarrus**:

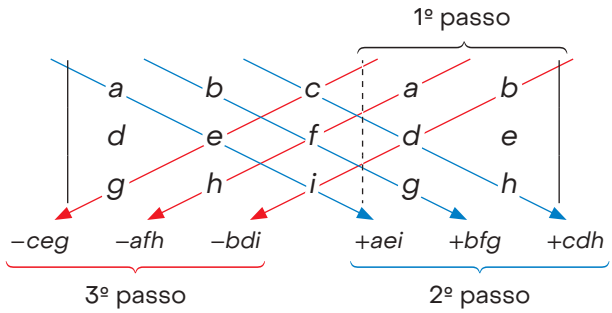
1º) Copiamos ao lado direito da matriz A as 2 primeiras colunas.

2º) Multiplicamos os elementos da diagonal principal de A. Seguindo a direção da diagonal principal, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras 2 "diagonais".

3º) Multiplicamos os elementos da diagonal secundária de A, trocando o sinal do produto obtido. Seguindo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras 2 "diagonais", também o sinal dos produtos.

4º) Adicionamos todos os produtos obtidos no 2º e no 3º passo.

Acompanhe a seguir.



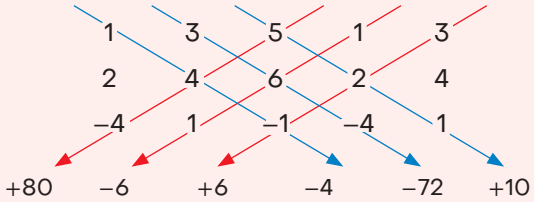
4º passo: O determinante da matriz é igual a: $aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$, que coincide com ✱ (da definição anterior).

Atividades resolvidas

7. Calcule o determinante da matriz a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução:



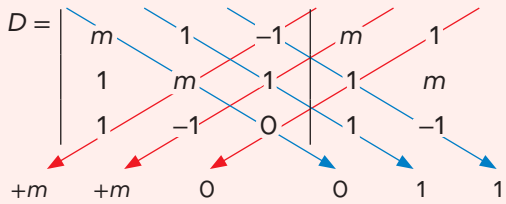
$\det A = +80 - 6 + 6 - 4 - 72 + 10 = 14$

8. Classifique o sistema linear seguinte de acordo com os valores de m.

$$\begin{cases} mx + y - z = 4 \\ x + my + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Solução:

Inicialmente, calculamos o determinante (D) da matriz incompleta dos coeficientes do sistema:



$D = 2m + 2$

- Se $D \neq 0$, isto é, se $2m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$, o sistema é possível e determinado.
- Se $D = 0$, o sistema pode ser impossível ou possível indeterminado. Assim, vamos analisar o que ocorre se $m = -1$:

$$\begin{cases} -x + y - z = 4 \\ x - y + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, as 2 primeiras equações, obtemos $0 = 4$ (F), o que indica que o sistema é impossível.

Assim, temos que:

- se $m \neq -1$, o sistema é possível determinado;
- se $m = -1$, o sistema é impossível.

Observação

- Só é possível definir o determinante de uma matriz se ela for quadrada (1×1, 2×2, 3×3, ...).
- Nos casos de matrizes 1×1 (com um único elemento), o determinante é igual ao próprio elemento da matriz. Considere os exemplos:

$$A = [5] \Rightarrow \det A = 5$$
$$B = (-2) \Rightarrow \det B = -2$$

- O estudo de determinantes de matrizes quadradas de ordem superior a 3 não faz parte dos objetivos desta coleção.
- Analogamente ao que estudamos nos casos 2×2, um sistema 3×3 também pode ser classificado de acordo com o determinante (D) da matriz incompleta dos coeficientes do sistema. É possível demonstrar que:
  - se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado, isto é, tem uma única solução;
  - se $D = 0$, o sistema pode ser impossível ou possível indeterminado (apresenta infinitas soluções).

ATIVIDADES

Não escreva no livro

41. d) $4 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} = 2 - 1 = 1$

41. Calcule no caderno os determinantes a seguir.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $4 - 6 = -2$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ $14 - 27 = -13$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$ $6 - 0 = 6$

d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

42. Considere $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Calcule no caderno o determinante das seguintes matrizes:

a) A -11

b) B 3

c) $A + B$ -15

d) $A - B$ -1

e) $A + 2B$ -13

f) $A \cdot B$ -33

43. Seja $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = 4i - 3j$. Calcule no caderno $\det A$.

44. Calcule no caderno o valor dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $-2 + 15 - 0 + 0 + 10 - 1 = 22$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $-14 + 0 + 5 + 7 + 4 + 0 = 2$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ $18 - 0 - 4 - 0 - 15 - 0 = -1$

45. Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = (i - j)^2$. Obtenha no caderno:

a) $\det A$; 8

b) $\det A^t$. 8

43. A matriz A é dada por:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = 2 + 10 = 12$.

46. Sejam as matrizes:

- $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i \geqslant j \\ 2, \text{ se } i < j \end{cases}$;
- $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ se } i \geqslant j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$.

Calcule no caderno $\det A$, $\det B$, $\det (A + B)$ e $\det (A \cdot B)$. $\det A = 1$; $\det B = -4$; $\det (A + B) = 0$; $\det (A \cdot B) = -4$.

47. Considere o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$, em que as incógnitas são x e y e $m \in \mathbb{R}$.

Determine no caderno $m \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema:

a) admita uma única solução; $m \neq 2$

b) admita infinitas soluções; Não existe $m \in \mathbb{R}$.

c) não admita solução. $m = 2$

48. Considere o sistema linear representado pela equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ k+1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para quais valores reais de k o sistema admite solução única? $k \neq 1$ e $k \neq -2$.

49. Classifique no caderno o sistema linear seguinte de acordo com os valores de m.

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 3 \\ -5x - 4y + mz = -9 \\ x + 5y - 4z = 13 \end{cases}$$

$m \neq 13$: sistema possível e determinado; $m = 13$: sistema possível e indeterminado; para que um sistema seja impossível, m não pode existir.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com os professores de Geografia e de História, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

VIRALIZE!

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* e do TCT *Diversidade Cultural*.

População quilombola

Infográfico clicável

População quilombola é de 1,3 milhão, indica recorte inédito do censo

Dos 5 568 municípios do Brasil, 1 696 possuem população quilombola. Pesquisa é importante para orientar políticas públicas necessárias a essas comunidades

Pela primeira vez na história, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) investigou integrantes dos povos e comunidades tradicionais. De acordo com dados do Censo 2022, a população quilombola do país é de 1,32 milhão de pessoas, ou 0,65% do total de habitantes do país.

Os dados mostram que foram identificados 473 970 domicílios onde residia pelo menos uma pessoa quilombola, espalhados por 1 696 municípios brasileiros. O Nordeste concentra 68,19% (ou 905 415 pessoas) do total de quilombolas.

O Censo apontou que os territórios quilombolas oficialmente delimitados abrigam 203 518 pessoas, sendo 167 202 quilombolas, ou 12,6% do total de quilombolas do país. Apenas 4,3% da população quilombola reside em territórios já titulados no processo de regularização fundiária.

"Essa pesquisa é importante para mostrar que nós, quilombolas, podemos estar onde quisermos. A luta continua. Eu acredito que esses números se estendem, vão além. Foi difícil fazer essa pesquisa porque muita gente não sabe da importância desses números, mas sei que isso pode melhorar nossa vida, porque precisamos que políticas públicas sejam criadas para atender às nossas necessidades", disse Gisele dos Santos, recenseadora quilombola.

POPULAÇÃO quilombola é de 1,3 milhão, indica recorte inédito do censo. *Gov.br*. Disponível em: https://tedit.net/kkkyqj. Acesso em: 23 ago. 2024.



Roberto Moreyra/Agência O Globo

Comunidade Quilombola Maria Joaquina, localizada na cidade de Cabo Frio (RJ), participando da coleta do Censo 2022 do IBGE. Foto de 2022.

Não escreva no livro

O termo **quilombo**, que na língua banto significa "povoação", é utilizado para designar espaços de resistência à escravidão, onde negros fugidos das plantações formavam núcleos habitacionais organizados social, econômica e politicamente. Localizados em áreas de difícil acesso, esses agrupamentos dispunham de armas e estratégias de defesa contra invasões.

Durante o período colonial no Brasil, havia centenas de comunidades quilombolas, especialmente nos estados da Bahia, de Pernambuco, de Goiás, do Mato Grosso, de Minas Gerais e de Alagoas.

O mais famoso quilombo brasileiro foi Palmares, localizado na Serra da Barriga, em União dos Palmares (AL). Palmares resistiu por quase 100 anos a ataques holandeses, luso-brasileiros e de bandeirantes paulistas, sendo destruído em 1695 após a morte de Zumbi.

Zumbi dos Palmares nasceu em 1655, em Alagoas. Ele foi um dos principais líderes da resistência negra à escravidão durante o Brasil Colonial e liderou o Quilombo dos Palmares, a mais significativa comunidade de escravizados fugitivos.

Fonte dos dados: O QUE significa quilombo. *Gov.br*. Disponível em: https://tedit.net/f3ohc0; QUILOMBO dos Palmares: antigo refúgio de negros escravizados é patrimônio cultural internacional. *g1*, 20 nov. 2021. Disponível em: https://tedit.net/uosx8f. Acesso em: 23 ago. 2024.

Cesar Diniz/Pulsar Imagens



Quilombo de Muquém em União dos Palmares (AL). Foto de 2022.

1. Por que é tão importante para a sociedade brasileira reconhecer, preservar e valorizar as comunidades quilombolas?

2. Quais são os estados brasileiros com maiores contingentes de população quilombola? Faça uma pesquisa para descobrir a resposta. Bahia, Maranhão, Minas Gerais e Pará.

3. Determine no caderno a população quilombola, segundo o Censo de 2022, dos estados da Bahia, do Maranhão, de Minas Gerais e do Pará, sabendo que:

- O Nordeste reúne os estados com maior população quilombola entre os 4 citados, e a Bahia concentra o maior contingente;
- A população quilombola no Maranhão é o dobro da população quilombola no Pará;
- As populações quilombolas dos estados com menor contingente quilombola (entre os 4 estados) são iguais;
- A média entre as populações quilombolas da Bahia e do Maranhão é de 333 500;
- A diferença entre a maior e a menor população quilombola, entre os estados citados, é de 262 000.

Nota: alguns valores sofreram arredondamentos mínimos.

População quilombola: na Bahia: 397 000; no Maranhão: 270 000; em Minas Gerais: 135 000 e no Pará: 135 000.

1. As terras ocupadas por remanescentes dos quilombos são aquelas utilizadas para a garantia da reprodução física, social, econômica e cultural dessas comunidades. Como parte de uma medida de reparação histórica, a política de regularização fundiária de Territórios Quilombolas é de suma importância para a dignidade e a garantia da continuidade desses grupos étnicos.

PARA FUNDAMENTAR SABERES

1. **(Enem)** Uma construtora, pretendendo investir na construção de imóveis em uma metrópole com cinco grandes regiões, fez uma pesquisa sobre a quantidade de famílias que mudaram de uma região para outra, de modo a determinar qual região foi o destino do maior fluxo de famílias, sem levar em consideração o número de famílias que deixaram a região. Os valores da pesquisa estão dispostos em uma matriz $A = [a_{ij}]$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, em que o elemento a_{ij} corresponde ao total de famílias (em dezena) que se mudaram da região i para a região j durante um certo período, e o elemento a_{ij} é considerado nulo, uma vez que somente são consideradas mudanças entre regiões distintas. A seguir, está apresentada a matriz com os dados da pesquisa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Qual região foi selecionada para o investimento da construtora?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

2. **(Enem)** Os candidatos **A**, **B** e **C** participaram de um concurso composto por uma prova de Matemática, uma de Português e outra de Geografia, sendo os pesos dessas três provas diferentes. As notas obtidas por esses três candidatos e os pesos atribuídos a essas provas estão representados nas tabelas:

Tabela I (Notas)			
Candidato	**Matemática**	**Português**	**Geografia**
A	9	6	7
B	8	7	8
C	9	5	6

As notas finais são obtidas somando-se os produtos das notas pelos respectivos pesos. As notas finais dos três candidatos podem ser obtidas multiplicando-se a matriz das notas dos três candidatos nas três provas pela matriz dos pesos das três provas.

Tabela II (Pesos)	
Matérias	**Pesos**
Matemática	3
Português	2
Geografia	1

A matriz das notas finais dos três candidatos é:

a) $\begin{pmatrix} 52 & 37 & 43 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 46 \\ 46 \\ 43 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 66 \\ 46 \\ 20 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 27 & 12 & 7 \\ 24 & 14 & 8 \\ 27 & 10 & 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 27 & 18 & 21 \\ 16 & 14 & 16 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

3. **(ESA-MG)** Os Batalhões de Inteligência Militar desenvolvem formas para o envio de mensagens secretas, sendo uma delas os códigos matemáticos que seguem os passos abaixo:

1. O destinatário e o remetente possuem uma matriz chave C;
2. O destinatário recebe do remetente uma matriz P, tal que $MC = P$, onde M é a matriz da mensagem a ser codificada;
3. Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: 1 = a, 2 = b, 3 = c, … , 23 = z;
4. Consideramos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras k, w e y;
5. O número zero corresponde ao ponto de exclamação;
6. A mensagem é lida, encontrando a matriz M, fazendo correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue:

$$m_{11}\, m_{12}\, m_{13}\, m_{21}\, m_{22}\, m_{23}\, m_{31}\, m_{32}\, m_{33}.$$

Considere as matrizes:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quantidade de famílias que se mudaram para a região **1**: 0 + 2 + 1 + 1 = 4; para a região **2**: 4 + 2 + 0 + 2 = 8; para a região **3**: 2 + 6 + 2 + 0 = 10; para a região **4**: 2 + 2 + 3 + 4 = 11; para a região **5**: 5 + 3 + 0 + 4 = 12. Alternativa **e**.

2. Temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 8 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\text{matriz de notas}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{matriz dos pesos}} = \begin{pmatrix} 46 \\ 46 \\ 43 \end{pmatrix}$$

$9 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 46$
$8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 46$
$9 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 43$
Alternativa **b**.

Com base nas informações descritas, qual alternativa apresenta a mensagem enviada por meio da matriz M? Alternativa **c**.

a) Brasil!
b) Território!
c) Pantanal!
d) Montanha!
e) Guerreiro!

4. **(Enem)** O metrô de um município oferece dois tipos de tíquetes com colorações diferentes, azul e vermelha, sendo vendidos em cartelas, cada qual com nove tíquetes da mesma cor e mesmo valor unitário. Duas cartelas de tíquetes azuis e uma cartela de tíquetes vermelhos são vendidas por R$ 32,40. Sabe-se que o preço de um tíquete azul menos o preço de um tíquete vermelho é igual ao preço de um tíquete vermelho mais cinco centavos.

Qual o preço, em real, de uma cartela de tíquetes vermelhos? Alternativa **b**.

a) 4,68
b) 6,30
c) 9,30
d) 10,50
e) 10,65

5. **(Enem)** A meta de uma concessionária de automóveis é vender, pelo menos, 104 carros por mês. Sabe-se que, em média, em dias em que não são oferecidos descontos, são vendidos 3 carros por dia; em dias em que há o desconto mínimo, são vendidos 4 carros por dia; e, em dias em que há o desconto máximo, são vendidos 5 carros por dia.

No mês atual, até o fim do expediente do sexto dia em que a concessionária abriu, não foram oferecidos descontos, tendo sido vendidos 18 carros, conforme indicava a média. Ela ainda abrirá por mais 20 dias neste mês.

A menor quantidade de dias em que será necessário oferecer o desconto máximo, de modo que ainda seja possível a concessionária alcançar sua meta de vendas para o mês, é Alternativa **a**.

a) 6. **b)** 10. **c)** 11. **d)** 13. **e)** 18.

6. **(Uerj)** Uma nutricionista recomendou, para uma pessoa adulta, a ingestão de pão, fruta e iogurte no café da manhã. Os três alimentos, em conjunto, devem conter, exatamente, 16 g de proteínas, 124 g de carboidratos e 10 g de gorduras. Admita a seguinte quantidade de nutrientes, em gramas, em uma porção de 100 g de cada alimento:

Quantidade de nutriente (em g)	Porção de 100 g		
	Pão	Fruta	Iogurte
Proteínas	8	0	4
Carboidratos	60	20	2
Gorduras	4	0	3

A partir da tabela, calcule quantas porções de cada alimento essa pessoa deve ingerir de modo a consumir as quantidades de nutrientes recomendadas para seu café da manhã.

1 porção de pão, 3 porções de frutas e 2 porções de iogurte.

7. **(UEA-AM)** Dada a matriz quadrada $A = (a_{ij})$, de ordem 2, tal que $a_{ij} = 5i - j^2$, o valor do determinante da matriz A é igual a Alternativa **c**.

a) 5.
b) 9.
c) 15.
d) 19.
e) 25.

Nesta Unidade, estudamos as matrizes e tivemos a oportunidade de consolidar e aprofundar o estudo sobre os sistemas lineares. Respostas pessoais.

1. Reconheço a importância da linguagem matricial para a organização de dados e informações numéricas?
2. Resolvo problemas que envolvem as operações entre matrizes, sobretudo a multiplicação?
3. Consigo representar e resolver problemas em contextos variados usando a linguagem matemática das equações e dos sistemas lineares?
4. Sei resolver sistemas 2×2 e consigo interpretá-los graficamente?
5. Sei resolver sistemas 3×3 usando o método do escalonamento?
6. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
7. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas, exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

Holograma

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

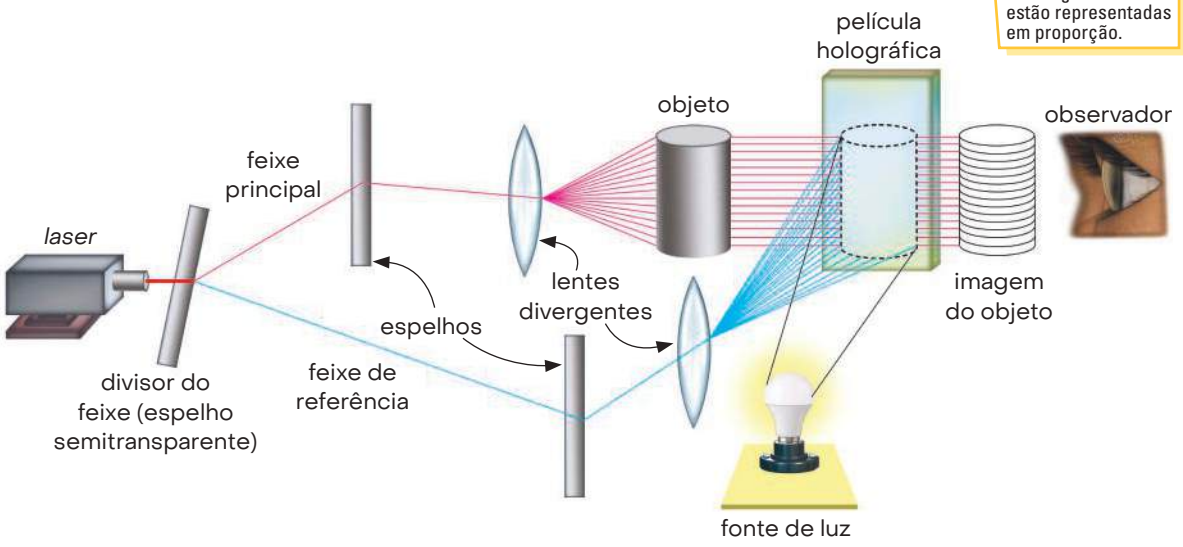
Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

A holografia consiste em uma técnica que permite gravar e posteriormente reconstruir a imagem de um objeto tridimensionalmente.

Podemos pensar em um holograma como um processo análogo à gravação e à reprodução de sons no sistema *surround*, encontrado em algumas salas de cinema e em alguns fones de ouvido estéreos, em que é possível reproduzir efeitos sonoros em 3 dimensões.

Uma das maneiras de formar um holograma de um objeto real é utilizando um *laser*, que emite um feixe de luz sobre um espelho semitransparente e se divide em 2 feixes, o principal e o de referência. O feixe principal incide sobre o objeto que é iluminado, e a luz espalhada incide em uma película holográfica de alta definição. O feixe de referência incide direto sobre a película. Quando esses feixes se reencontram sobre a película, é gerada uma interferência luminosa que armazena as informações do objeto. Quando essa película é iluminada por uma fonte de luz, ocorre a projeção tridimensional do objeto, o holograma. Por meio desse processo, é possível ter uma visão espacial do objeto, como se o estivéssemos vendo na realidade.

As imagens não estão representadas em proporção.

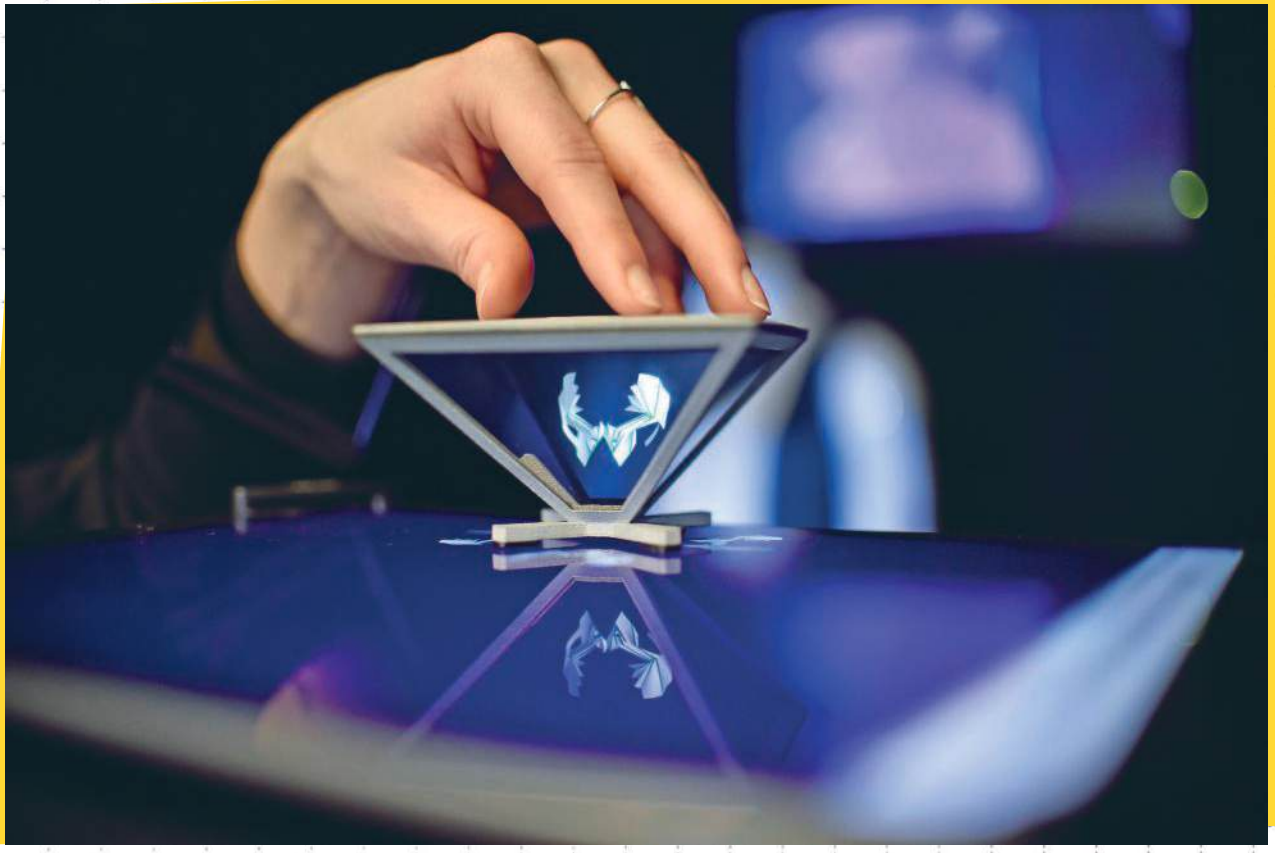


Luis Moura/Arquivo da editora

Há diversas outras maneiras de produzir hologramas com o uso de tecnologia, até mesmo de objetos que não existem fisicamente.

Fonte dos dados: HOLOGRAMAS. *Ciência Viva*, Lisboa. Disponível em: https://tedit.net/5b3hvi; VIDA e Ciência: holograma. *Óptica e Fotônica*, 2021. 1 vídeo (6 min). Disponível em: https://tedit.net/5og7cp. Acesso em: 16 ago. 2024.

Unidade 3 GEOMETRIA ESPACIAL



Britta Pedersen/Picture Alliance/Getty Images

Demonstração de um holograma interativo para *smartphones* e *tablets*. Foto de 2017.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

Não escreva no livro

1. Você sabe o que é um holograma ou já tinha visto algum? Cite exemplos de objetos que poderiam ser representados por hologramas.

Resposta pessoal. É esperado que os estudantes citem qualquer objeto tridimensional.

2. Pesquise e responda no caderno: em que contextos os hologramas podem ser utilizados?

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

3. Quais são as principais diferenças entre figuras geométricas planas e figuras geométricas espaciais? Cite exemplos dessas figuras que você já estudou em Matemática.

3. Exemplo de resposta: As figuras geométricas planas são bidimensionais, ou seja, têm comprimento e largura, mas não profundidade. As figuras geométricas espaciais são tridimensionais, ou seja, têm 3 dimensões. Exemplos de figura geométrica plana: quadrado, triângulo, círculo, etc. Exemplos de figura geométrica espacial: cubo, pirâmide, cilindro, cone, esfera, etc.

capítulo

5 Noções de Geometria espacial de posição

Introdução

História da Matemática

O desenvolvimento da Geometria

Inicialmente, a Geometria se desenvolveu quase sempre visando à resolução de problemas de medições, como o cálculo de medidas de distância, de área e de volume, que estavam ligadas a atividades de subsistência.

Foi na Grécia, aproximadamente no século V a.C., que a Geometria se desvinculou das questões de mensuração para tomar um rumo mais abstrato.

Um pensador grego de grande importância para a Geometria foi Pitágoras, que viveu por volta de 585-500 a.C. Pitágoras fundou uma "escola", uma espécie de academia para estudo da Filosofia e da Ciência, na qual reuniu vários pensadores e discípulos. O maior legado que esse grupo deixou para a Geometria foi a demonstração da propriedade conhecida como teorema de Pitágoras.

Outro importante pensador grego ligado à Geometria foi Euclides, que viveu por volta de 300 a.C. A obra-prima de Euclides, *Os elementos*, com 13 volumes, tinha o objetivo de que todas as propriedades em Matemática, e dentre elas as relacionadas à Geometria, fossem demonstradas, ou seja, que a validade delas fosse estabelecida por meio de argumentos lógicos usando apenas propriedades demonstradas anteriormente.

Fonte dos dados: MILIES, C. F. P.; BUSSAB, J. H. O. *A Geometria na Antiguidade clássica*. São Paulo: FTD, 1999; BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

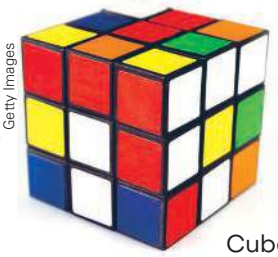


Wikipedia/Wikimedia Commons

Frontispício da primeira tradução para o inglês, em 1570, da obra *Os elementos*, escrita por Euclides.

As imagens não estão representadas em proporção.

Vamos examinar uma figura geométrica que conhecemos de nossa vivência cotidiana: o cubo. Há vários objetos que remetem à forma de um cubo: caixas, dados de jogar, brinquedos, móveis, etc.



Stevanovicigor/Thinkstock/Getty Images

Cubo mágico.



Thinkstock/Getty Images

Dados.



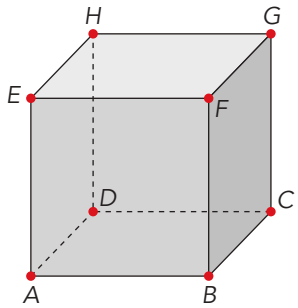
Thinkstock/Getty Images

Banqueta.

Ao analisar um cubo, podemos notar que:

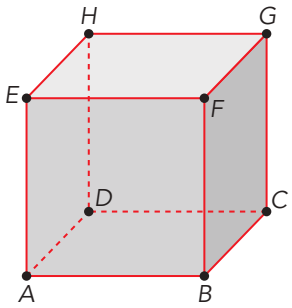
- ele tem **8 vértices**;

  Os 8 vértices (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*) de um cubo são exemplos de **pontos**. O ponto não tem dimensão.



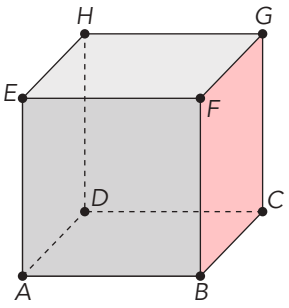
- ele tem **12 arestas**;

  As 12 arestas ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$, $\overline{EA}$, $\overline{FB}$, $\overline{GC}$, $\overline{HD}$) de um cubo são exemplos de **segmentos de reta**.

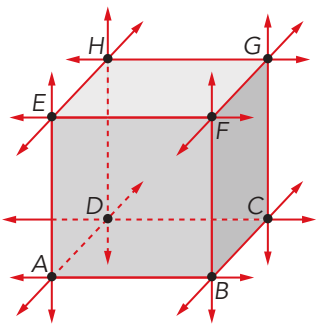


- a superfície dele é formada por **6** regiões quadradas denominadas **faces**.

  As 6 faces de um cubo são exemplos de **superfícies planas**. Na figura, a face *BCGF* aparece destacada.

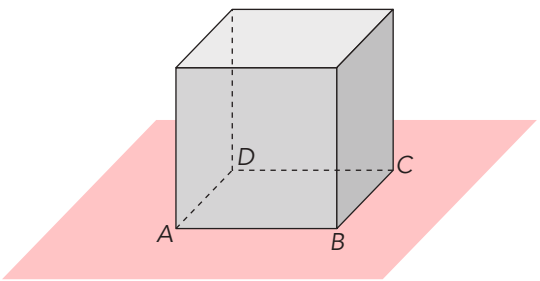


Se considerarmos que cada aresta do cubo foi "prolongada" nos 2 sentidos, obteremos exemplos de **retas**. Cada uma dessas retas contém uma aresta do cubo.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

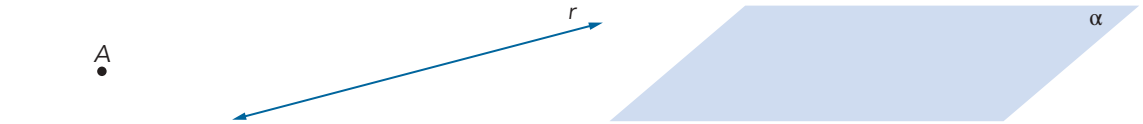
De maneira análoga, se considerarmos que cada face do cubo foi "expandida", como na face *ABCD* da figura, obteremos exemplos de **planos**. Cada um desses planos contém uma face do cubo.



Noções primitivas

A Geometria se baseia em 3 noções primitivas, das quais temos um conhecimento intuitivo, decorrente da observação do mundo concreto. Essas noções são as de **ponto**, **reta** e **plano**.

Vamos convencionar como representá-las da seguinte maneira:



Ponto *A* (letra maiúscula).

Reta *r* (letra minúscula).

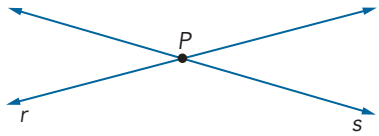
Plano α (letra grega).

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

As noções primitivas são conceitos aceitos sem definição. Todas as demais noções ou conceitos geométricos podem ser definidos, isto é, caracterizados objetivamente por meio de palavras, obedecendo a uma regra básica: só será possível definir um novo conceito se forem utilizados na definição conceitos já estabelecidos.

Neste capítulo, toda definição será indicada por [DEF]. Vamos considerar as 3 primeiras definições.

- [DEF] **Espaço**: é o conjunto formado por todos os pontos.
- [DEF] **Retas concorrentes**: 2 retas são concorrentes se tiverem um único ponto comum.

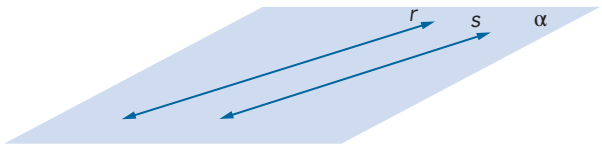


$r \cap s = \{P\}$

- [DEF] **Retas paralelas**: 2 retas são paralelas se são coincidentes ou coplanares (estão contidas em um mesmo plano) e não têm ponto comum.



As retas r e s são paralelas coincidentes.



$r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$ e $r \cap s = \varnothing$
As retas r e s são paralelas distintas.

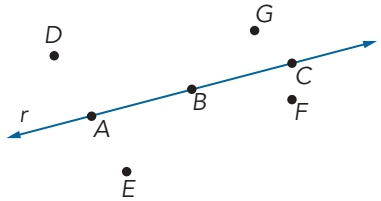
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Proposições primitivas

O estudo lógico da Geometria se apoia em algumas propriedades relacionadas a pontos, retas e planos. Essas propriedades são aceitas como verdadeiras, sem necessidade de demonstração lógica, e são chamadas de **axiomas**, **proposições primitivas** ou **postulados**. Neste capítulo, os postulados serão indicados por [POST].

Postulados da existência

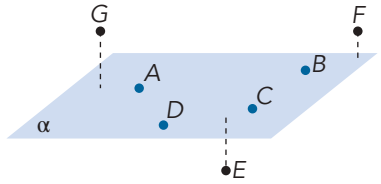
- [POST] Em uma reta e fora de uma reta, existem infinitos pontos.



$A \in r$, $B \in r$, $C \in r$,
$D \notin r$, $E \notin r$, $F \notin r$, $G \notin r$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

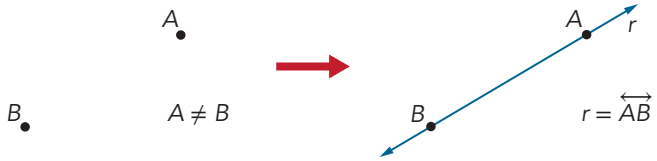
- [POST] Dentro e fora de um plano, existem infinitos pontos.



$A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$,
$E \notin \alpha$, $F \notin \alpha$, $G \notin \alpha$.

Postulados da determinação

- [POST] 2 pontos distintos determinam uma única reta.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Não escreva no livro

Pense nisto

Dado um ponto *P*, quantas retas passam por ele? Infinitas.

De outro modo, podemos dizer que, dados 2 pontos distintos *A* e *B*, existe uma só reta que tem *A* e *B* como seus elementos (ou uma só reta que passa por eles).

- [POST] 3 pontos não colineares determinam um único plano.



Os pontos *A*, *B* e *C* são não colineares.

α = plano (*ABC*)

(lê-se: α é o plano determinado pelos pontos *A*, *B* e *C*)

Banco de imagens/ Arquivo da editora

De outro modo, podemos dizer que, dados 3 pontos *A*, *B* e *C*, não pertencentes a uma mesma reta, existe um só plano que tem *A*, *B* e *C* como seus elementos (ou um só plano que passa por eles).

Postulado da inclusão

- [POST] Se uma reta tem 2 pontos distintos em um plano, ela está contida nesse plano.

De outra maneira, dizemos que, se uma reta tem 2 pontos distintos em um plano, todos os pontos dela pertencem a esse plano.



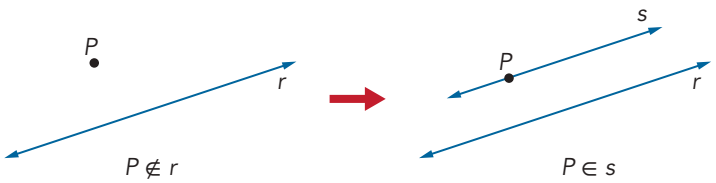
$A \in \alpha$, $B \in \alpha$

$\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Postulado das paralelas (ou postulado de Euclides)

- [POST] Dada uma reta *r* e um ponto *P* não pertencente a ela, então por esse ponto passa uma única reta paralela à reta *r*.



$P \notin r$

$P \in s$

$s \parallel r$ (lê-se: *s* é paralela a *r*)

Banco de imagens/Arquivo da editora

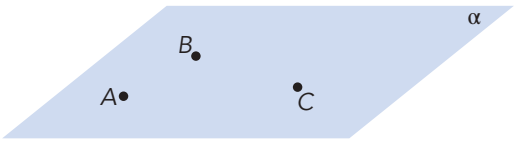
Todas as demais propriedades, proposições ou teoremas de Geometria podem ser demonstrados, ou seja, terão a validade estabelecida por meio de uma argumentação lógica, obedecendo a uma regra básica: só será possível demonstrar (ou provar) uma nova propriedade se forem utilizadas, na demonstração, proposições já estabelecidas como verdadeiras. Neste capítulo, as proposições serão indicadas por [PROP].

Para não nos estendermos demais, vamos omitir as demonstrações. No tópico "Teoremas fundamentais", selecionamos alguns teoremas para apresentar as respectivas demonstrações.

Determinação de planos

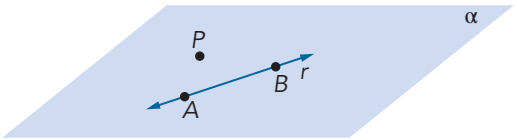
Há 4 modos de determinar a posição de um plano no espaço. Acompanhe-os a seguir.

1º) [POST] Por meio de 3 pontos não colineares.



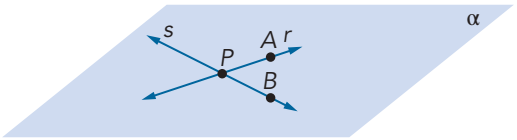
A, *B* e *C* não colineares — α: plano (*ABC*)

2º) [PROP] Por meio de 1 reta e 1 ponto fora dela.



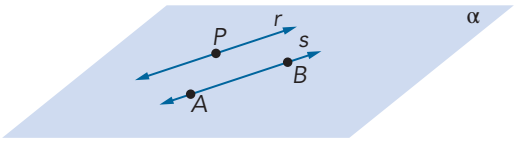
$P \notin r$ — α: plano (*r*, *P*) ou plano (*PAB*)

3º) [PROP] Por meio de 2 retas concorrentes.



$r \cap s = \{P\}$ — α: plano (*r*, *s*) ou plano (*PAB*)

4º) [PROP] Por meio de 2 retas paralelas e distintas.

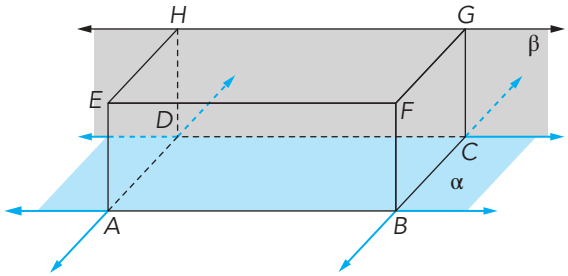


$r // s$ — α: plano (*r*, *s*) ou plano (*PAB*)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

No 1º modo, a unicidade do plano α é garantida pelo postulado da determinação. Já nos 2º, 3º e 4º modos, a unicidade é garantida pelo fato de existir um único plano que passa pelos pontos não colineares *P*, *A* e *B*.

Considere o sólido geométrico *ABCDEFGH*, um bloco retangular também chamado de paralelepípedo reto-retângulo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Ele tem 6 faces retangulares, com faces opostas congruentes.

Vamos considerar o 3º e o 4º modos de determinação de planos para o sólido geométrico *ABCDEFGH*. Assim, temos que as retas:

- $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são concorrentes em *A* e determinam o plano α que contém a face retangular *ABCD*. As retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são concorrentes em *C* e determinam o mesmo plano α;
- $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são paralelas distintas e determinam o plano β, que contém a face retangular *CDHG*.

Não escreva no livro

Pense nisto

Dada uma reta *r*, quantos planos a contêm? Infinitos.

Posições relativas de 2 planos

Planos secantes

[DEF] 2 planos distintos que têm um ponto comum são chamados de **planos secantes**.

Postulado da intersecção

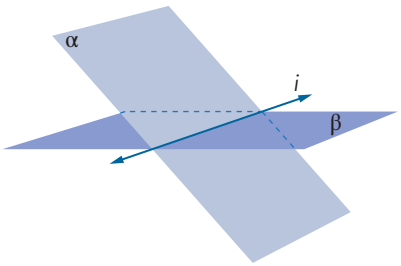
[POST] Se 2 planos distintos têm um ponto comum, então eles têm pelo menos outro ponto comum.

Intersecção de planos

[PROP] Se 2 planos distintos têm um ponto comum, então a intersecção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto.

Essa reta é denominada **intersecção** ou **traço** de um deles no outro.

Consulte a demonstração dessa proposição no tópico "Teoremas fundamentais", enumerado como Teorema **1**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

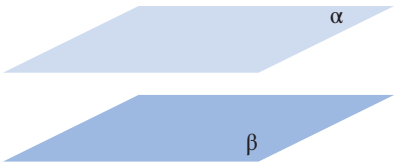
α e β secantes; $\alpha \cap \beta = i$;
i é a intersecção.

Planos paralelos

[DEF] 2 planos são **paralelos** se não tiverem ponto comum ou se forem coincidentes.



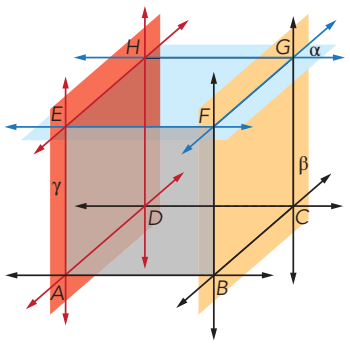
Os planos α e β são paralelos coincidentes.



Os planos α e β são paralelos distintos.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note, na representação do cubo a seguir, os planos α, β e γ, que contêm, respectivamente, as faces *EFGH*, *BCGF* e *ADHE*.



Temos que:

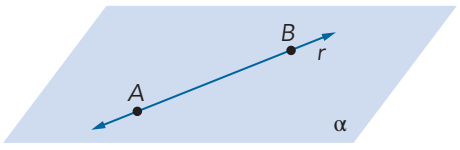
- β e γ são planos paralelos distintos;
- α e β são planos secantes, $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{FG}$;
- α e γ são planos secantes, $\alpha \cap \gamma = \overleftrightarrow{EH}$.

Posições relativas de uma reta e um plano

A posição de uma reta em relação a um plano depende exclusivamente do número de pontos que eles têm em comum. Podem ocorrer 3 situações.

1ª) A reta e o plano têm em comum 2 pontos distintos; nesse caso, conforme o postulado da inclusão, a reta está contida no plano.

Todos os pontos da reta *r* pertencem também ao plano α.

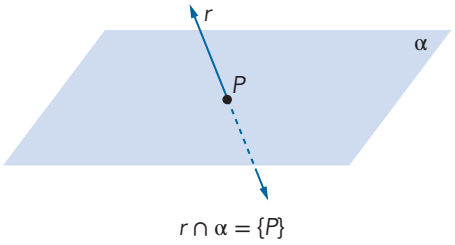


$r \cap \alpha = r$

Banco de imagens/Arquivo da editora

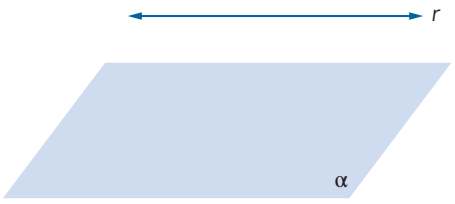
2ª) [DEF] A reta e o plano têm em comum um único ponto; nesse caso, a reta e o plano são **secantes**.

O ponto P é aquele em que a reta r intersecta o plano α. Dizemos que P é o traço da reta r no plano α.



$r \cap \alpha = \{P\}$

3ª) [DEF] A reta e o plano não têm nenhum ponto comum; nesse caso, a reta e o plano são **paralelos**.



$r \cap \alpha = \varnothing$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

[PROP] Se uma reta não está contida em um plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

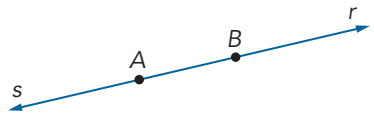
[PROP] Se um plano contém 2 retas concorrentes, ambas paralelas a outro plano, então esses planos são paralelos.

Consulte as demonstrações dessas 2 proposições no tópico "Teoremas fundamentais", enumerados como Teorema **2** e Teorema **3**, respectivamente.

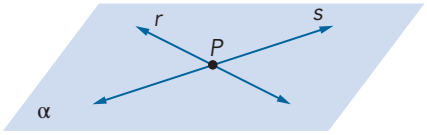
Posições relativas de 2 retas

Vamos analisar as posições relativas de 2 retas considerando inicialmente se elas têm ou não ponto em comum. Podem ocorrer 4 situações.

1ª) As 2 retas têm em comum 2 pontos distintos; nesse caso, conforme o postulado da determinação, as retas são **coincidentes**. Consideramos também que essas retas são **paralelas** e **coincidentes**.

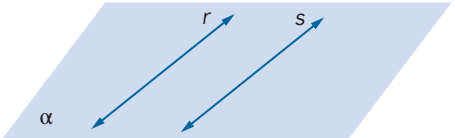


2ª) [DEF] As 2 retas têm em comum um único ponto; nesse caso, elas são **concorrentes** e existe um único plano que as contém.



$r \cap s = \{P\}$

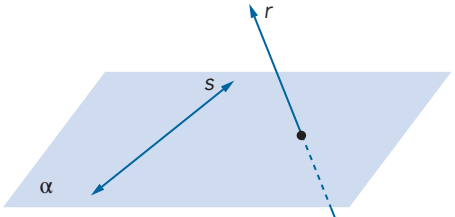
3ª) [DEF] As 2 retas não têm ponto em comum, mas existe um plano que as contém; nesse caso, elas são **paralelas**. Consideramos também que essas retas são **paralelas** e **distintas**.



$r \cap s = \varnothing,\ r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4ª) [DEF] As 2 retas não têm ponto em comum e não existe plano que as contenha; nesse caso, elas são **reversas**.



$r \cap s = \varnothing,\ s \subset \alpha \text{ e } r \not\subset \alpha$

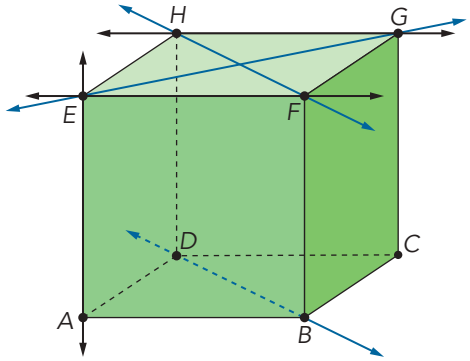
Pense nisto

Não escreva no livro

Se estiverem em um mesmo plano, as retas são paralelas. Se não houver um plano que as contenha, são reversas.
Quais são as possíveis posições relativas de 2 retas *r* e *s* que não têm ponto comum?

No cubo *ABCDEFGH*, temos que as retas:

- $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são concorrentes;
- $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são paralelas;
- $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são reversas;
- $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são reversas;
- $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são reversas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

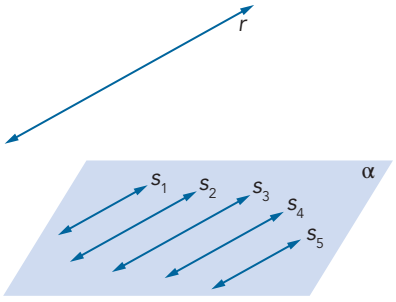
Pense nisto

- Se 2 planos α e β são secantes e uma reta *r* está contida em α, quais são as possíveis posições relativas de *r* em relação a uma reta *s* contida em β?
- Se 2 planos distintos α e β são paralelos e uma reta *r* está contida em α, quais são as possíveis posições relativas de *r* em relação a uma reta *s* contida em β? As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Algumas proposições de retas e planos

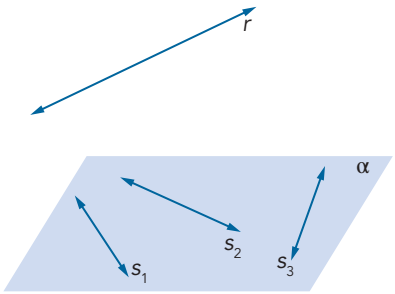
Vamos enunciar algumas proposições referentes a retas e planos, que são consequências das definições que acabamos de estudar.

1ª) [PROP] Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a infinitas retas do plano.



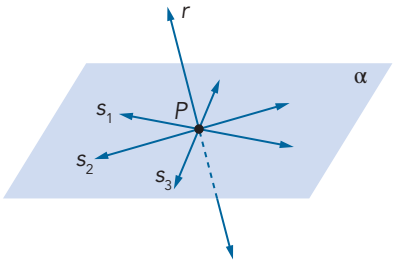
$r \parallel \alpha$, $r \parallel s_1$, $r \parallel s_2$, $r \parallel s_3$, etc.

2ª) [PROP] Se uma reta é paralela a um plano, então ela é reversa a infinitas retas do plano.



$r \parallel \alpha$, r e s_1 são reversas, r e s_2 são reversas, r e s_3 são reversas, etc.

3ª) [PROP] Se uma reta é secante a um plano, então ela é concorrente com infinitas retas do plano.



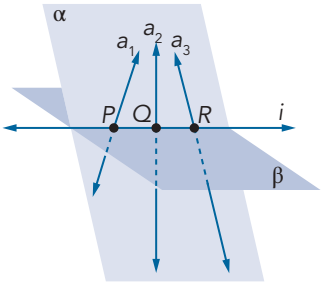
r é secante a α, *r* e s_1 são concorrentes, *r* e s_2 são concorrentes, *r* e s_3 são concorrentes, etc.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto

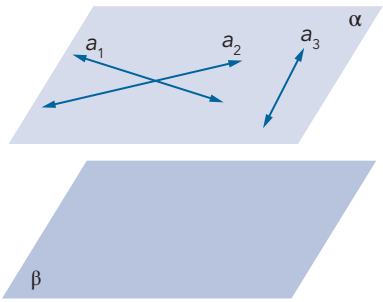
- Se uma reta *r* é paralela a um plano α, quais são as possíveis posições relativas de *r* em relação a uma reta *s* contida em α?
- Se uma reta *r* é secante a um plano α, quais são as possíveis posições relativas de *r* em relação a uma reta *s* contida em α? As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

4ª) [PROP] Se 2 planos α e β são secantes e i é a intersecção deles, então existem infinitas retas de um deles que são secantes ao outro (retas concorrentes com i).



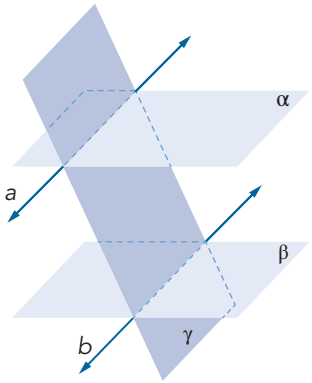
α e β secantes, $\alpha \cap \beta = i$
$a_1 \subset \alpha$ e é concorrente com i,
$a_2 \subset \alpha$ e é concorrente com i,
$a_3 \subset \alpha$ e é concorrente com i, etc.

5ª) [PROP] Se 2 planos são paralelos e distintos, então toda reta de um deles é paralela ao outro.



$a_1 \subset \alpha$, $a_2 \subset \alpha$ e $a_3 \subset \alpha$
$a_1 \parallel \beta$, $a_2 \parallel \beta$ e $a_3 \parallel \beta$

6ª) [PROP] Se um plano intersecta 2 planos paralelos, então as intersecções são retas paralelas.



$\alpha \parallel \beta$
α e γ secantes, $\alpha \cap \gamma = a$
β e γ secantes, $\beta \cap \gamma = b$
$a \parallel b$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto

Não escreva no livro

Se 2 planos são paralelos e distintos entre si, uma reta de um deles é necessariamente paralela a qualquer reta do outro? Não, também podem ser reversas, por definição.

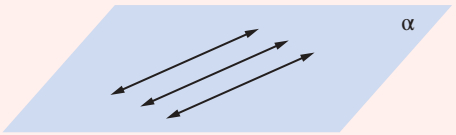
Atividades resolvidas

1. Quantos são os planos determinados por 3 retas distintas, paralelas 2 a 2 entre si?

Solução:

Temos 2 casos possíveis:

1) As 3 retas são coplanares. (Considere a figura a seguir.)



Assim, as 3 determinam um único plano.

2) As 3 retas não são coplanares. Nesse caso, pela 4ª proposição no tópico "Determinação de planos", cada par determina um único plano. Chamando as retas de r_1, r_2 e r_3, temos:

α = plano (r_1, r_2), β = plano (r_1, r_3) e γ = plano (r_2, r_3)

Portanto, 3 planos.

2. Quantos são os planos determinados por 4 pontos distintos?

Solução:

Temos 3 possibilidades.

1) Se os 4 pontos são colineares.

Nesse caso, não existem 3 pontos não colineares, o que é necessário para a determinação de um plano (postulado no tópico "Determinação de planos").

2) Se os 4 pontos são coplanares e não colineares.

Nesse caso, eles determinam um único plano.

3) Se os 4 pontos não estão em um mesmo plano, agrupando-os de 3 em 3 (tomando o que foi postulado no tópico "Determinação de planos"), obtemos 4 planos distintos.

Banco de imagens/Arquivo da editora

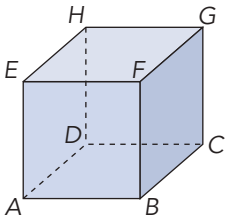
1. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas.

ATIVIDADES

3. Sabe-se que 3 pontos (representados pelo pé das mesas) não colineares determinam um único plano (o plano do chão), mas 4 pontos podem determinar mais de um plano, provocando, desse modo, o balanço da mesa.

Não escreva no livro

1. Copie no caderno o cubo *ABCDEFGH*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Para cada item, pinte no caderno o plano determinado pelas retas: As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BD}$;

b) $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{EH}$;

c) $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{CG}$;

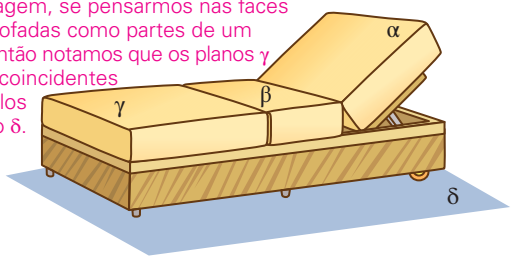
d) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

2. Quantos planos distintos são determinados por 4 retas distintas, concorrentes 2 a 2 em pontos todos distintos? A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

3. É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas para que fiquem firmes. Explique por que isso não acontece em uma mesa de 3 pernas.

4. Objetos do nosso dia a dia permitem imaginar planos secantes e planos paralelos. Na espreguiçadeira mostrada na figura a seguir, se pensarmos nas faces das almofadas como partes de um plano, então:

Pela imagem, se pensarmos nas faces das almofadas como partes de um plano, então notamos que os planos γ e β são coincidentes e paralelos ao plano δ. Assim:



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) quais planos são secantes? α e β, α e γ e α e δ.

b) quais planos são paralelos?
β e γ (paralelos coincidentes), β e δ e γ e δ (paralelos distintos).

5. Classifique, no caderno, as afirmações em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) e justifique as falsas.

a) Uma reta e um plano que têm um ponto comum são necessariamente secantes.

b) Uma reta e um plano secantes têm um único ponto comum. V

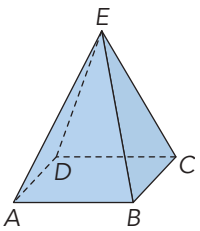
c) Uma reta e um plano paralelos não têm ponto comum. V

d) Um plano e uma reta podem ter exatamente 2 pontos distintos em comum.

e) Se uma reta está contida num plano, eles têm infinitos pontos em comum. V

6. Considere a pirâmide *ABCDE* representada a seguir, cuja base é uma região retangular.

1. Caso os estudantes tenham dificuldade em realizar a atividade, proponha a eles que consultem, como modelo, o plano indicado no bloco retangular *ABCDEFGH* representado no tópico "Determinação de planos".



Banco de imagens/Arquivo da editora

Determine no caderno a posição relativa entre:

a) as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; Concorrentes

b) as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EC}$; Reversas

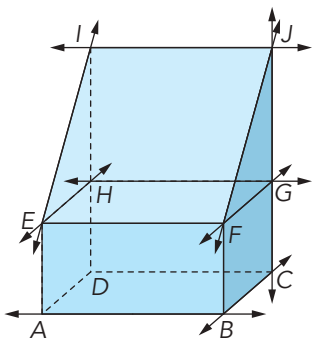
c) as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; Paralelas distintas

d) a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano (*BEC*); Secantes

e) a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (*BEC*); Paralelos

f) as retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{EC}$. Reversas

7. Considere o sólido geométrico representado a seguir e classifique, no caderno, as afirmações em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) e justifique as falsas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) As retas $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{CJ}$ são coplanares. V

b) As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são coplanares. V

c) As retas $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{FJ}$ são coplanares. F; pois são reversas.

d) O plano (*FGJ*) e o plano (*IEH*) são paralelos distintos. V

e) O plano (*ABE*) e o plano (*EFJ*) são paralelos distintos. F; pois são secantes.

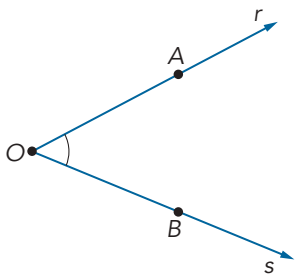
f) As retas $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são reversas. V

g) As retas $\overleftrightarrow{EI}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são reversas. V

5. a) F; pois a reta pode estar contida no plano e, nesse caso, haverá infinitos pontos comuns.
d) F; pois, se a reta e o plano tiverem 2 pontos distintos em comum, a reta está contida no plano e, portanto, eles têm infinitos pontos em comum.

Ângulos entre 2 retas

Já vimos, em anos anteriores, que 2 semirretas distintas de mesma origem formam um ângulo.

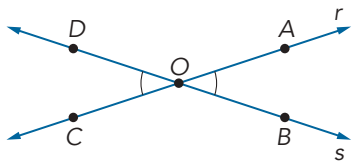


Banco de imagens/Arquivo da editora

semirretas: $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$

ângulo: $A\hat{O}B$

Sejam r e s retas concorrentes em O. O ponto O divide r em 2 semirretas ($\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$) e divide s em 2 semirretas ($\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$).



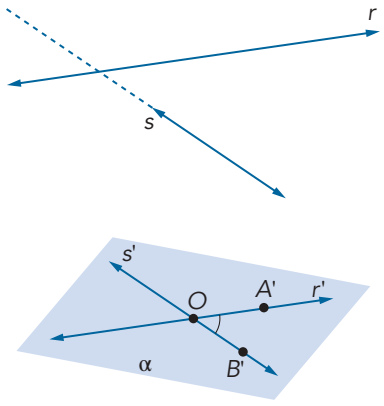
Banco de imagens/ Arquivo da editora

Nesse caso, são formados 4 ângulos: $A\hat{O}B$, $C\hat{O}D$, $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$. Podemos provar que os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, ditos opostos pelo vértice, são congruentes.

Também são congruentes os ângulos $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$, opostos pelo vértice.

[DEF] Chama-se **ângulo das retas concorrentes *r* e *s*** qualquer um desses 4 ângulos.

Sejam 2 retas r e s reversas. Tomemos um ponto O qualquer e consideremos as retas r', paralela a r, e s', paralela a s, ambas passando pelo ponto O.



Banco de imagens/Arquivo da editora

[DEF] Como r' e s' são concorrentes em O, o ângulo $A'\hat{O}B'$ é chamado de **ângulo formado pelas retas reversas *r* e *s***, em que $r' \,//\, r$ e $s' \,//\, s$.

Retas que formam ângulo reto

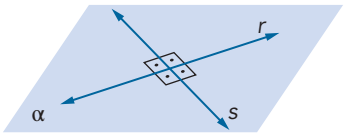
Vimos que 2 retas concorrentes formam 4 ângulos.

[DEF] Se esses 4 ângulos são congruentes, cada um deles é chamado de **ângulo reto** e as retas são chamadas de **retas perpendiculares**.

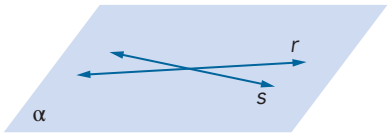
[DEF] Se 2 retas são concorrentes e não são perpendiculares, diz-se que elas são **oblíquas**.

[DEF] Se 2 retas são reversas e formam ângulo reto, as retas são chamadas de **ortogonais**.

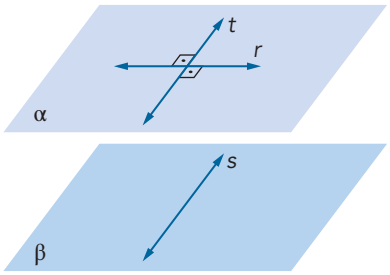
Se r e s são ortogonais, existe uma reta t perpendicular a uma delas e paralela à outra.



As retas r e s são perpendiculares.



As retas r e s são oblíquas.



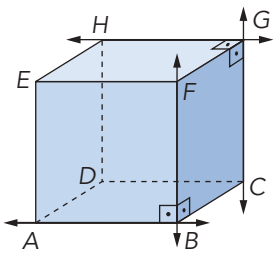
$\alpha \parallel \beta$

As retas r e s são ortogonais.
As retas r e t são perpendiculares.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos considerar o cubo $ABCDEFGH$, representado a seguir. As retas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{GC}$ são concorrentes em G e formam ângulo reto; logo, são perpendiculares. As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GC}$ são ortogonais: note que a reta $\overleftrightarrow{BF}$ é perpendicular à $\overleftrightarrow{AB}$ e paralela à $\overleftrightarrow{GC}$.

Além disso, note que $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GC}$ (lê-se: a reta $\overleftrightarrow{GH}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{GC}$.); e $\overleftrightarrow{AB}$ é ortogonal a $\overleftrightarrow{GC}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro

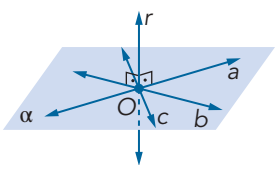
Pense nisto

Indique um par de retas concorrentes não perpendiculares (oblíquas) e um par de retas reversas não ortogonais no cubo $ABCDEFGH$.

Exemplo de resposta: $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são concorrentes não perpendiculares, e $\overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{AE}$ são reversas não ortogonais.

Reta e plano perpendiculares

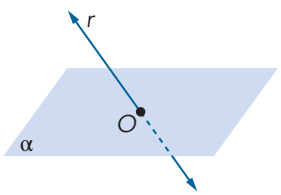
[DEF] Se uma reta é secante a um plano em um ponto O e é perpendicular a todas as retas do plano que passam por O, diz-se que a reta é **perpendicular ao plano**.



$r \perp \alpha$ significa $\begin{cases} r \perp a,\ a \subset \alpha \text{ e } O \in a, \\ r \perp b,\ b \subset \alpha \text{ e } O \in b, \\ r \perp c,\ c \subset \alpha \text{ e } O \in c, \\ \text{etc.} \end{cases}$

[PROP] Se uma reta é perpendicular a 2 retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

[DEF] Se uma reta e um plano são secantes e a reta não é perpendicular ao plano, diz-se que a reta é **oblíqua** ao plano.



A reta r é oblíqua a α.

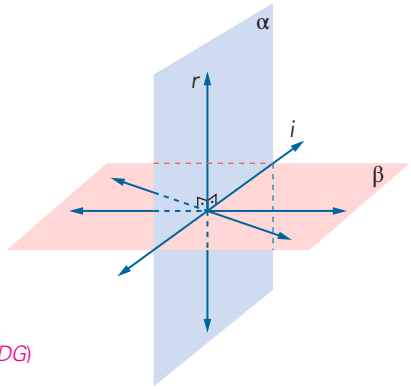
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto

Se uma reta r é perpendicular a um plano α, qual é a medida do ângulo entre a reta r e uma reta s também contida em α? 90°

Planos perpendiculares

[DEF] Se 2 planos são secantes e um deles contém uma reta perpendicular ao outro, diz-se que os planos são **perpendiculares**.



$\alpha \perp \beta$ significa $\begin{cases} \alpha \cap \beta = i \\ r \subset \alpha \\ r \perp \beta \end{cases}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

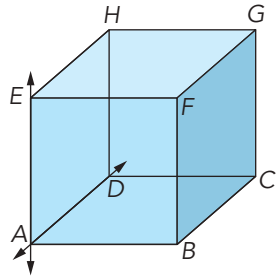
O plano (*BCF*), o plano (*CDG*) e o plano (*ABE*).

Não escreva no livro

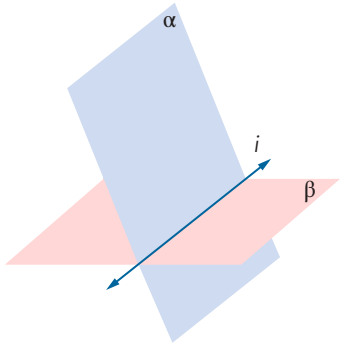
Pense nisto

Quais outros planos determinados pelas faces do cubo são perpendiculares ao plano (*ABC*)?

Considere a representação do cubo *ABCDEFGH*. O plano (*ABC*) e o plano (*ADE*) são secantes (a intersecção deles é $\overleftrightarrow{AD}$), $\overleftrightarrow{AE}$ é perpendicular ao plano (*ABC*), e $\overleftrightarrow{AE}$ está contida no plano (*ADE*). Assim, o plano (*ABC*) e o plano (*ADE*) são perpendiculares.



[DEF] Se 2 planos são secantes e não são perpendiculares, diz-se que eles são **oblíquos**.

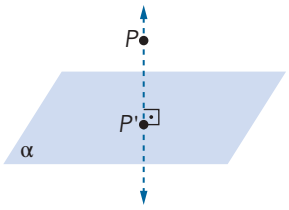


Banco de imagens/Arquivo da editora

O plano α é oblíquo ao plano β.

Projeções ortogonais

[DEF] Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é o ponto de intersecção entre a reta perpendicular ao plano, conduzida pelo ponto, e o plano.



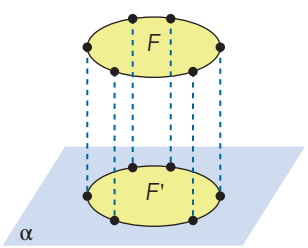
$P' = \text{proj}_{\alpha} P$

α: plano de projeção

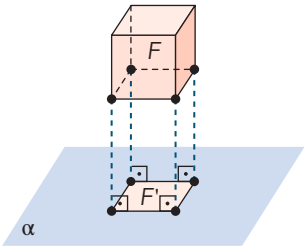
$\overleftrightarrow{PP'}$: reta projetante de *P*

Banco de imagens/Arquivo da editora

[DEF] Projeção ortogonal de uma figura plana, ou não plana, sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da figura sobre esse plano.



$F' = \text{proj}_{\alpha} F$

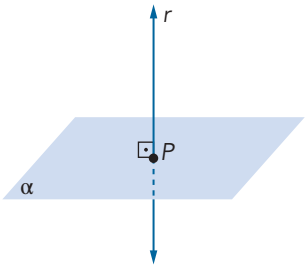


$F' = \text{proj}_{\alpha} F$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A projeção ortogonal de uma reta r sobre um plano α é assim definida:

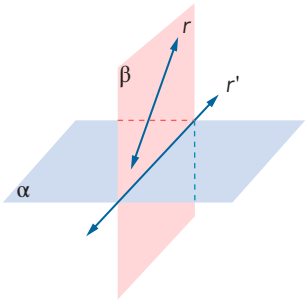
- [DEF] Se r é perpendicular a α, a projeção de r sobre α é o ponto P em que r intersecta α.



$P = \text{proj}_{\alpha} r$

Banco de imagens/Arquivo da editora

- [DEF] Se r não é perpendicular a α, a projeção de r sobre α é a reta r', intersecção de α com o plano β, perpendicular a α conduzido por r.

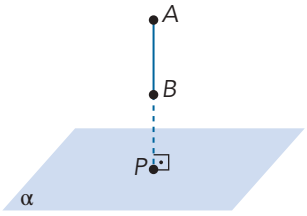


$r' = \text{proj}_{\alpha} r$

Banco de imagens/Arquivo da editora

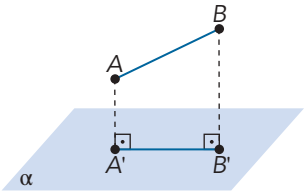
A projeção ortogonal de um segmento de reta $\overline{AB}$ sobre um plano α é assim definida:

- [DEF] Se a reta suporte de $\overline{AB}$ é perpendicular a α, a projeção de $\overline{AB}$ sobre α é o ponto P em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intersecta α.



$P = \text{proj}_{\alpha} \overline{AB}$

- [DEF] Se a reta suporte de $\overline{AB}$ não é perpendicular a α, a projeção de $\overline{AB}$ sobre α é o segmento de reta $\overline{A'B'}$ tal que A' e B' são respectivamente as projeções de A e B sobre α.



$\overline{A'B'} = \text{proj}_{\alpha} \overline{AB}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Distâncias

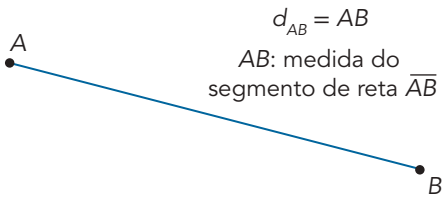
A medida de distância entre 2 pontos A e B pode ser assim definida:

- se A e B coincidem, a medida de distância entre eles é 0;

$A = B$

$d_{AB} = 0$

- se A e B são distintos, a medida de distância entre eles é igual à medida do segmento de reta $\overline{AB}$.



$d_{AB} = AB$

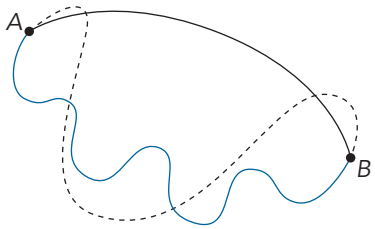
AB: medida do segmento de reta $\overline{AB}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto

Não escreva no livro

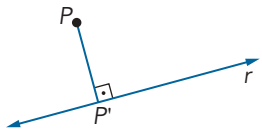
Na imagem estão representados alguns exemplos de possíveis caminhos para ir do ponto A ao ponto B. Considerando esses e todos os outros possíveis, qual é o caminho de menor medida de comprimento para ir do ponto A ao ponto B?



Banco de imagens/ Arquivo da editora

O caminho de menor medida de comprimento entre 2 pontos distintos quaisquer é o caminho definido pelo segmento de reta que os une. Nesse caso, o segmento $\overline{AB}$ é o caminho procurado.

[DEF] A medida de distância de um ponto P a uma reta r é a medida de distância de P a P', em que P' é a intersecção entre a reta perpendicular a r, conduzida por P, e a reta r.

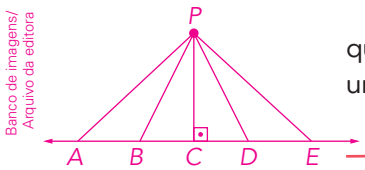


Banco de imagens/ Arquivo da editora

$d_{P, r} = PP'$

PP': medida do segmento de $\overline{PP'}$

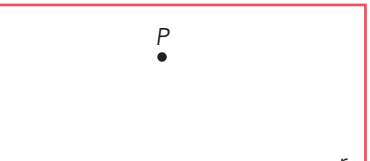
A menor medida de distância é igual à medida do segmento de reta $\overline{PC}$, em que C é o ponto de intersecção entre a reta r e a reta perpendicular a r e que contém P.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Pense nisto

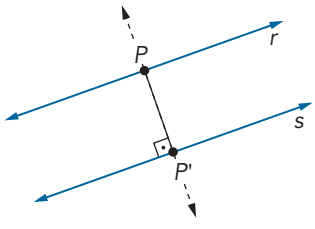
Se um ponto P não pertence a uma reta r, qual é a menor medida de distância entre P e um ponto qualquer de r?



Banco de imagens/ Arquivo da editora

[DEF] A medida de distância entre 2 retas, r e s, paralelas é a medida de distância de um ponto P qualquer de uma delas até a outra.

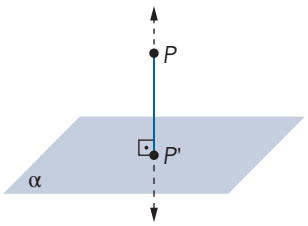
A figura mostra que a medida de distância entre r e s foi obtida tomando um ponto P em r e traçando $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendicular a s, com P' em s (P' é o ponto de intersecção entre a reta perpendicular a s, conduzida por P, e a reta s).



Banco de imagens/Arquivo da editora

$d_{r, s} = d_{P, s} = PP'$

[DEF] A medida de distância de um ponto P a um plano α é a medida de distância de P a P', em que P' é o ponto de intersecção entre a reta perpendicular a α, conduzida por P, e o plano α.

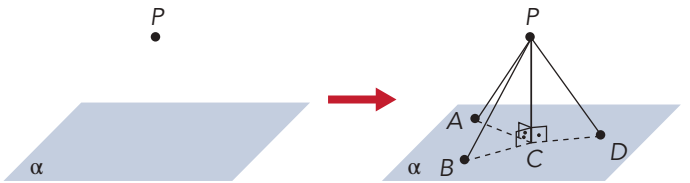


Banco de imagens/Arquivo da editora

$$d_{P,\alpha} = d_{PP'} = PP'$$

Observação

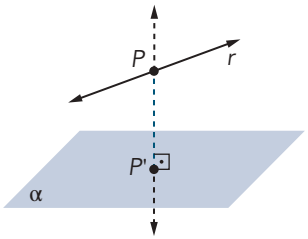
Se um ponto P não pertence a um plano α, a menor medida de distância entre P e um ponto qualquer de α é igual à medida do segmento de reta $\overline{PC}$, que está contido na reta perpendicular a α conduzida por P.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

[DEF] A medida de distância entre uma reta r e um plano α, sendo r contida em α ou r paralela a α, é a medida de distância de um ponto P qualquer de r ao plano α.

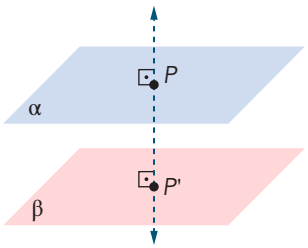
A imagem mostra que a medida de distância entre r e α foi obtida tomando um ponto P em r e traçando $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendicular a α, com P' em α (P' é o ponto de intersecção entre a reta perpendicular a α, conduzida por P, e o plano α).



$$d_{r,\alpha} = d_{P,\alpha} = d_{PP'} = PP'$$

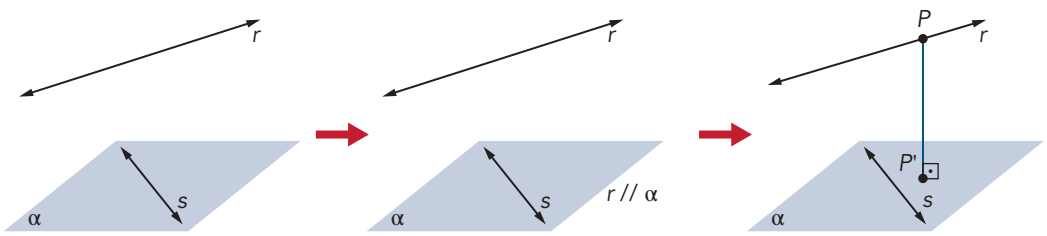
[DEF] A medida de distância entre 2 planos, α e β, paralelos é a medida de distância de um ponto P qualquer de um deles ao outro plano.

A imagem mostra que a medida de distância entre α e β foi obtida tomando um ponto P qualquer em α e traçando $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendicular a β, com P' em β.



$$d_{\alpha,\beta} = d_{P,\beta} = d_{PP'} = PP'$$

[DEF] A medida de distância entre 2 retas reversas r e s é a medida de distância de um ponto qualquer P da reta r ao plano paralelo a r e que contém s.



$$d_{r,s} = d_{r,\alpha} = d_{P,\alpha} = PP'$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Teoremas fundamentais

Teorema 1

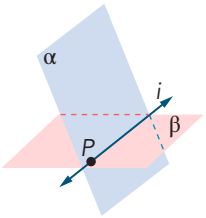
Se 2 planos distintos têm um ponto comum, então a intersecção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto.

Hipóteses (dados conhecidos):

- $\alpha \neq \beta$;
- $P \in \alpha$;
- $P \in \beta$.

Tese (o que se quer provar):

- $\exists i$ tal que $i = \alpha \cap \beta$ e $P \in i$ (existe uma única reta i que é a intersecção do plano α com o plano β, e o ponto P pertence a i).



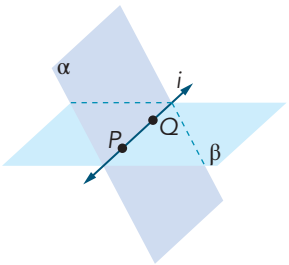
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Demonstração

I. Se α e β são distintos ($\alpha \neq \beta$) e têm um ponto comum P, então existe outro ponto Q que também pertence a α e a β (consulte o postulado da intersecção no tópico "Posições relativas de 2 planos").

II. Chamando de i a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, temos que i está contida em α (pois $P \in \alpha$ e $Q \in \alpha$) e também está contida em β (pois $P \in \beta$ e $Q \in \beta$).

Para provarmos que i é a intersecção de α e β, devemos provar que todos os pontos que estão em α e em β estão em i.



III. Vamos supor, por absurdo, que exista um ponto X tal que $X \in \alpha$, $X \in \beta$ e $X \notin i$. Então, os planos α e β teriam em comum o ponto X e a reta i e, desse modo, deveriam coincidir, o que é absurdo, pois contraria a primeira hipótese ($\alpha \neq \beta$).

A contradição vem do fato de admitirmos que $X \notin i$. Assim, X deve pertencer à reta i e, portanto, i é a intersecção de α e β.

Teorema 2

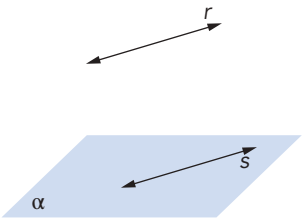
Se uma reta não está contida em um plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

Hipóteses (dados conhecidos):

- $r \not\subset \alpha$;
- $r \parallel s$;
- $s \subset \alpha$.

Tese (o que se quer provar):

- $r \parallel \alpha$ (a reta r é paralela ao plano α).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Demonstração

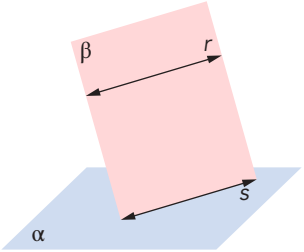
I. Como as retas r e s são paralelas distintas, elas determinam um plano β.

II. Como $s \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, com α e β distintos, então $s = \alpha \cap \beta$.

III. Vamos supor, por absurdo, que r e α tivessem um ponto P em comum:

$$P \in r \text{ e } r \subset \beta \text{ (item I)} \Rightarrow P \in \beta$$

Como P pertence a α e a β, então P pertence à intersecção de α com β, que é a reta s. Daí, as retas r e s teriam em comum o ponto P, o que é absurdo, pois contraria a segunda hipótese.



A contradição vem do fato de supormos que r e α têm o ponto P em comum. Logo, r e α não podem ter ponto comum, ou seja, r é paralela a α.

Teorema 3

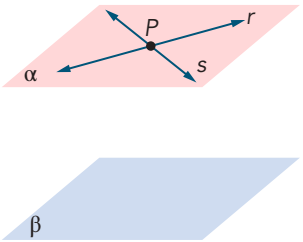
Se um plano contém 2 retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

Hipóteses (dados conhecidos):

- $r \subset \alpha$;
- $s \subset \alpha$;
- $r \cap s = \{P\}$;
- $r \parallel \beta$;
- $s \parallel \beta$.

Tese (o que se quer provar):

- $\alpha \parallel \beta$ (o plano α é paralelo ao plano β).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Demonstração

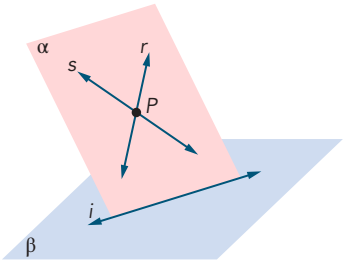
I. Os planos α e β são distintos, pois α contém retas paralelas a β.

II. Vamos supor, por absurdo, que α e β sejam secantes, isto é, que exista uma reta i tal que $\alpha \cap \beta = i$.

- $r \parallel \beta, r \subset \alpha, i = \alpha \cap \beta \Rightarrow r \parallel i$
- $s \parallel \beta, s \subset \alpha, i = \alpha \cap \beta \Rightarrow s \parallel i$

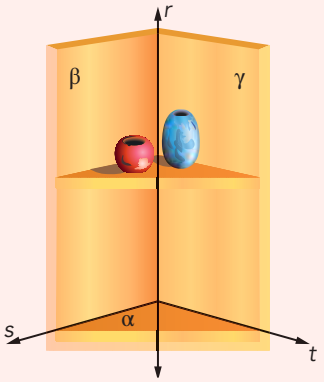
Assim, as retas r e s passariam por P e ambas seriam paralelas a i, o que é absurdo, pois contraria o postulado das paralelas de Euclides.

A contradição vem do fato de admitirmos que α e β são secantes. Logo, α e β não podem ser secantes e devemos ter $\alpha \parallel \beta$.



Atividades resolvidas

3. A imagem mostra uma cantoneira instalada na parede, com a reta r perpendicular ao plano α. Considerando as retas e os planos assinalados, responda às perguntas a seguir.



Zapt/Arquivo da editora

a) Qual é a intersecção de β com γ?

b) Qual é a intersecção de α com β?

c) Qual é a intersecção de α com γ?

d) Quanto mede o menor ângulo formado entre as retas r e s? E o ângulo entre as retas r e t?

Solução:

a) Analisando a ilustração, nota-se que a reta r é a intersecção entre os planos β e γ.

b) Analisando a ilustração, nota-se que a reta s é a intersecção entre os planos α e β.

c) Analisando a ilustração, nota-se que a reta t é a intersecção entre os planos α e γ.

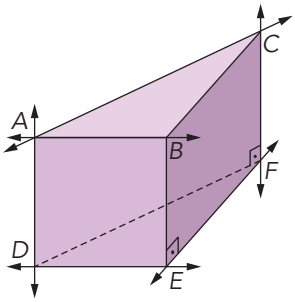
d) 90°, pois como $r \perp \alpha$, $r \perp s$; 90°, pois como $r \perp \alpha$, $r \perp t$.

9. Exemplos de respostas:
a) $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ estão contidas no plano (*ABE*) e são concorrentes; $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ estão contidas no plano (*ABC*) e são concorrentes.
b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ estão contidas no plano (*ABE*) e $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ estão contidas no plano (*EFG*) e $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{GH}$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

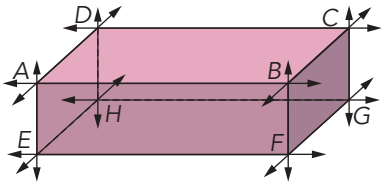
8. A figura representa um sólido geométrico chamado **prisma reto de base triangular**. A superfície dele é formada por 2 faces triangulares congruentes e 3 faces retangulares. Classifique, no caderno, as afirmações a seguir como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) e justifique as falsas.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

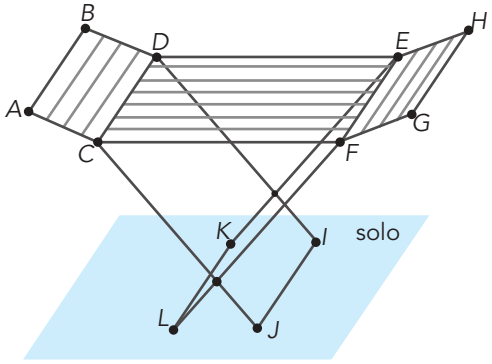
a) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são reversas. F; pois são paralelas distintas.
b) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ são concorrentes. V; pois têm o ponto C em comum.
c) $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ são coplanares. V; pois fazem parte do plano que contém a face *ACFD*.
d) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são paralelas. F; pois são reversas.
e) $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ são ortogonais. V; pois são reversas e formam um ângulo reto.

9. Considere o paralelepípedo reto-retângulo.
Use 2 retas determinadas pelos vértices desse paralelepípedo para justificar, em cada caso, que a sentença dada é falsa.



a) 2 retas que estão contidas em um plano são paralelas.
b) 2 retas coplanares são concorrentes.
c) Se 2 retas são ortogonais, toda paralela a uma delas é perpendicular à outra.
d) Se 2 retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.

10. O projeto de varal de chão, mostrado na imagem a seguir, permite-nos imaginar retas e planos.

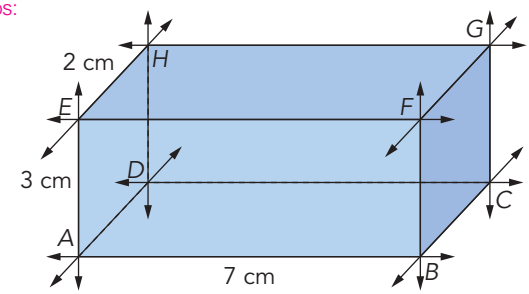


As imagens não estão representadas em proporção.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Quais planos, determinados por 3 pontos não colineares entre os assinalados, são oblíquos ao plano (*CDE*)? Analisando os planos definidos no esquema, conclui-se que o plano (*ABC*), o plano (*EFG*), o plano (*CDI*) e o plano (*EFK*) são oblíquos ao plano (*CDE*).
b) O plano (*KLE*) e o plano (*EFG*) são secantes? Qual é o traço de um deles no outro? Esses planos são perpendiculares ou oblíquos? Sim; pois não são paralelos; como pode-se notar no esquema, a reta $\overleftrightarrow{EF}$ representa o traço deles; eles são oblíquos entre si.
c) O plano (*ABC*) e o plano (*EFG*) são paralelos ou secantes? Secantes.

11. Considere o bloco retangular representado a seguir, com as medidas indicadas. Determine a medida de distância: Todas as medidas de distância pedidas na atividade são iguais à medida das arestas do bloco retangular paralelas a ela. Assim, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) entre os pontos *C* e *G*; 3 cm
b) do ponto *E* à reta $\overleftrightarrow{FG}$; 7 cm
c) do ponto *A* ao plano (*CDG*); 2 cm
d) do plano (*ADE*) ao plano (*BCF*); 7 cm
e) do ponto *E* ao plano (*ABC*); 3 cm
f) entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$; 3 cm
g) entre as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CF}$. 7 cm

9. c) $\overleftrightarrow{AB}$ é ortogonal à $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é ortogonal à $\overleftrightarrow{FG}$. $\overleftrightarrow{EF}$ é ortogonal à $\overleftrightarrow{CG}$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ é ortogonal à $\overleftrightarrow{CG}$.

d) $\overleftrightarrow{AE} \parallel$ plano (*BCG*) e $\overleftrightarrow{AD} \parallel$ plano (*BCG*), mas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são concorrentes; $\overleftrightarrow{AB} \parallel$ plano (*EFG*) e $\overleftrightarrow{BC} \parallel$ plano (*EFG*), mas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são concorrentes.

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de História, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Geometria e as navegações

O astrolábio e a bússola são tecnologias que foram usadas pelos portugueses e outros povos durante as Grandes Navegações, entre os séculos XV e XVII, para se localizarem em alto-mar. O astrolábio permitiu que os navegadores determinassem, com precisão, a posição em que eles estavam no mar, usando as estrelas para calcular a latitude e determinar a hora do dia por meio da posição de um objeto celeste, como o Sol ou outra estrela, em relação ao horizonte.

Com esses conhecimentos, os navegadores podiam fazer o cálculo das rotas. O astrolábio foi fundamental para tornar possível a navegação de longa distância, além de precursor do desenvolvimento da Astronomia moderna.

O astrolábio é composto de um disco plano com um aparelho suspenso no centro. Para manuseá-lo, o observador aponta a régua central para o astro usado como referência e, em seguida, verifica as graduações do instrumento. A Matemática envolvida no astrolábio inclui o uso de Geometria e Trigonometria para calcular as medidas de distância angulares e a medida da altura de um objeto celeste.

Luis Moura/Arquivo da editora



Esquema de medição da distância angular de uma estrela em relação ao nível do mar feita por um observador usando o astrolábio.

Fonte dos dados: GUITARRARA, Paloma. Astrolábio. *Brasil Escola*, 2023. Disponível em: https://tedit.net/523hcf; PORTUGAL em alto mar. *Conexão Escola* [Secretaria Municipal da Educação de Goiânia], Goiânia. Disponível em: https://tedit.net/9xm40h; ASTROLÁBIO. *Significados*, [20–]. Disponível em: https://tedit.net/kicy7f. Acesso em: 16 ago. 2024.

1. Um navegador, usando um astrolábio, verifica que a estrela Sirius se encontra a uma medida de distância angular de 30° em relação ao horizonte (ângulo de elevação). Qual é a medida de distância angular (ângulo zenital) entre Sirius e o ponto mais alto do céu (zênite) que pode ser observado a partir desse local? 60°

2. Um estudante usa um astrolábio para determinar a medida da altura de uma torre. Sabendo que a distância do estudante até a base da torre mede 50 m e o ângulo de elevação mede 22°, determine a medida da altura da torre.

Dica: use a relação trigonométrica do triângulo retângulo.

$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$ e $\tan 22° \simeq 0{,}4$. Aproximadamente 20 m.

capítulo

6 Prismas e pirâmides

Sólidos geométricos

As imagens não estão representadas em proporção.

Obras de Engenharia, Arquitetura ou Artes plásticas, entre outras áreas, evidenciam a imensa quantidade de objetos que podem ser relacionados a figuras estudadas na Geometria espacial.



xm4thx/Shutterstock

Museu de Arte de São Paulo (Masp). Obra da arquiteta Lina Bo Bardi construída em 1968. Foto de 2021.



Cynthia Liang/Shutterstock

Pirâmide de vidro no Museu do Louvre, em Paris, França, construída em 1988. Foto de 2018.



GTW/Shutterstock

Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida, em Brasília (DF). Obra do arquiteto Oscar Niemeyer construída em 1960. Foto de 2024.



Jose Miguel Sanchez/Shutterstock

Porta da Europa, em Madri, Espanha, construída em 1989. Foto de 2022.

Muitos objetos do cotidiano têm formato parecido com **sólidos geométricos**, que são figuras tridimensionais.



goir/Shutterstock

Forno de micro-ondas.



Yellow Cat/Shutterstock

Lata de atum.



Abramova Elena/Shutterstock

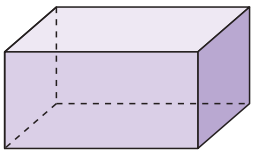
Casquinha de sorvete.



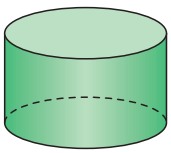
Sergii Figurnyi/Shutterstock

Globo terrestre.

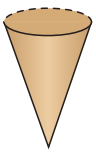
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



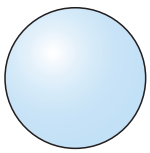
Paralelepípedo reto-retângulo.



Cilindro.



Cone.



Esfera.

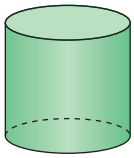
Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

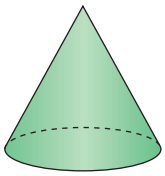
Quando estudamos formas tridimensionais idealizadas pela Geometria, estamos estudando sólidos geométricos, que são os **corpos redondos** e os **poliedros**.

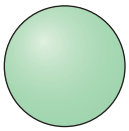
Corpos redondos

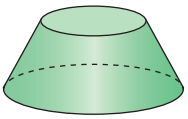
Corpos redondos são sólidos geométricos cujas superfícies têm ao menos uma parte arredondada (não plana).

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora


Cilindro.


Cone.

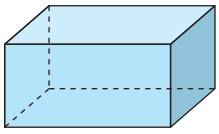

Esfera.

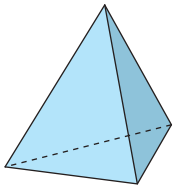

Tronco de cone de bases paralelas.

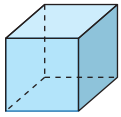
Poliedros

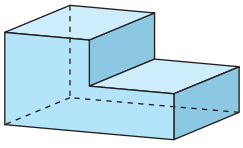
Poliedros são sólidos geométricos cujas superfícies são regiões limitadas apenas por polígonos (triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.). A palavra **poliedro** vem do grego antigo, em que *poli-* significa "vários", e *-edro*, "face". A seguir, estão representados alguns poliedros.

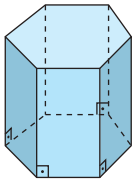
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

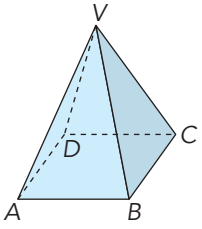

Paralelepípedo.


Pirâmide triangular.


Cubo.


Poliedro sem nome específico.


Prisma hexagonal.



Pirâmide quadrangular.

Um poliedro é composto dos seguintes elementos: faces, arestas e vértices.

- **Faces**: Regiões limitadas por polígonos que formam a superfície do poliedro. Note que o prisma hexagonal, representado anteriormente, tem 8 faces: 2 hexagonais e 6 limitadas por quadriláteros.
- **Arestas**: Segmentos de reta determinados pela intersecção de 2 faces. As arestas correspondem aos lados dos polígonos que limitam as faces do poliedro. O poliedro sem nome específico, representado anteriormente, tem 18 arestas.
- **Vértices**: Pontos de intersecção de 3 ou mais arestas. Na pirâmide quadrangular *VABCD*, os 5 vértices são: *A*, *B*, *C*, *D* e *V*. No vértice *A*, concorrem 3 arestas, já no vértice *V*, concorrem 4 arestas.

Dica

Decomposição da luz, teoria das cores e a cor de um corpo

O vídeo apresenta a pesquisa de Isaac Newton sobre o comportamento da luz refletida em um prisma. Disponível em: https://tedit.net/xiv88w. Acesso em: 20 ago. 2024.

Dica

***Softwares* de Geometria dinâmica 3D**

Versões 3D de *softwares* de Geometria dinâmica permitem a construção de gráficos e de figuras geométricas espaciais, auxiliando a visualização dessas representações no plano.

PATARA/Shutterstock



O edifício Elefante, cuja construção foi projetada para se parecer com as formas de um elefante, lembra um poliedro não convexo. Prédio em Bangkok, capital da Tailândia. Foto de 2019.

Agora, considere os poliedros representados a seguir. Vamos pensar nos planos que contêm, cada um, uma face de cada poliedro.

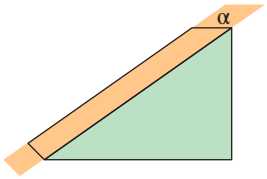


Figura **1**.

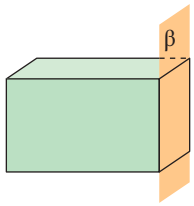


Figura **2**.

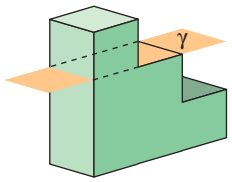


Figura **3**.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Note, nas figuras **1** e **2**, que o plano que contém qualquer uma das faces deixa todas as outras faces dos poliedros em um mesmo semiespaço. Poliedros com essa característica são chamados de **poliedros convexos**.

Na figura **3**, existe um plano que contém uma face que deixa parte das demais faces em semiespaços opostos. Poliedros com essa característica são chamados de **poliedros não convexos**.

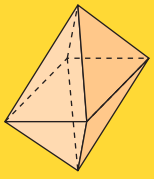
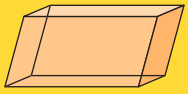
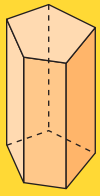
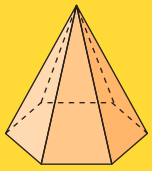
Relação de Euler

Pode-se mostrar que, para todo **poliedro convexo**, vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

em que V, A e F são, respectivamente, o número de vértices, o de arestas e o de faces do poliedro. Essa relação foi demonstrada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

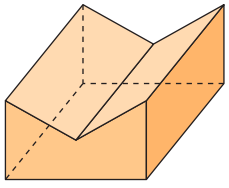
Acompanhe alguns exemplos.

Poliedro / Quantidade de elementos				
V	6	8	10	7
A	12	12	15	12
F	8	6	7	7
V – A + F = 2	$6 - 12 + 8 = 2$	$8 - 12 + 6 = 2$	$10 - 15 + 7 = 2$	$7 - 12 + 7 = 2$

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Alguns poliedros não convexos satisfazem a relação de Euler. Considere o exemplo a seguir.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



$V = 10$

$A = 15$

$F = 7$

$V - A + F = 10 - 15 + 7 = 2$

Se um poliedro (convexo ou não) satisfaz a relação de Euler, diz-se que é um **poliedro euleriano**.

Poliedros de Platão

Um poliedro é chamado **poliedro de Platão** se satisfaz 3 condições:

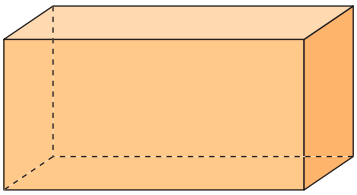
1ª) Todas as faces têm o mesmo número de arestas.

2ª) Todos os vértices são pontos em que concorre o mesmo número de arestas.

3ª) Satisfaz a relação de Euler.

Vamos verificar essas 3 condições no poliedro representado a seguir.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

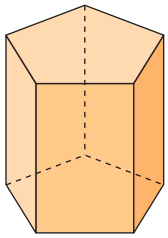


1ª) Todas as faces são limitadas por quadriláteros, logo têm o mesmo número de arestas.

2ª) Em cada um dos vértices, concorrem 3 arestas.

3ª) $V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$, logo é um poliedro euleriano.

Portanto, todo paralelepípedo é um poliedro de Platão.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Um prisma reto pentagonal não é um poliedro de Platão, pois as bases são regiões pentagonais e as faces laterais são limitadas por quadriláteros.

Observação

Existem exatamente 5 tipos de poliedros de Platão.

Professor, a demonstração dessa propriedade está nas *Orientações específicas* deste Manual.

Poliedros regulares

Um poliedro convexo é regular se:

- suas faces são regiões limitadas por polígonos regulares e congruentes;
- em cada vértice concorre o mesmo número de arestas.

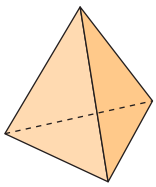
No poliedro regular é possível notar que:

- todas as faces têm o mesmo número de arestas, pois as faces são congruentes;
- todos os vértices são pontos de intersecção de um mesmo número de arestas;
- é satisfeita a relação de Euler, já que ele é convexo.

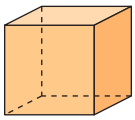
Desse modo, todo poliedro regular é poliedro de Platão.

Existem apenas 5 tipos de poliedros regulares. Um exemplo de cada tipo está indicado a seguir.

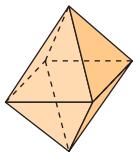
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



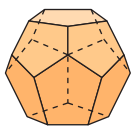
Tetraedro regular.



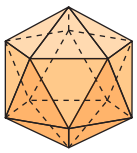
Hexaedro regular (cubo).



Octaedro regular.



Dodecaedro regular.



Icosaedro regular.

Não escreva no livro

Pense nisto

Quantas faces tem cada tipo de poliedro regular? Quais polígonos formam as faces de cada tipo de poliedro regular?

Pense nisto: Tetraedro regular tem 4 faces, todas são limitadas por triângulos equiláteros; hexaedro regular (cubo) tem 6 faces, todas são quadradas; octaedro regular tem 8 faces, todas são limitadas por triângulos equiláteros; dodecaedro regular tem 12 faces, todas são limitadas por pentágonos regulares; e icosaedro regular tem 20 faces, todas são limitadas por triângulos equiláteros.

EXPERIMENTE

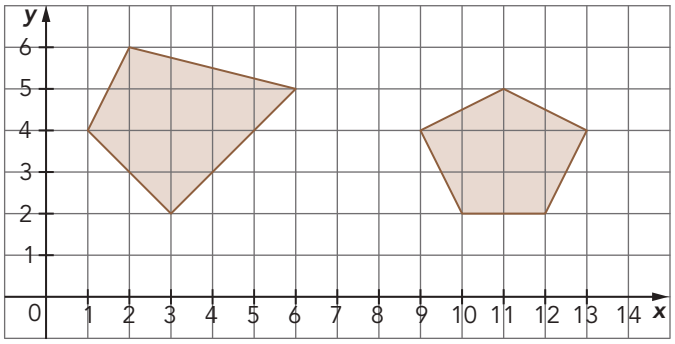
Não escreva no livro

Representar poliedros com um *software* de Geometria dinâmica

Vamos utilizar um *software* de Geometria dinâmica para explorar a representação e as propriedades dos sólidos geométricos. Sugerimos selecionar um *software on-line* que permita a construção desses sólidos geométricos.

Esta atividade poderá auxiliar você na resolução de algumas atividades que serão propostas. A seguir, apresentamos alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* de Geometria dinâmica. Professor, oriente os estudantes a adaptar as instruções de acordo com o *software* escolhido por eles, já que as interfaces e os procedimentos podem variar.

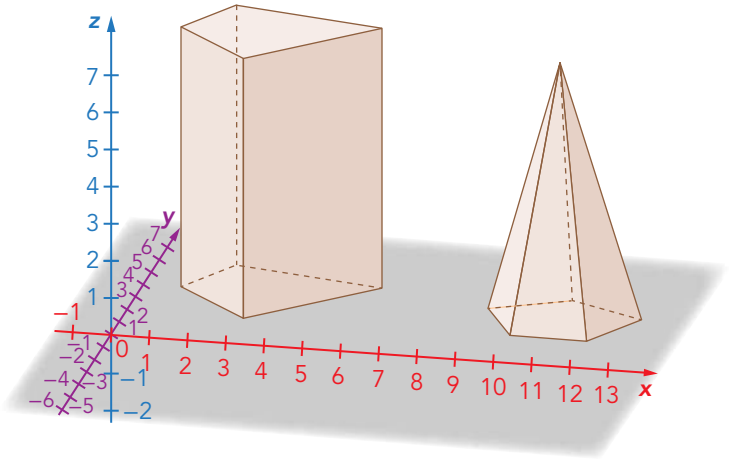
Para representar um prisma ou uma pirâmide, será necessário considerar uma região limitada por um polígono como base. Assim, utilizaremos uma ferramenta para criar 2 regiões quaisquer no plano limitadas por polígonos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplos de regiões limitadas por polígonos representadas em um *software* de Geometria dinâmica.

Em seguida, habilite a visualização 3D e, com ferramentas de modelagem 3D, represente os sólidos geométricos. Pode ser necessário, nos 2 casos, selecionar a região limitada pelo polígono como base e, na janela que será aberta, indicar uma medida da altura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplos de poliedros representados em *software* de Geometria dinâmica.

Use ferramentas para calcular medidas de área e de volume, caso tenha interesse em obter essas medidas dos poliedros, selecionando o objeto desejado.

Atividades resolvidas

1. Um poliedro convexo tem 1 face octogonal e 8 faces triangulares. Determine o número de arestas e o de vértices desse poliedro.

Solução:

Do enunciado, conclui-se que o poliedro tem, ao todo, 9 faces. Vamos determinar o número de arestas A.

- Em 1 face octogonal, temos 8 arestas ($1 \cdot 8 = 8$).
- Em 8 faces triangulares, temos 24 arestas ($8 \cdot 3 = 24$).

Como cada aresta é comum a 2 faces, no cálculo anterior, cada aresta foi contada 2 vezes.

Daí, $A = \frac{8 + 24}{2} = 16$.

Pela relação de Euler, $V - A + F = 2 \Rightarrow V - 16 + 9 = 2 \Rightarrow V = 9$.

Portanto, esse poliedro tem 16 arestas e 9 vértices.

Pense nisto

Você conhece algum poliedro com as características descritas na atividade resolvida **1**?

Pirâmide de base octogonal.

1. Determinemos o número de arestas (A). Em 20 faces triangulares, temos 60 arestas ($20 \cdot 3 = 60$). Nesse cálculo, cada aresta, por ser comum a 2 faces, foi contada 2 vezes. Assim:

$$A = \frac{60}{2} = 30$$

Temos $F = 20$ e $A = 30$.

Por ser convexo, o poliedro satisfaz a relação de Euler. Logo:

$$V - 30 + 20 = 2 \Rightarrow V = 12$$

Portanto, esse poliedro tem 30 arestas e 12 vértices.

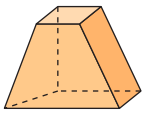
ATIVIDADES

Não escreva no livro

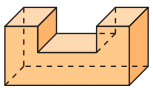
1. Quantas arestas e quantos vértices tem um poliedro convexo de 20 faces, todas triangulares?

2. Dados os poliedros representados a seguir, faça no caderno o que se pede.

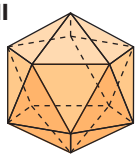
I



II



III



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) Classifique-os em convexo ou não convexo.
I e III: poliedros convexos; II: poliedro não convexo.

b) Determine o número de vértices, o de arestas e o de faces de cada um deles.
I: 8 vértices, 12 arestas e 6 faces. II: 16 vértices, 24 arestas e 10 faces. III: 12 vértices, 30 arestas e 20 faces.

c) Escreva quais são eulerianos. $V - A + F = 2$ I: $8 - 12 + 6 = 2$ II: $16 - 24 + 10 = 2$ III: $12 - 30 + 20 = 2$
Todos satisfazem a relação de Euler, isto é, são eulerianos.

3. Um poliedro convexo tem 13 faces, das quais 6 são triangulares, 6 são retangulares e 1 é hexagonal. Qual é o número de vértices desse poliedro?

4. A imagem a seguir representa a planificação da superfície de um poliedro em que todos os segmentos representados são congruentes, incluindo os segmentos representados por linhas tracejadas.

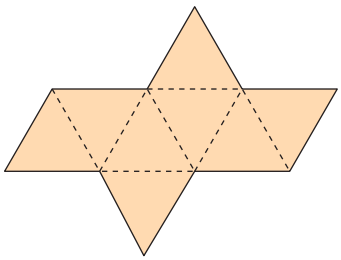
4. a) Octaedro regular; ele tem 8 faces triangulares (cada face é uma região limitada por um triângulo equilátero).

Como $A = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$, temos:

$V - 12 + 8 = 2 \Rightarrow V = 6$



Banco de imagens/ Arquivo da editora



3. Pelas informações do enunciado, é possível obter o número de arestas:

$A = \frac{6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 6}{2} = 24$

Pela relação de Euler: $V - 24 + 13 = 2 \Rightarrow V = 13$; 13 vértices.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é o nome desse poliedro? Caracterize-o e faça a representação dele no caderno.

b) Esse poliedro é regular? Por quê? Sim, pois é poliedro de Platão e todas as faces são limitadas por triângulos equiláteros congruentes.

Prisma

As imagens não estão representadas em proporção.

Alguns objetos encontrados em nosso cotidiano lembram sólidos geométricos que apresentam características comuns, tais como:

- a superfície desses sólidos geométricos é constituída de regiões limitadas por polígonos;
- 2 dessas regiões limitadas por polígonos são congruentes e estão contidas em planos paralelos;
- as outras faces são regiões limitadas por paralelogramos.

Sólidos geométricos com essas características são chamados **prismas**.


timquo/Shutterstock
Natallia Ploskaya/ Shutterstock

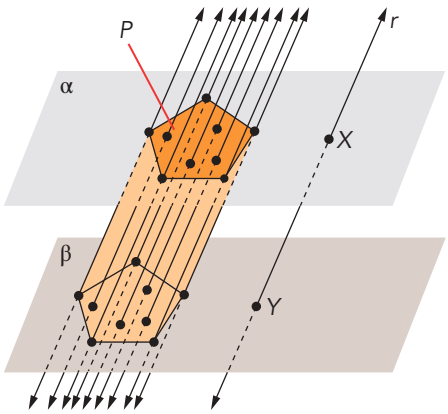
Objetos de nosso dia a dia com formato de prisma.

Definição

Vamos considerar 2 planos, α e β, distintos e paralelos entre si; uma região P limitada por um polígono convexo, contida em α; e uma reta r que intersecta α e β nos pontos X e Y, respectivamente.

Por todos os pontos de P, vamos representar retas paralelas a r, conforme a figura.

Note que os pontos de intersecção dessas retas com α e β determinam segmentos de reta congruentes ao segmento de reta $\overline{XY}$. A reunião de todos os segmentos de reta assim obtidos é um sólido geométrico chamado **prisma**.

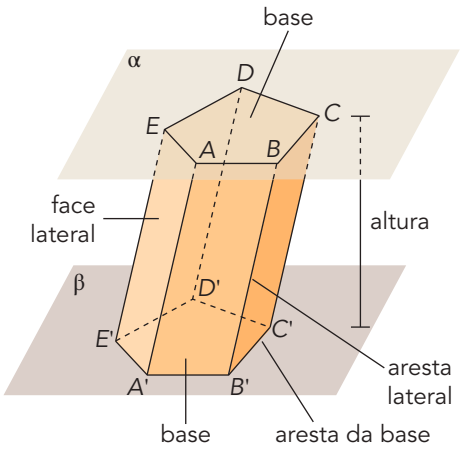


Banco de imagens/Arquivo da editora

Elementos e classificação

Considerando o prisma representado, temos:

- as regiões limitadas pelos polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$, chamadas **bases** do prisma, são congruentes e estão contidas em planos paralelos entre si (α e β);
- os paralelogramos $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$, $DD'E'E$ e $EE'A'A$ limitam as regiões chamadas de **faces laterais**;
- os lados das faces das bases $\left(\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'E'}\text{ e }\overline{E'A'}\right)$ são as **arestas das bases**;
- os segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$ são as **arestas laterais**;
- a medida de distância entre os planos α e β, que contêm as bases, é a medida da **altura** do prisma.



Banco de imagens/Arquivo da editora

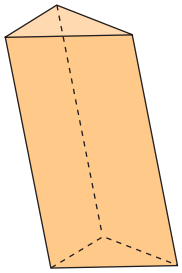
Um prisma pode ser classificado quanto ao número de lados das faces das bases. Logo, pode ser: triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme o polígono que limita a face da base, que pode ser, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

Podemos ainda classificá-los de acordo com a inclinação das arestas laterais em relação aos planos das bases.

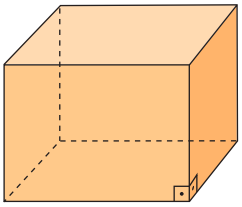
- **Prisma oblíquo**: Se as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.
- **Prisma reto**: Se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Note que, nesse caso, as faces laterais são retangulares.

Observação

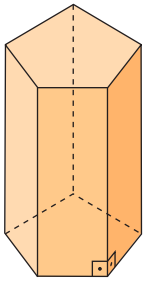
Se as bases de um prisma reto são limitadas por polígonos regulares, ele é chamado **prisma regular**.



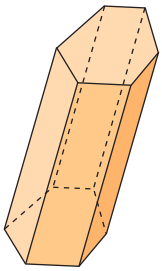
Prisma oblíquo triangular (a base é limitada por um triângulo).



Prisma reto quadrangular (a base é limitada por um quadrilátero).



Prisma reto pentagonal (a base é limitada por um pentágono).

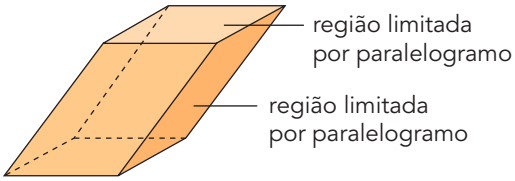


Prisma oblíquo hexagonal (a base é limitada por um hexágono).

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Paralelepípedo

Todo prisma cujas bases são limitadas por paralelogramos é chamado **paralelepípedo**.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

A superfície total dele é a reunião de 6 regiões limitadas por paralelogramos.

Não escreva no livro

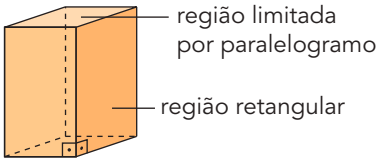
Pense nisto

Em um paralelepípedo, quais faces podem ser consideradas como bases?

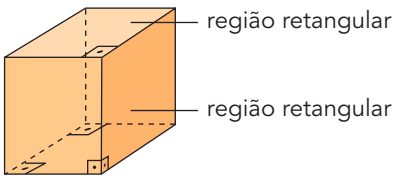
Quaisquer pares de faces opostas, já que todas as 6 faces são limitadas por paralelogramos.

Considere a seguir alguns paralelepípedos especiais.

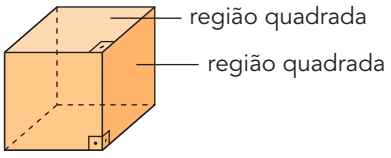
- **Paralelepípedo reto**: Quando a superfície total é a reunião de 4 regiões retangulares (faces laterais) com 2 regiões limitadas por paralelogramos (bases).



- **Paralelepípedo reto-retângulo** ou **bloco retangular**: Quando a superfície total é a reunião de 6 regiões retangulares.



- **Cubo**: Quando a superfície total é a reunião de 6 regiões quadradas. Note que o cubo é um paralelepípedo reto-retângulo em que todas as arestas são congruentes.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



BOOCYS/Shutterstock

Contêiner em formato de paralelepípedo reto-retângulo utilizado para transporte de carga.

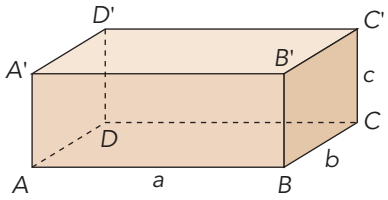
Paralelepípedo reto-retângulo

Considere um contêiner de formato parecido com um paralelepípedo reto-retângulo cujas medidas das dimensões são 8 m de comprimento, 4,5 m de largura e 3 m de altura.

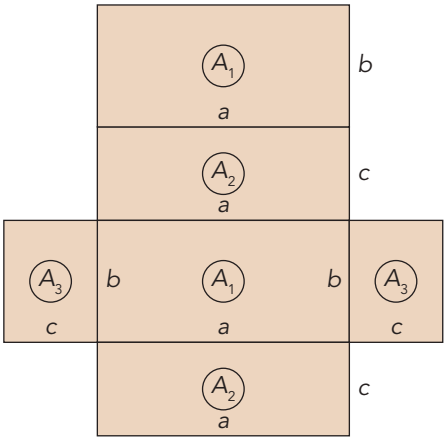
Suponha que seja necessário pintar toda a superfície externa do contêiner e que um prestador de serviços cobre R$ 4,50 por metro quadrado para fazer isso. Qual valor será necessário desembolsar para o pagamento do serviço contratado? Considere que, para determinar o valor do serviço, o prestador considera as medidas de comprimento, de altura e de largura do contêiner como se todas as superfícies fossem planas.

Cálculo da medida de área total

É dado um paralelepípedo reto-retângulo em que a e b são as medidas dos lados da região retangular da base e c é medida da altura.



Paralelepípedo.



Planificação da superfície do paralelepípedo.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A superfície do paralelepípedo reto-retângulo é composta de 6 regiões retangulares, congruentes 2 a 2. Assim, calculamos a medida de área total fazendo:

$$A_t = 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 \Rightarrow A_t = 2ab + 2ac + 2bc$$

Logo, a medida de área total da superfície do paralelepípedo é:

$$A_t = 2ab + 2ac + 2bc$$

No problema do contêiner, a medida de área total da superfície a ser pintada é igual à soma das medidas de área de 6 regiões retangulares, em que $a = 8$ m, $b = 4{,}5$ m e $c = 3$ m. Assim, temos:

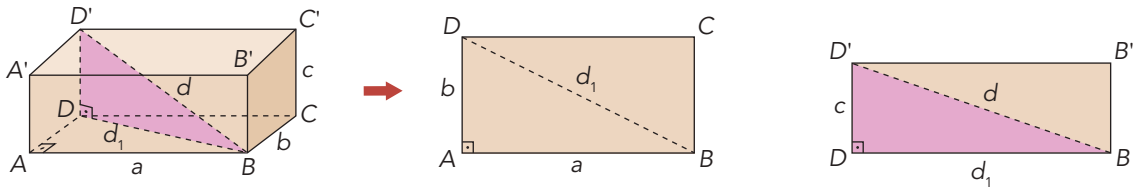
$$A = 2 \cdot (8 \cdot 4{,}5) + 2 \cdot (8 \cdot 3) + 2 \cdot (4{,}5 \cdot 3) = 147 \Rightarrow A = 147 \text{ m}^2$$

Como o valor da pintura é de R$ 4,50 por metro quadrado, a quantia a ser paga será 147 · R$ 4,50 = R$ 661,50.

Pense nisto: $ABCDA'B'C'D'$ é um paralelepípedo reto-retângulo. Então, temos que $\overline{D'D} \perp$ plano $(ABC) \Rightarrow \overline{D'D}$ é perpendicular a qualquer reta do plano (ABC) que contém D (ponto de intersecção entre o segmento de reta $\overline{D'D}$ e o plano (ABC)). Logo, $\overline{D'D} \perp \overline{DB} \Rightarrow \triangle D'DB$ é retângulo.

Cálculo da medida da diagonal

No paralelepípedo reto-retângulo representado a seguir, sejam d a medida da diagonal do paralelepípedo e d_1 a medida da diagonal da base. Note que os triângulos DAB e $D'DB$ são triângulos retângulos.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Assim, temos:

- no $\triangle DAB$: $d_1^2 = a^2 + b^2$
- no $\triangle D'DB$: $d^2 = d_1^2 + c^2$

$\Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Logo, a medida da diagonal do paralelepípedo é:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Não escreva no livro

Pense nisto

Por que o triângulo $D'DB$ é retângulo?

Cálculo da medida de volume

Para expressar a medida de volume de um sólido geométrico por meio de um número, devemos estabelecer uma unidade de medida padrão: a unidade de medida de volume é o cubo, cuja aresta mede 1 u.c. (unidade de medida de comprimento). Para cada unidade de medida de comprimento, temos uma unidade de medida de volume correspondente, como mostrado no quadro a seguir.

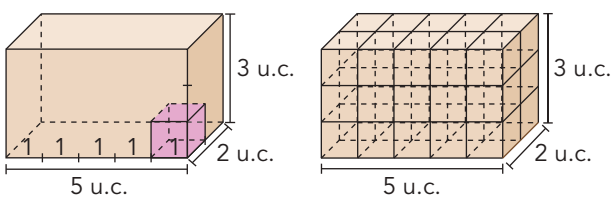
Unidade de medida da aresta do cubo	1 m	1 dm	1 cm	1 mm
Unidade de medida de volume do cubo	1 m^3	1 dm^3	1 cm^3	1 mm^3

De modo geral:

- Unidade de medida da aresta: 1 u.c.
- Unidade de medida de volume: 1 $(u.c.)^3$.

Vamos considerar um paralelepípedo reto-retângulo com as medidas das dimensões $a = 5$ u.c., $b = 2$ u.c. e $c = 3$ u.c.

A divisão das medidas de dimensão desse paralelepípedo em 5 unidades, 2 unidades e 3 unidades, respectivamente, permite que sejam obtidos 30 cubos unitários ($5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$), conforme mostrado nas figuras.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Dizemos, então, que a medida de volume desse paralelepípedo é:

$$V = (5 \text{ u.c.}) \cdot (2 \text{ u.c.}) \cdot (3 \text{ u.c.}) = 30 \ (u.c.)^3$$

De modo geral, se a, b e c são as medidas das 3 dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo, a medida de volume dele é dada por:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Professor, nas *Orientações específicas* deste Manual é apresentada a demonstração no caso em que as medidas das arestas do paralelepípedo retângulo são números racionais (não inteiros) positivos. Se achar pertinente, leve-a para a sala de aula. É uma boa oportunidade para ampliar a discussão e a reflexão.

Observação

O que apresentamos é um caso particular da obtenção da fórmula da medida de volume de um paralelepípedo reto-retângulo, em que as medidas de suas arestas são números inteiros (positivos). Pode-se mostrar que essa fórmula é válida para paralelepípedos reto-retângulos, nos quais as medidas das arestas são expressas por quaisquer números reais positivos.

Se considerarmos a e b como medidas das dimensões da base do paralelepípedo, temos que $a \cdot b$ é a medida de área da base (A_b). Além disso, tomando c como a medida da altura h, chegamos à seguinte simplificação:

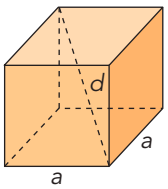
$$V = (a \cdot b) \cdot c \Rightarrow V = A_b \cdot h$$

Assim, para calcular a medida de volume do contêiner mencionado anteriormente, devemos considerar $a = 8$ m, $b = 4{,}5$ m e $c = 3$ m. Desse modo, temos:

$$V = a \cdot b \cdot c = (8 \text{ m}) \cdot (4{,}5 \text{ m}) \cdot (3 \text{ m}) = 108 \text{ m}^3$$

Cubo

O cubo é um paralelepípedo reto-retângulo, cujas 6 faces são limitadas por quadrados congruentes. Logo, as 12 arestas do cubo são congruentes entre si.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Considerando $a = b = c$ e as relações estabelecidas anteriormente, temos:

- Medida de área (A): $A = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a \Rightarrow A = 6a^2$
- Medida da diagonal (d): $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{3}$
- Medida de volume (V): $V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow V = a^3$

Observação

O litro é reconhecido como unidade de medida de volume e definido como a medida de volume de um cubo cuja aresta mede 1 decímetro, ou seja, $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$.

Atividades resolvidas

2. A água do interior de um aquário com formato de paralelepípedo reto-retângulo de base quadrada ocupa $\frac{3}{5}$ da medida de capacidade desse aquário. Considerando que a altura interna do aquário mede 3 m e que a aresta da base dele mede internamente 4,5 m, determine quantos litros de água faltam para ele ficar totalmente cheio.

Solução:

A medida de volume V, em metros cúbicos, da parte interna do aquário (ou seja, a medida de capacidade dele) é:

$$V = A_b \cdot h = (4{,}5)^2 \cdot 3 \Rightarrow V = 60{,}75$$

Como a água existente ocupa $\frac{3}{5}$ da medida de capacidade, serão necessários $\frac{2}{5} \cdot V$ para enchê-lo totalmente, ou seja, $\frac{2}{5} \cdot 60{,}75 \text{ m}^3 = 24{,}30 \text{ m}^3$.

Como $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$ e $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$, então:

$$24{,}30 \text{ m}^3 = 24{,}30 \cdot 1000 \text{ dm}^3 = 24\,300 \text{ dm}^3 = 24\,300 \text{ L}$$

Logo, são necessários 24 300 litros de água para terminar de encher o aquário.

Não escreva no livro

Pense nisto

Qual é a relação entre o litro e o centímetro cúbico?

Como 1 dm = 10 cm, temos que:
$1 \text{ dm}^3 = (1 \text{ dm}) \cdot (1 \text{ dm}) \cdot (1 \text{ dm}) = (10 \text{ cm}) \cdot (10 \text{ cm}) \cdot (10 \text{ cm}) = 1\,000 \text{ cm}^3$

7. $12 \cdot a = 48$ cm $\Rightarrow a = 4$ cm;
$d = a\sqrt{3} \Rightarrow d = 4\sqrt{3}$ cm;
$A_t = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_t = 6 \cdot (4\text{ cm})^2 = 96\text{ cm}^2$;
$V = a^3 \Rightarrow V = (4\text{ cm})^3 = 64\text{ cm}^3$.

ATIVIDADES

5. a) $d = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm; $A_t = 37{,}5\text{ cm}^2$; $V = 15{,}625\text{ cm}^3$.

b) $d = \frac{\sqrt{57}}{2}$ cm; $A_t = 28\text{ cm}^2$; $V = 10\text{ cm}^3$.

c) $d = \frac{\sqrt{61}}{2}$ cm; $A_t = 27\text{ cm}^2$; $V = 9\text{ cm}^3$.

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

5. Calcule e escreva no caderno as medidas da diagonal, de área total e de volume dos sólidos geométricos descritos a seguir.

a) Cubo de aresta medindo 2,5 cm.

b) Bloco retangular de dimensões medindo 2,0 cm, 2,0 cm e 2,5 cm.

c) Paralelepípedo reto-retângulo de dimensões medindo 3,0 cm, 1,5 cm e 2,0 cm.

6. Determine no caderno a medida de volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que a medida da diagonal é $3\sqrt{10}$ dm e 2 de suas dimensões medem 4 dm e 7 dm.

7. Calcule no caderno a medida da diagonal, a medida de área total e a medida de volume de um cubo cuja soma das medidas das arestas é igual a 48 cm.

8. Uma caixa tem o formato de um paralelepípedo retângulo cuja medida de volume é igual a 192 cm^3. Se as medidas de áreas de 2 das faces são iguais a 32 cm^2 e 24 cm^2, determine no caderno a medida de área total desse paralelepípedo. 208 cm^2

9. Priscila usou massa de modelar para construir um paralelepípedo retângulo cujas dimensões eram 20 cm × 30 cm × 45 cm. Em seguida, ela desmanchou o paralelepípedo que havia construído e aproveitou toda a massa usada na sua construção para modelar um cubo medindo x centímetros de aresta. Com essas informações, determine no caderno:

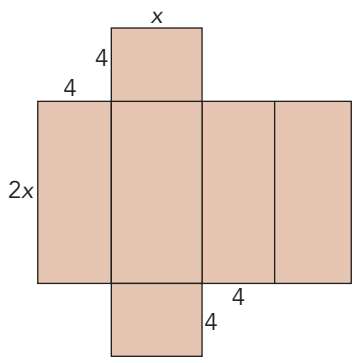
a) x; 30 cm

b) a medida da diagonal do cubo; $30\sqrt{3}$ cm

c) a razão entre a medida de área total do paralelepípedo e a medida de área total do cubo. $\frac{19}{18}$

10. A casa de Fausto tem uma caixa-d'água cujo formato lembra o de um prisma reto de base quadrada no qual a aresta da base e a altura medem respectivamente x dm e 8 dm. Se Fausto pretende reformar tal reservatório para aumentar em 20% as medidas das arestas e da altura, dando a ele a medida de capacidade de 3110,4 litros de água, qual deverá ser o valor de x? 15 dm

11. A figura mostra a planificação da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo no qual a unidade de medida das dimensões indicadas é o centímetro. Determine no caderno:



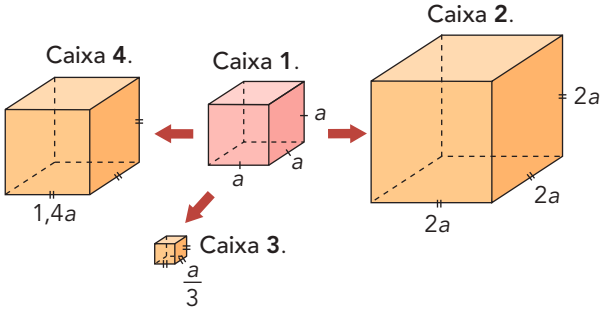
Banco de imagens/Arquivo da editora

a) x, sabendo que a medida de área total do paralelepípedo é 364 cm^2; 7 cm

b) a medida de volume do paralelepípedo para $x = 4$ cm; 128 cm^3

c) a medida da diagonal do paralelepípedo para $x = 6$ cm. 14 cm

12. Um empresário analisa a possibilidade de produzir, em formato cúbico, novas caixas de presente. Atualmente, a empresa produz embalagens iguais à da caixa **1**, e ele está investigando o custo para confeccionar as novas caixas e a medida de capacidade que elas terão.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Com base nessas informações, elabore e resolva 2 questões para este problema, uma relacionada ao custo da confecção das caixas e a outra à medida de capacidade delas.
O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

13. Uma piscina tem formato parecido com o de um paralelepípedo reto-retângulo, com dimensões medindo 50 m × 20 m × 2,5 m. A medida de volume de água contida na piscina ocupa 80% da medida de capacidade dela.

6. $a = 4$ dm; $b = 7$ dm; $d = 3\sqrt{10}$ dm;
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{10}\right)^2 = 4^2 + 7^2 + c^2 \Rightarrow c = 5$ dm;
$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = (4\text{ dm}) \cdot (7\text{ dm}) \cdot (5\text{ dm}) = 140\text{ dm}^3$.

17. a) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes respondam que o formato da pilha se parece com o de um paralelepípedo reto-retângulo. As cartas de baralho podem apresentar pequenas variações nas dimensões de acordo com o material utilizado e as diferentes marcas.

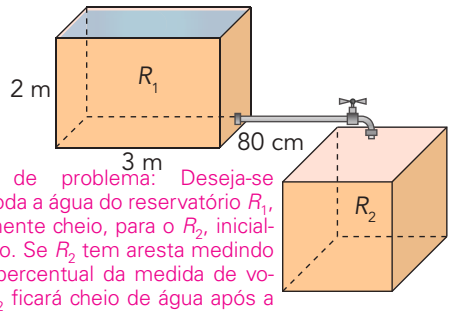
As imagens não estão representadas em proporção.

a) Quantos litros de água podem ser adicionados à medida de volume de água contido na piscina, sem que haja transbordamento? 500 000 L

b) Ao serem adicionados 150 000 L de água à piscina, que medida da altura o nível da água atinge? 2,15 m

c) Quantos litros de água devem ser retirados da piscina a fim de o nível de água cair 40 cm? 400 000 L

14. Elabore e resolva, no caderno, um problema considerando a imagem seguinte, que mostra 2 reservatórios, R_1 e R_2: um no formato de bloco retangular (R_1) e outro no formato cúbico (R_2).



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplos de problema: Deseja-se transferir toda a água do reservatório R_1, completamente cheio, para o R_2, inicialmente vazio. Se R_2 tem aresta medindo 2 m, que percentual da medida de volume de R_2 ficará cheio de água após a transferência?

15. Um comerciante comprou 20 blocos de doce de abóbora, cada um com o formato parecido com o de um paralelepípedo reto-retângulo, com arestas das bases medindo 12 cm e 21 cm e altura medindo $\frac{1}{11}$ da medida de perímetro do polígono que limita a face da base. O comerciante dividiu cada bloco em bloquinhos cúbicos de 3 cm de medida de aresta e colocou-os à venda por R$ 0,80 a unidade. Se ele pagou ao fornecedor R$ 15,00 por bloco, qual será o lucro na venda de todos os bloquinhos obtidos dos 20 blocos? R$ 596,00

16. Para a construção de uma caixa sem tampa, foi usada uma folha retangular de cartolina com dimensões medindo 30 cm × 18 cm. Foram recortados, de cada um dos 4 cantos dessa folha, pedaços quadrados e congruentes, conforme a figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Em seguida, foram feitas dobras sobre as linhas pontilhadas para construção da caixa. Considere x a medida do lado de cada região quadrada recortada e responda às perguntas no caderno.

a) Para quais valores reais de x a construção é possível? $0 < x < 9$

b) Qual é, em função de x, a medida de volume da caixa obtida? $V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 540x$

c) Para qual valor de x a medida de área da superfície lateral da caixa é 270 cm²? $x = 4{,}5$ cm ou $x = 7{,}5$ cm.

17. **Troque ideias** com um colega para investigar, de maneira intuitiva, como obter a medida de volume de um prisma usando um conjunto de cartas de baralho.

Considerando que cada carta do baralho tem formato retangular, respondam ao que se pede a seguir.

a) Organizem sobre uma mesa uma pilha vertical com todas as cartas de um mesmo naipe (copas, paus, espadas e ouros). Qual é o formato dessa pilha? Com o auxílio de uma régua, meçam o comprimento da base, a largura da base e a altura da pilha. Em seguida, calculem a medida de volume da pilha.

b) Usando outro conjunto de cartas do mesmo naipe, diferente do anterior, mas com a mesma quantidade de cartas, organizem uma pilha vertical com elas. Em seguida, com o auxílio de uma régua, arrumem a pilha de cartas para que fique com o formato de um paralelepípedo oblíquo. Anotem as medidas de comprimento e de largura da base e a medida da altura dessa nova pilha de cartas. As medidas obtidas são iguais às do item **a**?

c) Agora, usando outro conjunto de cartas do mesmo naipe, diferente dos 2 anteriores, mas com a mesma quantidade de cartas, coloquem-nas umas sobre as outras, da maneira como preferir, mas sempre utilizando o mesmo plano da mesa para acompanhar as alterações. Vocês diriam que as 3 pilhas que foram organizadas têm a mesma medida de volume?

d) Se repetíssemos o experimento realizado com moedas idênticas, vocês acham que as medidas de volume das 3 pilhas seria a mesma?

17. b) Sim. Espera-se que as medidas sejam iguais. Entretanto, é possível que os estudantes obtenham pequenas alterações na medida da altura por se tratar de um objeto do mundo físico, e não abstrato.

c) Sim. Espera-se que os estudantes percebam que os prismas têm a mesma medida de área da base e a mesma medida da altura. Logo, as pilhas de cartas têm a mesma medida de volume.

d) Sim. Espera-se que os estudantes percebam que a medida de volume será igual independentemente do formato das pilhas.

18. Professor, neste caso, estamos considerando os biscoitos bem fininhos para hipoteticamente considerá-los com formato de uma região quadrada, ou seja, apenas com 2 dimensões (desprezando a medida da altura). Desse modo, os estudantes podem utilizar a situação concreta da pilha de biscoitos para investigar, de maneira intuitiva, como obter a medida de volume de um prisma. A analogia também pode ser feita com folhas de papel, por exemplo.

18. **Troque ideias** com um colega para analisar as informações e responder às questões que seguem.

Imagine um pacote de biscoito de água e sal bem fininho no formato de um prisma reto de base quadrada. Nesse caso, podemos considerar que cada biscoito tem o formato de uma região quadrada, e os biscoitos são empilhados em uma única coluna. Desprezando as demais dimensões da embalagem, considere que a medida dos lados de cada biscoito é 6 cm e a medida da altura do pacote é 20 cm.

a) Em uma situação hipotética em que todos os biscoitos são perfeitamente idênticos, apresente uma instrução para o cálculo da medida de volume total ocupado pelos biscoitos. Em seguida, calcule o resultado.

b) Se dividíssemos todos os biscoitos pela sua diagonal, qual seria a medida de área superficial de cada novo biscoito triangular? $18\ cm^2$

c) Se organizássemos os biscoitos triangulares em 2 colunas, qual seria a medida de volume de cada pilha de biscoitos? Qual é a relação entre a medida de área superficial de cada biscoito triangular e a medida de volume de cada pilha?

d) Agora, considere que a empresa fabricante queira alterar o formato original dos biscoitos quadrangulares mantendo, porém, a medida de área superficial. Indique um formato possível, mencionando as dimensões do novo biscoito. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

e) De acordo com o formato escolhido no item anterior e considerando que a medida da altura do pacote de biscoitos permanece 20 cm, qual será a medida de volume da nova pilha de biscoitos? $720\ cm^3$

18. c) $360\ cm^3$. A medida de volume será igual ao produto da medida de área superficial pela medida da altura.

Princípio de Cavalieri

Vídeo

Antes de enunciar o princípio de Cavalieri, vamos apresentar exemplos para que ele possa ser compreendido de maneira intuitiva.

Dispõe-se de um conjunto de chapas retangulares de madeira, todas feitas do mesmo material, com dimensões de mesma medida e, consequentemente, com a mesma medida de volume.

Imagine que essas chapas tenham sido usadas para formar 2 pilhas diferentes, cada qual com a mesma quantidade delas, como mostram as imagens **1** e **2**.

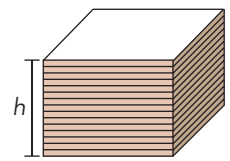


Imagem **1**.

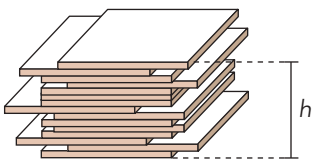
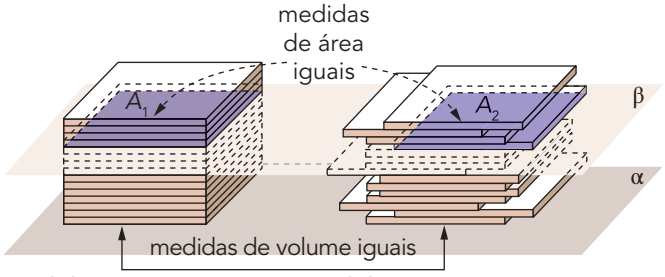


Imagem **2**.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que, em ambas as pilhas, a quantidade de espaço ocupado pela coleção de chapas é a mesma, isto é, as pilhas das imagens **1** e **2** têm a mesma medida de volume.

Imagine as pilhas anteriores representadas por sólidos geométricos correspondentes, com bases contidas em um mesmo plano α e situadas em um mesmo semiespaço determinado por α. Qualquer plano β paralelo a α e secante aos sólidos geométricos **1** e **2** determina neles superfícies equivalentes, ou seja, de medidas de área iguais.



Sólido geométrico **1**. Sólido geométrico **2**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

18. a) Exemplo de resposta: Como o pacote tem o formato de um paralelepípedo retângulo, a medida de volume deve ser calculada pela multiplicação das medidas das 3 dimensões, ou seja, será necessário efetuar $6\ cm \cdot 6\ cm \cdot 20\ cm = 720\ cm^3$.

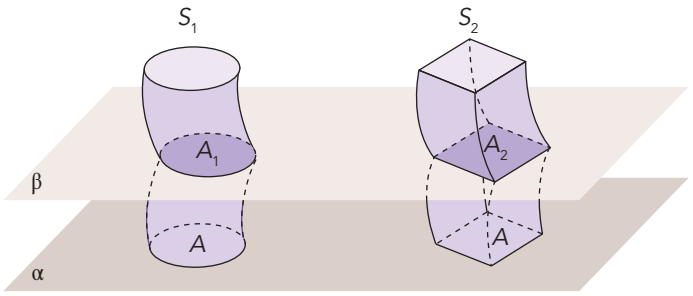
O que acabamos de apresentar de maneira intuitiva é um resultado conhecido como **princípio de Cavalieri**. Ele foi formalizado pelo matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647).

> Dois sólidos geométricos – nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de medidas de área iguais (superfícies equivalentes) – são sólidos geométricos de medidas de volume iguais (sólidos geométricos equivalentes).

Considere que 2 sólidos geométricos S_1 e S_2 têm uma das bases contidas no mesmo plano α e ambas as bases com mesma medida de área A.

Vamos considerar também que qualquer plano β, paralelo a α, que secciona S_1 secciona também S_2 em 2 regiões de medidas de área A_1 e A_2, em que A_1 é igual a A_2 (e ambas iguais a A).

Assim, pelo princípio de Cavalieri, as medidas de volume dos 2 sólidos (V_1 e V_2) são iguais.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

Medidas de área e de volume

Medida de área da base (A_b)

Como a base de um prisma é uma região limitada por um polígono, a medida de área da base de um prisma é a medida de área de uma região limitada por um polígono.

Medida de área lateral (A_ℓ)

Como a superfície lateral de um prisma é a reunião das faces laterais dele, então a medida de área lateral de um prisma é a soma das medidas de área das faces laterais. Lembre-se de que as faces laterais são regiões limitadas por paralelogramos.

Medida de área total (A_t)

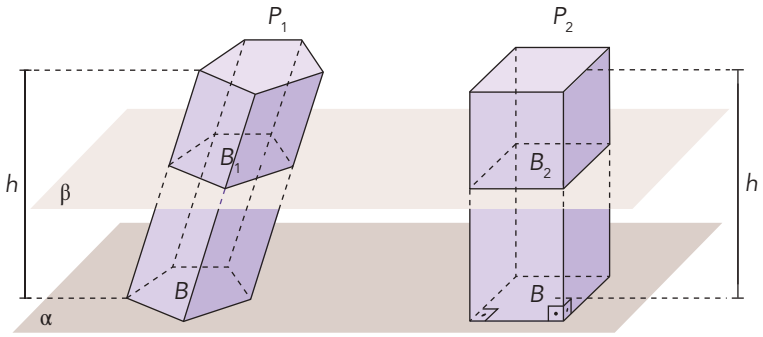
Como a superfície total de um prisma é a reunião da superfície lateral com as bases, então a medida de área total de um prisma é dada por:

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

Medida de volume (V)

Seja um prisma P_1 com medida da altura igual a h e medida de área da base igual a B. Vamos considerar um paralelepípedo reto-retângulo P_2, em que h é a medida da altura de P_2 e B é a medida de área da base. Note que P_1 e P_2 têm medidas da altura iguais, assim como são iguais as medidas de área das bases.

Vamos supor que os 2 sólidos geométricos (P_1 e P_2) tenham as bases contidas em um mesmo plano α e fiquem no mesmo semiespaço de origem α, conforme mostrado na imagem.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que qualquer plano β paralelo a α que seccione P_1 também secciona P_2. Note também que as secções de P_1 e P_2 com β têm medidas de área (B_1 e B_2) iguais, pois são congruentes às respectivas medidas de área das bases (ambas iguais a B).

Então, pelo princípio de Cavalieri, o prisma P_1 e o paralelepípedo P_2 têm medidas de volume iguais, ou seja, $V_{P_1} = V_{P_2}$.

Como $V_{P_2} = B \cdot h$, então: $V_{P_1} = B \cdot h$.

Assim, concluímos que a medida de volume de um prisma é igual ao produto da medida de área da base pela medida da altura.

$$V = A_b \cdot h$$

Como exemplo, vamos calcular a medida de volume de um prisma reto triangular com 12 cm de medida da altura e 18 cm^2 de medida de área da base e a medida de volume de um cubo cuja medida de aresta da base é 6 cm. Assim, temos:

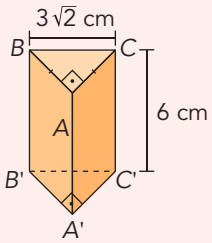
$$V_{prisma} = A_b \cdot h \Rightarrow V_{prisma} = 18\ cm^2 \cdot 12\ cm = 216\ cm^3$$

$$V_{cubo} = A_b \cdot h \Rightarrow V_{cubo} = (6\ cm)^2 \cdot 6\ cm = 216\ cm^3$$

Como as medidas de volumes são iguais, dizemos que são **sólidos geométricos equivalentes**.

Atividades resolvidas

3. A figura representa um prisma reto triangular cuja medida da altura é 6 cm, e a base é uma região limitada por um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa mede $3\sqrt{2}$ cm. Determine a medida de área total (A_t) e a medida de volume (V) desse prisma.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

rawpixel.com/Freepik

24. Pelo enunciado, temos: $h = 4$ cm (medida da altura do porta-joias) e $x = 3$ cm (medida da aresta da base do porta-joias).

Assim, a medida de área lateral é: $A_\ell = 7 \cdot (x \cdot h) \Rightarrow A_\ell = 7 \cdot (3\text{ cm}) \cdot (4\text{ cm}) = 84\text{ cm}^2$.

Logo, a quantia adicional paga foi de R$ 12,60 (84 · R$ 0,15).

Note que a resposta independe do preço marcado da peça.

As imagens não estão representadas em proporção.

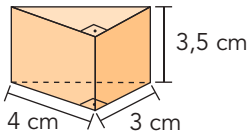
Não escreva no livro

ATIVIDADES

19. Calcule, no caderno, a medida de área lateral, a medida de área total e a medida de volume de cada um dos seguintes prismas:

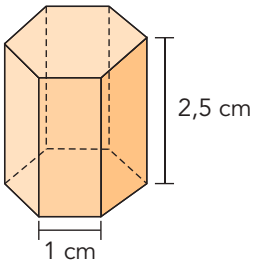
a) prisma reto triangular

$A_\ell = 42\text{ cm}^2$;
$A_t = 54\text{ cm}^2$;
$V = 21\text{ cm}^3$.



b) prisma regular hexagonal

$A_\ell = 15\text{ cm}^2$;
$A_t = 3(5 + \sqrt{3})\text{ cm}^2$;
$V = \frac{15\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^3$.

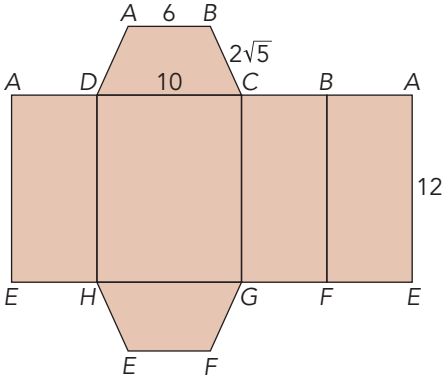


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

20. Considere um prisma reto cuja base é limitada por um triângulo equilátero de medida de perímetro igual a 12 dm. Determine no caderno a medida de área total e a medida de volume desse prisma, sabendo que a medida da altura é o dobro da medida da altura da base.

$A_t = 56\sqrt{3}\text{ dm}^2$; $V = 48\text{ dm}^3$.

21. A figura representa a planificação da superfície de um prisma reto cuja base é uma região limitada por um trapézio isósceles.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Considerando que a unidade de medida de comprimento é o centímetro, determine no caderno:

a) a medida de volume desse prisma; 384 cm³

b) a razão entre a medida de área da base e a medida de área lateral desse prisma, nessa ordem. $\frac{8 - 2\sqrt{5}}{33}$

22. A base de um prisma reto de 8 cm de medida da altura é uma região limitada por um quadrado inscrito em uma circunferência cujo diâmetro mede $6\sqrt{2}$ cm. Determine no caderno as medidas de área total e de volume desse prisma.

$A_t = 264\text{ cm}^2$; $V = 288\text{ cm}^3$.

23. Sabe-se que a base de um prisma reto é uma região limitada por um hexágono regular, cujo apótema mede $6\sqrt{3}$ dm. Se a medida da altura desse prisma mede 20 dm, determine no caderno a medida de área total e a de volume dele. $A_t = 144(10 + 3\sqrt{3})\text{ dm}^2$; $V = 4320\sqrt{3}\text{ dm}^3$.

24. Um artesão vende por R$ 60,00 porta-joias com formato de prismas heptagonais regulares, de altura e aresta da base medindo, respectivamente, 4 cm e 3 cm. Ele oferece aos clientes uma opção em que o objeto é revestido de resina em toda a superfície lateral e, por esse serviço, cobra sobre o preço marcado um adicional de R$ 0,15 por centímetro quadrado de superfície revestida. Mafalda comprou um desses porta-joias e optou pelo revestido. Que quantia adicional ela pagou?

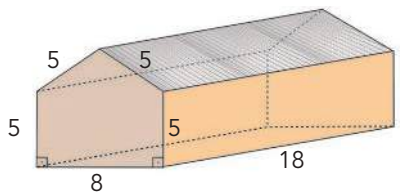
25. A embalagem de certo produto tem formato de prisma triangular regular com altura medindo $4\sqrt{3}$ cm. A medida de área total é o dobro da medida de área lateral. Determine no caderno a medida de volume do produto contido em uma embalagem sabendo que ocupa 60% da medida de capacidade dela.

1 036,8 cm³

26. A figura representa um galpão em formato de prisma reto de base pentagonal, em que a unidade de medida de comprimento é o metro. Considerando que esse galpão tem 18 m de comprimento, determine a medida de volume de ar que ele comporta. Desconsidere a espessura das paredes e dos telhados do galpão.

936 m³.

Experimente resolver esse problema usando um *software* de Geometria dinâmica.



Luis Moura/Arquivo da editora

A resolução da atividade depende do *software* utilizado pelo estudante.

27. Um prisma hexagonal regular é tal que a medida de área da base está para a medida de área lateral assim como 1 está para 3. Determine no caderno a medida de área lateral e a medida de volume desse prisma sabendo que ele tem 18 cm de medida da altura.

$A_\ell = 864\sqrt{3}$ cm²; $V = 5\,184\sqrt{3}$ cm³.

28. **Experimente** resolver o problema a seguir usando as ferramentas de um *software* de Geometria dinâmica.

Uma piscina, em formato parecido com o de um prisma reto de base retangular, será construída em um clube de maneira que a profundidade seja constante e de medida 1,6 m. De acordo com essa informação, faça o que se pede em cada item.

a) Represente 2 possibilidades para o modelo dessa piscina, cuja medida de área da base seja igual a 1296 m².

b) Indique as medidas de volume de ambas as piscinas. Ambos os volumes medirão 2073,6 m³, pois 1 296 · 1,6 = 2 073,6.

c) Usando a ferramenta para o cálculo da medida de área, no *software*, indique o modelo que apresenta a maior economia no revestimento da piscina com pastilhas do mesmo tipo.

28. a) Espera-se que o estudante represente 2 prismas cuja base seja retangular com medida de área igual a 1 296 m² (36 m × 36 m ou 32 m × 40,5 m).

c) Como a medida de área da base é a mesma para ambos os prismas, a piscina com menor custo de revestimento será aquela que tem a menor medida de área lateral.

Pirâmide

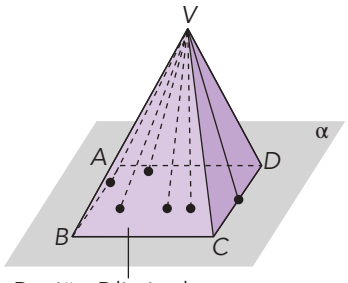
O desenvolvimento da Geometria pode ter sido motivado por necessidades práticas de demarcação de terras e de construção de edifícios ou até mesmo por sentimentos estéticos das artes em geral.

Seja por sentimentos estéticos ou necessidades práticas, esse campo foi altamente desenvolvido entre os egípcios, como mostram registros de construções de pirâmides (aproximadamente 5000 a.C.), destinadas a servir de túmulo para o faraó e a família dele, bem como a guardar seus tesouros.

Para os egípcios, as pirâmides representavam os raios do Sol brilhando em direção à Terra. Todas elas foram construídas na margem oeste do rio Nilo, na direção do Sol poente.

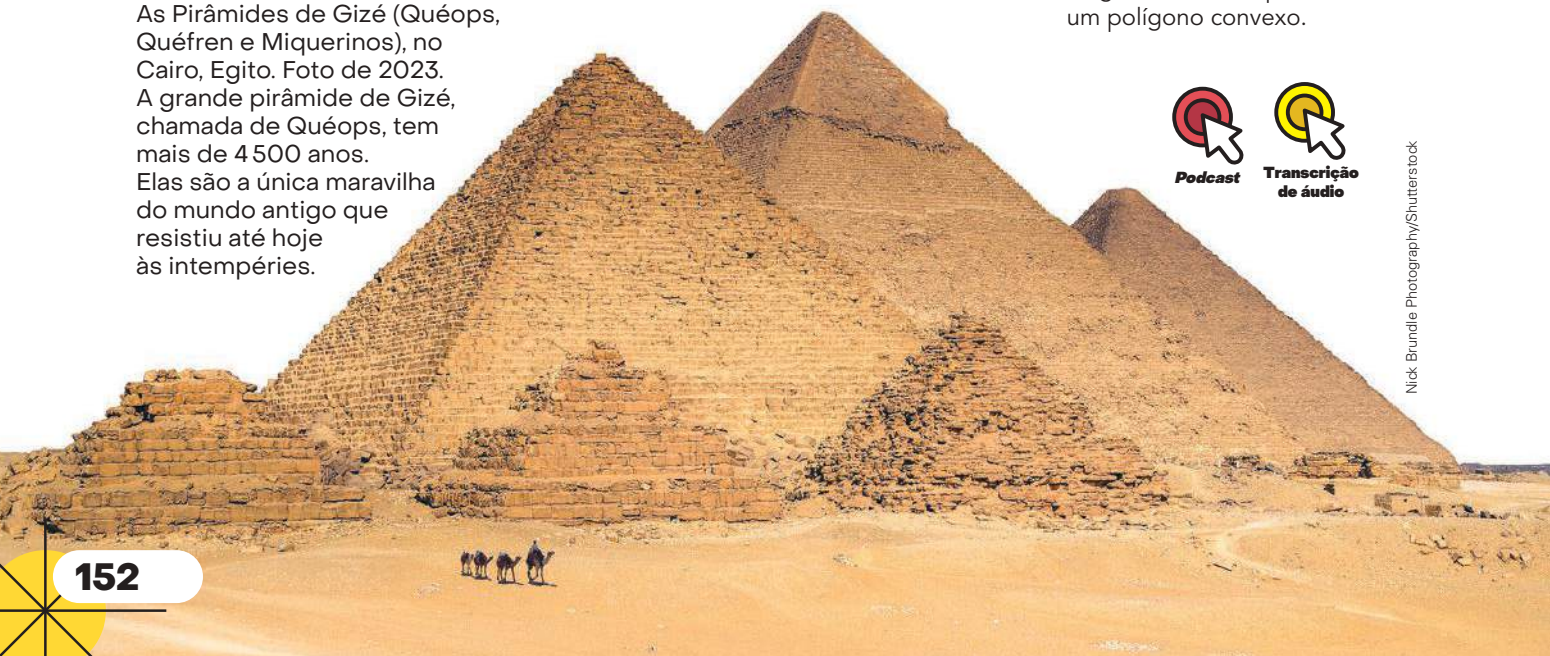
Definição

Em um plano α, considere uma região P limitada por um polígono convexo e um ponto V não pertencente a α. Vamos representar todos os possíveis segmentos de reta que têm uma extremidade em V e a outra em um ponto de P. A reunião desses segmentos de reta é um sólido geométrico chamado **pirâmide**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Região P limitada por um polígono convexo.



As Pirâmides de Gizé (Quéops, Quéfren e Miquerinos), no Cairo, Egito. Foto de 2023. A grande pirâmide de Gizé, chamada de Quéops, tem mais de 4 500 anos. Elas são a única maravilha do mundo antigo que resistiu até hoje às intempéries.

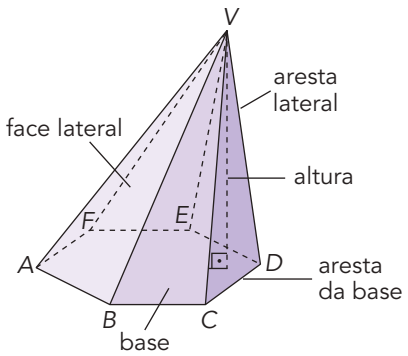
Nick Brundle Photography/Shutterstock

Podcast **Transcrição de áudio**

Elementos e classificação

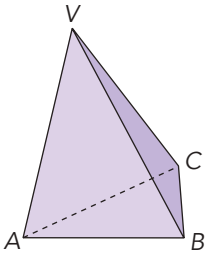
Na pirâmide *VABCDEF*, temos que:

- o ponto *V* é o **vértice** da pirâmide;
- a região limitada pelo polígono *ABCDEF* é a **base** da pirâmide;
- os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$ são as **arestas da base**;
- os segmentos de reta $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$, $\overline{VE}$ e $\overline{VF}$ são as **arestas laterais**;
- as regiões limitadas pelos triângulos *VAB*, *VBC*, *VCD*, *VDE*, *VEF* e *VFA* são as **faces laterais**;
- a medida de distância de *V* ao plano da base é a medida da **altura** da pirâmide.

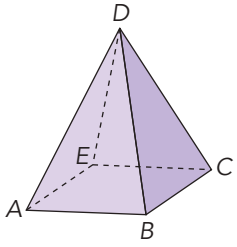


Banco de imagens/Arquivo da editora

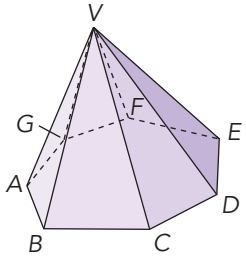
As pirâmides podem ser classificadas de acordo com o polígono que limita a região da base.



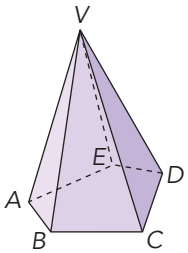
Pirâmide triangular
(a base é uma região limitada por um triângulo).



Pirâmide quadrangular
(a base é uma região limitada por um quadrilátero).



Pirâmide heptagonal
(a base é uma região limitada por um heptágono).



Pirâmide pentagonal
(a base é uma região limitada por um pentágono).

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Illus_man/Shutterstock

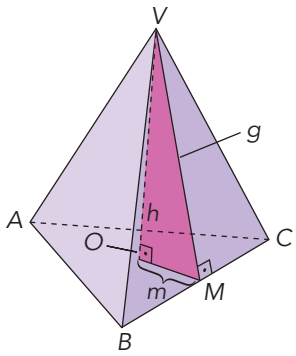
Pirâmide regular

A **pirâmide regular** é aquela cuja base é uma região limitada por um polígono regular e cujas arestas laterais são congruentes entre si.

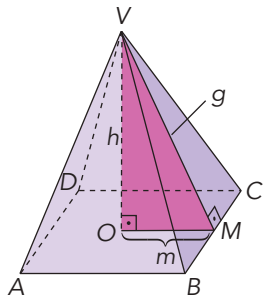
Uma pirâmide regular tem as seguintes características:

- a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base coincide com o centro da base;
- as faces laterais são limitadas por triângulos isósceles congruentes;
- a medida do apótema da pirâmide regular é a medida da altura de uma face lateral relativa à aresta da base.

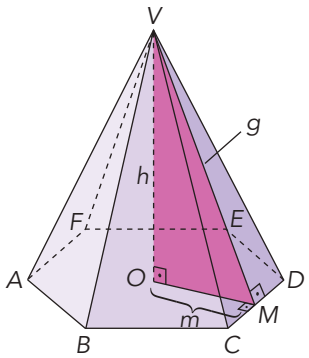
Considere essas características indicadas nas pirâmides regulares representadas a seguir, nas quais h e g são respectivamente as medidas da altura e do apótema da pirâmide e m é a medida do apótema da base.



Pirâmide triangular regular (a base é uma região limitada por um triângulo equilátero).



Pirâmide quadrangular regular (a base é uma região limitada por um quadrado).



Pirâmide hexagonal regular (a base é uma região limitada por um hexágono regular).

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que, em toda pirâmide regular, vale, pelo teorema de Pitágoras, a relação notável:

$$g^2 = h^2 + m^2$$

Medidas de área e de volume

Medida de área da base (A_b)

Como a superfície da base de uma pirâmide é uma região limitada por um polígono, então a medida de área da base de uma pirâmide é a medida de área de uma região limitada por um polígono.

Medida de área lateral (A_ℓ)

Como a superfície lateral de uma pirâmide é a reunião das faces laterais (triangulares), então a medida de área lateral de uma pirâmide é a soma das medidas de área das faces laterais.

Medida de área total (A_t)

A superfície total de uma pirâmide é a reunião da região limitada pelo polígono da base com as regiões limitadas por triângulos que compõem a superfície lateral. Logo, a medida de área total da pirâmide é a soma da medida de área da região limitada pelo polígono da base com a medida de área da superfície lateral, ou seja:

$$A_t = A_b + A_\ell$$

EXPERIMENTE

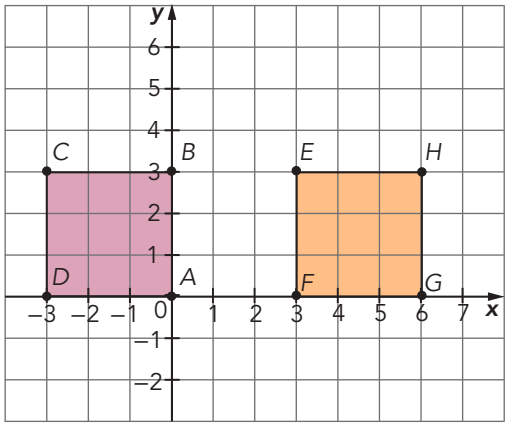
Não escreva no livro

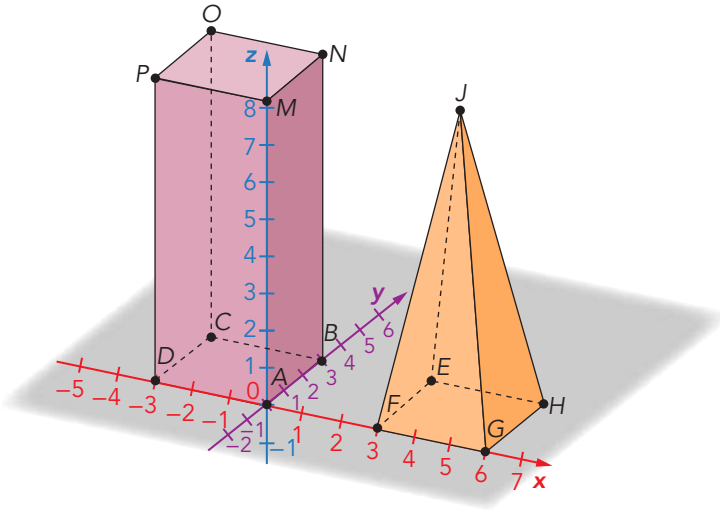
Investigar a medida de volume de prismas e pirâmides

Vamos utilizar um *software* de Geometria para comparar a medida de volume de um prisma com a de uma pirâmide. Sugerimos selecionar um *software on-line* de Geometria dinâmica ou instalar um aplicativo que permita a construção desses sólidos geométricos. A seguir, apresentamos alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* de Geometria dinâmica.

Para fazer a comparação, devemos representar um prisma e uma pirâmide de maneira que a figura da base do prisma seja congruente à figura da base da pirâmide.

Como exemplo, vamos considerar que a base do prisma e da pirâmide são regiões limitadas por quadrados de lados medindo 3 u.c. e que a medida da altura é igual a 8 u.c.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

• Como a medida de volume do prisma é 72 unidades de medida de volume e a da pirâmide é 24 unidades de medida de volume, temos que a medida de volume do prisma é 3 vezes maior do que a medida de volume da pirâmide.

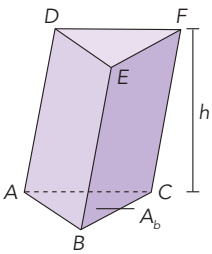
Com a ferramenta para cálculo de medida de volume, clique sobre o prisma e, depois, sobre a pirâmide. Compare as medidas de volume desses sólidos geométricos e responda ao que se pede no caderno.

- Quantas vezes a medida de volume do prisma é maior que a da pirâmide?
- **Experimente** construir outro prisma e outra pirâmide, considerando a mesma figura para a base desse prisma e dessa pirâmide, ambos com a mesma medida da altura, e verifique se essa relação se mantém.

• A resposta depende do *software* utilizado pelo estudante. Espera-se que o estudante perceba que a relação se mantém, quaisquer que sejam o prisma e a pirâmide que têm as bases equivalentes, isto é, com a mesma medida de área e a mesma medida da altura.

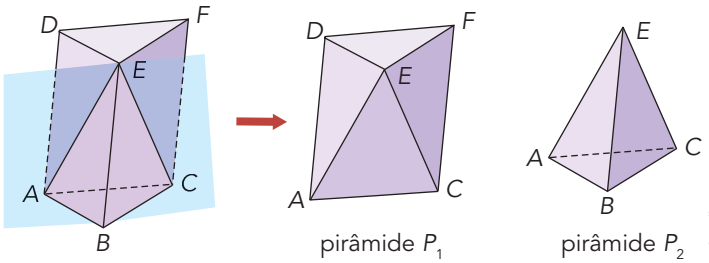
Medida de volume (V)

Para determinar a medida de volume de uma pirâmide triangular, consideraremos inicialmente um prisma triangular de área da base A_b e altura de medida h.

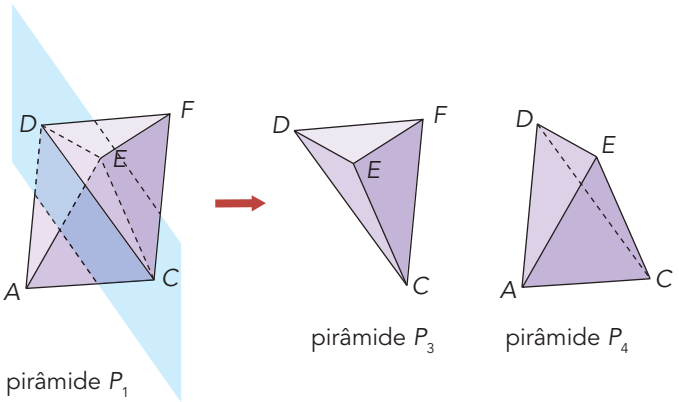


Banco de imagens/Arquivo da editora

Seccionando esse prisma pelo plano (*ACE*), obtemos uma pirâmide quadrangular P_1 de base *ACFD*, vértice *E* e altura de medida *h* e uma pirâmide triangular P_2 de base *ABC*, vértice *E* e altura de medida *h*. (Note que poderíamos ter selecionado outros planos para a secção, e o resultado seria análogo.)



Seccionando P_1 pelo plano (*CDE*), obtemos 2 pirâmides triangulares: P_3, de vértice *F* e base *DEC* (ou de vértice *C* e base *DEF*, ou de vértice *D* e base *CEF*); e P_4, de vértice *A* e base *DEC*.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que:

- P_2 e P_3 são pirâmides de bases equivalentes (limitadas pelo $\triangle ABC$ e pelo $\triangle DEF$) e mesma medida da altura;
- P_3 e P_4 são pirâmides que têm a região limitada pelo $\triangle DEC$ como base comum e mesma medida da altura, pois as medidas de distância dos respectivos vértices (*F* e *A*) das pirâmides ao plano da base são iguais.

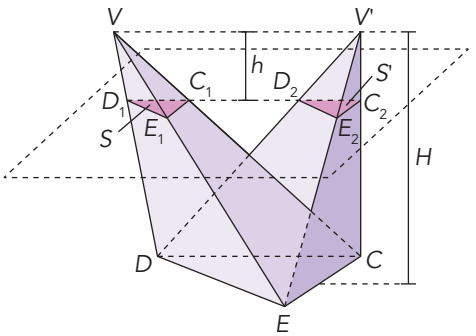
Para obter a medida de volume dessas pirâmides triangulares, vamos, de maneira introdutória, mostrar o seguinte teorema.

> Duas pirâmides de mesma medida de área da base e mesma medida da altura, têm a mesma medida de volume.

Demonstração

Consideremos as pirâmides *P* e *P'*, de base comum *DEC* e vértices *V* e *V'*, ambas com altura medindo *H*.

Um plano paralelo ao plano (*DEC*) da base, que dista *h* dos vértices *V* e *V'*, determina em *P* e *P'* as seções *S* e *S'*, respectivamente, conforme mostrado na figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Se *A* é a medida de área da base *DEC*, A_1 a medida de área da secção *S* e A_2 a medida de área da secção *S'*, considerando a semelhança entre os triângulos *DEC* e $D_1E_1C_1$ e entre os triângulos *DEC* e $D_2E_2C_2$, temos:

$$\frac{h}{H} = k \text{ (razão de semelhança)} \Rightarrow \frac{A_1}{A} = k^2 = \frac{A_2}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$$

Logo, pelo princípio de Cavalieri, podemos concluir que $V_P = V_{P'}$.

Agora, de modo análogo, podemos mostrar que $V_{P_2} = V_{P_3}$ e $V_{P_3} = V_{P_4}$, então $V_{P_2} = V_{P_3} = V_{P_4}$.

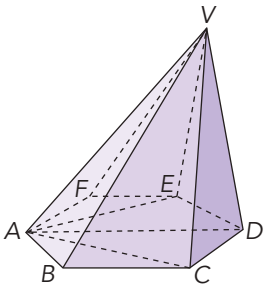
Fazendo $V_{P_2} = V_{P_3} = V_{P_4} = V$ e considerando que o prisma *ABCDEF* é a reunião das pirâmides P_2, P_3 e P_4, a medida de volume dele ($A_b \cdot h$) é tal que:

$$A_b \cdot h = V + V + V \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Portanto, concluímos, para pirâmides triangulares, a validade do teorema:

> A medida de volume de uma pirâmide triangular é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da medida de área da base pela medida da altura.

Para estender o resultado obtido, note, na figura, que uma pirâmide pode ser dividida em pirâmides triangulares que têm a mesma medida da altura que a pirâmide original. Assim, no exemplo da figura, temos pirâmides de vértice *V,* cujas bases são limitadas pelos triângulos *AFE*, *AED*, *ADC* e *ACB*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Considerando todas as diagonais do polígono que limita a base, traçadas por apenas um dos vértices dele, note que a divisão da pirâmide original em pirâmides triangulares fica definida por um plano que cada uma dessas diagonais e o vértice da pirâmide determinaram.

Seja, agora, uma pirâmide qualquer cuja base é uma região limitada por um polígono de n lados. Vamos traçar todas as diagonais que passam por um mesmo vértice desse polígono, dividindo-o em $(n - 2)$ triângulos. Nesse caso, obteríamos $(n - 2)$ pirâmides triangulares de mesma medida da altura que a pirâmide original e com medidas de área da base $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$.

Como a medida de volume V da pirâmide original é a soma das medidas de volume dessas $(n - 2)$ pirâmides triangulares, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h + \frac{1}{3} A_2 \cdot h + \ldots + \frac{1}{3} A_{n-2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-2}) \cdot h$$

Ou seja, a medida de volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da medida de área da base pela medida da altura.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Pense nisto: Não. Toda pirâmide triangular é um tetraedro, porém não necessariamente regular, pois, em um tetraedro regular, todas as faces são regiões limitadas por triângulos equiláteros e, em uma pirâmide triangular regular, a base deve ser uma região limitada por um triângulo equilátero e as faces laterais devem ser regiões limitadas por triângulos isósceles (não necessariamente equiláteros).

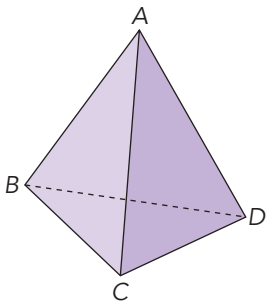
Tetraedro regular

Chama-se **tetraedro** toda pirâmide de base triangular.

Se as 4 faces de um tetraedro são limitadas por triângulos equiláteros congruentes, ele é chamado **tetraedro regular**.

Note que, em um tetraedro regular *ABCD*:

- as 6 arestas são congruentes, ou seja, $AB = AC = AD = BC = BD = CD$;
- qualquer face, *ABC*, *ACD*, *ABD* ou *BCD*, pode ser considerada base, já que todas são limitadas por triângulos equiláteros congruentes.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro

Pense nisto

Toda pirâmide triangular regular é um tetraedro regular? Por quê?

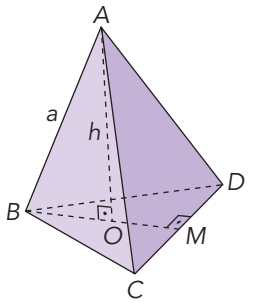
Medida de área total (A_t)

A superfície total de um tetraedro regular é a reunião das superfícies de 4 regiões limitadas por triângulos equiláteros congruentes. Considerando que a medida das arestas do tetraedro regular é *a*, como as faces são regiões limitadas por triângulos equiláteros, temos:

$$A_t = 4 \cdot A_{face} \Rightarrow A_t = 4 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow \boxed{A_t = a^2 \cdot \sqrt{3}}$$

Medida da altura (*h*)

Considere o ponto *O* de um tetraedro regular como a projeção ortogonal do vértice *A* sobre o plano (*BCD*) da base, como mostra a figura.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que o triângulo *AOB* é retângulo, e assim:

$$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2 \quad \text{I}$$

Como $AB = a$, $AO = h$ e $OB = \frac{2}{3} BM$ ($\overline{BM}$: altura do triângulo equilátero *BCD* e *O* é o baricentro do triângulo BCD), temos:

$$OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{II}$$

Substituindo II em I:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} \Rightarrow h^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow \boxed{h = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}}$$

Medida de volume (*V*)

Como a medida de área da base do tetraedro é $A_b = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ (região limitada por um triângulo equilátero) e a medida da altura é $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}}$$

Professor, lembre os estudantes de que, no triângulo equilátero, a altura coincide com a mediana e o ponto *O* (baricentro) divide a mediana, a partir do vértice, na razão de 2 : 1, isto é, $BO = 2 \cdot OM$.
Se achar pertinente, deduza novamente a fórmula da medida da altura de um triângulo equilátero em função da medida ℓ do lado dele.

Atividades resolvidas

5. Considere uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 18 dm e cuja medida da aresta da base é $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ dm. Para essa pirâmide, determine a medida do apótema da base (m), a medida do apótema da pirâmide (g), a medida da aresta lateral (a), a medida de área da base (A_b), a medida de área lateral (A_ℓ), a medida de área total (A_t) e a medida de volume (V).

Solução:

São dados $h = 18$ dm e $\ell = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ dm.

Figura **1**: pirâmide.

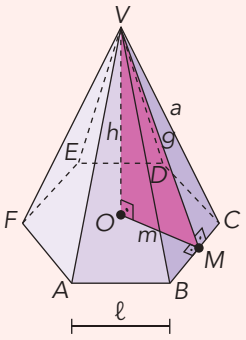


Figura **2**: base.

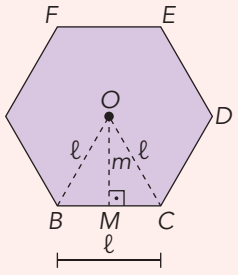
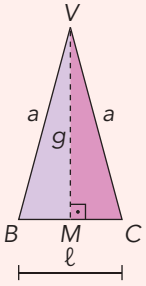


Figura **3**: face lateral.



- Na figura **2**, o apótema da base (m) coincide com a altura de um triângulo equilátero. Logo:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 4; \text{ ou seja, } 4 \text{ dm}.$$

- Na figura **3**, o apótema da pirâmide (g) é a altura do triângulo isósceles (relativa ao lado $\overline{BC}$) da face lateral. Como o $\triangle VOM$ é retângulo em O (figura **1**), temos:

$$g^2 = h^2 + m^2 = 18^2 + 4^2 = 340 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g = 2\sqrt{85}; \text{ ou seja, } 2\sqrt{85} \text{ dm}.$$

- Na figura **3**, pode-se notar que a aresta lateral (a) é a hipotenusa da região limitada pelo $\triangle VMC$. Logo:

$$a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 340 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1036}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \frac{2\sqrt{777}}{3}; \text{ ou seja, } \frac{2\sqrt{777}}{3} \text{ dm}.$$

- Como a superfície da base da pirâmide pode ser decomposta em 6 regiões limitadas por triângulos equiláteros congruentes, temos:

$$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{8\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_b = 32\sqrt{3}; \text{ ou seja, } 32\sqrt{3} \text{ dm}^2.$$

- Como a superfície lateral da pirâmide é a reunião de 6 regiões limitadas por triângulos isósceles congruentes (figura **3**), temos:

$$A_\ell = 6 \cdot \left(\frac{\ell \cdot g}{2}\right) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{85} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_\ell = 16\sqrt{255}; \text{ ou seja, } 16\sqrt{255} \text{ dm}^2.$$

- A medida de área total é a soma da medida de área da base com a medida de área lateral:

$$A_t = A_b + A_\ell = 32\sqrt{3} + 16\sqrt{255} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_t = 16\sqrt{3}\left(2 + \sqrt{85}\right); \text{ ou seja,}$$
$$16\sqrt{3}\,(2 + \sqrt{85})\text{ dm}^2.$$

- Como a medida de volume é dada por $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, temos:

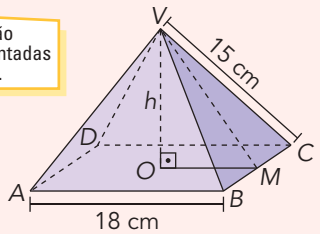
$$V = \frac{1}{3} \cdot 32\sqrt{3} \cdot 18 \Rightarrow V = 192\sqrt{3}; \text{ ou seja,}$$
$$192\sqrt{3} \text{ dm}^3.$$

6. Determine a medida de área total e a medida de volume de uma pirâmide regular de base quadrada, sabendo que as medidas das arestas laterais e da base são 15 cm e 18 cm, respectivamente.

Solução:

Considere que a figura a seguir é a representação da pirâmide a que se refere o problema.

As imagens não estão representadas em proporção.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Banco de imagens/ Arquivo da editora

34. Exemplo de problema: Uma doceria pretende embalar um bombom no formato de uma pirâmide regular quadrangular em uma caixa cuja planificação é a figura a seguir. Essa caixa tem o formato de uma pirâmide quadrangular regular cujo apótema mede 15 cm e cuja aresta lateral mede 17 cm. Para tanto, determine a medida de área total da embalagem. Além disso, verifique qual deverá ser a medida de volume máxima do bombom para tal embalagem. Desconsidere a espessura da embalagem, possíveis sobreposições e sobras de material.

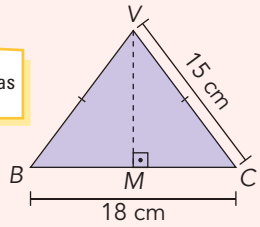
- A medida de área total da superfície dessa pirâmide é a soma da medida de área da base, que é limitada por um quadrado de 18 cm de lado, com a medida de área de 4 regiões limitadas por triângulos isósceles congruentes. Assim, temos:

$$A_b = \ell^2 \Rightarrow A_b = 18^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_b = 324; \text{ ou seja, } 324 \text{ cm}^2.$$

- Para calcular a medida de área lateral da pirâmide (A_ℓ), devemos primeiro determinar a medida de área A_1 da região limitada pelo triângulo VBC, cujo esquema está representado a seguir. Assim, temos:

Banco de imagens/ Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.



$\triangle VMC$ é retângulo: $(VC)^2 = (VM)^2 + (MC)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (VM)^2 = 15^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2 = 114 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V = 12; \text{ ou seja, } 12 \text{ cm}.$$

Como $A_1 = \frac{(BC)\cdot(VM)}{2} = \frac{18 \cdot 12}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_1 = 108; \text{ ou seja, } 108 \text{ cm}^2.$$

Temos: $A_\ell = 4 \cdot A_1 \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot 108 \Rightarrow A_\ell = 432$; ou seja, 432 cm^2.

Então: $A_t = A_b + A_\ell = 324 + 432 \Rightarrow A_t = 756$; ou seja, $A_t = 756 \text{ cm}^2$.

Logo, a medida de área total da pirâmide é 756 cm^2.

- Para calcular a medida de volume V da pirâmide, devemos determinar h, medida da altura, já que $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$.

Pelo teorema de Pitágoras aplicado à região limitada pelo triângulo retângulo VOM, temos:

$$12^2 = h^2 + \left(\frac{18}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 144 - 81 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = 3\sqrt{7}; \text{ ou seja, } 3\sqrt{7}\text{cm}.$$

Então: $V = \frac{1}{3} \cdot 324 \cdot 3\sqrt{7} \Rightarrow V = 324\sqrt{7}$; ou seja, $324\sqrt{7} \text{ cm}^3$.

Logo, a medida de volume da pirâmide é $324\sqrt{7} \text{ cm}^3$.

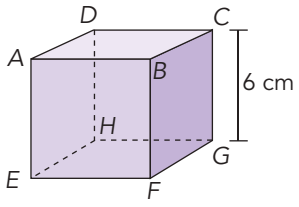
ATIVIDADES

Não escreva no livro

30. $H = 6$ cm; ℓ: medida da aresta da base
$p = 4\ell = 8 \text{ cm} \Rightarrow \ell = 2 \text{ cm}$
$A_b = \ell^2 \Rightarrow A_b = (2 \text{ cm})^2 = 4 \text{ cm}^2$
$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 4 \text{ cm}^2 \cdot 6 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^3$

29. Considere o cubo representado na figura e calcule, no caderno, a medida de volume das pirâmides:

Banco de imagens/ Arquivo da editora



a) de vértice D e base $EFGH$; 72 cm^3

b) de vértice A e base FGH. 36 cm^3

30. Considere que a base de uma pirâmide de 6 cm de medida da altura é uma região limitada por um quadrado de 8 cm de medida de perímetro. Calcule, no caderno, a medida de volume dessa pirâmide.

31. Calcule, no caderno, a medida de volume de uma pirâmide de 12 m de medida da altura, sendo a base uma região limitada por um losango cujas diagonais medem 6 m e 10 m.

32. Determine a medida de volume da pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede $6\sqrt{2}$ cm e cuja aresta lateral mede 10 cm. 192 cm^3

33. A medida de perímetro do polígono que limita a região da base de um tetraedro regular é 12 cm. Determine no caderno:

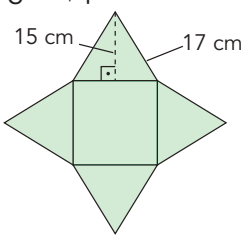
a) a medida de área total do tetraedro; $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

b) a medida da altura do tetraedro; $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm

c) a medida de volume do tetraedro. $\frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

34. Para calcular as medidas de volume e de área total de uma pirâmide regular, planificamos sua superfície obtendo o esquema representado na figura.

Elabore e resolva, no caderno, um problema a partir dessa imagem.

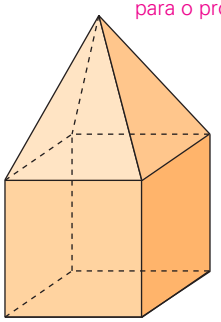


Banco de imagens/ Arquivo da editora

31. Base é uma região limitada por um losango, em que $d = 6$ m e $D = 10$ m. $H = 12$ m
$A_b = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d \Rightarrow A_b = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 30 \text{ m}^2$ $\quad V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 30 \text{ m}^2 \cdot 12 \text{ m} = 120 \text{ m}^3$

35. b) Sim. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

35. A figura seguinte mostra um sólido geométrico que consiste em um cubo sob uma pirâmide regular.



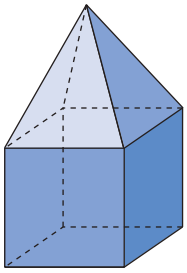
Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Conhecendo a medida da aresta do cubo, é possível determinar a medida de volume do sólido inteiro? Em caso afirmativo, determine essa medida atribuindo um valor a ela. Não.

b) Conhecendo a medida da altura e a medida do apótema da pirâmide, é possível determinar a medida de volume do sólido inteiro? Em caso afirmativo, determine essa medida atribuindo valores à medida da altura e à do apótema da pirâmide.

c) Elabore e resolva no caderno um problema relacionando as medidas do sólido ao custo de confecção dele. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

36. A figura a seguir representa o projeto de um celeiro construído em uma fazenda para o armazenamento de grãos. Ele é formado por um prisma quadrangular regular embaixo de uma pirâmide regular.



Banco de imagens/Arquivo da editora

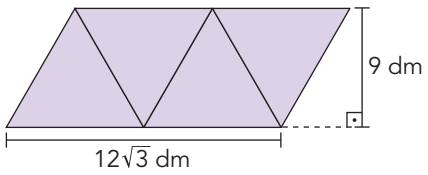
Sabe-se que:

- o perímetro do polígono que limita a região da base mede 24 m;
- a altura total do celeiro mede 10 m;
- desconsiderando a espessura da parede, o celeiro tem medida de capacidade de 216 m^3 para armazenar cereais.

Pretende-se pintar todo o celeiro por dentro, incluindo o chão, mas para isso será necessário determinar a medida de área da superfície do celeiro para estimar a quantidade de tinta que será utilizada.

Experimente calcular a medida de área da superfície interna do celeiro utilizando um *software* de Geometria dinâmica.

37. Elabore e resolva, no caderno, um problema que envolva uma pirâmide, considerando a figura a seguir, que é composta de 4 regiões limitadas por triângulos equiláteros.



Banco de imagens/Arquivo da editora

38. Saulo comprou uma barraca de lona para acampar. Sabendo que, quando montada, o formato dela lembra o de uma pirâmide quadrangular regular, com altura medindo 2 m e área da superfície lateral medindo 15 m^2, determine a medida de volume de ar que essa barraca comporta. 6 m^3

Experimente calcular a medida de volume de ar que essa barraca comporta usando um *software* de Geometria dinâmica.
A resolução da atividade depende do *software* utilizado pelo estudante.

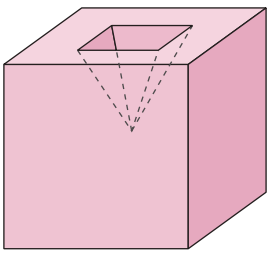
39. Pretende-se construir uma escultura de concreto, de formato piramidal regular, cuja aresta da base quadrangular meça 6 m e cuja aresta lateral meça $3\sqrt{5}$ m. Qual é:

a) a medida de área total da superfície da escultura; 108 m^2

b) a medida de volume da escultura; $36\sqrt{3}$ m^3

c) a medida do ângulo α, cujos lados são o apótema da pirâmide e o apótema da base. 60°

40. Um enfeite de madeira foi construído a partir de um projeto em que se imaginou extrair uma pirâmide regular quadrangular de um cubo, como sugere a imagem.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A aresta do cubo mede 12 cm, a aresta da base da pirâmide mede 6 cm, e a altura da pirâmide mede 4 cm.

a) Qual é o número de faces, o de vértices e o de arestas do poliedro que representa o enfeite? 13 vértices, 20 arestas e 10 faces.

b) Qual é a medida de massa do enfeite, considerando 0,87 g/cm^3 a medida de densidade da madeira? 1 461,6 g

c) Qual é a medida de área total da superfície do poliedro obtido? 888 cm^2

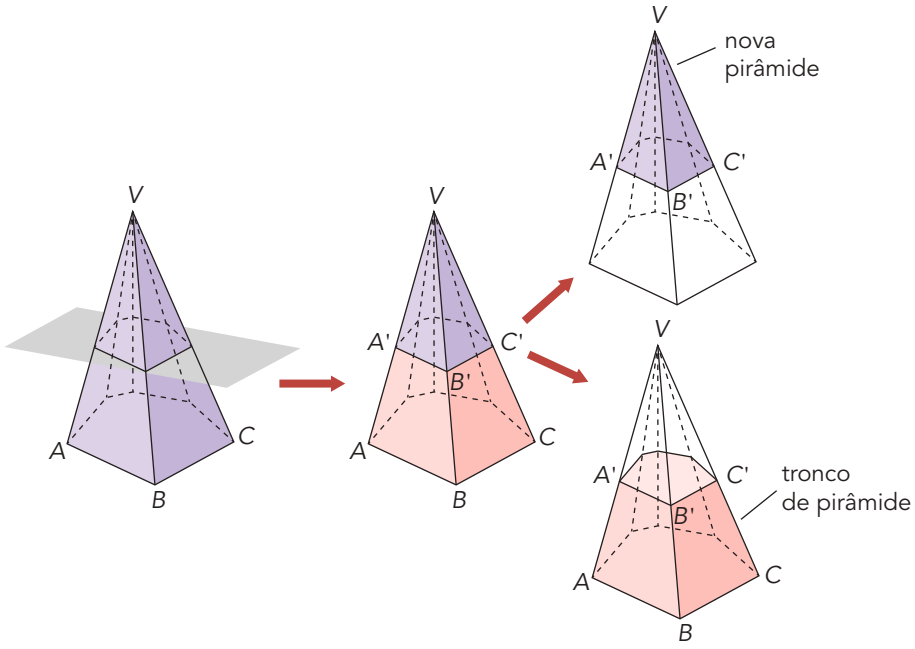
36. $4 \cdot (33 + 9\sqrt{5})$ m^2 ou aproximadamente 212,50 m^2. A resolução da atividade depende do *software* utilizado pelo estudante.

Pirâmides semelhantes

Quando seccionamos uma pirâmide por um plano paralelo à base de modo que ele não contenha o vértice da pirâmide, essa pirâmide fica dividida em 2 sólidos geométricos:

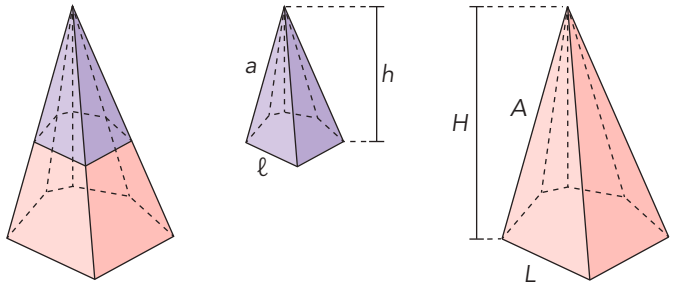
1º) O que contém o vértice, que é uma nova pirâmide.

2º) O que contém a base da pirâmide dada, que é um tronco de pirâmide de bases paralelas.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos agora comparar a nova pirâmide com a pirâmide original.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Nas 2 pirâmides, temos que:

- os polígonos que limitam as regiões das bases têm o mesmo número de lados (na imagem, ambas são pirâmides hexagonais);
- os ângulos dos polígonos que limitam as regiões de 2 faces correspondentes são congruentes 2 a 2;
- os elementos lineares correspondentes (como arestas das bases, arestas laterais, alturas, etc.) são proporcionais.

A nova pirâmide é uma "cópia reduzida" da pirâmide original. As 2 pirâmides são chamadas de **pirâmides semelhantes**.

A razão k entre 2 elementos lineares correspondentes – arestas ou alturas – é chamada **razão de semelhança** entre as pirâmides. Escolhendo escrever a razão de semelhança entre a pirâmide nova e a original, nessa ordem, temos:

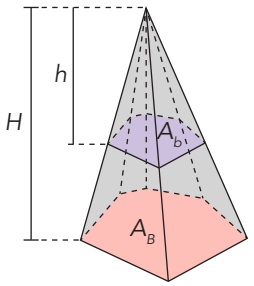
$$\frac{a}{A} = \frac{\ell}{L} = \frac{h}{H} = k$$

Considerando 2 pirâmides regulares semelhantes, temos as seguintes propriedades:

- A razão entre as medidas das áreas das bases é igual ao quadrado da razão de semelhança.

  Como as bases são regiões limitadas por polígonos semelhantes, então $\frac{p}{p'}$ e $\frac{x}{x'}$, as razões entre as respectivas medidas dos semiperímetros e as medidas dos apótemas das bases correspondentes são tais que $\frac{p}{p'} = \frac{x}{x'} = k$.

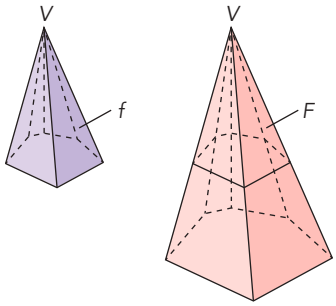
  Assim, $\frac{A_b}{A_B} = \frac{p \cdot x}{p' \cdot x'} = \frac{p}{p'} \cdot \frac{x}{x'} = k \cdot k \Rightarrow \frac{A_b}{A_B} = k^2$.



- A razão entre as medidas de áreas laterais é igual ao quadrado da razão de semelhança.

  Como 2 faces laterais correspondentes, f e F, são regiões limitadas por triângulos semelhantes, sabemos que a razão entre as medidas de área é igual ao quadrado da razão de semelhança:

$$\frac{\text{medida de área } f}{\text{medida de área } F} = k^2$$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Lembrando que a medida de área lateral de uma pirâmide é igual à soma das medidas de área das faces laterais, temos:

$$\frac{A_\ell}{A_L} = k^2, \text{ em que } \begin{cases} A_\ell: \text{medida de área lateral da nova pirâmide} \\ A_L: \text{medida de área lateral da pirâmide inicial} \end{cases}$$

- A razão entre as medidas de área total é igual ao quadrado da razão de semelhança.

  De fato, como $\frac{A_b}{A_B} = k^2$ e $\frac{A_\ell}{A_L} = k^2$, temos $\frac{A_t}{A_T} = k^2$.

- A razão entre as medidas dos volumes é igual ao cubo da razão de semelhança.

  Sejam v a medida de volume da nova pirâmide e V a medida de volume da pirâmide original.

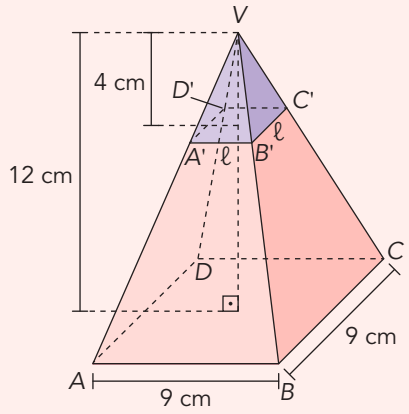
  Já identificamos que $\frac{A_b}{A_B} = k^2$ e $\frac{h}{H} = k$.

  Vamos obter a razão entre as medidas de volume.

$$\frac{v}{V} = \frac{\frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H} = \frac{A_b}{A_B} \cdot \frac{h}{H} = k^2 \cdot k = k^3 \Rightarrow \frac{v}{V} = k^3$$

Atividades resolvidas

7. Uma pirâmide quadrangular regular, com altura medindo 12 cm e aresta da base medindo 9 cm, é seccionada por um plano paralelo à base, a 4 cm do vértice. Com a secção, a pirâmide *VABCD* é semelhante à pirâmide *VA'B'C'D'*. Calcule a medida de área das bases e as medidas de volume das 2 pirâmides e constate a validade das propriedades estudadas anteriormente.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

A razão entre os elementos lineares das 2 pirâmides pode ser obtida comparando as medidas das alturas delas.

$$k = \frac{h}{H} = \frac{4\text{ cm}}{12\text{ cm}} = \frac{1}{3}$$

Se ℓ é a medida do lado do quadrado $A'B'C'D'$, então: $\frac{\ell}{9\text{ cm}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \ell = 3\text{ cm}$.

A medida de área da base (A_b) da pirâmide $VA'B'C'D'$ é $A_b = (3\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2$, e a medida de área da base (A_B) da pirâmide $VABCD$ é $(9\text{ cm})^2 = 81\text{ cm}^2$.

Assim, a razão entre A_b e A_B é:

$$\frac{9\text{ cm}^2}{81\text{ cm}^2} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = k^2$$

A medida de volume v da pirâmide $VA'B'C'D'$ é dada por:

$$v = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{9\text{ cm}^2 \cdot 4\text{ cm}}{3} \Rightarrow v = 12\text{ cm}^3$$

Já a medida de volume V da pirâmide $VABCD$ é dada por:

$$V = \frac{A_B \cdot H}{3} = \frac{81\text{ cm}^2 \cdot 12\text{ cm}}{3} \Rightarrow V = 324\text{ cm}^3$$

A razão entre v e V é:

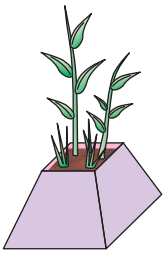
$$\frac{12\text{ cm}^3}{324\text{ cm}^3} = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = k^3$$

Tronco de pirâmide

Um vaso e uma caçamba de carrinho de mão estão representados nas imagens.

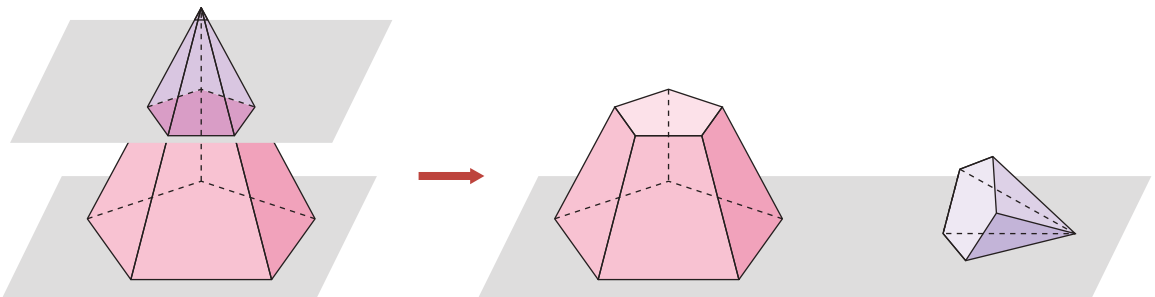
O planejamento para a confecção desses objetos pode ser feito considerando um poliedro obtido pela secção de uma pirâmide por um plano paralelo à base dela. Poliedros como esse recebem o nome de **tronco de pirâmide**.

As imagens não estão representadas em proporção.





Zapt/Arquivo da editora

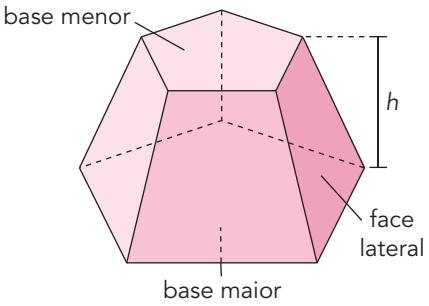


Pirâmide original. Tronco de pirâmide. Nova pirâmide.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos reconhecer os elementos principais de um tronco de pirâmide.

- **Base maior do tronco**: é a base da pirâmide original.
- **Base menor do tronco**: é a secção, que consiste em uma região limitada por um polígono semelhante à da base da pirâmide, determinada pelo plano que intersecta a pirâmide.
- **Medida da altura do tronco (*h*)**: é a medida de distância entre os planos das bases.
- **Faces laterais do tronco**: são regiões limitadas por trapézios.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Medidas de área e de volume

Medidas de área das bases (A_B e A_b)

A_B é a medida de área da região limitada pelo polígono da base maior, e A_b é a medida de área da base menor (região limitada por um polígono semelhante ao que limita a região da base maior).

Medida de área lateral (A_ℓ)

A_ℓ é a soma das medidas de área das faces laterais.

Medida de área total (A_t)

Adicionando as medidas de área das 2 bases à medida da área lateral, obtém-se a medida de área total.

$$A_t = A_B + A_b + A_\ell$$

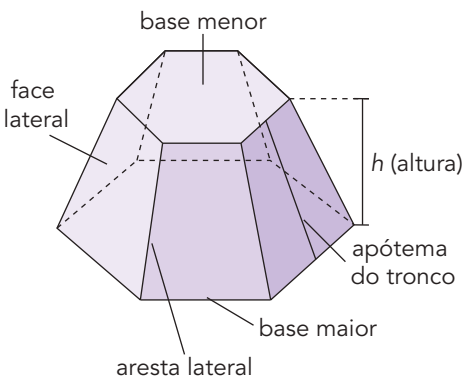
Medida de volume (V)

A medida de volume de um tronco de pirâmide pode ser calculada pela diferença entre a medida de volume da pirâmide original e a da pirâmide obtida da secção (nova pirâmide).

Tronco de pirâmide regular

O tronco de bases paralelas obtido de uma pirâmide regular é denominado **tronco de pirâmide regular**. Nele:

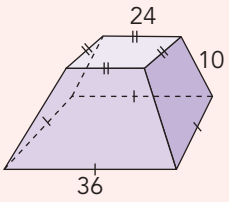
- as **arestas laterais** são congruentes entre si;
- as **bases** são regiões limitadas por polígonos regulares semelhantes;
- as **faces laterais** são regiões limitadas por trapézios isósceles congruentes entre si;
- a medida da altura de qualquer face lateral chama-se **apótema do tronco**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

8. Vamos calcular a medida de área total e a medida de volume de um tronco de pirâmide regular quadrangular cujas arestas das bases medem 24 cm e 36 cm e cuja aresta lateral mede 10 cm.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

- Medida de área da base menor:

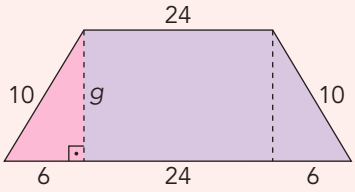
$A_b = 24^2 = 576$; ou seja, 576 cm^2.

- Medida de área da base maior:

$A_B = 36^2 = 1296$; ou seja, 1296 cm^2.

- Medida de área lateral:

$A_\ell = 4 \cdot$ (área de uma região limitada por um trapézio isósceles)



g: medida do apótema do tronco (medida da altura do trapézio)

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo que limita a região destacada, obtemos:

$$10^2 = g^2 + 6^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 = g^2 + 36 \Rightarrow g = 8; \text{ ou seja, } 8 \text{ cm.}$$

Assim, temos:

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{(36 + 24) \cdot 8}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\ell = 960; \text{ ou seja, } 960 \text{ cm}^2.$$

- Medida de área total:

$A_t = A_\ell + A_b + A_B = 960 + 576 + 1296 =$
$= 2832$; ou seja, 2832 cm^2.

Logo, a medida de área total desse tronco de pirâmide é 2832 cm^2.

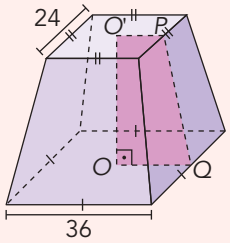
- Medida de volume:

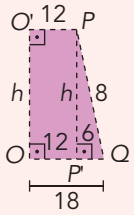
Para determinar a medida de volume desse tronco, é necessário conhecer a medida da altura (h).

Temos:

O e O' são centros das bases; $\overline{OO'}$ é a altura do tronco.

$$OQ = \frac{36}{2} = 18 \quad O'P = \frac{24}{2} = 12 \quad PQ = g = 8$$





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

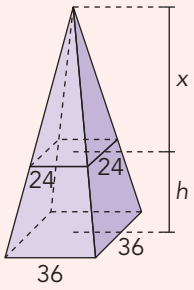
No triângulo PP'Q, temos:

$$8^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = 28 \Rightarrow h = 2\sqrt{7}; \text{ ou seja, } 2\sqrt{7} \text{ cm.}$$

Cálculo da medida de volume:

Vamos imaginar a pirâmide que deu origem a esse tronco.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Temos:

- h: medida da altura do tronco;
- x: medida da altura da pirâmide obtida;
- $x + h$: medida da altura da pirâmide original.

A razão entre os elementos lineares das 2 pirâmides é $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$.

Podemos, então, escrever:

$$\frac{h + x}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2h$$

Como $h = 2\sqrt{7}$ cm e $x = 4\sqrt{7}$ cm, então: $h + x = 6\sqrt{7}$ cm.

- Medida de volume da pirâmide original:

$V = \frac{1}{3} \cdot 36^2 \cdot 6\sqrt{7} \Rightarrow V = 2592\sqrt{7}$; ou seja, $2592\sqrt{7}$ cm^3.

- Medida de volume da nova pirâmide:

$V' = \frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 4\sqrt{7} \Rightarrow V' = 768\sqrt{7}$; ou seja, $768\sqrt{7}$ cm^3.

Logo, a medida de volume do tronco é:

$2592\sqrt{7} - 768\sqrt{7} = 1824\sqrt{7}$; ou seja, $1824\sqrt{7}$ cm^3.

43. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste manual.

42. b) A razão entre as medidas de área total é $\frac{A_2}{A_1} = k^2 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = 9$.

ATIVIDADES

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

41. Sabe-se que a medida da altura de uma pirâmide é 20 cm e a base dela é uma região limitada por um quadrado cujo lado mede 12 cm. Calcule, no caderno, a medida da altura e a da aresta da base de uma pirâmide semelhante à primeira e cuja medida de volume é igual a 120 cm³. $h = 10$ m e $\ell = 6$ m.

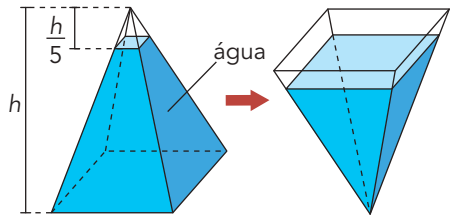
42. A medida da altura de uma pirâmide regular quadrangular é 45 cm. Ela é intersectada, a 15 cm de seu vértice, por um plano paralelo à base, que determina uma nova pirâmide e um tronco de pirâmide. Sabendo que a medida da aresta da base da pirâmide original é 60 cm, determine no caderno:

a) a medida da aresta da base da pirâmide obtida; 20 cm

b) a razão entre as medidas de área total da pirâmide original e da pirâmide obtida.

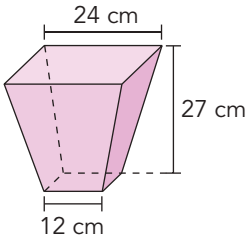
43. No caderno, elabore e resolva um problema considerando as imagens, que mostram um mesmo compartimento fechado, em formato de pirâmide, com água até certo nível e em 2 posições diferentes. Em ambas as posições, as bases estão contidas em planos paralelos.

Banco de imagens/Arquivo da editora



44. Um vaso tem o formato parecido com o de um tronco de pirâmide regular de base quadrada, como na figura. Quantos litros de água são necessários para encher totalmente esse vaso? Considere desprezível a espessura dele. 9,072 L

Banco de imagens/Arquivo da editora



45. Um plano que dista 3 m da base de uma pirâmide regular quadrangular e é paralelo ao plano da base determina uma secção de área que mede 8 m².

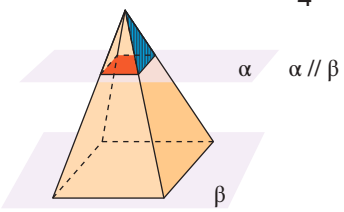
Sabendo que a medida de área da base da pirâmide é 18 m², determine no caderno:

a) a medida de volume dela; 54 m³

b) a medida de volume do tronco de pirâmide obtido pela secção. 38 m³

46. Uma pirâmide regular de medida da altura h e base quadrangular é intersectada por um plano paralelo à base e distante $\frac{3h}{4}$ dela.

Banco de imagens/Arquivo da editora

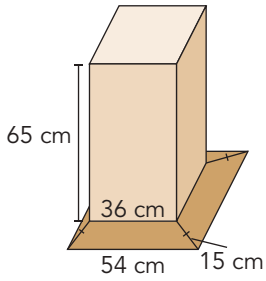


a) Elabore, no caderno, um problema que seja possível resolver usando apenas esses dados.

b) Acrescente alguma informação relativa à região triangular destacada que permita determinar a medida de área lateral do tronco. Quais são os valores obtidos?

47. Um suporte de mesa feito de madeira maciça pode ser representado por um prisma reto cuja base quadrada coincide com a base menor de um tronco de pirâmide regular quadrangular, como mostra a imagem.

Banco de imagens/Arquivo da editora



a) Qual a quantidade de metros cúbicos de madeira que foram usados na confecção desse suporte? Considere $\sqrt{7} \simeq 2{,}65$. Aproximadamente 0,1 m³.

b) Deseja-se pintar toda a superfície desse suporte com um material impermeabilizante cujo preço é R$ 28,00 o litro. Sabendo que a cada 1000 cm² são necessários 400 mL do material e que o custo é calculado para valores inteiros do litro dele, determine no caderno o valor do menor custo que satisfaça as condições descritas. R$ 196,00

48. Qual é a medida de volume de um tronco de pirâmide regular quadrangular cuja medida da altura é 4 dm e cujas medidas de área das bases são iguais a 36 dm² e 144 dm²? 336 dm³

46. a) Exemplo de problema: Determine a razão entre a medida de volume da pirâmide obtida pela secção e a medida de volume da pirâmide original.

46. b) Exemplo de problema: Se a medida de área da região limitada pelo triângulo destacado em azul é 20 cm², qual é a medida de área lateral do tronco?

INTERLIGANDO

Não escreva no livro



Reprodução/ ONU

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Reduzir o impacto ambiental se tornou uma preocupação recorrente para grandes marcas

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Ambiental* e *Educação para o Consumo*.

Confira, no trecho de artigo a seguir, da Companhia Ambiental do Estado de São Paulo (Cetesb), como as embalagens podem ajudar na sustentabilidade e na preservação do planeta.

> As decisões relacionadas ao desenvolvimento da embalagem [...] podem minimizar os impactos ambientais do sistema embalagem-produto [...]. Assim, uma embalagem bem projetada atenderá os requisitos do produto e [...] minimizará os impactos [...] ambientais tanto do produto como dela mesma. [...]

PEREIRA, Bruno (coord.). *Embalagens e sustentabilidade*: desafios e orientações no contexto da economia. São Paulo: Cetesb/Abre/Cetea/Ital, 2016. Disponível em: https://tedit.net/1zcy99. Acesso em: 20 ago. 2024.

Acompanhe alguns atributos e as funções que são levados em consideração para o desenvolvimento de uma embalagem.

Função	Atributos
Proteção	Previne danos mecânicos, deterioração do produto (barreira a gases, umidade, luminosidade, aromas, etc.), contaminação externa e adulteração; e aumenta a vida de prateleira do produto.
Informação	Identifica o produto; descreve seu modo de preparo e uso; lista ingredientes; e apresenta informações nutricionais e instruções para armazenamento, para abertura, de segurança e de descarte, tanto do produto como da própria embalagem.
Sustentabilidade	Reduz a perda de produto e pode permitir a reutilização da embalagem; auxilia e orienta o descarte do produto e da embalagem; protege o produto e permite a estocagem adequada, garantindo sua maior durabilidade; viabiliza um transporte eficiente; apresenta oportunidades no uso de matérias-primas alternativas e renováveis e projeto otimizado; entre outros.

Fonte dos dados: EUROPEN. Funções da embalagem. Bruxelas, 2009. *Apud* PEREIRA, Bruno (coord.). *Embalagens e sustentabilidade*: desafios e orientações no contexto da economia. São Paulo: Cetesb/Abre/Cetea/Ital, 2016. Disponível em: https://tedit.net/1zcy99. Acesso em: 20 ago. 2024.

- Uma empresa de produtos de limpeza usa atualmente uma embalagem plástica no formato de um bloco retangular com dimensões medindo 14 cm × 9,6 cm × 32 cm para certo sabão líquido. O produto será reformulado, e o sabão será concentrado. Assim, será possível reduzir a medida de volume da embalagem em 25%. Sabendo que nas 2 situações o produto ocupa totalmente a embalagem, responda às questões.

1. Qual é a medida de volume da embalagem atual? $14 \cdot 9{,}6 \cdot 32 = 4\,300{,}8$; ou seja, 4 300,8 cm^3.

2. Qual será a medida de volume da embalagem nova, após a redução de 25%?
$4\,300{,}8 \cdot 0{,}75 = 3\,225{,}6$; ou seja, 3 225,6 cm^3.

3. Quando o produto passar a ser concentrado, quantos litros de sabão, por embalagem, a empresa deixará de usar após a redução de 25%? 1,0752 L

4. **Troque ideias** com os colegas e juntos apresentem textualmente uma reflexão sobre as consequências ambientais da redução da embalagem tanto em relação ao consumo de água quanto pela diminuição do material usado. Resposta pessoal.

capítulo

7 Cilindros, cones e esferas

Cilindro

As imagens não estão representadas em proporção.

A seguir, estão representados alguns objetos do cotidiano.


horiyan/Shutterstock

Cesto de lixo.


hestakova/Shutterstock

Pilhas.


Vlado Markov/ Shutterstock

Lata de alumínio.


Mega Pixel/Shutterstock

Lata de tinta.

Todos esses objetos lembram o sólido geométrico chamado **cilindro**.


Noppawat Tom Charoensinphon/ Getty Images

É comum encontrarmos produtos em embalagens cilíndricas. Essa escolha do formato se deve a fatores como menor custo de produção, melhor distribuição da pressão interna na embalagem e economia de espaço durante o armazenamento.

Dica

The Ingenious Design of the Aluminum Beverage Can

Esse vídeo explica os motivos e as vantagens de as latas de refrigerante serem fabricadas com alumínio e terem formato cilíndrico. É possível habilitar a legenda, que é gerada automaticamente em português. Disponível em: https://tedit.net/ckqh3p. Acesso em: 20 ago. 2024.

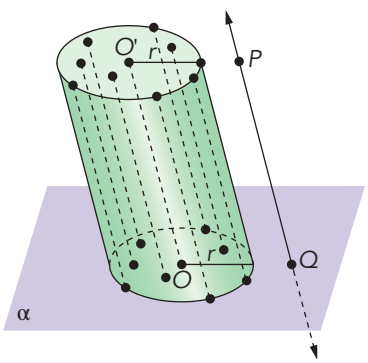
Definição

Vamos considerar um círculo, de centro O e raio de medida r, contido em um plano α, e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intersecta α.

Vamos tomar segmentos de reta paralelos e congruentes a $\overline{PQ}$, cada um deles com uma extremidade em um ponto do círculo e a outra extremidade em um mesmo semiespaço determinado por α.

A união de todos esses segmentos é um sólido geométrico chamado **cilindro circular,** ou simplesmente **cilindro**.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

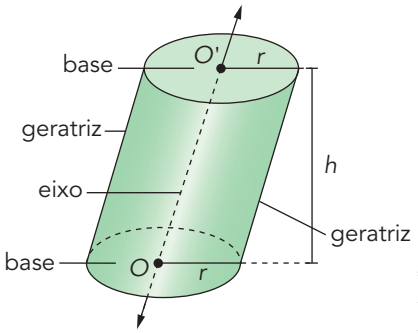


Banco de imagens/Arquivo da editora

Elementos e classificação

No cilindro representado, temos os seguintes elementos:

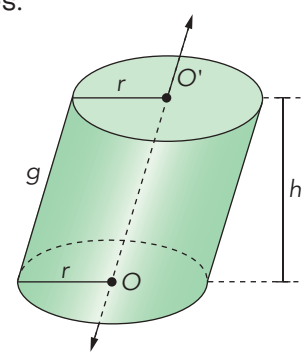
- os círculos de centros O e O' e raios de medida r, contidos em planos paralelos distintos, são chamados **bases** do cilindro;
- a reta $\overleftrightarrow{OO'}$ é o **eixo** do cilindro;
- os segmentos de reta paralelos a $\overleftrightarrow{OO'}$, com extremidades em pontos das circunferências das bases, chamados **geratrizes** do cilindro;
- a medida da **altura** h do cilindro, que corresponde à medida de distância entre os planos das bases.



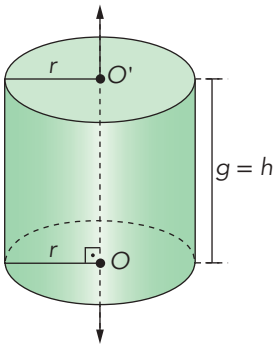
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Quanto à inclinação da geratriz em relação aos planos das bases, um cilindro classifica-se em:

- **cilindro oblíquo**, se a geratriz é oblíqua aos planos das bases;
- **cilindro reto**, se a geratriz é perpendicular aos planos das bases. Nesse caso, a medida de qualquer uma das geratrizes corresponde à medida da altura do cilindro.



Cilindro oblíquo.

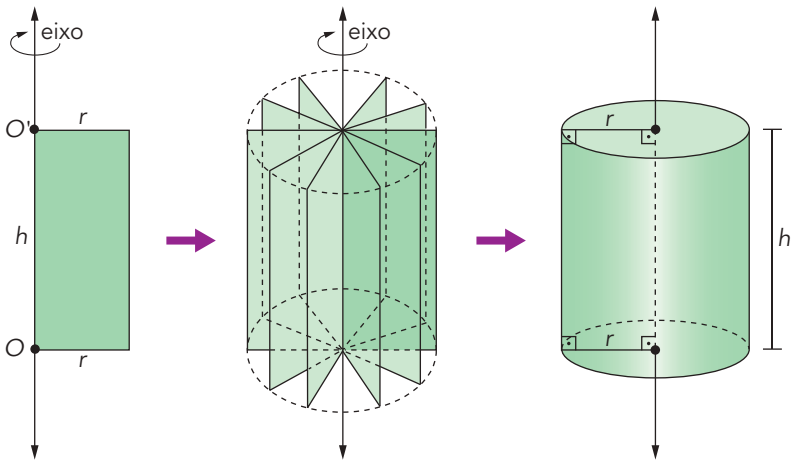


Cilindro reto.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

O cilindro circular reto é também chamado **cilindro de revolução**, pois é gerado pela rotação de uma região limitada por um retângulo em torno de um dos lados dele. A reta $\overleftrightarrow{OO'}$ é o eixo de rotação.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Medidas de área do cilindro circular reto

Medida de área da base (A_b)

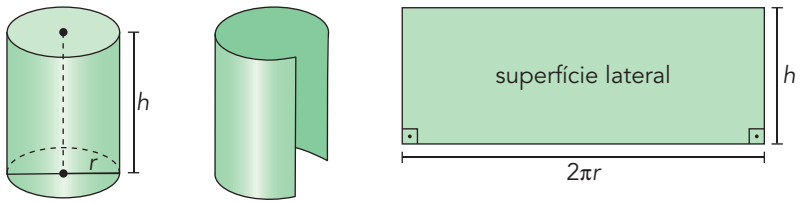
A medida de área da base corresponde à medida de área de um círculo de raio medindo r.

$$A_b = \pi r^2$$

Medida de área lateral (A_ℓ)

A medida de área lateral corresponde à medida de área de uma região limitada por um retângulo de base $2\pi r$ (medida de comprimento da circunferência da base de raio medindo r) e altura medindo h (medida da altura do cilindro).

Isso pode ser notado ao planificarmos a superfície lateral do cilindro.



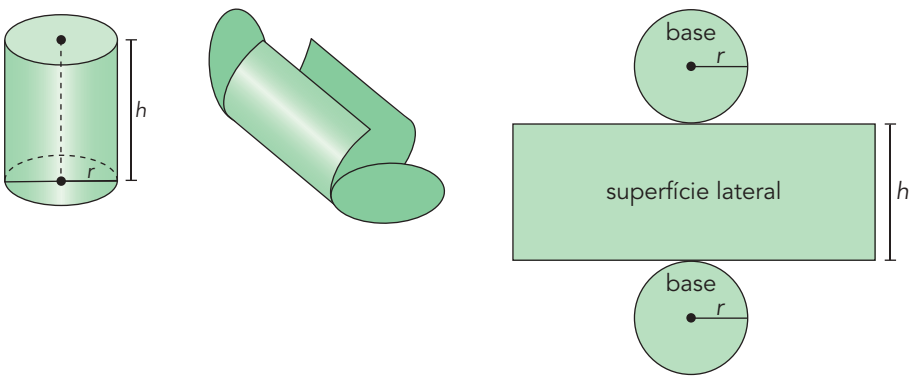
Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Assim, sendo A_ℓ a medida de área desse retângulo, temos:

$$A_\ell = 2\pi r \cdot h$$

Medida de área total (A_t)

A medida de área total de um cilindro é a soma das medidas de área da superfície lateral e dos círculos das bases.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, a medida de área total do cilindro é dada por:

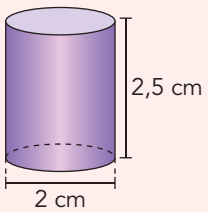
$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

Substituindo $A_\ell = 2\pi r \cdot h$ e $A_b = \pi r^2$, obtemos:

$$A_t = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2 \Rightarrow A_t = 2\pi r \cdot (h + r)$$

Atividades resolvidas

1. Determine as medidas de área lateral e total de um cilindro reto cujas medidas do diâmetro e da altura são, respectivamente, 2 cm e 2,5 cm.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

Como a medida do diâmetro é 2 cm, a medida do raio desse cilindro é 1 cm. Dessa maneira, a medida de área lateral é calculada fazendo:

$$A_\ell = 2\pi \cdot 1 \cdot 2{,}5 = 5\pi$$

Logo, $A_\ell = 5\pi$ cm^2.

A medida de área da base é:

$$A_b = \pi \cdot (1\text{ cm})^2 = \pi\text{ cm}^2$$

Assim, a medida de área total é:

$$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell = 2 \cdot \pi + 5\pi = 7\pi$$

Portanto, $A_t = 7\pi$ cm^2.

EXPERIMENTE

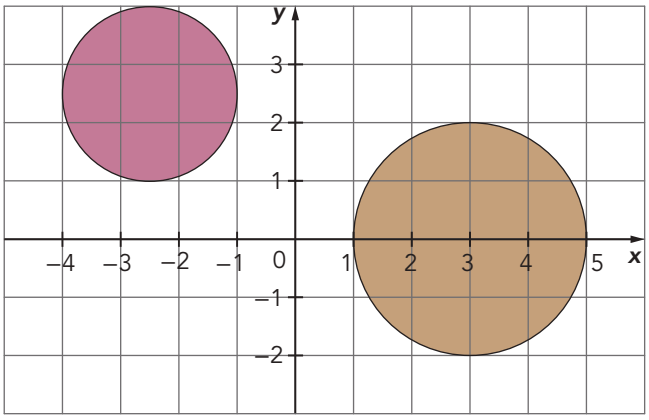
Não escreva no livro

Representar corpos redondos em um *software* de Geometria dinâmica

Vamos utilizar um *software* de Geometria dinâmica para explorar a representação e as propriedades dos sólidos geométricos. Sugerimos selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que permita a construção desses sólidos geométricos.

A seguir, apresentamos alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* de Geometria dinâmica.

Para representar um cilindro ou um cone, será necessário considerar um círculo como base. Assim, use a ferramenta adequada para a representação do círculo.

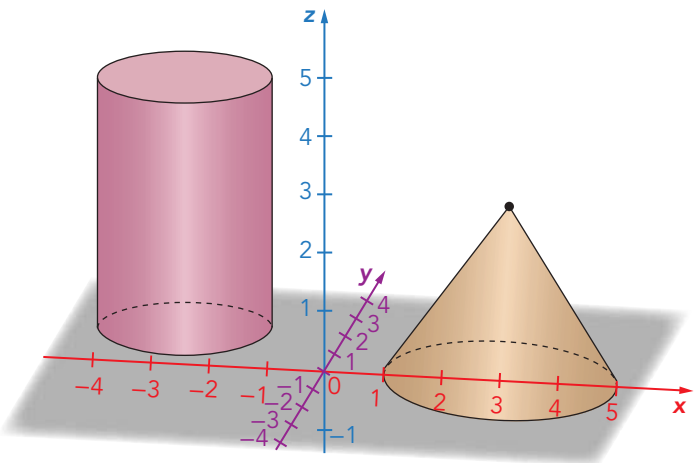


Exemplo de círculos representados em *software* de Geometria dinâmica.

Professor, explique aos estudantes que pode haver pequenas variações entre os comandos indicados na seção e os usados no *software* de Geometria dinâmica escolhido por eles, mas o resultado obtido ao final deverá ser o mesmo em todos eles.

Banco de imagens/Arquivo da editora

A partir da representação de círculos com raios de medidas diferentes, habilite a visualização 3D e no campo de entrada digite “Cilindro” e selecione a opção “Cilindro (círculo, altura)”; então digite o nome do círculo que será uma das bases do cilindro e depois digite a medida da altura. Repita o processo para o cone digitando “Cone” no campo de entrada e escolhendo a opção “Cone (círculo, altura)”.



Exemplo dos sólidos geométricos representados no *software* de Geometria dinâmica.

Banco de imagens/Arquivo da editora

2. a) A medida de área de uma bolacha é hipoteticamente igual à medida de área de um círculo de raio medindo 2,5 cm: $\pi \cdot r^2 \simeq 3 \cdot (2{,}5)^2 = 18{,}75$; ou seja, aproximadamente 18,75 cm^2.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. Considerado o aquário cilíndrico mais alto do mundo desde 2016. O aquário no *shopping* Aviapark, na cidade de Moscou, na Rússia, tem 21 m de medida da altura e 6 m de medida do diâmetro.



Sergey Bezgodov/Shutterstock

Aquário no *shopping* Aviapark, na cidade de Moscou, na Rússia. Foto de 2020.

Exemplo de problema: Considerando apenas o vidro utilizado nas paredes do aquário, qual é a medida de área total desse aquário? Adote 3 como a aproximação de π.

No caderno, elabore e resolva um problema relacionado a esse aquário.

2. **Troque ideias** com um colega para interpretar o texto e resolver os seguintes problemas. Imagine um pacote de bolachas no formato de um cilindro reto com 5 cm de medida de diâmetro e 24 cm de medida da altura. Cada bolacha tem, hipoteticamente, formato de um círculo com medida do diâmetro 5 cm e medida da altura desprezível. Desconsiderando a espessura da embalagem, a medida de volume do pacote de bolachas é igual a 450 cm^3. Use $\pi \simeq 3$.

a) Considerando uma situação em que todas as bolachas são perfeitamente idênticas, determine a medida de área de cada bolacha.

b) Calcule o produto entre a medida de área de cada bolacha e a medida da altura do pacote. O produto será 18,75 cm^2 · 24 cm = 450 cm^3.

c) Se dividíssemos todas as bolachas ao meio, qual seria a medida de área de cada nova parte semicircular?

d) Se organizássemos as bolachas semicirculares em 2 colunas, qual seria a medida de volume de cada pilha de bolachas?

e) Qual é a relação entre a medida de área de cada bolacha semicircular e a medida de volume de cada pilha (formada pelas bolachas semicirculares)?

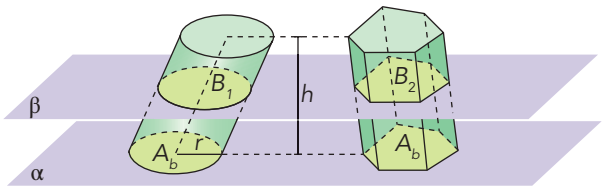
f) Pensando no item **e** e no princípio de Cavalieri, estudado no capítulo anterior, como poderá ser realizado o cálculo da medida de volume total ocupado por um cilindro?

2. c) A medida de área da bolacha é aproximadamente 18,75 cm^2. Como a estamos dividindo pela metade, a medida de área será de 9,375 cm^2.

2. d) Como a pilha foi dividida ao meio, a medida de volume de cada pilha será igual à metade da medida de volume original, ou seja, $\frac{450 \text{ cm}^3}{2} = 225 \text{ cm}^3$.

Medida de volume (V) do cilindro

Vamos considerar um cilindro e um prisma, ambos de altura medindo h e área da base medindo A_b.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Vamos supor que os 2 sólidos geométricos tenham as bases contidas em um mesmo plano α e fiquem no mesmo semiespaço de origem α. Qualquer plano β paralelo a α que seccione o cilindro também secciona o prisma, e as secções B_1 e B_2 têm medidas de área iguais a A_b, pois são congruentes às respectivas bases. Então, pelo princípio de Cavalieri, o cilindro e o prisma têm medidas de volume iguais.

$$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{prisma}}$$

2. e) Espera-se que o estudante perceba que a medida de volume da pilha será igual ao produto da medida de área da bolacha semicircular pela medida da altura da pilha: 9,375 cm^2 · 24 cm = 225 cm^3.

f) Espera-se que o estudante perceba, pelo princípio de Cavalieri, que a medida de volume de um cilindro, reto ou oblíquo, será igual ao produto da medida de área da base pela medida da altura.

Como estudamos no capítulo anterior, $V_{prisma} = A_b \cdot h$, então a medida de volume de um cilindro é igual ao produto da medida de área da base pela medida da altura: $V_{cilindro} = A_b \cdot h$. Como $A_b = \pi r^2$, temos:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Atividades resolvidas

2. Uma vela com formato de cilindro reto, tem área total medindo 108π cm^2 e medida do raio da base igual a $\frac{1}{5}$ da medida da altura. Determine a medida de área lateral e a medida de volume dessa vela.


Dima Sobko/Shutterstock

Vela cilíndrica.

Solução:

Sendo r a medida do raio da base e h a medida da altura, temos:

$$r = \frac{1}{5}h \text{ e } A_t = 108\pi \text{ cm}^2$$

Como $A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$, então $108\pi = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow rh + r^2 = 54$.

Substituindo $r = \frac{1}{5}h$, obtemos a medida h, em centímetros:

$\frac{1}{5}h \cdot h + \left(\frac{1}{5}h\right)^2 = 54 \Rightarrow \frac{h^2}{5} + \frac{h^2}{25} = 54 \Rightarrow 6h^2 = 1350 \Rightarrow h^2 = 225 \Rightarrow h = 15$ (desconsideramos o resultado negativo.)

Temos, então $r = \frac{1}{5}h \Rightarrow r = \frac{1}{5} \cdot 15 \text{ cm} \Rightarrow r = 3 \text{ cm}$.

Logo, $\begin{cases} A_\ell = 2\pi \cdot r \cdot h \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 3 \cdot 15 = 90\pi \\ V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 = 135\pi \end{cases}$

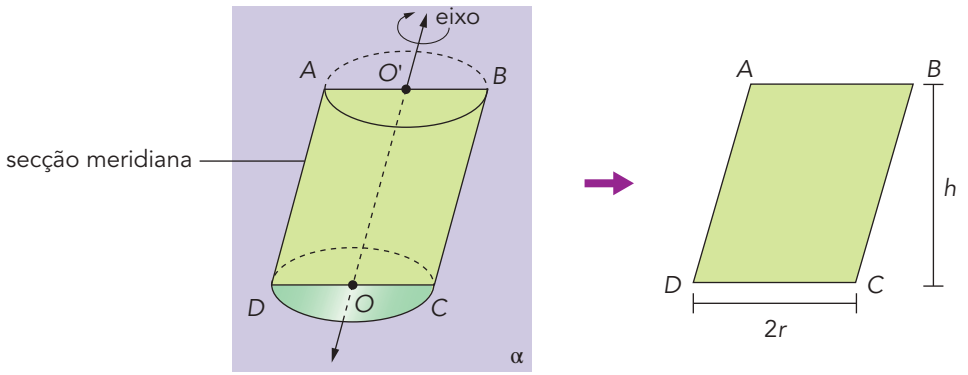
Ou seja, a medida de área lateral é 90π cm^2 e a de volume é 135π cm^3.

Secção meridiana e cilindro equilátero

Sejam O e O' os centros dos círculos das bases de um cilindro e $\overleftrightarrow{OO'}$ o eixo do cilindro.

Secção meridiana de um cilindro é a intersecção dele com um plano α que contém o eixo $\overleftrightarrow{OO'}$.

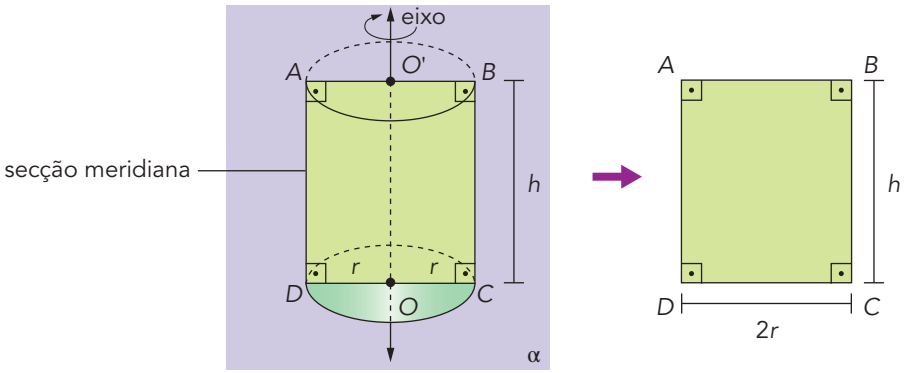
- A secção meridiana de um cilindro oblíquo é uma região limitada por um paralelogramo.



Cilindro oblíquo.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

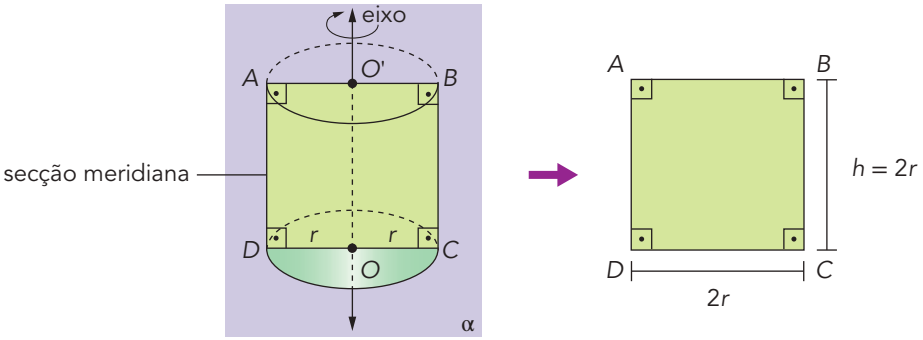
- A secção meridiana de um cilindro reto é uma região retangular de dimensões $2r$ (medida do diâmetro da base) e h (medida da altura do cilindro).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Cilindro reto.

Cilindro equilátero é um cilindro reto cuja secção meridiana é uma região quadrada. Em um cilindro equilátero, $g = h = 2r$.

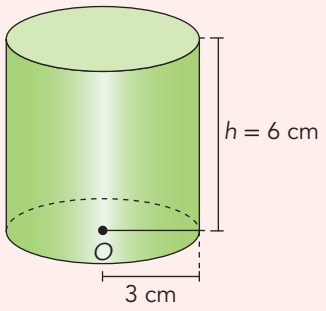


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$g = h = 2r$

Atividades resolvidas

3. Determine as medidas de área lateral A_ℓ, de área total A_t e de volume de um cilindro equilátero cujo raio mede 3 cm.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

- Medida de área lateral:

$$\left.\begin{array}{l} A_\ell = 2\pi rh \\ h = 2r \end{array}\right\} \Rightarrow A_\ell = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi$$

Logo, a medida de área lateral desse cilindro é 36π cm^2.

- Medida de área total:

$$\left.\begin{array}{l} A_t = A_\ell + 2A_b \\ A_b = \pi r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow A_t = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2 \Rightarrow A_t = 6 \cdot \pi \cdot 3^2 = 54\pi$$

Logo, a medida de área total desse cilindro é 54π cm^2.

- Medida de volume:

$$\left.\begin{array}{l} V = \pi r^2 h \\ h = 2r \end{array}\right\} \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \Rightarrow V = 2 \cdot \pi \cdot 3^3 = 54\pi$$

Logo, a medida de volume desse cilindro é 54π cm^3.

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

A Matemática e as chuvas

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental*.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

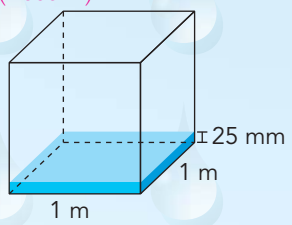
A calamitosa inundação do Rio Grande do Sul em maio de 2024, as secas intensas em várias regiões do Brasil e outros eventos extremos decorrentes das mudanças climáticas fizeram com que assuntos como índice pluviométrico e nível dos mananciais ganhassem cada vez mais espaço no cotidiano dos brasileiros.

Conhecer o índice pluviométrico de uma região é importante para que se reúnam informações úteis para a agricultura, a pecuária e o planejamento urbano, prevendo soluções para áreas onde possam ocorrer deslizamentos de terra ou inundações.

Quando você entra em contato com notícias como "Neste mês, as chuvas em Curitiba superaram o índice de 100 mm", sabe o que isso significa?

O índice pluviométrico indica a quantidade de **chuva por metro quadrado** registrada em certo local, em determinado período.

1. Quando dizemos que o índice pluviométrico em certa região foi de 25 mm na semana, isso significa que, se tivéssemos um reservatório aberto cúbico com 1 m^2 de medida de área da base, o nível de água atingiria uma altura com medida 25 mm. Qual é a medida do volume total de água da chuva recolhida nesse reservatório? Expresse a resposta em metros cúbicos e em litros. 0,025 m^3; 25 L.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

2. No índice pluviométrico, em certo período, cada 1 mm de precipitação corresponde a quantos litros de chuva por metro quadrado?



As imagens não estão representadas em proporção.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

3. Imagine que se pretenda medir a quantidade de chuva em uma região por meio de um recipiente cilíndrico reto graduado, ao qual se acopla um funil, como mostra a imagem.

Considere que a abertura maior do funil, por onde a chuva será coletada, tenha diâmetro com medida 10 cm e que, em certo dia, a medida de volume de água da chuva coletada tenha sido de 300 mL (ou 0,3 L).

Qual foi, em milímetros, a precipitação nesse dia? Use $\pi \simeq 3{,}14$.

38,22 mm



Luciano Galvão/Easypix

Funil acoplado a um recipiente cilíndrico graduado.

Vale a pena destacar que, em uma cidade grande, há várias estações de medição da intensidade da chuva. A média das intensidades de precipitação medidas nesses pontos, em certo período (mês, por exemplo), fornece o índice pluviométrico da região no período considerado.

Fonte dos dados: ÍNDICE pluviométrico. *Saema*. Araras, 2018. Disponível em: https://tedit.net/5yhtu6; BRASIL. Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. *Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais*. Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos. Disponível em: https://tedit.net/3qjg4y; SISTEMA de Monitoramento Agrometeorológico, *Agritempo*. Disponível em: https://tedit.net/5b7l77. Acesso em: 20 ago. 2024.

2. $V = (1\ m^2) \cdot (1\ mm) = (1\ m^2) \cdot \left(\frac{1}{1\,000}\ m\right) = 0{,}001\ m^3 \Rightarrow V = 1\ L$

O pluviômetro é um dos instrumentos que permitem verificar a quantidade de chuva que cai em determinado local. Com ele, é possível fazer comparações dos índices entre locais, investigar em que meses ou dias costuma chover com mais intensidade e até saber quantos dias de chuva ocorreram em uma década.

Apesar de existirem outros meios para se estudar as chuvas, eles não oferecem a precisão de um pluviômetro. Há vários tipos de pluviômetro e, no Brasil, o Instituto Nacional de Meteorologia (Inmet) usa o modelo Ville de Paris.

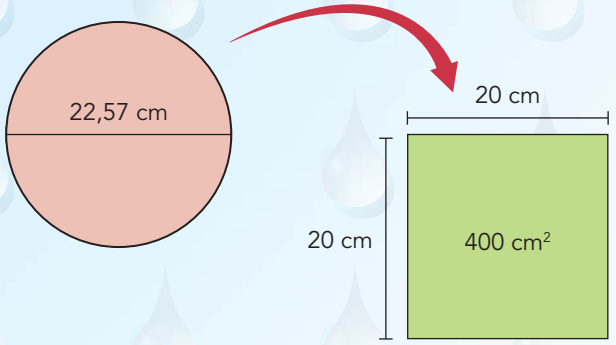
- O Ville de Paris tem um bocal de 22,57 cm de medida do diâmetro, equivalente a uma área de captação de chuvas com medida de 400 cm^2.

Daniel Cymbalista/Pulsar Imagens



Pluviômetro do modelo Ville de Paris.

As imagens não estão representadas em proporção.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

- A leitura do pluviômetro é feita uma vez por dia, geralmente pela manhã, quando se recolhe a água acumulada.
- O controle diário permite fazer o levantamento da quantidade de chuva em um local ou em determinada região ao longo de um ano ou de períodos menores, por exemplo, um mês.
- Os dados pluviométricos podem ser usados de várias maneiras, tanto nas cidades quanto no campo. Eles permitem planejar desde o momento certo para iniciar o manejo do solo e o plantio até as medidas preventivas contra enchentes e alagamentos, como fazem as prefeituras.

4. Acesse o portal do Inmet (disponível em: https://tedit.net/mlyh13; acesso em: 20 ago. 2024), pesquise o índice pluviométrico do último ano na região em que você mora e responda no caderno a estas perguntas. Respostas pessoais. As respostas variam de acordo com a região em que o estudante está.

a) Qual foi o mês com maior índice pluviométrico?

b) Qual foi o mês com menos chuvas?

5. Considerando os resultados obtidos na questão anterior, proponha ações que possam ajudar a população a evitar os problemas decorrentes das chuvas ou da seca.
Resposta pessoal. As respostas variam de acordo com a região em que o estudante reside.

6. Exemplo de problema: A medida da altura de uma lata de tinta com formato de um cilindro reto é 4 cm. Determine a medida de volume da lata sabendo que a secção meridiana tem perímetro medindo 20 cm.

As imagens não estão representadas em proporção.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

3. Um reservatório cilíndrico de armazenamento de líquidos tem internamente 8 m de medida do diâmetro e 14 m de medida da altura e está vazio. Se ele receber líquido à razão de 160 litros por minuto, qual é o menor número inteiro de dias necessários para enchê-lo completamente? Use $\pi \simeq \frac{22}{7}$. 4 dias.



Karsten Leineke/Shutterstock

Tanques cilíndricos de armazenamento de líquidos no porto de Hamburgo, na Alemanha. Foto de 2022.

4. O perímetro do polígono que limita a secção meridiana de um cilindro reto mede 28 cm. Sabendo que a área lateral do cilindro mede 48π cm^2, determine no caderno a medida de volume dele. 96π cm^3 ou 72π cm^3.

5. No intervalo de uma reunião de trabalho, será servido café em uma garrafa térmica cujo reservatório é cilíndrico com as medidas internas 18 cm de altura e 5 cm de raio da base. O café será servido em copinhos plásticos, também cilíndricos, com 4 cm de medida do diâmetro da base, 4 cm de medida da altura e espessura desprezível. Considere $\pi \simeq 3{,}1$.



Norberto Mario Lauria/Shutterstock

Garrafa térmica.

a) Se cada um dos 30 participantes quiser se servir uma única vez, enchendo completamente o copinho, haverá café suficiente para todos? Explique sua resposta.

b) Os copinhos de plástico são fabricados a um custo de R$ 8,50 o metro quadrado e vendidos com 30% de lucro sobre o preço de custo do material. Na confecção, são acrescentados 25% de plástico para reforçar a boca de cada copo. Qual é o valor a ser pago por uma encomenda de 1500 desses copinhos? Aproximadamente R$ 128,45.

5. a) Não. Será possível encher aproximadamente 7 copinhos.

6. Elabore e resolva no caderno um problema sobre medidas de área e volume de um cilindro reto cujo perímetro da secção meridiana mede 20 cm.

7. O centro de uma peça de madeira com o formato de um prisma reto de base quadrada tem um furo cilíndrico de 2,8 cm de medida do raio da base, que atravessa a peça, conforme mostra a figura.



Luis Moura/Arquivo da editora

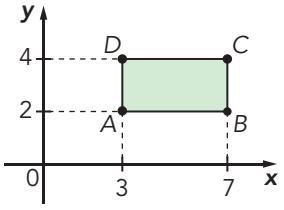
Se o prisma tem medida da altura igual a 10 cm e a aresta da base mede 18 cm, então, considerando $\pi \simeq \frac{22}{7}$, determine no caderno:

a) a medida de volume da peça; Aproximadamente 2 993,60 cm^3.

b) a medida de massa dessa peça, em quilogramas, considerando que a medida de densidade da madeira é 0,93 g/cm^3. Aproximadamente 2,784 kg.

8. Em um experimento, um professor de Química usou um vasilhame cilíndrico de 6 cm de medida do raio da base, contendo água até certa medida da altura. Imediatamente após adicionar 16 peças de ferro em formato cúbico de aresta medindo 3 cm, o nível da água atingiu 12 cm. Qual era o nível da água antes da adição do ferro? Considere $\pi \simeq 3$. Aproximadamente 8 cm.

9. Considere a imagem a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual é a medida de volume do sólido geométrico obtido ao girarmos a região retangular *ABCD* em torno do eixo *y*? 80π u.v.

Experimente calcular a medida de volume desse sólido geométrico usando um *software* de Geometria dinâmica.

A resolução depende do *software* utilizado pelo estudante.

Cone

Os objetos a seguir podem ser encontrados em nosso dia a dia e se parecem com a forma geométrica chamada **cone**.

As imagens não estão representadas em proporção.



Pixelbliss/Shutterstock

Casquinha de sorvete.



Ostancov Vladislav/ Shutterstock

Temaki, comida de origem japonesa com arroz e fatias de peixe cru envoltos em uma folha de alga.

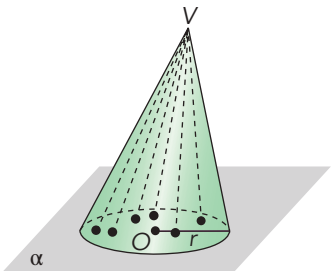


CHAIYARAT/Shutterstock

Cone de sinalização de trânsito.

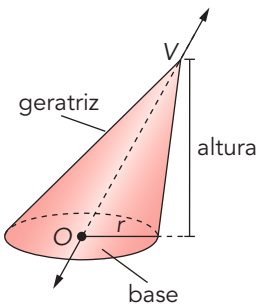
Definição

Vamos considerar um círculo de centro O e raio de medida r, contido em um plano α, e um ponto V não pertencente a α. Chama-se **cone circular**, ou apenas **cone**, a união dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra em um ponto do círculo.



Elementos e classificação

Note a seguir os elementos do cone, indicados na figura.

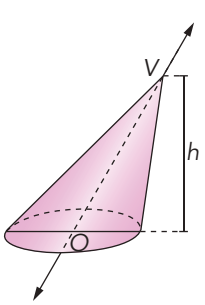


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

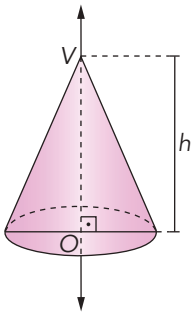
- O ponto V é o **vértice** do cone.
- O círculo de centro O e raio de medida r é a **base** do cone.
- Cada segmento de reta com uma extremidade em V e a outra em um ponto da circunferência da base é uma **geratriz** do cone.
- A medida de distância do vértice ao plano da base é a medida da **altura** do cone.
- A reta $\overleftrightarrow{VO}$ é o **eixo** do cone.

Quanto à inclinação do eixo $\overleftrightarrow{VO}$ em relação ao plano da base, um cone classifica-se em:

- **cone oblíquo**, se $\overleftrightarrow{VO}$ é oblíqua ao plano da base;
- **cone reto**, se $\overleftrightarrow{VO}$ é perpendicular ao plano da base. Nesse caso, a medida de $\overline{VO}$ é a medida da altura do cone.



Cone oblíquo.



Cone reto.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto: Ao se analisar as representações planas dos cones oblíquos e retos, percebe-se que nos oblíquos as geratrizes não são congruentes, e nos retos elas o são.

Não escreva no livro

Pense nisto

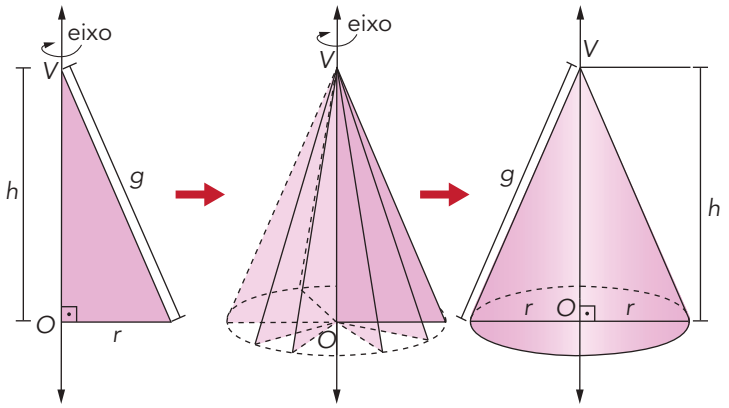
As geratrizes de um cone oblíquo são congruentes? E as de um cone reto?

Observação

O cone circular reto é também chamado de **cone de revolução** pelo fato de poder ser gerado pela rotação de uma região limitada por um triângulo retângulo em torno de um dos catetos dele como eixo.

Note que, em um cone de revolução (cone reto), vale a relação:

$$r^2 + h^2 = g^2$$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Medidas de área do cone circular reto

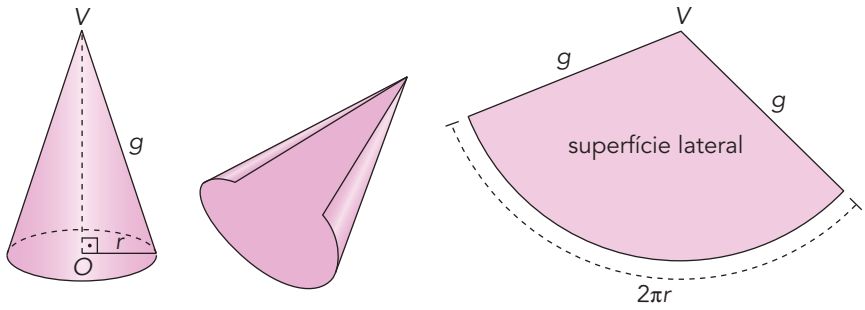
Medida de área da base (A_b)

A base do cone é um círculo de raio medindo r, então a medida de área da base é dada por:

$$A_b = \pi \cdot r^2$$

Medida de área lateral (A_ℓ)

É a medida de área de um setor circular cujo raio mede g (medida da geratriz do cone) e cujo comprimento do arco mede $2\pi r$ (medida de perímetro da base).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de área do setor circular de raio medindo g e comprimento de arco medindo $2\pi r$ é igual à medida de área lateral A_ℓ e pode ser obtida por uma regra de 3.

medida de comprimento do arco		medida de área do setor circular
$2\pi g$	———	πg^2
$2\pi r$	———	A_ℓ

$$A_\ell = \frac{(\pi g^2) \cdot (2\pi r)}{2\pi g} \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot r \cdot g$$

As imagens não estão representadas em proporção.

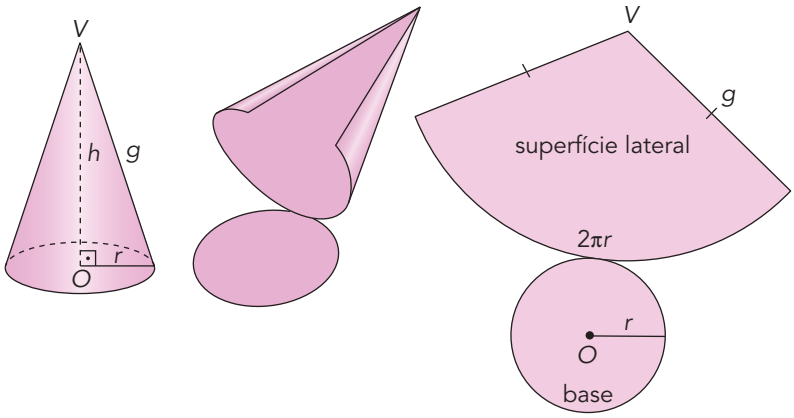
Medida de área total (A_t)

A medida de área total de um cone é a soma da medida de área da superfície lateral com a medida de área do círculo da base:

$$A_t = A_\ell + A_b$$

Substituindo $A_\ell = \pi \cdot r \cdot g$ e $A_b = \pi \cdot r^2$, obtemos:

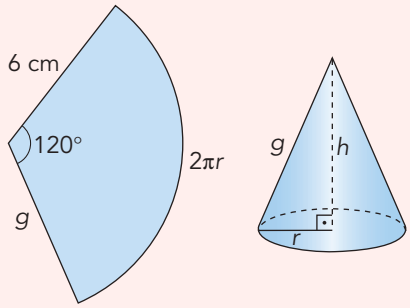
$$A_t = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow A_t = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

4. Determine as medidas do raio e da altura de um cone de revolução cuja planificação da superfície lateral é um setor circular de 120° e 6 cm de medida do raio.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

- Cálculo de A_ℓ:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ — } \pi \cdot 6^2 \\ 120° \text{ — } A_\ell \end{array}\right\} \Rightarrow A_\ell = \frac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2 = 12\pi$$

Portanto, a medida de área lateral é igual a 12π cm^2.

- Cálculo de r e de h:

Como $A_\ell = \pi \cdot r \cdot g$ e $g = 6$ cm, temos:

$$12\pi = \pi \cdot r \cdot 6 \Rightarrow r = 2$$

Como $r^2 + h^2 = g^2$, temos:

$$2^2 + h^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 32 \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$$

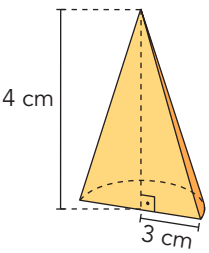
Logo, o cone tem $4\sqrt{2}$ cm de medida da altura e 2 cm de medida do raio da base.

Atividades

Não escreva no livro

10. Um cone circular reto tem 20 dm de medida da altura e 25 dm de medida da geratriz. Determine a medida de área total.

11. O semicone representa o molde de um doce que será totalmente coberto de chocolate. Calcule no caderno a medida de área da superfície que receberá a cobertura. Considere 3 como o valor aproximado de π. Aproximadamente 48 cm^2.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Experimente calcular as medidas de área solicitadas usando um *software* de Geometria dinâmica. A resolução depende do *software* utilizado pelo estudante.

12. Para uma festa infantil, foram encomendados 120 chapéus cônicos idênticos, cada um confeccionado tendo por molde um semicírculo de 56 cm de medida do diâmetro. Use $\pi \simeq 3$.

a) Que medida da altura terá cada chapéu? Aproximadamente $14\sqrt{3}$ cm.

b) Sabendo que os semicírculos são recortados de folhas quadradas de papel-cartão, cada uma com 56 cm de medida do lado, determine a quantidade mínima, em metros quadrados, de material desperdiçado na confecção dos chapéus. Aproximadamente 4,704 m^2.

13. Determine no caderno a medida da altura de um cone equilátero cuja área total mede 54π m^2.

10. $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 - 20^2 = 225 \Rightarrow r = 15$
Logo, $r = 15$ dm. Assim, a medida de área total, em decímetros quadrados, é dada por:
$A_t = \pi \cdot 15 \cdot (25 + 15) \Rightarrow A_t = 600\pi$
ou seja, 600π dm^2.

13. Sabendo a medida de área total, fazemos: $A_t = \pi \cdot r \cdot (g + r) = 54\pi \Rightarrow r \cdot (g + r) = 54 \xrightarrow{g = 2r} r \cdot 3r = 54 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$; ou seja, $3\sqrt{2}$ m.
$h^2 + (3\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{6}$; ou seja, $3\sqrt{6}$ m.

EXPERIMENTE

Não escreva no livro

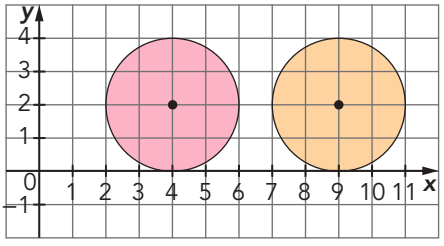
Investigar a medida de volume de cilindros e cones

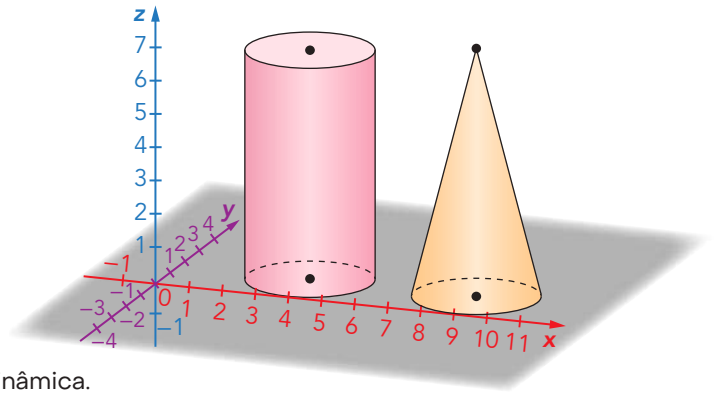
Vamos utilizar um *software* de Geometria dinâmica para explorar a representação e as propriedades dos sólidos geométricos. Sugerimos selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que permita a construção desses sólidos geométricos.

Vamos comparar a medida de volume de um cilindro com a de um cone. Para isso, no *software* escolhido, represente um cilindro e um cone de maneira que a figura da base do cilindro seja congruente à figura da base do cone. Como exemplo, vamos considerar que a base seja um círculo cujo raio mede 2 unidades de medida de comprimento.

Assim, com a ferramenta adequada, crie 2 círculos congruentes. Em seguida, habilite a visualização 3D.

Com a ferramenta de modelagem 3D, crie um cone e um prisma de medida da altura igual a 7 unidades de medida de comprimento a partir dos círculos já representados.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Representações no *software* de Geometria dinâmica.

Com a ferramenta para cálculo de medida de volume, clique sobre o cilindro e, depois, sobre o cone. Compare as medidas de volume desses sólidos geométricos e responda no caderno ao que se pede a seguir.

1. Quantas vezes a medida de volume do cilindro é maior do que a medida de volume do cone? Justifique sua resposta.
É 3 vezes maior, pois a medida de volume do cilindro é igual a aproximadamente 87,96 unidades de medida de volume e a do cone, aproximadamente 29,32 unidades de medida de volume.

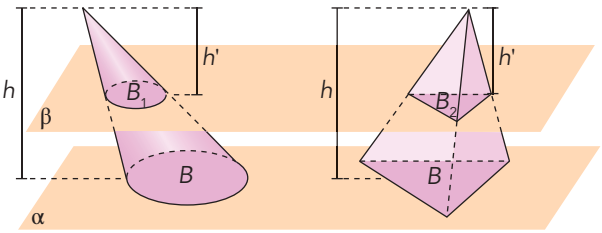
2. Considerando a mesma figura para a base, crie outro cilindro e outro cone, ambos de mesma medida da altura, e verifique se essa relação se mantém.
Sim, considerando que sejam um cilindro e um cone que têm a mesma medida de área da base e a mesma medida da altura.

Medida de volume (V) do cone

Vamos considerar um cone com medida da altura h cuja base circular tem medida de área B.

Vamos considerar também um tetraedro cuja altura mede h e cuja área da base mede B. Note que o cone e o tetraedro têm alturas de medidas iguais e bases equivalentes.

Agora, vamos supor que os 2 sólidos geométricos tenham as bases contidas em um mesmo plano α e que os vértices deles estejam no mesmo semiespaço de origem α.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Qualquer plano β paralelo a α que seccione o cone a uma distância de medida h' do vértice também secciona o tetraedro à mesma medida de distância h' do vértice.

A secção do cone pelo plano β é um círculo de medida de área B_1. Como os 2 cones obtidos são semelhantes, temos:

$$\frac{B_1}{B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \quad \text{I}$$

A secção do tetraedro pelo plano β é uma região triangular de medida de área B_2. Como os 2 tetraedros são semelhantes, temos:

$$\frac{B_2}{B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \quad \text{II}$$

De I e II, resulta:

$$\frac{B_1}{B} = \frac{B_2}{B}$$

E, então, $B_1 = B_2$.

Logo, as secções obtidas são equivalentes e, pelo princípio de Cavalieri, o cone e o tetraedro têm medidas de volume iguais.

$$V_{cone} = V_{tetraedro}$$

Como $V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$, então a medida de volume de um cone é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da medida de área da base pela medida da altura.

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Como $A_b = \pi r^2$, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

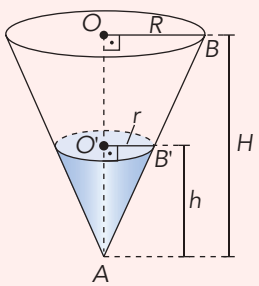
Pense nisto: Não. Note que $\frac{1,5\pi}{12\pi} = \frac{1}{8}$. De fato, como os 2 cones são sólidos geométricos semelhantes, temos $H = 2h \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{1}{2}$ (razão de semelhança).

Logo, $\frac{v}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Professor, comente com os estudantes que o estudo de semelhança entre cones será formalizado um pouco mais adiante.

Atividades resolvidas

5. A figura ilustra um reservatório que tem o formato que lembra um cone circular reto com raio interno de medida $R = 3$ m e altura interna H medindo 4 m. Esse cone está preenchido com água até metade da medida da altura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual é a medida de capacidade do reservatório? Que medida de volume de água ele contém?

Solução:

- medida de capacidade do reservatório:

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 12\pi$$

Logo, a medida de capacidade do reservatório é 12π m^3.

- medida de volume de água:

Sabemos que $h = \frac{H}{2} = 2$ m.

Como $\triangle OAB \sim \triangle O'AB' \Rightarrow \frac{OB}{O'B'} = \frac{OA}{O'A} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{H}{h} \Rightarrow \frac{R}{r} = 2$, temos

$r = \frac{R}{2} \Rightarrow r = 1,5$ m.

Então:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi \cdot (1,5)^2 \cdot 2}{3} = 1,5\pi$$

Portanto, a medida de volume de água contida no reservatório é $1,5\pi$ m^3.

Não escreva no livro

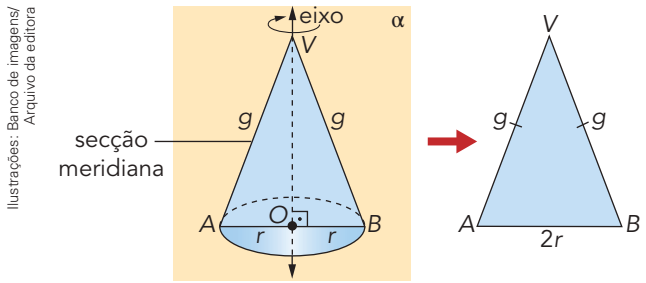
Pense nisto

Se o reservatório em formato de cone está preenchido com água até metade da medida da altura dele, então a medida de volume dessa água corresponde à metade da medida de volume do reservatório?

Secção meridiana e cone equilátero

Sejam V o vértice de um cone e O o centro do círculo da base.

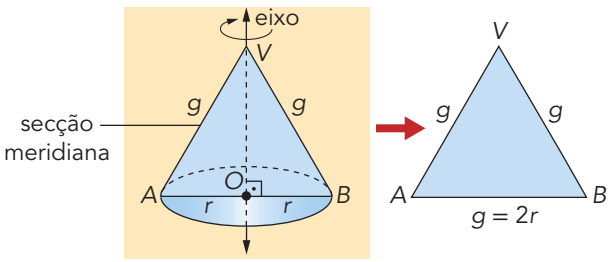
Secção meridiana de um cone é a intersecção dele com um plano que contém o eixo $\overleftrightarrow{VO}$. A secção meridiana de um cone reto é uma região limitada por um triângulo isósceles.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Cone reto.

Cone equilátero é um cone reto cuja secção meridiana é uma região limitada por um triângulo equilátero. Em um cone equilátero, $g = 2r$.



Cone equilátero.

Pense nisto

Pense nisto: Se θ é a medida do ângulo do setor de raio medindo g, temos:

$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \cdot g \\ \theta \text{ —— } 2\pi \cdot r \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 360° \cdot \frac{r}{g} \xrightarrow[g=2r]{} \theta = 180°$. Logo, esse setor circular é um semicírculo.

Ao planificarmos a superfície lateral de um cone equilátero, qual é a medida do ângulo do setor obtido?

ATIVIDADES

14. De $100\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 12$, tem-se $r = 5$ cm.

De $g^2 = r^2 + h^2$, temos $g^2 = (5\text{ cm})^2 + (12\text{ cm})^2 \Rightarrow g = 13$ cm.

$A_\ell = \pi r g \Rightarrow A_\ell = 65\pi$ cm²

Não escreva no livro

14. O chapéu de uma fantasia de fada mostrado na imagem tem o formato da superfície lateral de um cone de revolução de 12 cm de medida da altura e 100π cm³ de medida de volume. Uma vez que é feito de cartolina, quantos cm² desse material foram usados na confecção do chapéu?



Buch and Bee/ Shutterstock

Chapéu de fantasia de fada.

15. Sabe-se que a secção meridiana de um cone circular reto é uma região limitada por um triângulo isósceles de medida de área igual a 36 cm². Se esse cone tem 15 cm de medida da altura, qual é a medida de volume dele?

$28{,}8\pi$ cm³

16. Encontramos em algumas lojas guarda-chuvinhas de chocolate, como os desta imagem.



Ludmila Kloster/Shutterstock

Chocolate em formato cônico.

As imagens não estão representadas em proporção.

Considere que cada guarda-chuvinha têm o formato aproximado de um cone circular reto, com 4 cm de medida do diâmetro da base e 6 cm de medida da altura. Sabendo que a medida de densidade do chocolate usado na fabricação é de 1,05 g/cm³, determine a medida de massa de chocolate, em quilogramas, necessária para preparar 2500 desses cones. Use $\pi \simeq 3{,}1$. Desconsidere o suporte plástico do guarda-chuvinha.

Aproximadamente 65,1 kg.

Experimente calcular a medida de volume desse sólido geométrico usando um *software* de Geometria dinâmica. A resolução depende do *software* utilizado pelo estudante.

17. Dona Charlote prepara sobremesas e, para fazer uma musse de maracujá, usou um recipiente cilíndrico cujas medidas internas do diâmetro e da altura são, respectivamente, 0,4 m e 0,8 m. Depois, distribuiu a musse em taças de formato cônico com 8 cm de medida do diâmetro, 18 cm de medida da altura e espessura desprezível. Considerando que o recipiente que dona Charlote usou estava

22. Exemplo de problema: Considere que 2 cones, **I** e **II**, têm mesma medida de volume. Determine a razão entre as medidas da altura desses cones sabendo que a razão entre as medidas dos diâmetros dos cones **I** e **II**, nessa ordem, igual a 2.

completamente cheio, determine o número mínimo de taças de formato cônico necessário para a distribuição de toda a musse.

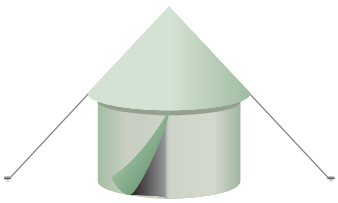
334 taças.

18. Enuncie e resolva no caderno um problema envolvendo cones. O enunciado deve conter esta afirmação: "Um estudante recortou um semicírculo de cartolina com raio de medida 10 cm".

19. Elabore no caderno um problema cujo enunciado contenha a frase "A medida de volume do cone é igual à do cilindro" e resolva o problema elaborado.

20. O formato da cúpula da barraca mostrada na imagem a seguir é de um cone circular reto, com altura medindo 1,5 m e as medidas da geratriz e do raio da base somando 4,5 m. Determine no caderno a medida de área da parte dessa barraca que fica exposta ao sol do meio-dia. 5π m²

Zapt/Arquivo da Editora

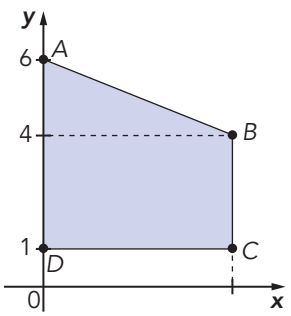


Barraca de acampamento.

21. Girando a região limitada pelo quadrilátero *ABCD* em torno do eixo *y*, obtemos um sólido geométrico cujo volume mede $\frac{275\pi}{3}$ u.v. (unidades de medida de volume).

Qual é a abscissa do ponto *C*? 5

Banco de imagens/Arquivo da editora



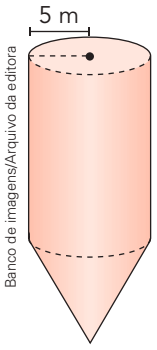
22. Elabore, no caderno, um problema que relacione a medida de volume de 2 cones, **I** e **II**, contendo no enunciado a frase "a razão entre as medidas dos diâmetros dos cones **I** e **II** é, nessa ordem, igual a 2". Em seguida, resolva o problema elaborado.

23. Dobrando simultaneamente a medida da altura e a medida do diâmetro de um cone circular reto, por quanto fica multiplicada a medida de:

a) área total? 4

b) volume? 8

24. O silo representado a seguir tem medida da altura interna total de 15 m. Nele, podem ser armazenados 325π m³ de cereais.



Banco de imagens/Arquivo da editora



Olaf Speier/Shutterstock

Silo para armazenar grãos.

Determine no caderno:

a) a medida da altura do cone; 3 m

b) o custo de fabricação do silo, sabendo que a chapa de aço usada na confecção dele custa R$ 200,00 por metro quadrado. Desconsidere a espessura da chapa de aço e considere $\pi \simeq 3{,}1$ e $\sqrt{34} \simeq 5{,}8$.

Aproximadamente R$ 107.880,00.

19. Exemplo de problema: Um peso de porta no formato de um cone tem altura medindo 8 cm e diâmetro da base medindo 6 cm. Outro modelo de peso, no formato de um cilindro, tem 12 cm de medida da altura. Determine a medida do diâmetro da base do cilindro necessária considerando que a medida de volume do cone é igual à do cilindro, visto que terão o mesmo preço.

Tronco de cone

Analise estas imagens de objetos do cotidiano.

As imagens não estão representadas em proporção.

Ponomareva Mariia/Shutterstock



Vaso de plantas.

Selin Aydogan/Shutterstock



Abajur.

baibaz/Shutterstock



Copo.

18. Exemplo de problema: Um estudante recortou um semicírculo de cartolina com raio de medida 10 cm para construir a superfície lateral de um cone.

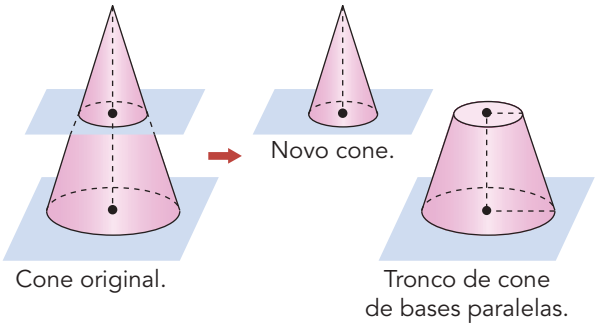
a) Calcule a medida de área lateral desse cone. **b)** Calcule a medida de distância do vértice desse cone até a base.

O formato desses objetos lembra o de um sólido geométrico denominado **tronco de cone**.

Quando seccionamos um cone circular reto por um plano paralelo à base (não contendo o vértice), ele fica dividido em 2 sólidos geométricos.

1º) O sólido geométrico que contém o vértice é um novo cone, obtido pelo seccionamento.

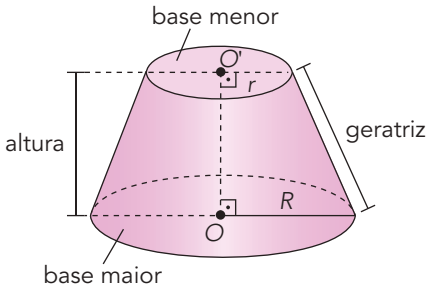
2º) O sólido geométrico que contém a base do cone original é um tronco de cone de bases paralelas.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos identificar os principais elementos de um tronco de cone.

- **Base maior do tronco**: é a base do cone original.
- **Base menor do tronco**: é a secção determinada pelo plano ao intersectar o cone. Essa secção é um círculo e corresponde à base do novo cone.
- **Medida da altura do tronco**: é a medida de distância entre os planos das bases.
- **Geratriz do tronco**: é um segmento de reta contido em uma geratriz do cone original e cujas extremidades são pontos das circunferências das bases (sendo um ponto em cada base).



Medidas de área do tronco de cone

- Medida de área da base maior (A_B)

  A área do círculo de raio de medida R é chamada **área da base maior do tronco**.

  Logo, a medida dela é dada por:

$$A_B = \pi R^2$$

- Medida de área da base menor (A_b)

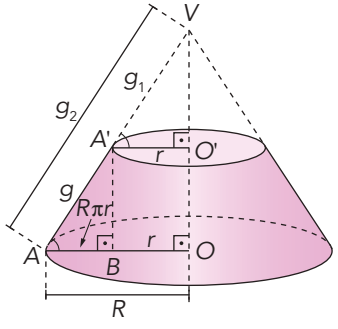
  A área do círculo de raio de medida r recebe o nome de **área da base menor do tronco**.

  Logo, a medida dela é dada por:

$$A_b = \pi r^2$$

- Medida de área lateral (A_ℓ)

  A superfície lateral de um tronco de cone é a união das geratrizes do tronco. A área dessa superfície é a **área lateral do tronco**. A fórmula que permite calcular A_ℓ pode ser obtida subtraindo da medida de área lateral do cone original a medida de área lateral do novo cone, obtido pelo seccionamento, ou seja:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$A_\ell = \pi R g_2 - \pi r g_1 \Rightarrow A_\ell = \pi R \cdot (g_1 + g) - \pi r g_1 \Rightarrow A_\ell = \pi[R \cdot g + (R - r) \cdot g_1]$$

Os triângulos $VA'O'$ e $A'AB$ são semelhantes; por isso, podemos escrever:

$$\frac{VA'}{A'A} = \frac{A'O'}{AB} \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{r}{R-r} \Rightarrow g_1 = \frac{r \cdot g}{R-r} \quad \text{II}$$

Substituindo II em I, obtemos:

$$A_\ell = \pi\left[R \cdot g + \cancel{(R-r)} \cdot \frac{r \cdot g}{\cancel{R-r}}\right] = \pi[R \cdot g + r \cdot g] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A_\ell = \pi \cdot g \cdot (R + r)}$$

- Medida de área total (A_t)

  A medida de **área total do tronco** é igual à soma da medida de área das 2 bases com a da área lateral.

$$\boxed{A_t = A_B + A_b + A_\ell}$$

Medida de volume do tronco de cone

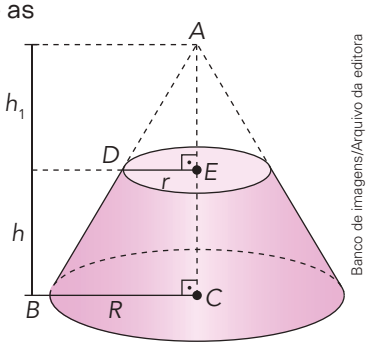
Considere um tronco de cone de bases paralelas cuja altura mede h.

Já que R é a medida do raio da base maior e r é a medida do raio da base menor, então a medida de volume V do tronco é:

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)}$$

Demonstração

A medida de volume V do tronco de cone é obtida pela diferença entre as medidas de volume dos 2 cones, ou seja:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$V = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot (h + h_1)}_{\text{medida de volume do cone original}} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h_1}_{\text{medida de volume do novo cone}}$$

$$V = \frac{\pi}{3}[R^2 \cdot h + (R^2 - r^2) \cdot h_1] \quad \text{I}$$

Como os triângulos ACB e AED são semelhantes, temos:

$$\frac{h_1 + h}{h_1} = \frac{R}{r} \Rightarrow h_1 \cdot R - h_1 \cdot r = h \cdot r \Rightarrow h_1 = \frac{h \cdot r}{R-r} \quad \text{II}$$

Substituindo II em I, obtemos:

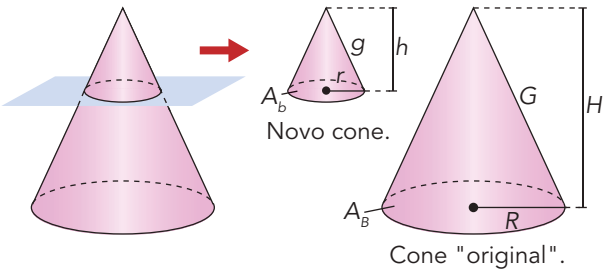
$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \left[R^2 \cdot h + (R^2 - r^2) \cdot \frac{h \cdot r}{R-r}\right]$$

Como $R^2 - r^2 = (R + r) \cdot (R - r)$, temos:

$$V = \frac{\pi}{3}[R^2 \cdot h + (R + r) \cdot h \cdot r] \Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)}$$

Cones semelhantes

Já estudamos que, quando seccionado por um plano paralelo à base (se o plano não contém o vértice do cone), o cone circular reto fica dividido em um tronco de cone e um novo cone. Podemos notar que os 2 cones são semelhantes; assim, todas as propriedades estudadas para pirâmides semelhantes podem ser estendidas para cones semelhantes.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

- Razão entre medidas de elementos lineares: $\frac{h}{H} = \frac{g}{G} = \frac{r}{R} = k$.
- Razão entre medidas de área: $\frac{A_b}{A_B} = \frac{A_\ell}{A_L} = \frac{A_t}{A_T} = k^2$.
- Razão entre medidas de volume: $\frac{v}{V} = k^3$.

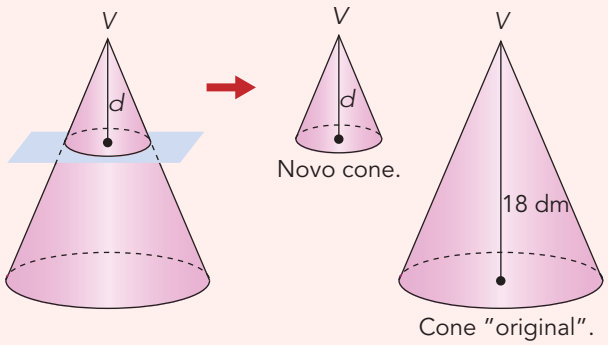
Atividades resolvidas

6. Um cone circular reto tem 18 dm de medida da altura. A que medida de distância do vértice dele deve passar um plano paralelo à base, de modo que a medida de volume desse cone seja 8 vezes a medida de volume do cone obtido pelo seccionamento?

Solução:

Sejam:

- d a medida de distância do vértice do cone ao plano;
- V_1 a medida de volume do cone original;
- V_2 a medida de volume do novo cone.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Temos:

$$V_1 = 8 \cdot V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 8 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = \sqrt[3]{8} = 2$$

O valor obtido para k significa que a razão entre a medida de um elemento linear do cone original e o homólogo dele no novo cone obtido é igual a 2 dm.

Desse modo, comparando as medidas da altura dos 2 cones, temos:

$$\frac{18}{d} = 2 \Rightarrow d = 9$$

Portanto, a medida de distância do vértice ao plano é 9 dm.

Não escreva no livro

Pense nisto

Qual é a razão entre a medida de área da base do cone original e a medida de área da base do cone novo?

Pense nisto: A razão é 4. Como a razão entre as medidas dos elementos lineares é $k = 2$, a razão entre as medidas de área das bases é $k^2 = 4$, e então $\frac{A_1}{A_2} = 4 \Rightarrow A_1 = 4A_2$.

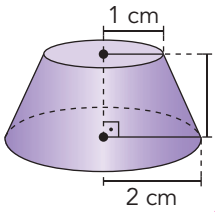
28. O círculo projetado de 400π dm^2 tem raio que mede 20 dm. Por semelhança de triângulos, $\frac{20}{5} = \frac{d+3}{3}$, em que $d = 9$ dm e a medida de distância pedida é $d + 3 = 12$; ou seja 12 dm.

ATIVIDADES

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

25. Obtenha a medida de volume e a de área total do tronco de cone representado a seguir.

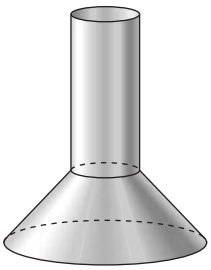


Banco de imagens/Arquivo da editora

$V = \frac{7\pi}{2}$ cm^3;

$A_t = \pi \cdot \left(5 + \frac{3\sqrt{13}}{2}\right)$ cm^2.

26. A coifa representada na imagem lembra um cilindro reto, com 0,40 m de medida da altura e 0,20 m de medida do raio da base, acoplado a um tronco de cone reto cuja medida da altura é igual à do raio da base maior e cuja geratriz mede $\frac{\sqrt{5}}{5}$ m. Desconsidere a espessura do material usado na fabricação da coifa.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Considerando a superfície total da coifa como a união das superfícies laterais do cilindro e do tronco de cone, determine a medida de área total. $\frac{\pi \cdot (4 + 3\sqrt{5})}{25}$ m^2

27. Em uma estufa, há vários vasos de vidro com o formato de paralelepípedo reto-retângulo, cujas medidas das dimensões internas são 40 cm, 30 cm e 20 cm. Eles sempre estão cheios de terra para que possam ser plantadas determinadas mudas de espécies vegetais. Deseja-se transferir a terra desses recipientes para um outro, cujo formato e medidas das dimensões são representados a seguir.

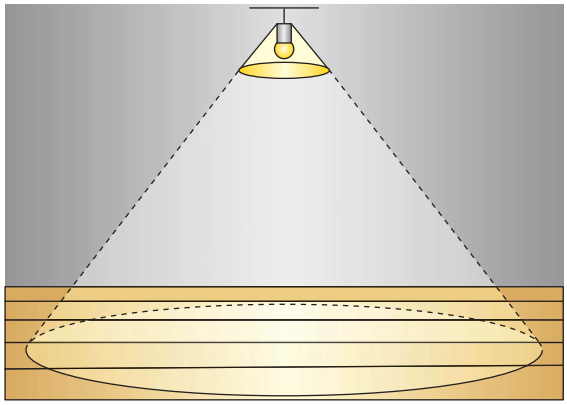


Luis Moura/Arquivo da editora

Qual é o número mínimo de vasos de vidro necessários para encher completamente de terra o novo recipiente?

Use $\pi \simeq 3$ e $\sqrt{15} \simeq 3{,}9$ e considere desprezível a espessura do vidro. 4 vasos.

28. Um quebra-luz cujo formato é de um cone, com 3 dm de medida da altura e 5 dm de medida do raio da base, tem preso no vértice uma lâmpada de comprimento desprezível. Quando ligada, essa lâmpada projeta no chão uma figura circular de área que mede 400π dm^2. A que medida de distância do chão se encontra a lâmpada?



Zapt/Arquivo da editora

29. A foto a seguir é da Catedral Metropolitana de São Sebastião do Rio de Janeiro. O formato dela lembra um tronco de cone.



Cavan-Images/Shutterstock

Catedral Metropolitana de São Sebastião do Rio de Janeiro, no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2024.

Uma estudante resolveu fazer uma releitura da obra arquitetônica dessa catedral e construiu um modelo de tronco de cone reto de bases paralelas em que os raios da base maior e da base menor medem, respectivamente, 10 cm e 6 cm. Sabendo que a distância entre essas bases mede 9,6 cm, enuncie e resolva no caderno um problema correspondente ao modelo construído pela estudante.

29. Exemplo de problema: As bases de um tronco de cone circular reto são círculos cujos raios medem 10 cm e 6 cm. Se a altura desse tronco mede 9,6 cm, determine:

a) a medida de área lateral; **b)** a medida de volume.

Esta seção favorece o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC e das habilidades **EM13MAT201** e **EM13MAT309**.

PROJETO

Não escreva no livro

Professor, promova uma conversa com os estudantes sobre o texto. Questione-os sobre a importância da captação da água das chuvas e se conhecem outros sistemas de captação de água. Pergunte a eles se possuem em suas residências algum sistema de captação da água da chuva e peça-lhes que compartilhem essa experiência com os colegas.



Reprodução/ ONU

Sistemas de captação e armazenamento de água

Leia a seguir o texto sobre sistemas de captação e armazenamento de água.

[...]

A captação e o armazenamento da água de chuva são uma ótima alternativa para minimizar o problema de estiagens [...]. Para utilização dessa água, devemos prestar atenção em dois aspectos principais:

1. Se a água da chuva for utilizada para o consumo animal, ela deve ser analisada e receber, antes, um tratamento adequado, que garanta sua qualidade.

2. Se a água da chuva for utilizada para outros fins, [...], o seu tratamento deverá ser mínimo, e antes de seu uso ela não necessitará de análise que verifique a sua qualidade.

A captação da água da chuva pode ser feita em telhados de casas, na cidade, e também em construções de propriedade rural. [...]

As cisternas e os reservatórios devem receber os mesmos cuidados exigidos para as caixas d'água [...]. Além disso, é importante descartar as primeiras águas coletadas da chuva, porque elas trazem consigo a sujeira que estava nos telhados e nos encanamentos.

[...]

ÁGUA. *Embrapa*. Disponível em: https://tedit.net/t89so0. Acesso em: 20 ago. 2024.

As dimensões, o formato e o material do reservatório são escolhidos conforme a função que terão: captação da água da chuva, de rios, córregos, entre outros. Os reservatórios podem ser enterrados, semienterrados ou apoiados – ou seja, ficam sobre o solo.


Sobrevolando Patagonia/Shutterstock

Reservatório semienterrado de água para uso de irrigação na agricultura.


eugenehill/Shutterstock

Reservatório apoiado de coleta de água da chuva para uso residencial.

As imagens não estão representadas em proporção.

Pensando em um projeto

Que tal conhecer um pouco mais sobre os sistemas de captação de água e planejar a implantação deles na região em que você vive? Para isso, você vai pesquisar os tipos de sistemas de captação e reservatórios existentes e quais deles poderiam ser aplicados em sua comunidade. Depois, vai construir uma maquete do sistema de captação e do reservatório escolhidos e criar um infográfico para divulgar as informações.

Para começar

- Organizem-se em 7 grupos.

Plano de ação

Etapa 1

Em grupo, pesquisem quais são os tipos de sistemas de captação e reservatórios de água existentes. Faça uma descrição de cada um, mencionando o formato e a maneira como a água é captada. Utilize os conhecimentos sobre sólidos geométricos para identificar o formato aproximado de cada reservatório.

Etapa 2

Apresentem para toda a turma os resultados da pesquisa e as classificações que fizeram quanto ao formato de cada tipo de reservatório e de sistema de captação de água. Com o auxílio do professor, realizem um debate.

Professor, seguem algumas sugestões de perguntas motivadoras para o debate: Todos os grupos encontraram os mesmos tipos de reservatórios? Já viram esses tipos de reservatório em algum lugar? Quais sistemas de captação de água foram mais frequentes nos resultados da pesquisa? Quais são as vantagens e desvantagens de cada sistema de captação de água pluvial para a região em que você vive?

Etapa 3

Aproveitando os questionamentos da etapa anterior, pesquisem os sistemas de captação e reservatórios que poderiam contribuir com a sua comunidade. Cada grupo deve pensar em uma região diferente do município e buscar conhecê-la melhor para entender qual é a melhor solução para cada caso.

Etapa 4

Com a pesquisa pronta, decidam quais sistema de captação e reservatório de água serão representados na maquete de cada grupo.

Ao planejar a maquete, lembrem-se de que tudo deverá ser representado em escala. É importante levar em conta o formato e a medida de volume do reservatório.

Em seguida, façam um planejamento da construção da maquete, que deve conter uma lista dos materiais necessários, priorizando sempre a reutilização de embalagens e a utilização de materiais recicláveis.

Professor, a realização de uma maquete que busca identificar as formas de captação e de armazenamento de água para aplicar na comunidade contribui para o ODS **6**.

Etapa 5

Com os materiais disponíveis, o grupo deve fazer a montagem da maquete. Utilizem os conceitos de planificação da superfície de sólidos geométricos para representar as construções. Lembrem-se de fazer tudo em escala.

Etapa 6

Para informar os locais onde podem ser instalados os sistemas de captação e de armazenamento de água pluvial reproduzidos nas maquetes, os formatos e tipos escolhidos para ser representados, produzam um infográfico. Para criá-lo, consultem como fazer um infográfico no *Produção em foco*.

Produto final: Apresentação de uma maquete para representar sistemas de captação e de reservatório de água e de um infográfico explicativo. Os grupos devem apresentar aos colegas e ao professor:

- a escolha do sistema de captação e de armazenamento de água que representaram e a justificativa para essa escolha;
- o uso de sólidos geométricos utilizados na construção da maquete e informações técnicas sobre o reservatório;
- a possível instalação desse sistema na comunidade.

Esfera

As imagens não estão representadas em proporção.

Alguns objetos do cotidiano ou partes deles lembram o formato de uma **esfera**.



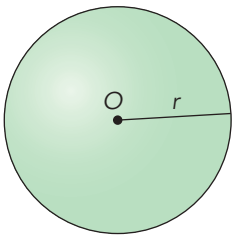




Objetos em formato esférico: bola de enfeite, bola de gude e globo terrestre.

Definição

Vamos considerar um ponto O e um segmento de reta de medida r. Denomina-se **esfera de centro O com raio de medida r** o conjunto dos pontos do espaço cuja medida de distância ao ponto O é menor ou igual à medida r.

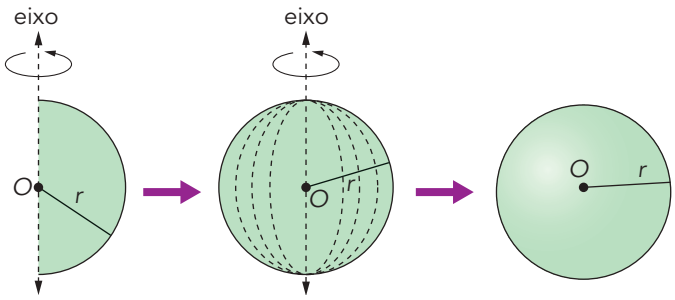


Banco de imagens/ Arquivo da editora

É importante diferenciarmos **esfera** de **superfície esférica**: a superfície esférica de centro O e raio de medida r é o conjunto de pontos do espaço cuja medida de distância ao ponto O é igual à medida r.

Observação

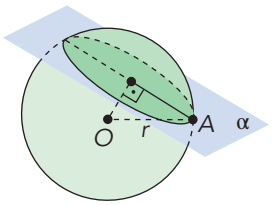
- A **superfície esférica** de centro O e raio r é a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém o diâmetro dela.
- A **esfera** de centro O e raio r é o sólido geométrico de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

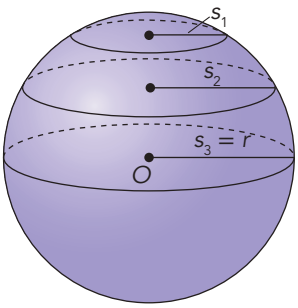
Secção de uma esfera

Quando um plano α intersecta, em mais de um ponto, uma esfera de centro O e raio de medida r, o conjunto de pontos comuns ao plano e à esfera é um círculo, como mostra a figura.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Assim, dizemos que toda secção plana de uma esfera é um círculo. A medida do raio desse círculo varia de acordo com a medida de distância do plano α ao centro O. Quanto mais próximo de O o plano α intersectar a esfera, maior será a medida s do raio da secção. Se α passar pelo centro O, o raio da secção determinada será o próprio raio da esfera e, nesse caso, a secção recebe o nome de **círculo máximo da esfera**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

7. Suponha que um plano α intersecte uma esfera a 5 cm do centro, determinando nela um círculo cujo raio meça 12 cm. Calcule a medida do raio dessa esfera.

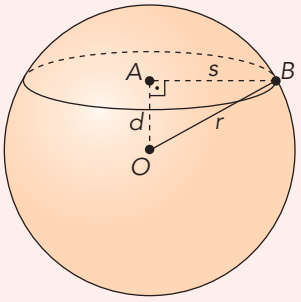
Solução:

Sejam $d = 5$ cm a medida de distância de α ao centro O, $s = 12$ cm a medida do raio da secção e r a medida do raio da esfera.

No $\triangle AOB$, temos:

$$r^2 = s^2 + d^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = 13$$

Assim, o raio da esfera mede 13 cm.

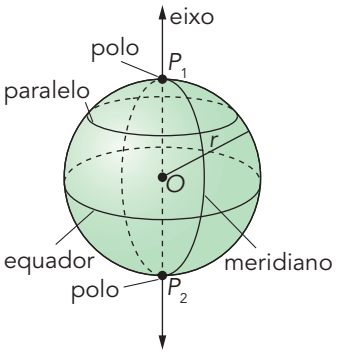


Banco de imagens/Arquivo da editora

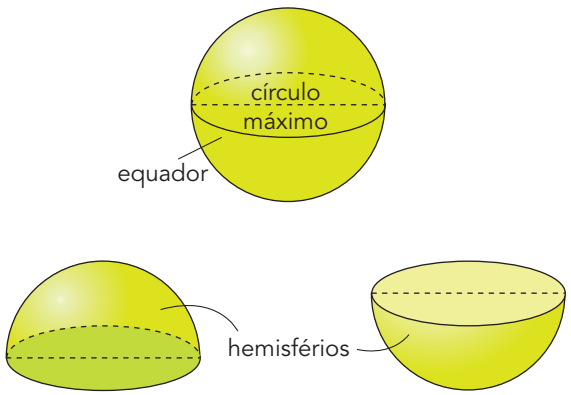
Elementos de uma esfera

Considerando a figura a seguir, vamos caracterizar os elementos de uma esfera de centro O, raio de medida r e eixo de rotação e.

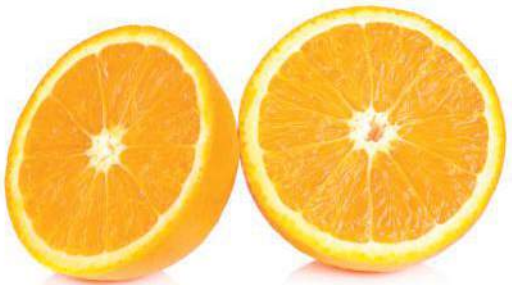
- **Polos**: Os polos P_1 e P_2 correspondem aos pontos de intersecção da superfície esférica com o eixo.
- **Equador**: É a circunferência do círculo (secção) obtido ao intersectar a esfera com um plano perpendicular ao eixo que passe pelo centro da esfera. O círculo associado ao equador (círculo máximo da esfera) divide a esfera em 2 partes iguais, conhecidas como **hemisférios** ou **semiesferas**.



Banco de imagens/Arquivo da editora



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora


watkung/Adobe Stock

Uma laranja lembra uma esfera. Ao cortarmos a fruta ao meio, podemos imaginar o formato dos hemisférios.

- **Paralelo**: É a circunferência do círculo obtido ao intersectar a esfera com um plano perpendicular ao eixo. O plano que contém um paralelo é paralelo ao plano que contém o equador.
- **Meridiano**: É a circunferência do círculo obtido ao intersectar a esfera com um plano que contém o eixo.

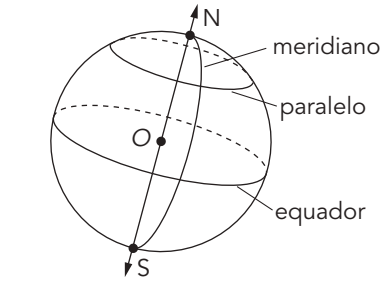
Coordenadas geográficas

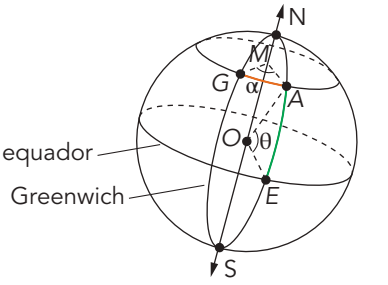
O planeta Terra não tem formato perfeitamente esférico devido ao achatamento dos polos. Entretanto, é comum considerar o formato dele como o de uma esfera com raio de aproximadamente 6 370 km. A representação esférica do planeta Terra é chamada **globo terrestre**.

Na representação esquemática do globo terrestre, os pontos N e S indicam, respectivamente, o polo norte e o polo sul. A reta que passa por esses polos é o eixo polar ou eixo de rotação da Terra e o ponto *O* é o centro do globo terrestre.

O **sistema de coordenadas geográficas** é composto de linhas imaginárias – paralelos e meridianos – que dividem a superfície do globo e determinam, respectivamente, a latitude e a longitude de qualquer ponto dessa superfície.

O ponto que define a origem do sistema de coordenadas geográficas é a intersecção da linha do equador com o meridiano de Greenwich. A imagem ilustra como determinar as coordenadas geográficas de um ponto *A* qualquer da superfície do globo.





Latitude de *A*: med($\overset{\frown}{AE}$) = θ

Longitude de *A*: med($\overset{\frown}{AG}$) = α

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A **latitude** de um ponto *A* é a medida do **arco de meridiano** que passa por *A* e que está compreendido entre o equador (latitude 0°) e o ponto *A*. A latitude é expressa em graus, minutos e segundos e varia de 0° a 90° N (norte) ou de 0° a 90° S (sul).

A **longitude** de um ponto *A* é a medida do **arco de paralelo** que passa por *A* e que está compreendido entre o meridiano de Greenwich (longitude 0°) e o ponto *A*. A longitude é expressa em graus, minutos e segundos e varia de 0° a 180° E (leste) ou de 0° a 180° W (oeste).

Assim, o ponto *A* tem coordenadas geográficas θ N e α E.

Observação

Em Geografia, a definição de **meridiano** não é a mesma adotada pela Matemática, pois em Geografia ele é definido como qualquer **semicircunferência** com centro em *O* que ligue o polo norte ao polo sul.

É comum utilizarmos aparelhos que operam algum sistema de navegação por satélite, o chamado Sistema de Posicionamento Global (GPS - sigla em inglês para *Global Positioning System*). Esse sistema permite determinar a localização do aparelho receptor na superfície do globo terrestre, mas, para isso, esse aparelho deve estar "visível" a pelo menos 3 satélites.

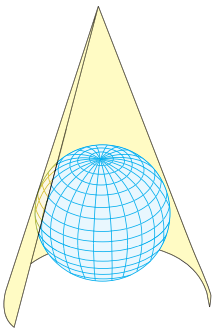
Projeções cônicas e cilíndricas do globo terrestre

A projeção cartográfica é uma representação geométrica plana e simplificada da superfície do globo terrestre apresentada por meio de mapas ou cartas.

Diferentes projeções cartográficas foram desenvolvidas para permitir a representação da esfericidade terrestre em um plano, cada uma priorizando determinado aspecto da representação (dimensão, formato, etc.). Porém, é impossível representar fielmente uma superfície esférica em uma superfície plana sem que ocorram distorções.

Projeção cônica

É a projeção do globo terrestre sobre a superfície lateral de um cone que o circunscreve. Nesse caso, os paralelos são arcos de circunferência e os meridianos são segmentos de reta que se originam de um único ponto.



Projeção cônica.



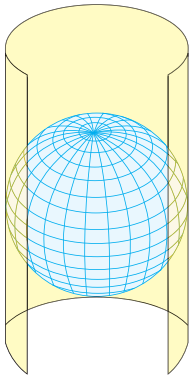
Projeção cônica de Albers.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Projeção cilíndrica

É a projeção do globo terrestre sobre a superfície lateral de um cilindro que o circunscreve. Nesse caso, os paralelos são segmentos de reta horizontais e os meridianos, segmentos de reta verticais.

As projeções cilíndricas são classificadas em:



Projeção cilíndrica.



Projeção cilíndrica de Peters.

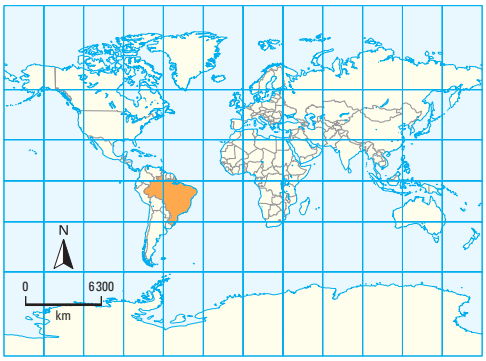
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- **equidistante**, que preserva as medidas de comprimentos lineares, isto é, em que as medidas das distâncias entre 2 pontos no mapa são proporcionais às medidas das distâncias correspondentes na superfície do globo terrestre;
- **equivalente**, que preserva as medidas de área, ou seja, em que as medidas de área de regiões no mapa são proporcionais às medidas de área das regiões correspondentes na superfície do globo terrestre;
- **conforme**, que preserva as medidas dos ângulos; em decorrência dessa propriedade, as regiões correspondentes (do mapa e do globo) são semelhantes;
- **afilática**, em que as medidas de comprimentos, de áreas e dos ângulos **não** são conservados.

Principais projeções cartográficas



A projeção de Mercator é uma projeção cilíndrica conforme.



A projeção de Miller é uma projeção cilíndrica equivalente.

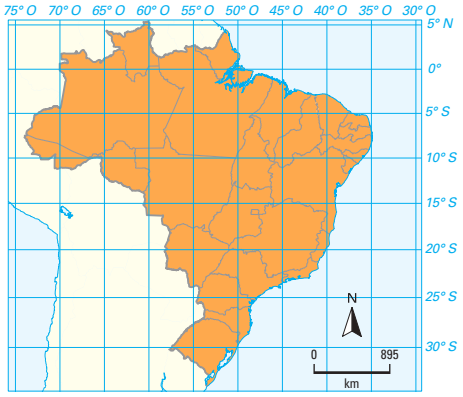


A projeção de Berhmann tem características similares às da projeção cilíndrica, porém não tem superfície de projeção.

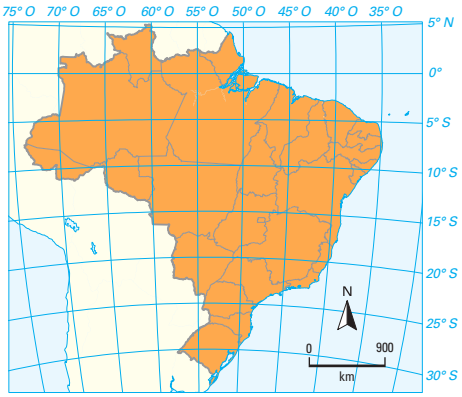


A projeção de Robinson é afilática e pseudocilíndrica, pois não tem superfície de projeção. Contudo, ela apresenta características similares às da projeção cilíndrica.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Projeção cilíndrica equatorial de Mercator: conforme cilíndrica.



A projeção policônica é afilática e usa vários cones como superfície de projeção.

Dica

No ano de 2024, o IBGE produziu um mapa-múndi no qual o Brasil está no centro. Esse mapa-múndi tem a marcação dos países que compõem o G20, além de algumas informações básicas sobre o Brasil. Disponível em: https://tedit.net/7w0mox. Acesso em: 20 ago. 2024.

As projeções de Mercator, Miller, Berhmann e Robinson são aplicadas à representação do mundo. Para representar o Brasil, utilizamos as projeções cilíndrica equatorial de Mercator e policônica.

O mapeamento oficial do País, em escala geográfica, é elaborado na projeção policônica, que tem como característica a diminuição da deformação da convergência dos meridianos, mantendo uma melhor representação da região Sul do país. O mapeamento na escala de 1 : 1000 000 é realizado na projeção cônica conforme de Lambert, seguindo o padrão do mapeamento mundial, definido pela ONU.

IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 23.

EXPERIMENTE

4. Não, pois o formato dos países é modificado de acordo com a região do mapa em que é representado. Quanto mais ao norte no mapa, mais a dimensão do país representado é aumentada. Assim, países que estão mais próximos da linha do equador, nessa projeção cartográfica, têm um formato que aparenta uma medida de área menor em comparação ao daqueles mais próximos dos polos.

Não escreva no livro

Investigar a deformação de ângulos e de áreas em projeções cartográficas cilíndricas

Vamos investigar o que acontece com as medidas dos ângulos e de áreas em projeções cartográficas cilíndricas.

Acesse o *site* The True Size (disponível em: https://tedit.net/5qzpp5; acesso em: 20 ago. 2024), e clique com o botão direito do *mouse* sobre os países que eventualmente estiverem destacados para limpar a tela.

Na caixa *The true size of*, digite "*Brazil*". Note que o mapa do Brasil aparecerá em cor destacada no mapa-múndi.



Reprodução/The True Size

Representação da tela do *site*, com destaque para o Brasil.

1. Analisando o mapa, quais países você acredita que têm a medida de área aproximadamente igual à do Brasil? E quais países você acredita que têm medida de área maior que a do Brasil?
Respostas pessoais.

2. Compare a medida de área da Groenlândia (Greenland, em inglês) com a medida de área do Brasil. Analisando o mapa, qual delas você acredita que é a maior? Resposta esperada: A medida de área da Groenlândia é maior.

3. Agora, clique sobre o mapa do Brasil em destaque e, segurando o botão do *mouse*, arraste-o até a região onde está situada a Groenlândia.
O formato do mapa é alterado. Quando representado na região da Groenlândia, a medida de área do Brasil se torna maior.

a) O que acontece com o formato do mapa do Brasil ao ser representado próximo da Groenlândia?

b) A medida de área do Brasil é maior ou menor do que a medida de área da Groenlândia? Maior.

4. Podemos dizer que a projeção cartográfica usada nesse mapa preserva o formato dos países? Por quê?

5. Resposta pessoal. A projeção cartográfica que o *site* apresenta faz com que os países mais próximos ao polo norte pareçam maiores do que realmente são, enquanto os países mais próximos da linha do equador pareçam menores. Espera-se que a síntese dos estudantes apresente essa conclusão.

5. Compare a medida de área de outros países e, depois, escreva uma pequena síntese sobre como essa projeção cartográfica influencia nossa percepção da dimensão dos países que estão mais próximos da linha do equador em relação à daqueles que estão mais próximos do polo norte.

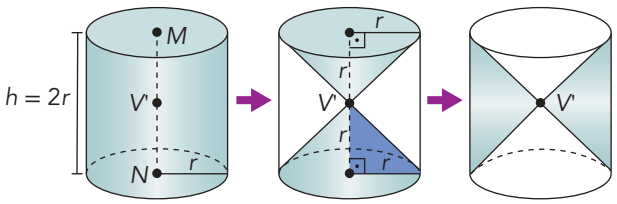
Medida de volume (V) da esfera

A medida de volume V de uma esfera cujo raio mede r é dada por:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Demonstração

Considere um cilindro equilátero cujo raio da base mede r e cuja altura mede $2r$. Seja V' o ponto médio do segmento de reta $\overline{MN}$ contido no eixo do cilindro. Desse cilindro retiramos 2 cones cujas bases coincidem com as do cilindro. Esses cones têm vértice V' e alturas de medida r, como mostra a sequência de figuras. O sólido geométrico obtido será indicado por **G**.

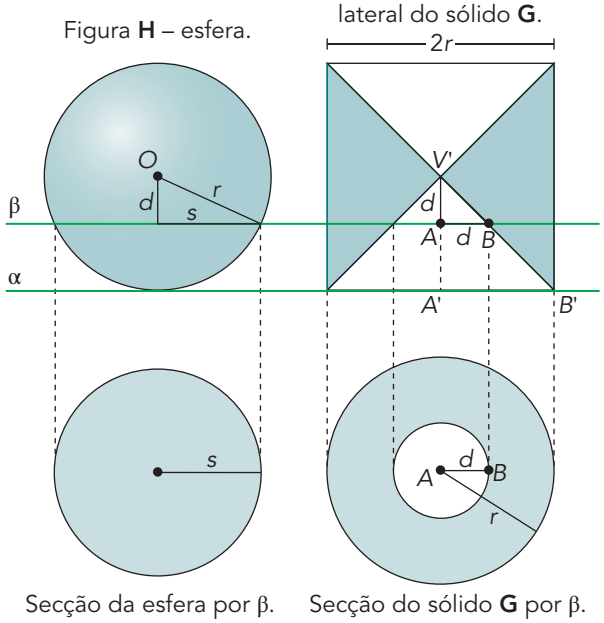


Cilindro equilátero. 2 cones retirados. Sólido **G**.

Agora, considere uma esfera cujo raio mede r e o sólido geométrico **G** obtido anteriormente. Imagine que essa esfera seja tangente a um plano α e que o cilindro original descrito tenha uma das bases contida em α.

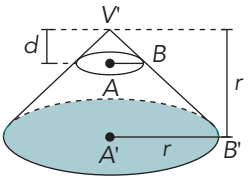
Figura **H** – esfera.

Figura **J** – vista lateral do sólido **G**.



Secção da esfera por β. Secção do sólido **G** por β.

Figura **M**.



Quando um plano β, paralelo a α, intersecta a esfera a uma distância do centro que mede d, esse plano determina na esfera um círculo cujo raio mede s e cuja medida de área é dada por:

$$\pi s^2 = \pi \cdot (r^2 - d^2)$$ I (representado na figura **H**)

O plano β naturalmente também intersecta o sólido geométrico **G** a uma distância de V' que

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

mede d, determinando, como secção, uma coroa circular. Essa coroa circular é limitada por 2 circunferências, uma cujo raio mede r e outra cujo raio mede d, com $r > d$, e a medida de área dela é dada por:

$\pi \cdot (r^2 - d^2)$ II (Note, nas figuras **J** e **M**, que o $\triangle V'AB$ é isósceles e, portanto, $AB = d$.)

Por I e II, concluímos que as medidas de área das secções na esfera e no sólido geométrico **G** são iguais. Logo, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido geométrico **G** têm a mesma medida de volume.

A medida de volume do sólido geométrico **G** pode ser calculada por:

$$V_G = V_{\text{cilindro}} - 2 \cdot V_{\text{cone}}$$

$$V_G = \underbrace{\pi \cdot r^2}_{A_b} \cdot \underbrace{2r}_{h} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\pi \cdot r^2}_{A_b} \cdot \underbrace{r}_{h} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Segue daí que a medida de volume da esfera também é dada por:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Atividades resolvidas

8. Quantos litros de gás um reservatório industrial em formato esférico e com raio interno medindo 2 m pode conter?

Solução:

É preciso calcular a medida de volume de uma esfera cujo raio mede 2 m.

$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}$ ou, aproximadamente, 33,49 m^3 (adotando $\pi \simeq 3{,}14$).

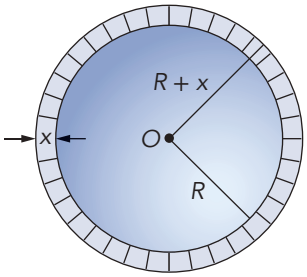
Logo, o reservatório pode conter aproximadamente 33 490 L de gás.

Medida de área (A) da superfície esférica

Diferentemente do cilindro e do cone, a esfera é um corpo redondo cuja superfície não pode ser planificada, isto é, não é possível "colocar" a superfície de uma esfera em um plano sem dobrá-la ou esticá-la.

A seguir, acompanhe uma justificativa para a fórmula da medida de área de uma superfície esférica.

Seja uma esfera de centro O, raio de medida R e medida de área da superfície A. Dado um número real positivo x, vamos considerar a esfera de centro O e raio de medida $R + x$. Analise as 2 esferas concêntricas representadas a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O sólido geométrico limitado por essas 2 superfícies esféricas é uma espécie de casca formada por segmentos de reta cujos comprimentos medem x.

Intuitivamente, vamos imaginar a superfície da primeira esfera como uma "placa sólida de espessura suficientemente pequena" (essa ideia pode ser estendida para qualquer superfície).

Assim, para valores de x cada vez mais próximos de zero (indica-se $x \to 0$ e se lê "x tende a zero"), a medida de volume V do sólido geométrico limitado pelas 2 superfícies esféricas é aproximadamente igual a $A \cdot x$, em que A é a medida de área da superfície esférica cujo raio mede R. Expressando também V como a diferença entre as medidas de volume das 2 esferas, temos:

$$A \cdot x = \frac{4\pi}{3}(R + x)^3 - \frac{4\pi}{3}R^3 \Rightarrow A \cdot x = \frac{4\pi}{3}\left(R^3 + 3R^2x + 3Rx^2 + x^3 - R^3\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A \cdot x = \frac{4\pi x}{3} \cdot \left(3R^2 + 3Rx + x^2\right) \Rightarrow A = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(3R^2 + 3Rx + x^2\right)$$

Se x tende a 0, as parcelas $3Rx$ e x^2 também tendem a zero. Logo:

$$A = \frac{4\pi}{3} \cdot 3R^2 = 4\pi R^2$$

Assim, a medida de área de uma superfície esférica cujo raio mede R é dada por:

$$A = 4\pi R^2$$

Atividades resolvidas

9. Uma indústria recebeu uma encomenda de confecção de 5 000 bolinhas de pingue-pongue. O plástico usado nessa confecção custa R$ 5,00 o metro quadrado. Se o diâmetro de uma bolinha mede 3 cm, qual é o custo mínimo que a indústria terá com o material para confeccionar essa encomenda? Use 3,14 como aproximação de π.

Solução:

O raio de cada bolinha mede:

$$r = \frac{3}{2}\text{ cm} = 1{,}5\text{ cm}$$

A medida de área da superfície de uma bolinha é:

$$4\pi \cdot (1{,}5\text{ cm})^2 = 9\pi\text{ cm}^2 \simeq 9 \cdot 3{,}14\text{ cm}^2 = 28{,}26\text{ cm}^2$$

Para confeccionar as 5 000 bolinhas, são necessários, no mínimo:

$$5\,000 \cdot (28{,}26\text{ cm}^2) = 141\,300\text{ cm}^2 = 14{,}13\text{ m}^2$$

O custo do material para a confecção das bolinhas é de aproximadamente:

$$14{,}13 \cdot \text{R\$ } 5{,}00 = \text{R\$ } 70{,}65$$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

30. No caderno, calcule a medida de volume de uma esfera sabendo que a área da superfície dela mede 576π cm^2.

31. O raio de uma esfera mede 4 cm. Um plano que secciona essa esfera determina nela um círculo com raio de medida 1 cm. Determine no caderno a medida de distância do plano ao centro da esfera. $\sqrt{15}$ cm

32. Imagine um projeto de construção de uma luminária no formato de uma esfera que será intersectada por um plano a uma medida de distância do centro igual à medida do raio da secção determinada na esfera. Sabendo que o raio da esfera mede 4 cm, determine no caderno a medida de:

a) área da secção; 8π cm^2

b) área do círculo máximo; 16π cm^2

c) área da superfície esférica. 64π cm^2

Experimente realizar o cálculo utilizando um *software* de Geometria dinâmica.

A resolução depende do *software* utilizado pelo estudante.

30. A medida do raio da esfera, em centímetros, é dada por:

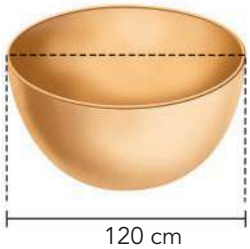
$4\pi r^2 = 576\pi \Rightarrow r^2 = \frac{576}{4} = 144 \Rightarrow r = 12$

$V = \frac{4\pi \cdot (12\text{ cm})^3}{3} = 2\,304\pi\text{ cm}^3$

As imagens não estão representadas em proporção.

33. Um recipiente, no formato de paralelepípedo retângulo, está completamente cheio de terra. As medidas das dimensões dele são 4 m de comprimento, 2 m de largura e 1 m de altura. Deseja-se distribuir toda a terra do recipiente em vasos idênticos, cada um com a forma de um hemisfério, como mostra a figura. Qual é o número mínimo de vasos que serão necessários? Use $\pi \simeq 3{,}14$.

Luis Moura/Arquivo da editora



34. Um joalheiro necessita confeccionar uma peça de ouro que lembra uma esfera e cuja medida do raio seja 3 cm. Ele dispõe de algumas peças esféricas menores do mesmo material, cada uma com raio de medida 2 cm. Considere $\pi \simeq 3$.

a) Determine no caderno o número mínimo de peças esféricas menores a serem fundidas para que o joalheiro possa confeccionar a peça esférica maior. 4 esferas menores.

b) A sobra do ouro fundido, nas condições do item **a**, será vendida pelo preço de R$ 140,00 por grama. Sabendo que a medida de densidade do ouro é 19,3 g/cm^3, determine o valor que será arrecadado com a venda da sobra. Aproximadamente R$ 54.040,00.

35. Um aquecedor a gás tem o formato de um cilindro com 2 semiesferas acopladas nas extremidades dele, como mostra a imagem.

Luis Moura/Arquivo da editora



Sabendo que o diâmetro da base do cilindro mede 0,90 m e que o comprimento total do aquecedor mede 1,90 m, calcule no caderno a medida:

a) de área da superfície do aquecedor; Aproximadamente 5,13 m^2.

b) do volume máximo de gás que o interior do aquecedor pode conter, em litros. Use $\pi \simeq 3$. Aproximadamente 972 L.

36. Uma bolinha maciça de vidro com formato esférico e raio medindo 21 cm foi mergulhada em um tanque com formato de cilindro reto, cujo raio da base mede 0,7 m. Considerando que o nível da água no tanque se elevou x centímetros sem que houvesse transbordamento, determine no caderno o valor de x. 2,52 cm

37. Uma loja vende bolinhas de gude em embalagens cilíndricas. Cada embalagem contém 6 unidades, conforme mostra a imagem a seguir.



Luis Moura/Arquivo da editora

Se cada bolinha tem 2 cm de medida do diâmetro, determine a medida de volume do ar existente entre a embalagem e as bolinhas. Considere $\pi \simeq 3{,}14$. Aproximadamente 12,56 cm^3.

Experimente resolver esse problema utilizando um *software* de Geometria dinâmica. A resolução depende do *software* utilizado pelo estudante.

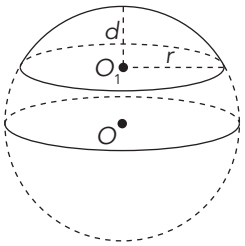
38. Uma jovem desenhista admirava o Museu Nacional do Conjunto Cultural da República, que também é conhecido como Museu Nacional Honestino Guimarães, em Brasília.



GTW/Shutterstock

Museu Nacional Honestino Guimarães, Brasília, DF. Foto de 2018.

Em um caderno, a jovem fez um esboço de como deveria ser a esfera completa cuja parte visível é a estrutura do museu. Nesse esboço, os planos que contêm O e O_1 são paralelos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplo de problema: Na figura, $r = 4$ e $d = 2$. Calcule a medida do raio da esfera.

Enuncie e resolva, no caderno, um problema correspondente ao esboço que a jovem fez.

33. Primeiro, precisamos calcular a medida de volume de cada recipiente para, posteriormente, calcular a quantidade de vasos que serão necessários.

$V_{paralelepípedo} = (4\text{ m}) \cdot (2\text{ m}) \cdot (1\text{ m}) = 8\text{ m}^3$

$V_{vaso} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot (0{,}6\text{ m})^3}{3} \simeq 0{,}144\pi\text{ m}^3$

Número de vasos: $\frac{8}{0{,}144\pi} \simeq 17{,}69$.

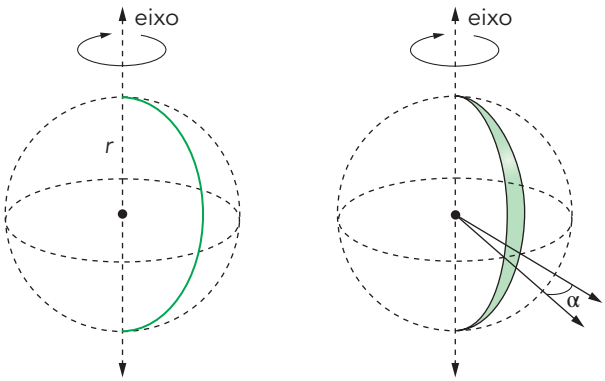
Portanto, o número mínimo de vasos é 18.

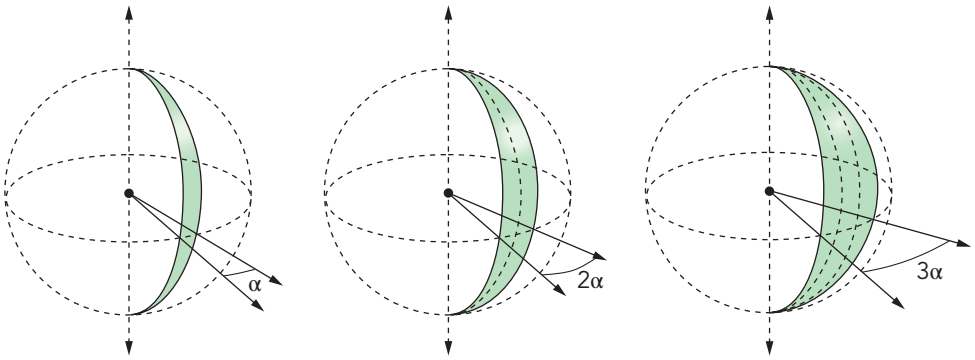
Partes da esfera

Fuso esférico

Fuso esférico é a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência, a qual gira α graus (com $0° < \alpha \leqslant 360°$) em torno do eixo, que contém o diâmetro.

Quando a medida α é dobrada, a medida de área do fuso é dobrada; quando é triplicada, a medida de área do fuso também é triplicada; e assim sucessivamente. No caso de $\alpha = 360°$, o fuso se transforma na superfície da esfera, cuja medida de área é dada por $A = 4\pi r^2$.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

De modo geral, a medida de área do fuso é proporcional à medida α e, portanto, pode ser calculada por uma relação de proporção simples.

Acompanhe como ficam as expressões da medida de área de um fuso em função da medida (α) do ângulo de giro, em graus e em radianos.

Para α em graus:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 4\pi r^2 \\ \alpha \text{ —— } A_{fuso} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°}$$

Para α em radianos:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ rad} \text{ —— } 4\pi r^2 \\ \alpha \text{ —— } A_{fuso} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{fuso} = 2r^2\alpha$$

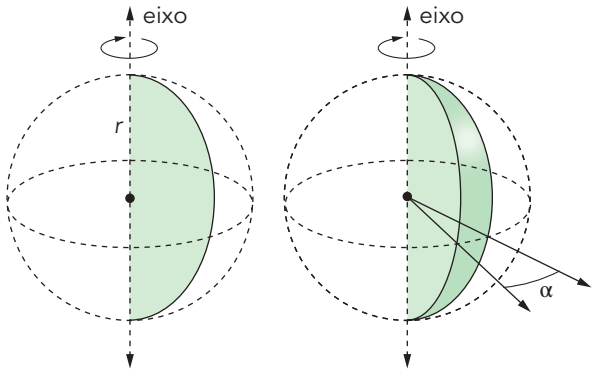
Observação

Essas expressões não precisam ser memorizadas, pois podem ser obtidas por relação de proporção (regra de 3 simples).

Cunha esférica

Dá-se o nome de **cunha esférica** ao sólido geométrico gerado pela rotação de um semicírculo que gira α graus (com $0° < \alpha \leqslant 360°$) em torno de um eixo que contém o diâmetro.

Note que, se a medida α é dobrada, a medida de volume da cunha esférica é dobrada; se a medida α é triplicada, a medida de volume da cunha esférica também é triplicada; e assim sucessivamente. No caso em que $\alpha = 360°$, a cunha esférica se transforma em uma esfera cuja medida de volume é dada por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

De modo geral, a medida de volume da cunha esférica é proporcional à medida α e, portanto, pode ser calculada por uma relação de proporção simples. Acompanhe como obtemos as relações.

Para α em graus:

$$\left.\begin{array}{l} 360^\circ \text{ —— } \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha \text{ —— } V_{\text{cunha}} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270^\circ}$$

Para α em radianos:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ rad —— } \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha \text{ —— } V_{\text{cunha}} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{2r^3 \alpha}{3}$$

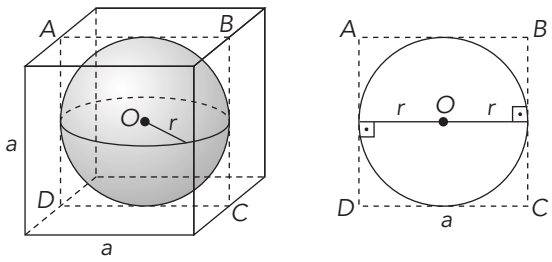
Assim como as expressões para o fuso esférico, as expressões para a cunha esférica não precisam ser memorizadas.

A superfície de uma cunha esférica contida em uma esfera cujo raio mede r é a união de um fuso esférico com 2 semicírculos de raio de medida r. Assim, a medida de área total da cunha esférica é igual à soma da medida de área do fuso esférico com a de um círculo de raio medindo r.

Esfera inscrita em outro sólido geométrico

Uma esfera está inscrita em um poliedro quando tangencia todas as faces dele. Nessa situação, dizemos que o poliedro circunscreve a esfera.

- Esfera inscrita em um cubo de aresta medindo a.

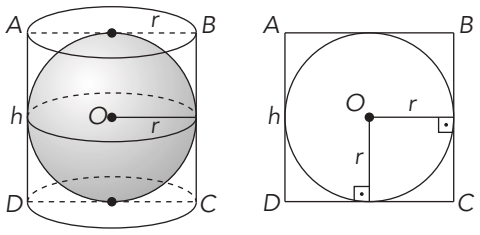


Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Como a esfera tangencia as faces do cubo, a medida do diâmetro $2r$ é igual à medida da aresta a. Assim, $2r = a$.

Uma esfera está inscrita em um cilindro circular reto quando tangencia as 2 bases e todas as geratrizes do cilindro. Nessa situação, dizemos que o cilindro circunscreve a esfera.

- Esfera inscrita em um cilindro de raio da base medindo r.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Como a altura do cilindro deve ter a mesma medida do diâmetro da esfera, o cilindro é equilátero. Assim, $h = 2r$.

Observação

Considerando esférica uma laranja, a superfície da casca do gomo tem formato de fuso esférico e o gomo, com a casca, tem formato de cunha esférica.



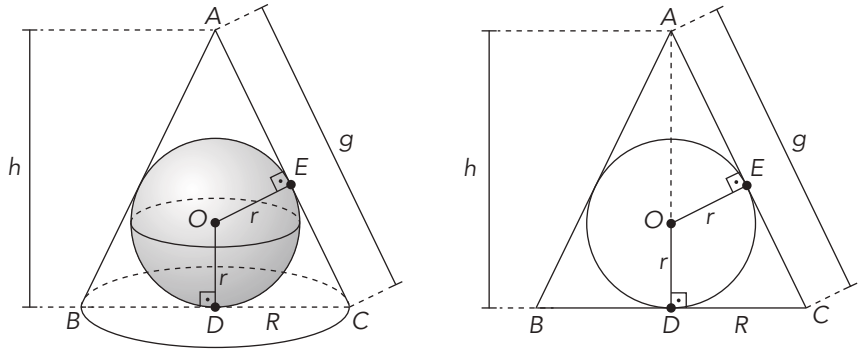
Tim UR/ Adobe Stock

Gomo de laranja.

As imagens não estão representadas em proporção.

Uma esfera está inscrita em um cone circular reto quando tangencia a base e todas as geratrizes do cone. Nessa situação, dizemos que o cone circunscreve a esfera.

- Esfera inscrita em um cone circular reto com medidas da altura h, da geratriz g e do raio da base R.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

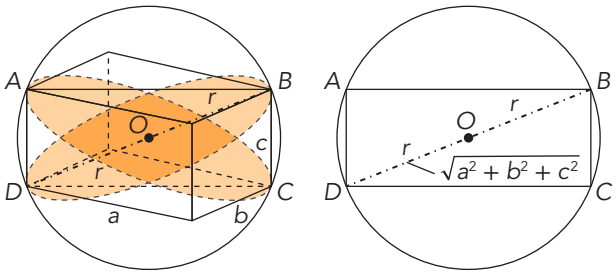
Como são retângulos e apresentam o ângulo em A em comum, os triângulos AEO e ADC são semelhantes. Assim, $\frac{AO}{AC} = \frac{OE}{CD} \Rightarrow \frac{h-r}{g} = \frac{r}{R} \Rightarrow r = \frac{Rh}{g+R}$.

Esfera circunscrita a outro sólido geométrico

Uma esfera está circunscrita a um poliedro se todos os vértices do poliedro pertencem à superfície da esfera. Nessa situação, dizemos que o poliedro está inscrito na esfera.

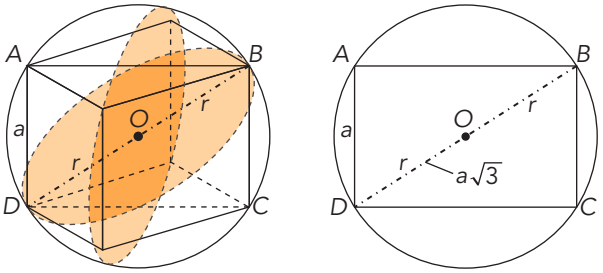
- Esfera circunscrita a um paralelepípedo reto-retângulo de arestas medindo a, b e c.

  Como o diâmetro da esfera tem a mesma medida da diagonal do paralelepípedo reto-retângulo, temos $2r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



- Esfera circunscrita a um cubo de aresta medindo a.

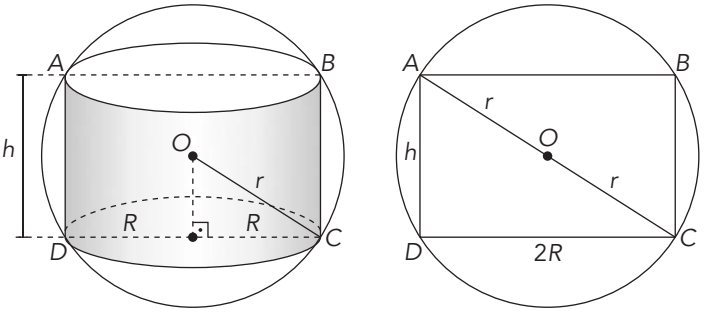
  Como a esfera circunscreve o cubo, o diâmetro dela tem a mesma medida da diagonal do cubo. Assim, $2r = a\sqrt{3}$ e $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Uma esfera está circunscrita a um cilindro circular reto se as circunferências das bases estão contidas na superfície da esfera. Nessa situação, dizemos que o cilindro está inscrito na esfera.

- Esfera circunscrita a um cilindro circular reto com medidas da altura h e do raio da base R.



40. Calculamos inicialmente a medida de área da superfície cilíndrica da embalagem.
$A_{embalagem} = 2\pi R(R + h) \simeq 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (2 + 4) = 72$
Como serão 100 embalagens, temos, aproximadamente, $100 \cdot 72\ cm^2 = 7200\ cm^2$. Isso equivale a $0{,}72\ m^2$.
Logo, o custo será de, aproximadamente, $0{,}72 \cdot$ R$ 150,00 = R$ 108,00.

Como a esfera circunscreve o cilindro circular reto, o diâmetro dela tem a mesma medida da diagonal da secção meridiana do cilindro.

Assim, no triângulo ADC temos a relação:

$$(2r)^2 = h^2 + (2R)^2$$

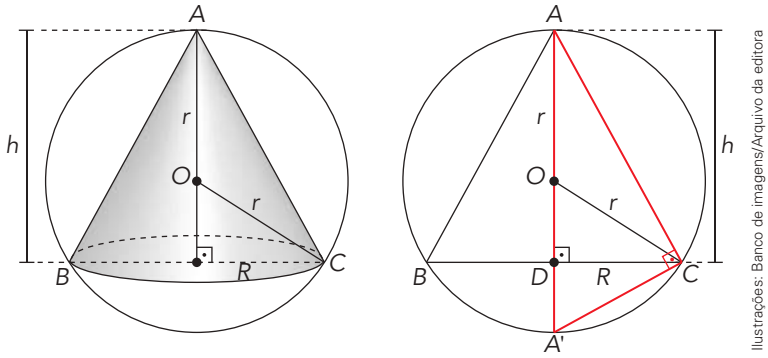
Uma esfera está circunscrita a um cone circular reto se o vértice e a circunferência da base estão contidos na superfície da esfera. Nessa situação, dizemos que o cone está inscrito na esfera.

- Esfera circunscrita a um cone circular reto com medidas da altura h e do raio da base R.

Como a esfera circunscreve o cone circular reto, a secção meridiana do cone está inscrita em uma circunferência de raio medindo r, como mostra a figura. Prolongando a altura a partir do vértice A, obtemos, na circunferência, o ponto A', que determina, com os pontos A e C, um triângulo retângulo em C.

Assim, temos a relação:

$$R^2 = h(2r - h)$$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto

Pense nisto: O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

A partir das figuras anteriores, qual é a propriedade do triângulo retângulo que justifica a relação apresentada?

Professor, se julgar necessário, relembre com os estudantes a propriedade: todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo.

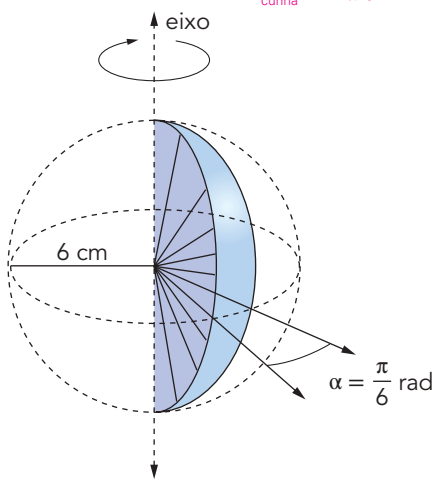
ATIVIDADES

As imagens não estão representadas em proporção.

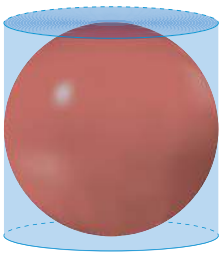
Não escreva no livro

39. Calcule, no caderno, as medidas de área total e de volume da cunha. $A_{cunha} = 48\pi\ cm^2$; $V_{cunha} = 24\pi\ cm^3$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

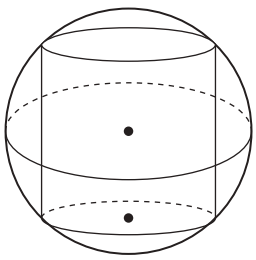


40. Um objeto de decoração com formato esférico e raio medindo 2 cm é vendido em embalagem plástica, transparente e cilíndrica, como mostra a imagem a seguir.


Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que a embalagem circunscreve a bola e o preço por metro quadrado do plástico usado em sua produção é R$ 150,00, calcule, no caderno, o custo da produção da superfície total de 100 dessas embalagens. Adote 3 como a aproximação de π.

41. Na figura, o cilindro equilátero de raio medindo 3 cm está inscrito em uma esfera. Calcule, no caderno, a medida de área da superfície da esfera.


Banco de imagens/Arquivo da editora

41. Como o cilindro é equilátero, o raio mede 3 cm e a altura mede 6 cm.
Dado que a esfera está circunscrita ao cilindro, a medida do raio dela é obtido pela aplicação do teorema de Pitágoras:
$(2R)^2 = h^2 + (2r)^2 \Rightarrow 4R^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$
Logo, a medida de área da superfície da esfera, em cm^2, é: $A = 4\pi \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 72\pi \Rightarrow A = 72\pi$.

VIRALIZE!

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Arte, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

Eu identifico formas geométricas... de diferentes maneiras!

O ser humano tem, definitivamente, uma relação diferente das demais espécies com as quais compartilha o mundo. Algumas dessas relações estão baseadas em habilidades que ganhamos conforme fomos evoluindo, como é o caso das linguagens. Estas foram desenvolvidas inclusive em resposta a como a humanidade percebe o mundo.

Além da fala, composta de uma infinidade de palavras em muitos idiomas diferentes, desenvolvemos também a escrita. Assim, podemos nos comunicar e transmitir aos que estão próximos e aos que estão distantes informações e impressões.

Leia o trecho a seguir, sobre um experimento envolvendo linguagem e Geometria.

Carrossel de imagens

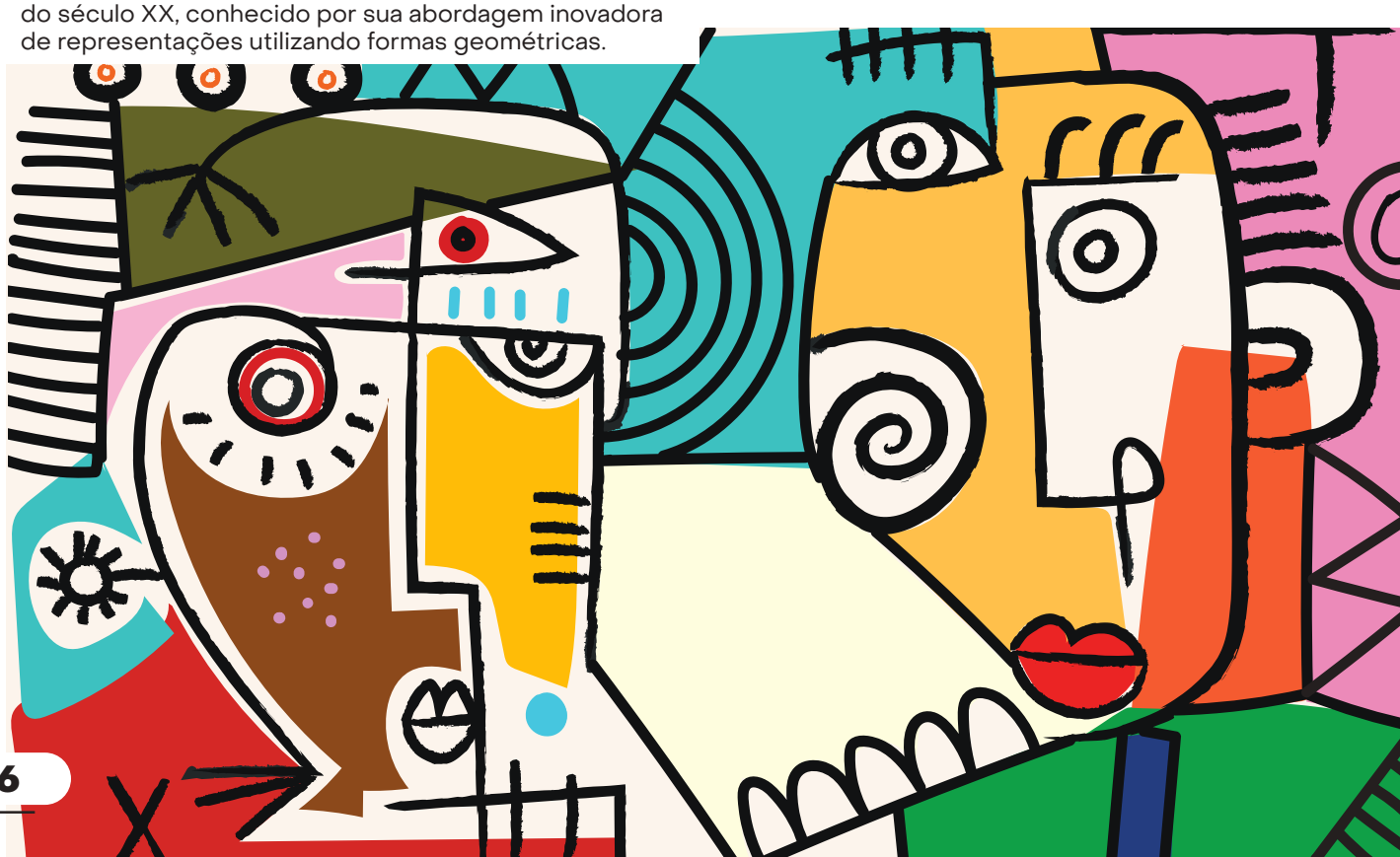
Reconhecer formas geométricas pode ser singularidade do ser humano

Os humanos podem ter uma capacidade inata de distinguir formas geométricas que os [tornaria] únicos em relação a outros primatas, de acordo com um estudo realizado por pesquisadores em neurociência.

Desde a mais antiga gravura atribuída ao *Homo sapiens* – linhas paralelas que datam de 73 000 anos atrás – às casas que as crianças modernas desenham em tenra idade, o gosto pelas formas geométricas regulares é universal entre os humanos.

Isso indica que os humanos possuem uma "linguagem de pensamento" simbólica, sem dúvida única em seu gênero [...].

O Cubismo é um movimento artístico que surgiu no início do século XX, conhecido por sua abordagem inovadora de representações utilizando formas geométricas.



Suryadi suyamtina/Shutterstock

Uma equipe de pesquisadores [...] conduziu um experimento mostrando "que as intuições sobre geometria estão presentes em humanos, mas ausentes em babuínos" [...].

O experimento consiste em "encontrar o intruso" entre seis formas geométricas simples – quadriláteros –, entre as quais apenas uma apresenta uma irregularidade, como um lado um pouco mais comprido, um erro de paralelismo ou ângulo diferente.

[...] é mais difícil detectar o intruso quando a forma é [...] [uma figura] sem ângulos retos nem lados idênticos ou paralelos.

Normalmente, o ser humano submetido ao experimento quase sempre encontra o intruso entre os quadrados. [...]

[Os] babuínos foram treinados para este jogo [e os] resultados foram excelentes com imagens não geométricas, como uma cereja vermelha destacando-se no meio de fatias de melancia. Mas assim que mudaram para formas geométricas, "o desempenho despencou", de acordo com o estudo.

[...]

RECONHECER formas geométricas pode ser singularidade do ser humano. *Tilt UOL*, São Paulo, 9 maio 2021. Disponível em: https://tedit.net/ufumcp. Acesso em: 20 ago. 2024.

1. Liste formas geométricas que você pode identificar ao seu redor, considerando objetos e suas partes. Em seguida, descreva como o tato pode ser usado para reconhecer essas formas geométricas. Resposta pessoal.

2. **Troque ideias** com seus colegas sobre como as texturas e relevos ajudam na identificação tátil das formas geométricas. Resposta pessoal.

3. Faça uma pesquisa de artistas que usaram a Geometria para compor obras de arte de maneira consciente e proposital. Essa pesquisa deve conter uma pequena biografia de cada artista que justifique o propósito do uso das formas. Inclua na pesquisa artistas que trabalham com arte acessível para pessoas com deficiência visual, explorando como eles utilizam a Geometria em suas obras.
A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.



PARA FUNDAMENTAR SABERES

As imagens não estão representadas em proporção.

1. **(EsPCEx-SP)** Sobre os conceitos de Geometria Espacial de Posição, analise as proposições a seguir.

I. Se dois planos são secantes, então qualquer reta de um deles é concorrente ao outro.

II. Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a infinitas retas desse plano.

III. Se dois planos têm uma única reta em comum, eles são secantes.

IV. Duas retas perpendiculares a uma terceira são perpendiculares entre si.

V. Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.

Sobre essas proposições, é correto afirmar que: Alternativa **a**.

a) apenas a **II** e a **III** são verdadeiras.

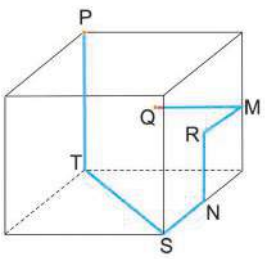
b) apenas a **II**, a **III** e a **IV** são verdadeiras.

c) apenas a **I** e a **IV** são falsas.

d) apenas a **IV** e a **V** são falsas.

e) todas são verdadeiras.

2. **(Famema-SP)** A figura indica o projeto da linha de um conduíte (linha azul) que será instalado em um galpão cúbico de aresta 8 m. O caminho da linha inicia em *P*, que é um dos vértices superiores do galpão, e termina em *Q*, que fica no centro de uma das faces laterais do galpão. Ainda em relação ao projeto, $\overline{TS}$ localiza-se na diagonal do chão do galpão, *N* e *M* são pontos médios das arestas do galpão a que pertencem, e *R* é centro de uma face lateral do galpão.



Reprodução/Famema, 2024.

A extensão total da linha de conduíte que será instalada nesse galpão, em metros, é um número entre: Alternativa **a**.

a) 35,1 e 35,4.

b) 35,4 e 35,7.

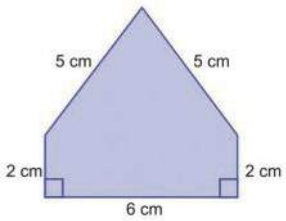
c) 35,7 e 36.

d) 36 e 36,3.

e) 36,3 e 36,6.

3. **(UEA-AM)** Um prisma reto tem por base um pentágono com dois ângulos retos, conforme mostra a figura 1.

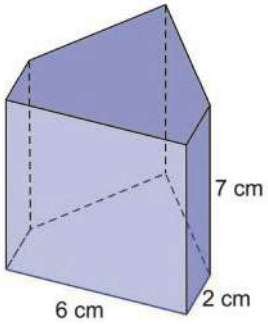
FIGURA 1



Reprodução/UEA-AM, 2023.

O volume desse prisma é igual a 168 cm^3 e a figura **2** mostra uma vista desse prisma quando está apoiado sobre um dos pentágonos.

FIGURA 2



Reprodução/UEA-AM, 2023.

A área total desse prisma é:

a) 140 cm^2.

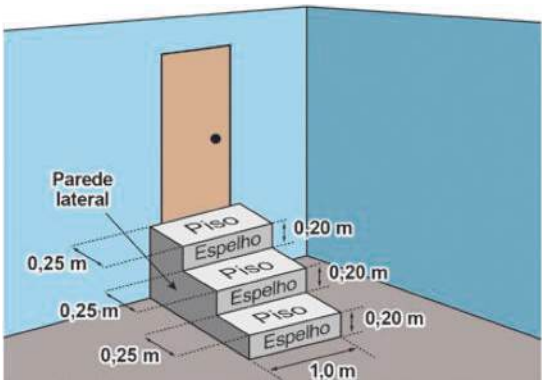
b) 164 cm^2.

c) 188 cm^2.

d) 212 cm^2.

e) 236 cm^2.

4. **(Enem)** A figura representa uma escada com três degraus, construída em concreto maciço, com suas medidas especificadas.



Reprodução/Enem, 2023.

Nessa escada, pisos e espelhos têm formato retangular, e as paredes laterais têm formato de um polígono cujos lados adjacentes são

3. A medida da área da base, em cm^2, é dada por: $A_b \cdot h = 168 \Rightarrow A_b \cdot 7 = 168 \Rightarrow A_b = 24$.
A medida da área total do prisma é igual à soma das medidas das áreas das bases com as medidas das áreas de todas as faces laterais: $A_t = 2 \cdot (24\ \text{cm}^2) + (5 + 5 + 2 + 2 + 6)\ \text{cm}^2 = 188\ \text{cm}^2$.
Alternativa **c**.

perpendiculares. Pisos, espelhos e paredes laterais serão revestidos em cerâmica.

A área a ser revestida em cerâmica, em metro quadrado, mede: Alternativa **e**.

a) 1,20.
b) 1,35.
c) 1,65.
d) 1,80.
e) 1,95.

5. (Enem) A água utilizada pelos 75 moradores de um vilarejo provém de um reservatório de formato cilíndrico circular reto cujo raio da base mede 5 metros, sempre abastecido no primeiro dia de cada mês por caminhões-pipa. Cada morador desse vilarejo consome, em média, 200 litros de água por dia.

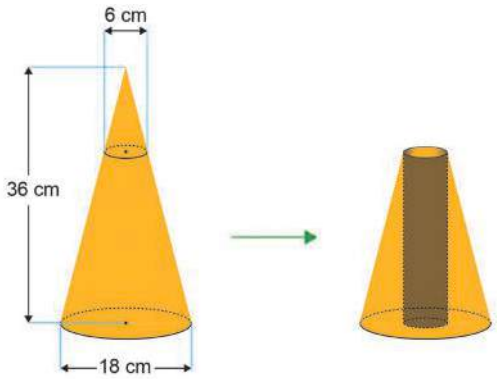
No mês de junho de um determinado ano, o vilarejo festejou o dia do seu padroeiro e houve um gasto extra de água nos primeiros 20 dias. Passado esse período, as pessoas verificaram a quantidade de água presente no reservatório e constataram que o nível da coluna de água estava em 1,5 metro. Decidiram, então, fazer um racionamento de água durante os 10 dias seguintes. Considere 3 como aproximação para π.

Qual é a quantidade mínima de água, em litro, que cada morador, em média, deverá economizar por dia, de modo que o reservatório não fique sem água nos próximos 10 dias?

Alternativa **a**.

a) 50
b) 60
c) 80
d) 140
e) 150

6. (Enem) Um artista plástico esculpe uma escultura a partir de um bloco de madeira de lei, em etapas. Inicialmente, esculpe um cone reto com 36 cm de altura e diâmetro da base medindo 18 cm. Em seguida, remove desse cone um cone menor, cujo diâmetro da base mede 6 cm, obtendo, assim, um tronco de cone, conforme ilustrado na figura.



Reprodução/Enem, 2023.

Em seguida, perfura esse tronco de cone, removendo um cilindro reto, de diâmetro 6 cm, cujo eixo de simetria é o mesmo do cone original. Dessa forma, ao final, a escultura tem a forma de um tronco de cone com uma perfuração cilíndrica de base a base.

O tipo de madeira utilizada para produzir essa escultura tem massa igual a 0,6 g por centímetro cúbico de volume. Utilize 3 como aproximação para π.

Qual é a massa, em grama, dessa escultura?

Alternativa **b**.

a) 1198,8
b) 1296,0
c) 1360,8
d) 4 665,6
e) 4 860,0

Nesta Unidade, estudamos noções de Geometria espacial de posição, poliedros (prismas e pirâmides) e corpos redondos (cilindros, cones e esferas). Respostas pessoais.

1. Resolvo problemas que envolvam medidas de áreas ou de volumes dos principais poliedros e dos corpos redondos?
2. A comparação entre as linhas imaginárias do nosso planeta, estudadas em Geografia, com os elementos de uma esfera facilitou a compreensão de novos conceitos? Dê um exemplo.
3. Reconheço a importância do princípio de Cavalieri para determinação de volume dos principais sólidos geométricos?
4. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
5. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas, exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

IM Imagery/Shutterstock



O Instituto Butantan, em parceria com o Ministério da Saúde, é o maior produtor de vacinas no Brasil.

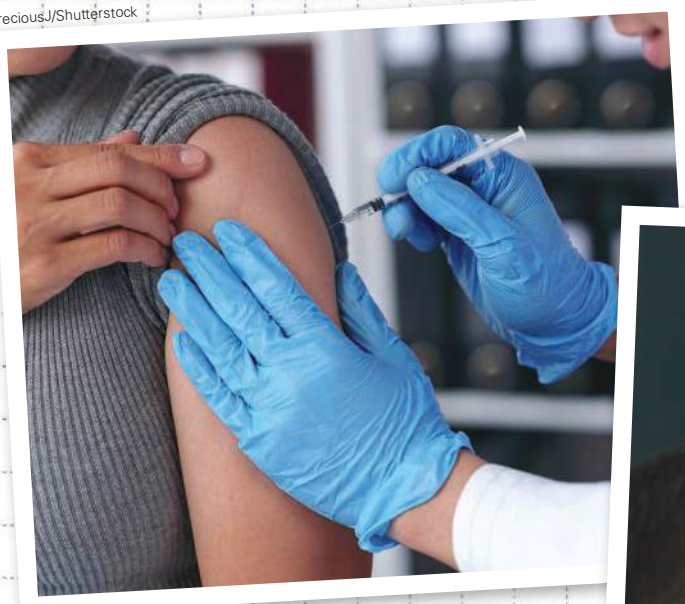
As imagens não estão representadas em proporção.

PeopleImages.com - Yuri A/Shutterstock



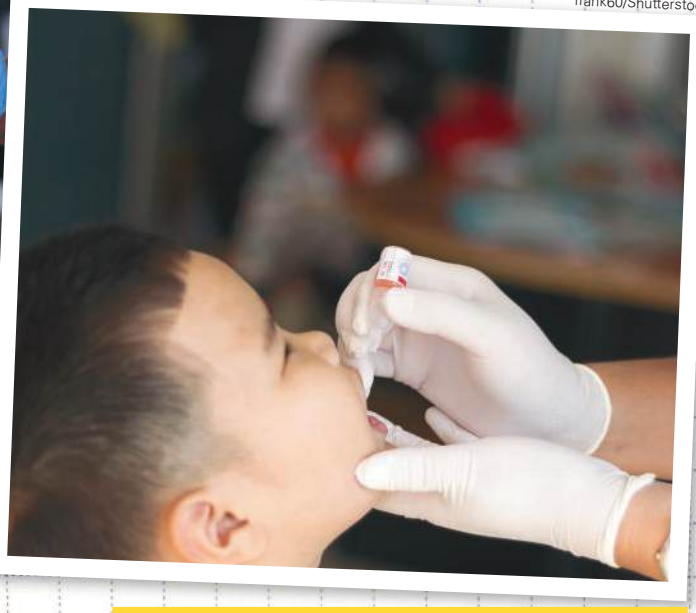
O calendário de vacinação é definido pelo Ministério da Saúde e há indicações de vacinas desde o nascimento.

PreciousJ/Shutterstock



As vacinas indicadas a cada fase da vida são definidas de acordo com a frequência de contaminação da doença, os riscos de seu contágio, entre outras condições.

frank60/Shutterstock



Nem todas as vacinas são injetáveis; a vacina do rotavirus, por exemplo, é administrada por via oral.

Unidade

4 ANÁLISE DE MEDIDAS E REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Saúde*, *Direitos da Criança e do Adolescente* e *Vida Familiar e Social*.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.



Reprodução/ONU

Cobertura vacinal no Brasil

A vacinação é essencial para prevenir doenças e garantir a saúde de crianças e adolescentes. O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA) assegura a vacinação como um direito fundamental, obrigando o poder público, os pais ou responsáveis e a comunidade a garantir que as crianças recebam todas as vacinas recomendadas pelo Programa Nacional de Imunizações (PNI). A recusa injustificada pode ser considerada negligência e violação do direito à saúde.

No entanto, a adesão à imunização infantil no Brasil caiu drasticamente nos anos anteriores a 2023, atingindo um dos índices de coberturas vacinais mais baixos da história desde a criação do PNI. Um exemplo é a cobertura vacinal da poliomielite, que caiu de 95% para menos de 60% em algumas unidades da Federação. A queda no percentual de cobertura vacinal traz vários perigos para a saúde pública, como o ressurgimento de doenças erradicadas e o desenvolvimento de novas variantes de vírus.

Um dos fatores que influenciam essa queda na cobertura vacinal é o impacto da globalização e do acesso ao meio digital. Nesse contexto, notícias começaram a ser espalhadas sem a devida verificação, resultando na disseminação de *fake news* que alcançam uma grande parcela da população. A disseminação dessas informações enganosas impactou negativamente a adesão às vacinas, mesmo com 90% da população acreditando na eficácia delas, de acordo com a pesquisa Ibope Inteligência realizada em agosto de 2020.

Portanto, é fundamental reafirmar informações corretas sobre vacinas e divulgar dados verdadeiros para combater as *fake news* e incentivar a vacinação infantil.

Fonte dos dados: MINISTÉRIO DA SAÚDE. Cobertura de 13 das 16 vacinas do calendário infantil apresentou alta em 2023. Portal *gov.br*, Brasília, DF, 2 ago. 2024. Disponível em: https://tedit.net/dql85p; SÁ, Mariana Oliveira de; ALMEIDA, Letícia Morais de; MORAIS, Isabela Lima de. Vacinação e fake news. *Unicef Brasil*, 4 maio 2023. Disponível em: https://tedit.net/8i7dft. Acesso em: 6 set. 2024.

Não escreva no livro

1. A cobertura vacinal é um indicador importante para a saúde pública, pois reflete a proporção da população que foi imunizada contra doenças infecciosas. Quais são as consequências da diminuição da cobertura vacinal de crianças?
2. O debate sobre vacinação envolve múltiplas perspectivas, desde temas sobre a ciência e a saúde pública até questões éticas e sociais. Quais são as consequências do anticientificismo para a saúde pública e como ele pode ser combatido?
3. Como a ciência fundamenta a eficácia e a segurança das vacinas?

Os exemplos de resposta encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

capítulo 8

Medidas em Estatística

Medidas de posição e dispersão dos dados

Ao analisar um conjunto de dados estatísticos, como o conjunto das idades de cada um dos 513 deputados federais brasileiros, as medidas resumo oferecem uma visão clara da distribuição etária. A **média** das idades indica a idade média dos parlamentares, enquanto a **mediana** revela a idade central na amostra. Além disso, as **medidas de dispersão** mostram a variação etária entre os membros. Essas informações ajudam a entender a composição etária do Senado e a identificar possíveis padrões ou desigualdades considerando a faixa etária dos representantes.

A partir dos exemplos anteriores, considere 2 tipos de medidas.

- **Medidas de posição** (ou de **tendência central** ou de **centralidade**): referem-se a determinado valor que se encontra no intervalo entre os valores mínimo e máximo do conjunto. Vamos estudar 3 medidas de posição: a **média**, a **mediana** e a **moda**.
- **Medidas de dispersão** (ou de **variabilidade**): de modo geral, essas medidas indicam se, em uma relação de valores assumidos por uma variável, os valores estão concentrados (menos dispersos, menos espalhados) ou não (mais dispersos, mais espalhados) em torno de um valor central (geralmente a média). As medidas de dispersão permitem comparar distribuições de dados quanto ao grau de homogeneidade, indicando em qual delas há maior (ou menor) variabilidade, isto é, em qual das distribuições os dados variam mais (ou menos). Vamos estudar 3 medidas de dispersão: a **amplitude**, a **variância** e o **desvio padrão**.

Para simplificar a notação que será usada neste capítulo, vamos introduzir um importante símbolo da linguagem matemática: o somatório, indicado pela letra grega maiúscula $\sum$ (lê-se: "sigma"). Ele representa aqui a soma de um número finito de parcelas que têm alguma característica comum. Acompanhe o exemplo a seguir.

O símbolo $\sum_{i=1}^{4} i^2$ (lê-se: "somatório (ou soma) de i^2, para i variando de 1 até 4") significa que devemos atribuir para i, sucessivamente, os valores 1, 2, 3 e 4; calcular os respectivos valores numéricos da expressão i^2 e adicionar os valores calculados, isto é:

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = \underbrace{1^2}_{i=1} + \underbrace{2^2}_{i=2} + \underbrace{3^2}_{i=3} + \underbrace{4^2}_{i=4} = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Caso julgue pertinente, comente com os estudantes que é comum no dia a dia ouvirmos a expressão "cabine de votação" para se referir ao local onde está a urna eletrônica em que as pessoas votam, porém a Justiça Eleitoral utiliza o termo "cabina de votação". Contudo, "cabine" e "cabina" são palavras sinônimas.

As pesquisas eleitorais

No Brasil, ocorrem eleições a cada 2 anos, e, em decorrência dessa regularidade, os brasileiros se habituaram a acompanhar pela mídia as pesquisas eleitorais, encomendadas a institutos especializados, no período de eleições.

Para colher as informações necessárias, usam-se amostras e, a partir dos resultados obtidos na amostra, características de todos os eleitores são estimadas, fazendo uso dos conceitos de **margem de erro** e do **nível de confiança**.

O conceito de margem de erro é mais popular. Por exemplo, dizer que a "intenção de voto para o candidato **X** é de 30% com uma margem de erro de 2,5 pontos percentuais" significa dizer que o intervalo [30 − 2,5; 30 + 2,5] = [27,5; 32,5] provavelmente contém a verdadeira proporção de eleitores do candidato **X** em toda a população.

Já o nível de confiança apresenta a probabilidade de a real proporção de eleitores estar dentro da margem de erro apresentada. Dizer que o nível de confiança é de 95%, por exemplo, significa que os métodos empregados para essa pesquisa geram um resultado em que a real porcentagem de eleitores estaria contida 95% das vezes. Ou seja, há uma chance de 5% de o resultado real das eleições não refletir os valores apresentados na pesquisa.

Assim, quando dispomos de uma informação como "o candidato **X** atingiu 30% das intenções de voto, em uma pesquisa cuja margem de erro é de 2,5 pontos percentuais, com nível de 95% de confiança", é importante ter em mente que em 95% das vezes o intervalo [27,5; 32,5] contém o verdadeiro percentual de eleitores do candidato **X** e, em 5%, não. Abre-se, desse modo, a possibilidade de um erro estatístico, inerente à natureza da pesquisa eleitoral.



Isaac Fontana/Shutterstock

Cabina de votação com urna eletrônica, dispositivo que armazena as escolhas dos eleitores e agiliza o processo de apuração dos votos.

Mapa clicável

Fonte dos dados: CINTRA, Antônio Octávio; AMORIM, Miriam Campelo de Melo. *Erro em pesquisa eleitoral*. Brasília, DF: Câmara dos Deputados, 2004. Disponível em: https://tedit.net/oe7vdw. Acesso em: 29 ago. 2024; BUSSAB, O. W.; MORETTIN, P. A. *Estatística básica*. São Paulo: Saraiva, 2004.

1. Os mandatos dos cargos eletivos no Brasil, com exceção dos senadores, têm duração de 4 anos. As eleições ocorrem a cada 2 anos, intercaladas entre as eleições federais e estaduais, e as eleições municipais. Quais são os cargos eletivos disputados em cada uma dessas eleições?

2. Busque pelos resultados de uma pesquisa eleitoral e verifique se ela apresenta a margem de erro e o nível de confiança. Analisando os valores apresentados, você diria que é uma pesquisa confiável? Justifique.

1. Eleições federais: presidente, senadores e deputados federais; eleições estaduais: governadores e deputados estaduais; eleições municipais: prefeitos e vereadores.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que uma pesquisa com alto nível de confiança e baixa margem de erro seja uma pesquisa confiável e justifiquem suas respostas usando esses números.

Medidas de posição (ou centralidade)

Média aritmética

Vamos começar com a definição do conceito de média aritmética.

Sejam n um número natural não nulo e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a relação dos valores assumidos por determinada variável quantitativa X. Definimos **média aritmética** (indica-se por $\bar{x}$) como a razão entre a soma de todos esses valores e o número total de valores:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Usando o símbolo de somatório para representar o numerador dessa expressão, escrevemos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ao calcular a média de uma relação de valores assumidos por uma variável, obtemos um número real que pode ou não coincidir com algum dos valores assumidos pela variável. Entretanto, a média pertence ao intervalo do menor ao maior valor da relação.

Atividades resolvidas

1. Para avaliar o desempenho escolar de um estudante do Ensino Médio, analisaremos as notas dele em 8 atividades avaliativas durante um semestre do ano letivo:

7,5 6,0 4,2 3,9 4,8 6,2 8,0 5,4

Calcule a média aritmética. O que representa o resultado obtido? Considerando que a média para aprovação no semestre nessa escola seja 5, qual é a situação desse estudante?

Solução:
O cálculo é dado por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \frac{7{,}5 + 6{,}0 + 4{,}2 + 3{,}9 + 4{,}8 + 6{,}2 + 8{,}0 + 5{,}4}{8} = \frac{46}{8} = 5{,}75$$

A média aritmética dessas notas é 5,75. Esse resultado equivale a indicar que o estudante obteve 5,75 em todas as 8 atividades avaliativas. Portanto, em um panorama geral, o estudante estaria aprovado no semestre. Contudo, ainda há pontos de atenção: em 3 das 8 atividades avaliativas ele não teve nota suficiente para a aprovação.

2. A média dos salários de 15 funcionários de uma loja de autopeças é R$ 1.800,00. Se forem contratados mais 2 funcionários, com salários de R$ 1.700,00 e R$ 1.730,00, qual será a nova média salarial da loja?

Pense nisto: Sim. Como a média salarial inicial é R$ 1.800,00, podemos admitir que, em média, cada funcionário tem salário de R$ 1.800,00. Como o salário de cada um dos novos funcionários é menor do que R$ 1.800,00, a nova média salarial também será menor – no cálculo da nova média, 2 das parcelas serão menores do que 1 800, fazendo com que essa razão seja menor do que a anterior.

Solução:

A média inicial $(\bar{x})$ dos salários é 1 800. Assim, temos:

$$1800 = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} \Rightarrow \sum_{i=1}^{15} x_i = 15 \cdot 1800 = 27000$$

Assim, antes das contratações, a soma de todos os salários dessa loja era R$ 27.000,00.

A soma dos salários, em reais, após a admissão dos 2 funcionários será:

$$\sum_{i=1}^{17} x_i = 27000 + 1700 + 1730 = 30430$$

Assim, a nova média $(\bar{x}')$ de salários, também em reais, será:

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^{17} x_i}{15 + 2} = \frac{30430}{17} = 1790$$

A nova média salarial passará a ser R$ 1.790,00.

Não escreva no livro

Pense nisto

Na atividade resolvida **2**, sem efetuar cálculo algum, é possível concluir que a nova média salarial é inferior à média salarial inicial? Explique.

Média aritmética ponderada

A **média aritmética ponderada** considera a importância de cada valor ao calcular o resultado final. Diferentemente da média simples, a média ponderada usa **pesos** para refletir a relevância de cada valor na média. Podemos calculá-la da seguinte maneira, sendo k um número natural não nulo e n_i o peso de x_i:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \ldots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i \cdot n_i)}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k}$$

Também podemos expressar $\bar{x}$ em termos da frequência relativa de cada x_i (com $i = 1, 2, \ldots, k$). Para tal, vamos utilizar a correspondência:

$$f_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

Assim, podemos escrever, convenientemente, a expressão obtida para $\bar{x}$:

$$x = x_1 \cdot \underbrace{\frac{n_1}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}}_{= f_1} + x_2 \cdot \underbrace{\frac{n_2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}}_{= f_2} + \ldots + x_k \cdot \underbrace{\frac{n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}}_{= f_k}$$

Desse modo, obtemos:

$$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_k \cdot f_k = \sum_{i=1}^{k} (x_i \cdot f_i)$$

1. $\bar{x} = \frac{36 \cdot 270 + (54 - 36) \cdot 360}{54} = 300$; ou seja, R$ 300,00.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. Em um edifício residencial com 54 apartamentos, 36 condôminos pagam taxa de condomínio de R$ 270,00; para os demais, essa taxa é de R$ 360,00. Qual é o valor da taxa média de condomínio nesse edifício?

2. A média aritmética de uma lista formada por 20 números é 12. Qual será a nova média aritmética se:

a) acrescentarmos o número 33 a essa lista? 13

b) retirarmos o número 50 dessa lista? 10

c) acrescentarmos o número 63 a essa lista e retirarmos o 51? 12,6

3. A tabela a seguir informa a quantidade de cartões amarelos distribuídos por um árbitro de futebol nos jogos por ele apitados durante uma temporada.

Distribuição de cartões amarelos

Número de cartões	0	1	2	3	4
Frequência absoluta	30	18	7	3	2

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Quantos jogos o árbitro apitou ao longo da temporada? 30 + 18 + 7 + 3 + 2 = 60; ou seja, 60 jogos.

b) Qual é o número médio de cartões amarelos distribuídos por partida?

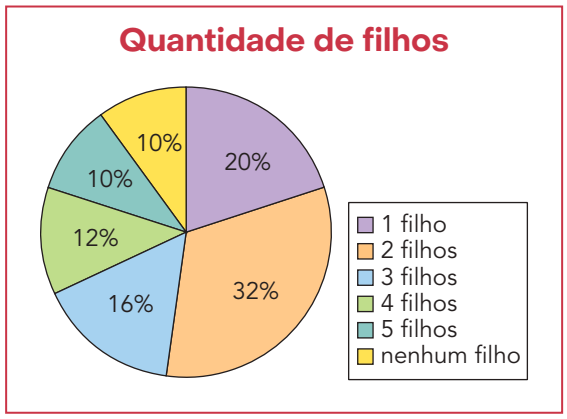
c) Se essa distribuição de dados fosse representada em um gráfico de setores, qual seria a medida do ângulo do setor correspondente aos jogos nos quais foi distribuído um único cartão?

c) A medida do ângulo central seria: $\frac{18}{60} \cdot 360° = 108°$.

4. Em um concurso público, cuja média de notas foi 74,5 (em 100 pontos possíveis), foram aprovados 80 candidatos. A média das 40 menores notas dos candidatos aprovados foi 67,0. Qual foi a média das 40 maiores notas dos candidatos aprovados? 82

5. Um professor calculou a média aritmética das notas dos 40 estudantes que submeteu a uma prova e obteve como resultado o valor 5,5. Ao devolver as provas, ele verificou que havia cometido um erro na nota de 2 provas. Na primeira prova, a nota correta era 9,5, em vez de 6,5, e, na segunda prova, a nota correta era 5,5, e não 3,5. Feita a correção, de quanto foi acrescida a média das notas? 0,125

6. Realizou-se uma pesquisa entre famílias de uma cidade para levantar informações sobre a quantidade de filhos. Foram entrevistadas 400 famílias, e os dados obtidos estão representados no gráfico de setores a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Quantas famílias da amostra têm 3 ou mais filhos? (16% + 12% + 10%) · 400 = = 0,38 · 400 = 152; ou seja, 152 famílias.

b) Qual é a média de filhos das famílias dessa amostra? $\bar{x} = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}32 + 3 \cdot 0{,}16 + 4 \cdot 0{,}12 + 5 \cdot 0{,}10 \Rightarrow \bar{x} = 0 + 0{,}2 + 0{,}64 + 0{,}48 + 0{,}48 + 0{,}50 = 2{,}3$; ou seja, 2,3 filhos por família.

7. Ao sair de um hotel na praia, os hóspedes são convidados a responder a um questionário de avaliação. No final, pede-se uma nota de 0 a 5 (em que 5 corresponde ao máximo de satisfação) para o hotel. Durante o 1º mês de uma temporada, os 2 000 questionários recebidos apontavam uma nota média de 3,9 para o hotel.

a) Qual é o número mínimo de questionários que devem ser respondidos no 2º mês para que a nota média de avaliação do hotel no bimestre passe a ser 4,6? 3 500 questionários.

b) É possível que a média do hotel passe a ser exatamente 5,0 no bimestre, considerando os formulários que serão preenchidos no 2º mês? Em caso afirmativo, determine o número mínimo de questionários a serem preenchidos. Não.

3. b) $\bar{x} = \frac{0 \cdot 30 + 1 \cdot 18 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{30 + 18 + 7 + 3 + 2} = \frac{49}{60} \simeq 0{,}82$; ou seja, aproximadamente 0,82 cartão por partida.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Financeira* e *Educação Fiscal.*

Taxas de inflação

Inflação é o nome dado ao aumento generalizado dos preços de produtos e serviços. O Brasil apresenta vários índices para medir a inflação, mas o índice oficial considerado pelo governo federal é o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). Calculado pelo IBGE, o IPCA é o índice que serve de referência para as metas de inflação e para as alterações na taxa básica de juro do Brasil.

O IPCA mede a variação de preços de uma lista de produtos e serviços consumidos pela população com renda de 1 a 40 salários mínimos. O resultado mostra se, de um mês para o outro, houve inflação (quando os preços, em média, aumentaram) ou deflação (quando os preços, em média, diminuíram).

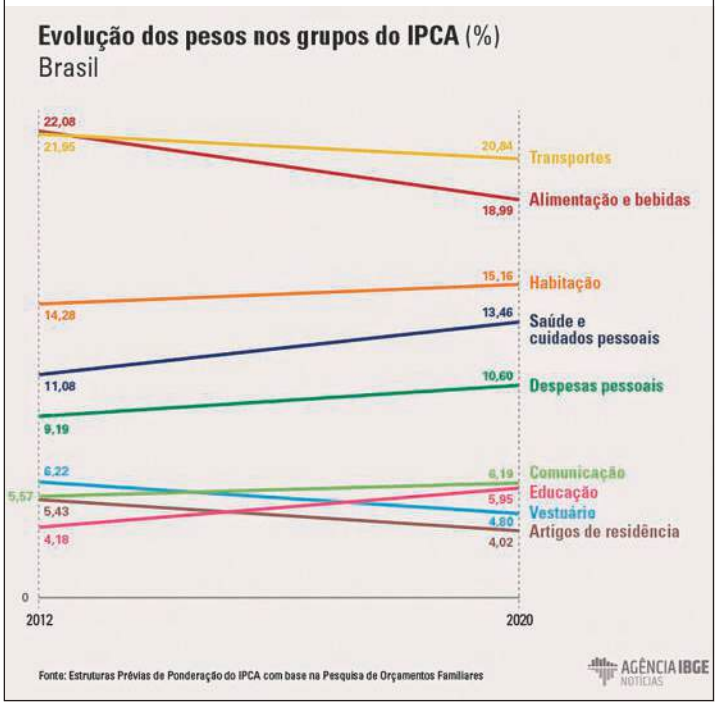
A lista é definida pela Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF), do IBGE, que verifica o que a população consome e quanto do rendimento familiar é gasto em cada produto: arroz, feijão, passagem de ônibus, material escolar, médico, cinema, entre outras despesas. Desse modo, o índice não considera apenas a variação de preço de cada item, mas também o peso que ele representa no orçamento das famílias.

Devido aos novos hábitos de consumo da população a partir de 2020, os produtos e serviços usados para medir o IPCA foram atualizados. Analise a seguir a lista de artigos residenciais.

Além disso, os pesos foram atualizados. Acompanhe no gráfico a evolução desses pesos em cada grupo do IPCA entre os anos de 2012 e 2020 (ano da mudança da cesta de produtos e serviços).

Artigos de residência

- ▲ Videogame (console)
- ▲ Conserto de aparelho celular
- ▲ Artigos de iluminação
- ▲ Utensílios para bebê
- ▲ Conserto de bicicleta
- ▼ Aparelho de DVD
- ▼ Conserto de aparelho de som
- ▼ Utensílios diversos
- ▼ Liquidificador
- ▼ Forno de micro-ondas
- ▼ Antena
- ▼ Manutenção de microcomputador



Fotos: Reprodução/IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

Dica

Novos hábitos de consumo alteram cálculo da inflação a partir de 2020

Nessa matéria você tem acesso à lista completa de produtos e serviços usados para medir o IPCA e que foram atualizados a partir de 2020. Disponível em: https://tedit.net/gc7xyt. Acesso em: 6 set. 2024.

Fonte dos dados: AGÊNCIA IBGE NOTÍCIAS. Novos hábitos de consumo alteram cálculo da inflação a partir de 2020. *Notícias*, IPCA. Disponível em: https://tedit.net/gc7xyt. Acesso em: 5 set. 2024.

Para determinar o índice, o IBGE faz um levantamento mensal de aproximadamente 430 mil preços em 30 mil locais distribuídos em 16 áreas urbanas do país. A saber: Rio Branco, São Luís, Aracaju, Campo Grande, Goiânia, Brasília, Belém, Fortaleza, Recife, Salvador, Belo Horizonte, Grande Vitória, Rio de Janeiro, São Paulo, Curitiba e Porto Alegre.

Após a coleta, todos esses preços são comparados com os preços do mês anterior, resultando em um único valor que reflete a variação geral de preços ao consumidor no período, o IPCA, que é obtido pelo cálculo da média aritmética ponderada. Acompanhe o exemplo a seguir.

A tabela exibe a variação mensal e o peso mensal do IPCA, de acordo com os grupos de produtos e serviços no Brasil, em maio de 2024.

Variação mensal e peso mensal do IPCA, em maio 2024

Índice geral e grupos de produtos e serviços	Variação mensal (em %)	Peso mensal (em %)
Índice geral	0,46	100,0000
Alimentação e bebidas	0,62	21,4858
Habitação	0,67	15,1591
Artigos de residência	–0,53	3,7165
Vestuário	0,5	4,6925
Transportes	0,44	20,5342
Saúde e cuidados pessoais	0,69	13,4649
Despesas pessoais	0,22	10,0915
Educação	0,09	6,0552
Comunicação	0,14	4,8004

Fonte dos dados: IBGE. *Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo – maio 2024.* Disponível em: https://tedit.net/7p0plb. Acesso em: 22 out. 2024.

Devido aos arredondamentos nos valores dos pesos, a soma de todas as porcentagens é 100,0001%.

Calculando a média ponderada dos valores na tabela, chegamos a aproximadamente 0,46%. Assim, o IPCA de maio de 2024 foi de aproximadamente 0,46%. Esse valor mostra que, em média, os preços de uma cesta de produtos e serviços consumida pela população com renda de 1 a 40 salários mínimos aumentou em 0,46%.

Fonte dos dados: AGÊNCIA IBGE NOTÍCIAS. Novos hábitos de consumo alteram cálculo da inflação a partir de 2020. *Notícias*, IPCA. Disponível em: https://tedit.net/gc7xyt. Acesso em: 5 set. 2024.

1. No *site* do IBGE – Inflação (disponível em: https://tedit.net/n48oou; acesso em: 18 out. 2024), é possível verificar algumas informações referentes à inflação no Brasil. Ao usar a Calculadora do IPCA, por exemplo, é possível verificar que o IPCA acumulado do ano de 2023 (janeiro de 2023 a janeiro de 2024) foi de 5,06%.

Suponha que um salário mensal de um familiar que mora com você continuou sendo, em 2024, o mesmo valor que recebia desde janeiro de 2023: R$ 2.000,00.

Procure no *site* indicado o significado de poder de compra e responda no caderno: o poder de compra do familiar que mora com você aumentou ou diminuiu em janeiro de 2024 em comparação com janeiro de 2023? Como houve inflação e o salário permaneceu o mesmo, o poder de compra diminuiu.

2. O que pode ser feito para que o poder de compra do salário mensal não diminua?

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes apontem o controle da inflação ou o reajuste salarial como soluções. Professor, caso queira saber mais sobre outros índices além do IPCA, leia a reportagem disponível em: https://tedit.net/hcuz0j (acesso em: 10 set. 2024).

Mediana

Considere o consumo mensal de energia elétrica, em quilowatt-hora (kWh), de uma residência nos 9 primeiros meses de um ano:

168 163 154 152 163 165 207 205 153

Calculando a média mensal de consumo, obtemos $\bar{x} = 170$; contudo, esse valor não representa o consumo dessa residência considerando a maior parte do ano. Em situações como essa, podemos usar outra medida de centralidade, a mediana. Vamos defini-la.

Sejam n um número natural não nulo e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os n valores assumidos por uma variável quantitativa X, em que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ (sequência não decrescente de dados). Define-se a **mediana** (Me) por meio da relação:

$$Me = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \text{ se } n \text{ for ímpar} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, \text{ se } n \text{ for par} \end{cases}$$

Observação

O conjunto de dados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em ordem não crescente ($x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$) ou não decrescente dos dados é chamado **rol**.

A definição garante que a mediana seja um valor central que divide o rol dos dados em 2 partes com a mesma quantidade de elementos em cada uma. Em uma das partes, todos os elementos são menores do que a mediana ou iguais a ela; na outra, todos os elementos são maiores do que a mediana ou iguais a ela.

Voltando à situação do consumo de energia elétrica, organizamos o rol de dados da seguinte maneira:

152 153 154 163 163 165 168 205 207

Assim, a mediana desses dados é 163 kWh.

Moda

A moda é a última medida de tendência central que estudaremos.

A **moda** (Mo) é o valor ou os valores que ocorrem com maior frequência em um conjunto de dados. Em outras palavras, é o valor mais repetido.

Note que nem sempre um conjunto de dados apresenta uma moda e eventualmente pode apresentar mais de uma. A identificação da ausência ou da multiplicidade desse indicador também é útil em uma análise de dados.

Considerando a situação anterior sobre o consumo mensal de energia elétrica, a moda dos dados apresentados é 163 kWh.

Observação

Média, mediana e moda são as 3 medidas de posição (tendência central) mais usuais que podem ser associadas a uma relação de dados. Cada uma delas apresenta interpretação e significado próprios. Dependendo da natureza dos dados, uma ou outra dessas medidas pode ser mais adequada para representá-los quantitativamente. Entretanto, a análise se torna mais completa quando conhecemos os valores das 3 medidas.

Atividades resolvidas

4. O controle de qualidade de uma indústria forneceu as quantidades de peças defeituosas encontradas em 10 lotes (cada lote é composto de 100 unidades):

6 4 9 6 3 8 1 4 5 6

Determine a mediana do número de peças defeituosas.

Solução:

Ordenando os valores:

Determinamos o rol desse conjunto de dados:

1, 3, 4, 4, **5**, **6**, 6, 6, 8, 9 ✱

Como $n = 10$ é par, pela definição a mediana será dada pela média aritmética entre $x_{\frac{10}{2}} = x_5$ e $x_{\frac{10}{2}+1} = x_6$ de ✱, isto é, entre o 5º e o 6º valor do rol. Logo:

$$Me = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{5 + 6}{2} = 5{,}5$$

Note que em ✱, há 5 valores menores do que 5,5 (1, 3, 4, 4, 5) e 5 valores maiores do que 5,5 (6, 6, 6, 8, 9).

5. Vamos encontrar a moda das seguintes relações de valores:

a) 5, 8, 11, 8, 3, 4, 8

b) 2, 3, 9, 3, 4, 2, 6

c) 1, 3, 4, 6, 9, 11, 2

Solução:

a) A moda é $Mo = 8$, pois há 3 valores iguais a 8.

b) Há 2 modas: 2 e 3. Dizemos, então, que se trata de uma distribuição de frequências **bimodal**.

c) Nesse caso, todos os valores aparecem com a mesma frequência unitária. Assim, não há moda nessa distribuição.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

8. Calcule, no caderno, a média $(\bar{x})$, a mediana (*Me*) e a moda (*Mo*), caso exista, para cada relação de valores.

a) 2 2 3 3 3 4 4 4 4 $\bar{x} = 3{,}\overline{2}$; $Me = 3$; $Mo = 4$.

b) 16 18 18 17 19 18 $\bar{x} = 17{,}\overline{6}$; $Me = 18$; $Mo = 18$.

c) 1 5 3 2 4 $\bar{x} = 3$; $Me = 3$; não há moda.

d) 11 8 15 19 6 15 13 21 $\bar{x} = 13{,}5$; $Me = 14$; $Mo = 15$.

e) 44 43 42 43 45 44 40 41 49 46 $\bar{x} = 43{,}7$; $Me = 43{,}5$; as modas são 43 e 44 (rol bimodal).

9. Uma empresa paga, anualmente, um bônus de fim de ano aos funcionários. Neste ano, a empresa já pagou bônus a 40 dos 50 funcionários, como mostra a tabela a seguir.

Bônus de fim de ano

Quantidade de funcionários	Valor do bônus (em reais)
8	300
14	600
18	1000

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Qual é a moda dos valores já pagos de bônus pela empresa? R$ 1.000,00.

b) Qual é a mediana dos valores já pagos de bônus pela empresa?

c) Sabe-se que os 10 funcionários restantes receberão bônus de R$ 600,00 ou R$ 1.000,00. Qual é a quantidade de funcionários que devem receber bônus de R$ 600,00 para que a mediana dos 50 valores seja R$ 800,00?

10. Os dados a seguir estão apresentados em ordem crescente e referem-se à medida de intervalo de tempo de espera (em minutos) de 10 pessoas que foram atendidas em um posto de saúde durante uma manhã.

1 5 8 9 x 16 18 y 23 26

Sabendo que a medida de intervalo de tempo médio de espera foi de 14 minutos e a medida de intervalo de tempo mediano foi de 15 minutos, determine, no caderno, os valores de x e de y. $x = 14$; $y = 20$.

11. O Produto Interno Bruto (PIB) de um país é a soma de todos os bens e serviços finais produzidos por um país, estado ou cidade, geralmente no período de 1 ano. Na tabela seguinte, constam os valores dos 10 maiores PIBs das unidades federativas do Brasil em 2021.

9. c) Com $n = 50$ valores, a mediana é calculada fazendo-se a média entre o 25º e o 26º valor. Para que a mediana resulte R$ 800,00, é preciso que o 25º valor seja R$ 600,00 e o 26º valor seja R$ 1.000,00. Como o 22º valor da relação apresentada na tabela é 600, devemos acrescentar exatamente 3 valores iguais a 600. Assim, dos 10 funcionários restantes, 3 devem receber bônus de R$ 600,00 e 7 devem receber bônus de R$ 1.000,00.

9. b) Como $n = 40$ valores, a mediana é a média entre o 20º e o 21º valor do rol. Logo, $Me = \frac{600 + 600}{2} = 600$; ou seja, $Me =$ R$ 600,00.

11. a) $\bar{x}$ = 725 856,8; ou seja, 725 856,8 milhões de reais; *Me* = 489 272; ou seja, 489 272 milhões de reais. Como há um valor muito maior do que os outros no rol, a mediana acaba sendo o melhor indicador geral. Espera-se que ela seja o valor escolhido. Note que a média obtida é maior do que 7 dos 10 PIBs mencionados.

Não escreva no livro

10 maiores PIBs das unidades federativas do Brasil

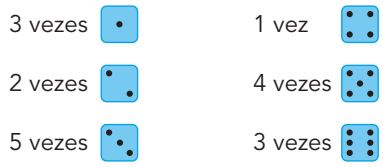
Unidades da Federação	PIB em 2021 (em milhões de reais)
São Paulo	2 719 751
Rio de Janeiro	949 301
Minas Gerais	857 593
Rio Grande do Sul	581 284
Paraná	549 973
Santa Catarina	428 571
Bahia	352 618
Distrito Federal	286 944
Goiás	269 628
Pará	262 905

Fonte dos dados: IBGE. O que é o PIB. Disponível em: https://tedit.net/gxe8o6. Acesso em: 30 ago. 2024.

a) Determine, no caderno, a média e a mediana dos dados apresentados. Em seguida, responda à pergunta: Qual dessas medidas você usaria para representar um panorama geral associado a esse rol? Justifique.

b) Qual das unidades da Federação deveríamos retirar do cálculo para que o PIB médio e o PIB mediano representem bem os dados apresentados? Faça os cálculos necessários. São Paulo.

12. Um dado foi lançado 18 vezes consecutivas, e os resultados obtidos estão indicados a seguir.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) Calcule no caderno a média, a mediana e a moda da distribuição de frequências das faces obtidas nos lançamentos. Média: 3,5; mediana: 3; moda: 3.

b) Decidiu-se lançar o dado mais 7 vezes. Sabendo que o 19º, o 20º e o 21º lançamento do dado resultaram, cada um, na face 4, é possível que a mediana da nova distribuição de frequências, considerando 25 lançamentos, seja 3,5? E 5? Em caso afirmativo, determine no caderno as condições para que isso seja possível. Não; não.

c) Nas condições do item **b**, existe a possibilidade de que a mediana da distribuição de frequências dos 25 lançamentos seja igual a 4? Em caso afirmativo, dê um exemplo de distribuição de frequências que satisfaz essa condição, explicitando as possibilidades para os 4 últimos lançamentos. Sim; resposta pessoal.

Medidas de dispersão (ou variabilidade)

Vídeo

Nem sempre as medidas de posição são suficientes para uma boa análise dos dados. Algumas vezes essas medidas são muito afetadas por um valor muito discrepante do resto do conjunto, ou os valores do conjunto são muito diferentes entre si para que as medidas centrais sejam significativas, ou, ainda, 2 conjuntos apresentam indicadores centrais iguais, mas cada conjunto se comporta de maneira diferente em torno dessas medidas. Acompanhe a situação a seguir.

Procurando uma companhia aérea para as viagens de negócios dos funcionários de uma pequena empresa, um empresário obteve, na internet, os percentuais mensais de pontualidade dos voos de 2 companhias aéreas, representadas por **A** e **B**, no período de 7 meses anteriores à data da pesquisa. Os resultados encontram-se a seguir.

Pontualidade das companhias aéreas

Companhia \ Mês	1	2	3	4	5	6	7
A	86%	92%	91%	95%	90%	89%	94%
B	93%	92%	90%	91%	90%	93%	88%

Dados elaborados para fins didáticos.

Inicialmente, ele calculou a média dos percentuais de pontualidade das 2 companhias.

- Companhia **A**:

$$\frac{86\% + 92\% + 91\% + 95\% + 90\% + 89\% + 94\%}{7} = \frac{637\%}{7} = 91\%$$

- Companhia **B**:

$$\frac{93\% + 92\% + 90\% + 91\% + 90\% + 93\% + 88\%}{7} = \frac{637\%}{7} = 91\%$$

Conhecendo apenas o valor das médias de pontualidade das 2 companhias, ele sabia que seria difícil optar por alguma delas. Surgiu, então, a ideia de saber qual companhia aérea apresentava desempenho mais regular, isto é, aquela cujos índices de pontualidade variaram menos.

Analisando os valores da tabela, o empresário concluiu, sem muita convicção, que a companhia **B** era a mais regular.

A situação descrita mostra a necessidade de conhecermos as **medidas de dispersão** (ou variabilidade), que permitem quantificar a variabilidade de uma relação de dados.

Vamos estudar 3 medidas de dispersão: a **amplitude**, a **variância** e o **desvio padrão**.

Amplitude

A **amplitude** de um conjunto de dados assumidos por uma variável quantitativa é o número real dado pela diferença entre o maior e o menor valor registrado (nessa ordem).

Observação

A amplitude de um conjunto de dados é uma medida de variabilidade fácil de ser calculada e, em geral, eficaz na análise da dispersão dos dados e na comparação da variabilidade de 2 conjuntos de dados.

No exemplo das companhias aéreas, temos:

- Companhia **A**: A amplitude é igual a 95% − 86% = 9%.
- Companhia **B**: A amplitude é igual a 93% − 88% = 5%.

Como a amplitude dos dados mensais da companhia **B** é menor do que a amplitude dos dados mensais da companhia **A**, conclui-se que a companhia **B** é a mais regular, isto é, os índices dela oscilaram menos que os da outra companhia.

Definiremos agora 2 medidas de variabilidade que quantificam a dispersão (espalhamento) dos dados em relação à média.

Variância

Sejam n um número natural não nulo e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o conjunto de valores assumidos por uma variável quantitativa X e $\bar{x}$ a média aritmética desses valores. Para cada x_i (com $i = 1, 2, \ldots, n$), calculamos o quadrado da diferença entre esse valor e a média, ou seja, $(x_i - \bar{x})^2$, que é chamado desvio quadrático. A **variância**, indicada por ***Var X*** ou σ^2 (lê-se: "sigma ao quadrado"), é a média aritmética dos desvios quadráticos, isto é:

$$Var\ X = \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Usando a notação de somatório, escrevemos:

$$Var\ X = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Note que, em qualquer situação, σ^2 é um número real não negativo, pois o numerador da expressão é uma adição de quadrados em $\mathbb{R}$ e o denominador n é um número natural não nulo.

Vamos calcular a variância dos dados referentes aos percentuais mensais de pontualidade das 2 companhias (para facilitar, omitiremos nos cálculos os símbolos de %).

Cálculo de variância da companhia A

Mês	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$
1	86	$(86 - 91)^2$
2	92	$(92 - 91)^2$
3	91	$(91 - 91)^2$
4	95	$(95 - 91)^2$
5	90	$(90 - 91)^2$
6	89	$(89 - 91)^2$
7	94	$(94 - 91)^2$

Dados elaborados para fins didáticos.

$$\sigma_A^2 = \frac{(86 - 91)^2 + \ldots + (94 - 91)^2}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_A^2 = \frac{(-5)^2 + 1^2 + 0^2 + 4^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 3^2}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_A^2 = \frac{25 + 1 + 0 + 16 + 1 + 4 + 9}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_A^2 = \frac{56}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_A^2 = 8$$

Cálculo de variância da companhia B

Mês	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$
1	93	$(93 - 91)^2$
2	92	$(92 - 91)^2$
3	90	$(90 - 91)^2$
4	91	$(91 - 91)^2$
5	90	$(90 - 91)^2$
6	93	$(93 - 91)^2$
7	88	$(88 - 91)^2$

Dados elaborados para fins didáticos.

$$\sigma_B^2 = \frac{(93 - 91)^2 + \ldots + (88 - 91)^2}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_B^2 = \frac{2^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-3)^2}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_B^2 = \frac{4 + 1 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_B^2 = \frac{20}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_B^2 \simeq 2{,}86$$

Como a variância na companhia **B** é menor do que a variância na companhia **A** $\left(\sigma_B^2 \simeq 2{,}86 < \sigma_A^2 = 8\right)$, concluímos que a companhia **B** é mais regular, isto é, os percentuais mensais de pontualidade de **B** estão menos dispersos em relação à média do que os percentuais mensais de **A**.

Note que a variância é definida como uma soma de quadrados (média dos desvios quadráticos), sendo, portanto, uma medida cuja unidade é quadrática. Se estivéssemos, por exemplo, estudando a medida da altura dos estudantes de uma turma, a medida da altura média seria expressa em metros (m), porém a variância seria expressa em metros ao quadrado (m^2), o que geraria uma incompatibilidade em relação às unidades, pois metro é a unidade de medida de comprimento e metro quadrado é unidade de medida de área. Assim, as variâncias dos dados referentes aos percentuais mensais de pontualidade das companhias aéreas podem ser expressas da seguinte maneira: $\sigma_B^2 \simeq (2{,}86\%)^2$ e $\sigma_A^2 = (8\%)^2$.

Para uniformizar as unidades de medida da variância e da média, definiremos o desvio padrão.

Não escreva no livro

Pense nisto

O que aconteceria com o valor da variância se na definição, no lugar dos desvios quadráticos, usássemos apenas os desvios $(x_i - \bar{x})$, isto é, se tivéssemos $\frac{(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x})}{n}$?

A variância seria igual a zero.

Desvio padrão

Sejam n um número natural não nulo e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a relação dos valores assumidos por uma variável X. Chamamos **desvio padrão** de X, e indicamos por ***DP*(*X*)** ou σ, a raiz quadrada da variância de X:

$$DP(X) = \sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Vamos calcular o desvio padrão dos percentuais de pontualidade das companhias aéreas.

- Companhia aérea **A**: $\sigma_A^2 = 8 \Rightarrow \sigma_A = \sqrt{8} \simeq 2{,}83$; ou seja, aproximadamente 2,83%.
- Companhia aérea **B**: $\sigma_B^2 \simeq 2{,}86 \Rightarrow \sigma_B = \sqrt{2{,}86} \simeq 1{,}69$; ou seja, aproximadamente 1,69%.

Note que o desvio padrão também nos mostra que a companhia aérea **B** teve uma regularidade maior do que a companhia aérea **A**, já que $\sigma_B \simeq 1{,}69 < 2{,}83 \simeq \sigma_A$.

Podemos afirmar que o desvio padrão mostra quanto os dados estão dispersos (afastados) em relação à média aritmética. Quanto mais próximo o desvio padrão for de 0, então a relação entre os dados será mais regular – mais próximos um do outro. Quanto maior for o desvio padrão, mais dispersa será a relação entre os dados.

Não escreva no livro

Pense nisto

Qual é o significado de o desvio padrão ser igual a zero?

Não há dispersão entre os dados, isto é, todos os dados têm o mesmo valor.

Desvio padrão e a curva de contágio da covid-19

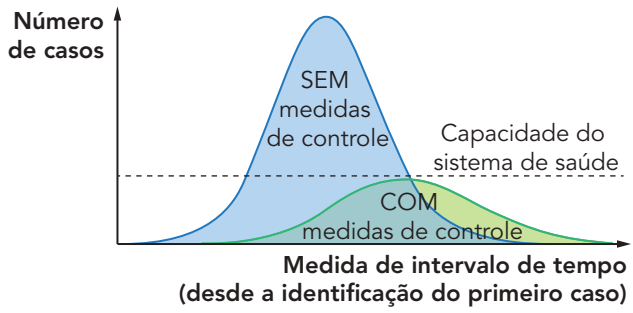
Durante a pandemia da covid-19 em 2020, noticiou-se, insistentemente, a necessidade de "achatar" a curva de contágio, por meio de medidas de isolamento social, a fim de que o sistema de saúde não entrasse em colapso, isto é, o número de internações não excedesse a capacidade de leitos de Unidade de Terapia Intensiva (UTI), bem como o número de respiradores disponíveis.

Consideremos que o número total de infectados permaneça o mesmo nos 2 cenários apresentados a seguir. Na curva "achatada", o pico do número de casos diminui e o número de infectados se torna mais bem distribuído ao longo do tempo, diminuindo as chances de um colapso no sistema de saúde.

Do ponto de vista das medidas estatísticas, podemos notar, na primeira curva, um pico mais elevado e uma grande concentração de casos em torno desse pico. Nesse cenário, grande parte da população de determinada região, suscetível à doença, será infectada em um intervalo de tempo curto e concentrado.

Já na segunda curva, o pico de infecções ocorre em um patamar inferior ao da primeira curva, e os números de casos estão mais dispersos em torno desse pico. Nesse cenário, grande parte da população de determinada região, suscetível à doença, vai se contaminar em uma medida de intervalo de tempo maior, ou seja, os casos de infecção serão mais distribuídos ao longo do tempo que durar a contaminação.

O efeito do achatamento da curva



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: ZORZETTO, Ricardo. Para conter o avanço explosivo. *Pesquisa Fapesp*, ed. 290, abr. 2020. Disponível em: https://tedit.net/mbrx79. Acesso em: 6 set. 2024.

Professor, se julgar interessante, comente sobre a importância de respeitar as instruções das instituições científicas especializadas em momentos emergenciais de maneira geral. Essas instruções são pautadas pela ciência, e, mesmo que se trate de uma situação nova, é provável que elas representem o melhor curso de ação.

Assim, podemos concluir que o desvio padrão (e a variância) do número de casos em torno do pico na segunda curva é consideravelmente maior do que o desvio padrão do número de casos em torno do pico na primeira curva. A disseminação no segundo caso ocorre de maneira muito mais dispersa no intervalo de tempo que durar a pandemia em relação à primeira.

Isso mostra a enorme importância das medidas de isolamento social decretadas pelos governos de centenas de países, procurando não colapsar os sistemas de saúde.

Atividades resolvidas

6. Uma pessoa deseja se planejar financeiramente para realizar uma viagem de fim de ano com a família. Para isso, está fazendo um levantamento dos gastos mensais. A seguir estão representados os valores, em metros cúbicos, do volume de água consumido na residência durante os últimos 9 meses.

33 31 34 32 34 32 102 34 30

Analisando esses dados, ela pretende escolher um valor de referência para prever seus gastos com água.

a) Encontre a média, a moda e a mediana desse conjunto de dados.

b) A média encontrada é um bom valor para a previsão de gastos? Justifique usando ao menos uma medida de dispersão.

Solução:

a) Organizando o rol, temos: 30, 31, 32, 32, 33, 34, 34, 34, 102.
Notamos que $Me = 33$ e $Mo = 34$. Calculando $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{33 + 31 + 34 + 32 + 34 + 32 + 102 + 34 + 30}{9} = \frac{362}{9} \simeq 40{,}2$$

Assim, o consumo médio foi, aproximadamente, 40,2 m^3; o consumo mediano foi 33 m^3 e o consumo modal foi 34 m^3.

b) Nota-se que a média é maior do que 8 dos 9 dados do rol, o que nos sugere, intuitivamente, que, ao considerar esse valor como métrica de consumo, a pessoa vai prever mais gastos do que o necessário.
Para justificar, podemos calcular o desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(30 - 40{,}2)^2 + (31 - 40{,}2)^2 + \ldots + (34 - 40{,}2)^2 + (102 - 40{,}2)^2}{9}} \simeq 21{,}9$$

Como os valores da amostra, de maneira geral, estão em torno de 33, um desvio padrão de 21,9 é muito significativo. Ou seja, a média, de fato, não é um bom valor de referência nesse caso.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

13. Um grupo de 12 estudantes passou um dia de verão em um parque aquático. Os gastos deles com alimentação estão apresentados a seguir (valores em reais).

24 16 30 20 28 30 20 40 18 16 30 16

A partir dos valores dados, calcule no caderno:

a) a variância; 53,33 reais^2.

b) o desvio padrão; 7,30 reais.

c) a amplitude. 24 reais.

14. Um professor de inglês está interessado em comparar o desempenho de 4 turmas de um mesmo curso. Para isso, considerou a média final dos 5 estudantes de cada turma. Analise

17. a) Sim, em 1960.

Professor, se achar interessante, proponha aos estudantes que investiguem o motivo da ausência de atletas do gênero feminino nas primeiras edições dos Jogos Olímpicos.

as notas de cada turma, representadas por **A**, **B**, **C** e **D**.

A	3	5	7	5	5
B	6	6	4	4	5
C	9	1	6	5	4
D	7	8	5	2	3

a) Ordene as turmas, da que apresenta as notas mais regulares à que apresenta notas menos regulares. **B**, **A**, **D** e **C**.

b) Das turmas **C** e **D**, qual teve aproveitamento mais homogêneo entre os estudantes? Justifique de acordo com o cálculo da variância das notas de cada uma dessas turmas. Turma **D**.

15. Os valores seguintes representam os resultados obtidos por 12 estudantes em um experimento cujo objetivo era calcular, em milímetros, determinada distância.

8,7 8,5 9,2 8,8 8,9 8,6 8,7
8,6 8,4 8,7 8,6 8,7

O professor considerou aceitáveis os resultados pertencentes ao intervalo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$, em que $\bar{x}$ é a média e σ o desvio padrão dos dados. Quantos estudantes não tiveram o resultado considerado aceitável? 4

16. Um ciclista deseja melhorar a regularidade do intervalo de tempo médio gasto para completar uma volta na pista. Para isso, ele pretende reduzir o desvio padrão desses intervalos de tempo médios em 1 minuto.

A tabela apresenta as médias dos intervalos de tempo gastos para completar uma volta na pista dos últimos 8 treinos.

Intervalo de tempo médio para completar uma volta dos últimos 8 treinos

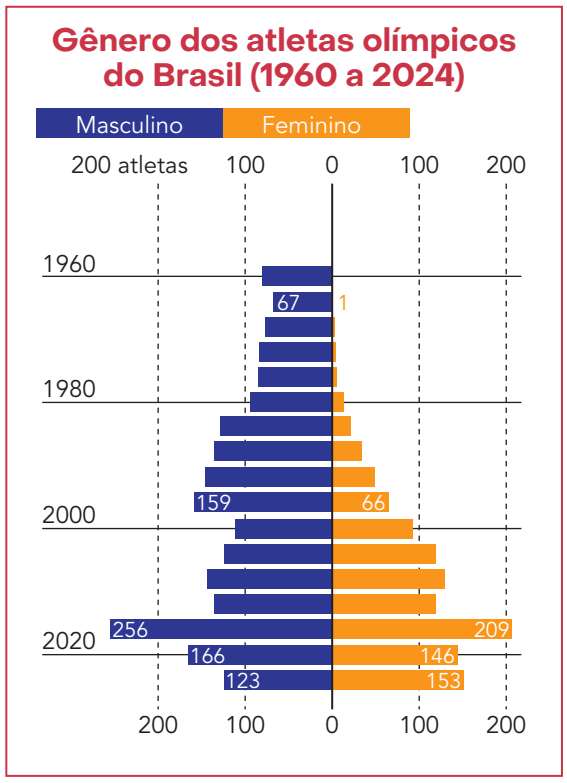
Treino	1	2	3	4	5	6	7	8
Medida de intervalo de tempo médio (em min)	6	6	8	4	10	6	4	4

Dados elaborados para fins didáticos.

Para obter essa regularidade, o ciclista efetuará mais alguns treinos, de modo que a medida de intervalo de tempo médio gasto em cada um dos treinos seguintes seja exatamente igual à média aritmética das medidas de intervalo de tempo médio dos últimos 8 treinos.

Quantos treinos a mais o ciclista deverá realizar para conquistar o objetivo de reduzir o valor do desvio padrão? 24 treinos.

17. O gráfico a seguir apresenta dados sobre o gênero de atletas brasileiros em cada um dos Jogos Olímpicos de que o Brasil participou, de 1960 a 2024.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: ZANLORENSSI, Gabriel; HEMERLY, Giovanna. A evolução do número de mulheres em Olimpíadas. *Nexo Jornal*, 2 ago. 2024. Disponível em: https://tedit.net/3zjivw. Acesso em: 6 set. 2024.

a) Houve alguma Olimpíada na qual o Brasil não teve participação de atletas do gênero feminino?

b) Qual mudança é possível notar em relação à distribuição por gênero dos atletas brasileiros que participaram nos Jogos Olímpicos de 2024?

c) No caderno, elabore e resolva uma questão que envolva os dados apresentados (apenas das edições dos Jogos Olímpicos em que as quantidades são explicitadas), o cálculo de alguma medida de posição e o cálculo de alguma medida de dispersão.

17. b) Pela primeira vez, o número de atletas do gênero feminino é maior do que o de atletas do gênero masculino.

c) Exemplo de resposta: Quais são a mediana e o desvio padrão do conjunto das quantidades de atletas brasileiros explicitados no gráfico? Ao ordenarmos os anos, o ano da Olimpíada a qual esse valor está associado também é a mediana do conjunto?

EXPERIMENTE

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Utilizar uma planilha eletrônica para estudar os dados sobre a cobertura vacinal no Brasil

Estudamos que um dos primeiros passos para analisar um conjunto de dados estatísticos é determinar as medidas de centralidade e de dispersão. Contudo, para calculá-las, precisamos realizar um número muito grande de adições, multiplicações e potenciações sucessivas, o que torna sua obtenção um processo trabalhoso.

Felizmente a maioria dos *softwares* de planilha eletrônica calculam, de maneira automatizada, alguns desses indicadores. Vamos utilizar o LibreOffice para esse cálculo.



pikisuperstar/Freepik

A tabela a seguir mostra a cobertura vacinal contra a febre amarela, por unidade da Federação (UF). Os dados são fornecidos em porcentagem e obtidos dividindo a quantidade de doses aplicadas, conforme esquema vacinal, pela quantidade de pessoas elegíveis para vacinação. Sendo assim, é possível que existam anomalias nos dados, mas eles ainda são o principal indicador da eficiência do plano de imunização.

Cobertura vacinal contra febre amarela por unidade da Federação de residência, em julho de 2024

Unidade da Federação	Cobertura (em %)
Acre	65,40
Alagoas	82,09
Amapá	57,20
Amazonas	76,23
Bahia	77,66
Ceará	74,05
Distrito Federal	86,37
Espírito Santo	121,99
Goiás	72,39
Maranhão	74,22
Mato Grosso	81,13
Mato Grosso do Sul	83,29
Minas Gerais	88,05
Pará	62,83

Unidade da Federação	Cobertura (em %)
Paraíba	80,52
Paraná	79,68
Pernambuco	73,23
Piauí	88,65
Rio de Janeiro	56,88
Rio Grande do Norte	70,00
Rio Grande do Sul	74,06
Rondônia	91,36
Roraima	62,73
Santa Catarina	77,52
São Paulo	80,73
Sergipe	77,23
Tocantins	81,97

Fonte dos dados: MINISTÉRIO DA SAÚDE. *Ministério da Saúde* – cobertura vacinal – residência. Brasília, DF: 23 out. 2024. Disponível em: https://tedit.net/8gdx9p. Acesso em: 30 ago. 2024.



Vinicius Loures/Câmara dos Deputados

O Zé Gotinha é um personagem criado para campanhas de vacinação de crianças contra o vírus da poliomielite. Com o tempo, passou a mobilizar outras campanhas de vacinação além da poliomielite. Atualmente, Zé Gotinha é utilizado como símbolo do Programa Nacional de Imunizações (PNI).

Vamos usar esses dados para avaliar como as UF estão trabalhando os planos de vacinação. Primeiro, copie os valores referentes à cobertura vacinal de cada UF na coluna **A** da planilha. Em seguida, faça o que se pede. A resolução das atividades **1**, **2** e **3** depende do *software* utilizado pelos estudantes.

1. Para determinar a **média aritmética**, na célula C1, digite: "=MÉDIA(A1:A27)" e tecle *Enter*. Responda no caderno:

a) Qual foi o valor encontrado, arredondado para 2 casas decimais? 77,69

b) Quantas UFs têm cobertura vacinal abaixo da média? 15

2. Para determinar a **mediana**, na célula D1, digite: "=MED(A1:A27)" e tecle *Enter*. Para determinar a **moda**, na célula E1, digite: "=MODO(A1:A27)" e tecle *Enter*. Responda:

a) Qual foi o valor encontrado para a mediana? E para a moda?
Mediana: 77,52. Não há moda, já que foi exibida uma mensagem de erro.

b) Conhecendo esses valores, é possível afirmar algo sobre a dispersão dos dados? Não. As medidas determinadas até agora são de centralidade. Apesar de a média e a mediana apresentarem valores próximos, é possível que isso aconteça também em conjuntos de dados muito dispersos.

3. Para determinar a **amplitude**, digite: "=MÁXIMO(A1:A27)-MÍNIMO(A1:A27)" na célula C3 e tecle *Enter*. Para determinar a **variância**, na célula D3, digite: "=VAR.P(A1:A27)" e tecle *Enter*. Para determinar o **desvio padrão**, na célula E3, digite: "=DESVPAD.P(A1:A27)" e tecle *Enter*. Responda:

a) Quais foram os valores encontrados, arredondados para 2 casas decimais? Amplitude: 65,11. Variância: aproximadamente 153,73. Desvio padrão: aproximadamente 12,40.

b) Quantas UFs apresentam cobertura vacinal abaixo do valor de $\bar{x} - \sigma$?
$\bar{x} - \sigma \simeq 65{,}29$; logo, Amapá (57,20), Pará (62,83), Roraima (62,73) e Rio de Janeiro (56,88); ou seja, 4 unidades da Federação.

Observação

Caso na lista não haja valores repetidos, a planilha pode apresentar uma mensagem de erro ao tentar determinar a moda.

PROJETO

Não escreva no livro

Esta seção favorece o desenvolvimento da competência geral **4** da BNCC e das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT202**.

Reprodução/ ONU

Índices de mortalidade infantil

Leia a reportagem a seguir, sobre a mortalidade infantil por causas evitáveis.

Mortalidade infantil por causas evitáveis tem menor taxa em 28 anos

Número indica queda de 62%, se comparado ao início do monitoramento

O Brasil reduziu em 51,5% o número de mortes de crianças com até 5 anos de idade entre 2000 e 2022. Os dados são do Observatório da Atenção Primária à Saúde, uma plataforma da associação Umane, com base no Sistema de Informações de Mortalidade (SIM) do Ministério da Saúde.

Em 2000, o número de mortes até os 5 anos foi de 79 473 para 3 053 553 nascidos vivos. Em 2022, o número de mortos foi de 38 540 para 2 561 922 nascidos vivos. A taxa de mortalidade a cada mil nascidos vivos também caiu, passando de 26 para 15, na mesma base de comparação.

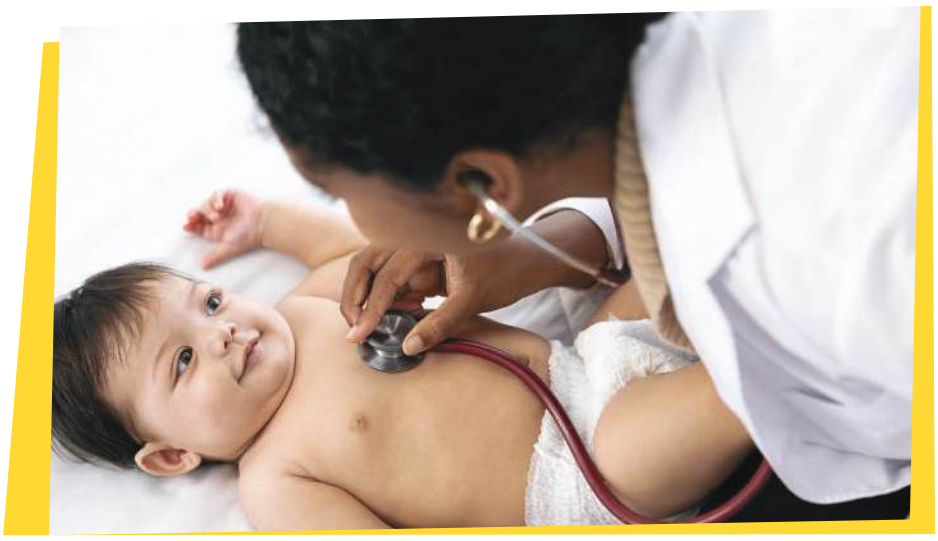
[...]

O Brasil registrou, em 2023, a menor taxa de mortalidade infantil e fetal – até 1 ano de idade – por causas evitáveis dos últimos 28 anos.

Segundo dados preliminares do Painel de Monitoramento da Mortalidade Infantil e Fetal, no ano passado, houve 20,2 mil mortes, o menor número de uma série histórica desde 1996. [...]

As mortes evitáveis são aquelas que poderiam ser barradas por ações de imunoprevenção, adequada atenção à mulher na gestação e parto e ao recém-nascido, ou por meio de diagnósticos corretos, explicou a pasta.

BOEHM, Camila. Mortalidade infantil por causas evitáveis tem menor taxa em 28 anos. *Agência Brasil*, 25 mar. 2024. Disponível em: https://tedit.net/h59spr. Acesso em: 6 set. 2024.



Mangkorn Danggura/Shutterstock

O SUS é uma ferramenta importante no combate à mortalidade infantil.

Professor, promova uma conversa com os estudantes sobre as possibilidades das políticas públicas e/ou das ações necessárias que contribuem para que a mortalidade infantil seja reduzida.

Etapa 5: Professor, a análise das medidas de tendência central e das medidas de dispersão dos dados sobre a mortalidade infantil no Brasil pode ajudar a identificar desigualdades, tendências e padrões, permitindo a elaboração de estratégias para reduzir a mortalidade e melhorar a saúde infantil.

A mortalidade infantil é um indicador muito utilizado para guiar políticas públicas de saúde e condições de vida de uma população. O cálculo da taxa envolve estimativas do risco de um nascido vivo morrer antes de chegar a 1 ano de vida.

Pensando em um projeto

Que tal comparar os dados nacionais da taxa de mortalidade infantil com os dados do município em que você vive? Para isso, realize uma pesquisa dos dados e organize um relatório estatístico. Depois, promova uma reflexão para a realização de uma campanha de conscientização sobre a redução da mortalidade infantil no município em que vive.

Para começar

- Organizem-se em 6 grupos.

Plano de ação

Etapa 1

Escolham um buscador de *sites* e digitem as palavras-chave: "mortalidade infantil no Brasil" e, depois, façam outra busca com "mortalidade infantil [nome do município em que vivem]". Será apresentada uma listagem de *sites* que contenham as palavras pesquisadas. Selecionem criteriosamente aqueles que pretendem usar como fontes.

Etapa 2

Anotem e guardem os nomes dos *sites* consultados para fazer a citação das referências e usar trechos dos textos apresentados para embasar a tese.

Façam a leitura dos textos escolhidos e colham informações sobre:

- as principais causas da mortalidade infantil no Brasil e no município em que vivem;
- maneiras de prevenção da mortalidade infantil;
- ações da comunidade que possam prevenir o problema.

Depois, façam resumos dos dados encontrados. O grupo deve citar todas as fontes de consulta utilizadas.

Etapa 3

Para a organização do relatório estatístico, gerem um gráfico. Para isso, uma opção é acessar o *site* Observatório da Criança e do Adolescente (https://tedit.net/8vck2k; acesso em: 6 set. 2024) e selecionar a opção "Acesse os dados" e, depois, "Sobrevivência infantil na infância". Comparem as categorias de dados do Brasil e a localidade onde vocês vivem.

Organizem tabelas separando os dados encontrados em 3 períodos.

Etapa 4

Façam a avaliação e a análise dos materiais, tendo como objetivo responder à pergunta: Quais ações foram importantes, em cada período, para a redução da taxa de mortalidade infantil no Brasil e no município onde vivem?

Redijam suas conclusões em um único relatório para toda a turma, usando citações das fontes para apoiar as argumentações, tanto textuais como gráficas.

Etapa 5

Produto final: Apresentação de um relatório analítico e estatístico sobre a mortalidade infantil no Brasil, contendo gráficos e a interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão, comparando os dados encontrados com os do município em que vivem.

Cada grupo deve preparar uma roda de conversa para apresentar aos outros grupos os resultados que obtiveram e discutir as similaridades e as diferenças.

Os estudantes devem criar um único relatório com os resultados de toda a turma.

Caso julguem adequado, usem o relatório como campanha de conscientização sobre o tema para a comunidade escolar.

Etapa 2: Professor, oriente os estudantes a selecionar *sites* governamentais, de instituições de ensino superior e de pesquisa, de ONGs e de revistas e jornais de maior circulação, assim como a procurar *sites* com data de publicação ou de atualização mais recentes.

capítulo

9 Quartis, percentis e *box-plot*

Representações gráficas

Quartis e *box-plot*

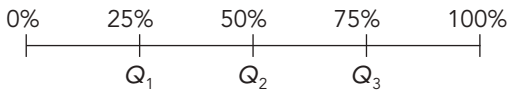
O gráfico de caixa, ou *box-plot,* é uma representação gráfica que facilita a análise visual das características de distribuição dos dados de um conjunto por sua amplitude e no entorno das medidas de centralidade. Contudo, para construir um, primeiro é preciso definir outras medidas do conjunto: os quartis e os limites.

Seja n um número natural não nulo e $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ os n valores reais (ou dados reais) de um conjunto de valores assumidos por uma variável quantitativa X, ou seja, o rol de um conjunto de dados, os quartis são 3 valores que dividem os n valores do rol em 4 subconjuntos com o mesmo número de elementos. Esses 3 valores são denominados: primeiro quartil (Q_1), segundo quartil (Q_2) e terceiro quartil (Q_3).

O **segundo quartil Q_2** é o valor em que 50% do rol está antes dele e 50% do rol está depois. Isto é, Q_2 é a mediana dos n valores do rol. Sendo assim, Q_2 divide o rol em 2 subconjuntos: o dos primeiros 50% dos valores e o dos últimos 50% dos valores.

O **primeiro quartil Q_1** é o valor em que 25% do rol está antes dele e 75% do rol está depois. Isto é, Q_1 é a mediana dos primeiros 50% dos valores do rol.

O **terceiro quartil Q_3** é o valor em que 75% do rol está depois dele e 25% do rol está antes. Isto é, Q_3 é a mediana dos últimos 50% dos valores do rol.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Conhecendo os quartis, pode-se utilizá-los para identificar valores atípicos na amostra. Para isso, é preciso definir os limites, de maneira que todos os valores que são parte da amostra e são menores ou maiores do que esses limites serão ditos atípicos.

O limite inferior é dado por:

$$LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1)$$

O limite superior é dado por:

$$LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1)$$

Assim, um valor do rol será considerado atípico se for menor do que LI ou se for maior do que LS.

Esses limites fornecem uma referência importante para entender a dispersão dos dados e detectar possíveis anomalias que podem influenciar a análise e a interpretação dos resultados. Um valor atípico também pode ser chamado de valor discrepante ou, pela tradução na língua inglesa, *outlier*. Esses valores estão muito afastados da maioria dos dados e podem sinalizar variações importantes, erros de medição ou aspectos especiais que precisam ser investigados mais a fundo.

Acompanhe o exemplo a seguir.

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida composta de 3 tipos de indicadores: renda, educação e longevidade. É utilizado para comparar entre os países o nível de bem-estar da população, variando de 0 até 1 (quanto mais próximo de um, mais o país é considerado desenvolvido). Na tabela, é apresentado o IDH de alguns países, em 2022.

IDH de alguns países em 2022

Posição	País	IDH
1	 Suíça	0,967
2	 Noruega	0,966
3	 Islândia	0,959
4	 Hong Kong, China (SAR)	0,956
5	 Dinamarca	0,952
5	 Suécia	0,952
7	 Alemanha	0,95
7	 Irlanda	0,95
9	 Cingapura	0,949
⋮	⋮	⋮
19	 Coreia do Sul	0,929
⋮	⋮	⋮
89	 Brasil	0,760

aomvector/ Adobe Stock
besdesign/ Adobe Stock
alexmak/ Adobe Stock
elenvd/ Adobe Stock
besdesign/ Adobe Stock
Tarik GOK/ Adobe Stock
Onur/ Adobe Stock
moonrun/ Adobe Stock
Reprodução/ Governo de Cingapura
soraya/ Adobe Stock
Formatoriginal/ Adobe Stock

Fonte dos dados: ONU. *Human Development Report* 2023/2024. Disponível em: https://tedit.net/fakxtj. Acesso em: 6 set. 2024.

Para a análise a seguir, vamos desconsiderar o IDH do Brasil. Assim, considere o rol dos valores dos IDH listados:

0,929; 0,949; 0,950; 0,950; 0,952; 0,952; 0,956; 0,959; 0,966; 0,967

Note que a quantidade total de dados ($n = 10$) é par. Dessa maneira, a mediana é a média aritmética entre o 5º valor do rol e o 6º valor do rol, isto é:

$$Q_2 = \frac{0{,}952 + 0{,}952}{2} = 0{,}952$$

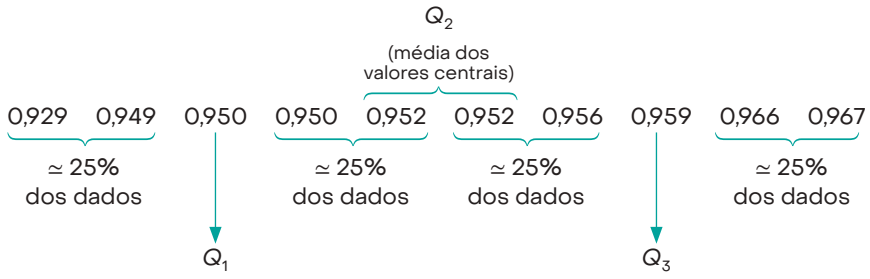
Assim, Q_2 divide os valores do rol em 2 subconjuntos:

- O subconjunto dos primeiros 50%, que são formados por: 0,929; 0,949; 0,950; 0,950; 0,952.
- O subconjunto dos últimos 50%, que são formados por: 0,952; 0,956; 0,959; 0,966; 0,967.

Como Q_1 é a mediana dos primeiros 50% dos valores (5 valores), Q_1 é o 3º valor do rol. Logo, $Q_1 = 0{,}950$.

Como Q_3 é a mediana dos últimos 50% dos valores (5 valores), Q_3 é o 8º valor do rol. Logo, $Q_3 = 0{,}959$.

Destacando os quartis no rol, tem-se:



Note que os quartis dividem o rol em 4 subconjuntos com cerca de 25% do total de dados, quando n não é múltiplo de 4. Contudo, quando retiramos quartis que são elementos do conjunto, os 3 quartis dividem o novo conjunto em 4 subconjuntos com 25% dos dados. Perceba que isso ocorre quando retiramos $Q_1 = 0{,}950$ e $Q_3 = 0{,}959$ do conjunto de dados.

Agora, vamos calcular o limite superior e o inferior do conjunto de dados.

$$LI = 0{,}950 - 1{,}5 \cdot (0{,}959 - 0{,}950) = 0{,}9365$$

$$LS = 0{,}959 + 1{,}5 \cdot (0{,}959 - 0{,}950) = 0{,}9725$$

Com essas medidas definidas, pode-se construir um *box-plot* para representar os dados:

Passo 1: Determinar se há dados atípicos.

O IDH da Coreia do Sul é o único que é menor do que o *LI* calculado. Não há outro valor maior do que o *LS*.

Passo 2: Determinar o maior e o menor valor entre os dados típicos.

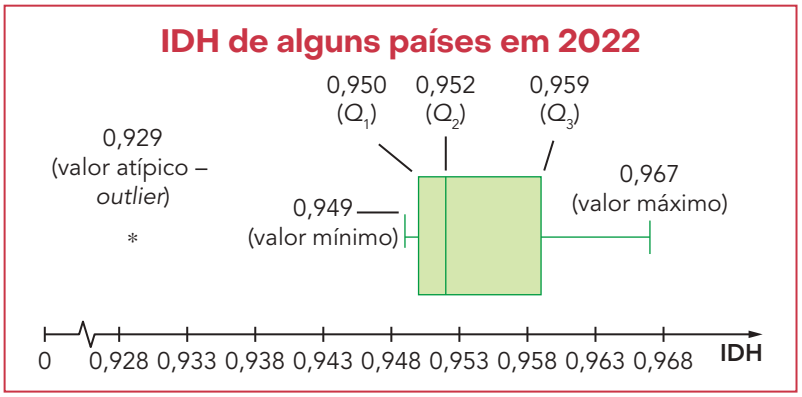
No exemplo dado, os valores mínimos e máximos são, respectivamente, 0,949 (menor valor que é maior ou igual a *LI*) e 0,967 (maior valor que é menor ou igual a *LS*).

Passo 3: Representar todas as informações em um gráfico.

Utilizando uma reta numérica como parâmetro, construímos uma caixa (região retangular) cujo comprimento tem extremos em Q_1 e em Q_3, depois, representamos um segmento de reta na caixa associado à localização de Q_2 na reta numérica.

Por fim, construímos uma haste (2 segmentos de reta similares à letra maiúscula T) com extremidades em Q_1 e no valor mínimo, e outra haste com extremidades em Q_3 e no valor máximo.

A representação dos valores mínimo e máximo dos dados típicos nos dá a ideia da dispersão dos dados. Com eles representados, marcamos também os eventuais valores atípicos com asteriscos.



Dados elaborados para fins didáticos.

Observação

A medida de comprimento do retângulo que limita a caixa (amplitude do intervalo entre Q_1 e Q_3) determina o chamado **intervalo interquartil**, que é uma medida de dispersão dos dados. Essa medida pode ser utilizada para comparar a dispersão de conjuntos de dados.

A partir do *box-plot*, pode-se notar que o intervalo entre o valor mínimo e Q_1 tem amplitude 0,950 – 0,949 = 0,001. De maneira análoga, os intervalos entre Q_1 e Q_2, entre Q_2 e Q_3 e entre Q_3 e o valor máximo têm, respectivamente, amplitudes 0,002; 0,007 e 0,008.

Uma vez que os 4 intervalos têm a mesma quantidade de dados (cada um deles com cerca de 25% dos dados), o intervalo com a menor amplitude apresenta os dados com os valores menos dispersos um do outro. Sendo assim, no intervalo entre o valor mínimo e Q_1, os dados são mais homogêneos (ou mais concentrados) quando comparados aos outros intervalos.

Por outro lado, no intervalo entre Q_3 e o valor máximo, os dados são mais dispersos (ou mais heterogêneos, ou menos concentrados) quando comparados com os dados dos outros intervalos.

Observação

No exemplo, a reta numérica está na posição horizontal. Existe a possibilidade de ela estar na posição vertical e, com isso, o diagrama também ficaria na posição vertical.

INTERLIGANDO

Sugere-se que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Língua Portuguesa, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

A relação entre tempo de estudo e desempenho acadêmico

O tempo dedicado ao estudo fora do horário escolar pode trazer benefícios quando pensamos no sucesso acadêmico, influenciando nas notas e na compreensão dos conceitos abordados. Estudar em casa ou participar de atividades complementares, como plantões de dúvidas, visitas guiadas e cursos, pode ajudar a construir uma base sólida para um aprendizado mais profundo e duradouro.

Criar o hábito de estudar um pouco todos os dias, de modo gradual, tem efeitos positivos significativos. Para muitos estudantes, esse método permite absorver e consolidar o conteúdo estudado de modo eficaz, reduzindo a necessidade de revisões intensivas de última hora antes de uma avaliação e facilitando a compreensão dos conceitos e o desenvolvimento de habilidades essenciais.

Com o tempo, essa prática constante e bem distribuída pode melhorar o desempenho acadêmico. A rotina de estudo regular promove uma gestão do tempo mais eficiente e reduz o estresse, resultando em melhor retenção do conhecimento para muitas pessoas.



KOTOIMAGES/Shutterstock

Turma realizando uma prova.

1. Um estudo realizado por estudantes do 1º ano do Ensino Médio de determinada escola propôs analisar o impacto do projeto de reforço escolar nas notas dos estudantes nos componentes curriculares de Matemática e de Língua Portuguesa. O objetivo era avaliar se o projeto estava efetivamente melhorando o desempenho acadêmico dos estudantes. Para isso, foram selecionados 15 estudantes do 2º ano do Ensino Médio para participar da pesquisa. As notas analisadas foram de 2 simulados: o simulado **1**, que ocorreu antes do projeto de reforço, e o simulado **2**, que ocorreu após 1 mês de funcionamento do projeto de reforço. Além disso, a nota máxima que poderia ser obtida em cada um desses simulados e em cada um dos 2 componentes curriculares foi 50.
A tabela a seguir mostra as notas nos simulados **1** e **2**.

Notas em cada simulado

Estudante	Simulado 1 de Matemática	Simulado 1 de Língua Portuguesa	Simulado 2 de Matemática	Simulado 2 de Língua Portuguesa
1	17	19	22	25
2	18	22	21	28
3	11	10	16	19
4	28	25	28	25
5	29	30	29	28
6	15	21	15	28
7	41	42	40	45
8	19	20	25	25
9	29	28	28	36
10	38	37	36	35
11	40	42	40	42
12	20	13	21	18
13	23	20	28	26
14	39	25	39	29
15	38	40	38	38

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Organizem-se em grupos de 4 estudantes e elaborem 4 *box-plots* de acordo com os dados fornecidos. Componham no caderno 2 gráficos, lado a lado, para as notas de Matemática e 2 gráficos, lado a lado, para as notas de Língua Portuguesa. Utilizem a mesma escala nos gráficos, pois isso garantirá que eles sejam facilmente comparáveis. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) A partir da análise dos *box-plots* construídos para as notas de Matemática e de Língua Portuguesa, avaliem a variabilidade (dispersão) e registrem suas conclusões sobre a melhora, ou não, do desempenho acadêmico dos estudantes que fizeram parte do projeto.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

c) Realizem uma pesquisa amostral na escola em que vocês estudam para analisar as notas dos estudantes do Ensino Médio em Matemática, Física, Química, Biologia, História, Geografia, Filosofia, Língua Portuguesa, Língua Inglesa e Educação Física, com o objetivo de determinar em quais componentes curriculares os estudantes necessitam de reforço escolar. Os dados devem ser coletados diretamente com os professores, de maneira que os estudantes não sejam identificados, e os resultados devem ser divulgados por meio de um relatório único, contendo os *box-plots* e a interpretação das medidas de tendência central.
A resposta depende dos resultados da pesquisa a ser realizada pelos estudantes.

Percentis

Sejam n um número natural não nulo e $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ os n valores ordenados reais assumidos por uma variável quantitativa X, em um rol de dados. Os percentis são valores que dividem os n valores em 100 subconjuntos com a mesma quantidade de elementos.

Para isso, são necessários 99 valores denominados 1º percentil (P_1), 2º percentil (P_2), ..., 98º percentil (P_{98}) e 99º percentil (P_{99}).

O 50º percentil (P_{50}) coincide com o 2º quartil Q_2 e com a mediana do rol de dados. Do mesmo modo, o 25º percentil e o 75º percentil coincidem, respectivamente, com o 1º quartil, Q_1, e o 3º quartil, Q_3.

Analise o exemplo a seguir.

Pediatras utilizam gráficos de crescimento para acompanhar o desenvolvimento das crianças. Entre esses gráficos, estão: o da medida da altura, o do índice de massa corporal (IMC) e o da medida de massa, todos de acordo com a idade da criança.

O gráfico representa a medida da altura (em cm) de meninas sem deficiência física relacionada à altura e com idade entre 5 e 19 anos. As linhas coloridas, representam os 3º, 15º, 50º, 85º e 97º percentis das medidas da altura de acordo com a idade (em meses e anos completos).

Observação

O valor de referência de medida da altura é apenas um entre diversos fatores para avaliar a saúde de crianças e adolecentes. Ter uma medida da altura que não se enquadra nos padrões apresentados pelo gráfico não significa, necessariamente, que a pessoa não é saudável.



Reprodução/Organização Mundial da Saúde

Fonte dos dados: Sociedade Brasileira de Pediatria (SBP). *Altura por idade - Meninas de 5 a 19 anos (percentis).* Disponível em: https://tedit.net/l7qs5g. Acesso em: 6 set. 2024.

Assim, uma menina sem deficiência física relacionada à altura, com 11 anos completos de idade e com medida da altura igual a 145 cm pertence ao 50º percentil. Isso quer dizer que pelo menos 50% das meninas sem deficiência física relacionada à altura e com 11 anos completos têm a medida da altura maior ou igual a 145 cm, e que pelo menos 50% das meninas com o mesmo perfil têm a medida da altura menor ou igual a 145 cm.

1. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

ATIVIDADES

2. b) Se a média é igual à nota máxima, significa que não houve notas abaixo dela. Assim, é possível afirmar que todas as notas foram 5.

Não escreva no livro

2. h) Na turma **B**, os dados são mais concentrados no intervalo entre o valor mínimo e Q_1. Na turma **C**, os dados são mais concentrados no intervalo entre Q_3 e o valor máximo.

1. Analise o diagrama de ramos e folhas a seguir, que representa a renda *per capita* mensal em centenas de reais em 100 famílias de certo bairro.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Renda *per capita* mensal (em centenas de reais) de 100 famílias de certo bairro

1	1 1 2 2 5 5 5 5 5 6 6 6 7 8 8 9 9 9
2	0 1 1 1 2 2 2 2 4 4 4 5 6 6 8 8 8
3	0 0 0 0 2 3 4 5 6 6 6 7 8 8 8
4	0 0 0 1 1 2 2 4 4 5 5 5 8 8
5	0 0 0 1 2 6 6 7 7
6	0 0 1 2 2 5 6 9 9
7	0 1 1 1 2 5 5 8
8	0 0 1 5 5 7
9	0 1 8
10	3

Professor, se julgar oportuno, relembre com os estudantes a maneira correta de realizar a leitura do diagrama de ramos e folhas.

Legenda: 1|1 significa 11 centenas de reais.

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Quais são os valores do 1º, 2º e 3º quartis?
Q_1 = R$ 2.200,00; Q_2 = R$ 3.900,00; Q_3 = R$ 6.050,00

b) Quais são os valores do 25º e 75º percentis?
25º percentil: Q_1 = R$ 2.200,00; 75º percentil: Q_3 = R$ 6.050,00

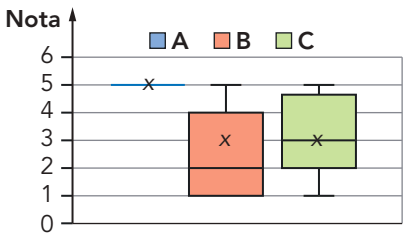
c) No caderno, represente graficamente esses dados utilizando um *box-plot*. Quantos *outliers* (dados discrepantes) há nessa distribuição? Não há *outliers*. O gráfico encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. A seguir estão representados 3 *box-plot* com a distribuição das notas dos estudantes de 3 turmas **A**, **B** e **C**. As notas são expressas por números naturais, sendo 5 a nota máxima.

As respostas para os itens **a**, **c** e **d** encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Distribuição das notas dos estudantes das turmas A, B e C



Dados elaborados para fins didáticos.

O *x* indica, em cada *box-plot*, a média aritmética das notas da turma correspondente.

Analise esses gráficos e responda, no caderno, às perguntas a seguir.

a) Qual turma apresentou um desempenho regular?

b) Sem analisar o gráfico e sabendo apenas que a média das notas da turma **A** foi 5 e que a nota máxima nessa turma também foi 5, é possível inferir que todos os estudantes obtiveram nota 5? Justifique.

c) Qual é o desvio padrão das notas na turma **A**?

d) Na turma **B** há um valor mínimo?

e) Qual é o valor do 2º quartil da turma **C**?
O valor do 2º quartil da turma **C** é 3, conforme indicado no gráfico.

f) A nota média de cada turma é sempre maior do que a nota mediana da respectiva turma?

g) Comparando as notas das turmas **B** e **C**, qual das turmas tem maior percentual de estudantes com notas maiores ou iguais a 2? Determine esses percentuais.

h) Analisando as notas da turma **B**, qual é o intervalo (determinado pelos quartis e pelos valores mínimo ou máximo) em que as notas são mais concentradas? E na turma **C**?

3. O quadro a seguir contém os salários ordenados (expressos em quantidade de salários mínimos) de 36 funcionários de uma empresa.

2	2,28	2,65	2,87	3,18	3,29
3,45	3,70	3,72	3,9	4,05	4,23
4,37	4,51	4,57	4,69	4,89	4,90
5,2	5,31	5,53	5,8	6,0	6,4
6,62	6,8	6,95	7,35	7,36	8,0
8,10	8,31	8,63	9,4	9,7	11,7

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Determine o 1º o 2º e o 3º quartis.
1º quartil (Q_1): 3,81; 2º quartil (Q_2 ou mediana): 5,05; 3º quartil (Q_3): 7,15.

b) Há algum valor discrepante (*outlier*)? Explique.
Não. Nenhum valor se encontra acima do limite superior ou abaixo do limite inferior.

c) Construa, no caderno, um *box-plot* para representar esse conjunto de dados.
O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

d) Dos 4 intervalos determinados pelos quartis (com a mesma quantidade de dados), qual apresenta dados mais heterogêneos? E mais homogêneos?
Mais heterogêneo: [7,15; 11,7]; mais homogêneo: [3,81; 5,05].

2. g) A turma **C** tem um percentual maior de estudantes com notas maiores ou iguais a 2, uma vez que o 1º quartil começa em 2 e todos os dados são acima do limite inferior de 1. Nela, o percentual é de 75%. Como o 2º quartil de **B** é 2, nessa turma o percentual de notas maiores ou iguais a 2 é 50%.

2. f) Não, na turma **A** a nota média é igual à mediana (todas são 5), e na turma **C** a média está abaixo da mediana (ambas indicadas no gráfico).

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

Não escreva no livro

4. Realize uma pesquisa sobre a quantia diária que um familiar que mora com você gasta com condução para ir ao trabalho e voltar para casa. Para isso, faça o que se pede a seguir.

a) Pergunte a um familiar que mora com você: "Quantos reais você gasta com condução, diariamente, para ir ao trabalho e voltar para casa?". Anote em uma folha do caderno. Resposta pessoal.

b) Represente esses dados em um *box-plot* e em um gráfico de setores. Na sua opinião, qual deles é mais adequado para representar esses dados? Resposta pessoal. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Medidas de posição e medidas de dispersão para dados agrupados

Uma maneira de apresentar dados é agrupando-os em classes estatísticas. Quando nos deparamos com esse tipo de agrupamento, adotamos estratégias específicas para calcular as medidas de posição e de dispersão dos dados. Acompanhe o exemplo.

O salário dos 23 funcionários de um estabelecimento comercial está representado na tabela referente aos salários dos funcionários de uma empresa.

Professor, se preferir, relembre aos estudantes da notação (⊢) utilizada em dados agrupados em classes.

Salários dos funcionários de uma empresa

Salário (em reais)	Quantidade de funcionários
2 000 ⊢ 4 000	4
4 000 ⊢ 6 000	13
6 000 ⊢ 8 000	8

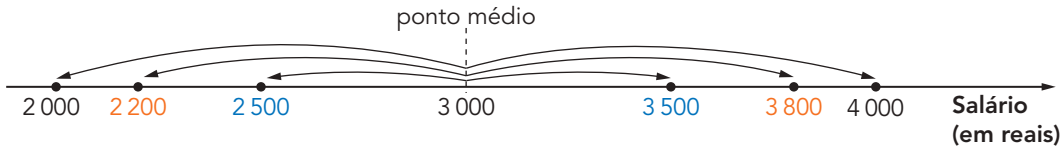
Dados elaborados para fins didáticos.

Qual é a média salarial dos funcionários desse estabelecimento?

Para que se possa calcular a média (e outras medidas de centralidade e medidas de dispersão) desses valores, costuma-se fazer a suposição de que, em cada intervalo, os valores estão distribuídos de maneira simétrica em relação ao **ponto médio** (indicado por x_i) do intervalo.

Para calcular a média salarial, considera-se o ponto médio de cada faixa salarial. A suposição é que, dentro de cada faixa, os salários estejam distribuídos de maneira simétrica em torno do ponto médio.

O esquema a seguir mostra o que significa "supor que dentro de cada faixa a distribuição é simétrica em torno do ponto médio" considerando os salários: R$ 2.200,00; R$ 2.500,00; R$ 3.500,00 e R$ 3.800,00.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Note que há uma compensação entre valores equidistantes dos extremos do intervalo (2 000 e 4 000), de modo que a média de cada par desses valores coincide com o ponto médio x_i. Por exemplo, 2 200 e 3 800 são equidistantes dos extremos do intervalo; a média entre eles é $\frac{(2200 + 3800)}{2} = 3000 = x_i$.

Na prática, essa suposição é equivalente a considerar que todos os salários dentro desse intervalo são iguais ao ponto médio, que é R$ 3.000,00. Estendendo esse raciocínio aos demais intervalos, temos:

Para o intervalo de R$ 4.000,00 a R$ 6.000,00, o ponto médio é R$ 5.000,00.

Para o intervalo de R$ 6.000,00 a R$ 8.000,00, o ponto médio é R$ 7.000,00.

Salário (em reais)	Ponto médio do intervalo x_i (em reais)	Quantidade de funcionários	Total da faixa (em reais)
2000 ⊢ 4000	3000	4	$4 \cdot 3000$
4000 ⊢ 6000	5000	13	$13 \cdot 5000$
6000 ⊢ 8000	7000	8	$8 \cdot 7000$

Dados elaborados para fins didáticos.

Assim, ao considerar que todos os salários dentro de cada intervalo são iguais ao ponto médio correspondente, pode-se calcular a média salarial dos funcionários do estabelecimento de modo simplificado. Agora, adicionamos o total das faixas e dividimos pelo número total de funcionários:

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 3000 + 13 \cdot 5000 + 8 \cdot 7000}{4 + 13 + 8} = \frac{133000}{25} = 5320$$

Portanto, a média salarial dos funcionários do estabelecimento é R$ 5.320,00.

Cálculo do desvio padrão

O cálculo das medidas de dispersão (variância e desvio padrão) em relação à média está apoiado na mesma suposição: dentro de cada intervalo, os valores distribuem-se de maneira simétrica em torno do ponto médio (x_i). Na prática, admitimos que todos os valores do intervalo coincidem com x_i.

Salário (em reais)	Ponto médio do intervalo x_i (em reais)	Desvio quadrático $\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ (em reais)	Quantidade de funcionários
2000 ⊢ 4000	3000	$(3000 - 5320)^2$	4
4000 ⊢ 6000	5000	$(5000 - 5320)^2$	13
6000 ⊢ 8000	7000	$(7000 - 5320)^2$	8

Dados elaborados para fins didáticos.

A variância (σ^2), como se sabe, é a média aritmética desses desvios quadráticos, ponderada pelas respectivas frequências absolutas (quantidade de funcionários) de cada intervalo:

$$\sigma^2 = \frac{4 \cdot (3000 - 5320)^2 + 13 \cdot (5000 - 5320)^2 + 8 \cdot (7000 - 5320)^2}{25} = 1817600$$

Desse modo, a variância dos salários é 1817600 (reais)^2, e o desvio padrão dos salários é:

$$\sigma = \sqrt{1817600\ (\text{reais})^2} \simeq 1348{,}18 \text{ reais}$$

Determinação da classe modal

Define-se **classe modal** como aquela que apresenta maior frequência absoluta. No exemplo, a classe modal é 4000 ⊢ 6000, pois há 13 valores pertencentes a esse intervalo (as outras frequências são menores: 4 e 8).

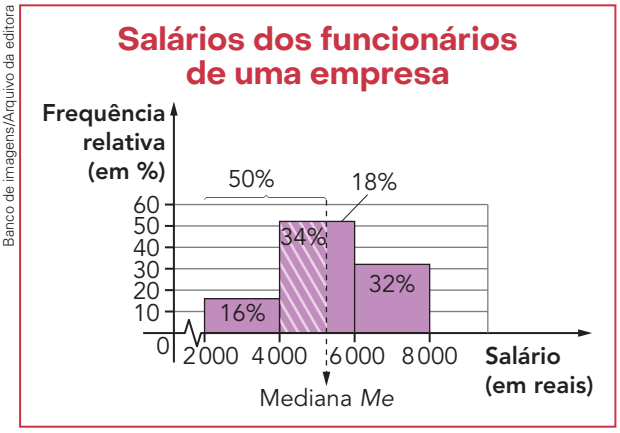
Cálculo da mediana

Analise no histograma as porcentagens aproximadas de cada intervalo do exemplo anterior.

Da leitura do gráfico, nota-se que, ao final dos 2 primeiros intervalos, encontram-se acumulados 68% do total de dados (16% + 52% = 68%).

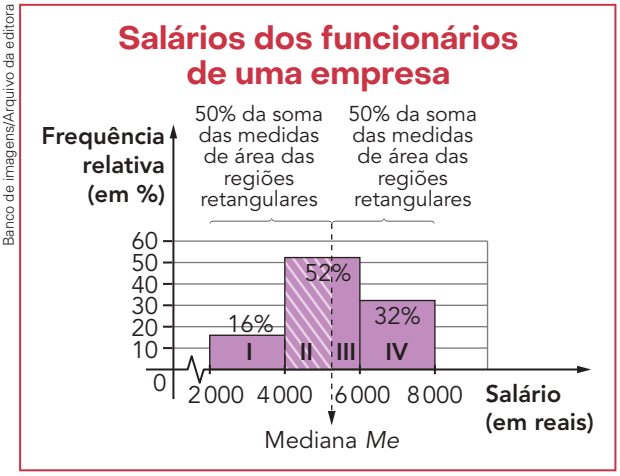
Assim, conclui-se que a mediana se encontra no 2º intervalo. Do limite inferior do 1º intervalo (2 000) até a mediana, concentram-se 50% do total de dados (16% + 34% = 50%).

Banco de imagens/Arquivo da editora



Dados elaborados para fins didáticos.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Dados elaborados para fins didáticos.

Note que, no 2º intervalo do gráfico, a região retangular hachurada e a região retangular central (que representa a frequência do 2º intervalo) têm a mesma medida da altura. Assim, tem-se que a medida de área de cada uma dessas regiões retangulares (expressa como porcentagem da medida de área total sob o histograma) é diretamente proporcional à medida de sua base, ou seja:

$$\frac{Me - 4\,000}{34\%} = \frac{6\,000 - 4\,000}{52\%} \Rightarrow Me \simeq 5\,307{,}69$$

Portanto, a mediana é aproximadamente R$ 5.307,69.

Outro modo de calcular a mediana quando os dados estão representados em um histograma é a partir do cálculo direto das medidas de área das barras. A mediana encontra-se em uma posição no eixo horizontal de modo que a soma das medidas de área das regiões retangulares à sua esquerda seja igual à soma das medidas de área das regiões retangulares à sua direita.

Tomando a frequência relativa e a amplitude de cada intervalo como, respectivamente, as medidas da altura e da base de cada região retangular, tem-se que a soma das medidas de área de todas as regiões retangulares é:

$$(4\,000 - 2\,000) \cdot 16 + (6\,000 - 4\,000) \cdot 52 + (8\,000 - 6\,000) \cdot 32 = 200\,000$$

Perceba que, assim, é possível saber a qual das barras a mediana pertence. Calculamos:

$$A_I + A_{II} = A_{III} + A_{IV}, \text{ isto é, } A_I + A_{II} = \frac{200\,000}{2} = 100\,000$$

Assim, $A_I + A_{II} = (4\,000 - 2\,000) \cdot 16 + (Me - 4\,000) \cdot 52 = 100\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow (Me - 4\,000) \cdot 52 = 68\,000 \Rightarrow Me \simeq 5\,307{,}69$.

Logo, a mediana é aproximadamente R$ 5.307,69.

6. b) $\bar{x} = \frac{50 \cdot 400 + 85 \cdot 600 + 40 \cdot 800 + 25 \cdot 1\,000 + 20 \cdot 1\,200}{220} \simeq 690{,}91$; ou seja, aproximadamente R$ 690,91.

7. b) Taxa média: 60,75%; taxa mediana: aproximadamente 58,92%; classe modal: 52% ⊢ 62%.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

5. Durante 60 dias, anotou-se a quantidade de cartas entregues, diariamente, em um edifício. Os resultados estão apresentados na tabela.

Cartas entregues, por dia, no edifício

Quantidade de cartas	Frequência absoluta (F_a)
20 ⊢ 30	5
30 ⊢ 40	9
40 ⊢ 50	20
50 ⊢ 60	18
60 ⊢ 70	8

Dados elaborados para fins didáticos.

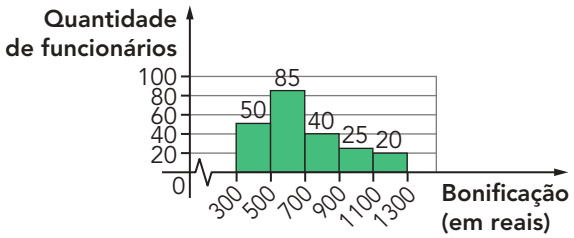
Determine a média, a mediana e a classe modal dos dados apresentados.

Média: 47,5; mediana: 48; classe modal: [40, 50[.

6. No gráfico a seguir está representada a distribuição de bonificações de fim de ano concedidas aos funcionários de um estabelecimento. Considere que cada intervalo de valores é fechado no menor valor e aberto no maior. Por exemplo, a primeira faixa corresponde às bonificações no intervalo [300, 500[.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Bonificações de fim de ano



Dados elaborados para fins didáticos.

a) Qual é a quantidade de funcionários desse estabelecimento?

50 + 85 + 40 + 25 + 20 = 220; logo, 220 funcionários.

b) Qual é o valor médio das bonificações?

c) Qual é a classe modal das bonificações?

500 a 700

7. Uma companhia de ônibus registrou a taxa de ocupação (em %) de suas viagens entre Goiânia e Brasília durante 40 dias:

43, 66, 54, 75, 78, 61, 48, 50, 53, 60, 60, 86, 61, 60, 55, 62, 45, 57, 61, 40, 32, 49, 52, 48, 69, 70, 68, 80, 82, 79, 39, 48, 84, 76, 36, 61, 91, 81, 65, 55.

a) Considerando classes de amplitude 10 a partir de 32%, construa no caderno um histograma correspondente.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

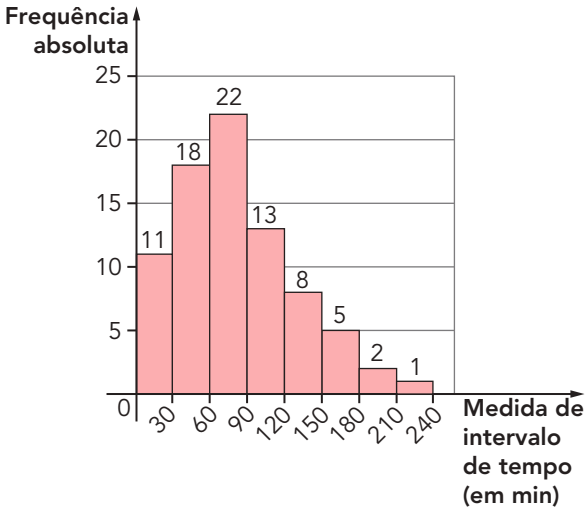
b) Calcule, no caderno, a taxa média, a taxa mediana e a classe modal de ocupação, considerando os dados agrupados.

c) Qual é o desvio padrão da taxa de ocupação, considerando os dados agrupados? Para facilitar os cálculos, aproxime o valor da taxa média calculada no item anterior para o número inteiro mais próximo.

Aproximadamente 14,44%.

8. Um provedor de internet mediu, por meio de uma amostragem, a medida de intervalo de tempo (em minutos) de uso diário da rede por seus assinantes. Com os dados obtidos na pesquisa, construiu-se o histograma a seguir:

Medida de intervalo de tempo de uso da internet



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Qual é a porcentagem do total de assinantes cuja medida de intervalo de tempo de uso da internet é maior do que ou igual a 30 min e menor do que 1 h 30 min? 50%

b) Quais são a média e a mediana da medida de intervalo de tempo de uso da internet?

Média: 81,375 min; mediana: 75 min.

c) A partir do histograma apresentado, elabore no caderno outro histograma agrupando as medidas de intervalo de tempo de hora em hora. Calcule a média, a mediana e o desvio padrão desses dados agrupados de hora em hora.

O gráfico encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Média: 82,5 min; mediana: 78,86 min; desvio padrão: 48,7 min.

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Saúde* e *Vida Familiar e Social*.

VIRALIZE!



Reprodução/ ONU

Tempo de tela

Você já ouviu a expressão "tempo de tela"? No geral, ela se refere ao tempo que se passa usando eletrônicos que têm uma tela, como computadores ou *smartphones*. Leia a reportagem a seguir, que apresenta dados sobre o tempo de tela da população brasileira, e os perigos de um tempo de tela muito elevado.

Brasileiros passam em média 56% do dia em frente às telas de *smartphones* e computadores

No Brasil, as pessoas passam aproximadamente 16 horas do dia acordadas, mas um dado chama a atenção: [...] são cerca de 56,6% das horas acordadas em frente a telas, ou seja, cerca de nove horas do dia. [...]

Ainda segundo [o levantamento], uma possível explicação para esse tempo poderia estar ligada ao crescimento dos serviços de *streaming on-line*, com dados revelando que 64% dos usuários brasileiros de *smartphones* são assinantes [desse tipo de serviço]. [...]

ESTADO DO DIGITAL NO BRASIL
Usuários de internet no Brasil no início de 2023 era de 181,8 milhões de pessoas. Penetração da internet na população brasileira era de 84,3%
Usuários de internet no Brasil aumentaram 7,1 milhões (+4,1%) entre 2022 e 2023
O Brasil tinha 152,4 milhões de usuários de mídia social em janeiro de 2023, o equivalente a 70,6% da população total
Conexões móveis celulares ativas no Brasil no início de 2023 era de 221,0 milhões, número equivalente a 102,4% da população total

Boa parte dos brasileiros passa muitas horas por dia em frente às telas.



A_B_C/Shutterstock

Apesar dos inúmeros benefícios atrelados à tecnologia [...] o uso excessivo de aparelhos eletrônicos pode ocasionar prejuízos de grande impacto para a saúde física e mental das pessoas [...].

Em contrapartida, mesmo sendo [de] um país altamente tecnológico [...] os habitantes [do Japão] têm as taxas de tempo de tela mais baixas do mundo, com usuários destinando apenas 21,7% de seu tempo para olhar para seus dispositivos.

[...]

Cuidados com a saúde

Não é de hoje que os especialistas alertam para o mal à saúde que o uso excessivo da tecnologia pode causar. Em seu último mapeamento de transtornos mentais, a Organização Mundial da Saúde (OMS) revelou que o Brasil possui a população com maior prevalência de transtorno de ansiedade do mundo e isso não é uma coincidência.

De acordo com [a psicóloga Tatiane Possani, doutora em Psicobiologia pela FFCLRP da USP], o tempo de tela e a ansiedade possuem uma relação positiva, ou seja, quanto maior o uso excessivo de tela, maior a ansiedade, como também quanto maior ansiedade, maior o uso excessivo de tela. "O uso excessivo de aparelhos eletrônicos pode decorrer dos perigos do cenário que vivenciamos, como o medo de ser assaltado, dificuldade financeira, o que pode favorecer ainda mais o isolamento social."

[...]

NAZAR, Susana. Brasileiros passam em média 56% do dia em frente às telas de *smartphones* e computadores. *Jornal da USP*, Ribeirão Preto, 29 junho 2023. Disponível em: https://tedit.net/pz284h. Acesso em: 11 set. 2024.

1. Em muitas situações, ler apenas a manchete pode fazer com que tenhamos uma compreensão errada sobre as informações que serão apresentadas na reportagem.
Isso pode ocorrer porque o autor está buscando despertar a atenção do leitor, ou por um descuido na elaboração do texto.

Responda às perguntas no caderno.

a) Analisando apenas a manchete da notícia, qual é a medida de intervalo de tempo média durante o qual os brasileiros ficam em frente às telas de *smartphones* e computadores? 56% de 1 dia = 56% · 24 h = 13,44 h = 13 h 26 min 24 s.

b) Após a leitura da reportagem, qual é a medida de intervalo de tempo média durante o qual os brasileiros, de fato, ficaram em frente às telas? Cerca de 9 h.

c) Qual é o provável motivo de a medida de intervalo de tempo média em durante o qual os brasileiros ficam em frente às telas de *smartphones* e computadores ser diferente nos itens anteriores?

1. c) A manchete diz: "[...] passa em média 56% do dia em frente às telas [...]". O provável motivo está no trecho "56% do dia". Possivelmente, a pessoa que elaborou a manchete quis dizer: 56% das horas (aproximadamente) do dia em que as pessoas estão acordadas. Note que 56% de 16 h é 8,96 h, que é cerca de 9 h.

2. Realize uma pesquisa com os estudantes da sua turma sobre a medida de intervalo de tempo média diária em frente às telas e faça o que se pede em cada item. As respostas dependem dos dados coletados na pesquisa.

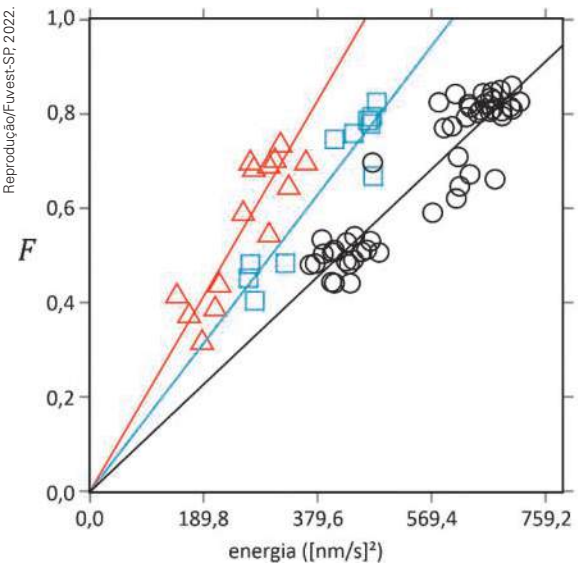
a) A medida de intervalo de tempo média diária em frente às telas da sua turma está acima, abaixo ou é igual à média do brasileiro?

b) A mediana e a moda estão muito distantes da medida de intervalo de tempo média em frente às telas?

c) Determine as medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão) dos dados coletados na sua pesquisa e faça um relatório no caderno, contendo a interpretação dessas medidas e explicando o que significa cada valor encontrado.

PARA FUNDAMENTAR SABERES

1. **(Fuvest-SP)** O gráfico mostra dados coletados na cidade do Rio de Janeiro, entre fevereiro e abril de 2020, período que inclui o início das medidas de restrição da circulação na cidade por causa da pandemia de COVID-19. Para cada dia, representado por um símbolo do gráfico, foram coletadas duas grandezas: uma média de energia de vibração sísmica durante o dia (na abcissa) e o índice F (na ordenada), que é a fração das pessoas que saiu de casa alguma vez naquele dia. A energia sísmica média foi medida em $(nm/s)^2$ na faixa de frequências que tem causas humanas. Os triângulos representam domingos e feriados; os quadrados referem-se aos sábados; e os círculos correspondem aos dias úteis da semana. Para cada um desses subconjuntos de dados, uma reta média foi obtida, expressando a relação aproximada entre as duas grandezas medidas.



Reprodução/Fuvest-SP, 2022.

Dias, F L *et al.* (2020), *Geophysical Research Letters*, 47:16, doi:10.1029/2020GL088748. Adaptado.

Sobre o estudo descrito, o que é possível inferir a partir dos dados apresentados?

Alternativa **d**.

a) Em nenhum sábado, a energia sísmica média registrada superou 380 $(nm/s)^2$.

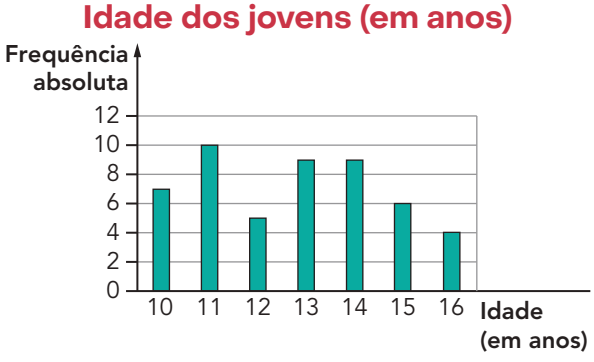
b) Em todos os dias úteis da semana, pelo menos 20% das pessoas permaneceram o tempo todo em casa.

c) Em alguns dos dias de domingo e feriado, a energia sísmica média foi maior do que 600 $(nm/s)^2$.

d) Em dias úteis da semana, a energia sísmica média foi maior ou igual do que em sábados, domingos e feriados, para o mesmo número de pessoas que saiu de casa em um dia.

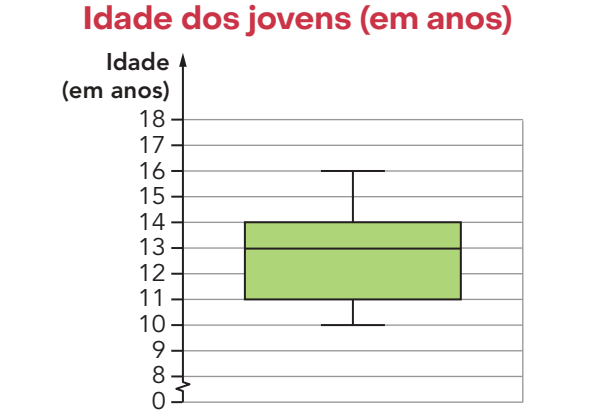
e) Aos sábados, uma medição de energia sísmica média de 190 $(nm/s)^2$ indica que mais de 60% das pessoas saíram de casa nesse dia.

2. Em um acampamento de férias há 50 jovens com 10 a 16 anos. A distribuição das idades está apresentada nos gráficos a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.



Dados elaborados para fins didáticos.

a) Apresente no caderno um exemplo de uma medida de centralidade que você consegue obter a partir do gráfico de barras e não consegue obter a partir do *box-plot*, sem que realize cálculo algum. A moda.

b) Apresente no caderno um exemplo de uma informação que você consegue obter a partir do *box-plot* e não consegue obter a partir do gráfico de barras, sem que realize cálculo algum. Pelo menos 50% dos jovens têm até 13 anos de idade.

c) Se a recreação do acampamento resolve apresentar um filme em que a classificação indicativa é de no mínimo 14 anos, qual dos gráficos é indicado para saber quantos jovens poderão assistir ao filme? O de barras.

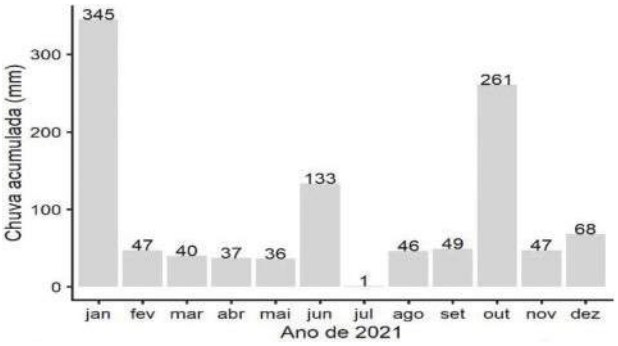
d) Se a recreação deseja verificar em qual intervalo entre:

- valor mínimo e Q_1;
- Q_1 e Q_2;
- Q_2 e Q_3;
- Q_3 e valor máximo,

há uma concentração maior de jovens, sem que efetue cálculo algum, qual é o gráfico mais indicado? *Box-plot.*

e) Se a recreação deseja saber a idade média dos jovens, qual das representações fornecerá os dados para o cálculo da idade média? E para o cálculo da idade mediana? O gráfico de barras. Ambos.

3. (UFGD-MS) O município de Dourados, Mato Grosso do Sul, registrou no ano de 2021 um total de 1100 milímetros (mm) de chuvas. A figura a seguir apresenta os valores do acumulado das chuvas, em mm, em todos os meses desse referido ano. Nesse período, a média mensal foi de 92,5 mm com um desvio padrão de 100,0 mm.



Reprodução/UFGD-MS, 2023.

Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária- Embrapa. Embrapa Agropecuária Oeste – Guia Clima. Disponível em: https://clima.cpao.embrapa.br/. Acesso em: 3 set. 2022.

Considerando-se que, no ano de 2022, o acumulado de chuvas em cada um dos doze meses apresentasse acréscimo de 10 mm, quais seriam os resultados da média e do desvio padrão em 2022? Alternativa **d.**

a) Média de 92,5 mm e desvio padrão de 110,0 mm.

b) Média de 102,5 mm e desvio padrão de 110,0 mm.

c) Média de 92,5 mm e desvio padrão de 100,0 mm.

d) Média de 102,5 mm e desvio padrão de 100,0 mm.

e) Média de 92,5 mm e desvio padrão de 90,0 mm.

Nesta Unidade, foram estudados novos conceitos relacionados ao campo da Estatística. Foram apresentadas as medidas de posição e as medidas de dispersão. Além disso, foi apresentada outra maneira de representar os dados, o *box-plot*. Respostas pessoais.

1. Consigo calcular as medidas de posição e as medidas de dispersão de um conjunto de dados? E de um conjunto de dados agrupados em classes?
2. Consigo verificar se um conjunto de dados é menos disperso, em relação à média, do que outro?
3. Consigo ler e representar dados em um *box-plot*?
4. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
5. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas, exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

Unidade

5 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As estações do ano

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

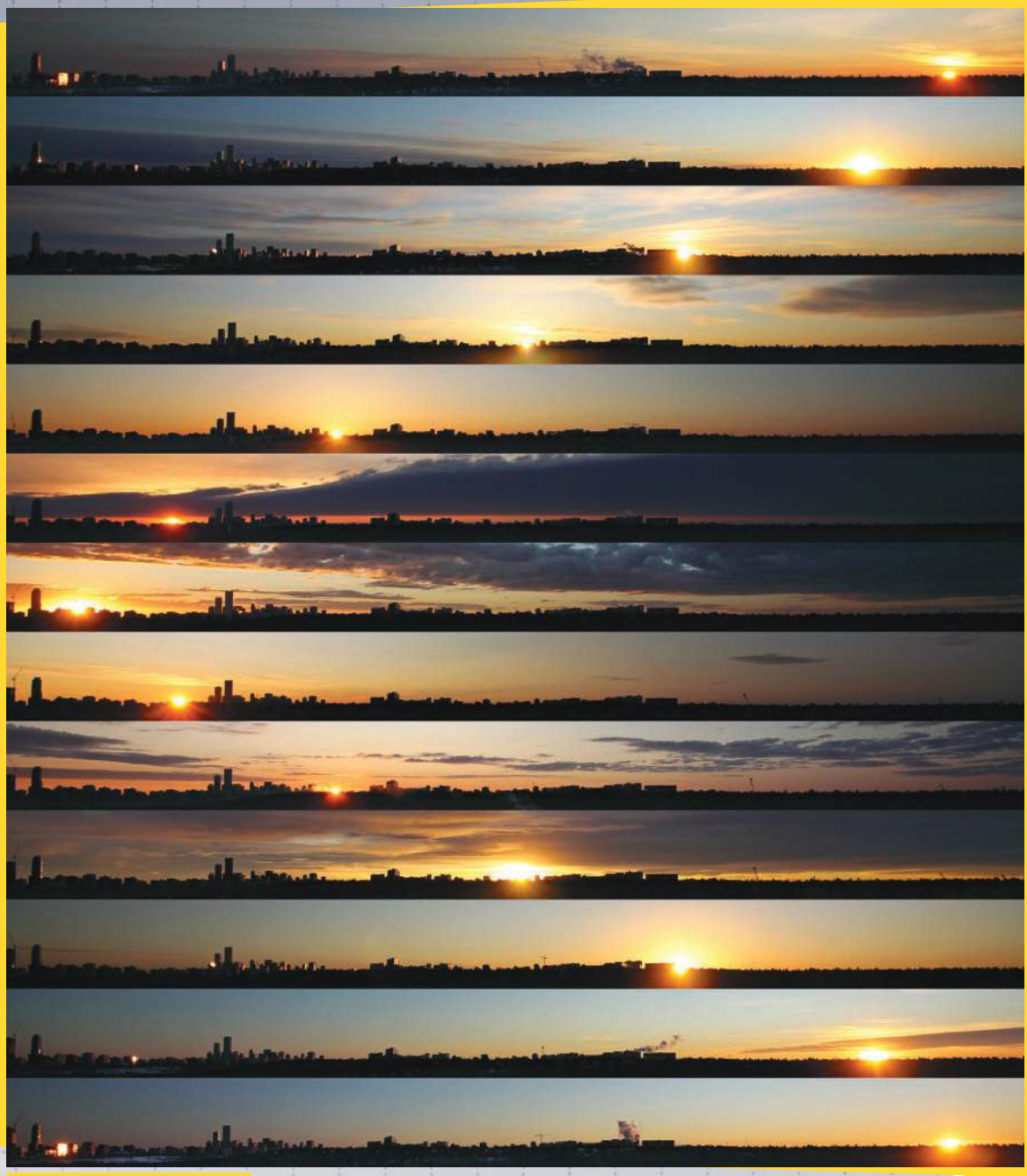
Em geral, é comum ouvirmos que o Sol nasce no leste e se põe no oeste, independentemente do dia ou da estação do ano. No entanto, o astro não nasce todos os dias no mesmo ponto. Esse fenômeno, em geral, passa despercebido, já que a maioria das pessoas vive em cidades e não observa diariamente o nascer do Sol.

Para registrar essa variação nos locais onde o Sol nasce, um astrônomo canadense registrou durante 1 ano fotos do nascer do Sol, registradas sempre de um mesmo local.

Saber onde o Sol nasce é importante, por exemplo, para a Arquitetura, na hora de projetar uma casa ou prédio comercial, por exemplo, levando em consideração que paredes receberão maior incidência da luz solar, analisando assim onde projetar a posição de janelas, lavanderias, etc.

À medida que o planeta Terra orbita em torno do Sol, com o equador inclinado em 23,5° em relação ao plano orbital (plano que contém a órbita da Terra), muda o paralelo da Terra que recebe incidência direta da luz solar ao meio-dia. Disso resultam as estações do ano.

Fonte dos dados: BEDAQUE, P.; BRETONES, P. S. Variação da posição de nascimento do Sol em função da latitude. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 38, n. 3, 2016. Disponível em: https://tedit.net/aeqb2g. SARAIVA, M. F. O. *et al. Movimento anual do Sol e estações do ano*. Disponível em: https://tedit.net/3d6524. Acesso em: 26 ago. 2024.



Luca Vanzella/Acervo do fotógrafo

Edmonton, no Canadá.
Fotos de dezembro de 2020
a dezembro de 2021.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

Não escreva no livro

1. Faça uma pesquisa sobre a relação entre a inclinação da Terra e as estações do ano, justificando a frase final do texto de abertura.
2. Você nota alguma periodicidade na ocorrência das estações do ano? Pesquise um fator que justifique sua afirmação.

As respostas dependem das pesquisas realizadas pelos estudantes.

Imagem de fundo: Mateus André/Freepik

capítulo

10 Fenômenos periódicos e função seno

Pense nisto: Diversas atividades são impactadas pelo movimento das marés. Exemplo de resposta: Em muitos locais, a pesca é a principal atividade econômica local; por isso, é fundamental conhecer a medida da altura das marés para uma navegação segura.

Fenômenos periódicos

Na tabela a seguir, constam as previsões de maré alta e maré baixa durante 3 dias consecutivos de maio de 2023 para o porto de Ilhéus, no sul do estado da Bahia.

Maré no Porto de Ilhéus* – BA

Data	Horário	Medida da altura (em m)
Quinta-feira 18/5/2023	2 h 17 min	2,0
	8 h 38 min	0,2
	14 h 38 min	2,0
	20 h 51 min	0,3
Sexta-feira 19/5/2023	2 h 58 min	2,0
	9 h 17 min	0,2
	15 h 19 min	2,0
	21 h 26 min	0,4
Sábado 20/5/2023	3 h 34 min	2,0
	9 h 56 min	0,2
	16 h 02 min	2,0
	22 h 04 min	0,5

*Longitude: 39° 01,6' W; 40 Componentes; Latitude: 14° 46,8' S. Instituição: DHN; Fuso: +3,0 horas; Nível Médio: 1,12 m; Carta: 1201.

Fonte dos dados: MARINHA DO BRASIL. *Porto de Ilhéus* – Malhado (estado da Bahia) – 2023 [dados de maré]. Brasil, 2023. Disponível em: https://tedit.net/y1oc4o. Acesso em: 26 ago. 2024.

Não escreva no livro

Pense nisto

Por que é importante conhecer a medida da altura das marés?



Joa Souza/Shutterstock

Porto de Ilhéus (BA). Foto de 2024.

Note que as previsões eram as seguintes:

- As marés altas ocorreriam aproximadamente de 12 em 12 horas.
- As marés baixas ocorreriam também aproximadamente de 12 em 12 horas.
- As medidas da altura das marés altas se repetiriam de 12 em 12 horas: todas as medidas de altura previstas para a maré alta são de 2,0 m.
- As medidas da altura das marés baixas não são todas iguais, as medidas variam de 0,2 m a 0,5 m. Nota-se que o valor 0,2 m se repete 3 vezes e pode ser considerado referência para a medida da altura da maré baixa.

Neste capítulo, analisaremos alguns fenômenos que se repetem em medidas de intervalos de tempo regulares, como o movimento das marés. Esses eventos são chamados **fenômenos** ou **movimentos periódicos**.

A menor medida de intervalo de tempo em que ocorre a repetição de determinado fato ou fenômeno é chamada de **período**.

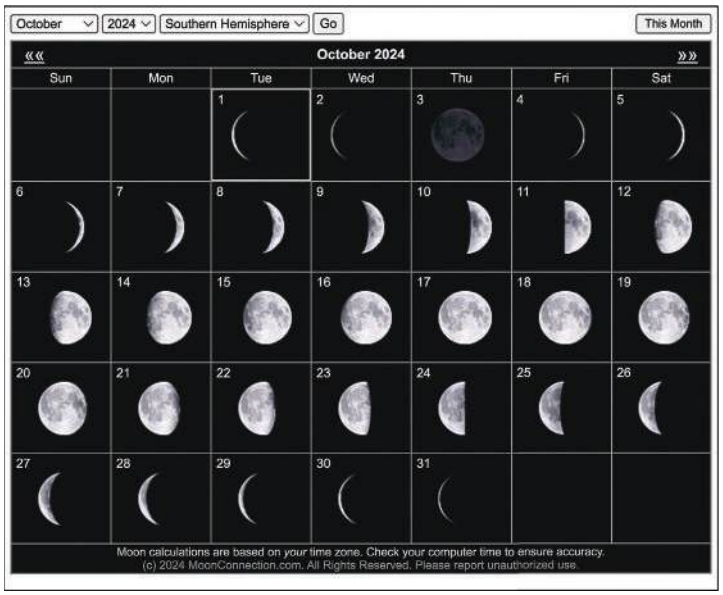
No dia a dia, encontramos diversos fenômenos periódicos. Conheça alguns deles:

- Os dias da semana repetem-se de 7 em 7 dias, de 14 em 14 dias, de 21 em 21 dias, etc.
- O ciclo de fases de um semáforo (verde, amarelo, vermelho) repete-se em intervalos de tempo regulares, a depender das características da rua onde está instalado.
- Em alguns estilos musicais, uma sequência de notas ou batidas se repete a cada medida de intervalo de tempo, definida pelo compositor, formando os compassos musicais.

As fases da Lua

Muitos fenômenos astronômicos são aproximadamente periódicos, e a mudança de fases da Lua é um deles. Esse ciclo, especialmente curto em comparação com outros astros, é um exemplo interessante de se estudar.

Reprodução/MoonConnection



Calendário de outubro de 2024 mostrando as fases da Lua e de que modo são vistas a cada dia do mês por um observador no hemisfério sul.

À medida que a Lua viaja ao redor da Terra ao longo do mês, ela passa por um ciclo de fases, durante o qual sua forma parece variar gradualmente. [...]

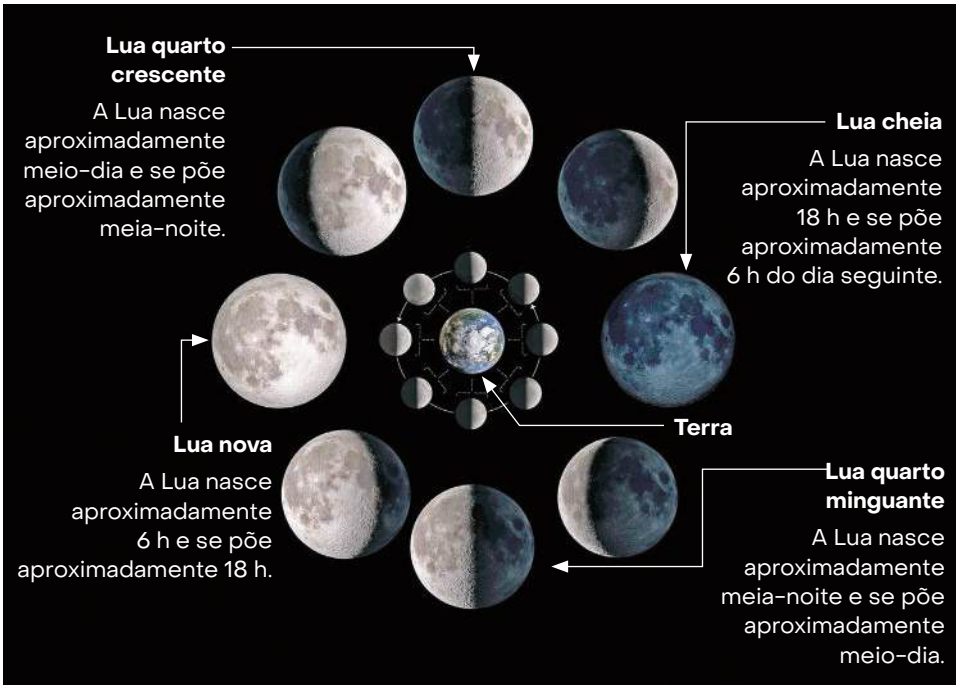
A face iluminada da Lua é aquela que está voltada para o Sol. A fase da Lua representa o quanto dessa face iluminada pelo Sol está voltada também para a Terra. Durante metade do ciclo, essa porção está aumentando (lua crescente) e durante a outra metade ela está diminuindo (lua minguante). Tradicionalmente apenas as quatro fases mais características do ciclo – Lua Nova, Quarto-Crescente, Lua Cheia e Quarto-Minguante – recebem nomes, mas a porção que vemos iluminada da Lua, que é a sua fase, varia de dia para dia. Por essa razão os astrônomos definem a fase da Lua em termos de número de dias decorridos desde a Lua Nova (de 0 a 29,5) e em termos de fração iluminada da face visível (de 0% a 100%). [...]

O intervalo de tempo médio entre duas fases iguais consecutivas é de 29d 12h 44m 2,9s (≃ 29,5 dias). Esse período é chamado **mês sinódico**, ou **lunação**, ou **período sinódico da Lua**. [...]

OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. Fases da Lua. *Astronomia e Astrofísica* [Departamento de Astronomia do Instituto de Física da UFRGS], Porto Alegre, 11 jan. 2021. Disponível em: https://tedit.net/qg6fb8. Acesso em: 26 ago. 2024.

As imagens não estão representadas em proporção.

Analise a ilustração a seguir, em que as imagens da Lua na circunferência maior representam as diferentes fases observadas por uma pessoa localizada no hemisfério sul.



Castleski/Shutterstock

Perspectiva artística das fases da Lua vistas por um observador localizado no hemisfério sul.

Não escreva no livro

Pense nisto

As fases da Lua são determinadas pelo padrão de repetição de movimento ao redor da Terra. Quais padrões convencionaram a divisão em um ciclo de 4 fases e não de 8?

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Estudo de funções periódicas

Na Matemática, há funções que apresentam um comportamento periódico.

Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida pela lei $f(x) = (-1)^x$. Analise na tabela alguns valores que f assume à medida que x varia em $\mathbb{N}$:

x	0	1	2	3	4	5	...
$f(x)$	1	–1	1	–1	1	–1	...

Note que, se x é par, $f(x) = 1$ e, se x é ímpar, $f(x) = -1$.

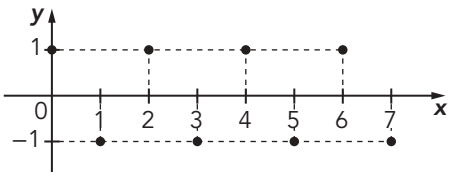
Além disso:

- $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = f(8) = \ldots = 1$
- $f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = \ldots = -1$

Nos 2 casos, quando x varia por 2 unidades, o valor de $f(x)$ se repete:

$$f(x) = f(x + 2) = f(x + 4) = f(x + 6) = \ldots$$

O menor valor positivo de p para o qual $f(x) = f(x + p)$ é 2. Dizemos então que o período dessa função é 2. Analise o gráfico de f:



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Pense nisto: Sim. Se o expoente x é par, $f(x) = 2$ e, se x é ímpar, $f(x) = -2$. Como $f(0) = f(2) = f(4) = \ldots = 2$ e $f(1) = f(3) = f(5) = \ldots = -2$, f é periódica e o período dela é igual a 2.

Pense nisto

A função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 2 \cdot (-1)^x$ apresenta comportamento periódico?

Uma função $f: A \to B$ com $A, B \subset \mathbb{R}$ é periódica se existir um número real positivo p tal que $f(x) = f(x + p)$, $\forall\, x \in A$. O menor valor positivo de p é chamado de **período** de f.

Note que o conjunto imagem da função é $Im(f) = \{-1; 1\}$.

Vamos revisar a tabela apresentada no início deste capítulo e identificar as características importantes dela, para representar um modelo de função periódica que a descreva. Para isso, consideraremos o intervalo de tempo, medido em horas, desde 0 h 00 min do dia 18/5/2023 até 00 h 00 min do dia 21/5/2023, e faremos as conversões necessárias para determinar a medida de intervalo de tempo em horas.

Maré no Porto de Ilhéus* – BA

Data	Conversão da unidade de medida	Medida de intervalo de tempo (em h)	Medida da altura (em m)
Quinta-feira 18/05/2023	2 h 17 min ≃ 2,28 h	2,28	2,0
	8 h 38 min ≃ 8,63 h	8,63	0,2
	14 h 38 min ≃ 14,63 h	14,63	2,0
	20 h 51 min = 20,85 h	20,85	0,3
Sexta-feira 19/05/2023	24 h + 2 h 58 min ≃ 26,97 h	26,97	2,0
	24 h + 9 h 17 min ≃ 33,28 h	33,28	0,2
	24 h + 15 h 19 min ≃ 39,32 h	39,32	2,0
	24 h + 21 h 26 min ≃ 45,43 h	45,43	0,4
Sábado 20/05/2023	48 h + 3 h 34 min ≃ 51,57 h	51,57	2,0
	48 h + 9 h 56 min ≃ 57,93 h	57,93	0,2
	48 h + 16 h 02 min ≃ 64,03 h	64,03	2,0
	48 h + 22 h 04 min ≃ 70,07 h	70,07	0,5

Fonte dos dados: MARINHA DO BRASIL. *Porto de Ilhéus* - Malhado (estado da Bahia) - 2023 [dados de maré]. Brasil, 2023. Disponível em: https://tedit.net/y1oc4o. Acesso em: 26 ago. 2024.

*Longitude: 39° 01,6' W; 40 Componentes; Latitude: 14° 46,8' S.
Instituição: DHN; Fuso: +3,0 horas; Nível Médio: 1,12 m; Carta: 1201.

Não escreva no livro

Pense nisto

Como foram obtidas as medidas de intervalo de tempo em horas?

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Cada instante de tempo corresponde a uma medida específica da altura da maré. Assim, estabelecemos uma função entre a medida da altura da maré, em metros, e a medida de intervalo de tempo, em horas.

Sendo $h(x)$ a medida da altura da maré em função do instante x, o domínio da função é o conjunto composto de todos os valores possíveis para o instante, o contradomínio da função é um conjunto que contém os valores possíveis da medida da altura e o conjunto imagem da função é o conjunto de valores que a medida da altura da função assumiu durante o período analisado. Logo temos:

- o domínio da função ($D(h)$): $[0, 72]$.
- o contradomínio da função ($CD(h)$): $\mathbb{R}$.
- o conjunto imagem ($Im(h)$): $[0{,}2; 2{,}0]$.

Com esses dados, podemos buscar um tipo de função que se adeque aproximadamente à situação descrita. Em geral usamos as **funções trigonométricas**, em que associamos a qualquer número real um ponto da circunferência trigonométrica, como base para os modelos.

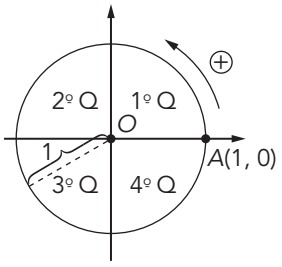
Funções trigonométricas

Como apresentaremos a seguir, as funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas e podem modelar vários fenômenos periódicos ou aproximadamente periódicos. Neste e no próximo capítulo, estudaremos 2 funções trigonométricas: a **função seno** e a **função cosseno**.

Antes de iniciarmos esse estudo, vamos retomar o conceito de circunferência trigonométrica.

Retomando a circunferência trigonométrica

A circunferência trigonométrica é uma circunferência cujo raio mede 1 unidade de medida de comprimento e com centro na origem do plano cartesiano. Os eixos do plano cartesiano dividem a circunferência em 4 setores congruentes, denominados quadrantes, que estão indicados na figura por 1º Q, 2º Q, 3º Q e 4º Q, respectivamente chamados primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes.



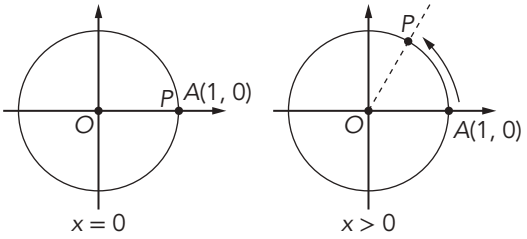
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Por convenção, todos os arcos nessa circunferência têm origem no ponto $A(1, 0)$ e o sentido positivo é o anti-horário, conforme imagem.

Além disso, associamos cada número real x, $0 \leqslant x < 2\pi$, a um único ponto P da circunferência trigonométrica, de modo que:

- se $x = 0$, P coincide com o ponto $A(1, 0)$;
- se $x > 0$, descrevemos, com início em A, no sentido anti-horário, um arco de medida de comprimento x cujas extremidades são A e P.

A medida de comprimento do arco $\overset{\frown}{AP}$ é x.



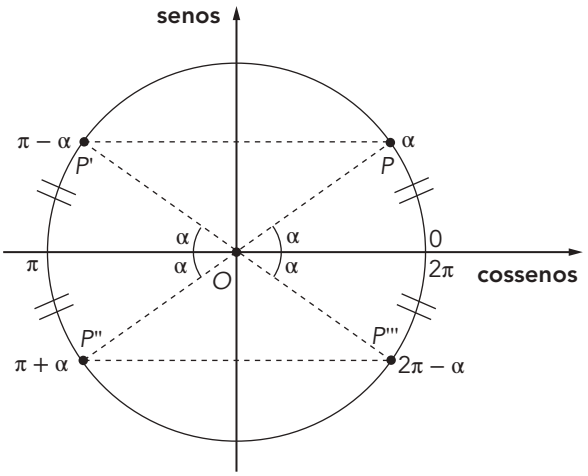
Outra propriedade que a circunferência apresenta são as simetrias.

Sendo P o ponto (do primeiro quadrante) associado ao número real α, temos os 3 casos de simetria:

- O simétrico de P em relação ao eixo vertical é o ponto P', associado ao número real $\pi - \alpha$;
- O simétrico de P em relação ao centro da circunferência é o ponto P'', associado ao número real $\pi + \alpha$;
- O simétrico de P em relação ao eixo horizontal é o ponto P''', associado ao número real $2\pi - \alpha$.

As 3 simetrias apresentadas podem ser justificadas pela congruência dos ângulos centrais assinalados na figura.

Por fim, o eixo vertical pode ser denominado **eixo dos senos**, e o horizontal, **eixo dos cossenos**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

As demais voltas na circunferência trigonométrica

Quando definimos a circunferência trigonométrica, associamos a cada ponto dela um número real pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$.

Essa associação tem caráter biunívoco, ou seja, além de cada ponto da circunferência estar associado a um único número real x, com $x \in [0, 2\pi[$, também, reciprocamente, cada número real desse intervalo associa-se a um ponto da circunferência trigonométrica.

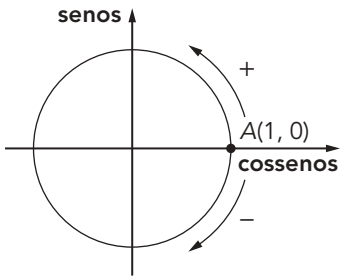
Vamos estender o intervalo dessa associação:

Cada número real está associado a um ponto da circunferência.

Isso permitirá definir as **funções trigonométricas** (ou funções circulares), além de garantir o caráter cíclico (ou periódico) delas.

Anteriormente, trabalhamos apenas na "primeira volta", ou seja, no intervalo $[0, 2\pi[$. Agora, ao incluirmos números reais negativos e os números reais maiores do que 2π ou iguais a ele, poderemos ampliar nosso estudo para as demais voltas.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Como podemos determinar o ponto P associado ao número x?

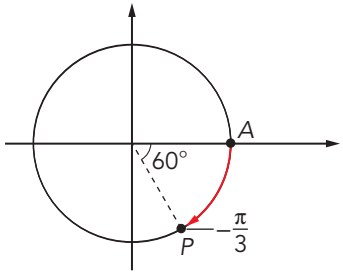


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- Se $x > 0$, partimos do ponto $A(1, 0)$ e percorremos, no sentido anti-horário, um arco de medida de comprimento x (e medida angular de abertura x rad), cujas extremidades são A e P.
- Se $x < 0$, partimos do ponto $A(1, 0)$ e percorremos, no sentido horário, um arco de medida de comprimento $|x|$, cujas extremidades são A e P.
- Se $x = 0$, o ponto associado P é o próprio ponto A.

Acompanhe os exemplos.

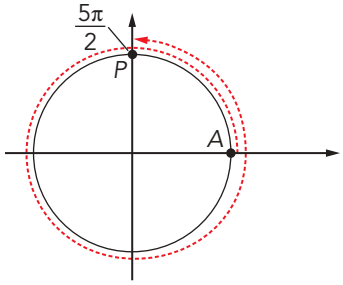
- $x = -\frac{\pi}{3}$



P é o ponto associado a $x = -\frac{\pi}{3}$.

A medida de comprimento do arco $\overset{\frown}{AP}$ é igual a $\left|-\frac{\pi}{3}\right| = \frac{\pi}{3}$.

- $x = \frac{5\pi}{2}$

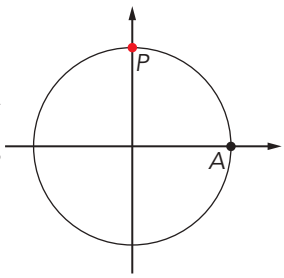


Note que:

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \underbrace{2\pi}_{\substack{1 \text{ volta} \\ \text{completa}}}$$

P é o ponto associado a $x = \frac{5\pi}{2}$, e a medida de comprimento do arco $\overset{\frown}{AP}$ é $\frac{5\pi}{2}$ u.c.

É possível perceber que um determinado ponto da circunferência trigonométrica está associado a infinitos números reais.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note, por exemplo, o ponto P na circunferência.

Sabemos que P está associado a $\frac{\pi}{2}$. Para obter outros números reais também associados a P, podemos fazer:

- $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{2} + 3 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} + 6\pi = \frac{13\pi}{2}$

⋮

Percorremos, partindo de A, no sentido anti-horário, um arco de medida de comprimento $\frac{\pi}{2}$ e, em seguida, damos 1, 2, 3, ... voltas completas no mesmo sentido.

- $\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{2} - 2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{2} - 3 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} - 6\pi = -\frac{11\pi}{2}$

⋮

Percorremos, partindo de A, no sentido anti-horário, um arco de medida de comprimento $\frac{\pi}{2}$ e, em seguida, damos 1, 2, 3, ... voltas completas no outro sentido (horário).

De modo geral, estão associados a P todos os números reais do tipo:

$\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, sendo k um número inteiro.

Todos os arcos assim representados $\left(..., -\frac{11\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, ...\right)$ têm extremidades em A e P. Eles são chamados **arcos côngruos**.

Não escreva no livro

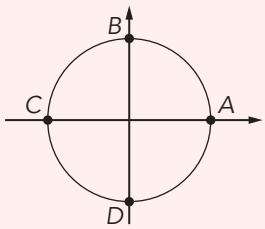
Pense nisto

Se 2 arcos, de medidas α_1 e α_2 radianos, são côngruos, pode-se dizer que $\alpha_1 - \alpha_2 = k \cdot 2\pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$?

Sim. Se $k \in \mathbb{Z}$, $k \cdot 2\pi \in \{..., -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, ...\}$; como α_1 e α_2 diferem de um número inteiro de voltas (pois são côngruos), então $\alpha_1 - \alpha_2 = k \cdot 2\pi$.

Atividades resolvidas

1. Represente, na circunferência trigonométrica, os pontos associados aos números reais x tais que $x = \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

Atribuímos valores inteiros para k:

- $k = -2 \Rightarrow x = -\pi$; associado a C.
- $k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$; associado a D.
- $k = 0 \Rightarrow x = 0$; associado a A.
- $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$; associado a B.
- $k = 2 \Rightarrow x = \pi$; associado a C.

Assim, os pontos associados aos números reais do tipo $\frac{k\pi}{2}$, para k inteiro, são: A, B, C ou D.

2. *A*: $40\pi = 20 \cdot 2\pi$; $-14\pi = 7 \cdot (-2\pi)$; $800\pi = 400 \cdot 2\pi$.
B: $\frac{17\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 8\pi$; $-\frac{11\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} + (-4\pi)$.
C: 13π; -21π e -7π.
D: $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + (-2\pi)$; $\frac{7\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi$; $-\frac{25\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + (-12\pi)$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

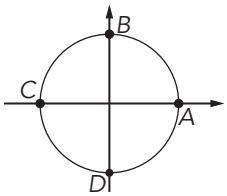
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

1. Agrupe, no caderno, os seguintes números reais de acordo com os quadrantes em que se encontram os respectivos pontos a eles associados na circunferência trigonométrica.

$$-\frac{3\pi}{4};\ \frac{26\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{4};\ -0{,}5;\ \frac{41\pi}{5};\ -\frac{11\pi}{3};\ 10;\ -\frac{49\pi}{10};\ \frac{15\pi}{4}$$

2. Considerando os pontos representados na circunferência trigonométrica, indique, no caderno, a quais dos seguintes números reais cada um deles se associa:

$$13\pi;\ -\frac{5\pi}{2};\ 40\pi;\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{17\pi}{2};\ -21\pi;\ -14\pi;\ -\frac{11\pi}{2};\ -7\pi;\ -\frac{25\pi}{2};\ 800\pi$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

3. Represente, no caderno, uma circunferência trigonométrica e marque nela os pontos associados aos números reais que pertencem aos seguintes conjuntos:

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

4. Os números reais pertencentes ao conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k \cdot \pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$ estão associados aos vértices de um polígono regular inscrito na circunferência trigonométrica.

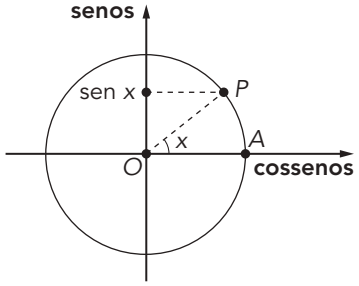
a) Como se chama esse polígono? Hexágono.

b) Calcule as medidas de perímetro e de área desse polígono. Medida de perímetro: 6 u.c.; medida de área: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ u.a.

2. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Função seno

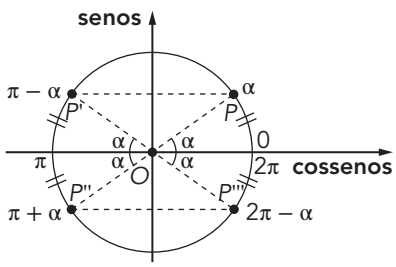
Seja x um número real e P o ponto a ele associado na circunferência trigonométrica, conforme representado. Anteriormente, definimos que o valor de **seno de *x*** é a **ordenada do ponto *P***, como ilustrado na imagem.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = x \text{ rad}$$

Sejam α um número real cujo ponto P a ele associado na circunferência trigonométrica pertence ao 1º Q e P', P'' e P''', respectivamente, os pontos associados aos números reais α, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$ e $2\pi - \alpha$. Vale lembrar que, como os pares de pontos P e P' e P'' e P''' são simétricos em relação ao eixo vertical, temos que:



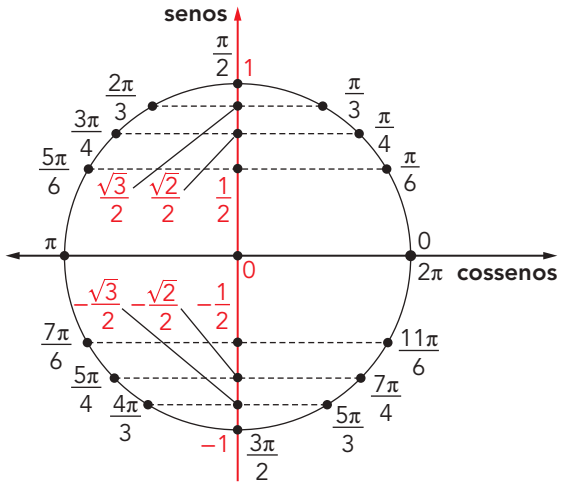
- P e P' apresentam a mesma ordenada, então sen α = sen $(\pi - \alpha)$;
- P'' e P''' apresentam a mesma ordenada, então sen $(\pi + \alpha)$ = sen $(2\pi - \alpha)$.

Além disso, sen 0 = sen π = sen 2π = 0, sen $\frac{\pi}{2} = 1$ e sen $\frac{3\pi}{2} = -1$.

Denominamos **função seno** a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao respectivo seno, isto é, $f(x) = \text{sen } x$.

Assim, f associa cada número real x à ordenada do ponto P na circunferência trigonométrica. É importante lembrar-se de que a ordenada de qualquer ponto pertencente à circunferência trigonométrica varia de -1 a 1, isto é, $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$.

Utilizando os valores conhecidos representados na circunferência trigonométrica a seguir, podemos identificar algumas propriedades da função seno:

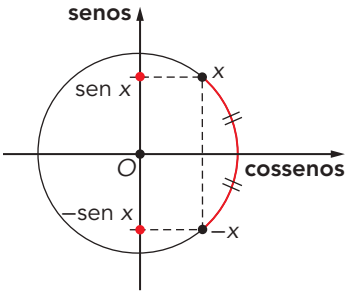


Banco de imagens/Arquivo da editora

- O **sinal** da função f dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é positivo se x pertence ao 1º ou ao 2º quadrante; e é negativo se x pertence ao 3º ou ao 4º quadrante.
- No 1º quadrante, a função f é crescente, pois, à medida que x aumenta, os valores de $y = \operatorname{sen} x$ aumentam de 0 até 1; no 2º e no 3º quadrante, f é decrescente, pois, à medida que x aumenta, os valores de $y = \operatorname{sen} x$ diminuem de 1 (valor máximo) até -1 (valor mínimo); no 4º quadrante, a função retoma o crescimento, e os valores que ela assume aumentam de -1 a 0.

  Em resumo, no 1º Q e no 4º Q f é **crescente** e no 2º Q e no 3º Q f é **decrescente**.
- A função seno é **periódica** e o período dela é 2π. De fato, os números reais x e $x + k \cdot 2\pi$, para k inteiro, estão associados a um mesmo ponto na circunferência trigonométrica e, portanto, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} (x + k \cdot 2\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, f é periódica, e o período p corresponde ao menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, que é 2π.
- O **domínio** e o **contradomínio** de f são iguais a $\mathbb{R}$. No entanto, o **conjunto imagem** da função seno é o intervalo real $[-1, 1]$, pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$, temos:

  $$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Analise a simetria da circunferência e repare que, para $\forall\, x \in \mathbb{R}$, temos:

  $$\operatorname{sen} (-x) = -\operatorname{sen} x$$

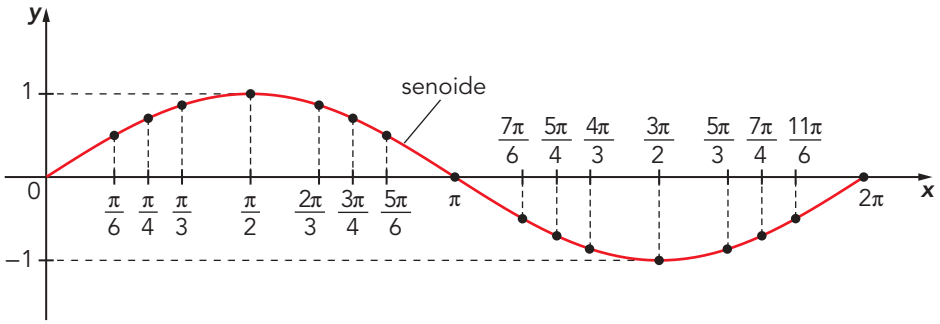
Não. Existem elementos distintos do domínio da função seno que têm como imagem elementos não distintos do contradomínio. Por exemplo, 0, π, 2π, 3π, 4π, ... são tais que $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} \pi = \operatorname{sen} 2\pi = \ldots = 0$.

Não escreva no livro

Pense nisto

Se $x_1 \neq x_2$, então $\operatorname{sen} x_1 \neq \operatorname{sen} x_2$?

Considerando todas as propriedades anteriores, o gráfico a seguir, conhecido como **senoide**, representa um período da função seno f, dada por $f(x) = \text{sen } x$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Representamos no plano apenas um período completo de f. A senoide, no entanto, "continua" para a esquerda de 0 e para a direita de 2π, pois o domínio de f é $\mathbb{R}$. Note que, de -4π a -2π, de -2π a 0, de 2π a 4π, etc., encontraríamos "cópias" do trecho do gráfico representado, devido à periodicidade de f.

Considerando a senoide, é possível obter gráficos de outras funções do tipo seno. Acompanhe, como exemplo, o processo para representar o gráfico de um período da função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 3 \cdot \text{sen } x$. Podemos fazer uma tabela em 3 etapas:

1ª) Atribuímos valores convenientes para x.

2ª) Associamos a x os correspondentes valores de sen x.

3ª) Multiplicamos sen x por 3 a fim de obter a imagem correspondente a cada x.

x	sen x	$y = 3 \cdot \text{sen } x$
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

→

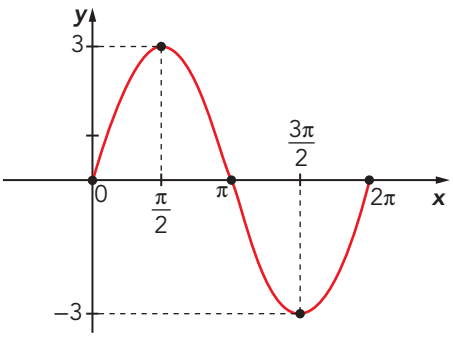
x	sen x	$y = 3 \cdot \text{sen } x$
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	−1	
2π	0	

→

x	sen x	$y = 3 \cdot \text{sen } x$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	3
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	−1	−3
2π	0	0

Note que o período de g é 2π, e o conjunto imagem é $Im(g) = [-3, 3]$.

Perceba que, no gráfico de $y = 3 \cdot \text{sen } x$, para cada x corresponde uma ordenada y que é o triplo da ordenada na senoide ($y = \text{sen } x$).



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto

Não escreva no livro

Sobre o valor da ordenada de $y = 3 \cdot \text{sen } x$ ser o triplo do valor da ordenada de $y = \text{sen } x$, isso vale para qualquer que seja o x do domínio de g?

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Agora, vamos representar o gráfico de um período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen } 2x$. Há 3 etapas na elaboração da tabela:

1ª) atribuímos valores convenientes para $t = 2x$;

2ª) associamos a cada $t = 2x$ o correspondente sen t (ou sen $2x$);

3ª) calculamos os valores de x considerando os valores de t $\left(x = \frac{t}{2}\right)$.

x	$t = 2x$	$y = \text{sen } t = \text{sen } 2x$
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

x	$t = 2x$	$y = \text{sen } t = \text{sen } 2x$
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	$t = 2x$	$y = \text{sen } t = \text{sen } 2x$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	0

Como sabemos, para que sen t complete um período, é necessário que t varie de 0 a 2π, ou seja, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Como $t = 2x$, temos $0 \leqslant 2x \leqslant 2\pi$ e, portanto, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, isto é, $x \in [0, \pi]$.

Assim, o período da função f dada por $y = \text{sen } 2x$ corresponde à medida de comprimento do intervalo $[0, \pi]$, que é $\pi - 0 = \pi$.

Observação

Se a e b são números reais tais que $a > b$, podemos efetuar operações seguindo as propriedades:

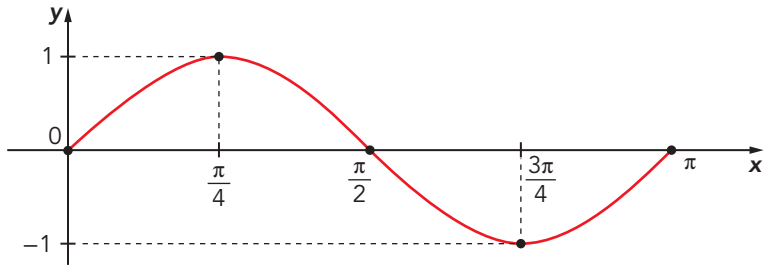
- $a > b \Leftrightarrow a + k > b + k$, em que k é um número real qualquer;
- $a > b \Leftrightarrow ka > kb$, quando k é um número real positivo;
- $a > b \Leftrightarrow ka < kb$, quando k é um número real negativo.

Exemplos: $5 > 3 \Leftrightarrow 5 + 2 > 3 + 2 \Rightarrow 7 > 5$

$$6 > 4 \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{1}{2} > 4 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 3 > 2$$

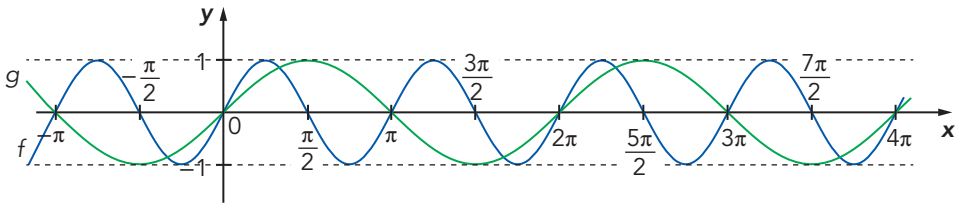
$$8 > 3 \Leftrightarrow 8 \cdot (-2) < 3 \cdot (-2) \Rightarrow -16 < -6$$

Analise, a seguir, um período do gráfico de f (ou $y = \text{sen } 2x$).



Banco de imagens/Arquivo da editora

Agora, no mesmo plano cartesiano, analise os gráficos das funções f e g, dadas por $f(x) = \text{sen } 2x$ e $g(x) = \text{sen } x$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Perceba que o gráfico de f (quando comparado ao gráfico de g) sofreu um achatamento (ou compressão) na horizontal, causado pela redução do período: o período de $g(x) = \text{sen } x$ é igual a 2π e o período de $f(x) = \text{sen } 2x$ é igual a π.

Note ainda que o conjunto imagem de ambas as funções é $[-1, 1]$.

Vamos representar o gráfico de um período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Seguimos o procedimento descrito nos exemplos anteriores:

- Atribuímos valores convenientes para $t = x - \frac{\pi}{3}$.
- Associamos a cada $t = x - \frac{\pi}{3}$ o correspondente $\text{sen } t = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.
- Calculamos os valores de x considerando os valores de t, sendo $x = t + \frac{\pi}{3}$.

x	$t = x - \frac{\pi}{3}$	$y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	0	0
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	π	0
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	−1
$\frac{7\pi}{3}$	2π	0

Não escreva no livro

Pense nisto

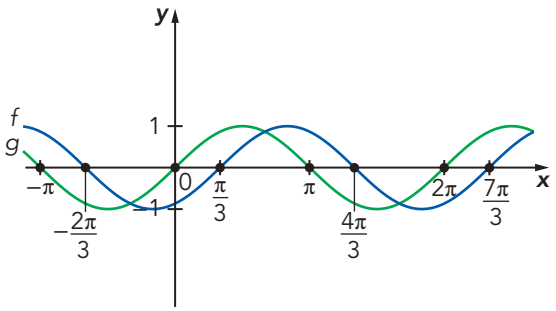
Qual é o conjunto imagem de $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$?

E o período dessa função?

$Im(f) = [-1; 1]$; $p = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi$.

- O gráfico de $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ corresponde ao gráfico da senoide (definida por $y = \text{sen } x$), transladado de $\frac{\pi}{3}$ unidades para a direita, já que adicionamos $\frac{\pi}{3}$ a cada abscissa dos pontos do gráfico da senoide.

Analise os 2 gráficos, $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ e $g(x) = \text{sen } x$, representados no mesmo plano cartesiano.



Banco de imagens/Arquivo da editora

EXPERIMENTE

Não escreva no livro

Representar o gráfico da função seno utilizando um *software* de Geometria dinâmica

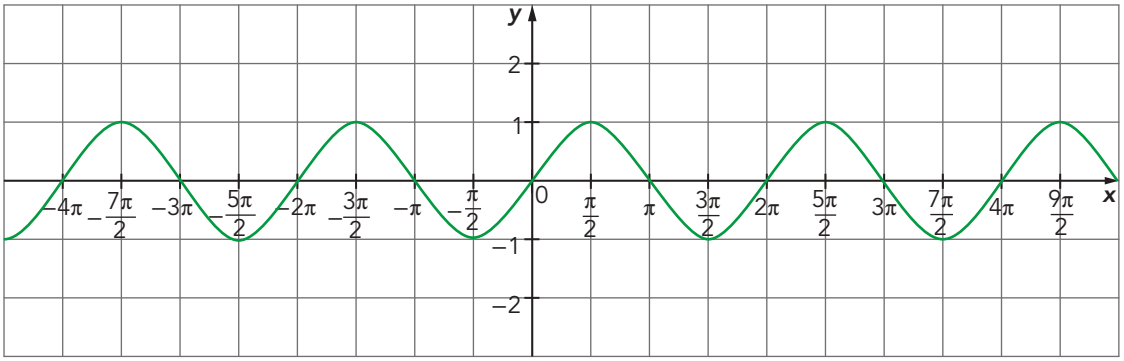
Procure no *software* a ferramenta ou campo que permite representar o gráfico de uma função por meio de uma fórmula. Digite nele a função "y=sen(x)".

Para melhor visualização, confira se é possível alterar a escala apresentada no eixo *x* para que os valores que apareçam sejam múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ e faça esse ajuste.

Agora, você pode verificar, analisando o gráfico da função seno, todas as propriedades citadas anteriormente, como sinal, crescimento, decrescimento, período e conjunto imagem.

Observação

Alguns *softwares* usam o padrão em inglês para suas funções. Nesse caso, a entrada deve ser "y=sin(x)".

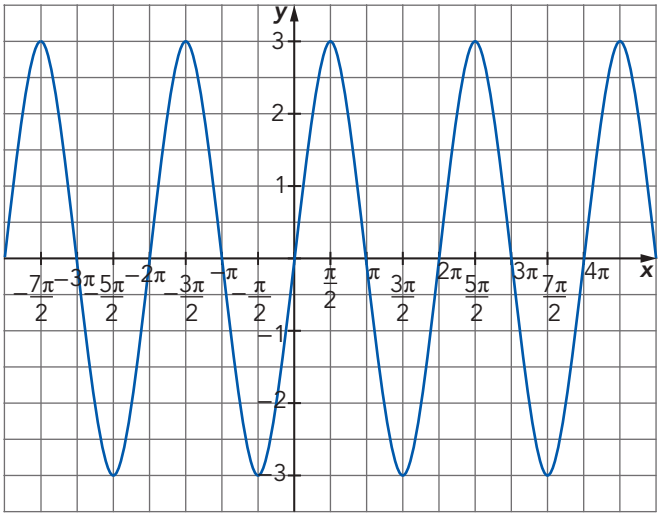


Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico feito em um *software* de Geometria dinâmica.

No gráfico da imagem anterior, é possível verificar 3 períodos completos da função $y = \text{sen } x$ (de -2π a 0, de 0 a 2π e de 2π a 4π).

Podemos também representar outras funções do tipo seno com o auxílio do *software*, alterando os padrões de entrada. Por exemplo, ao digitarmos "y=3*sen(x)" – a maioria dos *softwares* reconhece * como sinal de multiplicação –, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Não escreva no livro

PROJETO





Reprodução/ONU

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **1** e **2** da BNCC e da habilidade **EM13MAT306**.

Estudo das marés

Considere as imagens a seguir. Elas mostram a praia de Porto de Galinhas, em Pernambuco. Em uma imagem, a maré está alta e, na outra, a maré está baixa.

Imagine o que aconteceria com cidades litorâneas se as marés subissem um pouco por ano e atingissem aumentos de mais de 2 m, 5 m ou até 7 m.

Professor, promova uma conversa com os estudantes sobre a importância das tábuas de marés. Além de fornecerem previsões sobre o comportamento do mar em relação ao continente, elas são essenciais para que barcos não encalhem e para que pessoas não fiquem ilhadas ou até mesmo sejam pegas desprevenidas em áreas em que a maré sobe e impede o caminho por terra.

Pensando em um projeto

Desde 1850, há registros das medições do nível do mar, e estima-se que essa medida tenha aumentado aproximadamente 20 centímetros desde então. Embora a variação anual seja muito pequena, cerca de 3 mm, um dos relatórios do Painel Internacional de Mudanças Climáticas (IPCC) alertou que o aumento das marés poderá afetar a vida das pessoas.

Mas por que essas alterações ocorreram e continuarão a ocorrer? Qual é o impacto delas nas cidades litorâneas e nos ecossistemas marinhos? Vamos realizar uma pesquisa amostral sobre o ciclo das marés e criar um infográfico para apresentar os dados encontrados.

As imagens não estão representadas em proporção.



jrslompo/Shutterstock

Praia em Porto de Galinhas (PE) com maré alta. Foto de 2022.



ByDroneVideos/Shutterstock

Praia em Porto de Galinhas (PE) com maré baixa e piscinas naturais. Foto de 2023.

Para começar

- Organizem-se em 7 grupos.

Plano de ação

Etapa 1

Em grupo, analisem quais fatores alteram as marés. Pesquisem como as mudanças climáticas afetam os oceanos, com ênfase às alterações das marés e ao derretimento das geleiras.

Etapa 2

Apresentem as informações coletadas na pesquisa e, com o auxílio do professor, debatam o que cada grupo pesquisou sobre o funcionamento das marés. Listem as causas e os efeitos das mudanças nos oceanos,

Etapa 1: Professor, reforce que, mesmo que a ênfase da pesquisa seja em relação à alteração das marés e ao derretimento das geleiras, aspectos como vida marinha e mudança de medida de temperatura dos oceanos também devem ser considerados.

com ênfase nas mudanças das marés. Verifiquem se os dados coletados pelos grupos são parecidos e identifiquem os pontos de maior interesse para divulgação.

Etapa 3

Escolham uma localidade para a coleta de dados. A Marinha do Brasil disponibiliza tabelas na internet com as medições das marés dos principais portos do Brasil. Procurem pelas cidades com tábuas de marés disponíveis e, considerando essa listagem, decidam qual localidade será estudada.

Etapa 4: Professor, a realização de um infográfico sobre as marés contribui para o ODS **11** e o ODS **14**, pois facilita a compreensão sobre o fluxo de águas e o oceano. Além disso, permite debater os efeitos do lixo e outros resíduos marinhos, bem como a influência das marés nas cidades costeiras.

Etapa 4

Encontrem dados e notícias sobre a localidade escolhida: se possível procurem por tábuas de marés mais antigas. Depois, busquem notícias da cidade relacionadas ao movimento das marés.

Etapa 5

Considerando os conhecimentos adquiridos com o estudo das funções trigonométricas, elabore em um *software* de Geometria dinâmica um gráfico que represente, aproximadamente, a tábua de marés da localidade escolhida.

Caso tenham encontrado uma tábua de marés mais antiga, repitam o processo com essa tábua na mesma malha quadriculada para facilitar a comparação.

Etapa 6

Analisem as informações apresentadas no gráfico feito na etapa anterior. Houve alteração no ciclo das marés no período e região estudados? Considerem inclusive pequenas diferenças de medidas.

Depois, relacionem a resposta com as informações obtidas nas etapas **1** e **2**.

Etapa 7

Analisem os dados e conversem sobre o impacto das alterações no ciclo das marés e do aumento do nível do mar nas cidades e na vida marinha na cidade escolhida. Além disso, desenvolvam propostas de como preservar as cidades costeiras desses fenômenos.



Produto final: produção de um infográfico sobre o comportamento das marés na cidade escolhida.

- Os grupos devem criar um resumo relacionando todas as informações obtidas nas etapas.
- É preciso colocar a fonte de pesquisa nas informações apresentadas e inserir os gráficos criados.
- É necessário, também, ilustrar as informações mais relevantes.

kjpargeter/Freepik

Período da função seno

Sejam a, b, c e d números reais, com $c \neq 0$. A função definida por $y = a + b \cdot \operatorname{sen}(cx + d)$ tem período p dado por $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

De fato, fazendo $t = cx + d$, para que sen t complete um período, é necessário que t varie de 0 a 2π.

$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi \Leftrightarrow 0 \leqslant cx + d \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -d \leqslant cx \leqslant -d + 2\pi$$

- Para $c > 0$, temos: $-\dfrac{d}{c} \leqslant x \leqslant \dfrac{-d + 2\pi}{c}$, isto é, $x \in \left[-\dfrac{d}{c}, \dfrac{-d + 2\pi}{c}\right]$ e o período p é:

$$\frac{-d + 2\pi}{c} - \left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{2\pi}{c}$$

- Para $c < 0$, temos: $-\dfrac{d}{c} \geqslant x \geqslant \dfrac{-d + 2\pi}{c}$, isto é, $x \in \left[\dfrac{-d + 2\pi}{c}, -\dfrac{d}{c}\right]$ e o período p é:

$$-\frac{d}{c} - \left(\frac{-d + 2\pi}{c}\right) = -\frac{2\pi}{c} > 0$$

Reunindo os 2 casos, teremos $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

Assim:

- para a função dada por $f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen} x$, temos o período $\dfrac{2\pi}{|1|} = 2\pi$;
- para a função expressa por $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(-2x)$, o período pode ser determinado por $p = \dfrac{2\pi}{|-2|} = \pi$;
- para a função definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(5\pi x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, temos o período $p = \dfrac{2\pi}{|5\pi|} = \dfrac{2}{5}$.

Atividades resolvidas

2. Calcule o valor de:

a) $\operatorname{sen} \dfrac{19\pi}{4}$ **b)** $\operatorname{sen} 1980°$

Solução:

a) Note que $\dfrac{19\pi}{4} = \dfrac{16\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = \underbrace{4\pi}_{\text{2 voltas completas}} + \dfrac{3\pi}{4}$. Assim, $\dfrac{19\pi}{4}$ e $\dfrac{3\pi}{4}$ estão associados a um mesmo ponto P na circunferência trigonométrica e, portanto, $\operatorname{sen} \dfrac{19\pi}{4} = \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4}$.

Como $\operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4} = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, conclui-se que $\operatorname{sen} \dfrac{19\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Dividindo 1980° por 360°, temos:

$$\begin{array}{r|l} 1980° & 360° \\ \hline -\ 1800° & 5 \\ \hline 180° & \end{array}$$

Assim, $1980° = \underbrace{5 \cdot 360°}_{\text{5 voltas completas}} + 180°$ e, desse modo, 1980° e 180° são arcos côngruos. Daí, $\operatorname{sen} 1980° = \operatorname{sen} 180° = 0$.

Não escreva no livro

Pense nisto

Se k é um número inteiro, qual é o valor de $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)$? E de $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)$?

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

3. Para quais valores reais de m existe o número real α tal que $\operatorname{sen}\alpha = 2m - 1$?

Solução:

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $-1 \leqslant \operatorname{sen}\alpha \leqslant 1$, isto é, $-1 \leqslant 2m - 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2m \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant m \leqslant 1$. Assim, a resposta é: $\{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant m \leqslant 1\}$.

4. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 1 + 3 \cdot \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$. Obtenha o domínio, o conjunto imagem e o período de f.

Solução:

- Inicialmente, perceba que o domínio de f é $\mathbb{R}$, pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$, o número $1 + 3 \cdot \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$ é real.
- Sabemos que $\forall\, x \in \mathbb{R}$; assim, temos:

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow -3 \leqslant 3 \cdot \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leqslant 3 \Leftrightarrow -3 + 1 \leqslant 1 + 3 \cdot \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leqslant 3 + 1$$

Isto é, $-2 \leqslant y \leqslant 4$; logo, $Im(f) = [-2, 4]$.

- Para que $\operatorname{sen} t$ complete um período, sendo $t = 2x - \frac{\pi}{5}$, devemos ter:

$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi \Leftrightarrow 0 \leqslant 2x - \frac{\pi}{5} \leqslant 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{5} \leqslant 2x \leqslant \underbrace{2\pi + \frac{\pi}{5}}_{\frac{11\pi}{5}} \Leftrightarrow \frac{\pi}{10} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{10}$$

Isto é, $x \in \left[\frac{\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}\right]$, e o período p é $\frac{11\pi}{10} - \frac{\pi}{10} = \pi$.

Também poderíamos ter utilizado a relação $p = \frac{2\pi}{|c|}$, sendo $c = 2$:

$$p = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

ATIVIDADES

5. d) $\operatorname{sen}\frac{67\pi}{8} = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8} + 8\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} > 0$, pois $\frac{3\pi}{8}$ está associado a um ponto no 1º quadrante.

Não escreva no livro

5. No caderno, escreva o sinal de:

a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1 < 0$

b) $\operatorname{sen}\frac{10\pi}{3}$ $\operatorname{sen}\frac{10\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

c) $\operatorname{sen} 850°$ **c)** $\operatorname{sen} 850° = \operatorname{sen}(130° + 2 \cdot 360°) = \operatorname{sen} 130° > 0$

d) $\operatorname{sen}\frac{67\pi}{8}$

6. Registre no caderno o valor de:

a) $\operatorname{sen} 4\pi$ $\operatorname{sen} 4\pi = \operatorname{sen} 0 = 0$

b) $\operatorname{sen} 1290°$ $\operatorname{sen} 1\,290° = \operatorname{sen}(210° + 3 \cdot 360°) = \operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$

c) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\operatorname{sen}\frac{29\pi}{4}$ $\operatorname{sen}\frac{29\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4} + 6\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. Classifique, no caderno, os itens a seguir como verdadeiros (**V**) ou falsos (**F**).

a) O valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right)$, para k inteiro, é $\frac{\sqrt{3}}{2}$. V

b) $\operatorname{sen}(k \cdot \pi) = 0$, para k inteiro. V

c) $\operatorname{sen} 1000° > 0$. F

d) O seno do número real 10 é negativo. V

e) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{9}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{9}$ F

8. Para cada função dada, determine o período e o conjunto imagem, e represente, no caderno, o gráfico de um período completo.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\operatorname{sen} x$.

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} 3x$.

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$.

9. Devemos ter $-1 \leqslant \operatorname{sen}\alpha \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{t+1}{2} \leqslant 1$;
multiplicando por 2: $-2 \leqslant t+1 \leqslant 2$
Adicionando (–1), temos: $-3 \leqslant t \leqslant 1$; $\{t \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant t \leqslant 1\}$

9. Determine para quais valores reais de t temos $\operatorname{sen}\alpha = \frac{t+1}{2}$, sendo α um número real qualquer.

10. O número real α é tal que $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$, com $\operatorname{sen}\alpha = 2m - 3$. Quais são os possíveis valores reais de m?

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

11. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3 + 2 \cdot \operatorname{sen} 4x$.

a) Qual é o período de f? $p = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$

b) Qual é o valor máximo que f assume?
$f_{máx.} = 3 + 2 \cdot 1 = 5$

12. Na roda-gigante de um parque de diversões, a medida da altura (em metros) em que um passageiro se encontra no instante t (em segundos) é dada pela lei:

$$h(t) = 6 + 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right), \text{ para } t \in [0, 270].$$

Cristiano_Ferreira/Shutterstock



Uma das rodas-gigantes mais conhecidas no Brasil é a Roda Rico, na cidade de São Paulo. Foto de 2023.

Sabendo que $t = 0$ corresponde ao início da observação do passeio, responda às perguntas no caderno.

a) No início da observação do passeio, a que medida da altura se encontra o passageiro? 6 m

b) Qual medida da altura se encontra o passageiro após 9 s do início? Use $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$. 8,8 m

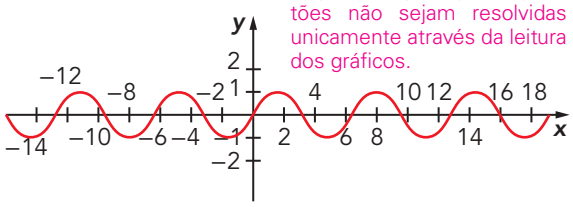
c) Qual é a medida da altura mínima que esse passageiro atinge no passeio? 2 m

d) Qual é a medida de tempo necessária para a roda-gigante dar uma volta completa? 24 s

e) Quantas voltas completas ocorrem no passeio? 11 voltas completas.

13. Na imagem a seguir, está representado o gráfico de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Analise-o para responder no caderno às perguntas.

Professor, alguns gráficos apresentam escala sem mostrar os múltiplos de π para que as questões não sejam resolvidas unicamente através da leitura dos gráficos.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) Quais são as raízes de f em $[-14, 10]$?
$-4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi$.

b) Determine o valor de x, $x \in [6, 12]$, para o qual f é mínimo. $x = \frac{7\pi}{2}$

c) Quais são os intervalos em que f é crescente considerando $x \in [0, 10]$?
$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$

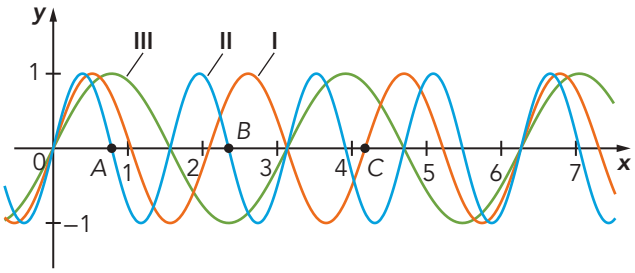
14. Analise os dados a seguir, referentes à tábua das marés do Porto de Santos (SP):

Data	Horário	Medida da altura (em m)
Segunda-feira 1/5/2023	1 h 17 min	1,2
	6 h 24 min	0,4
	12 h 21 min	1,2
	18 h 53 min	0,3
Terça-feira 2/5/2023	1 h 41 min	1,3
	6 h 54 min	0,2
	12 h 45 min	1,4
	19 h 26 min	0,2
Quarta-feira 3/5/2023	2 h 8 min	1,4
	7 h 23 min	0,1
	13 h 13 min	1,5
	20 h 2 min	0,2

Fonte dos dados: MARINHA DO BRASIL. *Porto de Santos* – (Capitania dos Portos de SP) – 2023 [dados de maré]. Brasil, 2023. Disponível em: https://tedit.net/ujskgl. Acesso em: 26 ago. 2024.

Considerando $t = 0$ o horário da primeira medição, $t = 1$ o horário da segunda estimativa, e assim por diante (sempre alternando entre a maré alta e a maré baixa), escreva no caderno os pontos que representam os dados da tábua das marés. Dê nomes a eles, iniciando do $A(0; 1{,}2)$, seguindo por B, C até o ponto L.
$A(0; 1{,}2)$; $B(1; 0{,}4)$; $C(2; 1{,}2)$; $D(3; 0{,}3)$; $E(4; 1{,}3)$; $F(5; 0{,}2)$; $G(6; 1{,}4)$; $H(7; 0{,}2)$; $I(8; 1{,}4)$; $J(9; 0{,}1)$; $K(10; 1{,}5)$; $L(11; 0{,}2)$.

15. Os gráficos de 3 funções f, g e h, definidas por $f(x) = \text{sen } 2x$; $g(x) = \text{sen } 3x$ e $h(x) = \text{sen } 4x$, estão representados a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) No caderno, associe cada gráfico à função correspondente. I-g; II-h; III-f.

b) Determine no caderno a abscissa dos pontos A, B e C. A: $\frac{\pi}{4}$; B: $\frac{3\pi}{4}$; C: $\frac{4\pi}{3}$.

16. **(UEM-PR)** Sabe-se que uma das vantagens da vacinação é a produção de anticorpos contra antígenos específicos, habilitando o organismo a reagir a infecções causadas por vírus. Considere a função $f(t) = \text{sen}(t) + 1$ como um modelo matemático que representa a concentração de anticorpos específicos para um determinado antígeno no organismo, após a introdução de uma vacina. Assumindo que $0 \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2}$, medido em radianos, indica aproximadamente os meses para o período considerado.

[Indique a soma dos valores das afirmações corretas no caderno.] Soma: 20.

(01) O modelo matemático apresentado indica que o pico da concentração de anticorpos no organismo ocorre imediatamente após a introdução da vacina.

(02) Os soros, assim como as vacinas, estimulam a produção de anticorpos contra antígenos específicos no organismo.

(04) Segundo o modelo matemático, a concentração de anticorpos é maior após um mês da introdução da vacina, se comparada à concentração de anticorpos imediatamente após a sua introdução.

(08) O modelo matemático apresentado é o mesmo da função $f(t) = \text{sen}(t + 1)$ em que $0 \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

(16) O modelo matemático indica que a concentração de anticorpos no organismo com a introdução da vacina diminui após determinado tempo, daí a necessidade de tomar outra dose.

17. **(UFSC)** As marés são fenômenos periódicos que podem ser descritos, simplificadamente, pela função seno. Suponhamos que, para uma determinada maré, a altura h, medida em metros, acima do nível médio, seja dada, aproximadamente, pela fórmula $h(t) = 8 + 4 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, em que t é o tempo medido em horas.

Assinale a(s) proposição(ões) correta(s). [Indique a soma no caderno.] Soma: 12.

(01) O valor mínimo atingido pela maré baixa é 8 m.

(02) O momento do dia em que ocorre a maré baixa é às 12 h.

(04) O período de variação da altura da maré é de 24 h.

(08) O período do dia em que um navio de 10 m de calado (altura necessária de água para que o navio flutue livremente) pode permanecer nesta região é entre 2 e 10 horas.

18. **(Vunesp)** Em algumas situações, é conveniente representar de maneira aproximada a função sen (πx), com $x \in [0, 1]$, pela função quadrática $f(x) = 4x - 4x^2$, a qual fornece os valores corretos apenas em $x = 0$, $x = 0{,}5$ e $x = 1$. Isto é, sen $(\pi x) \simeq 4x - 4x^2$. Use essa aproximação para obter o valor de sen $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e estime a diferença, em módulo, entre esse valor e o valor conhecido de sen $\left(\frac{\pi}{4}\right)$, considerando $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$. 0,045

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

As imagens não estão representadas em proporção.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

A Trigonometria e a roda-gigante

A imagem mostra a famosa London Eye, também conhecida como Millenium Wheel, ou a Roda do Milênio, em Londres, Inglaterra. Ela foi inaugurada em 2000, tem 135 metros de medida da altura e leva-se cerca de 30 minutos para dar uma volta completa. Já foi a maior roda-gigante do mundo, mas perdeu essa posição, ficando atrás de rodas-gigantes localizadas na Ásia, na Europa e na América do Norte. No Brasil, a roda-gigante mais alta está localizada na capital do estado de São Paulo e é chamada Roda Rico. Ela tem 91 metros de medida da altura e uma volta tem duração média de 30 minutos.

Mistervlad/Shutterstock



A roda-gigante London Eye, em Londres, Inglaterra. Foto de 2024.

Imagine uma roda-gigante de um parque de diversões, como a mostrada na imagem **1**, com 12 cadeiras igualmente distribuídas ao longo da circunferência. O raio da roda-gigante mede 9 m. Ela está sustentada por uma estrutura de ferro que a mantém fixa ao solo, com o centro da roda-gigante localizado a 10 m de medida da altura em relação ao solo.

A roda gira lentamente, com uma velocidade praticamente constante de 3° por segundo, completando uma volta em 120 segundos. Um passageiro sentado em uma das cadeiras percebe que a medida da altura dele em relação ao solo varia de maneira periódica ao longo do passeio, atingindo determinadas medidas da altura repetidamente à medida que a roda executa várias voltas.

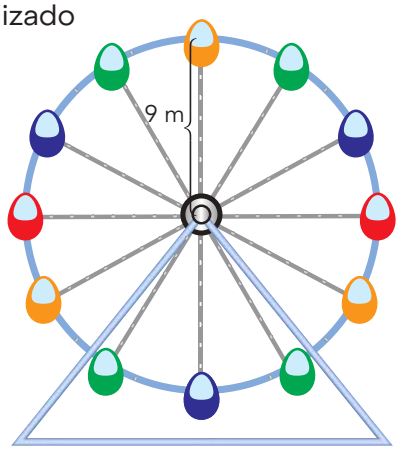


Imagem **1**.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Como podemos expressar a medida da altura em que se encontra determinada cadeira a cada instante do passeio?

Imagine que, no início da contagem do tempo, um passageiro se encontra na cadeira representada pelo ponto A (imagem **2**). Como a velocidade de giro é de 3°/s, em 10 s cada cadeira percorre 30°. Na imagem **2** estão representadas as posições que esse passageiro vai ocupar a cada 10 s ao longo de uma volta completa da roda.

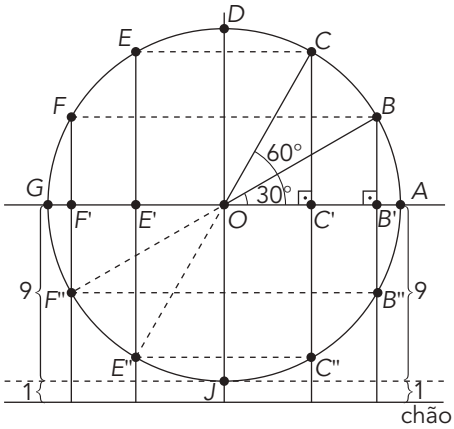


Imagem **2**.

- Velocidade de giro: $3°/s \left(\text{ou } \frac{\pi}{60} \text{ rad/s}\right)$
- $\triangle BOB'$: $\text{sen } 30° = \frac{BB'}{OB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow BB' = 9 \cdot \text{sen}\,(10 \cdot 3°) = 9 \cdot \text{sen}\left(10 \cdot \frac{\pi}{60}\right)$$

- $\triangle COC'$: $\operatorname{sen} 60° = \frac{CC'}{OC} \Rightarrow CC' = 9 \cdot \operatorname{sen}(20 \cdot 3°) = 9 \cdot \operatorname{sen}\left(20 \cdot \frac{\pi}{60}\right)$

Note que são iguais as medidas da altura correspondentes aos seguintes pares de posições: A e G, B e F, C e E, F'' e B'' e E'' e C''.

Além disso, os segmentos de reta $\overline{BB'}$, $\overline{FF'}$, $\overline{F'F''}$ e $\overline{B'B''}$ são congruentes (atenção, porém, para a diferença das medidas da altura correspondentes a B e B'' e, também, a F e F''), o que também ocorre com os segmentos de reta $\overline{CC'}$, $\overline{EE'}$, $\overline{E'E''}$ e $\overline{C'C''}$.

Assim, temos as seguintes posições para uma volta completa na roda, no sentido anti-horário, considerando medidas de intervalo de tempo de 10 em 10 segundos:

Medida de intervalo de tempo (em s)	Posição	Medida da altura (em m)
0	A	$10 + 9 \cdot \operatorname{sen}\left(0 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + 0 = 10$
10	B	$10 + 9 \cdot \operatorname{sen}\left(10 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + 4{,}5 = 14{,}5$
20	C	$10 + 9 \cdot \operatorname{sen}\left(20 \cdot \frac{\pi}{60}\right) \simeq 10 + 7{,}8 \simeq 17{,}8$
30	D	$10 + 9 \cdot \operatorname{sen}\left(30 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + 9 = 19$
⋮	⋮	⋮
70	F''	$10 + 9 \cdot \operatorname{sen}\left(70 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + (-4{,}5) = 5{,}5$
⋮	⋮	⋮
90	J	$10 + 9 \cdot \operatorname{sen}\left(90 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + (-9) = 1$
⋮	⋮	⋮
110	B''	$10 + 9 \cdot \operatorname{sen}\left(110 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + (-4{,}5) = 5{,}5$
120	A	$10 + 9 \cdot \operatorname{sen}\left(120 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + 0 = 10$

Observação

Note que a medida da altura do ponto F'', por exemplo, pode ser expressa por:
$10 - F'F'' = 10 - 9 \cdot \operatorname{sen} 30° = 10 + 9 \cdot \operatorname{sen} 210° = 10 + 9 \cdot \operatorname{sen}\left(70 \cdot \frac{\pi}{60}\right)$.

Raciocínio análogo pode ser usado para os pontos E'', C'' e B''.

Analisando a primeira e a última coluna da tabela, percebemos que, para cada instante t (em segundos), corresponde uma medida da altura h (em metros), dada por:

$$h(t) = 10 + 9 \cdot \operatorname{sen}\left(t \cdot \frac{\pi}{60}\right)$$

Fonte dos dados: VERBYTSKA, Oksana. Matemática no dia a dia. 2014 Dissertação (Mestrado em Matemática para os Professores) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014. Disponível em: https://tedit.net/x4mxk6. Acesso em: 4 fev. 2023.

1. Você já teve a oportunidade de fazer um passeio em uma roda-gigante? Consegue perceber a periodicidade que existe nesse movimento? Respostas pessoais.

2. Qual é o período da função h dada por $h(t) = 10 + 9 \cdot \operatorname{sen}\left(t \cdot \frac{\pi}{60}\right)$? E quais são os valores máximo e mínimo que essa função assume? 120 s; 19 m e 1 m.

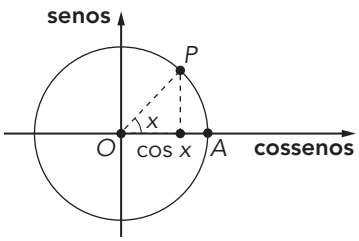
capítulo

11 Função cosseno

Introdução

Seja x um número real e P o ponto associado a x na circunferência trigonométrica.

Já definimos que o valor de **cosseno de *x*** é a **abscissa do ponto *P***, como mostra a imagem.



Banco de imagens/Arquivo da editora

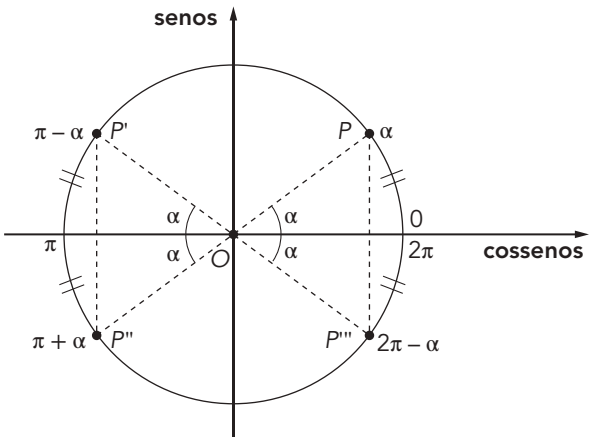
med($\overset{\frown}{AP}$) = x rad

Sejam α um número real cujo ponto P a ele associado na circunferência trigonométrica pertence ao 1º Q e P', P'' e P''', respectivamente, os pontos associados aos números reais $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$ e $2\pi - \alpha$.

Como os pares de pontos P e P''' e P' e P'' são simétricos em relação ao eixo horizontal:

- P e P''' têm a mesma abscissa, então $\cos \alpha = \cos (2\pi - \alpha)$;
- P' e P'' têm a mesma abscissa, então $\cos (\pi - \alpha) = \cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha$.

Além disso, $\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$ e $\cos \pi = -1$.

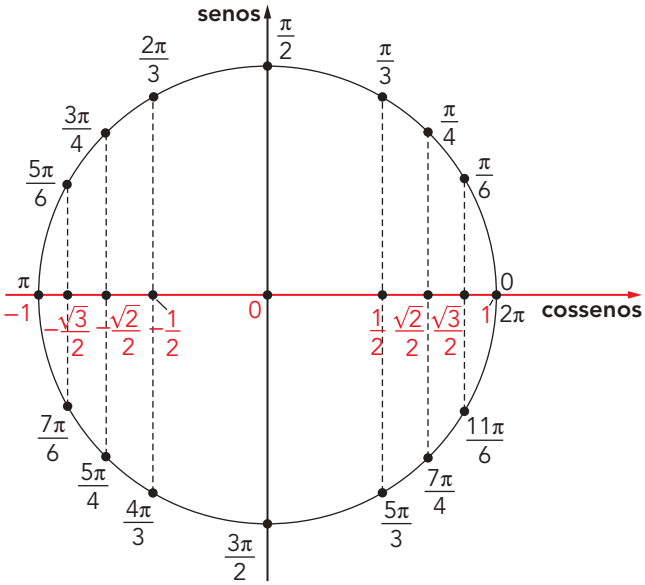


Banco de imagens/Arquivo da editora

Chama-se **função cosseno** a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o respectivo cosseno, ou seja, $f(x) = \cos x$.

Assim, f associa cada número real x à abscissa do ponto P na circunferência trigonométrica.

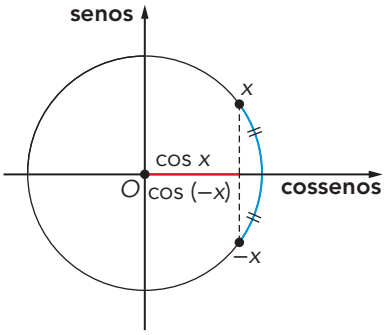
Vamos utilizar alguns valores já conhecidos representados na circunferência trigonométrica a seguir para identificar certas propriedades da função cosseno.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- O **sinal** da função cosseno é positivo se x pertence ao 1º Q ou ao 4º Q e é negativo se x pertence ao 2º Q ou ao 3º Q.
- No 1º Q e no 2º Q, f é **decrescente** (pois, à medida que x aumenta, os valores de $\cos x$ diminuem de 1 até –1); já no 3º Q e no 4º Q, f é **crescente** (pois, à medida que x aumenta, os valores de $\cos x$ aumentam de –1 a 1).

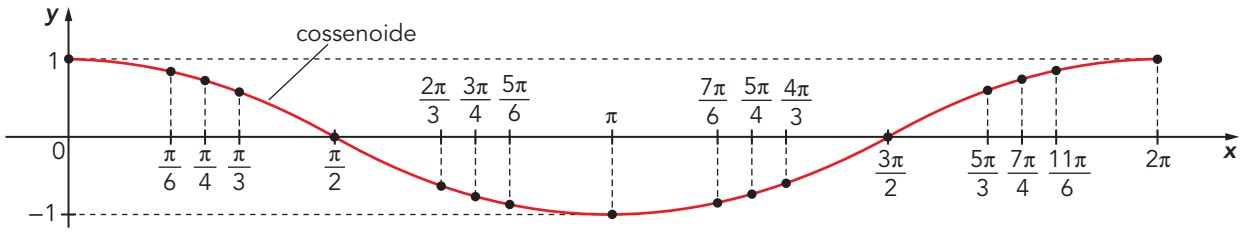
- A função cosseno é **periódica,** e o período dela é 2π. Como estudamos anteriormente, os números reais x e $x + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, estão associados a um mesmo ponto na circunferência trigonométrica e, portanto, $\cos x = \cos (x + k \cdot 2\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$. O período de f é o menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, que é 2π.
- O **domínio** e o **contradomínio** de f são iguais a $\mathbb{R}$; o **conjunto imagem** de f é $[-1, 1]$, pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$; temos $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, já que a medida do raio da circunferência trigonométrica é 1 e as abscissas dos pontos da circunferência variam de –1 até 1.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Note que, pela simetria em relação ao eixo horizontal, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, temos $\cos (-x) = \cos x$.

De acordo com as considerações feitas até aqui, representamos o gráfico de um período da função f definida por $f(x) = \cos x$. Assim como para a função seno, o gráfico da função cosseno é representado pela curva **senoide**; neste caso, também chamada de **cossenoide**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim como estudado para as funções do tipo seno, vamos estudar algumas funções do tipo cosseno cuja lei é da forma $f(x) = a + b \cdot \cos (cx + d)$.

Por exemplo, utilizando um raciocínio idêntico ao apresentado no capítulo anterior, é possível mostrar que:

O período p da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + b \cdot \cos (cx + d)$, sendo a, b, c e d números reais, com b e c diferentes de 0, é dado por $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

EXPERIMENTE

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Não escreva no livro

Construir o gráfico da função cosseno usando um *software* de Geometria dinâmica

Digite na janela de entrada: "y=cos(x)" para que o *software* construa o gráfico da função $y = \cos(x)$.

Como você já fez no tópico "Função seno", no capítulo anterior, altere a escala do eixo x escolhendo a opção $\frac{\pi}{2}$ para a medida de distância, se possível.

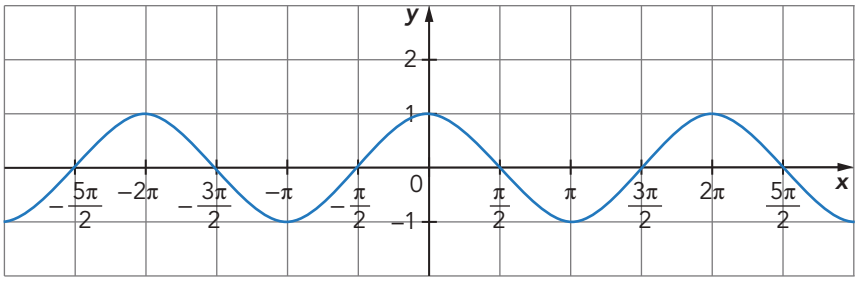


Gráfico da função cosseno construído em um *software* de Geometria dinâmica.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Agora você pode verificar, pelo gráfico, todas as propriedades citadas anteriormente, como sinal, crescimento, decrescimento, período e conjunto imagem.

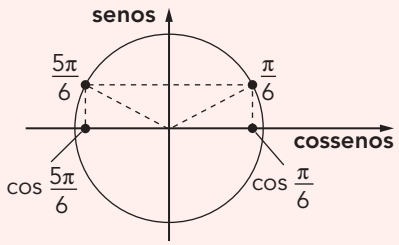
Atividades resolvidas

1. Calcule:

a) $\cos \frac{29\pi}{6}$ **b)** $\cos 100\pi$

Solução:

a) $\frac{29\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \underbrace{4\pi}_{\text{2 voltas completas}} + \frac{5\pi}{6}$

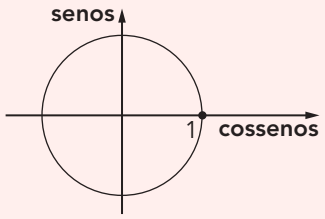


Assim, $\frac{29\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ estão associados a um mesmo ponto na circunferência trigonométrica. Desse modo, temos:

$$\cos \frac{29\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $100\pi = 50 \cdot 2\pi$

$\cos 100\pi = \cos 2\pi = \cos 0 = 1$



2. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Qual é o período de f?

Solução:

Podemos usar a relação $p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto

Não escreva no livro

Para $k \in \mathbb{Z}$, qual é o valor de $\cos(k \cdot 2\pi)$? E de $\cos(k \cdot \pi)$?

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

3. $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow -1 \leqslant \cos x \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{2m}{5} \leqslant 0 \Leftrightarrow -5 \leqslant 2m \leqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant 0$

$\left\{m \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant 0\right\}$

1. No caderno, calcule o valor de:

a) $\cos 11\pi$ $\cos 11\pi = \cos(10\pi + \pi) = \cos \pi = -1$

b) $\cos 10\pi$ $\cos 10\pi = \cos(5 \cdot 2\pi) = \cos 0 = 1$

c) $\cos \frac{13\pi}{2}$ $\cos \frac{13\pi}{2} = \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

d) $\cos 1560°$ $\cos 1560° = \cos(1440° + 120°) = \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

2. Calcule, no caderno, o valor da expressão: $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$y = \frac{\cos \frac{9\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{9\pi}{2}}{\cos \frac{17\pi}{4} + 3 \cdot \operatorname{sen} \frac{17\pi}{4}}$$

3. Sabendo que x é um número real pertencente ao intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, determine no caderno os possíveis valores reais de m de modo que tenhamos $\cos x = \frac{2m}{5}$.

4. Se $x \in \mathbb{R}$, quais são os possíveis valores inteiros de m que satisfazem à igualdade $\cos x = \frac{3m}{2} - \frac{1}{3}$? $m = 0$

5. Um artigo publicado num caderno de Economia prevê que as exportações de certo país (em milhões de dólares), no ano de $2020 + x$, em que $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 19, 20\}$, serão dadas pela lei:

$$f(x) = 400 + 18 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

Supondo que isso realmente ocorra, determine no caderno:

a) o valor das exportações desse país nos anos de 2020, 2025 e 2030, em milhões de dólares; Respectivamente, em milhões de dólares, 418, 409 e 391.

b) quantas vezes, entre 2020 e 2040, f atingirá o valor mínimo e qual é esse valor. 3 vezes; em 2023 (3), em 2029 (9) e em 2035 (15).

6. **(Uern)** Um determinado inseto no período de reprodução emite sons cuja intensidade sonora oscila entre o valor mínimo de 20 decibéis até o máximo de 40 decibéis, sendo t a variável tempo em segundos. Entre as funções a seguir, aquela que melhor representa a variação da intensidade sonora com o tempo $I(t)$ é: Alternativa **b**.

a) $50 - 10 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

b) $30 + 10 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

c) $40 + 20 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

d) $60 - 20 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

7. Em determinada cidade litorânea, tendo como ponto de referência a análise das marés altas, em um período de 30 dias, um matemático determinou que a medida da altura da maré alta (em metros) poderia ser calculada pela função expressa por $h(t) = 3 + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{2}\right)$, em que t é a medida de tempo (em dias). Sabendo que a lua cheia e a lua nova provocam as maiores marés altas, determine no caderno em que dias ocorrem essas fases da Lua no período considerado, tendo em mente que a contagem se inicia em $t = 1$. Dias 12 e 28.

8. Elabore e resolva, no caderno, um problema envolvendo o contexto da atividade anterior.

9. Para cada função f a seguir, especifique no caderno o domínio, o conjunto imagem e o período.

a) $f(x) = -1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-3, 1]$; $p = 4\pi$

b) $f(x) = 3 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-3, 3]$; $p = 2\pi$

c) $f(x) = -4 \cdot \cos 6x$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, 4]$; $p = \frac{\pi}{3}$

8. Exemplo de problema: Um pescador residente naquela cidade precisava saber a medida da altura da maré no dia 4 do mesmo mês a que a atividade se refere. Calcule a medida da altura da maré nesse dia.

Não escreva no livro

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Física ou Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

A Trigonometria e o fenômeno das marés

A tabela a seguir mostra dados da tábua de marés, disponibilizada pela Marinha do Brasil, com as previsões para as marés a partir do meio do dia 22 de abril de 2024 até a primeira metade do dia 25 de abril de 2024 no porto de Suape (PE).

Tábua de marés no porto de Suape (PE) – 22/4/2024 a 25/4/2024

Data	Horário	Medida da altura (em m)
Segunda-feira 22/4/2024	15 h 11 min	2,2
	21 h 21 min	0,3
Terça-feira 23/4/2024	3 h 28 min	2,2
	9 h 32 min	0,3
	15 h 41 min	2,2
	21 h 49 min	0,3
Quarta-feira 24/4/2024	3 h 54 min	2,2
	10 h	0,3
	16 h 08 min	2,2
	22 h 13 min	0,3
Quinta-feira 25/4/2024	4 h 21 min	2,2
	10 h 30 min	0,3

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Defesa. Porto de Suape (estado de Pernambuco) – 2024. *Marinha do Brasil*, Brasília, DF, 2023. Disponível em: https://tedit.net/g3nepv. Acesso em: 21 ago. 2024.

Tales Azzi/Pulsar Imagens



Porto de Suape, em Ipojuca (PE). Foto de 2023.

- As marés altas ocorrem aproximadamente de 12 em 12 horas, e 2,2 m foi o valor previsto para a medida da altura da maré alta nesse período.
- As marés baixas também ocorrem aproximadamente de 12 em 12 horas, e o valor previsto para a medida da altura da maré baixa nesse período foi de 0,3 m.

Com as informações apresentadas, podemos preencher (com aproximações nos horários) a tabela que relaciona a medida de intervalo de tempo (em horas) com a medida da altura da maré (em metros), contando a partir do primeiro horário de previsão (15 h 11 min do dia 22 de abril), que será considerado o instante inicial ($t = 0$).

Dados sobre a maré

Medida de intervalo de tempo (em h)	Medida da altura da maré (em m)
0	2,2
6	0,3
12	2,2
18	0,3
24	2,2
30	0,3
36	2,2
42	0,3
48	2,2
54	0,3
60	2,2
66	0,3

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Defesa. Porto de Suape (estado de Pernambuco) – 2024. *Marinha do Brasil*, Brasília, DF, 2023. Disponível em: https://tedit.net/g3nepv. Acesso em: 21 ago. 2024.

Porque no instante inicial ($t = 0$), a função assume o valor máximo ($h = 2,2$ m). Desse modo, uma função que pode modelar bem a situação é a função cosseno.

Pense nisto

Por que a modelagem da situação foi feita utilizando-se a função cosseno e não a função seno?

Vamos supor que a relação entre a medida de intervalo de tempo (t), em horas, e a medida da altura (h) da maré, em metros, se estabeleça por meio de uma função do tipo $h(t) = A + B \cdot \cos(wt)$, em que A, B e w são constantes reais positivas.

1. Agora, faça o que se pede no caderno.

a) Determine o valor de w. $w = \frac{\pi}{6}$

b) Com o valor de w obtido no item **a**, determine os valores de A e B. $A = 1,25$ e $B = 0,95$.

c) Escreva a lei da função que relaciona h com t. $h(t) = 1,25 + 0,95 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

d) Por meio da lei obtida no item **c**, é possível prever a medida da altura da maré em outros momentos, além dos momentos de maré baixa e alta. Determine a medida da altura da maré para $t = 10$ (aproximadamente 1 hora do 2º dia) e para $t = 28$ (aproximadamente 19 horas do 2º dia). $h(10) = 1,725$ m e $h(28) = 0,775$ m.

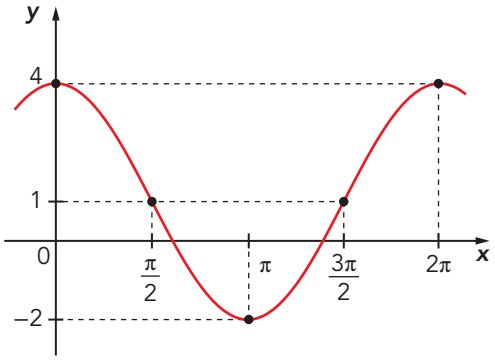
e) **Experimente** construir o gráfico da função obtida no item **c** utilizando um *software* de Geometria dinâmica.

A resolução depende do *software* utilizado pelo estudante.

Gráfico da função cosseno

Seguindo o mesmo processo de construção de gráficos da função seno, vamos construir 2 gráficos obtidos da cossenoide, começando pelo gráfico da função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 3 \cdot \cos x + 1$.

x	$\cos x$	$y = 3 \cdot \cos x + 1$
0	1	$3 \cdot 1 + 1 = 4$
$\frac{\pi}{2}$	0	$3 \cdot 0 + 1 = 1$
π	-1	$3 \cdot (-1) + 1 = -2$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$3 \cdot 0 + 1 = 1$
2π	1	$3 \cdot 1 + 1 = 4$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que:

- o período dessa função é 2π, pois, para que $\cos x$ complete um período, x deve variar de 0 a 2π;
- o conjunto imagem dessa função é $[-2, 4]$, pois, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, temos:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow -3 \leqslant 3 \cdot \cos x \leqslant 3 \Rightarrow -3 + 1 \leqslant 3 \cdot \cos x + 1 \leqslant 3 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2 \leqslant y \leqslant 4$$

Agora, da mesma maneira feita para a função g, vamos construir o gráfico de h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 1 + \cos 2x$.

x	$t = 2x$	$\cos t$	$y = 1 + \cos 2x$
	0	1	
	$\frac{\pi}{2}$	0	
	π	-1	
	$\frac{3\pi}{2}$	0	
	2π	1	

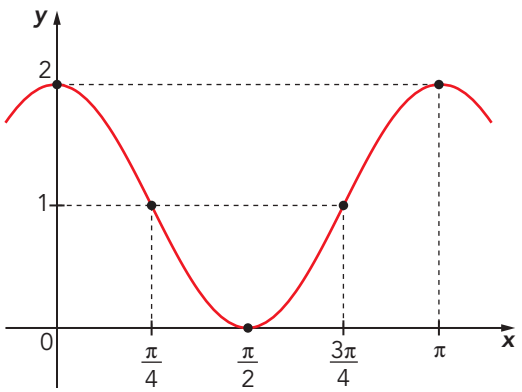
→

x	$t = 2x$	$\cos t$	$y = 1 + \cos 2x$
	0	1	2
	$\frac{\pi}{2}$	0	1
	π	-1	0
	$\frac{3\pi}{2}$	0	1
	2π	1	2

→

→

x	$t = 2x$	$\cos t$	$y = 1 + \cos 2x$
0	0	1	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{\pi}{2}$	π	-1	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	1
π	2π	1	2



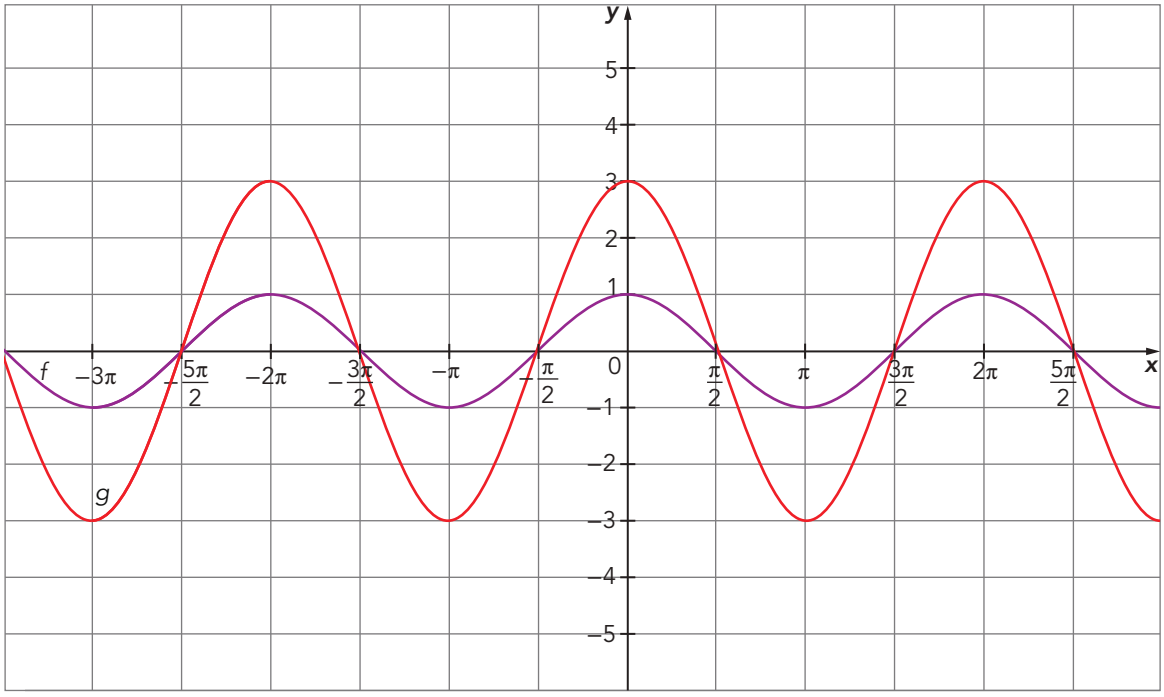
Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que $Im(h) = [0, 2]$ e o período da função é $p = \pi$, pois, para que cos $2x$ complete um período, é necessário que $2x$ varie de 0 a 2π: $0 \leqslant 2x \leqslant 2\pi \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant \pi$, isto é, $x \in [0, \pi]$ e o período é $\pi - 0 = \pi$.

Antes de continuarmos, vamos definir a **amplitude do gráfico de uma função trigonométrica**. A amplitude do gráfico é igual à metade da diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da função trigonométrica. Ou seja, sendo o conjunto imagem de uma função trigonométrica f, $Im(f) = [m, n]$, a amplitude do gráfico dessa função é $\frac{n - m}{2}$.

Sendo assim, a amplitude do gráfico da função h é $\frac{2 - 0}{2} = 1$.

A seguir, estão representados os gráficos das funções f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \cos x$ e $g(x) = 3 \cdot \cos x$ no mesmo plano cartesiano construído no *software* de Geometria dinâmica.

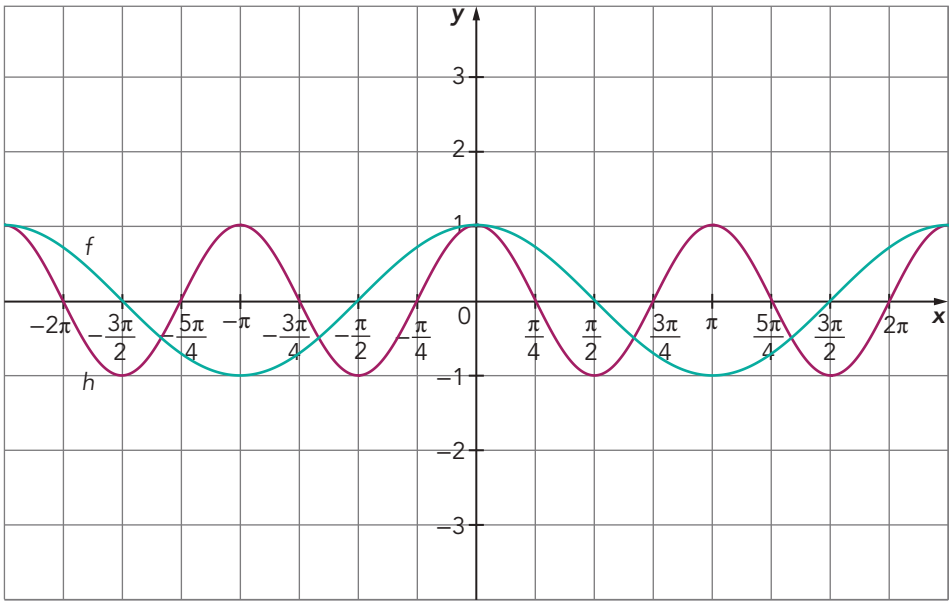


Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráficos das funções f e g construídos em um *software* de Geometria dinâmica.

Analise o "alongamento na vertical" no gráfico de g comparado ao gráfico de f. O conjunto imagem de f é $[-1, 1]$, de medida de comprimento $1 - (-1) = 2$, e o conjunto imagem de g é $[-3, 3]$, de medida de comprimento $3 - (-3) = 6$. Note que a medida de comprimento do intervalo do conjunto imagem de g é o triplo da medida de comprimento do intervalo do conjunto imagem de f, portanto há também alteração na amplitude do gráfico da função, a amplitude do gráfico de g é igual a $\frac{3 - (-3)}{2} = 3$; a amplitude do gráfico de f é igual a $\frac{1 - (-1)}{2} = 1$. O período de ambas as funções é 2π.

Compare inicialmente os gráficos das funções f e h apresentados a seguir, dados respectivamente por $f(x) = \cos x$ e $h(x) = \cos 2x$, representados em um mesmo sistema de coordenadas, com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica.

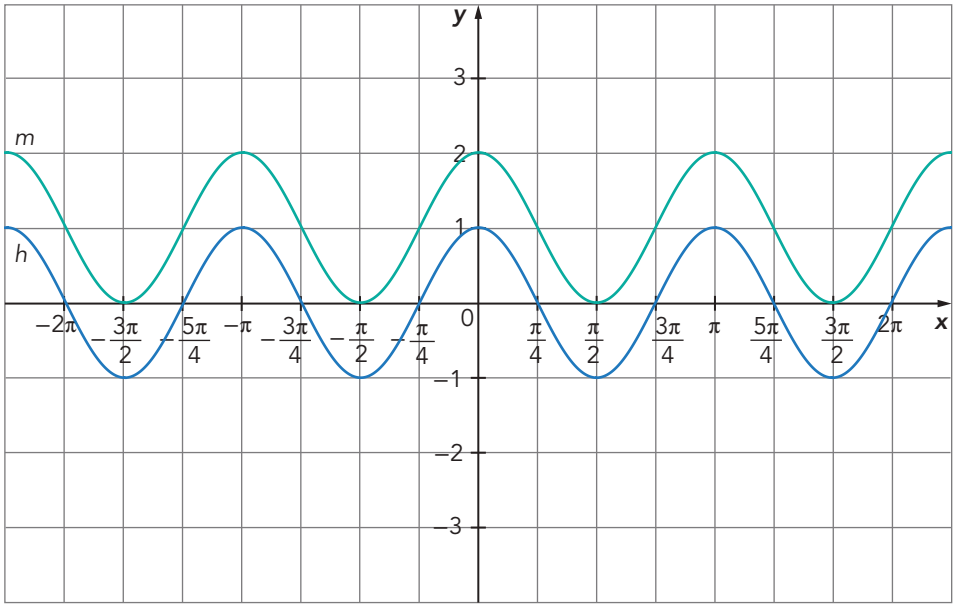


Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico das funções f e h construído em um *software* de Geometria dinâmica.

Note que o gráfico de $h(x) = \cos 2x$ pode ser obtido a partir do gráfico $f(x) = \cos x$ realizando uma "compressão horizontal", pois o período de h é π e o período de f é 2π.

A seguir, note que o gráfico da função m dada por $m(x) = 1 + \cos 2x$ é obtido a partir do gráfico da função h dada por $h(x) = \cos 2x$ (exemplo anterior), transladando-o 1 unidade para cima, na vertical.



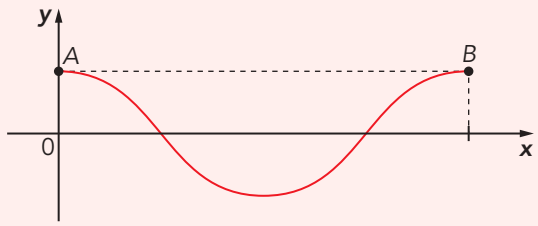
Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico das funções m e h construído em um *software* de Geometria dinâmica.

bunny/Freepik

Atividades resolvidas

3. Um período completo do gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ é exibido a seguir:



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Determine:

a) a ordenada do ponto A;

b) a abscissa do ponto B;

c) os valores de $x \in [0; 20]$ tais que $f(x) = 1$.

Solução:

a) A abscissa de A é $x = 0$. Assim, temos:

$$f(0) = 2 \cdot \cos\left(\frac{0}{3}\right) = 2 \cdot \cos 0 = 2 \cdot 1 = 2$$

Logo, a ordenada do ponto A é 2.

b) A ordenada do ponto B é 2. Assim, temos:

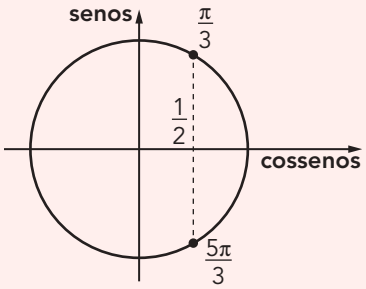
$$2 \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 2 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = 0 \text{ ou } \frac{x}{3} = 2\pi \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 6\pi$$

Como $x = 0$ é a abscissa de A, a abscissa de B é $x = 6\pi$.

c) $f(x) = 1 \Rightarrow 2\cos\left(\frac{x}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Se $x \in [0; 20]$, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{x}{3} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \pi$ ou $x = 5\pi \simeq 15{,}71$.

Os valores de x são: π e 5π.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

10. Para cada função dada, determine no caderno o período e o conjunto imagem e represente em malha quadriculada o gráfico de um período completo. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos 3x$.

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 + \cos 3x$.

11. Indique, no caderno, como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações a seguir e justifique cada resposta. As justificativas de resposta encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, para k um número inteiro. F

b) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \cdot \cos x$ tem valor mínimo igual a -1. F

c) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \cos \pi$ é periódica. F

d) O período de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)$ é 16. V

e) $\cos\left(-\frac{3\pi}{20}\right) > 0$ V

12. **Experimente** utilizar um *software* de Geometria dinâmica para, em cada caso, construir os gráficos das funções f e g definidas por:

a) $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

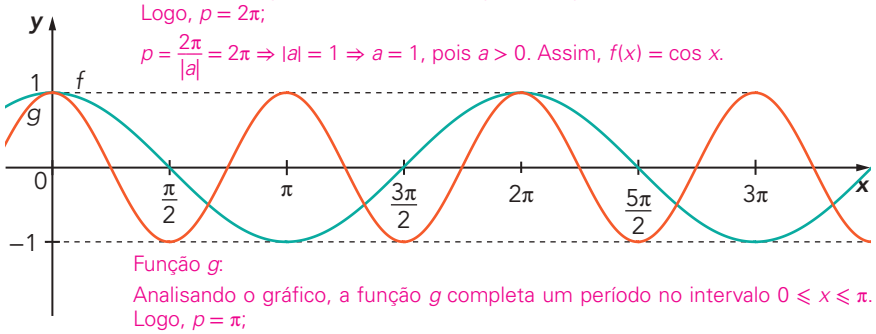
Em seguida, por meio da análise dos gráficos, determine o conjunto imagem e o período da função g de cada item. Responda no caderno: Quando comparamos, em cada item, os gráficos das funções f e g, o que podemos afirmar? A resolução depende do *software* utilizado pelo estudante.

No item **a**: $p = 2\pi$; $Im(g) = [-1, 1]$. O gráfico de g é o gráfico de f transladado de $\frac{\pi}{4}$ unidade para a direita.

No item **b**: $p = 2\pi$; $Im(g) = [-1, 1]$. O gráfico de g é o gráfico de f transladado de $\frac{\pi}{4}$ unidade para a esquerda.

13. Na imagem estão representados os gráficos de duas funções f e g.
Sobre esses gráficos, e sabendo que $f(x) = \cos(a \cdot x)$ e $g(x) = \cos(b \cdot x)$, sendo a e b constantes reais e positivas, identifique o período e a lei de formação dessas funções.

Função f:
Analisando o gráfico, a função f completa um período no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
Logo, $p = 2\pi$;
$p = \frac{2\pi}{|a|} = 2\pi \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = 1$, pois $a > 0$. Assim, $f(x) = \cos x$.

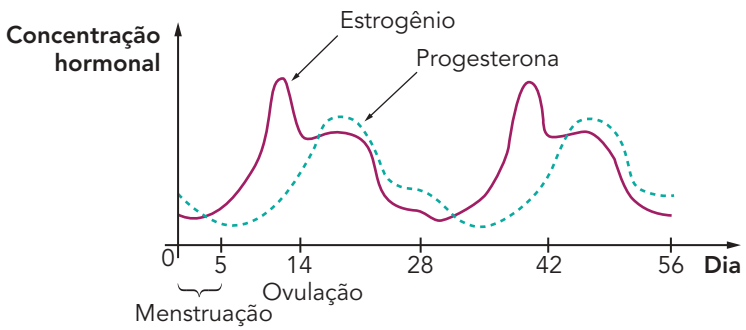


Banco de imagens/Arquivo da editora

Função g:
Analisando o gráfico, a função g completa um período no intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
Logo, $p = \pi$;
$p = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = 2$, pois $b > 0$. Assim, $g(x) = \cos 2x$.

14. As fases do ciclo menstrual feminino são determinadas pela quantidade de hormônios no corpo. O gráfico a seguir mostra os níveis dos hormônios estrogênio e progesterona durante 2 ciclos. Analise-o para responder às seguintes questões no caderno.

Variação hormonal durante o ciclo menstrual



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

a) De maneira sucinta, responda no caderno: Como se comportam os níveis dos hormônios em função do tempo? Ambos são periódicos.

b) Qual é a duração de cada ciclo mostrado no gráfico? **b)** Nota-se que os gráficos relacionados aos níveis de ambos os hormônios chegam ao mesmo estágio que estavam no início do ciclo no dia 28. Portanto a duração é de 28 dias.

c) Dado que a ovulação de Cibele ocorreu no dia 5 de junho, com a ajuda de um calendário, determine em quais datas ocorrerão as 3 próximas ovulações considerando que ela possui um ciclo menstrual regular de 28 dias. Em um ciclo regular, o período é de 28 dias e ela terá as próximas ovulações em 3 de julho, 31 de julho e 28 de agosto.

d) O gráfico segue um comportamento semelhante ao gráfico de outro tipo de função que você estudou? Qual? Sim, dado o caráter aproximadamente periódico dos níveis de hormônios, podemos relacioná-lo ao gráfico de uma função trigonométrica.

Experimente usar um *software* de Geometria dinâmica para realizar a atividade **15**.

15. **(UFPR)** Suponha que, durante um certo período do ano, a temperatura T, em graus Celsius, na superfície de um lago possa ser descrita pela função $F(t) = 21 - 4\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, sendo t o tempo em horas medido a partir das 06 h 00 da manhã.

a) Qual a variação de temperatura num período de 24 horas? De 17 °C a 25 °C.

b) A que horas do dia a temperatura atingirá 23 °C? Às 14 h e às 22 h.

14. a) Professor, nessa questão os estudantes podem se aprofundar mais e mencionar os períodos crescentes e decrescentes da concentração de cada hormônio. Mencione na correção tais períodos, podendo, inclusive, verificar se os estudantes conseguem determinar os dias de máxima e de mínima concentração de cada hormônio.

EXPERIMENTE

Utilizar um *software* para estudar os gráficos das funções trigonométricas

Vamos nos apoiar num *software* de Geometria dinâmica para estudar como os coeficientes das funções trigonométricas alteram os gráficos delas. Para isso, vamos tomar como ponto de partida a função do tipo cosseno dada por $g(x) = \cos x$ e uma função real dada por $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$. Note que quando $a = d = 0$ e $b = c = 1$, temos $g(x) = f(x)$.

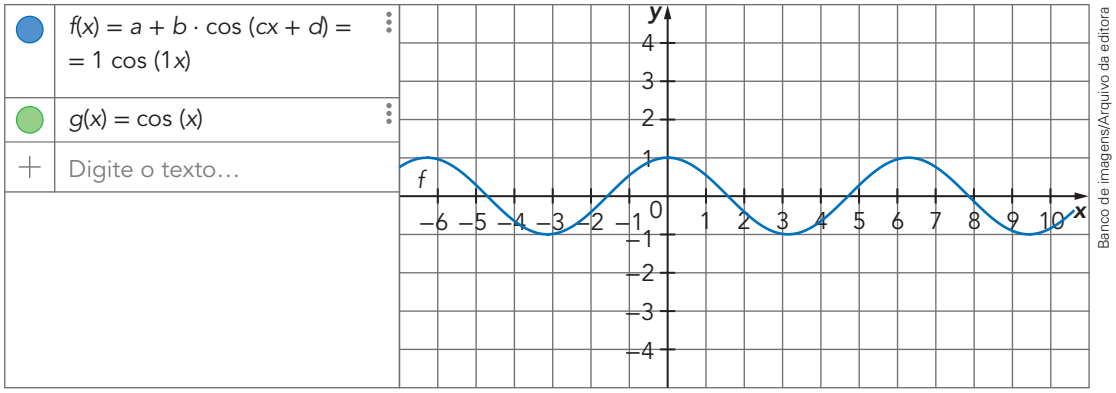
Usando as ferramentas do *software*, construa o gráfico da função f, que será mantido estático durante o curso das atividades. Em seguida, verifique a melhor maneira de se construir um gráfico de maneira a conseguir variar seus coeficientes.

Lembre-se, se for o caso, de que o sinal de multiplicação deve ser o asterisco (*).

Observação

Alguns *softwares* aceitam que os coeficientes sejam digitados como letras e criam controles que permitem a alteração deles com controles deslizantes. Os *softwares* com essa opção privilegiam a realização desta atividade.

Vamos começar com $b = c = 1$ e $a = d = 0$, e antes do início de cada atividade retornar para essa posição. Note que os gráficos de f e de g estão sobrepostos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Tela do *software* de Geometria dinâmica.

1. Varie apenas o parâmetro a e responda às perguntas no caderno.

a) Para $a > 0$, o que aconteceu com o gráfico de f em relação ao de g?

O gráfico é deslocado verticalmente para cima.

b) Para $a < 0$, o que aconteceu com o gráfico de f em relação ao de g?

O gráfico é deslocado verticalmente para baixo.

c) Qual é o conjunto imagem de f em função de a? Considere $b = c = 1$ e $d = 0$. $Im(f) = [-1 + a; 1 + a]$

d) A mudança no valor de a modifica o período da função trigonométrica?

1. d) A mudança não modifica o período da função.

Professor, esse "deslocamento vertical para cima ou para baixo", à medida que a varia, recebe o nome de **translação vertical**. Note que, na translação vertical, o "aspecto geral" do gráfico é preservado.

2. Varie apenas o parâmetro b e responda às perguntas no caderno.

a) Para um valor de $b > 1$, o que aconteceu com o gráfico de f em relação ao gráfico de g? Houve alteração no conjunto imagem? A amplitude se manteve, aumentou ou diminuiu? Sofre uma "distensão (alongamento) vertical" quando comparado ao gráfico de g. Sim. A amplitude aumentou.

b) Para um valor de $0 < b < 1$, o que aconteceu com o gráfico de f em relação ao gráfico de g? Houve alteração no conjunto imagem? A amplitude se manteve, aumentou ou diminuiu? Sofre uma "compressão (achatamento) vertical" quando comparado ao gráfico de g. Sim. A amplitude diminuiu.

c) Para um valor de $-1 < b < 0$, o que aconteceu com o gráfico de f em relação ao gráfico de g? Houve alteração no conjunto imagem? A amplitude se manteve, aumentou ou diminuiu? Sofre uma reflexão em relação ao eixo x e uma "compressão vertical" quando comparado ao gráfico de g. Sim. A amplitude diminuiu.

d) Para um valor de $b < -1$, o que aconteceu com o gráfico de f em relação ao gráfico de g? Houve alteração no conjunto imagem? A amplitude se manteve, aumentou ou diminuiu? Sofre uma reflexão em relação ao eixo x e uma "distensão (dilatação) vertical" quando comparado ao gráfico de g. Sim. A amplitude aumentou.

e) Para $b = 0$, o que ocorre com o gráfico de f? Explique.

f) Analisando os resultados obtidos nos itens anteriores, como o valor da amplitude do gráfico se relaciona com o valor de b?

g) Qual é o conjunto imagem de f em função de b? Considere $c = 1$ e $a = d = 0$. $Im(f) = [-b; b]$

h) A mudança no valor de b modifica o período da função trigonométrica? Não.

2. e) O gráfico de f será uma reta sobre o eixo x. A função f será uma função constante e igual a 0. Como $b = 0$, o produto entre 0 e cos $(cx + d)$ será 0. Assim, $f(x) = 0$.

2. f) O valor de b interfere no valor da amplitude. Aumentando quando $b > 1$ ou $b < -1$ e diminuindo quando $-1 < b < 0$ ou $0 < b < 1$. Quando $b = 1$ ou $b = -1$, a amplitude continua sendo 1. A amplitude do gráfico da função é igual a $|b|$.

3. Varie apenas o parâmetro c e faça o que é pedido registrando no caderno.

a) Copie e complete no caderno as lacunas com apenas uma das palavras: **mais** ou **menos**. Menos. Note que o gráfico de f sofre uma "dilatação horizontal" quando comparado ao gráfico de g.

- Se $0 < c < 1$ ou $-1 < c < 0$, o gráfico de f está _____ "comprimido horizontalmente" quando comparado com o gráfico de g.
- Se $c < -1$ ou $c > 1$, o gráfico de f está _____ "comprimido horizontalmente" quando comparado com o gráfico de g.

Mais. Note que o gráfico de f sofre uma "compressão horizontal" quando comparado ao gráfico de g.

b) A mudança no valor de c modifica o conjunto imagem da função trigonométrica? Não.

Vamos criar um ponto de referência para facilitar a percepção sobre a transformação sofrida pelo gráfico à medida que d varia. Verifique se é possível estabelecer coordenadas de pontos como variáveis no *software* e defina um ponto de coordenadas $(-d, f(-d))$.

4. Varie apenas o parâmetro d e responda às perguntas no caderno.

a) Para um valor de $d > 0$, o que aconteceu com o gráfico de f em relação ao gráfico de g? O gráfico de f sofre deslocamento horizontal para a esquerda.

b) Para um valor de $d < 0$, o que aconteceu com o gráfico de f em relação ao gráfico de g? O gráfico de f sofre deslocamento horizontal para a direita.

c) A mudança no valor de d modifica o conjunto imagem da função trigonométrica? E o período?
Não. Não.

Professor, esse "deslocamento para a esquerda ou para a direita", à medida que d varia, recebe o nome de **translação horizontal**. Note que o ponto de referência se desloca, sobre o eixo das abscissas, para a esquerda ou para a direita.

VIRALIZE!

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Saúde* e *Vida Familiar e Social*.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.



Reprodução/ ONU

Campanhas anuais de vacinação

As vacinas são um pilar da saúde moderna. O desenvolvimento delas é um dos grandes responsáveis pelo aumento da expectativa de vida dos seres humanos, quando comparado com os momentos antes delas.

No Brasil, boa parte das vacinas é oferecida gratuitamente pelo Sistema Único de Saúde (SUS) para pessoas de faixas etárias variadas. Contudo, enquanto só precisamos tomar algumas delas até determinada idade, como a da poliomielite, ou uma única dose, como as versões mais modernas da vacina da febre amarela, algumas são oferecidas em campanhas anuais, como a vacina da gripe. Você já se perguntou o motivo disso? O texto a seguir traz algumas informações.

Vacina da gripe: por que é preciso tomar todo ano?

Vacinação em dia garante atualização da proteção contra os vírus com maior circulação e é reforço para a imunidade, que começa a cair 10 meses após a aplicação



jordisalas.net/Shutterstock

A vacina da gripe deve ser tomada anualmente porque o imunizante é frequentemente reformulado, em razão da constante mutação do vírus.

Infográfico clicável

O aumento dos casos de síndrome respiratória aguda grave (Srag) e a chegada do clima frio e seco acendem o alerta para a importância da vacinação contra doenças como a gripe (Influenza). [...]

A superintendente de Vigilância em Saúde da SES, Flúvia Amorim, afirma que "vacinas sempre salvaram e continuam salvando vidas". "Estamos vivendo um período com unidades de saúde cheias de pessoas com doenças respiratórias, principalmente idosos e crianças, e são justamente as vacinas que vão evitar internações e óbitos", diz. A especialista apresenta duas razões fundamentais para a população tomar a vacina contra gripe todos os anos.

A primeira é que os vírus sofrem mutações e a mudança de cepas das vacinas contra Influenza é fundamental para a eficácia. Esse processo de atualização é feito a partir de monitoramento constante, realizado por unidades de saúde chamadas de "sentinelas". [...]

A segunda questão é a necessidade de fortalecer a imunidade de quem toma esse tipo de vacina. Após a imunização, em cerca de 10 meses a proteção começa a cair, e por isso, é preciso se revacinar. [...]

Sentinela

A vigilância sentinela de síndrome gripal pode indicar o início da sazonalidade, de epidemias ou surtos pelos vírus influenza. Cada unidade sentinela pode coletar até vinte amostras semanais (amostras clínicas) de pessoas sintomáticas por meio de *swab* orofaríngeo. [...]

Todos os anos, a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa) publica a composição das vacinas contra influenza que serão utilizadas no ano seguinte. [...] Além da Influenza, a revacinação também é importante para doenças como a Covid-19, outro vírus que sofre mutações.

GOVERNO DE GOIÁS. Secretaria de Estado da Saúde. *Vacina da gripe*: por que é preciso tomar todo ano? Disponível em: https://tedit.net/8l4hiq. Acesso em: 21 ago. 2024.

1. Responda, no caderno, ao que se pede.

a) Você já ouviu falar na influenza e na campanha nacional de vacinação contra essa doença? Qual é a importância dessa campanha?

Respostas pessoais.

b) O texto apresenta 2 motivos de a campanha ser periódica. Quais são esses motivos?

c) Você sabe o que significa a expressão "início da sazonalidade", que aparece no texto? Explique sua resposta.

d) Qual é o clima que favorece o aumento de casos de síndrome respiratória aguda grave (Srag)? Que hábitos podem prevenir essa doença?

2. Faça uma pesquisa sobre outras doenças sazonais e, no caderno, cite exemplos. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

3. Uma cientista elaborou um modelo matemático que descreve aproximadamente o número de casos de influenza durante o ano em determinada cidade brasileira.

Esse modelo é expresso pela lei $f(t) = 3200 + 1100 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t + 8)\right)$, em que $t \geqslant 1$ é o número de meses contados a partir do mês de janeiro ($t = 1$). De acordo com esse modelo, responda no caderno às perguntas a seguir.

As respostas encontram-se nas *Resoluções* deste Manual.

a) Qual foi o maior número de casos apontados nesse modelo matemático? Em qual mês isso ocorreu?

b) Qual foi a estação do ano em que o número de casos foi mínimo?

c) Do momento em que o número de casos atingiu o valor mínimo, após quantos meses (no mínimo) ele levará para atingir novamente esse valor?

d) Analisando o modelo matemático citado, entre quais meses de um ano o número de casos é crescente?

1. b) A campanha é periódica porque o vírus da influenza sofre mutações todos os anos e, justamente por isso, as vacinas também são diferentes a cada campanha vacinal. É muito provável que uma vacina tomada no ano anterior não consiga combater as novas mutações sofridas pelo vírus. Além disso, existe a necessidade de fortalecer a imunidade de quem toma esse tipo de vacina. Após a imunização, em cerca de 10 meses, a proteção começa a cair, por isso é preciso se revacinar.

c) Vírus sazonais são aqueles cuja incidência aumenta em determinados períodos do ano. O termo sazonal refere-se à temporariedade, indicando um período que tem começo, meio e fim. Assim, a expressão indica o início desse período.

d) Clima frio e seco. Durante esses períodos, devido ao frio, a aglomeração de pessoas em locais fechados facilita a propagação do vírus causador da doença. Além de tomar a vacina contra a influenza, nesses períodos, as medidas de higiene úteis para a prevenção da gripe são: cobrir a boca quando tossir ou espirrar (isso evita maior disseminação de partículas que carregam os vírus) e manter as mãos limpas (lavá-las com água e sabão) para evitar eventual transmissão por contato.

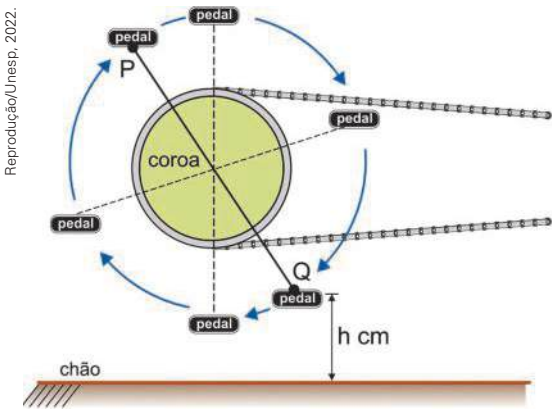
2. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

PARA FUNDAMENTAR SABERES

As imagens não estão representadas em proporção.

1. Como $-1 \leqslant \cos(\pi t) \leqslant 1$, temos $h_{máx.} = 20 + 10 \cdot 1 = 30$ e $h_{mín.} = 20 + 10 \cdot (-1) = 10$. Assim, $PQ = h_{máx.} - h_{mín.} = 30 - 10 = 20$; ou seja, 20 cm. Alternativa **c**.

1. (Unesp-SP) Na figura, $\overline{PQ}$ representa o eixo dos pedais de uma bicicleta. A altura do ponto Q ao chão, em centímetros, é $h = 20 + 10\cos(\pi t)$, em que t é o tempo, em segundos, contado a partir do momento que o ponto Q está no ponto mais distante do chão.



Reprodução/Unesp, 2022.

O comprimento do eixo $\overline{PQ}$ é de:

a) 21 cm. **c)** 20 cm. **e)** 12 cm.

b) 18 cm. **d)** 15 cm.

2. (UPE) Um veículo percorre, com velocidade constante, uma estrada retilínea. Em uma de suas rodas, com 50 cm de diâmetro, prende-se um chiclete. No instante $t = 0$ em que ocorre o primeiro contato do chiclete com a roda, a altura h do chiclete em relação ao nível da estrada é igual a 0. À medida que a roda gira, a altura h do chiclete em relação ao nível da estrada, em centímetros, varia periodicamente em função do tempo t decorrido após o primeiro contato do chiclete com a roda, em segundos. Sabendo-se que a roda dá uma volta completa a cada 0,5 segundo, qual das seguintes funções melhor descreve a altura h em função de t? Alternativa **a**.

a) $h(t) = 25 + 25 \cdot \operatorname{sen}\left(4\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$

b) $h(t) = 25 + 25 \cdot \operatorname{sen}(4\pi t)$

c) $h(t) = 25 + 25 \cdot \operatorname{sen}(0{,}5\pi t)$

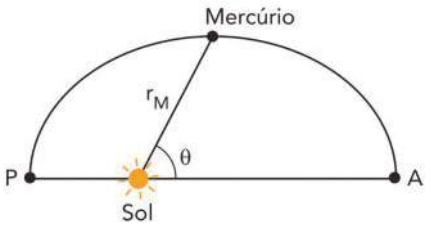
d) $h(t) = 25 - 25 \cdot \operatorname{sen}\left(0{,}5\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$

e) $h(t) = 25 - 25 \cdot \operatorname{sen}(\pi t)$

3. Para $\theta = 0°$, temos: $r_M = \frac{555}{10 - 2 \cdot \cos 0°} = \frac{555}{10 - 2} = \frac{555}{8}$.

Para $\theta = 180°$, temos: $r_M = \frac{555}{10 - 2 \cdot \cos 180°} = \frac{555}{10 - 2(-1)} = \frac{555}{12}$.

3. (Uerj) Considere a representação [a seguir], de metade da órbita do planeta Mercúrio em torno do Sol. A distância r_M entre o Sol e Mercúrio varia em função do ângulo θ, sendo $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$.



Reprodução/Uerj, 2019.

Para o cálculo aproximado de r_M, em milhões de quilômetros, emprega-se a seguinte fórmula:

$$r_M = \frac{555}{10 - 2 \times \cos\theta}$$

Calcule a distância $\overline{PA}$, em milhões de quilômetros.

4. (Unifesp) Cientistas usam os mesmos termos do gráfico da função seno para descrever as ondas marítimas. O período de uma onda marítima é o intervalo de tempo entre uma crista e a seguinte, e a distância entre elas é o comprimento da onda. A figura descreve, no plano cartesiano, uma onda marítima, em que o eixo vertical representa a altura das cristas da onda, e o eixo horizontal representa a distância percorrida pela onda.



Reprodução/ Unifesp, 2023.

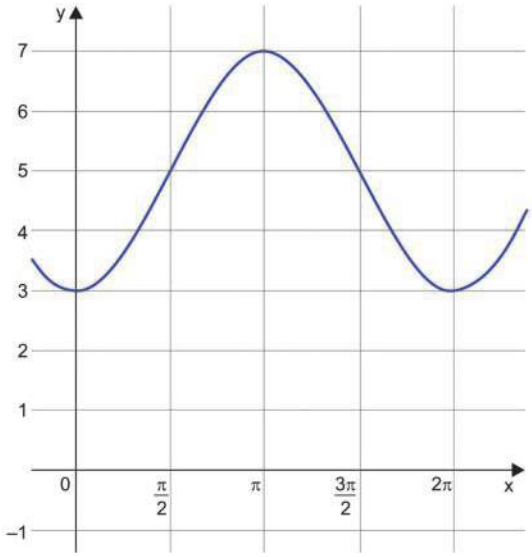
a) Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = m + \operatorname{sen}(n \cdot x)$, a função referente ao gráfico apresentado, determine m e n. $m = 1$ e $n = \frac{\pi}{10}$

b) Uma onda marítima foi modelada por meio da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = 3 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Determine a altura de suas cristas e o comprimento da onda. 4 metros; 4 metros

Logo, $PA = \frac{555}{8} + \frac{555}{12} = 115{,}625$, ou seja, 115,625 milhões de quilômetros.

5. **(UEA-SIS-AM)** Considere o gráfico da função trigonométrica $f(x) = a \cdot \cos x + b$, em que a e b são constantes reais.

Reprodução/UEA-AM, 2024.



O valor de $a + b$ é igual a:

a) 3. **b)** 4. **c)** 5. **d)** 7. **e)** 10.

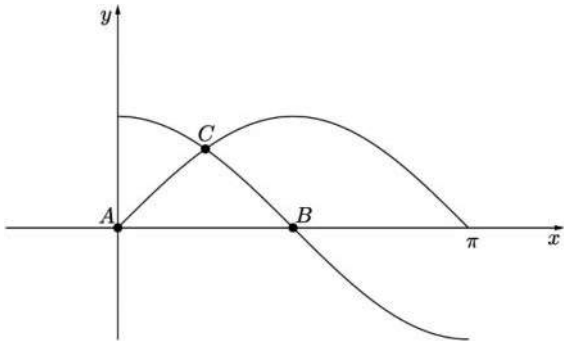
6. **(Enem PPL)** Na modelagem e no estudo de fenômenos periódicos, em geral, os modelos associados fazem uso de funções trigonométricas. Nesse sentido, considere um experimento, realizado em laboratório, em que uma planta foi colocada em uma estufa, onde a temperatura é controlável. O experimento consiste em observar alterações nas características dessa planta ao ser submetida a variações de temperatura. Durante 24 horas, a temperatura $T(x)$ da estufa variou de acordo com a função $T(x) = 20 - 10 \operatorname{sen}\left(\pi \cdot \frac{x}{4}\right)$, em que x é medido em hora, variando no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 24$.

Durante esse experimento, quantas vezes a temperatura na estufa atingiu o seu valor mínimo? Alternativa **b**.

a) 1 **c)** 4 **e)** 7

b) 3 **d)** 5

7. **(Udesc)** [Na figura] estão representados os gráficos das funções cosseno e seno definidas no intervalo $[0, \pi]$.



Reprodução/Udesc, 2023.

Gráficos das funções cosseno e seno definidas em $[0, \pi]$.

Considerando os pontos A, B e C mostrados na figura, o triângulo com vértices A, B e C tem área igual a: Alternativa **b**.

a) $\frac{\pi}{8}$. **c)** $\frac{\pi\sqrt{2}}{10}$. **e)** $\frac{\pi\sqrt{3}}{10}$.

b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$. **d)** $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$.

Nesta Unidade, estudamos conceitos ligados a um importante campo da Matemática: a Trigonometria. Respostas pessoais.

1. Reconheço as funções seno e cosseno como funções periódicas? Consigo identificar as principais propriedades dos gráficos dessas funções? Por que é importante estudar essas funções?
2. Compreendo o que são o período e os valores máximo e mínimo de uma função trigonométrica?
3. Consigo determinar a expressão de uma função do tipo seno ou do tipo cosseno analisando a representação gráfica?
4. Consigo esboçar o gráfico de uma função do tipo seno e do tipo cosseno?
5. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
6. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas, exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

5. De acordo com o gráfico e a função trigonométrica dada por $f(x) = a \cdot \cos x + b$, temos: $f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot \cos 0 + b \Rightarrow$ $\Rightarrow a \cdot 1 + b = 3$. Portanto, $a + b = 3$. Alternativa **a**.

RESPOSTAS

UNIDADE 1

Abertura de Unidade (p. 14)

1. A quarentena foi uma medida de saúde pública que restringiu a circulação de pessoas com o intuito de impedir a exposição da população ao novo coronavírus. Deve ser realizada pelo período máximo de incubação da doença, compreendido entre a infecção e a manifestação dos sintomas. Ela foi importante para reduzir a taxa de crescimento do número de infectados, evitando que o sistema de saúde ficasse sobrecarregado e entrasse em colapso.

2. Resposta pessoal.

3. Depois que a população começou a ser vacinada, o número de mortes diminuiu drasticamente.

Capítulo 1

Atividades

1. **a)** 125
b) -125
c) $\frac{1}{125}$
d) $-\frac{8}{27}$
e) 2500
f) 1
g) $\frac{3}{2}$
h) 1
i) 32
j) -100
k) $\frac{1}{1000}$
l) -4
m) 0,04
n) 10
o) 3,4
p) 1
q) 400
r) 0,8

2. **a)** $A = -5$
b) $B = 7$
c) $C = -\frac{15}{4}$
d) $D = -5$
e) $E = \frac{3}{2}$
f) $F = \frac{40}{9}$

3. **a)** 11^6
b) 1
c) 10^2
d) 6^3
e) 10^{-1}

4. **a)** 2^{99}
b) 3^{21}
c) 2^{61}
d) 5^{42}

5. 2^{19}

6. **a)** $a + b$
b) $\frac{(b+a)\cdot(b-a)}{a^2b^2}$
c) $\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2$

7. **a)** 8
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2}$
d) 100 000

8. **a)** 12
b) 2
c) 64

9. **a)** $3\sqrt{6}$
b) $3\sqrt[3]{2}$
c) $2\sqrt[4]{15}$
d) $10\sqrt[3]{3}$

10. **a)** $9\sqrt{2}$
b) $-8\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
c) $4\sqrt[3]{2}$
d) $21\sqrt{3}$

11. **a)** 3
b) $2\sqrt{6}$
c) 3
d) 3

12. **a)** $11 - 6\sqrt{2}$
b) 9
c) $\sqrt{3} + 2\sqrt[4]{3} + 1$
d) $20 + 14\sqrt{2}$

13. **a)** 2
b) 7
c) 2
d) 4

14. **a)** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
e) $5\sqrt[5]{125}$
f) $\sqrt[9]{16}$

15. **a)** $2 \cdot (\sqrt{2} - 1)$
b) $2 + \sqrt{2}$
c) $\frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$
d) $2 + \sqrt{2}$

16. **a)** $\sqrt{2}$
b) 2
c) $\sqrt[3]{4}$

17. **a)** 3
b) 16
c) 2
d) 4
e) 24
f) 0,5
g) $\frac{3}{10}$
h) $\frac{1}{3}$
i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

18. **a)** 4
b) $\frac{1}{12}$
c) $\sqrt{5}$
d) 1024
e) 9
f) $\frac{10}{3}$
g) 8
h) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
i) 100

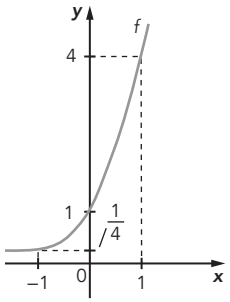
19. **a)** $\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\frac{41}{16}$ e 3.
b) Será possível executar o fluxograma para qualquer número real x maior ou igual a 1.
c) $x = 5$

20. $a^b = 5$

21. **a)** Aproximadamente 1,84 m².
b) 1,80 m
c) $x = 10$

22. Alternativa **e**.

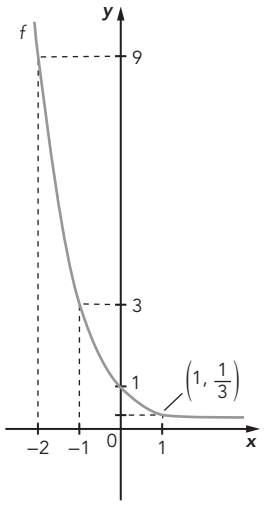
23. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; crescente.



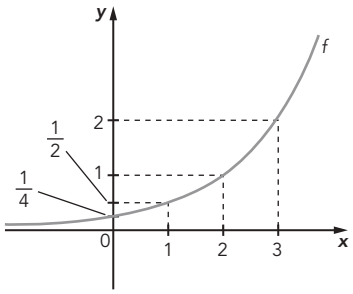
Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

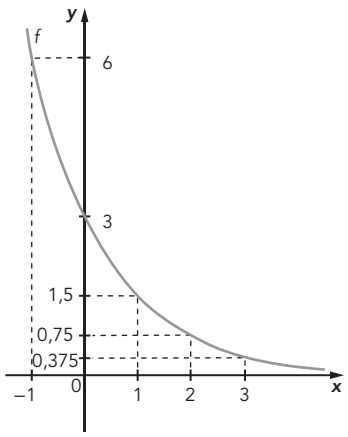
b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; decrescente.



c) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; crescente.



d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; decrescente.



24. a) $m = 3$

b) 18

c) 3

d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

e) Decrescente.

25. a) $a = 1$, $b = 2$.

b) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$

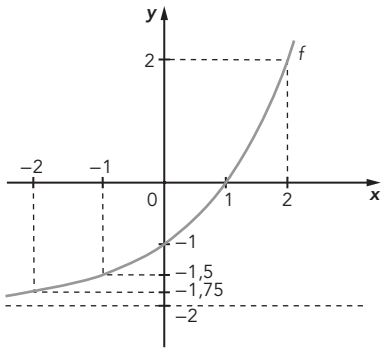
c) $P(-1, 2)$

d) Não existe esse ponto.

e) $D(f) = \mathbb{R}$

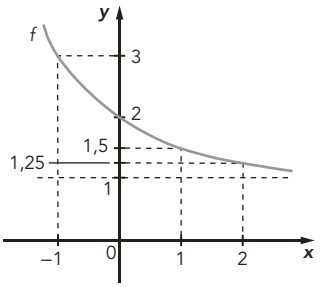
f) Crescente.

26. a) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -2\}$; crescente.

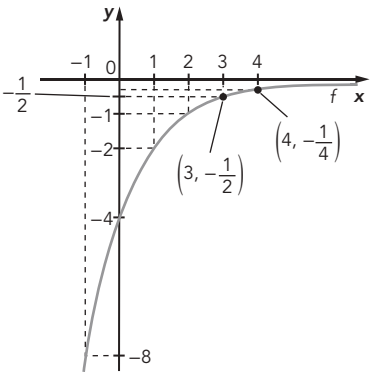


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

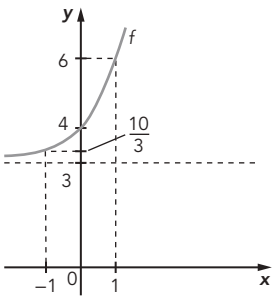
b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; decrescente.



c) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$; crescente.



d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 3\}$; crescente.



27. a)

t (em horas)	0	0,5	1	1,5	2	3	5
Quantidade de bactérias (em milhares)	10	30	90	270	810	7290	590490

b) $n(t) = 3^{2t} \cdot 10$

c) $D(t) = \mathbb{R}_+$; $Im(t) = \mathbb{R}_+^*$; crescente.

28. Resposta pessoal.

29. a)

Hoje	R$ 1.000,00
1 ano	R$ 1.120,00
2 anos	R$ 1.254,40
3 anos	Aproximadamente R$ 1.404,93.
4 anos	Aproximadamente R$ 1.573,52.
5 anos	Aproximadamente R$ 1.762,34.

b) $s(x) = 1000 \cdot (1{,}12)^x$

c) Não.

d) $D(s) = \mathbb{R}_+$; $Im(s) = \mathbb{R}_+^*$; crescente.

e) A expressão "em média".

30. a) $y = 4000 \cdot (1{,}75)^x$

b) 3 anos: 21 600 m²; 6 anos: 116 640 m²; 9 anos: 629 856 m².

31. a) 16 unidades.

b) O acréscimo é de 3 unidades.

c) 40 unidades.

32. a) Falsa.

b) Falsa.

c) Falsa.

d) Falsa.

e) Verdadeira.

- Resposta pessoal.

33. Resposta pessoal.

34. a) No plano P_1.

b) No plano P_1 a quantidade final de cisternas na cidade é maior, porém, na maior parte do decorrer dos 3 anos de implementação dos planos, o plano P_2 fornece maior quantidade de cisternas.

c) Resposta pessoal.

35. Alternativa **a**.

36. Alternativa **c**.

37. a) $S = \{4\}$

b) $S = \{8\}$

c) $S = \{1\}$

d) $S = \{5\}$

e) $S = \{1\}$

f) $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

g) $S = \{4\}$

h) $S = \{-1\}$

i) $S = \{2\}$

j) $S = \varnothing$

k) $S = \varnothing$

38. a) $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

d) $S = \{2\}$

e) $S = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$

f) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

g) $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

h) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

39. 7,5 meses.

40. a) R$ 250.000,00

b) R$ 12.500,00

c) R$ 330.625,00

d) 37 anos.

41. a) $S = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$

b) $S = \{-1\}$

c) $S = \left\{\frac{9}{4}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{9}{2}\right\}$

42. a) $S = \{3\}$

b) $S = \{2\}$

43. a) R$ 8.000,00

b) 60 meses.

44. a) $a = 3000$; $b = 1{,}5$.

b) 6 000 pessoas.

c) 192 000 pessoas.

d) Aproximadamente 7 dias.

45. a) $k = -1$

b) 33 750 habitantes.

46. a) $q(t) = 400\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$

b) 27 anos.

Pense nisto (p. 18)

Se tivéssemos $a = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \neq 0$, $0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$, o que é uma indefinição na Matemática.

Pense nisto (p. 20)

$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$

Pense nisto (p. 25)

Não, pois, por $f(x) = g(x) \Rightarrow 2^x = 2^x + 2 \Rightarrow 0 = 2$, verifica-se impossível.

Pense nisto (p. 28)

$\forall\, x \in \mathbb{R}, 3^x > 0 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 3^x > \frac{1}{6} \cdot 0 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 3^x > 0 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 3^x + 2 > 0 + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 3^x + 2 > 2$. Portanto, $Im(f) =]2, +\infty[$.

Experimente (p. 26)

1.
- Se $k > 1$, a concavidade do gráfico da função está voltada para cima e é mais fechada. Se k varia entre 0 e 1, a concavidade do gráfico da função está voltada para cima e é mais aberta. Se $k < -1$, a concavidade do gráfico da função está voltada para baixo e é mais fechada. Se k varia entre -1 e 0, a concavidade do gráfico da função está voltada para baixo e é mais aberta.
- O ponto de intersecção do gráfico com o eixo y tem sempre coordenadas $(0, k)$.
- Se $k > 0$, a imagem é $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$. Se $k < 0$, a imagem é $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$.

2. a) $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$; $D(g) = \mathbb{R}$; crescente.

b) $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; $D(g) = \mathbb{R}$; decrescente.

c) $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 3\}$; $D(g) = \mathbb{R}$; decrescente.

d) $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; $D(g) = \mathbb{R}$; crescente.

e) $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$; $D(g) = \mathbb{R}$; crescente.

f) $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; $D(g) = \mathbb{R}$; decrescente.

3. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

4. Resposta pessoal.

Interligando (p. 32)

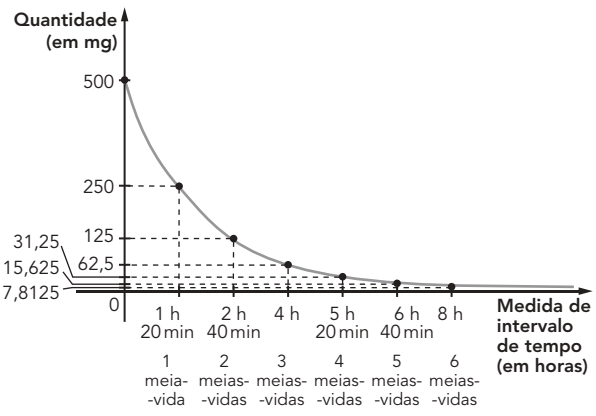
1. a)

Dados da Amoxicilina

Número de meias-vidas	0	1	2	3	4	5	6
Quantidade de Amoxicilina no organismo (em mg)	500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125

Dados elaborados para fins didáticos.

b)



Banco de imagens/Arquivo da editora

c) $q(n) = \frac{500}{2^n}$

d) 1,5625%

e) $D(q) = \mathbb{R}_+$; $Im(q) = \mathbb{R}_+^*$; decrescente.

Capítulo 2

Atividades

1. **a)** 4
b) 2
c) 4
d) 3
e) 5
f) 2
g) 5
h) 3

2. **a)** -2
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{7}{2}$
e) $\frac{1}{4}$
f) -2
g) $-\frac{3}{2}$
h) $-\frac{2}{3}$
i) -2
j) -1

3. **a)** $-\frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $-\frac{3}{4}$
d) 5
e) $\frac{1}{9}$
f) 4

4. **a)** 0
b) -2
c) 6
d) 5
e) $\frac{1}{3}$
f) $\frac{3}{2}$

5. **a)** -2
b) $-\frac{1}{2}$
c) -1
d) 1
e) 3
f) -4

6. **a)** 16
b) $\frac{11}{6}$

7. **a)** 81
b) 4
c) $\frac{1}{3}$
d) 1
e) $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$ e $x \neq 1$.
f) 5

8. **a)** -2
b) $\frac{2}{7}$
c) 12
d) $-\frac{4}{9}$
e) -1

9. $B = C < A < D$

10. $m = 16$ e a raiz é -2.

11. **a)** 128
b) $\frac{5}{4}$
c) 343
d) 16
e) $\sqrt{7}$

12. 1331

13. **a)** 1
b) 0
c) -1
d) 8
e) -1
f) 3
g) 8
h) -6
i) 25
j) $2e^2$

14. **a)** 1
b) -5
c) 0
d) 7
e) $-\frac{3}{2}$
f) 4

15. **a)** $1 + \log_5 a - \log_5 b - \log_5 c$
b) $2 \cdot \log b - 1 - \log a$
c) $\log_3 a + 2 \cdot \log_3 b - \log_3 c$
d) $3 + \log_2 a - 3 \cdot \log_2 b - 2 \cdot \log_2 c$
e) $\frac{3}{2} + \log_2 a + \frac{3}{2} \cdot \log_2 b$

16. **a)** $a + b$
b) $b - a$
c) $1 - a$
d) $b + 1$
e) $-2a$
f) $3a + 2b$
g) $b - 1$
h) $\frac{1}{3} \cdot (a + 2b) - \frac{1}{3}$
i) $3a + b - 3$
j) $b - 2a$
k) $a + 4$

17. **a)** abc
b) $\frac{a^3 \cdot c^2}{b}$
c) $\frac{a}{9b}$
d) $\frac{\sqrt{a}}{b}$

18. **a)** 1
b) 1
c) -2

19. **a)** 60
b) $2\sqrt{3}$
c) $\frac{1}{3}$
d) 625

20. **a)** Aproximadamente 3,48.
b) Aproximadamente $-2,7$.
c) Aproximadamente 0,24.
d) Aproximadamente 1,3.
e) Aproximadamente $-1,22$.
f) Aproximadamente 1,68.
g) Aproximadamente 2,1.

21. **a)** Aproximadamente 3,32.
b) Aproximadamente 8,96.
c) Aproximadamente 10,64.
d) Aproximadamente $-0,77\overline{3}$.
e) Aproximadamente $-0,96$.

22. $729 \cdot 10^{13}$ km

23. **a)** $S = 68\%$
b) 99 minutos.

24. Sim; $x = \frac{5}{2}$ e $y = \frac{5}{3}$.

25. **a)** 10 mil vezes maior.
b) 2,14

26. **a)** $\frac{\log_2 3}{\log_2 5}$
b) $\frac{\log_2 5}{\log_2 10}$
c) $\frac{2}{\log_2 3}$
d) $\frac{\log_2 3}{\log_2 e}$

27. **a)** 0,625
b) 0,686
c) $2,\overline{3}$
d) $4,1\overline{6}$
e) 2,1
f) $-0,1923$

28. **a)** $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) 1

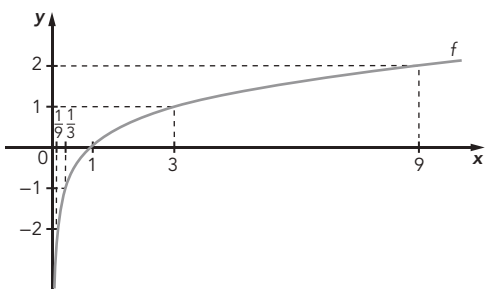
29. **a)** $\frac{1}{a}$
b) $\frac{1}{2a}$
c) $\frac{1+a}{a}$
d) $\frac{2}{3a}$

30. **a)** 1
b) $\log_6 2$
c) $\frac{3}{8}$
d) 11

31. **a)** Para $f(x)$: $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; para $g(x)$: $D(g) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(g) = \mathbb{R}$.
b) As funções são crescentes.
c) A função exponencial f cresce mais rápido a partir de $x = 1$.

32. **a)** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$

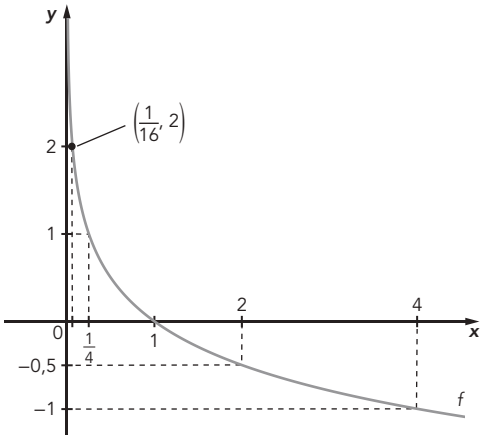
33. **a)** Crescente.



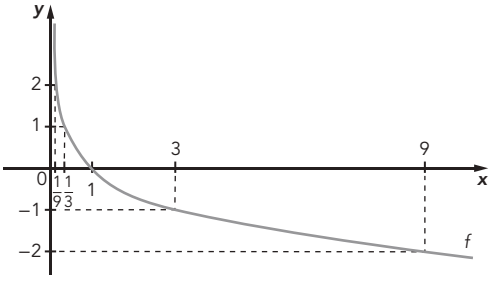
Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

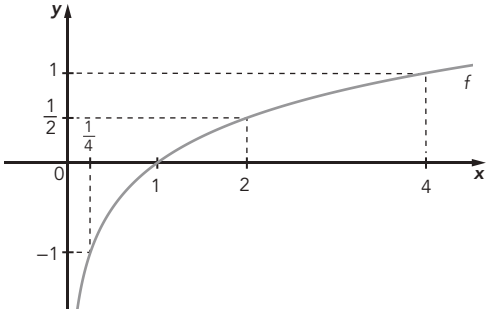
b) Decrescente.



c) Decrescente.



d) Crescente.



34. a) $f(x)$: $D(f) =]-1, +\infty[$ e $Im(f) = \mathbb{R}$; $g(x)$: $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$.
b) $a = 3$; $b = 2$.
c) Crescentes.

35. a) $k = -1$
b) 3 u.a.
c) 10

36. a) 425 funcionários.
b) 25 funcionários.
c) Cerca de 3 funcionários/ano.

37. a) R$ 20.800,00
b) O lucro mensal vai diminuir R$ 200,00.

38. $\frac{127}{8}$ u.a.

39. a) 10^{-2} mol/L e 10^{-11} mol/L.
b) Aproximadamente $1{,}59 \cdot 10^{-3}$ mol/L.
c) A solução de tomate é 100 vezes "mais ácida" do que a solução de urina.
d) Resposta pessoal.

40. a) Aproximadamente 0,7576.
b) Aproximadamente 1000 dólares PPC.
c) 75 000 dólares PPC.

41. a) $S = \{2{,}08\overline{3}\}$
b) $S = \{0{,}8\}$
c) $S = \{4{,}8\}$
d) $S = \{0{,}78\}$
e) $S = \{2{,}\overline{3}\}$
f) $S = \{0{,}625\}$
g) $S = \{2{,}2\}$
h) $S = \{1{,}6\}$

42. Aproximadamente 4,5 anos.

43. a) R$ 600.000,00
b) R$ 60.000,00
c) 10% por década.
d) 30 anos.

44. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.

45. a) 24 anos.
b) 35 anos.

46. a) $\frac{1}{29}$
b) 67,28 anos.

47. Alternativa **c**.

Pense nisto (p. 39)

- Não existiria logaritmo. Como $1^x = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $1^x = 5$ ou $1^x = 4$.
- Não existiria logaritmo. Como $2^x > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, não se pode calcular $\log_2(-4)$, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $2^x = -4$.
- $\log_1 1$ seria indeterminado, pois qualquer expoente serviria ($1^x = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$).

Pense nisto (p. 45)

Note que $10^{0{,}3} = 10^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{10^3} = \sqrt[10]{1000} \simeq 2$, pois $2^{10} = 1024$, que está próximo de 1000. Lembre-se de que, se tivéssemos usado uma aproximação para log 2, com mais casas decimais (já que log 2 ≃ 0,3010299957), teríamos um resultado ainda mais próximo.

Pense nisto (p. 58)

Resposta pessoal.

Interligando (p. 50)

1. $I_2 = 10 \cdot I_1$, um aumento de 10 dB acarreta uma medida de intensidade de som 10 vezes maior.

2. Se a medida de intensidade de um som é multiplicada por 10^x (com $x > 0$), o número de decibels aumenta em $10x$ unidades.

Experimente (p. 53)

1. Decrescente.

2. Não, pois x não pode assumir o valor zero. O domínio dessa função é $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.

3. Sim. O conjunto imagem da função é $\mathbb{R}$.

4. A expressão não está definida para $b < 0$. É esperado que o *software* não gere gráfico algum.

5. O gráfico da função logarítmica é decrescente quando $0 < b < 1$ e é crescente quando $b > 1$.

6. Para $x = -2$, temos $f(-2) = \frac{1}{4}$. Para $x = -1$, temos $f(-1) = \frac{1}{2}$. Para $x = 0$, temos $f(0) = 1$. Para $x = 1$, temos $f(1) = 2$. Para $x = 2$, temos $f(2) = 4$. Para $x = 3$, temos $f(3) = 8$.

7. $g\left(\frac{1}{4}\right) = -2$; $g\left(\frac{1}{2}\right) = -1$; $g(1) = 0$; $g(2) = 1$; $g(4) = 2$ e $g(8) = 3$.

8. Se $b = f(a)$, então $a = g(b)$.

9. O gráfico da função f é simétrico ao de g em relação à reta, gráfico de $y = x$.

10. A reta correspondente ao gráfico de $y = x$ é formada por pontos com coordenadas iguais (a, a), com $a \in \mathbb{R}$.

11. Os gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Viralize! (p. 60)

1. a) A medida de amplitude das ondas no terremoto T_2 é 1000 vezes (3 graus na escala Richter equivalem a $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$) a medida de amplitude das ondas em T_1.

b) Um terremoto com escala Richter 3 unidades maior tem uma medida de energia liberada no terremoto da ordem de 32 768 vezes maior.

2. T_3 alcançou 5 pontos a mais na escala Richter.

3. Resposta pessoal.

Para fundamentar saberes (p. 62)

1. Alternativa **d**.
2. Alternativa **e**.
3. Alternativa **b**.
4. Alternativa **d**.
5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **b**.

UNIDADE 2

Abertura de Unidade (p. 64)

1. Tabela nutricional para 100 g de cada alimento citado

Informação nutricional / Alimento	Valor energético (em kcal)	Carboidratos (em g)	Proteínas (em g)	Gorduras totais (em g)
Feijão*	29	4,1	4,2	0,5
Milho**	365	74,26	9,42	4,74
Mandioca***	160	38,06	1,36	0,28

Fonte dos dados: UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO. *Tabnut – Tabelas Nutricionais de Alimentos Consumidos no Brasil*. Disponível em: https://tedit.net/kmu6bv. Acesso em: 20 ago. 2024.
*Semente madura crua. **Amarelo. ***Crua.

2. Resposta pessoal.

Capítulo 3

Atividades

1. a) 3×2
b) Matriz linha, 1×4.
c) Matriz quadrada, 2×2.
d) Matriz quadrada, 3×3.
e) 3×4
f) Matriz coluna, 3×1.

2. a) 4
b) Não existe.
c) 1
d) 1

3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

5. 0

6. $a_{46} = 3$

7. Diagonal principal: 1, 4 e 9; diagonal secundária: 3, 4 e 3.

8. a) 1485 sorvetes.
b) 190 sorvetes.
c) R$ 54.270,00

9. a) **X** e **Y**: $d_{12} = d_{21} = 15$ km.
Z e **X**: $d_{13} = d_{31} = 27$ km.
Y e **Z**: $d_{23} = d_{32} = 46$ km.
b) Note que os números da linha 1 são iguais aos da coluna 1, e assim por diante; logo, $D^t = D$.

10. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. a) Canadá 0 × 1 México.
b) Argentina, com 3 pontos.

12. $a = 2, b = 1, c = 6$ e $d = 4$.

13. $x = 4, y = 3$ e $z = 2$.

14. a) Não existe número real m que satisfaça, simultaneamente, as igualdades entre os elementos correspondentes das matrizes.
b) $m = -3$

15. a) $\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$
b) $(-5 \ -1 \ -8 \ -3)$
c) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

16. a) $c_{78} = 21$ e $c_{95} = 27$.
b) $c_{ij} = 3i$

17. a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 18 \\ -5 & 9 & -2 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$

18. a) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -12 & 20 & -4 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 6 & -10 & 2 \end{pmatrix}$

19. a) $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 2 & 21 \\ 9 & 29 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -13 \\ -27 & -17 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

21. $X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

22. a) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$
b) Como o número de colunas de B (2) não é igual ao número de linhas de A (3), não existe o produto.
c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

23. $x = 2; y = -4$.

24. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
b) Não.

25. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
e) Note que, para A^n, com n ímpar, conforme item **b** e **d**, temos $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$, portanto, $A^{35} = A$.

26. a) $\begin{bmatrix} 346 & 297 & 553 \\ 130 & 197 & 167 \end{bmatrix}$
b) 297 mg é a quantidade total de cálcio encontrada na receita **II**.
c) 167 mg é a quantidade total de magnésio encontrada na receita **III**.

27. a) Bicarbonato de sódio: 23,8 kg; carbonato de sódio: 5 kg; e ácido cítrico: 21,2 kg.
b) $\begin{pmatrix} 2{,}3 & 2{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 2{,}2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\,000 \\ 4\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23\,800 \\ 5\,000 \\ 21\,200 \end{pmatrix}$
c) 9 500 envelopes na versão **T** e 5 500 na versão **E**.

Pense nisto (p. 69)

A matriz quadrada.

Pense nisto (p. 71)

Se B é oposta a A e $A + B = 0$, conclui-se que $a_{ij} + b_{ij} = 0$, isto é, $a_{ij} = -b_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Pense nisto (p. 74)

a) Sim; qualquer que seja a ordem n dessas matrizes, temos: $(n \times n) \cdot (n \times n)$. A matriz produto também será quadrada de ordem n.

b) Resposta pessoal.

Interligando (p. 76)

1. a) Imagem **VI**.

b) Imagem **V**.

Capítulo 4

Atividades

1. a) É solução.

b) Não é solução.

c) É solução.

2. a) É solução.

b) Não é solução.

c) É solução.

3. $m = -8$

4. a) 8 maneiras distintas.

b) 10 maneiras distintas.

5. a) $-4x + 3y = -1$

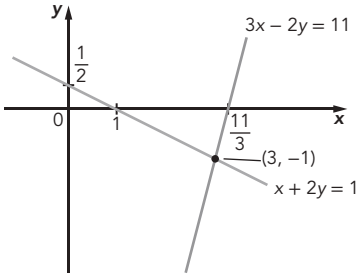
b) $\left(0, -\frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{4}, 0\right); \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right)$

6. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

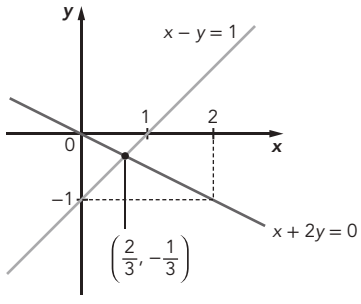
7. Resposta pessoal.

8. a) $S = \{(3, -1)\}$; sistema possível e determinado.

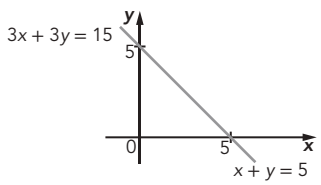


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

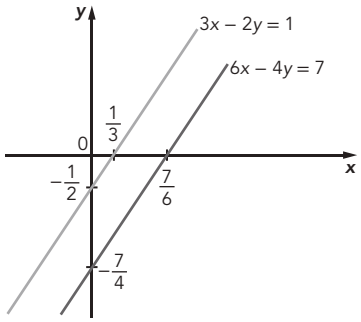
b) $S = \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$; sistema possível e determinado.



c) $S = \{(5 - y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$; ou $S = \{(x, 5 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado.

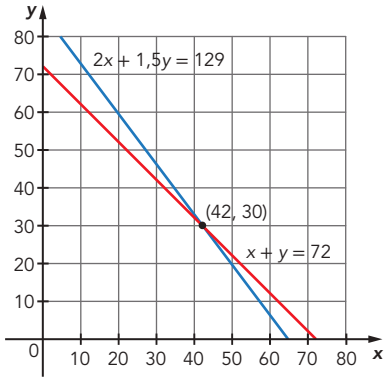


d) $S = \varnothing$; sistema impossível.



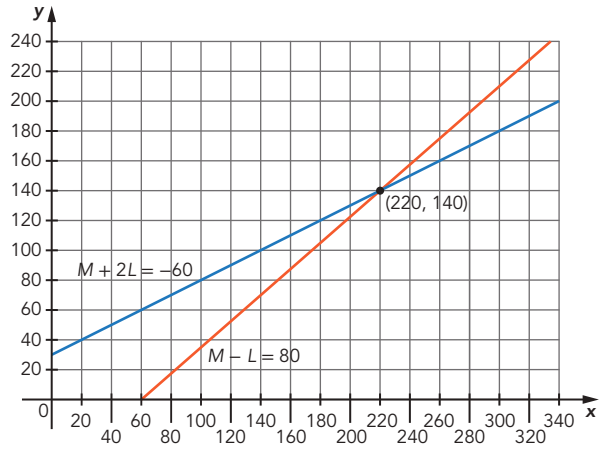
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

9. 30 unidades de 1,5 L.



10. Resposta pessoal.

11. R$ 360,00



12. a) 51 pontos.

b) 11 questões.

c) Não.

13. $m \neq \frac{5}{2}$

14. $m = 11$

15. $m = -4$; $n = 2$.

16. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

17. a) Equação **I**: reta u; Equação **II**: reta r; Equação **III**: reta t; Equação **IV**: reta v; Equação **V**: reta s.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

18. 15 m/s

19. a) Sim.

b) Sim.

c) Não.

20. a) $S = \{(3, 3, -4)\}$; sistema possível e determinado.

b) $S = \{(7 + \alpha, 2 + 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado.

c) $S = \{(6, 0, 3, 2)\}$; sistema possível e determinado.

21. $\alpha = 3$; $\beta = 2$ e $\gamma = -6$.

22. $S = \{(1 + \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

23. a) $S = \{(1, 3, 2)\}$; sistema possível e determinado.

b) $S = \varnothing$; sistema impossível.

c) $S = \varnothing$; sistema impossível.

d) $S = \left\{\left(\frac{-1+\alpha}{2}, \frac{5-3\alpha}{2}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; sistema possível e indeterminado.

24. a) Resposta pessoal.

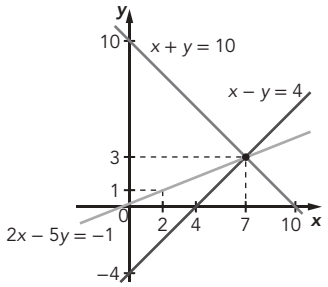
b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

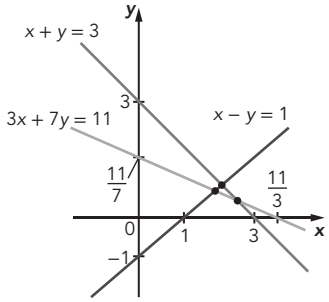
25. Quibe: R$ 9,50; esfirra: R$ 4,80; suco: R$ 10,50.

26. a) $S = \{(7, 3)\}$ **b)** $S = \varnothing$

27. a)



b)



28. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

29. R$ 88,00

30. Ana tem R$ 160,00, Beatriz tem R$ 75,00 e Carolina R$ 105,00.

31. a) R$ 4,00

b) Não é possível determinar.

c) R$ 32,60

d) Não é possível determinar.

32. a) **I.** Oxigênio (O): $11x + y = z + 2w$

II. Carbono (C): $12x = 2z + w$

III. Hidrogênio (H): $22x + 2y = 6z$

b) $\begin{cases} 11x + y - z - 2w = 0 \\ 12x - 2z - w = 0 \\ 22x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 11x + y - z - 2w = 0 \\ 12y + 10z - 13w = 0 \\ -4z + 4w = 0 \end{cases}$

d) Sistema possível e indeterminado; $S = \left\{\left(\frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{4}, \alpha, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

e) Se $w = 4$, temos que: $x = 1$, $y = 1$, $z = 4$ e $w = 4$. A equação balanceada é: $C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O \rightarrow 4\ C_2H_5OH + 4\ CO_2$.

f) Resposta pessoal.

33. a) $S = \{(0, 0)\}$; sistema possível e determinado.

b) $S = \{(2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado.

c) $S = \{(0, 0, 0)\}$; sistema possível e determinado.

d) $S = \{(-\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado.

34. a) $m = 2$

b) $S = \left\{\left(-\frac{11\alpha}{5}, \frac{9\alpha}{5}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

35. $m \neq -1$

36. a) $(3, -2)$ é solução; $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ não é solução.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

37. a) Não é solução.

b) É solução.

c) Não é solução.

38. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -13 \\ -1 & 1 & 10 & 4 \end{bmatrix}$.

39. a) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 7y - 2z = 11 \\ x - y + 3z = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 4y + 3z = 11 \\ -3x - 3y - 3z = 10 \end{cases}$

40. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Para $(-5, 4, 2)$: $-5 + 8 + 2 = 5$ e $-10 + 12 - 2 = 0$.

Para $(1, 1, 1)$: $1 + 2 + 1 = 4 \neq 5$ e $2 + 3 - 1 = 4 \neq 0$.

c) 1ª equação:

$-15 + 5\alpha + 2 \cdot (10 - 3\alpha) + \alpha = 5$

2ª equação:

$2 \cdot (-15 + 5\alpha) + 3 \cdot (10 - 3\alpha) - \alpha = 0$

d) $p = -25$

41. a) -2 **c)** 6

b) -13 **d)** 1

42. a) -11 **d)** -1

b) 3 **e)** -13

c) -15 **f)** -33

43. 12

44. a) 22 **c)** -1

b) 2

45. a) 8 **b)** 8

46. $\det A = 1$; $\det B = -4$; $\det (A + B) = 0$; $\det (A \cdot B) = -4$.

47. a) $m \neq 2$

b) Não existe $m \in \mathbb{R}$.

c) $m = 2$

48. $k \neq 1$ e $k \neq -2$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

49. $m \neq 13$: sistema possível e determinado; $m = 13$: sistema possível e indeterminado; para que um sistema seja impossível, m não pode existir.

Pense nisto (p. 81)

$10x + 20y = 90 \Rightarrow 10 \cdot (x + 2y) = 90 \Rightarrow x + 2y = 9$

Pense nisto (p. 84)

- Comparação.
- Substituição.

Pense nisto (p. 87)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 87)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 92)

(1, 2, 97). O sistema apresenta infinitas soluções.

Pense nisto (p. 96)

Porque, se utilizássemos a 1ª equação para anular o y da 3ª equação, obteríamos uma equação com termos em x e z, o que não seria conveniente, pois os termos em x já foram anulados na etapa anterior e o objetivo é obter um sistema de equações escalonado.

Pense nisto (p. 98)

Com a troca, bastou multiplicar a 1ª por -2 para eliminar o coeficiente de x na adição.

Pense nisto (p. 99)

Resposta pessoal.

Experimente (p. 84)

1. O par ordenado (0, 4) não é uma solução da equação linear, pois não está alinhado com os demais pontos.

2. Resposta pessoal.

Experimente (p. 88)

1. a) $x = 8$ e $y = 13$.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

Interligando (p. 101)

1. O sistema tem 3 equações e 4 incógnitas.

2. Para $x = 250$, temos: $y = 450$; $z = 750$; $w = 650$.

3. $S = \{(x, x + 200, x + 500, x + 400) \mid x \in \mathbb{N}^*\}$

Viralize! (p. 108)

1. As terras ocupadas por remanescentes dos quilombos são aquelas utilizadas para a garantia da reprodução física, social, econômica e cultural dessas comunidades. Como parte de uma medida de reparação histórica, a política de regularização fundiária de Territórios Quilombolas é de suma importância para a dignidade e a garantia da continuidade desses grupos étnicos.

2. Bahia, Maranhão, Minas Gerais e Pará.

3. População quilombola: na Bahia: 397 000; no Maranhão: 270 000; em Minas Gerais: 135 000 e no Pará: 135 000.

Para fundamentar saberes (p. 110)

1. Alternativa **e**.

2. Alternativa **b**.

3. Alternativa **c**.

4. Alternativa **b**.

5. Alternativa **a**.

6. 1 porção de pão, 3 porções de frutas e 2 porções de iogurte.

7. Alternativa **c**.

UNIDADE 3

Abertura de Unidade (p. 112)

1. Resposta pessoal.

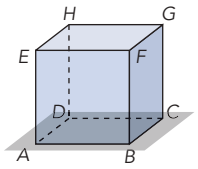
2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

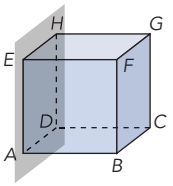
Capítulo 5

Atividades

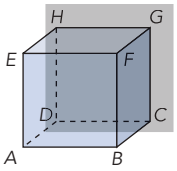
1. a)



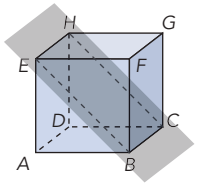
b)



c)



d)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Um único plano.

3. Sabe-se que 3 pontos (representados pelo pé das mesas) não colineares determinam um único plano (o plano do chão), mas 4 pontos podem determinar mais de um plano, provocando, desse modo, o balanço da mesa.

4. a) α e β, α e γ e α e δ.

b) β e γ (paralelos coincidentes), β e δ e γ e δ (paralelos distintos).

5. a) F; pois a reta pode estar contida no plano e, nesse caso, haverá infinitos pontos comuns.

b) V

c) V

d) F; pois, se a reta e o plano tiverem 2 pontos distintos em comum, a reta está contida no plano e, portanto, eles têm infinitos pontos em comum.

e) V

6. a) Concorrentes.

b) Reversas.

c) Paralelas distintas.

d) Secantes.

e) Paralelos.

f) Reversas.

7. a) V

b) V

c) F; pois são reversas.

d) V

e) F; pois são secantes.
f) V
g) V

8. a) F; pois são paralelas distintas.
b) V
c) V
d) F; pois são reversas.
e) V

9. a) $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ estão contidas no plano (*ABE*) e são concorrentes; $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ estão contidas no plano (*ABC*) e são concorrentes.
b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ estão contidas no plano (*ABE*) e $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ estão contidas no plano (*EFG*) e $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{GH}$.
c) $\overleftrightarrow{AB}$ é ortogonal à $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é ortogonal à $\overleftrightarrow{FG}$. $\overleftrightarrow{EF}$ é ortogonal à $\overleftrightarrow{CG}$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ é ortogonal à $\overleftrightarrow{CG}$.
d) $\overleftrightarrow{AE} \parallel$ plano (*BCG*) e $\overleftrightarrow{AD} \parallel$ plano (*BCG*), mas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são concorrentes; $\overleftrightarrow{AB} \parallel$ plano (*EFG*) e $\overleftrightarrow{BC} \parallel$ plano (*EFG*), mas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são concorrentes.

10. a) O plano (*ABC*), o plano (*EFG*), o plano (*CDI*) e o plano (*EFK*) são oblíquos ao plano (*CDE*).
b) Sim; a reta $\overleftrightarrow{EF}$ representa o traço deles; eles são oblíquos entre si.
c) Secantes.

11. a) 3 cm
b) 7 cm
c) 2 cm
d) 7 cm
e) 3 cm
f) 3 cm
g) 7 cm

Pense nisto (p. 117)

Infinitas.

Pense nisto (p. 118)

Infinitos.

Pense nisto (p. 121)

Se estiverem em um mesmo plano, as retas são paralelas. Se não houver um plano que as contenha, são reversas.

Pense nisto (p. 121)

- *r* e *s* podem ser ou paralelas, ou concorrentes, ou reversas, ou coincidentes.
- *r* e *s* podem ser paralelas ou reversas.

Pense nisto (p. 121)

- *r* e *s* podem ser paralelas ou reversas.
- *r* e *s* podem ser concorrentes ou reversas.

Pense nisto (p. 122)

Não, também podem ser reversas, por definição.

Pense nisto (p. 125)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 125)

90°

Pense nisto (p. 126)

O plano (*BCF*), o plano (*CDG*) e o plano (*ABE*).

Pense nisto (p. 128)

O segmento $\overline{AB}$.

Pense nisto (p. 128)

A reta perpendicular a *r* e que contém *P*.

Interligando (p. 133)

1. 60°

2. Aproximadamente 20 m.

Capítulo 6

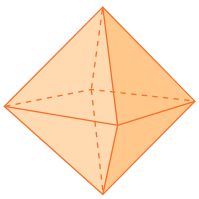
Atividades

1. 30 arestas e 12 vértices.

2. a) **I** e **III**: poliedros convexos; **II**: poliedro não convexo.
b) **I**: 8 vértices, 12 arestas e 6 faces.
II: 16 vértices, 24 arestas e 10 faces.
III: 12 vértices, 30 arestas e 20 faces.
c) Todos satisfazem a relação de Euler, isto é, são eulerianos.

3. 13 vértices.

4. a) Octaedro regular. Ele tem 8 faces triangulares, 12 arestas e 6 vértices.



Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Sim, pois é poliedro de Platão e todas as faces são limitadas por triângulos equiláteros congruentes.

5. a) $d = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm; $A_t = 37{,}5$ cm²; $V = 15{,}625$ cm³.
b) $d = \frac{\sqrt{57}}{2}$ cm; $A_t = 28$ cm²; $V = 10$ cm³.
c) $d = \frac{\sqrt{61}}{2}$ cm; $A_t = 27$ cm²; $V = 9$ cm³.

6. $V = 140$ dm³

7. $d = 4\sqrt{3}$ cm; $A_t = 96$ cm²; $V = 64$ cm³.

8. 208 cm²

9. a) 30 cm
b) $30\sqrt{3}$ cm
c) $\frac{19}{18}$

10. 15 dm

11. a) 7 cm
b) 128 cm³
c) 14 cm

12. Resposta pessoal.

13. a) 500 000 L
b) 2,15 m
c) 400 000 L

14. Resposta pessoal.

15. R$ 596,00

16. a) $0 < x < 9$
b) $V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 540x$
c) $x = 4{,}5$ cm ou $x = 7{,}5$ cm.

17. a) O formato da pilha se parece com o de um paralelepípedo reto-retângulo. As cartas de baralho podem apresentar pequenas variações nas dimensões de acordo com o material utilizado e as diferentes marcas.
b) Sim.
c) Sim.
d) Sim.

18. a) 720 cm³
b) 18 cm²
c) 360 cm³. A medida de volume será igual ao produto da medida de área superficial pela medida da altura.
d) Resposta pessoal.
e) 720 cm³

19. a) $A_\ell = 42$ cm²; $A_t = 54$ cm²; $V = 21$ cm³.
b) $A_\ell = 15$ cm²; $A_t = 3\left(5 + \sqrt{3}\right)$ cm²; $V = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm³.

20. $A_t = 56\sqrt{3}$ dm²; $V = 48$ dm³.

21. **a)** 384 cm³ **b)** $\frac{8 - 2\sqrt{5}}{33}$

22. $A_t = 264$ cm²; $V = 288$ cm³.

23. $A_t = 144(10 + 3\sqrt{3})$ dm²; $V = 4320\sqrt{3}$ dm³.

24. R$ 12,60

25. 1036,8 cm³

26. 936 m³; resposta pessoal.

27. $A_\ell = 864\sqrt{3}$ cm²; $V = 5184\sqrt{3}$ cm³.

28. **a)** Resposta pessoal.

b) 2073,6 m³

c) A piscina com menor custo de revestimento será aquela que tem a menor medida de área lateral.

29. **a)** 72 cm³ **b)** 36 cm³

30. $V = 8$ cm³

31. $V = 120$ m³

32. 192 cm³

33. **a)** $16\sqrt{3}$ cm² **c)** $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm³

b) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm

34. Resposta pessoal.

35. **a)** Não.

b) Sim.

c) Resposta pessoal.

36. $4 \cdot (33 + 9\sqrt{5})$ m² ou aproximadamente 212,50 m².

37. Resposta pessoal.

38. 6 m³

39. **a)** 108 m² **c)** 60°

b) $36\sqrt{3}$ m³

40. **a)** 13 vértices, 20 arestas e 10 faces.

b) 1461,6 g

c) 888 cm²

41. $h = 10$ cm e $\ell = 6$ cm.

42. **a)** 20 cm **b)** $\frac{A_2}{A_1} = 9$

43. Resposta pessoal.

44. 9,072 L

45. **a)** 54 m³ **b)** 38 m³

46. **a)** Resposta pessoal. **b)** Resposta pessoal.

47. **a)** Aproximadamente 0,1 m³.

b) R$ 196,00

48. 336 dm³

Pense nisto (p. 137)

Tetraedro regular tem 4 faces, todas são limitadas por triângulos equiláteros; hexaedro regular (cubo) tem 6 faces, todas são quadradas; octaedro regular tem 8 faces, todas são limitadas por triângulos equiláteros; dodecaedro regular tem 12 faces, todas são limitadas por pentágonos regulares; e icosaedro regular tem 20 faces, todas são limitadas por triângulos equiláteros.

Pense nisto (p. 139)

Pirâmide de base octogonal.

Pense nisto (p. 141)

Quaisquer pares de faces opostas, já que todas as 6 faces são limitadas por paralelogramos.

Pense nisto (p. 143)

$ABCDA'B'C'D'$ é um paralelepípedo reto-retângulo. Então, temos que $\overline{D'D} \perp$ plano $(ABC) \Rightarrow \overline{D'D}$ é perpendicular a qualquer reta do plano (ABC) que contém D (ponto de intersecção entre o segmento de reta $\overline{D'D}$ e o plano (ABC)). Logo, $\overline{D'D} \perp \overline{DB} \Rightarrow \triangle D'DB$ é retângulo.

Pense nisto (p. 144)

1 L = 1000 cm³

Pense nisto (p. 158)

Não. Toda pirâmide triangular é um tetraedro, porém não necessariamente regular, pois, em um tetraedro regular, todas as faces são regiões limitadas por triângulos equiláteros e, em uma pirâmide triangular regular, a base deve ser uma região limitada por um triângulo equilátero e as faces laterais, triângulos isósceles (não necessariamente equiláteros).

Experimente (p. 155)

- É 3 vezes maior do que a medida de volume da pirâmide.
- Resposta pessoal.

Interligando (p. 168)

1. 4300,8 cm³

2. 3225,6 cm³

3. 1,0752 L

4. Resposta pessoal.

Capítulo 7

Atividades

1. Resposta pessoal.

2. **a)** Aproximadamente 18,75 cm².

b) 450 cm³

c) 9,375 cm²

d) 225 cm³

e) A medida de volume da pilha será igual ao produto da medida de área da bolacha semicircular pela medida da altura da pilha.

f) A medida de volume de um cilindro, reto ou oblíquo, será igual ao produto da medida de área da base pela medida da altura.

3. 4 dias.

4. 96π cm³ ou 72π cm³.

5. **a)** Não.

b) Aproximadamente R$ 128,45.

6. Resposta pessoal.

7. **a)** Aproximadamente 2993,60 cm³.

b) Aproximadamente 2,784 kg.

8. Aproximadamente 8 cm.

9. 80π u.v.; resposta pessoal.

10. $A_t = 600\pi$ dm²

11. Aproximadamente 48 cm²; resposta pessoal.

12. **a)** Aproximadamente $14\sqrt{3}$ cm.

b) Aproximadamente 4,704 m².

13. $3\sqrt{6}$ m

14. 65π cm²

15. $28{,}8\pi$ cm³

16. Aproximadamente 65,1 kg; resposta pessoal.

17. 334 taças.

18. Resposta pessoal.

19. Resposta pessoal.

20. 5π m²

21. 5

22. Resposta pessoal.

23. **a)** 4 **b)** 8

24. **a)** 3 m

b) Aproximadamente R$ 107.880,00.

25. $V = \frac{7\pi}{2}$ cm³; $A_t = \pi \cdot \left(5 + \frac{3\sqrt{13}}{2}\right)$ cm².

26. $\frac{\pi \cdot (4 + 3\sqrt{5})}{25}$ m²

27. 4 vasos.

28. 12 dm

29. Resposta pessoal.

30. $2\,304\pi$ cm³

31. $\sqrt{15}$ cm

32. **a)** 8π cm²

b) 16π cm²

c) 64π cm²; resposta pessoal.

33. 18 vasos.

34. **a)** 4 esferas menores.

b) Aproximadamente R$ 54.040,00.

35. **a)** Aproximadamente 5,13 m².

b) Aproximadamente 972 L.

36. 2,52 cm

37. Aproximadamente 12,56 cm³; resposta pessoal.

38. Resposta pessoal.

39. $A_{cunha} = 48\pi$ cm²; $V_{cunha} = 24\pi$ cm³.

40. Aproximadamente R$ 108,00.

41. $A = 72\pi$

Pense nisto (p. 179)

As geratrizes nos cones oblíquos não são congruentes, e nos retos elas o são.

Pense nisto (p. 183)

Não.

Pense nisto (p. 184)

180°

Pense nisto (p. 188)

A razão é 4.

Pense nisto (p. 205)

O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Interligando (p. 176)

1. 0,025 m³; 25 L.

2. $V = 1$ L

3. 38,22 mm

4. **a)** Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

5. Resposta pessoal.

Experimente (p. 182)

1. É 3 vezes maior, pois a medida de volume do cilindro é igual a aproximadamente 87,96 unidades de medida de volume e a do cone, aproximadamente 29,32 unidades de medida de volume.

2. Sim, considerando que sejam um cilindro e um cone que têm a mesma medida de área da base e a mesma medida da altura.

Experimente (p. 197)

1. Respostas pessoais.

2. Resposta pessoal.

3. **a)** O formato do mapa é alterado. Quando representado na região da Groenlândia, a medida de área do Brasil se torna maior.

b) Maior.

4. Não, pois o formato dos países é modificado de acordo com a região do mapa em que é representado. Quanto mais ao norte no mapa, mais a dimensão do país representado é aumentada. Assim, países que estão mais próximos da linha do equador, nessa projeção cartográfica, têm um formato que aparenta uma medida de área menor em comparação ao daqueles mais próximos dos polos.

5. Resposta pessoal.

Viralize! (p. 206)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

Para fundamentar saberes (p. 208)

1. Alternativa **a**.

2. Alternativa **a**.

3. Alternativa **c**.

4. Alternativa **e**.

5. Alternativa **a**.

6. Alternativa **b**.

UNIDADE 4

Abertura de Unidade (p. 210)

1. A diminuição da cobertura vacinal de crianças pode ter várias consequências graves para a saúde pública. Entre elas, está a proliferação de doenças infecciosas, que se tornam mais difíceis de controlar quando uma parte significativa da população não está imunizada. Além disso, doenças que haviam sido erradicadas ou controladas, como a poliomielite, podem ressurgir, colocando em risco a saúde de muitas pessoas. Outro problema é o desenvolvimento de novas variantes de vírus, que podem ser mais resistentes às vacinas existentes, o que dificulta o controle de doenças.

2. O anticientificismo tem consequências sérias para a saúde pública. A disseminação de informações falsas pode levar à hesitação em relação às vacinas ou mesmo à recusa delas, resultando em um aumento de casos de doenças evitáveis. Isso, por sua vez, pode sobrecarregar os sistemas de saúde, que terão de lidar com surtos de doenças que poderiam ter sido prevenidas. Para combater o anticientificismo, é fundamental investir em educação e em informação, reafirmando dados corretos sobre vacinas e incentivando a verificação de notícias antes de compartilhá-las. Campanhas de conscientização sobre a importância da vacinação também são essenciais para aumentar a adesão às vacinas.

3. A ciência fundamenta a eficácia e a segurança das vacinas por meio de métodos rigorosos, como ensaios clínicos que testam a segurança e a eficácia das vacinas em diferentes populações. Esses estudos são revisados por outros cientistas, que validam ou não os resultados, garantindo a precisão das conclusões. Após a aprovação, as vacinas continuam a ser monitoradas para identificar quaisquer efeitos adversos raros, e a eficácia é continuamente avaliada por meio de dados epidemiológicos que mostram a redução de casos de doenças.

Capítulo 8

Atividades

1. R$ 300,00

2. **a)** 13

b) 10

c) 12,6

3. **a)** 60 jogos.

b) Aproximadamente 0,82 cartão por partida.

c) 108°

4. 82

5. 0,125

6. **a)** 152 famílias.

b) 2,3 filhos por família.

7. **a)** 3500 questionários. **b)** Não.

8. **a)** $\bar{x} = 3,\overline{2}$; $Me = 3$; $Mo = 4$.

b) $\bar{x} = 17,\overline{6}$; $Me = 18$; $Mo = 18$.

c) $\bar{x} = 3$; $Me = 3$; não há moda.

d) $\bar{x} = 13,5$; $Me = 14$; $Mo = 15$.

e) $\bar{x} = 43,7$; $Me = 43,5$; as modas são 43 e 44 (rol bimodal).

9. **a)** R$ 1.000,00 **c)** 3

b) R$ 600,00

10. $x = 14$; $y = 20$.

11. **a)** $\bar{x}$ = 725856,8 milhões de reais; Me = 489272 milhões de reais. Como há um valor muito maior do que os outros no rol, a mediana acaba sendo o melhor indicador geral.

b) São Paulo.

12. **a)** Média: $3,\overline{5}$; mediana: 3; moda: 3.

b) Não; não.

c) Sim; resposta pessoal.

13. **a)** 53,33 reais^2. **c)** 24 reais.

b) 7,30 reais.

14. **a)** **B**, **A**, **D** e **C**. **b)** Turma **D**.

15. 4

16. 24 treinos.

17. **a)** Sim, em 1960.

b) Pela primeira vez, o número de atletas do gênero feminino é maior do que o de atletas do gênero masculino.

c) Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 215)

Sim. Como a média salarial inicial é R$ 1.800,00, podemos admitir que, em média, cada funcionário tem salário de R$ 1.800,00. Como o salário de cada um dos novos funcionários é menor do que R$ 1.800,00, a nova média salarial também será menor – no cálculo da nova média, 2 das parcelas serão menores do que 1800, fazendo com que essa razão seja menor do que a anterior.

Pense nisto (p. 224)

A variância seria igual a zero.

Pense nisto (p. 225)

Não há dispersão entre os dados, isto é, todos os dados têm o mesmo valor.

Interligando (p. 213)

1. Eleições federais: presidente, senadores e deputados federais; eleições estaduais: governadores e deputados estaduais; eleições municipais: prefeitos e vereadores.

2. Resposta pessoal.

Educação financeira (p. 218)

1. Como houve inflação e o salário permaneceu o mesmo, o poder de compra diminuiu.

2. Resposta pessoal.

Experimente (p. 228)

1. **a)** 77,69 **b)** 15

2. **a)** Mediana: 77,52; não há moda.

b) Não.

3 **a)** Amplitude: 65,11. Variância: aproximadamente 153,73. Desvio padrão: aproximadamente 12,40.

b) 4 UFs.

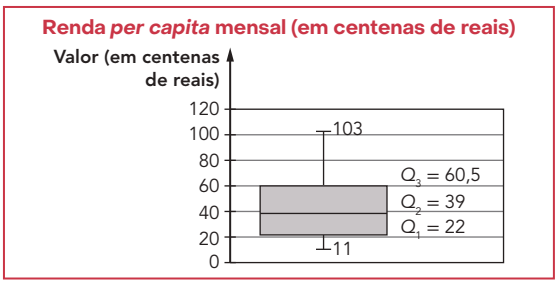
Capítulo 9

Atividades

1. **a)** Q_1 = R$ 2.200,00; Q_2 = R$ 3.900,00; Q_3 = R$ 6.050,00.

b) 25º percentil: Q_1 = R$ 2.200,00; 75º percentil: Q_3 = R$ 6.050,00.

c)



Dados elaborados para fins didáticos.

Não há *outliers*.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. **a)** Turma **A**.

b) Se a média é igual à nota máxima, significa que não houve notas abaixo dela. Assim, é possível afirmar que todas as notas foram 5.

c) Zero.

d) 1

e) 3

f) Não.

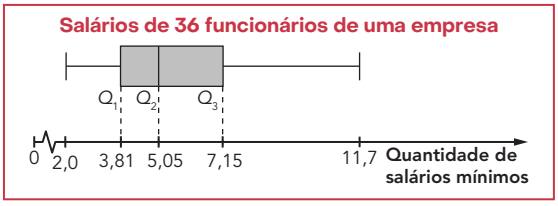
g) A turma **C**.

h) Na turma **B**, os dados são mais concentrados no intervalo entre o valor mínimo e Q_1. Na turma **C**, os dados são mais concentrados no intervalo entre Q_3 e o valor máximo.

3. **a)** 1º quartil (Q_1): 3,81; 2º quartil (Q_2 ou mediana): 5,05; 3º quartil (Q_3): 7,15.

b) Não. Nenhum valor se encontra acima do limite superior ou abaixo do limite inferior.

c)



Dados elaborados para fins didáticos.

d) Mais heterogêneo: [7,15; 11,7]; mais homogêneo: [3,81; 5,05].

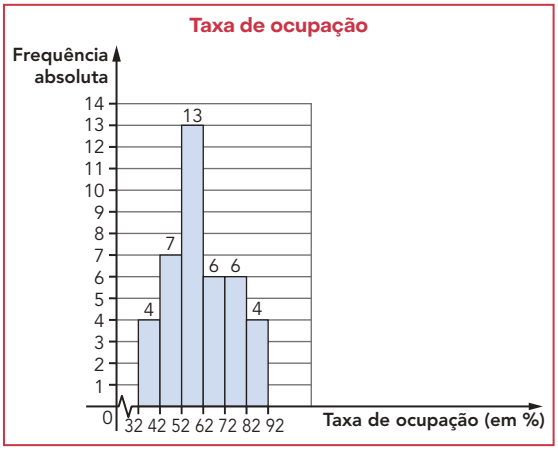
4. **a)** Resposta pessoal. **b)** Resposta pessoal.

5. Média: 47,5; mediana: 48; classe modal: [40,50[.

6. **a)** 220 funcionários. **c)** 500 a 700.

b) Aproximadamente R$ 690,91.

7. **a)**



Dados elaborados para fins didáticos.

b) Taxa média: 60,75%; taxa mediana: aproximadamente 58,92%; classe modal: 52% ⊢ 62%.

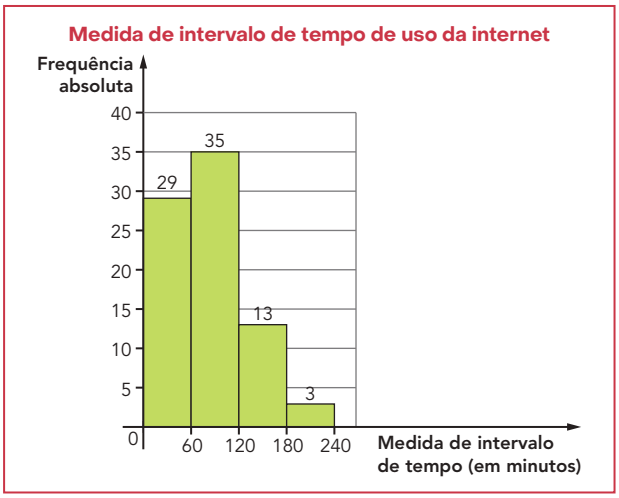
c) Aproximadamente 14,44%.

8. a) 50%

b) Média: 81,375 min; mediana: 75 min.

c) Média: 82,5 min; mediana: 78,86 min; desvio padrão: 48,7 min.

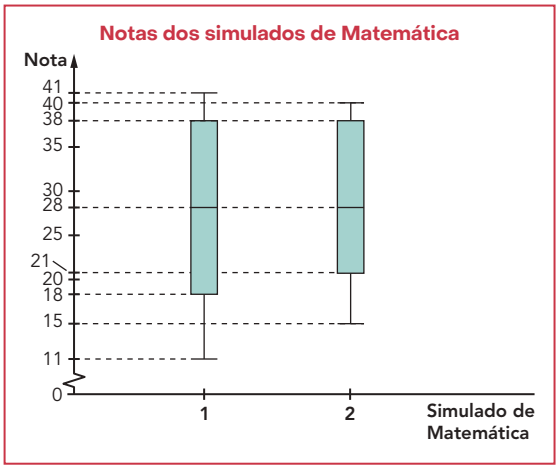
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



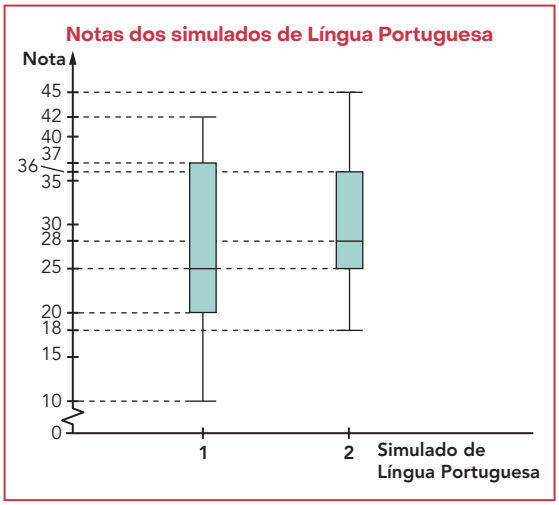
Dados elaborados para fins didáticos.

Interligando (p. 236)

1. a)



Dados elaborados para fins didáticos.



Dados elaborados para fins didáticos.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

Viralize! (p. 244)

1. a) 13 h 26 min 24 s

b) Cerca de 9 h.

c) Cerca de 9 h.

2. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

Para fundamentar saberes (p. 246)

1. Alternativa **d**.

2. a) A moda.

b) Pelo menos 50% dos jovens têm até 13 anos de idade.

c) O de barras.

d) *Box-plot*.

e) O gráfico de barras. Ambos.

3. Alternativa **d**.

UNIDADE 5

Abertura de Unidade (p. 248)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

Capítulo 10

Atividades

1. 1º Q: $\frac{41\pi}{5}; -\frac{11\pi}{3}$.

2º Q: $-\frac{5\pi}{4}; \frac{26\pi}{3}$.

3º Q: $-\frac{3\pi}{4}; -\frac{49\pi}{10}; 10$.

4º Q: $-0{,}5; \frac{15\pi}{4}$.

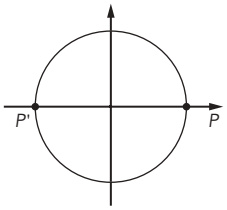
2. *A*: $40\pi; -14\pi; 800\pi$.

B: $\frac{17\pi}{2}; -\frac{11\pi}{2}$.

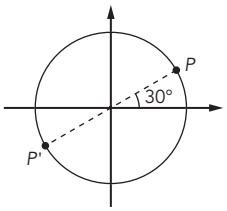
C: $13\pi; -21\pi$ e -7π.

D: $-\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; -\frac{25\pi}{2}$

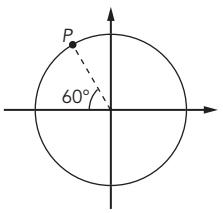
3. a)



b)



c)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4. a) Hexágono.

b) Medida de perímetro: 6 u.c.; medida de área: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ u.a.

5. a) $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$

b) $\text{sen}\frac{10\pi}{3} < 0$

c) $\text{sen}\,850° > 0$

d) $\text{sen}\frac{67\pi}{8} > 0$

6. a) 0

b) $-\frac{1}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. a) V

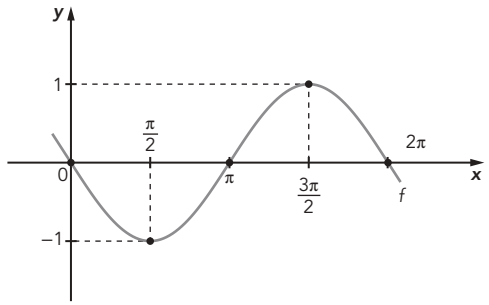
b) V

c) F

d) V

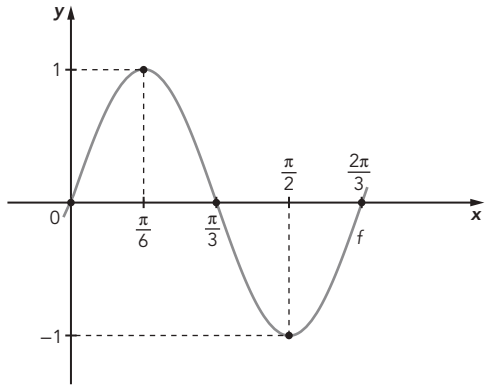
e) F

8. a) $p = 2\pi$; $Im(f) = [-1, 1]$.

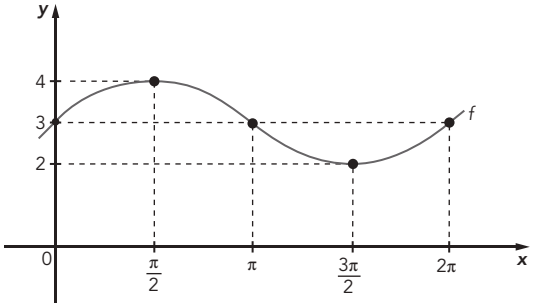


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b) $p = \frac{2\pi}{3}$; $Im(f) = [-1, 1]$.



c) $p = 2\pi$; $Im(f) = [2, 4]$.



9. $\{t \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant t \leqslant 1\}$

10. $\left\{m \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} \leqslant m \leqslant 2\right\}$

11. a) $p = \frac{\pi}{2}$

b) $f_{máx.} = 3 + 2 \cdot 1 = 5$

12. a) 6 m

b) 8,8 m

c) 2 m

d) 24 s

e) 11 voltas completas.

13. a) $-4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi$.

b) $x = \frac{7\pi}{2}$

c) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$

14. $A(0; 1{,}2)$; $B(1; 0{,}4)$; $C(2; 1{,}2)$; $D(3; 0{,}3)$; $E(4; 1{,}3)$; $F(5; 0{,}2)$; $G(6; 1{,}4)$; $H(7; 0{,}2)$; $I(8; 1{,}4)$; $J(9; 0{,}1)$; $K(10; 1{,}5)$; $L(11; 0{,}2)$.

15. a) **I**–*g*; **II**–*h*; **III**–*f*.

b) $A: \frac{\pi}{4}$; $B: \frac{3\pi}{4}$; $C: \frac{4\pi}{3}$.

16. Soma: 20.

17. Soma: 12.

18. 0,045

Pense nisto (p. 250)

Diversas atividades são impactadas pelo movimento das marés. Exemplo de resposta: Em muitos locais, a pesca é a principal atividade econômica local; por isso, é fundamental conhecer a medida da altura das marés para uma navegação segura.

Pense nisto (p. 252)

Lua nova: A Lua não é visível da Terra porque o lado iluminado está voltado para o Sol. Quarto crescente: A Lua é parcialmente visível e está crescendo em iluminação. Lua cheia: A face visível da Lua está completamente iluminada. Quarto minguante: A Lua é de novo parcialmente visível, mas está diminuindo em iluminação.

Pense nisto (p. 252)

Sim.

Pense nisto (p. 253)

Foram obtidas convertendo-se os valores em minutos para horas e adicionando-os às horas já existentes.

Pense nisto (p. 256)

Sim.

Pense nisto (p. 258)

Não.

Pense nisto (p. 259)

Sim.

Pense nisto (p. 261)

$Im(f) = [-1; 1]$; $p = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi$.

Pense nisto (p. 265)

$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = -1$, com $k \in \mathbb{Z}$; $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = -1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Interligando (p. 269)

1. Respostas pessoais.

2. 120 s; 19 m e 1 m.

Capítulo 11

Atividades

1. a) $\cos 11\pi = -1$

b) $\cos 10\pi = 1$

c) $\cos\frac{13\pi}{2} = 0$

d) $\cos 1560° = -\frac{1}{2}$

2. $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. $\left\{m \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant 0\right\}$

4. $m = 0$

5. **a)** Respectivamente, em milhões de dólares, 418, 409 e 391.

b) 3 vezes; em 2023 (3), em 2029 (9) e em 2035 (15).

6. Alternativa **b**.

7. Dias 12 e 28.

8. Resposta pessoal.

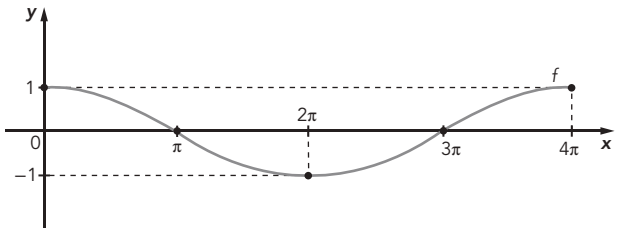
9. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-3, 1]$; $p = 4\pi$.

b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-3, 3]$; $p = 2\pi$.

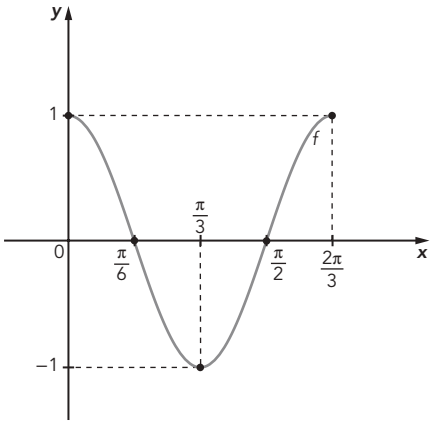
c) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, 4]$; $p = \frac{\pi}{3}$.

10. **a)** $p = 4\pi$; $Im(f) = [-1, 1]$.

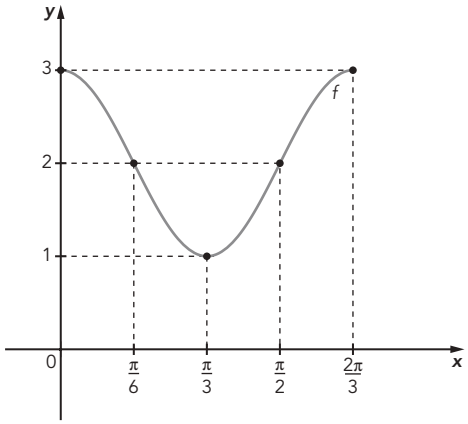
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



b) $p = \frac{2\pi}{3}$; $Im(f) = [-1, 1]$.



c) $p = \frac{2\pi}{3}$; $Im(f) = [1, 3]$.



11. **a)** F; pois $\cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) F; pois $f_{mín.} = 2 \cdot (-1) = -2$.

c) F; pois $f(x) = x \cdot (-1) = -x$ é uma função que é apenas decrescente e, portanto, não é periódica.

d) V; pois $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{8}\right|} = 16$.

e) V; pois $\cos\left(\frac{-3\pi}{20}\right) = \cos\frac{3\pi}{20} > 0$; já que $\frac{3\pi}{20}$ está associado a um ponto no 1º Q.

12. **a)** Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

- No item **a**: $p = 2\pi$; $Im(g) = [-1, 1]$. O gráfico de g é o gráfico de f transladado de $\frac{\pi}{4}$ unidade para a direita.
- No item **b**: $p = 2\pi$; $Im(g) = [-1, 1]$. O gráfico de g é o gráfico de f transladado de $\frac{\pi}{4}$ unidade para a esquerda.

13. Função f: $p = 2\pi$; $f(x) = \cos x$. Função g: $p = \pi$; $g(x) = \cos 2x$.

14. **a)** Ambos são periódicos.

b) 28 dias.

c) Próximas ovulações em 3 de julho, 31 de julho e 28 de agosto.

d) Sim, dado o caráter aproximadamente periódico dos níveis de hormônios, podemos relacioná-lo ao gráfico de uma função trigonométrica.

15. **a)** De 17 °C a 25 °C.

b) Às 14 h e às 22 h.

Pense nisto (p. 273)

$\cos(k \cdot 2\pi) = +1$; $\cos(k\pi) = 1$ ou $\cos(k\pi) = -1$.

Pense nisto (p. 276)

Porque, no instante inicial ($t = 0$), a função assume o valor máximo ($h = 2{,}2$ m). Desse modo, uma função que pode modelar bem a situação é a função cosseno.

Interligando (p. 275)

1. **a)** $w = \frac{\pi}{6}$

b) $A = 1{,}25$ e $B = 0{,}95$.

c) $h(t) = 1{,}25 + 0{,}95 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

d) $h(10) = 1{,}725$ m e $h(28) = 0{,}775$ m.

e) Resposta pessoal.

Experimente (p. 282)

1. **a)** O gráfico é deslocado verticalmente para cima.

b) O gráfico é deslocado verticalmente para baixo.

c) $Im(f) = [-1 + a; 1 + a]$

d) A mudança não modifica o período da função.

2. **a)** Sofre uma "distensão (alongamento) vertical" quando comparado ao gráfico de g. Sim. A amplitude aumentou.

b) Sofre uma "compressão (achatamento) vertical" quando comparado ao gráfico de g. Sim. A amplitude diminuiu.

c) Sofre uma reflexão em relação ao eixo x e uma "compressão vertical" quando comparado ao gráfico de g. Sim. A amplitude diminuiu.

d) Sofre uma reflexão em relação ao eixo x e uma "distensão (dilatação) vertical" quando comparado ao gráfico de g. Sim. A amplitude aumentou.

e) O gráfico de f será uma reta sobre o eixo x. A função f será uma função constante e igual a 0. Como $b = 0$, o produto entre 0 e $\cos(cx + d)$ será 0. Assim, $f(x) = 0$.

f) O valor de b interfere no valor da amplitude. Aumentando quando $b > 1$ ou $b < -1$ e diminuindo quando $-1 < b < 0$ ou $0 < b < 1$. Quando $b = 1$ ou $b = -1$, a amplitude continua sendo 1. A amplitude do gráfico da função é igual a $|b|$.

g) $Im(f) = [-b, b]$

h) Não.

3. **a)** • Menos.

• Mais.

b) Não.

4. **a)** O gráfico de f sofre deslocamento horizontal para a esquerda.

b) O gráfico de f sofre deslocamento horizontal para a direita.

c) Não. Não.

Viralize! (p. 284)

1. a) Resposta pessoal.

b) A campanha é periódica porque o vírus da *influenza* sofre mutações todos os anos e, justamente por isso, as vacinas também são diferentes a cada campanha vacinal. É muito provável que uma vacina tomada no ano anterior não consiga combater as novas mutações sofridas pelo vírus. Além disso, existe a necessidade de fortalecer a imunidade de quem toma esse tipo de vacina. Após a imunização, em cerca de 10 meses, a proteção começa a cair, por isso é preciso se revacinar.

c) Resposta pessoal.

d) Clima frio e seco. Durante esses períodos, devido ao frio, a aglomeração de pessoas em locais fechados facilita a propagação do vírus causador da doença. Além de tomar a vacina contra a *influenza*, nesses períodos, as medidas de higiene úteis para a prevenção da gripe são: cobrir a boca quando tossir ou espirrar (isso evita maior disseminação de partículas que carregam os vírus) e manter as mãos limpas (lavá-las com água e sabão) para evitar eventual transmissão por contato.

2. Resposta pessoal.

3. a) 4 300 casos; mês de julho.

b) Verão.

c) Após 12 meses.

d) Entre janeiro e julho.

Para fundamentar saberes (p. 286)

1. Alternativa **c**.

2. Alternativa **a**.

3. 115,625 milhões de quilômetros.

4. a) $m = 1$ e $n = \frac{\pi}{10}$.

b) 4 metros; 4 metros.

5. Alternativa **a**.

6. Alternativa **b**.

7. Alternativa **b**.

LISTA DE SIGLAS

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

ESA-MG: Escola Superior de Advocacia (Minas Gerais)

EsSA-MG: Escola de Sargentos das Armas (Minas Gerais)

EsPCEx-SP: Escola Preparatória de Cadetes do Exército (São Paulo)

Famema-SP: Faculdade de Medicina de Marília (São Paulo)

FCMSCSP: Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo

FGV-SP: Fundação Getulio Vargas (São Paulo)

Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)

Udesc: Universidade do Estado de Santa Catarina

UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas

UEA-SIS-AM: Sistema de Ingresso Seriado da Universidade do Estado do Amazonas

UEM-PR: Universidade Estadual de Maringá (Paraná)

Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Uern: Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

UFGD-MS: Universidade Federal da Grande Dourados (Mato Grosso do Sul)

UFPR: Universidade Federal do Paraná

UFSC: Universidade Federal de Santa Catarina

Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (São Paulo)

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)

Unifesp: Universidade Federal de São Paulo

UPE: Universidade de Pernambuco

Vunesp: Fundação para o Vestibular da Unesp

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

Para a concepção desta coleção, diversos livros, artigos científicos, documentos oficiais do governo, revistas científicas, dissertações e *sites* foram consultados de modo a trazer material atualizado e que visa dar suporte às aprendizagens previstas para o Ensino Médio. Conheça as principais referências bibliográficas deste Volume.

BARBOSA, João L. M. *Geometria euclidiana plana*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

Esse livro proporciona uma noção ampliada do que se ensina em sala de aula. Foi referencial bibliográfico para a elaboração desta coleção. A Geometria euclidiana plana é apresentada de um ponto de vista que extrapola os tópicos do Ensino Básico, além de permitir a familiaridade com fatos geométricos por meio de teoria, exercícios, problemas e comentários. O livro foi consultado para a elaboração dos conceitos relacionados à semelhança de triângulos e medida de área de figuras geométricas planas.

BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lucia; WETZLER, Henry G. *Álgebra linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1984. v. 2.

Além de abordar assuntos de Álgebra linear, o livro explora tópicos de matrizes, determinantes e sistemas lineares, bem como vetores e transformações do plano, que foram utilizados como referência para propostas presentes neste Volume.

BORBA, Marcelo de Carvalho *et al*. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Referência para o uso de tecnologias proposto nesta coleção, o livro apresenta uma visão da aplicação de tecnologias em Educação Matemática, exemplificando questões teóricas e propostas de atividades, bem como dissertando sobre o presente e o futuro da sala de aula de Matemática.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

Esse livro tornou-se referência de consulta sobre História da Matemática. Nele são apresentados e explicados aspectos da Matemática, considerando-se a ordem cronológica e o local dos acontecimentos, desde a origem do conceito de número até os desenvolvimentos matemáticos do século XX. No desenvolvimento dos capítulos, são apresentadas definições matemáticas importantes e as pessoas que trabalharam nelas. Esse livro também foi referência para a elaboração de textos e problemas históricos abordados nesta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://tedit.net/1qo53v. Acesso em: 4 set. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). A BNCC também estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam no decorrer de cada ano da escolaridade básica. Por isso, todos os volumes desta coleção foram desenvolvidos buscando atender a esses requisitos previstos na BNCC.

BRASIL. Ministério da Educação. *Computação*: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://tedit.net/93oura. Acesso em: 5 set. 2024.

Em 2022, a BNCC foi atualizada com diretrizes específicas para incorporar o ensino de computação no currículo escolar brasileiro. O objetivo com esse documento é promover o desenvolvimento de competências relacionadas à cultura digital e ao pensamento computacional entre os estudantes. As diretrizes estabelecidas foram fundamentais para a criação de seções e atividades incluídas nesta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica. Brasília*, DF: MEC, 2013. Disponível em: https://tedit.net/enrd4x. Acesso em: 5 set. 2024.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica (DCNs) constituem um conjunto de normas que estabelecem os princípios, fundamentos e procedimentos a serem seguidos na Educação Básica. O objetivo dessas diretrizes é orientar e apoiar escolas e redes de ensino na elaboração de seus projetos pedagógicos.

Além de servir de guia para o desenvolvimento pedagógico, as DCNs também fornecem importantes subsídios para a criação de material didático. Elas foram consultadas e consideradas durante a elaboração deste Volume, garantindo que o conteúdo esteja alinhado com as melhores práticas educacionais e as exigências curriculares nacionais.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a. Disponível em: https://tedit.net/zj1xba. Acesso em: 5 set. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019b. Disponível em: https://tedit.net/3pnyp2. Acesso em: 5 set. 2024.

Conforme a BNCC, os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) devem ser integrados aos currículos e às propostas pedagógicas de maneira transversal e integradora. Após a homologação da BNCC, o Ministério da Educação elaborou 2 documentos para esclarecer a inserção desses temas, que serviram de referência para a concepção desta coleção.

BUSSAB, Wilton de Oliveira; MORETTIN, Pedro Alberto. *Estatística básica*. São Paulo: Saraiva, 2017.

Esse livro, destinado a cursos básicos de Probabilidade e Estatística no Ensino Superior, trata da análise de dados unidimensionais e de dados bidimensionais com atenção especial para métodos gráficos, conceitos básicos de probabilidade e variáveis aleatórias, além de tópicos da inferência estatística. Foi consultado na elaboração dos conceitos relacionados à Probabilidade e à Estatística deste Volume.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria e números complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).

Partindo do triângulo retângulo, os autores desse livro propõem um estudo completo da Trigonometria e a relação dela com os números complexos. Conteúdos e abordagens presentes nos apêndices – transformações nos gráficos das funções trigonométricas (simetria em relação ao eixo *x*, translação horizontal, translação vertical, compressão e dilatação) e história da Trigonometria – foram referência para a elaboração de propostas deste Volume.

CARVALHO, Paulo Cezar Pimenta. *Introdução à Geometria espacial*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

Esse livro discute as dificuldades da passagem da Geometria plana para a espacial e apresenta novos conceitos, acompanhados de exemplos de construções no espaço.

CLUBES de Matemática da Obmep. *Sala de estudo*: diagrama de Venn. Disponível em: https://tedit.net/gyp9xv. Acesso em: 1º set. 2024.

Nesse artigo há um pouco da bibliografia do matemático inglês John Venn (1834-1923), apresentação do diagrama de Venn com exemplos extraídos de concursos públicos e a importância do diagrama para visualizar e entender propriedades dos conjuntos, bem como atividades de raciocínio lógico.

CRESPO, Antônio A. *Estatística fácil*. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

Esse livro, destinado a cursos básicos de Probabilidade e Estatística no Ensino Superior, trata da análise de dados com atenção especial para métodos gráficos, conceitos básicos de probabilidade e variáveis aleatórias, bem como os tópicos principais de inferência estatística. O livro foi consultado na elaboração dos conceitos relacionados à Probabilidade e à Estatística em todos os volumes desta coleção.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática elementar*. São Paulo: Atual, 2004. v. 9.

Esse livro traz uma abordagem da Geometria plana, explorando o estudo de segmentos de retas, ângulos, triângulos, polígonos, circunferências, semelhanças, polígonos regulares, comprimento da circunferência, medidas de área e equivalência plana.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática elementar*. São Paulo: Atual, 2004. v. 10.

Esse livro aborda conceitos da Geometria espacial pela abordagem lógico-dedutiva, intercalados de exercícios. A abordagem da Geometria dos poliedros e dos corpos redondos, e seus exemplos de problemas de aplicação, foram referência para a elaboração de capítulos deste Volume.

EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

Essa edição é a primeira tradução completa para o português do texto grego do livro original de Euclides. Além de definições, postulados e axiomas, são demonstradas nela proposições que envolvem a Geometria euclidiana, o desenho geométrico e a Aritmética. Tais conceituações geométricas foram referências para a elaboração dos conteúdos e demonstrações geométricos ao longo desta coleção.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

Além da narrativa histórica, que abarca a História da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos, o livro adota recursos pedagógicos, por exemplo, exercícios ao fim de cada capítulo. Alguns capítulos são introduzidos por panoramas culturais da época e, como um todo, o livro foi fonte de consulta para a elaboração de textos históricos para esta coleção.

LIMA, Elon; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*. 8. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).

O livro aborda, de modo claro, as propriedades características de cada função e explicita que as situações da vida cotidiana não surgem acompanhadas de fórmulas explícitas, principalmente as circunstâncias que são modeladas por funções exponenciais, logarítmicas ou trigonométricas.

LIMA, Elon; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).

A parte dedicada à Geometria espacial desse livro tem como objetivo oferecer fundamentação do assunto, apresentando sugestões de atividades, que visam facilitar o desenvolvimento da visão e da intuição espaciais, e exemplos de objetos do mundo real para ilustrar conceitos importantes.

LIMA, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, 2019. (Coleção do Professor de Matemática).

O livro inicia com a abordagem histórica dos logaritmos e a importância deles, na época, para a simplificação de cálculos aritméticos. Apresenta também um estudo detalhado da função logarítmica e suas propriedades. Um destaque é dado ao número *e*, abordando a definição como limite e diversas aplicações, algumas delas presentes em contextos deste Volume, como a capitalização contínua, a desintegração radioativa, a datação por carbono-14 e a lei de resfriamento de corpos.

LIMA, Elon L. *Medida e forma em Geometria*: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar).

As curiosidades históricas que foram selecionadas revelam que a determinação de medidas de área e de medidas de volume está entre as primeiras noções geométricas que despertaram o interesse do ser humano. A Geometria é introduzida no livro situando-a no contexto histórico de seu surgimento, facilitando o estudo de noções de medida em Geometria: a medida de segmentos de reta, a medida de área de figuras geométricas planas e a medida de volume de figuras geométricas espaciais. O livro foi consultado para a elaboração dos conceitos relacionados à Geometria desta obra.

NOVAES, Regina. Os jovens de hoje: contextos, diferenças e trajetórias. *In*: ALMEIDA, Maria Isabel Mendes de; EUGENIO, Fernanda (org.). *Culturas jovens*: novos mapas do afeto. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2006.

Nessa obra, retrata-se a multiplicidade dos jovens sem nenhum viés preconceituoso, o que também é um preceito defendido por esta coleção. O livro reúne artigos de cientistas sociais que se dedicam a entender os problemas enfrentados atualmente pelas juventudes urbanas no Brasil.

PÓLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Nesse livro, o autor analisa métodos criativos de resolução de problemas, revela as 4 etapas básicas da resolução de qualquer problema e sugere maneiras de trabalhar os problemas em sala de aula. Foi utilizado também como fonte de consulta para estabelecer as metodologias relacionadas à resolução de problemas nesta coleção.

RECURSOS educacionais multimídia para a matemática do Ensino Médio. Disponível em: https://tedit.net/57kjdf. Acesso em: 4 set. 2024.

Portal com diversos recursos educacionais de Matemática para o Ensino Médio, como programas audiovisuais, atividades práticas e *softwares* que abordam os conteúdos de Matemática do Ensino Básico. Os recursos audiovisuais apresentam os conceitos matemáticos em situações do cotidiano, fazendo com que o espectador conheça, de maneira simples, sua aplicação.

ROSA, Milton; OREY, Daniel C. *Influências etnomatemáticas em salas de aula*: caminhando para a ação pedagógica. 1. ed. Curitiba: Appris Editora, 2017.

O livro busca integrar os conteúdos matemáticos com as abordagens pedagógicas utilizadas no ensino e na aprendizagem da Matemática, ressaltando as influências e a presença da Etnomatemática em sala de aula, tal como apresentado em seções e atividades desta coleção. O livro reconhece que a aquisição do conhecimento matemático pode ser influenciada pelas considerações culturais dos indivíduos que fazem parte da comunidade escolar.

VIEIRA, Sônia. *Estatística básica*. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

Esse livro mostra que a Estatística é uma ferramenta auxiliar para a tomada de decisão, pensamento também presente nos Volumes desta coleção. Os conceitos estatísticos são demonstrados no livro de maneira informal, como uma tentativa de explicar a lógica associada a eles, mas sem recorrer a demonstrações matemáticas. Para incrementar a aprendizagem, são apresentados exemplos e exercícios com respostas comentadas.

WING, Jeannette. *Pensamento computacional*: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia (RBECT)*, Ponta Grossa (Paraná), v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://tedit.net/gzsm98. Acesso em: 5 set. 2024.

O pensamento computacional é uma habilidade fundamental para todos, pois envolve, com destaque, a resolução de problemas e a identificação de padrões, que são processos inerentes à atividade matemática e a situações cotidianas. Na publicação original, traduzida para o português e consultada para a elaboração desta coleção, a autora disserta sobre os estudos relacionados ao pensamento computacional.

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIOS

Podcast 1 – Raízes quadradas

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre raízes quadradas.

Qual será a origem desse termo? Você sabe? Ou em algum momento ficou curioso para descobrir?

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Bom, você já sabe que o conjunto dos números reais inclui os números naturais, [vírgula sonora] como o dois, o três e o quatro; os números inteiros, [vírgula sonora] que são os naturais e os inteiros negativos, como o menos três, o menos oito e o menos dez; os números racionais, [vírgula sonora] que podem ser escritos na forma de fração; as dízimas periódicas [vírgula sonora] e, ainda, os números irracionais, [vírgula sonora] que são aqueles que possuem representação decimal infinita e não periódica, como o famoso número pi.

Com exceção dos números complexos, que só serão estudados em determinados cursos de Ensino Superior, todos os demais números que você já conhece fazem parte do conjunto dos números reais. Os números complexos são utilizados quando precisamos resolver, por exemplo, situações que envolvem raízes quadradas de números negativos, mas você não precisa se preocupar com isso por enquanto.

Agora, nosso objetivo será mais simples.

Basicamente, vamos falar sobre um fato curioso, digamos assim, que é o motivo pelo qual a raiz quadrada recebe esse nome.

[vinheta de transição]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

Existem várias lendas matemáticas sobre o assunto, algumas até mesmo relacionando a definição desse conceito matemático com as próprias raízes de árvores. Mas, para obter uma explicação mais plausível e científica, precisamos estudar um pouco a história dessa terminologia.

O termo "raiz" vem do latim "*radix*", que, por sua vez, é a tradução de outro termo usado nos escritos árabes. Acredita-se que o árabe seja a língua natal utilizada pelos matemáticos quando iniciaram o estudo da álgebra.

O termo que foi traduzido do árabe para "*radix*" pode ser entendido, de fato, como raiz, mas no mesmo sentido de "raiz do problema" ou "base", "fundação".

Nesse sentido, se pensarmos na raiz quadrada de um número como um valor base que, elevado ao quadrado, resulta naquele número, a terminologia tem sua lógica, concorda?

Agora, vamos explorar um pouco mais esse conceito.

O conceito de raiz quadrada tem aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento. Na Física, por exemplo, a raiz quadrada é usada para calcular a velocidade média de partículas em movimento. Na Engenharia, é fundamental para determinar a resistência de materiais. E, na Economia, pode ser utilizada para analisar a variabilidade de dados financeiros.

O histórico do uso da raiz quadrada também é fascinante. Os antigos babilônios, por volta de mil e oitocentos antes de Cristo, já utilizavam métodos para calcular raízes quadradas. Eles tinham uma compreensão surpreendentemente precisa desse conceito, mesmo sem a notação moderna que usamos hoje. Mais tarde, matemáticos gregos, como Euclides e Arquimedes, fizeram avanços significativos na teoria dos números, incluindo o estudo das raízes quadradas.

Durante a Idade Média, matemáticos árabes, como Al-Khwarizmi (de onde vem a palavra "álgebra"), continuaram a desenvolver esses conceitos e a transmiti-los para a Europa. Foi nessa época que o termo "*radix*" começou a ser usado, refletindo a ideia de uma base ou fundação.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Portanto, a terminologia "raiz quadrada" é rica em história e significado. Ela nos conecta a milênios de pensamento matemático e nos lembra que as bases matemáticas são fundamentais para o desenvolvimento e a compreensão de conceitos mais complexos.

Então, da próxima vez que você ouvir falar de raiz quadrada, lembre-se de que está lidando com uma ideia que tem profundas raízes históricas e práticas. E, quem sabe, isso pode tornar o estudo da matemática mais interessante e envolvente!

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Podcast 2 – Soluções gráficas de sistemas de equações

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas, com o objetivo de aprender um pouco mais sobre as soluções gráficas de sistemas de equações desse tipo.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

As possíveis soluções de uma equação do primeiro grau com duas incógnitas podem ser representadas graficamente por uma reta; além disso, um sistema com duas equações desse tipo é representado por duas retas, em que o ponto de cruzamento delas representa a solução desse sistema.

Mas o que acontece quando esse cruzamento não existe? E se elas se intersectarem em infinitos pontos?

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

Sabemos que retas paralelas não se encontram em nenhum ponto. Sendo assim, seria possível que um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas fosse representado por duas retas paralelas? A resposta a essa pergunta é sim!

Pegue, por exemplo, duas equações em que as incógnitas tenham o mesmo coeficiente e o termo independente seja diferente. Por exemplo, a primeira equação sendo x mais y igual a um [vírgula sonora] e a segunda equação sendo x mais y igual a dois. [vírgula sonora] Ao representarmos essas duas equações no plano cartesiano, veremos que elas são retas paralelas: [vírgula sonora] a primeira equação passa pelo ponto (0, 1), enquanto a segunda passa pelo ponto (0, 2). Como não há cruzamento em nenhum ponto dessas retas, dizemos que esse sistema não apresenta solução. Isso significa que não existe nenhum par de valores x e y que satisfaça ao mesmo tempo às duas equações. Classificamos esse sistema como um sistema impossível. [vírgula sonora]

Considere agora um outro exemplo: a primeira equação será x mais y igual a dois [vírgula sonora], e a segunda equação será dois x mais dois y igual a quatro. [vírgula sonora] Perceba que a segunda equação nada mais é do que o dobro da primeira. Ou seja, se dividirmos os dois lados da segunda equação por dois, chegaremos exatamente à primeira equação. Se tentarmos representar as duas equações no plano cartesiano, veremos que elas são exatamente a mesma reta, afinal, são equações equivalentes. [vírgula sonora] Logo, há infinitos cruzamentos entre as duas retas, pois elas coincidem em todos os pontos. Por isso, dizemos que esse sistema apresenta infinitas soluções.

Esse tipo de sistema costuma ser classificado como possível e indeterminado, uma vez que ele apresenta soluções, embora não se consiga determinar uma única.

Estudar Matemática é sempre interessante por isso. Muitas vezes nos deparamos com soluções simples e objetivas. Em outros casos, as respostas são mais complexas. Mas o legal é que sempre há um jeito de explicar e entender todas essas possibilidades.

Até por isso é muito comum utilizarmos lado a lado conceitos da Álgebra e da Geometria numa mesma aplicação.

Legal, não é mesmo?

Mas vamos além! Quando falamos de sistemas lineares, estamos apenas arranhando a superfície de um vasto campo de estudo. Imagine que você está em uma cidade e precisa encontrar o caminho mais curto para visitar vários pontos turísticos. Esse problema pode ser modelado matematicamente e resolvido usando sistemas de equações. Além disso, em áreas como Economia, Engenharia e Ciência da Computação, sistemas de equações são ferramentas essenciais para resolver problemas complexos.

Por exemplo, em Economia, podemos usar sistemas de equações para modelar a oferta e a demanda de produtos. Em Engenharia, eles são usados para analisar circuitos elétricos e estruturas. Na Ciência da Computação, algoritmos de aprendizado de máquina frequentemente dependem de sistemas de equações para fazer previsões e tomar decisões.

Outro aspecto fascinante é a conexão entre sistemas de equações e matrizes. Matrizes são tabelas de números que podem representar sistemas de equações de forma compacta e eficiente. Com o uso de matrizes, podemos aplicar métodos algébricos poderosos, como a eliminação de Gauss, para encontrar soluções de sistemas de equações de maneira sistemática.

E não para por aí! A Matemática é uma linguagem universal que nos permite descrever e entender o mundo ao nosso redor. Desde a simulação de fenômenos naturais até a otimização de processos industriais, a Matemática está presente em praticamente tudo o que fazemos.

Portanto, ao estudar sistemas de equações, você não está apenas aprendendo a resolver problemas matemáticos, mas também adquirindo habilidades que serão úteis em diversas áreas do conhecimento e da vida prática. Então, continue explorando, questionando e descobrindo o maravilhoso mundo da Matemática!

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

E lembre-se: a Matemática é uma jornada, e não um destino. Cada novo conceito aprendido é um passo adiante nessa jornada de descoberta e compreensão. Boa sorte e divirta-se!

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final desse *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Podcast 3 – Geometria e as grandes pirâmides do Egito antigo

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre Geometria e as grandes pirâmides do Egito antigo.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Até hoje, muito se discute sobre como antigas civilizações foram capazes de realizar construções tão grandiosas e fascinantes, com os recursos tecnológicos que tinham naquela época.

Mas, hoje, já sabemos que muitas dessas obras importantes para a nossa história foram realizadas com base em conhecimentos, estudos e elementos geométricos.

Você já estudou os triângulos e quadriláteros encontrados na arquitetura, como nos telhados, que muitas vezes têm formato triangular, ou nas janelas, que são, na grande maioria, quadradas. Seja nas edificações dos prédios mais modernos ou nas construções das deslumbrantes pirâmides do Egito antigo, a geometria sempre se faz presente. E, por falar nas grandes pirâmides do Egito, você já se perguntou como as estruturas dessas construções as mantêm em pé mesmo depois de se passarem tantos séculos?

[vinheta de transição]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

Estima-se que esses gigantes monumentos tenham sido construídos por volta de dois mil quinhentos e sessenta anos antes de Cristo. O papel principal desse tipo de construção era servir de túmulo para faraós, que, ao morrer, eram mumificados e colocados no interior da pirâmide junto de seus tesouros e móveis. No entanto, apesar de os egípcios antigos possuírem recursos tecnológicos muito diferentes dos atuais, eles foram capazes de realizar o transporte dos pesados blocos de pedra, que chegavam a ter toneladas de quilogramas de medida de massa.

Se analisarmos a representação de uma pirâmide de base quadrada, poderemos verificar como as formas geométricas planas exercem um papel fundamental para a sustentação dessas construções. O que as mantém de pé é o fato de suas quatro faces triangulares, apoiadas em uma base quadrada, se unirem em um único vértice superior. Então, quanto maior for a medida de altura da pirâmide, maior deverá ser sua base para que ela se sustente em pé. [música instrumental com temática egípcia]

As três pirâmides de Gizé – Quéops, Quéfren e Miquerinos – são as mais famosas por suas enormes dimensões. [vírgula sonora] A maior é a Quéops, com quase 140 metros de medida de altura e sua base com lados medindo 230 metros; já a menor, Miquerinos, possui aproximadamente 66 metros de medida de altura e 100 metros de medida de lado da base.

Para alguns teóricos da conspiração, monumentos tão grandes assim, naquela época, não poderiam ser criados sem a tecnologia que possuímos atualmente. Mas dizer uma coisa dessas é desacreditar do potencial dos egípcios antigos e, convenhamos, do próprio poder da Matemática de nos auxiliar.

A verdade é que os egípcios antigos foram muito inteligentes e souberam aproveitar as formas geométricas planas para sustentar e criar esses grandes monumentos.

Além disso, eles desenvolveram métodos engenhosos para mover e posicionar os blocos de pedra. Utilizando rampas de areia e sistemas de alavancas, os trabalhadores conseguiam elevar as pedras a grandes alturas. A precisão com que as pirâmides foram construídas também é impressionante; os lados das pirâmides estão quase perfeitamente alinhados com os pontos cardeais, demonstrando um profundo conhecimento de astronomia e geometria.

Essas técnicas e conhecimentos permitiram que as pirâmides resistissem ao tempo, permanecendo como testemunhas da habilidade e engenhosidade dos antigos egípcios.

Outro aspecto fascinante é o uso de técnicas de nivelamento e medição. Os egípcios usavam ferramentas simples, como cordas e pesos, para garantir que a base da pirâmide fosse perfeitamente nivelada. Isso era crucial para a estabilidade da estrutura. Além disso, a escolha do local de construção não era aleatória; eles selecionavam terrenos sólidos e estáveis, longe de áreas sujeitas a inundações.

A combinação de todos esses fatores – conhecimento geométrico, técnicas de construção, escolha de materiais e localização – resultou em monumentos que não só impressionam pela sua grandiosidade, mas também pela sua durabilidade.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Interessante, não é mesmo?

Se você levar esse estudo adiante, descobrirá muitos outros exemplos de construções como essas.

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Manual do Professor

Matemática
e suas Tecnologias

Matemática

Apresentação

Caro professor,

Pautado no desenvolvimento de habilidades e competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e na organização dos componentes curriculares em quatro áreas do conhecimento, o Novo Ensino Médio propõe a redistribuição da carga horária do segmento e pretende flexibilizar a oferta de ensino, com a possibilidade de aprofundamento em itinerários formativos, incentivando o protagonismo e a autonomia dos estudantes.

Esta coleção tem o objetivo de servir de suporte para suas aulas de Matemática. Neste Manual do Professor, você encontra informações que o auxiliam no trabalho com as propostas didáticas da coleção durante o ano letivo.

Acreditamos que o ensino de Matemática é fundamental para a formação de cidadãos críticos e conscientes de seu papel na sociedade, uma vez que possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia e das habilidades de interpretação, argumentação e análise em diversas situações cotidianas. Além disso, propicia aos estudantes fazer conjecturas, tomar decisões e compreender melhor a realidade na qual estão inseridos, tornando-os aptos a nela intervir quando necessário.

Neste cenário, concebemos esta coleção contemplando os requisitos da BNCC em situações contextualizadas e que consideram a interação da Matemática com outras áreas do conhecimento e com os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs).

Além dos pressupostos metodológicos da coleção, apresentamos neste Manual orientações específicas que potencializarão o desempenho docente em sala de aula.

Esperamos que todos esses elementos contribuam com sua prática docente e sejam o ponto de partida para a construção de um processo de ensino e aprendizagem significativo.

Os autores

Sumário

Orientações gerais 316

1. O Novo Ensino Médio 316
1.1 O contexto legislativo 316
1.2 As principais mudanças 317

2. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) 317
2.1 As competências e as habilidades da BNCC de Ensino Médio 318
2.2 As interdisciplinaridades, os Temas Contemporâneos Transversais e os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável 319

3. A educação integral e a sociedade contemporânea 320
3.1 O estudante protagonista da aprendizagem 321
3.2 Algumas reflexões sobre a prática docente 321
3.2.1 O trabalho individual e em grupos e possíveis formas de organização das turmas 322
3.3 A educação digital 322
3.3.1 O pensamento computacional 323
3.4 As culturas juvenis e os diferentes perfis de estudantes 323
3.5 A Cultura de Paz em sala de aula 324
3.6 As capacidades de argumentação e de leitura 324
3.7 O pluralismo de ideias e a produção de análises críticas, criativas e propositivas 325
3.8 A resolução e a elaboração de problemas 325
3.9 A investigação científica e os raciocínios lógico-matemáticos 325
3.10 A História da Matemática e a Etnomatemática 326
3.11 Recursos apoiados nas tecnologias digitais 327

4. Por uma educação inclusiva 328

5. As avaliações 328
5.1 O planejamento das avaliações e os tipos de avaliação 329
5.1.1 Avaliação diagnóstica 329
5.1.2 Avaliação formativa 329
5.1.3 Avaliação comparativa 329
5.1.4 Avaliação ipsativa 329
5.1.5 Avaliação somativa 329
5.2 Trabalhando o Enem em sala de aula: estratégias para melhorar o desempenho dos estudantes 330

6. A coleção 330
6.1 A abordagem teórico-metodológica e os pressupostos da coleção 330
6.2 A estrutura da coleção 330
6.3 Sugestões de cronogramas para a coleção 331
6.4 Os Objetos Educacionais Digitais da coleção 335

7. Referências complementares para aprofundamento 335
7.1 Livros para aprofundamento e formação continuada 335
7.2 História da Matemática 336
7.3 Ensino e aprendizagem em Matemática e Educação Matemática 336
7.4 Avaliação 337
7.5 Recursos educacionais digitais 337
7.6 Sugestões de revistas 338
7.7 Sugestões de *sites* 338
7.8 Questões curiosas de Matemática, jogos e desafios de raciocínio quantitativo 338
7.9 Filmes sobre Matemática e personalidades da área 338

Orientações específicas 339

Introdução ao Volume 2 339
Unidade 1 339
Unidade 2 343
Unidade 3 347
Unidade 4 352
Unidade 5 355
Resoluções 359

Referências bibliográficas comentadas 398

ORIENTAÇÕES GERAIS

1. O novo Ensino Médio

As discussões sobre um novo molde para esse segmento, mais atrativo e adequado à realidade, são antigas. O Novo Ensino Médio foi estabelecido pela Lei n. 13.415/2017, entretanto, sua origem remonta ao Projeto de Lei n. 6.840, de 2013, em paralelo a um movimento não governamental (Movimento pela Base) voltado para a criação e implementação de uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A demanda por um novo modelo vinha, portanto, de variados segmentos ligados à educação, da sociedade e do governo, principalmente buscando adequar o ensino às diversas mudanças (principalmente sociais e tecnológicas) ocorridas no século XXI.

Moehlecke (2012) discorre sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), aprovadas em 2011, dizendo que elas já apontavam para um modelo com uma grade curricular mais atrativa e flexível, capaz de atrair os estudantes e combater a repetência e a evasão. Para isso, a ideia é uma estrutura curricular articulada a uma base conceitual unificada, acrescida de uma parte diversificada, capaz de atender à multiplicidade de interesses dos jovens. Essas discussões envolvem uma série de fatores e desafios, que buscam conciliar a Lei de Diretrizes com as Bases da Educação Nacional (LDB, Lei n. 9.394/1996), a criação e implantação da Base Nacional Comum Curricular, as matrizes do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), a atualização da matriz de avaliação do Novo Exame Nacional do Ensino Médio (novo Enem), as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e as diversas realidades regionais do país.

1.1 O contexto legislativo

A primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, aprovada no Brasil em 1961, regularizou os Conselhos Estaduais e o Conselho Federal de Educação, deu autonomia aos estados e descentralizou a educação, introduzindo o ensino obrigatório e sem menção direta ao que atualmente entendemos como Ensino Médio. Em 1971, na segunda LDB, houve a definição de ensino obrigatório dos 7 aos 14 anos, com um núcleo comum a ser partilhado pelos 1º e 2º graus de ensino.

A Constituição de 1988 trouxe uma série de princípios fundamentais para guiar a educação no Brasil, tendo o Estado a obrigação de garanti-los, e, após sua promulgação, a LDB de 1971 foi considerada ultrapassada. Entretanto, apenas em 1996 foi publicada uma nova LDB, tornando-se um marco histórico e legislativo, pois com ela uma série de questões curriculares foram estabelecidas tanto para a Educação Básica – como o próprio Ensino Médio – quanto para o Ensino Superior.

Depois, em 2001, a promulgação do Plano Nacional de Educação (Lei n. 10.172/2001) estabeleceu metas para um período de 10 anos. Uma dessas metas é a garantia de acesso ao Ensino Médio a todos os estudantes que concluam o Ensino Fundamental em idade regular. Posteriormente, em 2007, foi iniciado o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação (Fundeb), sendo também um importante marco no desenvolvimento do Ensino Básico no país.

Além disso, a LDB proporcionou a criação das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), que servem como orientação para a elaboração de currículos com uma série de princípios para guiar e definir as finalidades do Ensino Médio.

Em 2017, estabeleceu-se e publicou-se a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento norteador dos currículos na Educação Básica e fornece subsídios para que os sistemas educacionais públicos e particulares estejam alinhados às diretrizes curriculares no que se refere a conhecimentos essenciais e competências e habilidades a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica. Esse documento indica:

- as **competências gerais** que os estudantes devem desenvolver em todas as áreas do conhecimento;
- as **competências específicas** de cada área de conhecimento e dos respectivos componentes curriculares (as disciplinas);
- os conteúdos mínimos que os estudantes devem aprender estabelecidos por **objetos de conhecimento** e **habilidades** a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica.

Assim, a BNCC passa a estabelecer a progressão e o sequenciamento dos conteúdos e habilidades mínimos de cada área do conhecimento e componente curricular para todos os anos da Educação Básica.

Vale destacar que a BNCC não define um currículo fechado: ela estabelece conteúdos mínimos que devem ser abordados, cabendo às Secretarias de Educação e às escolas a responsabilidade de elaborar currículos e projetos pedagógicos que atendam às necessidades locais e regionais, utilizando a BNCC como referência.

Também em 2017, foi instituído pela Lei n. 13.415/2017 o modelo do Novo Ensino Médio, que seria implementado de maneira escalonada entre 2022 e 2024. Esse modelo propôs uma reformulação da etapa final da Educação Básica, com maior flexibilidade e personalização da aprendizagem por meio de itinerários formativos específicos. A lei previa que as aprendizagens definidas na BNCC do Ensino Médio seriam organizadas por áreas do conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas), tendo uma complementação a partir de 5 itinerários formativos, que possibilitariam aprimoramento dentro de uma das áreas do conhecimento ou do ensino técnico profissionalizante.

De acordo com a própria BNCC:

> a dinâmica social contemporânea nacional e internacional, marcada especialmente pelas rápidas transformações decorrentes do desenvolvimento tecnológico, impõe desafios ao Ensino Médio. Para atender às necessidades de formação geral, indispensáveis ao exercício da cidadania e à inserção no mundo do trabalho, e responder à diversidade de expectativas dos jovens quanto à sua formação, a escola que acolhe as juventudes tem de estar comprometida com a educação integral dos estudantes e com a construção de seu projeto de vida (Brasil, 2018, p. 464).

Essa mudança estrutural foi motivada por uma modernização no currículo, resultante do entendimento de que a sociedade passou por diversas mudanças estruturais nos últimos anos, principalmente no que diz respeito ao uso cada vez maior das tecnologias, de modo que é fundamental um currículo que dialogue com os interesses e as necessidades dos estudantes, proporcionando-lhes maior poder de escolha e motivação. Assim,

é possível conectá-los mais facilmente ao mercado de trabalho e à vida acadêmica, possibilitando também o desenvolvimento de habilidades socioemocionais e reflexões sobre seu futuro ao construírem seus projetos de vida.

O modelo de Ensino Médio iniciado em 2022 sofreu diversas críticas de vários setores ligados à educação. Debates envolvendo infraestrutura de escolas públicas, oferecimento de itinerários formativos, capacitação docente, diminuição da carga horária de disciplinas básicas, entre outros, fizeram com que o Governo Federal lançasse, em 2023, o Projeto de Lei n. 5.230 para reestruturação do Novo Ensino Médio, que foi aprovado em agosto de 2024 como a Lei n. 14.945/2024, a ser implementada a partir de 2025. As principais mudanças estão na distribuição da carga horária e na ampliação dos conteúdos da formação básica curricular.

1.2 As principais mudanças

A seguir, apresentamos as principais mudanças do Novo Ensino Médio entre as propostas de 2017 e 2024.

- **Carga horária ampliada**: Na Lei n. 13.415/2017, a proposta era de uma carga de 3 000 horas, considerando os 3 anos da etapa do Ensino Médio, com 1800 horas de formação básica e 1200 horas de itinerários formativos. Na Lei n. 14.945/2024, as 3 000 horas foram mantidas, mas foi estabelecida a carga horária de 2 400 horas para componentes curriculares obrigatórios e 600 horas para itinerários formativos em áreas do conhecimento optativas. Essa é uma das principais mudanças e visa atender à necessidade de maior carga horária para o desenvolvimento de projetos em escolas de tempo integral e à criação de espaço para o desenvolvimento dos itinerários formativos.
- **Componentes curriculares obrigatórios**: Em todos os anos, os estudantes cursarão os seguintes componentes curriculares: Língua Portuguesa, Matemática, Biologia, Física e Química, História, Geografia, Filosofia e Sociologia, Língua Inglesa, Arte e Educação Física, sendo Língua Espanhola facultativa.
- **Itinerários formativos**: Segundo o Ministério da Educação:

  > os itinerários formativos são o conjunto de disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo, entre outras situações de trabalho, que os estudantes poderão escolher no Ensino Médio. Os itinerários formativos podem se aprofundar nos conhecimentos de uma área do conhecimento (Matemática e suas Tecnologias, Linguagens e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e da formação técnica e profissional (FTP) ou mesmo nos conhecimentos de duas ou mais áreas e da FTP. As redes de ensino terão autonomia para definir quais itinerários formativos irão ofertar, considerando um processo que envolva a participação de toda a comunidade escolar.
  >
  > BRASIL. Ministério da Educação. *Novo Ensino Médio*: perguntas e respostas. Disponível em: https://tedit.net/82fe92. Acesso em: 4 set. 2024.

  As escolas devem oferecer diferentes possibilidades de itinerários e dialogar abertamente com os estudantes para que eles possam escolher, de modo consciente, os itinerários que mais lhes interessam.
- **Ensino Técnico**: Uma opção de escolha do estudante, com previsão de 2100 horas para formação básica e 900 horas relacionadas ao ensino profissionalizante, sendo no máximo 1200 horas para cursos técnicos que exigem mais carga horária, ocupando parte das horas de formação geral básica.
- **Ensino a distância e noturno**: A Lei estabelece que a carga horária da formação geral dos estudantes deve ser oferecida presencialmente. O texto obriga os estados a manterem, em todas as cidades, ao menos uma escola da rede pública com Ensino Médio no período noturno, se houver demanda comprovada nesse turno.
- **Escola de tempo integral**: Uma das bandeiras do Novo Ensino Médio é a Política de Escolas de Tempo Integral. Embora nem todas as escolas tenham que, obrigatoriamente, passar para a modalidade de tempo integral, a lei do Novo Ensino Médio incentiva que o número de escolas nessa modalidade seja progressivamente ampliado. Isso já vinha sendo proposto pelo Plano Nacional de Educação (PNE), estabelecido em 2014. O PNE tem como meta "6: oferecer educação em tempo integral em, no mínimo, 50% (cinquenta por cento) das escolas públicas, de forma a atender, pelo menos, 25% (vinte e cinco por cento) dos(as) alunos(as) da educação básica" (disponível em: https://tedit.net/6q40wv; acesso em: 17 set. 2024).

2. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC definiu um conjunto de conhecimentos e competências que devem ser oferecidos aos estudantes, estabelecendo diretrizes para uniformizar os conteúdos essenciais a serem ensinados em todas as escolas do país. Seu objetivo é garantir uma formação de qualidade para todos os estudantes, independentemente de sua localização geográfica.

Ela valoriza o desenvolvimento de competências e habilidades que permitam aos estudantes resolver problemas, tomar decisões, trabalhar em equipe e se adaptar às constantes mudanças do mundo, definindo os conteúdos mínimos que eles devem aprender e os objetos de conhecimento e as habilidades a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica.

A organização por áreas do conhecimento permite aos docentes trabalharem de maneira integrada, articulando os diferentes conhecimentos e promovendo a interdisciplinaridade, além de auxiliar no desenvolvimento de competências específicas de cada área do conhecimento e dos respectivos componentes curriculares.

O trabalho pedagógico envolve um planejamento que articula teoria e prática, permitindo aos estudantes não apenas adquirir conhecimentos, mas também saber aplicá-los em diferentes contextos. As competências gerais estabelecem diretrizes amplas, como o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo, enquanto as habilidades indicam ações mais concretas, como a resolução de problemas ou a análise de fenômenos, incentivando o uso de diversas metodologias de ensino, como projetos, trabalho em grupo e utilização de tecnologias. É fundamental que os professores conheçam os objetivos e os princípios da BNCC para planejar as aulas de maneira eficiente, aplicando diferentes metodologias.

Vale reforçar que a BNCC serve como referência para a construção dos currículos estaduais, que são elaborados considerando as demandas e os contextos regionais específicos de cada localidade. Esses currículos, ao refletir as particularidades culturais, sociais e econômicas de suas regiões, permitem uma maior proximidade entre a prática pedagógica e a realidade dos estudantes, incluindo a criação, remodelação ou adaptação de

habilidades e competências. Além disso, o docente tem autonomia para adaptar os materiais didáticos e as metodologias propostas, alinhando-os tanto ao Projeto Político-Pedagógico (PPP) da escola quanto aos currículos estaduais, garantindo, assim, que o processo de ensino-aprendizagem seja relevante e significativo para os estudantes em seus variados contextos.

Dica

- MILANI, N. O. O Projeto Político Pedagógico – PPP como instrumento de comunicação e interação entre a comunidade escolar e a mediação do pedagogo. *In*: *Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE*. Governo do Estado: Secretaria de Educação do Paraná, 2014. Disponível em: https://tedit.net/m6wqh9. Acesso em: 17 set. 2024.

  O documento discute a importância do Projeto Político Pedagógico (PPP) como uma ferramenta essencial para promover a comunicação e a interação na comunidade escolar, destacando o papel do professor como mediador. A leitura dele promove a melhor compreensão de como o PPP pode contribuir para um ambiente educacional mais colaborativo e eficaz.

2.1 As competências e as habilidades da BNCC de Ensino Médio

De acordo com a BNCC, competência é a mobilização e a articulação de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para a resolução de problemas de situações cotidianas relacionados ao meio ambiente, aos princípios éticos, à cidadania, ao mundo do trabalho, entre outras questões de urgência social. Por meio da indicação clara do que os estudantes devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC.

O desenvolvimento de habilidades e competências reforça a necessidade de um conjunto mínimo de aprendizagens essenciais. Desse modo, na BNCC são estabelecidas 10 competências gerais para a Educação Básica, que perpassam todas as áreas de conhecimento, articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, conforme disposto na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. As competências gerais visam ao desenvolvimento integral do estudante, preparando-o para a vida em sociedade, o trabalho e a continuidade dos estudos.

A descrição das 10 competências gerais, assim como todo o texto da BNCC, pode ser encontrada no *site* do Ministério da Educação (disponível em: https://tedit.net/q0hay4; acesso em: 4 set. 2024).

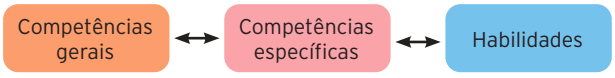
A BNCC estabelece, também, as competências específicas. No Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias têm 5 competências específicas que são desenvolvidas ao longo dos 3 anos. Além disso, a BNCC organiza o ensino da Matemática no Ensino Médio em 3 Unidades temáticas:

- *Números e Álgebra*;
- *Geometria e Medidas*;
- *Probabilidade e Estatística*.

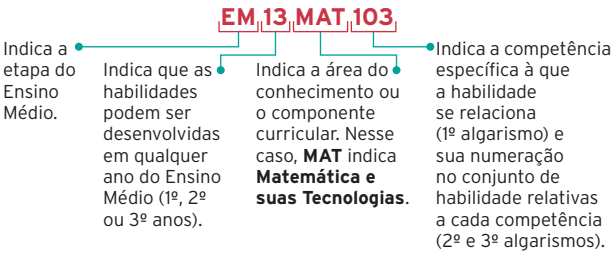
As Unidades temáticas agrupam conteúdos correlatos e facilitam o trabalho pedagógico, dividindo-se em habilidades específicas que detalham as expectativas de aprendizado em cada etapa. Essas habilidades são organizadas para permitir que o estudante desenvolva competências progressivamente, consolidando o aprendizado por meio de atividades que integram teoria e prática, sempre com uma abordagem contextualizada e conectada à realidade dos estudantes.

> Diante dessas considerações, a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (Brasil, 2018, p. 528-529).

No desenvolvimento das competências gerais, é essencial que os estudantes também trabalhem os princípios das competências específicas de cada área do conhecimento, o que se concretiza por meio do trabalho com as habilidades de cada componente curricular.



As competências e habilidades tanto se diferenciam quanto se encadeiam em diferentes graus de complexidade e amplitude no decorrer do Ensino Médio, sendo necessárias a análise e a compreensão de como isso ocorre na prática. Nesta coleção, utilizaremos a sigla **CG** para nos referirmos às competências gerais da BNCC para a Educação Básica. Para isso, nomeamos a primeira competência como **CG01**, a segunda como **CG02**, e assim sucessivamente. Além disso, usaremos a sigla **CEMAT01** para nos referirmos à competência específica **1** de Matemática e suas tecnologias, **CEMAT02** para a competência específica **2** de Matemática e suas tecnologias, e assim em diante. Também utilizaremos os códigos de cada habilidade presentes no documento da BNCC, cujo detalhamento está apresentado no exemplo a seguir.



A seguir, exemplificaremos o trabalho com as competências gerais, as competências específicas e as habilidades nesta coleção.

A competência geral **CG01** (texto a seguir), por exemplo, é favorecida no estudo da Unidade **3** do Volume **1** nos momentos em que se propõe ao estudante que reconheça e coloque em prática conhecimentos historicamente construídos, como nas seções que apresentam um apanhado histórico do desenvolvimento de conceitos matemáticos e da aplicabilidade deles na atualidade e na resolução de problemas.

Ao analisarmos, por exemplo, o capítulo **6** dessa Unidade **3**, a **CG01** é abordada em situações em que os estudantes refletem sobre os problemas que lhes são apresentados – tanto relacionados a semelhança de triângulos quanto a triângulos retângulos – e mobilizam conhecimentos matemáticos para investigar e desenvolver soluções criativas para solucionar os problemas.

Ainda nesse capítulo, os estudantes utilizam conceitos e definições para compreender características dos triângulos e aplicam conceitos e procedimentos para medir segmentos de reta ou medir ângulos. Com isso, é favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**. Isso ocorre porque, no capítulo, os estudantes exploram relações de congruência, relações de semelhança e relações trigonométricas envolvendo triângulos e aplicam esses conhecimentos em contextos diversos, incluindo a acessibilidade.

Para acompanhar o desenvolvimento das habilidades e das competências previstas, consulte a lista indicada no início das *Orientações específicas* de cada Unidade. A completude do trabalho com todas as respectivas habilidades e competências específicas de Matemática e suas Tecnologias, bem como das competências gerais da BNCC, é obtida ao longo dos Volumes desta coleção, tanto no Livro do Estudante quanto nas orientações apresentadas neste Manual.

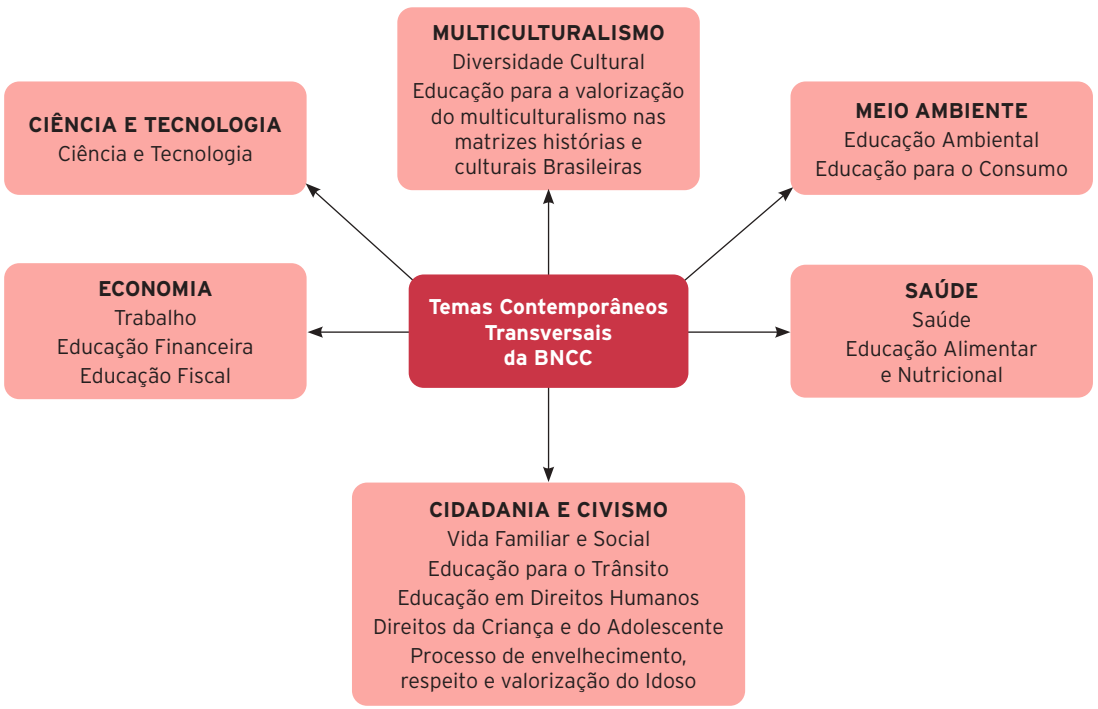
2.2 As interdisciplinaridades, os Temas Contemporâneos Transversais e os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

A interdisciplinaridade refere-se à abordagem educacional na qual diferentes áreas do conhecimento se conectam, rompendo as barreiras tradicionais individualizadas dos componentes curriculares (das disciplinas). Por meio da interdisciplinaridade, os estudantes exploram conceitos e questões a partir de múltiplas perspectivas, integrando conhecimentos e habilidades de diversas áreas do conhecimento.

Nessa perspectiva, os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) estabelecidos pela BNCC são assuntos de relevância atual que perpassam diferentes áreas do conhecimento e são considerados essenciais para a formação integral dos estudantes. Eles são chamados de "transversais" porque não pertencem a um único componente curricular, em vez disso, são abordados de maneira integrada em diversas áreas do conhecimento, promovendo uma visão ampla da educação.

> Os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) buscam uma contextualização do que é ensinado, trazendo temas que sejam de interesse dos estudantes e de relevância para seu desenvolvimento como cidadão. O grande objetivo é que o estudante não termine sua educação formal tendo visto apenas conteúdos abstratos e descontextualizados, mas que também reconheça e aprenda sobre os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade (Brasil, 2019a, p. 7).

A BNCC propõe, atualmente, os seguintes TCTs organizados em 6 macroáreas:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019. p. 8. Disponível em: https://tedit.net/3acdu3. Acesso em: 4 set. 2024.

Nesta coleção, diversos aspectos são contemplados a partir dos TCTs e exploram, sobretudo, questões da realidade social brasileira e do mundo, integrando-as às demais áreas do conhecimento.

A integração dos TCTs por meio da interdisciplinaridade auxilia os estudantes a desenvolverem competências gerais, como o pensamento crítico, a resolução de problemas complexos, a comunicação eficaz e a colaboração. Essas competências são essenciais para que eles se tornem cidadãos conscientes e atuantes. De fato, a interdisciplinaridade facilita a contextualização do aprendizado, mostrando como os conhecimentos adquiridos em diferentes disciplinas são aplicáveis na vida real. Ao estudar, por exemplo, o Tema Contemporâneo Transversal *Diversidade Cultural*, os estudantes podem entender a importância do respeito às diferenças tanto no campo social (Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) quanto no artístico (Linguagens e suas Tecnologias) e até na análise de dados estatísticos (Matemática e suas Tecnologias).

No contexto educacional, os TCTs são frequentemente incorporados ao currículo por meio de projetos interdisciplinares, debates, atividades práticas e reflexões que incentivam os estudantes a pensar criticamente e agir de maneira responsável em relação ao mundo ao seu redor.

Além dos TCTs, nesta coleção abordamos os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) da Agenda 2030 da ONU, que são compostos de 17 metas globais para a promoção de um desenvolvimento mais inclusivo, sustentável e justo em todo o mundo. Esses objetivos envolvem diversos desafios contemporâneos, como a erradicação da pobreza, a igualdade de gênero, a garantia de educação de qualidade e a ação contra as mudanças climáticas.

Reprodução/ONU



Fonte dos dados: NAÇÕES UNIDAS BRASIL. *Objetivos de desenvolvimento sustentável*. Disponível em: https://tedit.net/dgwz7m. Acesso em: 4 set. 2024.

A abordagem dos ODS, bem como dos TCTs, também permite um trabalho interdisciplinar que integra conhecimentos de diversas áreas às questões de urgência global que interferem diretamente na vida dos estudantes. Dessa maneira, contribui-se para a formação de cidadãos envolvidos com o bem comum.

Ao integrar ODS e TCTs, contribui-se para o incentivo dos estudantes à percepção de como as questões globais se conectam com a realidade local e como podem colaborar para um mundo mais justo e sustentável.

Uma sugestão de trabalho interdisciplinar envolvendo TCTs, ODS e Matemática presente na coleção envolve a sustentabilidade e o consumo consciente, trabalhando o TCT *Educação Ambiental* e o ODS **12** (Consumo e produção responsáveis): os estudantes podem investigar o consumo de água, de energia elétrica ou de outros recursos em seus domicílios ou na escola. Com os dados coletados, eles podem usar conhecimentos e ferramentas matemáticos para calcular médias, criar gráficos e projetar possíveis economias. O projeto pode incluir também a criação de uma campanha de conscientização com base nos resultados. Assim, abordam-se conhecimentos de Física (Energia), Biologia (Meio Ambiente), Geografia (Recursos Hídricos) e Matemática (Estatística).

Projetos como esses não só integram o aprendizado matemático com questões relevantes da atualidade, mas também incentivam os estudantes a desenvolverem uma compreensão crítica e analítica do mundo ao seu redor. De qualquer maneira, ao desenvolvê-los é importante o professor promover adaptações de acordo com a realidade local da comunidade e o contexto em que os estudantes estão inseridos. Para isso, é preciso investigar e identificar situações que possam ser trabalhadas de maneira interdisciplinar. Inclusive, os próprios estudantes podem sugerir temas ou problemas que eles identificam na região onde moram, sejam sociais, sejam econômicos ou desafios ambientais, por exemplo.

Essas adaptações também podem ser realizadas em conjunto com professores de outras áreas do conhecimento. Para isso, vocês podem organizar um momento semanal para fazer e compartilhar planejamentos em relação a temas, recursos didáticos, estratégias e ideias de atividades para implementar. Essa prática contribui para a troca de experiências e para o ajuste da proposta às necessidades e à realidade dos estudantes.

3. A educação integral e a sociedade contemporânea

A educação integral é definida na BNCC como uma proposta de formação ampla e visa promover o desenvolvimento cognitivo, físico, social, emocional e cultural dos estudantes. Desse modo, as diretrizes estão respaldadas no compromisso com a compreensão das singularidades e diversidades dos sujeitos, pois entende-se que a juventude não é simplesmente um período entre a infância e a fase adulta, mas uma etapa do desenvolvimento humano com características biológicas, psicológicas, sociais e culturais próprias.

Vivemos uma era de transformações rápidas e profundas, marcadas por avanços tecnológicos, mudanças sociais e ambientais, e uma crescente interconexão global, afetando diretamente a educação e o mundo do trabalho. O avanço das tecnologias digitais, a inteligência artificial e a automação estão transformando o mercado de trabalho e as relações humanas. Nesse contexto, a educação precisa ir além da mera transmissão de conhecimento técnico; deve capacitar os estudantes a serem pensadores críticos, solucionadores de problemas e cidadãos conscientes, capazes de se adaptar e inovar em um ambiente incerto e em evolução.

É essencial que a educação se preocupe com o desenvolvimento integral dos estudantes, considerando tanto o aspecto cognitivo quanto as dimensões emocional, social e ética. A formação de cidadãos responsáveis, solidários e empáticos é indispensável para a construção de uma sociedade mais justa e sustentável.

A proposta da BNCC e desta coleção é promover uma educação voltada ao desenvolvimento pleno e plural de ideias, ao convívio social republicano, à cultura de paz, à saúde mental dos estudantes e ao respeito às questões climáticas e ambientais, preparando-os para o exercício da empatia, da cooperação, da argumentação construtiva e do respeito ao meio ambiente, entendendo que eles são seres atuantes e protagonistas.

3.1 O estudante protagonista da aprendizagem

A BNCC traz em seus textos o desenvolvimento da autonomia, que corresponde a uma parte importante no processo de formação dos cidadãos. Esta coleção compreende que a autonomia estudantil vai além do simples ato de estudar de modo independente; ela envolve a capacidade de tomar decisões informadas, gerir o tempo, estabelecer metas e refletir sobre o próprio aprendizado. A partir do momento em que os estudantes desenvolvem a própria autonomia, deixam de ser meros ouvintes recebedores de informação, assumindo um papel de protagonismo na própria aprendizagem.

O desenvolvimento da autonomia nos estudantes é um processo gradual que requer suporte e orientação dos educadores. Professores desempenham um papel crucial ao criar ambientes de aprendizagem que incentivam a experimentação, a tomada de riscos e a reflexão crítica.

Para alcançar esse objetivo, uma das tendências pedagógicas em voga atualmente é conhecida como metodologias ativas. Nesse tipo de metodologia, o conhecimento não se origina exclusivamente da escola e do professor. Ele é proveniente também do que cada estudante sabe sobre determinado assunto. Segundo o professor José Morán (2015), as metodologias ativas podem ser um ponto de partida de avanço para processos mais profundos de reflexão, integração cognitiva, generalização e reelaboração de novas práticas. Ele afirma que estudantes se tornam mais proativos quando se envolvem em atividades que mobilizam ações desafiadoras e quando podem argumentar, testar hipóteses e experimentar novas situações.

No artigo "Mudando a educação com metodologias ativas", Morán traz apontamentos importantes que ajudam a compreender o que são as metodologias ativas e quais são os impactos do uso delas na aprendizagem dos estudantes. Sintetizamos a seguir os principais itens abordados no artigo.

1 As relações de ensino e aprendizagem são processos interligados que constituem relação simbiótica, profunda, constante entre o que chamamos mundo físico e mundo digital. Não são 2 mundos ou espaços, mas um espaço estendido, uma sala de aula ampliada, que se mescla. Nesse sentido, a educação formal é cada vez mais *blended*, ou seja, misturada ou híbrida, porque não acontece só no espaço físico da sala de aula, mas nos múltiplos espaços do cotidiano, que incluem os digitais.

2 O professor deve compreender que as tecnologias também são modos de comunicação com os estudantes, sujeitos nascidos em uma era de pleno desenvolvimento tecnológico. A interligação entre sala de aula e ambientes virtuais é fundamental para abrir a escola para o mundo e trazer o mundo para dentro da escola.

3 Desafios são importantes, por isso, junto com outras atividades, quando bem planejados, acompanhados e mediados, podem mobilizar as competências e habilidades desejadas, sejam intelectuais, sejam emocionais, pessoais ou comunicacionais. Exigem pesquisar, avaliar situações, observar pontos de vista diferentes, assumir alguns riscos, aprender pela descoberta e caminhar do simples para o complexo. Nas etapas de formação na Educação Básica, os estudantes precisam de acompanhamento de profissionais mais experientes para ajudá-los a conscientizar-se de alguns processos, estabelecer conexões não percebidas, superar etapas mais rapidamente e ser confrontados com novas possibilidades.

4 Uma proposta interessante é a prática de jogos colaborativos, visto que a geração atual é acostumada a jogar e a se comunicar, muitas vezes, na linguagem própria dos *games*. Assim, ao utilizá-los é possível gerar, além de um ambiente de competição, um ambiente colaborativo, de estratégia, com etapas, objetivos e habilidades bem definidas.

5 O professor tem papel importante no trabalho com as metodologias ativas, pois é o articulador de etapas, processos, resultados, lacunas e necessidades, seguindo percursos dos estudantes individualmente ou em grupos e conduzindo o desenvolvimento da aula ou de um projeto.

6 O trabalho com projetos é uma boa oportunidade de inserir metodologias ativas de aprendizagem na escola, sempre atentando ao fato de que o aprendizado ocorre com base em problemas e situações reais. Nesse sentido, trabalhar com projetos de vida pode ser um bom início para conquistar e aproximar os estudantes, além de fazê-los sentir-se responsáveis pela própria aprendizagem.

Como exemplos pedagógicos que reforçam a autonomia dos estudantes, podemos citar a sala de aula invertida, a gamificação, a aprendizagem baseada em projetos, o uso de portfólios e a autoavaliação. Além disso, é importante que os educadores forneçam *feedback* construtivo e oportunidades para que os estudantes ajustem as estratégias de aprendizagem com base nas reflexões sobre o desempenho.

3.2 Algumas reflexões sobre a prática docente

Como comentamos, o papel do professor não é ser transmissor ou detentor dos conteúdos. Ao contrário, o professor deve ser um facilitador, um guia que orienta os estudantes na jornada de aprendizagem, incentivando a curiosidade, a criatividade e o pensamento crítico.

E, nesse sentido, a formação continuada dos professores, bem como a incorporação de novas tecnologias e metodologias ativas, são fundamentais para que a educação acompanhe as demandas da sociedade contemporânea. Assim como os estudantes têm novas competências a desenvolver, os professores têm competências a exercitar: facilitar o aprendizado, mediar conflitos e avaliar conscientemente são apenas algumas de suas atribuições. Em um cenário educacional que valoriza cada vez

mais a autonomia, o pensamento crítico e o protagonismo dos estudantes, o professor assume uma função central na formação de cidadãos capazes de atuar de maneira ética e responsável na sociedade contemporânea.

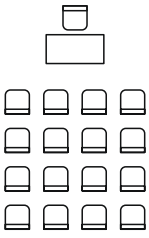
3.2.1 O trabalho individual e em grupos e possíveis formas de organização das turmas

Desenvolver trabalhos em sala de aula de maneira individual e em grupo tem papel essencial no desenvolvimento das habilidades e competências dos estudantes. A organização em grupo, além de ser um momento que propicia a expressão de ideias e o diálogo, permite a promoção do respeito mútuo, da empatia, da cooperação e do senso crítico. Ao interagir durante as atividades desenvolvidas, os estudantes desenvolvem a comunicação, a reflexão e a argumentação, que são fundamentais em um processo de aprendizagem colaborativa.

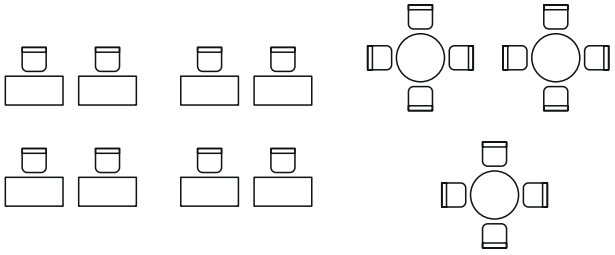
Os trabalhos em grupo permitem a troca de ideias e discussões sobre as diferentes estratégias em que estudantes pensaram, pois todos eles podem participar de maneira ativa. Porém, o professor sempre deve estar atento para realizar ajustes conforme a necessidade, como estabelecer regras para que toda a turma possa opinar, além de respeitar e acolher a opinião dos colegas.

Nesse sentido, é necessário considerar outras maneiras de organização da sala de aula, evitando disposições sempre enfileiradas e explorando organizações em formatos circulares, mesas-redondas e estações de trabalho. Assim, os estudantes têm mais oportunidades de colaborar entre si, ouvir e compartilhar ideias.

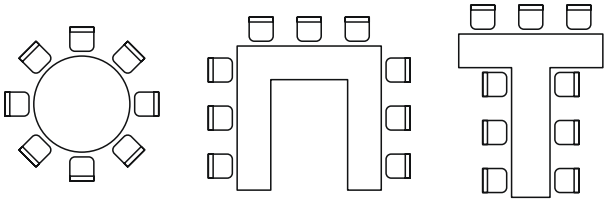
Ilustrações: Fagreia/Shutterstock



A disposição dos estudantes no modelo tradicional é oportuna nos momentos de trabalho individual.



A disposição em duplas ou em pequenos grupos promove a troca de saberes e um diálogo maior e inclusivo entre os estudantes.



A disposição de todos os estudantes no modelo circular, em U ou em T, por exemplo, favorece o debate coletivo e a troca de ideias e opiniões.

Além disso, durante o planejamento de aulas em grupo, o professor precisa considerar a heterogeneidade dos estudantes, variando os integrantes e garantindo que as atividades estejam de acordo com o nível de conhecimento e com a faixa etária da turma.

3.3 A educação digital

Um aspecto a ser considerado no trabalho com os estudantes é o uso de tecnologias da informação e comunicação, incluindo aquelas voltadas ao entretenimento.

> O grande desafio de educadores, pesquisadores, é compreender de que forma as tecnologias da informação e comunicação podem funcionar como meio de auxílio para o desenvolvimento do ensino. Sabendo que os jovens são produtores de informação e não simplesmente passivos consumidores, é preciso criar estratégias de uso das redes sociais que servem como interatividade e aprendizagem de grupos, pois os relacionamentos e as trocas de experiência acontecem através destas redes.
>
> [...]
>
> O processo de aprendizado com a utilização das tecnologias da informação e comunicação é de colaboração, onde é possível o que temos de conhecimento contribuir com o aprendizado do outro. Aprender colaborativamente significa desenvolver habilidades como: analisar, refletir, selecionar, atribuir significado, devolver a informação de acordo com a sua interpretação e contribuir numa discussão para o aprendizado do outro.
>
> Essa característica de sociabilidade deve ser aproveitada para a estimulação dos novos conhecimentos. Diante das tecnologias da informação e comunicação é possível escortinar-se um mundo ainda mais ávido em busca da construção de conhecimentos que não somente serão escolares, mas também outros tipos de conhecimento.
>
> [...]
>
> Os meios de comunicação e informação são imprescindíveis para ocorrer [a] interação e se articulam para contribuir cada vez mais com as possibilidades de acesso, convergência de meios tecnológicos e de mídias, que permitem o acesso ao conhecimento de qualquer lugar e parte do mundo modificando substancialmente as várias formas de pensar, comunicar e educar (Milani, 2012, p. 165 e 168).

A escola não pode ignorar o espaço que a comunicação e as tecnologias ocupam na vida dos jovens na atualidade. No entanto, é preciso orientá-los no uso desses novos conteúdos e oferecer diferentes tipos de letramento para que eles possam elaborar com a escola e além da escola. Utilizamos aqui o conceito de letramento como prática social e leitura do mundo, mais do que como alfabetização.

Na abordagem da utilização de tecnologias da informação e comunicação, é preciso considerar as diretrizes da Norma sobre Computação na Educação, aprovada em 2022, pois ela estabelece a importância da integração do ensino de computação de modo transversal no currículo escolar durante toda a Educação Básica, o que permite preparar os estudantes não somente para usar tecnologias, mas também para compreender os fundamentos da computação, incluindo desde o pensamento computacional até a linguagem básica de programação. Assim, os estudantes se desenvolvem criticamente para o mundo digital, passando

de usuários passivos a criadores ativos, o que fomenta a inovação e a resolução de problemas.

Ademais, a Política Nacional de Educação Digital (Pned) ressalta a necessidade de preparar a sociedade para os desafios impostos pela transformação digital, destacando a relevância da formação de pessoas capazes de usar tecnologias de maneira crítica e ética, o que promove o letramento digital em todos os níveis da Educação Básica.

A Pned sugere ações desde capacitar professores até ampliar o acesso à internet e aos dispositivos eletrônicos em todas as escolas do país. Essas iniciativas visam contribuir para a redução das desigualdades educacionais e a garantia de que todos os estudantes tenham oportunidades de desenvolver habilidades digitais.

3.3.1 O pensamento computacional

Podemos compreender o pensamento computacional como uma competência associada à resolução de problemas, apoiando-se ou não, para tanto, nas tecnologias e na computação. Utilizar recursos do pensamento computacional em sala de aula não significa necessariamente fazer programas de computador ou outro tipo de *software*. Esse conceito diz respeito ao desenvolvimento de uma representação de raciocínio lógico e por etapas, compreendendo a presença de padrões, a elaboração de passos e testes, a validação de resultados, além da generalização pela abstração. Portanto, algoritmos, fluxogramas, esquemas ou mesmo roteiros com etapas passo a passo a serem cumpridas, usados no processo de aprendizagem, podem ser compreendidos como recursos para o desenvolvimento do pensamento computacional. E esses são importantes recursos que podem auxiliar os estudantes a identificarem relações entre os objetos representados, como na organização das etapas de uma tarefa, na representação de árvore de possibilidades, entre outras situações.

O complemento da BNCC para Computação lista 7 competências gerais a serem desenvolvidas no Ensino Médio. Para acessar esse documento, visite: https://tedit.net/0ppe9e (acesso em: 3 set. 2024).

É importante destacar que pesquisas, estudos e aplicações envolvendo o pensamento computacional na educação já existem há quase 20 anos e, de acordo com a BNCC, esse tipo de raciocínio pode ser mobilizado em todas as etapas da Educação Básica, em diversos componentes curriculares, além de Matemática. Por isso, o pensamento computacional também pode ser entendido como um tema contemporâneo que é transversal ao currículo escolar. Caratti e Vasconcelos (2023) recuperam o trabalho de Brackmann sobre as bases, ou os pilares, do pensamento computacional (PC) e sua aplicabilidade.

> [...] Brackmann (2017) discorre sobre quatro pilares do PC: a) decomposição, na qual um problema considerado complexo pode ser dividido em problemas menores e mais fáceis de serem resolvidos; b) reconhecimento de padrões, em que cada problema menor pode ser analisado em profundidade e comparado com outros problemas já solucionados anteriormente; c) abstração, em que somente os detalhes relevantes para a solução do problema são considerados, sendo descartados os outros que não contribuem para esta; e d) algoritmo, que constitui a criação ou definição dos passos necessários para a solução dos problemas encontrados.
>
> É importante destacar que os pilares do PC supracitados podem ser integrados em diversas disciplinas escolares. Por exemplo, em Ciências, a decomposição pode ser utilizada para estudar sistemas do corpo humano ou ecossistemas, dividindo-os em sistemas menores ou componentes para entender melhor o conjunto; o reconhecimento de padrões pode ser aplicado em História para identificar tendências em eventos históricos, como causas e consequências, com o objetivo de prever possíveis resultados de conflitos atuais; a abstração pode ser empregada em Línguas para analisar textos literários, concentrando-se em elementos essenciais, contextos, temas e símbolos abstratos para interpretar significados mais profundos; e o uso de algoritmos pode ser explorado em Música para compreender a estrutura de partituras (Caratti; Vasconcelos, 2023, p. 3).

Desse modo, é importante perceber que as técnicas do pensamento computacional se consolidam como uma abordagem sistemática de resolução de problemas, envolvendo o uso de conceitos e métodos próprios da Ciência da Computação. Ele não se limita ao uso de computadores nem à Matemática, mas abrange um conjunto de habilidades cognitivas e atitudes que permitem abordar e solucionar problemas complexos de maneira eficiente.

3.4 As culturas juvenis e os diferentes perfis de estudantes

A escola deve ser um espaço que acolhe e valoriza a diversidade dos jovens, reconhecendo suas múltiplas dimensões de desenvolvimento – intelectual, físico, afetivo, social e cultural. A BNCC reforça que a educação deve partir da realidade que os estudantes vivenciam, e não de uma seleção prévia de conteúdos descontextualizados. Nesse sentido, compreender e integrar as culturas juvenis, com toda a sua pluralidade, é essencial para construir uma educação significativa e transformadora.

Para melhor entender o conceito de culturas juvenis, é preciso assimilar que as maneiras de ser jovem são inúmeras e dependem de gênero, raça, cor, etnia, classe social, território, religião, geração, entre outros; de acordo com as mesmas variáveis, há diferentes maneiras de ser estudante. Diante desse contexto, cabe à escola proporcionar aos jovens a possibilidade de experimentar diferentes modos de vivenciar a juventude considerando, para tanto, as chamadas culturas juvenis. Entendemos como culturas juvenis as articulações que os jovens estabelecem com base na produção cultural de massa, no estilo de vida e nas práticas sociais em grupo ou em rede e que se expandem pelo espaço urbano.

Um exemplo é a exploração de atividades culturais envolvendo *rap*, grafite ou o próprio *funk*, que, muitas vezes, são subvalorizadas por fazerem parte da cultura dos jovens das camadas populares, que já são marginalizados por sua origem socioeconômica. Ao permitir que os jovens se expressem por meio dessas manifestações artísticas, se assim desejarem, a escola oportuniza a expressão de sentimentos e que eles sejam reconhecidos, ganhem visibilidade e se autoafirmem.

As culturas juvenis são diversas, refletindo a variedade de experiências, interesses e contextos dos jovens brasileiros. Essa diversidade abrange uma ampla gama de realidades socioeconômicas, personalidades, diferenças de aprendizagem, e perfis psicológicos e cognitivos, além de incluir diferenças entre áreas urbanas e áreas rurais. Cada estudante traz consigo uma bagagem única de vivências que deve ser reconhecida e valorizada dentro da sala de aula.

O contexto pós-pandêmico ampliou ainda mais esses desafios, revelando desigualdades preexistentes e criando novas barreiras para muitos jovens, ressaltadas pelo resultado do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) de 2022. Nesse cenário, trabalhar com diferentes perfis de estudantes requer uma abordagem que considere a pluralidade uma característica inerente da sociedade, sem adotar posturas capacitistas ou juízos de valor. A escola deve ser um lugar onde todos os estudantes se sintam respeitados e reconhecidos, independentemente das diferenças.

Ao considerar as culturas juvenis na construção do currículo, a escola deve propiciar que os próprios estudantes levem suas experiências e vivências para o ambiente de aprendizagem. Isso não apenas enriquece o processo educativo, mas também fortalece o vínculo entre o estudante e o conteúdo, tornando o aprendizado mais relevante e conectado à própria realidade.

Por fim, o projeto de vida, enquanto ferramenta pedagógica, também deve ser abordado nesse momento de compreensão das aflições e expectativas dos jovens do Ensino Médio, pois ajuda os estudantes a refletirem sobre seus objetivos e aspirações, integrando suas vivências pessoais e culturais com suas expectativas para o futuro. No entanto, é crucial que essa reflexão seja ancorada em uma visão realista das possibilidades e limitações que o mundo do trabalho impõe, especialmente para a população mais vulnerável, pois um dos objetivos da educação é que os jovens compreendam a sua realidade e passem a transformá-la, percebendo, e isso é fundamental, porque as transformações no mundo do trabalho, impulsionadas pelas tecnologias, criam novas oportunidades, mas também desafios significativos.

3.5 A Cultura de Paz em sala de aula

O trabalho com a BNCC pressupõe articulações entre os envolvidos no processo educativo – estudantes, professores e equipe gestora –, de modo a garantir as condições básicas de vida e a criação de mecanismos que favoreçam a atuação e o protagonismo da comunidade escolar na construção da democracia e na garantia e efetivação de direitos e justiça social. Nesse sentido, para assegurar a boa convivência no ambiente escolar e a Cultura de Paz, é preciso adotar uma postura na qual a educação seja um fator essencial e contribua para o combate à violência, à intimidação sistemática (*bullying*) e às ações excludentes e preconceituosas.

O texto a seguir reflete o que se espera ao propor um ambiente escolar para promoção da Cultura de Paz.

> [...] A educação se dá para além do ambiente escolar, sendo composta pelo tempo e contexto em que as aprendizagens acontecem, em espaços formais e não formais de educação e a partir da interação de diferentes sujeitos sociais. Dessa forma, é preciso respeitar, ouvir e valorizar a diversidade de participantes que constroem esse espaço, na perspectiva de atuação conjunta dos agentes da rede de proteção na intenção de restabelecer "os valores e a segurança necessários para um ambiente educacional saudável, no qual a justiça, a igualdade, o respeito, a solidariedade e a consideração entre as pessoas prevalecem" [...].
>
> Ao se propor um ambiente escolar para a promoção da Cultura de Paz e de convivências respeitosas, possibilita-se que a escola cumpra a sua função fundamental: promover aprendizagens as quais devem estar em consonância com as demandas pessoais e coletivas, de forma a fortalecer os/as estudantes como sujeitos de direitos que pensam, criticam, refletem, agem coletivamente, para entender, compreender e experimentar o mundo, desenvolver-se [...].
>
> Assim, a educação para a Cultura da Paz propõe mudanças inspiradas em valores como justiça social, diversidade, respeito e solidariedade, aliadas às ações fundamentadas na educação, saúde, cultura, esporte, participação cidadã e melhoria da qualidade de vida no território de responsabilidade compartilhada entre educação e diversos setores da sociedade [...].
>
> [...]
>
> Assim, as orientações e ações voltadas para a promoção da cidadania e garantia dos Direitos Humanos e Cultura de Paz pautam-se na compreensão das diversas formas de violências, violações de Direitos Humanos e suas ocorrências no campo dos direitos civis, políticos, econômicos, sociais, culturais e ambientais (Distrito Federal, 2020, p. 11-13).

A perspectiva de enfrentamento e prevenção à violência contra os jovens do Ensino Médio é um dos grandes desafios da escola, dos familiares e responsáveis e de toda sociedade. Nesta coleção, oportunizamos aos estudantes o uso das tecnologias como meio de disseminação e produção de conhecimento, auxiliando-os a desenvolver boas práticas e consciência crítica em relação a elas, mobilizando com mais ênfase a **CG05**.

3.6 As capacidades de argumentação e de leitura

O processo de leitura inferencial favorece a organização das relações de significado dentro do texto e determina os significados que o leitor é capaz de estabelecer considerando todas as possibilidades de interpretação que um texto pode oferecer. A produção de sentidos de um texto está conectada ao contexto e à interação entre o autor e o leitor.

Ao oferecer aos estudantes atividades de leitura orientada, favorecemos o desenvolvimento de estratégias cognitivas e metacognitivas. No trabalho em sala de aula, é possível ver quão desafiadores são o ensino-aprendizagem e a produção de textos argumentativos, e, para que os estudantes construam o próprio conhecimento, cabe propor atividades contextualizadas e que favoreçam o desenvolvimento da criticidade e do protagonismo cidadão.

Ao produzir um texto argumentativo, os estudantes podem utilizar alguns tipos de raciocínio lógico: o indutivo (parte de fatos particulares para uma conclusão geral), o dedutivo (parte do enunciado geral para provar um fato particular), a analogia (provas de acordo com semelhanças entre os casos), a dedução

(parte de uma regra para obter a conclusão) e a abdução (conclusões com base em premissas).

Nas aulas de Matemática, ao incentivar o trabalho com orientações e roteiros de estudo e pesquisa, mobilizamos as habilidades de leitura, escrita, oralidade e escuta reflexiva dos estudantes, ampliando as estruturas que compõem o letramento matemático nos sujeitos e permitindo, também, o desenvolvimento desses tipos de raciocínio lógico. Os estudantes, ao falarem e ouvirem os pares em sala de aula, aprendem e ressignificam saberes. Comunicar-se durante as aulas de Matemática é um processo complexo, pois o indivíduo precisa se apoiar em duas linguagens para tanto: a materna, para comunicação universal, e a linguagem matemática, com símbolos e características próprias.

Nesta coleção, incentivamos o processo de leitura inferencial e o desenvolvimento do raciocínio argumentativo em diversas oportunidades, sobretudo nas aberturas de Unidades e nas seções – nas quais os estudantes devem ler um texto, interpretá-lo e tirar as próprias conclusões –, nas atividades envolvendo a elaboração e a resolução de problemas, nas propostas de debate com os colegas, e ao serem solicitados a argumentar sobre a maneira como chegaram às respostas encontradas.

3.7 O pluralismo de ideias e a produção de análises críticas, criativas e propositivas

Produzir análises críticas, criativas e propositivas nas aulas de Matemática é de grande importância para a formação dos estudantes, pois os auxilia a ser capazes de compreender e entender o que precisa ser modificado na realidade que vivem. Durante as aulas, o professor pode promover um ambiente de pluralismo de ideias, ou seja, em que concepções diferentes sejam debatidas e confrontadas de maneira sistêmica. Assim, contribui-se para que os estudantes argumentem, reflitam criticamente e proponham possibilidades de soluções para problemas que precisam ser resolvidos.

Um exemplo de análise crítica em Matemática ocorre quando os estudantes são incentivados a interpretar tabelas e gráficos estatísticos, questionando os dados e analisando situações econômicas e sociais. Já a criatividade, pode aparecer quando os estudantes procuram soluções alternativas para problemas complexos.

Debates atuais, como a uberização da economia, exemplificam a integração dessas habilidades com a Matemática, que pode ser usada na análise do impacto financeiro desse modelo de negócio. Pode-se, por exemplo, desafiar os estudantes a calcular a renda média de motoristas de aplicativos considerando, para isso, as variáveis necessárias, como o custo de manutenção do veículo, a quantidade de horas trabalhadas e as tarifas e taxas cobradas. Desse modo, contribui-se para a promoção de debates sobre a sustentabilidade financeira desse tipo de trabalho, analisando-se, também, as implicações sociais.

Além disso, ao fazer o confronto das diferentes concepções sobre uberização ou outros temas atuais da sociedade, o professor precisa incentivar os estudantes a respeitar as diversas experiências que vivem ou viveram e os diferentes modos de pensar sobre isso. Nesse sentido, a Matemática não fica limitada a propor somente respostas objetivas, ela também propõe reflexões sobre a multiplicidade de perspectivas que existem em uma sociedade plural. Realizar o confronto de ideias de maneira respeitosa e colaborativa contribui para que os estudantes valorizem e respeitem diferentes pontos de vistas.

3.8 A resolução e a elaboração de problemas

Na área de Matemática, a BNCC ressalta que os professores devem incentivar os estudantes apresentando problemas da vida real que sejam usados como ponto de partida para situações didáticas em que se desenvolvam a criatividade, o pensamento crítico e a colaboração.

Elaborar e resolver problemas exigem um ambiente de comunicação e escuta, além de cooperação e argumentação. É importante que os estudantes percebam que a habilidade de resolver problemas não está relacionada somente com as aulas de Matemática, pois ela será mobilizada ao longo de toda a vida, em diversas situações do cotidiano.

O precursor das ideias acerca da resolução de problemas foi o matemático e professor húngaro George Pólya (1887-1985), que estabeleceu passos a serem seguidos na resolução de um problema, descritos a seguir, sinteticamente, de acordo com Pólya (2006).

- Compreender o problema: o que se pede; quais são os dados.
- Elaborar um plano: estratégias para resolver o problema; como organizar os dados.
- Executar o plano: executar as estratégias; fazer os cálculos.
- Fazer a verificação ou o retrospecto: verificar se a solução está correta; se há outras maneiras de resolver o problema.

Além disso, a resolução e a elaboração de problemas contribuem para investigação, levantamento e teste de hipóteses, elaboração de argumentos e de ideias matemáticas e para o compartilhamento de diferentes saberes.

Nesse contexto, ao avaliar a elaboração de problemas dos estudantes, o professor precisa analisar aspectos relacionados a clareza da formulação, relação do problema com o conteúdo trabalhado e se a produção é inédita. Por fim, para tornar a elaboração de problemas uma prática enriquecedora, é fundamental que os estudantes compartilhem entre si os problemas criados, não somente para resolver, mas também para discutir se a produção está clara e completa.

Ao longo desta coleção, há diversas e variadas possibilidades de trabalhar com resolução de problemas em temas da realidade ou em contextos didáticos. Aproveite a oportunidade e crie um ambiente de investigação e construção de saberes com os estudantes.

3.9 A investigação científica e os raciocínios lógico-matemáticos

O ato de investigar é praticado pelos jovens desde a infância. Todo jovem é curioso e tende a explorar e buscar mais informações sobre algo que lhe chama a atenção. Nessa perspectiva, é importante o ensino de Matemática também buscar possibilidades de despertar o interesse dos indivíduos.

A prática de pesquisa também serve de aporte interessante por envolver saberes prévios, questionamentos, levantamento e

teste de hipóteses, verificações de resultados, elaboração de modelos matemáticos, entre outros. Pesquisar significa informar-se sobre algo, investigar, examinar minuciosamente determinado tema ou problema. É uma ação em busca de conhecimento.

Deve ficar claro para os estudantes que a pesquisa não significa apenas a busca de algum tema na internet, como muitos deles podem pensar. É importante que eles compreendam que a pesquisa resulta de uma ação iniciada pela curiosidade ou inquietação de uma ou mais pessoas sobre determinado assunto ou problema. Uma pesquisa é uma investigação.

Nesta coleção, um tipo de pesquisa proposto é o que chamamos de pesquisa bibliográfica, que consiste na coleta de informações sobre o tema em textos, livros, artigos, *sites*, ou seja, as fontes de informação. Sempre que explorar o trabalho com as fontes de informação, retome com os estudantes a necessidade de avaliá-las.

Além disso, saber pensar matematicamente é relacionar situações de contextos diferentes para descobrir novas estratégias e soluções e interpretá-las utilizando, para tanto, diversos tipos de raciocínios argumentativos como ferramenta.

A investigação em Matemática apresenta-se como uma metodologia que:

> tem por objetivo oferecer oportunidade para os estudantes vivenciarem uma experiência semelhante ao do investigador matemático e, assim, motivá-los a estudarem Matemática, por meio do desafio de descobrir relações matemáticas apresentadas em situações matemáticas específicas. Desta forma, levar o estudante a ter uma visão do que é fazer Matemática, bem como sentir prazer no fazer Matemática (Varizo; Magalhães, 2016, p. 2).

Nesta coleção, apresentamos algumas possibilidades para a introdução de atividades que potencializem o desenvolvimento desses modos de raciocinar, sobretudo a dedução, a indução, a abdução e o raciocínio por analogia, como dito anteriormente.

A dedução é o modo de inferência mais simples e se caracteriza pela inferência que mostra de que maneira, seguindo determinada regra geral, se estabelece um caso particular.

> No método dedutivo consideramos a forma mais certa para nós, ou seja, caminhos verdadeiros, concluintes e resultados. Exemplo: "Hoje está calor e o asfalto está quente". Esse método é comum para testar hipóteses já existentes, dadas por *axiomas*, para comprovar teorias, nomeadas de *teoremas* (Lascane; Homsy; Monteiro, 2020, p. 122).

Na indução, ao contrário da dedução, parte-se da premissa menor e busca-se a generalização. A verificação da teoria é feita por experimentação. Enquanto processo lógico-analítico, a indução é passível de ser experimentada e, consequentemente, comprovada. Por trás do raciocínio indutivo está um passo essencial: a atitude indutiva à qual é submetido o pesquisador. Ter uma atitude indutiva requer saber observar detalhes em sua experiência e formular hipóteses que podem ou não ser verdadeiras.

Na abdução se dá o processo de formação de hipóteses explicativas que ajudam na compreensão de certos fenômenos, e a consideramos ponto de partida do raciocínio indutivo. Na Matemática, assim como em outras ciências, a abdução envolve a busca por explicações ou hipóteses. Diferentemente da dedução, que começa com hipóteses e verifica se as conclusões são verdadeiras, a abdução parte de uma verdade presumida para identificar possíveis hipóteses que a expliquem.

No raciocínio por analogia, a inferência se dá pela identificação de semelhanças entre diferentes situações ou objetos. Assim, transferem-se conhecimentos ou conclusões de um contexto familiar para outro menos conhecido sob a premissa de que, se os casos são similares em alguns aspectos, podem ser similares em outros também. Apesar de não ser conclusivo como a dedução ou a indução, o raciocínio por analogia é muito usado na formulação de hipóteses e no desenvolvimento de novas ideias.

3.10 A História da Matemática e a Etnomatemática

A BNCC ressalta a importância do trabalho com os diferentes saberes e culturas e com o conhecimento produzido pela humanidade ao longo do tempo e do espaço. Para tanto, há 2 tendências metodológicas, também destacadas nesse documento oficial, que podem servir de aporte para esse trabalho: a História da Matemática e a Etnomatemática.

Em relação à História da Matemática, a BNCC traz vários destaques. Reproduzimos a seguir um exemplo.

> [...] A Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau (Brasil, 2018, p. 463).

O livro *História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores*, escrito pelos professores brasileiros Iran Abreu Mendes (Universidade Federal da Paraíba) e Miguel Chaquiam (Universidade Federal do Rio Grande do Norte), traz um panorama explicitador e incentivador da abordagem de conteúdos a partir da História da Matemática. A seguir, alguns pontos essenciais abordados por eles (Mendes; Chaquiam, 2016).

1. Ao explorar a História da Matemática, é necessário compreender que, na verdade, trata-se de histórias no plural, pois estão conectadas, integradas ou mesmo tecidas em meio a outras histórias das mais diversas qualidades.

   São histórias e descobertas frutos de diferentes pessoas sobre a produção de ideias matemáticas e as materializações em múltiplas linguagens representativas, e talvez seja também dessa multiplicidade que surge a característica plural de tais histórias. Esquecer ou desprezar essa pluralidade é empobrecer qualquer abordagem dita ou concebida como transversal, integrada ou até mesmo contextualizada para a Matemática que se ensina.
2. As histórias consideradas importantes para o desenvolvimento da aprendizagem matemática dos estudantes em sala de aula são aquelas que têm a vocação de explicar a organização conceitual das matemáticas produzidas no tempo e no espaço.

3. Uma das justificativas mais comuns sobre a indicação do uso didático ou pedagógico das informações históricas nas atividades de ensino de Matemática é que ela amplia a compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais dessa área, representando uma contribuição didática para o trabalho do professor e fortalecendo as competências formativas para o exercício de ensino.
4. O uso da história nas aulas de Matemática amplia a visão sobre os aspectos formativos, informativos e utilitários, conduzindo os estudantes ao acervo cultural dessa ciência com a finalidade de desenvolver o interesse pelo assunto e estimular a preservação da memória intelectual humana.
5. É necessário que o professor redirecione o uso das histórias e promova um exercício de investigação mais ampliado, propiciando a criação de um cenário no qual as histórias do desenvolvimento conceitual sejam agregadas às informações existentes. É preciso explicar que o conhecimento a ser aprendido contribuirá para a ampliação das estratégias de pensamento e, consequentemente, ajudará os estudantes na produção de conhecimento.
6. Podem ser desenvolvidos alguns projetos de investigação sobre as histórias dos seguintes tópicos matemáticos: números de Fibonacci; problema das quatro cores; fractais; razão áurea; retângulo de ouro; números imaginários; números complexos; números irracionais; fórmula de Euler; Matemática e arquitetura; Matemática e arte islâmica; Matemática e música; barras de Napier; triângulo de Pascal; Trigonometria e polígonos regulares; sólidos de Platão; simetria em diversas culturas; transformações geométricas no plano; desenvolvimento das ideias sobre funções; entre outros.

Ao se apoiar nas concepções do uso da História da Matemática em sala de aula, o professor deve adotar uma postura de escuta reflexiva e conduzir as discussões a partir dos questionamentos que os estudantes farão sobre as informações e histórias às quais terão acesso. É importante fomentar discussões sobre os diferentes contextos em que os conceitos surgiram e levantar os possíveis saberes que os estudantes trazem sobre eles. O uso de literatura pode ser um caminho bastante interessante para isso.

Nesta coleção, destacamos diversos momentos para a apresentação da História da Matemática ao longo do desenvolvimento dos capítulos.

Há mais de duas décadas, o termo Etnomatemática saiu dos meios acadêmicos e adentrou os documentos oficiais, currículos, programas de ensino e materiais didáticos das escolas. O professor Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021) foi o precursor e principal cientista brasileiro a se dedicar ao tema. Em razão de suas ideias e produções acadêmicas, que contemplam todos os níveis de ensino da Matemática, ele se tornou um profissional reconhecido, respeitado e referenciado mundialmente.

Na obra *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, D'Ambrosio esclarece que a palavra Etnomatemática nasceu das raízes *tica*, *matema* e *etno* para significar que há várias maneiras, técnicas e habilidades (*ticas*) de explicar, de entender, de lidar e de conviver (*matema*) com distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (*etnos*).

Nessa mesma obra, ele define o conceito: Etnomatemática é a Matemática praticada por grupos culturais, como comunidades urbanas e comunidades rurais, trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma faixa etária específica, sociedades indígenas e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns.

A Etnomatemática tem o objetivo de preservar e estudar as particularidades de cada indivíduo, as culturas e os conhecimentos matemáticos adquiridos, pois compreende que o ser humano se desenvolve continuamente e, por isso, ressignifica as técnicas e adota novas, compondo a própria maneira de explicar a realidade. Tais conhecimentos são transmitidos pela interação e a comunicação em ambientes distintos nos quais os sujeitos circulam, incluindo a escola, o trabalho, a comunidade ou o bairro em que residem, entre outros.

Apoiar-se nos pressupostos da Etnomatemática é um caminho promissor para trabalhar com o contexto dos estudantes, pois considera e valoriza os saberes que trazem, constituídos pelas vivências deles e pela localização temporal e espacial na qual circulam. Há várias possibilidades de mobilizar tais saberes ao longo das aulas de Matemática, por exemplo: ao discutir o orçamento doméstico de uma família, é possível identificar práticas culturais para lidar com o consumo e com o alimento.

Fernandes da Costa (2021) traz um trabalho interessante relacionando Etnomatemática e decolonialidade. Ambas as abordagens incentivam a descolonização do currículo educacional, promovendo a inclusão de conhecimentos e práticas matemáticas de diferentes culturas no ensino formal. Isso contribui para uma educação mais inclusiva e representativa, desafiando a hegemonia do pensamento eurocêntrico, que historicamente impôs uma visão única de conhecimento. Ao destacar a diversidade das práticas matemáticas, a Etnomatemática apoia o movimento decolonial ao mostrar que há múltiplas formas legítimas de compreender e trabalhar a Matemática.

3.11 Recursos apoiados nas tecnologias digitais

Em um mundo globalizado e em constante desenvolvimento científico e tecnológico, é importante a escola se integrar a práticas que propiciem aos estudantes vivenciar essa realidade com aplicação ao ensino. Nesta coleção, sugerimos explorar com os estudantes recursos tecnológicos em diversas oportunidades, como ao propor a utilização de *softwares* de Geometria dinâmica, de planilhas eletrônicas, de calculadoras, entre outros.

Há diversos *sites* e aplicativos para desenvolver atividades de Geometria dinâmica (como o GeoGebra, o Graphmática, o Winplot) e dinamizar e diversificar as estratégias em sala de aula. Também há diversos aplicativos de planilhas eletrônicas para computador e *smartphone* ou *on-line*. O uso e as funcionalidades dessas planilhas são similares e muitas estão disponíveis em português.

Na escolha do *software* ou aplicativo a ser trabalhado, é preciso atentar para que o programa apresente todas as funcionalidades necessárias ao desenvolvimento das atividades propostas em sala de aula. Previamente, é importante explorar o programa e, no começo da aula, auxiliar os estudantes nas explorações iniciais e na identificação das ferramentas, dos códigos e das configurações disponíveis, além da maneira de acessá-las, de modo que o desenvolvimento das atividades seja possível, proveitoso e promova o desenvolvimento das habilidades esperadas.

A calculadora também é um recurso bastante utilizado em situações cotidianas por boa parte das pessoas e pode ser uma

ferramenta eficiente para correção de erros, averiguação de respostas e teste de hipóteses, sendo possível utilizá-la como instrumento de autoavaliação ou investigação.

Diversos outros recursos podem ser adaptados para ampliar o engajamento dos estudantes e favorecer a aprendizagem: *blogs* ou *fotologs* para armazenamento de projetos ou pesquisas realizadas pelos estudantes; aplicação de *quizzes* interativos, desenvolvimento de vídeos, animações interativas e *podcasts*, por exemplo.

O uso das ferramentas também deve ser feito com responsabilidade. Em uma época em que se discute a veracidade das informações, compreender e utilizar corretamente ferramentas digitais de pesquisa é fundamental para evitar *fake news*. Assim, a prática de pesquisa pode ser incentivada e adotada na abordagem de todos os conteúdos matemáticos.

4. Por uma educação inclusiva

Para incluir estudantes com deficiência, o professor deve favorecer a interação e o respeito à diversidade em sala de aula. A seguir, apresentamos algumas orientações para contribuir em sua prática pedagógica.

- Conheça os estudantes, para que eles sejam assistidos de modo adequado. Sugerimos uma conversa com os estudantes e os familiares e/ou responsáveis para compreender o contexto deles e entender as potencialidades e dificuldades.
- Pergunte a cada estudante com deficiência qual é a melhor maneira de auxiliá-lo ao perceber uma dificuldade.
- Caso os familiares ou responsáveis façam a entrega de algum documento ou relatório de profissionais de saúde externos, é importante analisar com cautela quais são as orientações desses profissionais sobre as adaptações necessárias para o estudante na escola e em sala de aula.
- Valorize as potencialidades dos estudantes e incentive sua participação de maneira ativa durante as aulas.
- Sempre que possível, planeje as aulas e atividades com acessibilidade, favorecendo a inclusão de todos os estudantes. Além disso, capacite-se de variados formatos sobre inclusão e educação especial e atualize-se para explorar novas metodologias e tecnologias assistivas.
- Atente a possíveis preconceitos ou *bullying* em sala de aula e na escola e não permita qualquer ação capacitista ou prática que diminua as potencialidades do estudante com deficiência. Sugerimos o estudo e o aprofundamento sobre os vieses inconscientes do capacitismo.

Para aprimorar ainda mais a prática pedagógica, seguem dicas para o dia a dia em sala de aula.

- Se houver estudantes surdos ou com deficiência auditiva, ao passar um vídeo em sala, verifique se a resolução está boa, se o áudio está bom. Em alguns casos, é necessário ativar a legenda dos vídeos ou apresentá-lo com Libras.
- Se houver estudantes com deficiência física ou mobilidade reduzida, faça adaptação na organização do espaço da sala de aula para garantir a acessibilidade. Outra possibilidade é ajustar materiais e equipamentos didáticos, como usar pranchetas ou suportes de escrita para estudantes com dificuldade em usar a mesa convencional.
- Se houver estudantes com deficiência intelectual, seja objetivo ao falar e certifique-se de que ele compreendeu a informação. Estimule o estudante a participar ativamente do processo de ensino e aprendizagem, perguntando sobre suas dificuldades e quais recursos podem ajudá-lo.
- Se houver estudantes com cegueira, baixa visão e/ou visão monocular, entregue a ele atividades com uma fonte maior ou diferente do padrão.
- Se houver estudantes com o Transtorno do Espectro Autista, sempre verifique com ele qual recurso atende melhor a suas necessidades, considerando sua condição.
- Se houver estudantes com altas habilidades/superdotação, avalie a necessidade de oferecer conteúdo ou material diferenciado para incentivar seu desenvolvimento contínuo.

Sua dedicação em criar um ambiente inclusivo fará uma grande diferença na trajetória educacional dos estudantes com deficiência.

Dica

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. *Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva*. Brasília, DF: MEC, 2008.

  Essa política, em conformidade com o documento disponível no portal do Ministério da Educação e Cultura (MEC), estabelece as diretrizes fundamentais para a inclusão de estudantes com necessidades educacionais especiais no sistema regular de ensino. Também enfatiza a importância de garantir o acesso, a participação e a aprendizagem de todos os estudantes, independentemente das condições físicas, sensoriais, intelectuais ou múltiplas.

- GUIMARÃES, M. C. A.; BORGES, A. A. P.; VAN PETTEN, A. M. V. N. Trajetórias de alunos com deficiência e as políticas de educação inclusiva: da Educação Básica ao Ensino Superior. *Revista Brasileira de educação especial*, n. 27, 2021. Disponível em: https://tedit.net/b7t7jm. Acesso em: 18 set. 2024.

  No texto, os autores analisam as experiências e os desafios enfrentados por estudantes com deficiência ao longo de sua jornada educacional, desde a Educação Básica até o Ensino Superior, à luz das políticas de inclusão. Esse artigo oferece *insights* interessantes sobre como apoiar efetivamente esses estudantes e implementar práticas inclusivas que promovam a equidade e a continuidade educacional.

5. As avaliações

Conceituamos avaliação não como uma etapa isolada, mas como parte do processo educativo, no qual o professor, os estudantes, outros profissionais da escola e os familiares ou responsáveis legais dos estudantes participam ativamente.

Os vários tipos de avaliação fornecem dados sobre o desempenho dos estudantes. Cada um deles tem características e objetivos pedagógicos distintos, por isso é importante conhecer e aplicar o tipo adequado de avaliação em cada momento do processo educacional. Citaremos alguns exemplos de avaliação para que você os utilize em momento oportuno: diagnóstica, formativa, comparativa, ipsativa e somativa.

A escolha de um instrumento avaliativo deve sempre partir do objetivo do educador em relação ao que se pretende avaliar e sobretudo ao uso que dará aos resultados, pois eles podem servir a mais de um tipo de avaliação.

5.1 O planejamento das avaliações e os tipos de avaliação

Toda avaliação parte de um planejamento prévio, quando são definidos, pelo educador, os critérios avaliativos, geralmente considerando os objetivos de sua avaliação e o conteúdo ou conjunto de competências e habilidades que se pretende avaliar e que estejam em consonância com o currículo.

Portanto, o planejamento da avaliação deve especificar quais critérios/habilidades pretende-se avaliar e pode fazer parte do planejamento anual ou de cada etapa letiva.

5.1.1 Avaliação diagnóstica

Esse tipo de avaliação é realizado no início de um semestre ou ano letivo, ou de uma Unidade ou capítulo do material didático, com o objetivo de identificar o nível de conhecimento e as necessidades de aprendizagem dos estudantes. Tem como principal função mapear conhecimentos prévios, habilidades, dificuldades e interesses pelos temas propostos aos estudantes. Permite que o professor planeje e adapte as próprias estratégias de ensino de acordo com as necessidades específicas de cada turma e de cada estudante, promovendo uma aprendizagem mais personalizada e eficaz. Além disso, a avaliação diagnóstica ajuda a detectar possíveis lacunas no conhecimento dos estudantes, possibilitando intervenções pedagógicas precoces que visam corrigir essas deficiências antes que se tornem obstáculos maiores ao aprendizado. Para que isso ocorra, é necessário haver por parte da escola e, principalmente, dos educadores correções de rumo e criações de estratégias pedagógicas eficazes.

A seguir, citamos 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Testes diagnósticos: testes que avaliam conhecimentos específicos e habilidades dos estudantes em uma variedade de formatos, como perguntas objetivas, questões abertas e problemas de resolução.
- Questionários de autoavaliação: instrumentos com os quais os estudantes refletem sobre as próprias habilidades e conhecimentos. Esses questionários podem incluir perguntas sobre as percepções de pontos fortes e áreas de dificuldade em diversos componentes curriculares.

5.1.2 Avaliação formativa

A avaliação formativa tem como objetivo principal fornecer *feedback* contínuo a cada estudante, possibilitando ajustes imediatos no processo de ensino e aprendizagem. Esse tipo de avaliação tem por objetivo monitorar o progresso dos estudantes ao longo do processo educativo, identificar dificuldades, esclarecer dúvidas e reforçar a compreensão dos conteúdos antes que as dificuldades de aprendizagem se tornem maiores.

A seguir, citamos 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Observações em sala de aula: a observação sistemática das interações e do comportamento dos estudantes durante as atividades de ensino pode fornecer informações valiosas sobre suas habilidades sociais, motivação e compreensão dos conteúdos.
- Diários de reflexão ou de aprendizagem: ferramentas com as quais os estudantes registram as próprias experiências de aprendizagem, reflexões, dúvidas e progressos diários ou semanais.

5.1.3 Avaliação comparativa

A avaliação comparativa envolve a comparação do desempenho de um estudante com o de outros estudantes a partir de critérios preestabelecidos. Tem por objetivo situar o desempenho individual dentro de um contexto maior, identificando tanto quem se destaca quanto aqueles que precisam de apoio adicional. Esse modo de avaliação ajuda a identificar padrões de desempenho e diferenças significativas entre grupos de estudantes, fornecendo dados importantes para a tomada de decisões pedagógicas e políticas educacionais. É comum no Ensino Médio, especialmente em contextos competitivos de vestibulares e avaliações nacionais padronizadas, como o Enem.

Citamos a seguir 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Simulados: testes como o Enem, que avaliam os estudantes em uma variedade de componentes curriculares, fornecendo um panorama do desempenho educacional em nível nacional. Os simulados podem ser organizados com questões de provas aplicadas em anos anteriores.
- *Rankings* de desempenho: listagens que ordenam os estudantes com base nos resultados deles em avaliações específicas. Essa técnica é comum em concursos e vestibulares, que utilizam, por exemplo, escalas de avaliação.

5.1.4 Avaliação ipsativa

A avaliação ipsativa, no contexto educacional, foca o progresso pessoal dos estudantes ao longo do tempo. Além disso, permite a eles perceber melhorias, identificar áreas de crescimento e estabelecer metas pessoais, podendo também ser associada ao desenvolvimento do projeto de vida. Essa abordagem contrasta com as demais avaliações citadas.

A avaliação ipsativa é particularmente motivadora, pois destaca as conquistas individuais e incentiva a autoeficácia e a autoestima, e também detecta lacunas para melhorias.

A seguir, citamos 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Portfólios: coleta de trabalhos anteriores dos estudantes que possam evidenciar suas habilidades e conhecimentos prévios.
- Autoavaliações e avaliações por pares: questionários ou reflexões escritos pelos próprios estudantes avaliando seu progresso em relação a metas estabelecidas, que podem também compor o portfólio do estudante como registro do seu desenvolvimento anual no processo de ensino e aprendizagem.

5.1.5 Avaliação somativa

A avaliação somativa é uma abordagem que visa avaliar a aprendizagem dos estudantes ao final de um período instrucional, como um semestre ou ano letivo. O principal objetivo é determinar se os estudantes alcançaram as metas de aprendizagem estabelecidas e qual nível de competência demonstram em relação aos conteúdos curriculares. Essa avaliação é frequentemente utilizada para atribuir notas, promover ou reter estudantes, fornecendo informações sobre a eficácia do ensino, e tem função regulatória, subsidiando decisões de recuperação, conselhos de classe, reprovações.

São citados, a seguir, 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Provas escritas: são uma maneira tradicional de avaliação, com as quais os estudantes respondem a perguntas ou realizam tarefas em um período determinado.
- Trabalhos escritos: podem incluir ensaios, relatórios de laboratório, resenhas de livros, pesquisas, entre outros.

5.2 Trabalhando o Enem em sala de aula: estratégias para melhorar o desempenho dos estudantes

O Enem é uma das principais portas de entrada para o Ensino Superior no Brasil. Criado em 1998 pelo Ministério da Educação (MEC), avalia a qualidade do Ensino Médio e oferece acesso a programas de ingresso no Ensino Superior, tanto governamentais como de redes privadas. A seguir, apresentamos estratégias específicas para trabalhar o Enem nas aulas de Matemática.

1. Revisão dos conceitos fundamentais: priorizar a revisão de tópicos essenciais que são frequentemente abordados no Enem.

2. Resolução de problemas contextualizados: utilizar problemas que envolvam situações cotidianas para demonstrar a aplicação prática da Matemática.

3. Simulados e exercícios práticos: familiarizar os estudantes com o formato do exame e melhorar as habilidades de gerenciamento de tempo.

4. Uso de tecnologia educacional: incorporar ferramentas tecnológicas para diversificar os métodos de ensino e engajar os estudantes.

6. A coleção

6.1 A abordagem teórico-metodológica e os pressupostos da coleção

A BNCC preconiza que o ensino de Matemática deve se pautar nos contextos integrados pelos estudantes e, sobretudo, no protagonismo de cada um deles no processo de ensino e aprendizagem. Para isso realmente ocorrer em sala de aula, é essencial que as práticas pedagógicas possibilitem a participação e a ação dos estudantes.

É importante ressaltar que a aula tradicional não deve ser descartada, pois também possibilita um tipo de aprendizagem que contempla especificidades de determinados conteúdos e para certos públicos. Entretanto, outras práticas pedagógicas podem e devem ser utilizadas trazendo diferentes tipos de significação para os estudantes.

A BNCC sugere que sejam exploradas a resolução de problemas, o raciocínio lógico-matemático, a modelagem matemática, o pensamento computacional e as investigações em sala de aula. Essas práticas, bem como todo o conteúdo que compõe a BNCC e que é fundamento para a abordagem teórico-metodológica desta coleção, são resultado de pesquisas em educação, Educação matemática e letramento matemático, em estudos sobre culturas, mercado de trabalho e desenvolvimento tecnológico, entre outros temas.

6.2 A estrutura da coleção

Esta coleção é composta de 3 Volumes para os Ensino Médio, organizados em Unidades e capítulos. Os conteúdos são introduzidos tomando como base situações-problema ou textos contextualizados, seguidos pela formalização dos conceitos e boxes e/ou seções que complementam a teoria apresentada e têm como objetivos:

- contribuir para a inserção dos estudantes na sociedade em que vivem, proporcionando a eles conhecimentos básicos de teoria e prática de Matemática;
- incentivar a curiosidade, o interesse e a criatividade dos estudantes para que explorem novas ideias e descubram caminhos para a aplicação dos conceitos adquiridos, auxiliando-os na resolução de problemas;
- desenvolver o senso crítico por meio da leitura e da interpretação matemática de fatos e dados publicados;
- desenvolver hábitos de estudo, rigor, precisão, ordem, clareza, concisão, iniciativa, raciocínio, perseverança, responsabilidade, cooperação, crítica, debate e uso correto da linguagem;
- desenvolver a capacidade de classificar, seriar, relacionar, reunir, representar, analisar, sintetizar, conceituar, deduzir, provar e julgar;
- possibilitar o reconhecimento da inter-relação entre os vários campos da Matemática e desta com outras áreas do conhecimento;
- desenvolver o uso do pensamento e a capacidade de elaborar hipóteses, descobrir soluções, estabelecer relações e tirar conclusões;
- proporcionar atividades lúdicas e desafiadoras, incentivando o gosto pela Matemática e o desenvolvimento do raciocínio.

O texto da obra foi elaborado em linguagem acessível, que "conversa" com o leitor, em interação contínua, para possibilitar aos estudantes que compreendam as definições e as propriedades centrais da Matemática em nível elementar.

Indicamos, a seguir, como as Unidades do Livro do Estudante estão organizadas e detalhamos as funções das seções e dos boxes que compõem os Volumes desta coleção.

As respostas das atividades estão no final do Livro do Estudante. Neste Manual, as respostas também aparecem próximas às atividades, em outra cor, junto de algumas resoluções. As demais resoluções completas e comentadas das atividades propostas estão disponíveis nas *Orientações específicas* deste Manual.

Produções em foco

Essa seção, apresentada no início de cada Volume, tem como objetivo ensinar os estudantes a criar diferentes tipos de mídia. Para desenvolver habilidades práticas e tecnológicas, são apresentados minitutoriais que combinam imagens e textos para orientar na produção de mídias como *podcasts*, vídeos, infográficos, mapas conceituais, entre outros.

Unidade e capítulo

Cada Volume do Livro do Estudante está organizado em 5 Unidades e cada uma delas apresenta-se subdividida em capítulos visando facilitar a aprendizagem. Se considerar oportuno, você pode inverter a ordem das Unidades ou de conteúdos específicos, desde que a reorganização tenha sequência lógica e considere o nível de complexidade de cada um deles. Você pode, por exemplo, solicitar aos estudantes que façam uma atividade

proposta em um boxe ou uma seção para avaliação de conhecimentos prévios ou como incentivo para estudos posteriores.

Cada Unidade é iniciada com uma abertura, em uma dupla de páginas, com uma ou mais imagens e textos relacionados aos conteúdos que serão abordados. Na maioria das vezes, a abertura remete aos TCTs e aos temas interdisciplinares que despertam a curiosidade dos estudantes, apresentando assuntos para debates e atividades que contribuem para a formação integral deles por promover o desenvolvimento das habilidades de interpretação e argumentação.

Nas *Orientações específicas* deste Manual há indicações de como conduzir o trabalho com as aberturas; no entanto, os temas propostos possibilitam diversas abordagens envolvendo professores de outros componentes curriculares, os familiares ou responsáveis e a comunidade escolar. Explore as aberturas de acordo com as características da turma.

Atividades resolvidas e Atividades

As atividades presentes nesta coleção são variadas e apresentadas sequencialmente em cada capítulo, em gradação de dificuldade, para que os estudantes apliquem os conteúdos estudados. As atividades e os problemas propostos visam conduzir os estudantes à compreensão de conceitos e propriedades, sem, contudo, negligenciar o desenvolvimento das técnicas de cálculo. Estas, à medida que são abordadas, são aplicadas na resolução de problemas.

Também são propostas atividades mais desafiadoras, bem como para resolução e elaboração de problemas, uso de tecnologias digitais e troca de ideias, opiniões e argumentações entre os estudantes. Muitas atividades são contextualizadas e exploram situações do cotidiano dos estudantes. Elas os incentivam a utilizar diferentes estratégias de resolução e registro e, também, diversos materiais, como instrumentos de medição, instrumentos de construção geométrica, calculadora e outros recursos tecnológicos que os auxiliam a compreender conceitos e adquirir novos conhecimentos.

Experimente

Seção dedicada a atividades práticas que envolvem o uso de tecnologias digitais. Por meio de tutoriais passo a passo, os estudantes são orientados a utilizar ferramentas tecnológicas específicas para desenvolver habilidades importantes.

Cada atividade é apresentada de forma objetiva e clara, visando não só a familiarização dos estudantes com as tecnologias, mas também a aplicação desses recursos no estudo da Matemática.

Interligando

Essa seção visa promover a interdisciplinaridade, conectando a Matemática com outras áreas do conhecimento ou com diferentes temas dentro da própria Matemática. Para isso, apresenta textos, imagens e atividades que exploram essas conexões, permitindo aos estudantes verem a Matemática em contextos variados, alguns dos quais se relacionam aos TCTs e a questões relevantes e atuais.

Educação financeira

A Educação financeira é trabalhada nessa seção de modo contextualizado, com temas de interesse dos estudantes conectados a situações reais e relevantes do dia a dia. Para isso, a seção utiliza uma combinação de textos, imagens, gráficos e tabelas para explicar conceitos financeiros, além de propor atividades que estimulam a aplicação prática do que foi aprendido. Os TCTs *Educação Fiscal*, *Trabalho* e *Educação para o Consumo* são explorados para fornecer uma visão ampla e crítica da gestão financeira pessoal e suas implicações sociais.

Projeto

Essa seção, que ocorre uma vez em cada Unidade, propõe projetos que incentivam os estudantes a participarem de ações na comunidade, conectando o trabalho pedagógico aos TCTs e aos ODS.

Cada projeto é apresentado por meio de situações-problema que desafiam os estudantes a aplicar seus conhecimentos e habilidades de maneira prática. Além disso, a seção frequentemente sugere ou utiliza uma das mídias apresentadas na seção *Produções em foco*, promovendo o uso criativo e eficiente da tecnologia.

Boxes

Os boxes desta coleção são organizados para complementar e enriquecer o conteúdo principal com diferentes objetivos.

- ***Observação***: apresenta informações acessórias e complementares ao texto principal.
- ***Pense nisto***: desperta a curiosidade dos estudantes ou aprofunda conteúdos específicos com questionamentos que possam ser discutidos em dupla ou grupos, incentivando a troca de ideias entre os estudantes.
- ***Dica***: apresenta sugestões complementares ao conteúdo, podendo incluir indicações de *sites*, textos, *podcasts*, entre outros recursos.
- ***História da Matemática***: tem o objetivo de apresentar textos e informações relacionados a esse tema, ilustrando a construção do conhecimento com exemplos de problemas históricos ou curiosidades.

Viralize!

Seção encontrada ao final de cada Unidade com textos de diferentes mídias que abordam TCTs, além de questões relacionadas a ética e cidadania. A intenção é incentivar os estudantes a refletirem criticamente sobre temas atuais e de grande relevância social. Há também questões de interpretação, opinião pessoal com argumentação e proposta de pesquisa.

Para fundamentar saberes

Seção que está presente ao final de cada Unidade e é dedicada ao aprofundamento e à consolidação dos conteúdos trabalhados, por meio de questões autorais e de provas oficiais que estimulam o raciocínio crítico e a capacidade de análise dos estudantes.

Perguntas para autoavaliação fazem parte dessa seção com o objetivo de promover a reflexão dos estudantes sobre o processo de aprendizagem, englobando tanto os conhecimentos adquiridos quanto aspectos atitudinais e socioemocionais.

6.3 Sugestões de cronogramas para a coleção

Sugerimos que o professor que vai conduzir as aulas com esta coleção tenha, prioritariamente, formação disciplinar em Matemática. Em composição com esse professor, outros podem e devem ser convidados a trabalhar coletivamente nas aulas interdisciplinares.

Para um bom planejamento e execução desse trabalho coletivo, é importante que os professores envolvidos planejem juntos, em cada oportunidade, o cronograma de atuação e como será o papel de cada um deles no decorrer das aulas.

Para colaborar com o planejamento de seu trabalho ao utilizar cada Volume desta coleção, apresentamos uma sugestão de distribuição dos conteúdos a ser organizada em cronogramas bimestrais, trimestrais e semestrais. No entanto, você pode organizar os capítulos e as Unidades seguindo critérios de seleção dos temas de acordo com as necessidades da turma e levando em conta a carga horária semanal do componente curricular, as propostas curriculares do estado onde se situa a escola e o projeto pedagógico desta instituição.

Ao longo do ano letivo, também é importante considerar a possibilidade e a necessidade de replanejamento, tendo em conta tanto o desenvolvimento individual e coletivo dos estudantes quanto os resultados das avaliações aplicadas. Desse modo, torna-se mais factível o planejamento das aulas considerando a realidade dos estudantes, os conhecimentos prévios deles e as eventuais necessidades de recuperação de aprendizagens antes de seguir com determinado estudo.

Para a elaboração da sugestão de cronograma a seguir, foram consideradas 40 semanas letivas, conforme previsto pela Lei Federal n. 13.415 de 2017.

Volume 1

<table>
<tr><th colspan="2">Unidade e capítulo</th><th colspan="4">Sugestão de cronograma</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 1: Conjuntos e conjuntos numéricos</td><td>Capítulo 1: Conjuntos</td><td>Semanas 1 e 2</td><td rowspan="2">1º bimestre</td><td rowspan="3">1º trimestre</td><td rowspan="6">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Conjuntos numéricos</td><td>Semanas 3 a 6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidade 2: Funções de 1º grau e de 2º grau</td><td>Capítulo 3: Funções</td><td>Semanas 7 a 9</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Função afim</td><td>Semanas 10 a 13</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 5: Função quadrática</td><td>Semanas 14 a 18</td><td rowspan="4">2º trimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidade 3: Semelhança e trigonometria no triângulo retângulo</td><td>Capítulo 6: Semelhança e congruência de figuras planas</td><td>Semanas 19 a 22</td></tr>
<tr><td>Capítulo 7: Trigonometria no triângulo retângulo</td><td>Semanas 23 e 24</td><td rowspan="3">3º bimestre</td><td rowspan="6">2º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 8: Área de figuras planas</td><td>Semanas 25 a 29</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 4: Circunferência trigonométrica e leis dos senos e dos cossenos</td><td>Capítulo 9: Circunferência trigonométrica</td><td>Semanas 30 a 33</td><td rowspan="3">3º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 10: Trigonometria em triângulos quaisquer</td><td>Semanas 34 e 35</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 5: Estatística básica</td><td>Capítulo 11: Noções básicas de Estatística</td><td>Semanas 36 e 37</td></tr>
<tr><td>Capítulo 12: Representações gráficas</td><td>Semanas 38 a 40</td></tr>
</table>

Volume 2

<table>
<tr><th colspan="2">Unidade e capítulo</th><th colspan="4">Sugestão de cronograma</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 1: Funções exponenciais e funções logarítmicas</td><td>Capítulo 1: Função exponencial</td><td>Semanas 1 a 4</td><td rowspan="3">1º bimestre</td><td rowspan="3">1º trimestre</td><td rowspan="5">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Função logarítmica</td><td>Semanas 5 a 8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 2: Matrizes e sistemas lineares</td><td>Capítulo 3: Matrizes</td><td>Semanas 9 e 10</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Sistemas lineares</td><td>Semanas 11 a 15</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidade 3: Geometria espacial</td><td>Capítulo 5: Noções de Geometria espacial de posição</td><td>Semanas 16 a 18</td><td rowspan="2">2º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 6: Prismas e pirâmides</td><td>Semanas 19 a 23</td></tr>
<tr><td>Capítulo 7: Cilindros, cones e esferas</td><td>Semanas 24 a 30</td><td rowspan="2">3º bimestre</td><td rowspan="4">2º semestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 4: Análise de medidas e representações gráficas</td><td>Capítulo 8: Medidas em Estatística</td><td>Semanas 31 a 33</td><td rowspan="3">3º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 9: Quartis, percentis e box-plot</td><td>Semanas 34 e 35</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 5: Funções trigonométricas</td><td>Capítulo 10: Fenômenos periódicos e função seno</td><td>Semanas 36 a 38</td></tr>
<tr><td>Capítulo 11: Função cosseno</td><td>Semanas 39 e 40</td></tr>
</table>

Volume 3

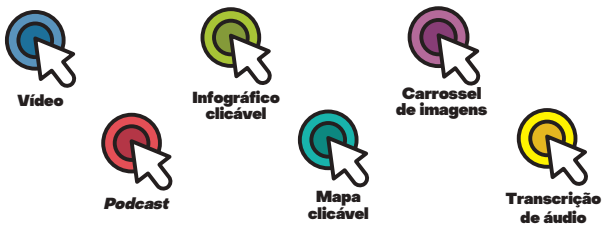
<table>
<tr><th colspan="2">Unidade e capítulo</th><th colspan="4">Sugestão de cronograma</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 1: Sequências e Matemática financeira</td><td>Capítulo 1: Sequências e progressões</td><td>Semanas 1 a 4</td><td rowspan="2">1º bimestre</td><td rowspan="3">1º trimestre</td><td rowspan="5">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Matemática comercial e financeira</td><td>Semanas 5 a 9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 2: Grandezas e medidas</td><td>Capítulo 3: Sistema Internacional de Unidades</td><td>Semanas 10 a 12</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Outras unidades de medida</td><td>Semanas 13 a 15</td><td rowspan="3">2º trimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 3: Pensamento computacional</td><td>Capítulo 5: Algoritmos e fluxogramas</td><td>Semanas 16 a 19</td></tr>
<tr><td>Capítulo 6: Noções de programação</td><td>Semanas 20 a 22</td><td rowspan="3">3º bimestre</td><td rowspan="4">2º semestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 4: Combinatória e probabilidade</td><td>Capítulo 7: Análise combinatória</td><td>Semanas 23 a 26</td></tr>
<tr><td>Capítulo 8: Probabilidade</td><td>Semanas 27 a 30</td><td rowspan="3">3º trimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidade 5: Geometria analítica, transformações geométricas e ladrilhamento</td><td>Capítulo 9: Noções de Geometria analítica</td><td>Semanas 31 a 34</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 10: Transformações geométricas no plano</td><td>Semanas 35 a 38</td></tr>
<tr><td>Capítulo 11: Ladrilhamento do plano</td><td>Semanas 39 e 40</td></tr>
</table>

6.4 Os Objetos Educacionais Digitais da coleção

Utilizar linguagens e tipos de mídia é fundamental para alcançar diversos públicos, pois cada estudante tem particularidades e maneiras de aprender melhor. Enquanto alguns assimilam informações de maneira mais produtiva por meio de vídeos, outros podem tirar melhor proveito de infográficos ou mapas interativos. Essa variedade também pode contribuir para sanar lacunas de conhecimentos prévios e apoiar diferentes modos de aprendizagem, ajudando a tornar o aprendizado mais acessível e significativo.

Nesse sentido, os Objetos Educacionais Digitais (OEDs) desta coleção podem ser utilizados com a finalidade de retomar, aprofundar, complementar ou apresentar novos conteúdos e temas, promovendo a compreensão e oferecendo várias maneiras de interagir com o livro. Além disso, alguns exemplos apresentados de modo mais simples também podem auxiliar na aprendizagem e respeitar as diversas trajetórias e perfis de cada estudante.

Nesta coleção constam vídeos, *podcasts*, infográficos clicáveis, mapas clicáveis e carrossel de imagens. Esses OEDs são indicados no sumário do Livro do Estudante e também nas páginas sugeridas para o trabalho, permitindo sua utilização de maneira integrada ao conteúdo.



7. Referências complementares para aprofundamento

Todos os *sites* foram acessados em 9 de setembro de 2024.

7.1 Livros para aprofundamento e formação continuada

- *A Matemática no Ensino Médio*, de Elon Lages Lima, Paulo César Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César de Oliveira Morgado. v. 1-4. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

  Nos Volumes de 1 a 3, são apresentados, de modo aprofundado, os principais conteúdos estudados em Matemática no Ensino Médio; no Volume 4 são apresentadas as soluções de todos os exercícios propostos nos Volumes anteriores.

- *Análise combinatória e probabilidade*, de Paulo Cezar Pinto Carvalho, Augusto César de Oliveira Morgado, Pedro Fernandez e João Bosco Pitombeira. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

  O livro aborda os princípios fundamentais da análise combinatória e da Probabilidade, oferecendo uma base sólida para o ensino desses tópicos no Ensino Médio.

- Coleção do Professor de Matemática IMPA/VITAE, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

  A coleção oferece um excelente material de consulta, aprofundamento e pesquisa para o professor de Matemática do Ensino Médio.

- *Como educar crianças anticapacitistas*, de Mariana Rosa e Karla Garcia Luiz. 1. ed. Florianópolis: Ed. das autoras, 2023.

  O livro oferece orientações práticas e teóricas para educar crianças e jovens de maneira inclusiva e anticapacitista, promover a igualdade e o respeito às diferenças e criar um ambiente de aprendizado mais justo e acolhedor para todos os estudantes.

- *Construções geométricas*, de Eduardo Wagner. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

  Métodos clássicos e modernos de construções geométricas são apresentados no livro proporcionando ferramentas práticas para ensinar Geometria de maneira visual e interativa.

- *Coordenadas no espaço*, de Elon Lages Lima. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

  O livro apresenta uma introdução detalhada ao sistema de coordenadas no espaço, facilitando a compreensão de conceitos tridimensionais essenciais para o Ensino Médio.

- *Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios*, de Elon Lages Lima. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

  O livro oferece uma abordagem completa sobre coordenadas no plano, incluindo a resolução detalhada de exercícios, ideal para professores que buscam aprofundar o conhecimento dos estudantes.

- *Dificuldades específicas de aprendizagem*: ideias para trabalhar com dislexia, discalculia, disgrafia, TDAH, TEA, síndrome de Asperger e TOC, de Diana Hudson. Tradução de Guilherme Suma. Petrópolis, RJ: Vozes, 2019.

  O livro traz a descrição e análise de diversos tipos de dificuldades de aprendizagem, auxiliando na conscientização e formação de educadores a respeito desse tema e oferecendo uma série de atividades que podem ser trabalhadas com os estudantes.

- *Introdução à Geometria espacial*, de Paulo Cezar Pinto Carvalho. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

  O livro apresenta uma introdução abrangente à Geometria espacial, cobrindo conceitos fundamentais e aplicações práticas.

- *Introdução à lógica*, de Cezar A. Mortari. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

  O livro aborda inferência, dedução, indução e outras conceituações e mostra a diferença entre a lógica clássica e a não clássica.

- *Introdução às técnicas de demonstração na Matemática*, de John A. Fossa. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O autor convida o leitor a "mergulhar" no caminho das argumentações em Matemática.

- *Logaritmos*, de Elon Lages Lima. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

  Nesse livro, o autor oferece uma explicação clara e concisa sobre logaritmos, facilitando o ensino desse conteúdo no Ensino Médio.

- *Medida e forma em Geometria*, de Elon Lages Lima. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

  A relação entre medida e forma na Geometria é abordada nesse livro, fornecendo uma base teórica e prática para professores.

- *Meu professor de Matemática e outras histórias*, de Elon Lages Lima. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

  Histórias e experiências do autor com a Matemática são relatadas no livro, oferecendo uma perspectiva inspiradora e motivadora.

- *Os Elementos de Euclides*, traduzido por Irineu Bicudo. 1. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

  Trata-se da primeira tradução completa do texto grego para a Língua Portuguesa. A obra da Antiguidade clássica contém definições, postulados, demonstrações de 465 proposições em forte sequência lógico-dedutiva, referentes à Geometria plana e à Geometria espacial. Há também capítulos destinados à teoria dos números.

- *Progressões e Matemática financeira*, de Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado e Sheila Zani. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

  O livro aborda progressões aritméticas e progressões geométricas, além de conceitos de Matemática financeira, proporcionando uma aplicação prática dos conteúdos matemáticos no Ensino Médio.

- *Trigonometria e números complexos*, de Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado e Manfredo Perdigão do Carmo. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

  O livro oferece uma abordagem detalhada sobre Trigonometria e números complexos com foco em aplicações práticas e teóricas.

7.2 História da Matemática

- *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática, de Gilberto G. Garbi. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

  A obra faz um relato da construção do conhecimento matemático em 4 milênios, destacando a vida e as contribuições de grandes matemáticos, a Matemática contemporânea e as mulheres da Matemática.

- *Cinema e História da Matemática*: entrelaços possíveis, de Romélia Mara Alves Souto. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

  A autora discute relações possíveis entre o cinema e a História da Matemática, considerando que tais relações podem construir um ambiente favorável à aprendizagem.

- Coleção História da Matemática para professores.

  Com os dois primeiros livros lançados em 2009, a coleção visa à divulgação e ao uso das produções acadêmicas provenientes de estudos e pesquisa na História da Matemática.

  Em particular, destacamos: o livro *A descoberta do teorema de Pitágoras*, de Sofia Cardoso Marques (1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011), no qual a autora descreve o resultado e as aplicações desse teorema em algumas civilizações antigas, contextualizando-o na cultura e nos conhecimentos dessas civilizações; e o livro *Matemática e medida*: três momentos históricos, de John A. Fossa (org.) (1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009), que apresenta aspectos histórico-epistemológicos importantes para o desenvolvimento de alguns conceitos em Matemática, como medidas.

- Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.

  Essa coleção procura dar ao leitor uma visão abrangente da história da descoberta da Matemática. Está dividida em 6 Volumes, estruturados em tópicos curtos, denominados cápsulas, nos quais é abordado algum assunto ligado à história da criação e do desenvolvimento de um grande tema matemático.

  Entre os Volumes, destacamos: *Números e numerais*, de Bernard H. Gundlach (1. ed. São Paulo: Atual, 1992); *Geometria*, de Howard Eves (1. ed. São Paulo: Atual, 1992); e *Trigonometria*, de Edward S. Kennedy (1. ed. São Paulo: Atual, 1992).

- *História da Matemática*, de Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

  Nessa edição, destacamos os capítulos "Legados do século vinte" e "Tendências recentes", que discorrem, entre outros assuntos, sobre o último teorema de Fermat.

- *História da Matemática*, de Howard Eves. 1. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

  Na introdução de alguns capítulos, encontramos um relato do panorama cultural e histórico da época em questão.

- *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, de Tatiana Roque. 1. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

  O livro aborda diferentes sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Antiguidade até o século XIX, mostrando que práticas diversas sempre coexistiram na busca por soluções diferentes para problemas semelhantes.

- *O último teorema de Fermat*, de Simon Singh. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

  O livro conta a história da busca épica para resolver um dos maiores enigmas da Matemática de todos os tempos.

7.3 Ensino e aprendizagem em Matemática e Educação Matemática

- *A arte de resolver problemas*, de George Pólya. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

  O autor analisa nesse livro métodos criativos de resolução de problemas, revela as 4 etapas básicas de uma resolução e sugere estratégias a serem desenvolvidas.

- Coleção Tendências em Educação matemática.

  A coleção é voltada para profissionais da área que buscam refletir sobre Educação matemática, a qual está embasada no princípio de que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões. A coleção conta com diversas obras, entre as quais destacamos: *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos estudantes, de Helena Noronha Cury (2. ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2007), em que a autora defende a ideia de que a análise de erros é uma abordagem de pesquisa e também uma possibilidade metodológica se os estudantes forem levados a questionar e refletir sobre as próprias soluções; *Informática e Educação matemática*, de Marcelo de Carvalho Borba e Miriam Godoy Penteado (5. ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2007), com apresentação de exemplos de uso da informática com estudantes e professores em que se debatem temas ligados às políticas governamentais para a informática educativa e

outras questões epistemológicas e pedagógicas; *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*, de Vanessa Sena Tomaz e Maria Manuela Martins Soares David (1. ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2008), no qual, pensando em uma formação integral dos estudantes, os autores ressaltam a importância de tratar o ensino da Matemática levando em conta contextos sociais e a visão interdisciplinar da relação ensino-aprendizagem.

- *Educação Matemática*: da teoria à prática, de Ubiratan D'Ambrosio. 23. ed. Campinas: Papirus, 2014.

  O autor discute inovações na prática docente, propondo reflexões sobre o ensino de Matemática.

- *Educação Matemática*: pesquisa em movimento, de Maria Aparecida Viggiani Bicudo e Marcelo de Carvalho Borba (org.). 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

  Esse livro é fruto dos trabalhos de investigação na área da Educação matemática desenvolvidos por professores pesquisadores do programa de pós-graduação em Educação Matemática da Unesp, do *campus* de Rio Claro (SP). Divide-se em 16 capítulos, escritos por vários professores, que expõem ideias, dúvidas, questionamentos e relatos de experiências na área.

- *Educar por competências*: o que há de novo?, de José Gimeno Sacristán e outros. 1. ed. Porto Alegre: Artmed, 2011.

  A obra apresenta discussões sobre a educação por competências, incluindo um capítulo destinado à avaliação de aprendizagens.

- *Ensinando Matemática para adolescentes*, de Paul Chambers e Robert Timlin. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

  A obra traz sugestões de uso de recursos, planos de aula e discute como avaliar o progresso do estudante de maneira efetiva.

- *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade, de Ubiratan D'Ambrosio. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

  Essa obra apresenta e discute a Etnomatemática levando em conta a realidade sociocultural do estudante, o ambiente em que vive e o conhecimento que traz de casa.

- *Investigações matemáticas na sala de aula*, de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

  Nessa obra, os autores portugueses propõem uma reflexão sobre atividades de investigação em Matemática, suas vantagens e dificuldades.

- *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio, de Estela Kaufman Fainguelernt e Katia Regina Ashton Nunes. 1. ed. Porto Alegre: Penso, 2012.

  Os autores buscam incentivar o professor a procurar novas ideias para uso em sala de aula que o incentivem e também motivem os estudantes para a aprendizagem em Matemática no Ensino Médio.

- *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador, de Jo Boaler. Porto Alegre: Penso, 2018.

  A autora é precursora de uma abordagem que busca incentivar o potencial dos estudantes mediante metodologias ativas de aprendizagem e criatividade.

- *Modelagem em Educação matemática*, de João Frederico da Costa de Azevedo Meyer, Ademir Donizeti Caldeira e Ana Paula dos Santos Malheiros. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

  Os autores desse livro levam o leitor a refletir sobre aspectos da modelagem e suas relações com a Educação matemática.

- *Práticas de modelagem matemática na Educação matemática*, de Lourdes Maria Werle de Almeida, Jussara de Loiola Araújo e Eleni Bisognin. 1. ed. Londrina: Eduel, 2011.

  As autoras descrevem experiências em sala de aula e resultados de pesquisas com modelagem matemática.

- *Tecnologias digitais e Educação matemática*, de Marcelo C. Borba e Aparecida Chiari (org.). 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

  Os autores exploram a importância e o potencial das tecnologias digitais para educação e aprendizagens em Matemática.

7.4 Avaliação

- *A avaliação da aprendizagem escolar*, de Celso Antunes. 10. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012. (Coleção Na sala de aula).

  A obra apresenta sugestões de práticas, expõe princípios e debate estratégias e modelos avaliativos.

- *As competências para ensinar no século XXI*: a formação de professores e o desafio da avaliação, de Philippe Perrenoud e Monica Gather Thurler. 1. ed. São Paulo: Penso, 2002.

  O livro traz para o leitor os textos nos quais os autores suíços apoiaram suas falas na vinda ao Brasil, em 2001, em conferências que contavam com a participação dos educadores brasileiros Lino de Macedo, Nilson José Machado e Cristina D. Allessandrini.

- *Avaliação de aprendizagem na escola*: estudos e proposições, de Cipriano Carlos Luckesi. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

  A obra é constituída por alguns artigos escritos pelo autor que posicionam a avaliação como um ato seletivo e inclusivo.

- *Avaliação em Matemática*: pontos de vista dos sujeitos envolvidos na Educação Básica, de César Augusto do Prado Moraes. 1. ed. Jundiaí: Paco, 2012.

  O livro investiga as concepções de avaliação em Matemática na Educação Básica, analisando também os processos avaliativos usados pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e pelo Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp).

- *Avaliação escolar*: vários enfoques e uma só finalidade, melhorar a aprendizagem, de Adriana Patrício Delgado *et al*. 1. ed. Jundiaí: Paco, 2015.

  A obra traz parte da produção acadêmica sobre avaliação, contribuindo para a formação docente.

- *Educação*: competência e qualidade, de Nilson José Machado. 2. ed. São Paulo: Escrituras, 2010. (Coleção Ensaios transversais).

  Nesse livro, o autor convida a uma reflexão sobre a formação na Educação Básica, o significado da qualidade no terreno educacional e as competências a serem desenvolvidas.

7.5 Recursos educacionais digitais

O portal principal da coleção *M3 Matemática Multimídia* contém recursos educacionais em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp-SP. Os recursos podem ser buscados pelas mídias (experimentos, vídeos, *softwares* ou áudios) ou pelos temas centrais (análise de dados e Probabilidade, Geometria e medidas ou números e funções). Disponível em: https://tedit.net/jb7qn1.

7.6 Sugestões de revistas

- *Educação Matemática em Revista*

  É uma publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) que aborda assuntos de interesse para o professor e pesquisador de Matemática. Para os interessados, é possível conseguir mais informações no *site* disponível em: https://tedit.net/6uycfr.

- *Revista do Professor de Matemática* (RPM)

  Publicação destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Disponível em: https://tedit.net/rvit8y.

- *Nova Escola*

  A revista auxilia o educador na complexa tarefa de ensinar. Há reflexões e artigos sobre temas atuais de educação, bem como propostas e relatos de atividades em sala de aula. Disponível em: https://tedit.net/tbxqam.

7.7 Sugestões de *sites*

- Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática João Affonso Pascarelli. Disponível em: https://tedit.net/frda0y.

  Nesse *site*, é possível participar de cursos para professores destinados a atualização profissional, oficinas, palestras e seminários.

- Laboratório de Ensino de Matemática (Unicamp). Disponível em: https://tedit.net/wl8lkg.

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática da Unicamp-SP (IMECC – Unicamp) com indicações de cursos, seminários, eventos e publicações que incentivam o aperfeiçoamento de professores da Educação Básica.

- Laboratório de Matemática – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (Unesp). Disponível em: https://tedit.net/rqasoz.

  No *site*, é possível encontrar ideias de jogos para o ensino da Matemática desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

- Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: https://tedit.net/r0gova.

  É o *site* oficial da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), sob responsabilidade do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa), situado no Rio de Janeiro. Estão disponíveis para *download* as provas com gabaritos de vários anos da OBM, nos diversos níveis.

- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Disponível em: https://tedit.net/rvlj0j.

  Nesse *site* é possível obter as provas resolvidas das edições anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Além disso, há um banco de questões separadas por níveis.

  O *site* também conduz a um canal chamado Portal de Matemática OBMEP, no qual são disponibilizadas videoaulas com professores selecionados, voltadas para estudantes e professores, além de conteúdos interativos, vídeos e materiais que podem ser baixados.

- Mathema. Disponível em: https://tedit.net/6uno05.

  Nesse *site*, o professor encontra informações sobre o Ensino Médio, cursos de aperfeiçoamento profissional, sugestões de livros, revistas, *sites*, *softwares* e vídeos que visam melhorar a prática docente, bem como reflexões sobre temas relacionados à Educação matemática.

- Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponível em: https://tedit.net/0sb2ne.

  No *site* há indicação de eventos regionais, nacionais e até internacionais. Também estão listados grupos de pesquisa de universidades em todo o Brasil e laboratórios de Educação matemática de todas as regiões.

7.8 Questões curiosas de Matemática, jogos e desafios de raciocínio quantitativo

- *Conexões matemáticas educacionais*: aprendendo novas e explorando antigas, de Ruy Madsen Barbosa. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

  O livro explora brincadeiras com retângulos mágicos, quadrados "bem comportados", cubos, policubos e dominós, estabelecendo conexões com teoria dos números, análise combinatória, etc.

- *Matemática e Arte*, de Dirceu Zaleski Filho. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

  O autor propõe aproximar a Matemática e a Arte no ensino, analisando e integrando a História da Matemática e a História da Arte e sugerindo novas possibilidades de trabalho em sala de aula.

- *Revisitando conexões matemáticas com brincadeiras, explorações e materiais pedagógicos*, de Ruy Madsen Barbosa. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

  O autor elege objetos geométricos como pontos de partida para atividades e reflexões.

7.9 Filmes sobre Matemática e personalidades da área

- *O homem que viu o infinito* (2015)

  O filme conta a história de Snirivasa Ramanujan, matemático indiano de origem simples, mas considerado um dos maiores matemáticos do século XX.

- *O jogo da imitação* (2015)

  Nesse filme, ambientado durante a Segunda Guerra Mundial, Alan Turing e equipe auxiliam o governo britânico a desvendar um código secreto nazista, mostrando a origem dos computadores e a aplicação da Matemática na criptografia.

- *Uma mente brilhante* (2001)

  O filme conta a história de John Nash, famoso matemático americano que sofria de esquizofrenia. Nash é responsável por diversas descobertas com aplicações na Economia, que lhe renderam um prêmio Nobel.

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS

Introdução ao Volume 2

Este Volume é composto de 11 capítulos, organizados em 5 Unidades, e aborda diversas habilidades e competências específicas da Matemática e suas Tecnologias previstas para o Ensino Médio na BNCC, bem como competências gerais da Educação Básica e Temas Contemporâneos Transversais.

Na Unidade **1**, "Funções exponenciais e funções logarítmicas", são abordadas as equações e funções exponenciais e logarítmicas, suas propriedades e representações gráficas.

A Unidade **2**, "Matrizes e sistemas lineares", trata de matrizes, destacando sua aplicação na representação de dados em tabelas, bem como as propriedades e operações relacionadas a elas. Além disso, são exploradas as equações lineares, os sistemas lineares e os determinantes, com os métodos de resolução associados.

Na Unidade **3**, "Geometria espacial", exploram-se os conceitos básicos de ponto, reta e plano, os postulados da Geometria euclidiana espacial e a lógica por trás da Geometria. Têm-se a identificação e a descrição das relações entre retas e planos, o cálculo de medidas de distância e o trabalho com sólidos geométricos, incluindo prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. A Unidade também explora o conceito de sólidos semelhantes e medidas de área da superfície e de volume dos sólidos geométricos estudados.

Na Unidade **4**, "Análise de medidas e representações gráficas", trata-se das diferentes medidas de tendência central e de dispersão, além da representação gráfica em *box-plot*.

Na Unidade **5**, "Funções trigonométricas", trata-se de fenômenos periódicos modelados por funções trigonométricas, em especial as funções seno e cosseno.

O estudo de diferentes conteúdos, objetos do conhecimento, habilidades e competências permite o desenvolvimento de distintas abordagens nas aulas e, de maneira análoga, exige uma gama diversificada de conhecimentos prévios dos estudantes. Assim, apresentamos a seguir orientações didáticas e abordagens específicas para o Volume, de modo a nortear seu trabalho nas aulas.

Para além dessas sugestões, conforme exposto nas *Orientações gerais* deste Manual, é importante organizar previamente os diferentes modelos avaliativos – no início de cada bloco pedagógico (Unidade ou capítulo, por exemplo), durante o desenvolvimento dos blocos e ao término dos estudos – e fazer uso dos resultados para o planejamento e replanejamento das aulas e das metodologias de ensino.

Por exemplo, para diagnosticar tanto as aprendizagens já efetivadas quanto aquelas que precisam ser retomadas e/ou recuperadas, mobilize os conhecimentos prévios dos estudantes no início de um bloco pedagógico. Após o estudo de um tópico, seção ou capítulo, o estudante, individual ou coletivamente, e mediado por você, pode mensurar as aprendizagens e verificar como está desenvolvendo as habilidades relacionadas aos conteúdos e objetos do conhecimento mobilizados. Além disso, ao término da Unidade ou no decorrer do estudo dela, sugira as atividades autorais e as questões de exames de larga escala apresentadas na seção "Para fundamentar saberes" para mobilizar e avaliar os diversos conteúdos e replanejar as aulas e as metodologias de ensino.

Unidade 1: Funções exponenciais e funções logarítmicas

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG02 e CG04.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT01, CEMAT03 e CEMAT04.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT101, EM13MAT304, EM13MAT305, EM13MAT315, EM13MAT403 e EM13MAT404.

Habilidades de outras áreas do conhecimento:
EM13LP33, EM13CNT102 e EM13CNT302.

Temas Contemporâneos Transversais:
Ciência e Tecnologia; *Saúde*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Analisar e interpretar o gráfico de uma função para extrair informações significativas a seu respeito.
- Reconhecer exemplos e resolver exercícios em que as funções estejam contextualizadas em situações do cotidiano ou aplicadas a outras áreas do conhecimento.
- Resolver equações exponenciais em situações-problema com ou sem o uso de logaritmos.
- Relacionar o estudo da função exponencial ao conceito de meia-vida aplicado ao uso de medicamentos e à radioatividade.
- Reconhecer a importância histórica dos logaritmos como instrumento de cálculo.
- Reconhecer a importância da função logarítmica na Matemática e em outras áreas do conhecimento, como na descrição de fenômenos naturais como os terremotos.
- Reconhecer as vantagens do uso de uma escala logarítmica com base no texto sobre intensidade de sons.
- Utilizar corretamente a calculadora científica para fazer cálculos de logaritmos e potências.
- Reconhecer a função logarítmica como inversa da função exponencial.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

O texto apresentado na abertura da Unidade favorece o trabalho com o TCT *Saúde* e com a competência específica CEMAT01

da área de Matemática e suas Tecnologias, abordando a temática do rápido crescimento do número de casos da covid-19, desde que os primeiros casos foram notificados, e a relação da pandemia com a Matemática.

Desenvolva essa temática em sala de aula utilizando exemplos práticos do crescimento exponencial de casos da covid-19, comparando com outros tipos de crescimento, como o linear. Utilize gráficos e dados reais para ilustrar a diferença entre esses tipos de crescimento.

Aproveite a oportunidade para demonstrar, por meio de modelos matemáticos, como a vacinação contribui para a criação de imunidade coletiva, diminuindo a quantidade de novos casos e prevenindo surtos futuros.

Na atividade **2**, comente com os estudantes que a participação popular nos testes clínicos das vacinas contra a covid-19 foi fundamental para o sucesso de seu desenvolvimento. Sem a contribuição de milhares de voluntários, seria impossível avaliar a segurança e a eficácia das vacinas em um período tão curto. A inclusão de voluntários de diferentes idades, etnias e condições de saúde garantiu que os dados coletados fossem representativos da população, aumentando a confiabilidade dos resultados. Além disso, a disposição de muitas pessoas para participar dos testes permitiu que os ensaios clínicos avançassem rapidamente, acelerando o processo de aprovação e distribuição das vacinas.

Destaque o aspecto colaborativo do desenvolvimento científico. É importante ressaltar que essa característica do trabalho científico vai muito além do desenvolvimento da vacina contra a covid-19. O progresso na ciência frequentemente é resultado de esforços conjuntos, em que estudiosos de diferentes áreas e locais do mundo estabelecem parcerias para avançar no conhecimento.

Comente com os estudantes que os cientistas costumam colaborar entre si compartilhando dados, métodos e resultados. Eles publicam seus achados em revistas científicas para que sejam avaliados por outros especialistas da respectiva área, um processo conhecido como revisão por pares. Esse mecanismo de avaliação é fundamental para garantir a qualidade, a precisão e a credibilidade das descobertas científicas.

Capítulo 1

Na introdução deste capítulo, é apresentada uma aplicação prática do estudo das funções exponenciais, especificamente no contexto do crescimento populacional de vírus e bactérias. Esse exemplo não só ilustra a relevância das funções exponenciais no mundo real, como também tem o potencial de capturar a atenção dos estudantes.

Além disso, ao citar a covid-19, é demonstrado, por meio de um exemplo recente, como ocorre a propagação de algumas doenças infecciosas.

Inicialmente, são revisados conceitos fundamentais associados a potências, raízes e suas propriedades, já abordados nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Avançando, serão exploradas as potências de números racionais e reais, ampliando o entendimento dos estudantes sobre a aplicação das potências em diferentes contextos numéricos.

As atividades **1** a **19** das seções "Atividades" das páginas 18, 19, 20 e 22 podem ser usadas para a fixação do conteúdo estudado. A atividade **19** promove o desenvolvimento da habilidade EM13MAT315 e do pensamento computacional.

Na atividade **22**, destaque que o valor de câmbio entre moedas costuma ser bastante instável, podendo variar para mais ou para menos de acordo com fatores como questões econômicas internas de cada país, instabilidades econômicas, entre outros. Se achar pertinente, sugira aos estudantes que pesquisem na internet os valores do câmbio das moedas no momento da realização da atividade e comparem com o apresentado na tabela.

No tópico "Função exponencial", introduza a definição de função exponencial e analise com os estudantes a forma geral e os gráficos desse tipo de função, destacando tanto o crescimento exponencial quanto o decrescimento exponencial. Explore gráficos com translação, evidenciando que a adição de constantes pode deslocar o gráfico que representa a função.

A seção "Experimente" da página 26 propõe a visualização de gráficos de variação de função exponencial do tipo $f(x) = k \cdot 2^x$ por meio do controle deslizante correspondente ao parâmetro k em um *software* de Geometria dinâmica, promovendo as habilidades EM13MAT403 e EM13MAT404.

A seção "Atividades" da página 29 propõe a realização de uma série de atividades envolvendo função exponencial e variação de função exponencial. A atividade **25**, por exemplo, desenvolve as habilidades EM13MAT403 e EM13MAT404, solicitando aos estudantes que, ao analisarem o gráfico associado à função f, definida por $f(x) = a + b \cdot 2^x$, identifiquem as características fundamentais de uma variação de função exponencial. Aproveite a oportunidade para comentar que as funções exponencial e logarítmica (que será estudada no próximo capítulo desta Unidade) têm várias características análogas devido à sua relação inversa.

O trabalho com a atividade **29** desenvolve a habilidade EM13MAT304. Solicite aos estudantes que pesquisem o rendimento aproximado dos títulos do Tesouro Direto na data da realização dessa atividade.

No tópico "Equação exponencial", são apresentadas técnicas para resolver equações nas quais a variável está no expoente. Aproveite esse momento para apresentar exemplos práticos para os estudantes, a fim de reforçar a compreensão e demonstrar a aplicabilidade das equações exponenciais em diferentes contextos.

Interligando

Essa seção aborda decaimento radioativo e meia-vida de isótopos radioativos e fármacos. Ela pode ser trabalhada em conjunto com o professor de Química, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Além disso, essa seção favorece o desenvolvimento do TCT *Saúde* e das habilidades EM13MAT101, EM13MAT304, EM13MAT403 e EM13MAT404.

Proposta para o professor

Se considerar oportuno, aproveite para conversar com os estudantes sobre o acidente radioativo com césio-137 ocorrido em Goiânia (GO), em 1987. Comente que o césio-137 tem uma meia-vida de aproximadamente 30 anos e que o acidente em questão exemplifica a importância de manusear e descartar materiais radioativos com extremo cuidado para evitar contaminações de longa duração. Mais informações sobre o acidente podem ser encontradas em: https://tedit.net/2rkfkp (acesso em: 4 out. 2024).

Projeto

O projeto proposto tem como objetivo relacionar o conteúdo estudado sobre funções exponenciais com seu papel integrador

e interdisciplinar nas Ciências da Natureza e suas Tecnologias, complementando o trabalho e aproveitando o contexto relacionado a energias renováveis e produção rural.

Por meio da vivência prática na pesquisa, os estudantes terão contato com a tecnologia na área de energias renováveis, bem como com seu avanço e a opção por esses recursos nas propriedades rurais. A realização de uma pesquisa que envolva a análise da utilização de energia renovável em propriedades rurais permite aos estudantes explorar, produzir e compartilhar informações que promovam o entendimento coletivo, favorecendo o desenvolvimento da competência geral CG04 da BNCC.

Ao participarem desse projeto, os estudantes terão a oportunidade de desenvolver as habilidades EM13MAT101, EM13LP33, EM13CNT102 e EM13CNT302. Eles deverão analisar relatórios sobre geração de energia solar publicados por diferentes meios de comunicação, investigar o comportamento da geração de energia ao longo do tempo, realizar previsões sobre o uso de fontes de energia sustentáveis e comunicar os resultados de suas pesquisas em um infográfico.

Participando do projeto, os estudantes terão a possibilidade de praticar a comunicação colaborativa ao acessar e produzir informações, desenvolver conhecimentos e habilidades e de exercer autonomia ao assumir protagonismo em autorias, tomadas de decisões e aprofundamento do conhecimento matemático. O projeto também contribui para o ODS **7**, Energia limpa e acessível.

Comente com os estudantes a importância do acesso das comunidades rurais a fontes de energia renováveis. Explique que, em 2023, a Comissão de Agricultura aprovou incentivos ao uso de energia solar na agricultura familiar. Destaque que essa medida pode contribuir para a sustentabilidade, a redução de custos e a melhoria da qualidade de vida no campo. Além disso, ressalte a importância da produção da agricultura familiar para a soberania alimentar no Brasil.

Proposta para o professor

Para mais informações sobre o uso de fontes de energia sustentáveis pelos povos do campo, leia os textos indicados a seguir.

- AGRICULTURA familiar e energia solar: sustentabilidade em dobro. Portal *gov.br*, 14 fev. 2024. Disponível em: https://tedit.net/m7aciq. Acesso em: 2 out. 2024.
- COMISSÃO aprova incentivo ao uso de energia solar na agricultura familiar. *Agência Senado*, 5 jul. 2023. Disponível em: https://tedit.net/6uqxif. Acesso em: 2 out. 2024.
- PESQUISADORA fala sobre soberania alimentar e patrimônio cultural para a promoção da saúde e do bem viver. *Agência Fiocruz de Notícias*, 28 maio 2019. Disponível em: https://tedit.net/ckv60q. Acesso em: 2 out. 2024.

Para começar

Caso seja necessário, busque informações sobre o infográfico como ferramenta para transmissão de informações por meio de textos, imagens, desenhos, tabelas, gráficos e demais elementos visuais. Auxilie os estudantes na organização dos dados e na escrita de textos que sejam, de preferência, resumos didáticos simples do conteúdo pesquisado. Caso considere pertinente, proponha as seguintes reflexões aos estudantes:

- Como a disponibilidade de energia afeta a elevação da produção e de produtividade agrícolas?
- A possibilidade de geração e uso de energia renovável pode influenciar o trabalho no campo e o crescimento da industrialização rural?

Desenvolvimento do projeto

Organize os estudantes em 6 grupos. Cada grupo vai produzir um infográfico, em que os integrantes terão de desenvolver a cooperação entre si para pesquisar, para refletir e para produzir uma ação didática envolvendo a temática de sistemas de energia renováveis em propriedades rurais com base em dados reais. Cada infográfico deve ter um *design* atrativo, que será elaborado pelos membros de cada grupo.

Na "Etapa 2", os estudantes devem pesquisar dados recentes relacionados ao uso de placas solares no meio rural para a produção de energia. Fontes confiáveis de pesquisa são a Associação Brasileira de Energia Solar Fotovoltaica (Absolar), o Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) e a Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel). Para o ano de 2024, podem ser usadas as informações presentes neste infográfico produzido pela Absolar, disponível em: https://tedit.net/ohe7ko (acesso em: 4 out. 2024).

Para a "Etapa 3", o *site* da Aneel disponibiliza o valor cobrado pelas diversas empresas de distribuição de energia no país, que pode ser usado como base para calcular a economia gerada por uma instalação de geradores fotovoltaicos em uma propriedade rural. Como o valor da tarifa é dado em R$/kWh, é essencial que os estudantes entendam que o retorno do investimento em geração de energia solar também depende das características da instalação, como potência e eficiência das placas instaladas, bem como da incidência solar na região.

A geração de energia por células fotovoltaicas oferece um retorno financeiro claro para aqueles que conseguem manter seu negócio até que o investimento inicial na instalação seja recuperado. No entanto, é importante lembrar que a adoção de práticas sustentáveis vai além dos ganhos financeiros. Para mitigar os efeitos das mudanças climáticas, é essencial uma mobilização geral, independentemente do retorno econômico. Devemos trabalhar juntos para alcançar os objetivos de sustentabilidade estabelecidos por entidades globais.

Na "Etapa 4", os grupos devem planejar e construir o infográfico com base no compilado de informações obtidas nas etapas anteriores. Certifique-se de que eles conseguem criar um infográfico seguindo um propósito claro, definindo um público-alvo, uma linguagem e uma identidade visual adequados. As informações apresentadas devem ser estrategicamente escolhidas e resumidas, de maneira que o infográfico não fique sobrecarregado de textos.

Quando os estudantes estiverem organizando as informações sobre o crescimento do uso de energia solar fotovoltaica e sobre o custo de geração desse tipo de energia, eles se depararão com tendências de crescimento e de decrescimento exponenciais. Se julgar interessante, peça a eles que modelem funções exponenciais que apresentem valores aproximados aos encontrados em um *software*, realizando um tipo de previsão de quanto de energia dessa fonte sustentável será gerado no Brasil nos próximos anos.

Produto final

Na "Etapa 5", sugere-se que seja organizada uma plenária com a turma para debater os resultados encontrados, organizados e apresentados por cada grupo nos infográficos. A plenária

envolve debate entre os participantes, então incentive os grupos a argumentar conforme os conhecimentos adquiridos sobre a temática do projeto, organizados nos infográficos.

Avaliação do projeto

Após a plenária, oportunize 3 momentos para reflexão com os estudantes. O primeiro momento deve ser relacionado à organização do que foi necessário e como o grupo foi demandado na criação de um infográfico. O segundo momento deve ser relacionado à capacidade da turma de analisar e avaliar a aplicação de um conhecimento matemático estudado no cotidiano. O terceiro momento deve ser voltado para a reflexão sobre a importância de se pensar em energias renováveis no campo.

Capítulo 2

A abertura do capítulo apresenta exemplos práticos e cotidianos para facilitar a compreensão da aplicabilidade desse tipo de função, que tem como lei de formação o logaritmo de uma variável. Esse conceito não é trabalhado nos Anos Finais do Ensino Fundamental, mas se torna essencial no Ensino Médio e em diversas áreas do conhecimento.

Nos tópicos "Logaritmos" e "Sistemas de logaritmos", são apresentados os logaritmos por meio de suas definições e consequências, como também são discutidos os 2 principais sistemas de logaritmos: o decimal (base 10) e o neperiano (base *e*). Em seguida, no tópico "Propriedades dos logaritmos", são detalhadas as propriedades dos logaritmos, incluindo as regras de produto, quociente, potência e mudança de base. Essas propriedades são essenciais para manipular e simplificar expressões logarítmicas.

As atividades **1** a **21** das seções "Atividades" das páginas 41, 43 e 46 possibilitam a fixação do conteúdo e o desenvolvimento das propriedades logarítmicas. Na atividade **25**, além de trabalhar algumas dessas propriedades, trazemos a aplicação dos logaritmos no cálculo do pH, um conceito importante na Química, desenvolvendo, assim, a habilidade EM13MAT305.

Antes de apresentar a definição e os gráficos de funções logarítmicas aos estudantes, destaque a relação inversa entre as propriedades dos gráficos associados a essas funções e aquelas associadas às funções exponencias.

Na seção "Experimente" da página 53, propõe-se a comparação dos gráficos das funções exponencial e logarítmica, destacando a simetria em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, promovendo a habilidade EM13MAT403.

A seção "Atividades" da página 55 propõe atividades envolvendo funções logarítmicas e gráficos dessas funções. A atividade **34** é uma ótima oportunidade para verificar se os estudantes conseguem analisar e estabelecer relações entre as representações de funções exponenciais e logarítmicas, desenvolvendo, assim, aspectos da habilidade EM13MAT403.

O resultado do IDH apresentado na atividade **40** pode ser consultado em https://tedit.net/zhyvrf (acesso em: 4 out. 2024).

Proposta para o professor

Para aprofundar-se no tema e compreender os motivos pelos quais o cálculo do IDH foi alterado e o cálculo do IDH_R utiliza o logaritmo, assista aos vídeos indicados a seguir.

- UNIVESP. Matemática – Aula 11 – IDH – parte 1. Disponível em: https://tedit.net/18sml2. Acesso em: 3 out. 2024.
- UNIVESP. Matemática – Aula 12 – IDH – parte 2. Disponível em: https://tedit.net/9g61f9. Acesso em: 3 out. 2024.

A seguir, apresentamos a resposta da questão proposta no boxe "Pense nisto" da página 58.

Precisamos resolver a equação $0{,}9^x = 0{,}5$. Temos:

$$x = \log_{0,9} 0{,}5 = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}9} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{9}{10}\right)} =$$

$$= \frac{\overbrace{\log 1}^{0} - \log 2}{\log 3^2 - \underbrace{\log 10}_{1}} = \frac{-\log 2}{2 \cdot \log 3 - 1}$$

Usando os valores $\log 2 \simeq 0{,}3010$ e $\log 3 \simeq 0{,}4771$, obtemos:

$$x \simeq \frac{-0{,}301}{2 \cdot 0{,}4771 - 1} \simeq \frac{-0{,}301}{-0{,}0458} \simeq 6{,}57$$

Logo, depois de aproximadamente 6 anos e 7 meses de uso, o caminhão valerá R$ 60.000,00.

É importante estar atento às aproximações usadas para os logaritmos. Se tivéssemos usado aproximações com 2 casas decimais (por exemplo, $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$), obteríamos 7,5 anos como resultado, o que daria quase um ano de diferença na resposta.

Aproveite o trabalho com o boxe "História da Matemática" para conversar sobre a invenção dos logaritmos e como eles facilitaram cálculos envolvendo números muito grandes, permitindo a representação de diversos fenômenos físicos, biológicos e econômicos.

Ao trabalhar equações exponenciais usando logaritmos, enfatize que as técnicas de cálculo envolvidas muitas vezes fornecem ferramentas necessárias para analisar, projetar e tomar decisões informadas sobre investimentos, empréstimos e planejamento financeiro. A atividade **43** da seção "Atividades" da página 59, por exemplo, analisa a depreciação de um imóvel, desenvolvendo, assim, a habilidade EM13MAT304.

Interligando

Ao promover o trabalho com a habilidade EM13MAT305 por meio da abordagem da medida de intensidade sonora, essa seção apresenta um conteúdo interdisciplinar que pode ser enriquecido com a colaboração entre os professores de Matemática e Física.

Enfatize a aplicação prática dos conceitos apresentados em situações cotidianas, como a intensidade sonora de diferentes ambientes, para tornar o aprendizado mais tangível para os estudantes. Além disso, a inclusão de atividades experimentais, como medições de som com decibelímetros, pode proporcionar uma compreensão mais profunda e engajadora dos tópicos abordados.

Viralize!

Por exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem científica para explicar fenômenos da natureza com base em conhecimentos de diferentes áreas, essa seção favorece o desenvolvimento da competência geral CG02 da BNCC. Também são utilizados conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo, assim, a competência específica CEMAT01 e as habilidades EM13MAT101 e EM13MAT305.

A seção promove o trabalho com o TCT *Ciência e Tecnologia* ao abordar a escala Richter e o uso de sismógrafos para

medir terremotos. Destaque que os sismógrafos são aparelhos que detectam os movimentos gerados por ondas sísmicas.

Proponha uma conversa sobre as causas dos terremotos, sua distribuição geográfica e as razões pelas quais alguns terremotos são mais letais que outros. Explore a localização geográfica das placas tectônicas, explicando como a posição delas influencia a ocorrência de terremotos. Além disso, converse a respeito de como a distribuição da população humana nos países citados pode ajudar a entender o impacto dos terremotos nas populações locais.

Proposta para o professor

Se julgar oportuno, assista com os estudantes ao vídeo "O que explica a devastação do terremoto na Turquia e Síria". A videorreportagem da *BBC News Brasil* (3 min 11 s) explica por que algumas regiões da Terra são mais atingidas por terremotos do que outras e por que os terremotos ocorridos na Turquia em 2023 foram tão devastadores. O conteúdo está disponível em: https://tedit.net/u27cld (acesso em: 4 out. 2024).

Para fundamentar saberes

Ao trabalhar as atividades dessa seção, enfatize que, nos vestibulares, as funções exponencial e logarítmica frequentemente estão associadas a fenômenos físicos, biológicos e econômicos, integrando a Matemática com os componentes curriculares de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Proposta para o estudante

Um equipamento industrial foi adquirido por R$ 30.000,00. O valor (v) dele, em reais, com x anos de uso, é dado pela lei $v(x) = p \cdot q^x$, em que p e q são constantes reais.

Sabendo que, com 3 anos de uso, o valor do equipamento será de R$ 21.870,00, determine:

a) os valores de p e q;

b) a medida de intervalo de tempo aproximada de uso depois do qual o equipamento valerá R$ 10.000,00. Use $\log 3 \simeq 0{,}4771$.

Resolução:

a) Temos:

$v(0) = 30\,000 \Rightarrow p \cdot q^0 = 30\,000 \Rightarrow p = 30\,000$

$v(3) = 21\,870 \Rightarrow 21\,870 = 30\,000 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{729}{1000} \Rightarrow$

$\Rightarrow q^3 = \left(\frac{9}{10}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{9}{10} = 0{,}9$

Logo, os valores de p e q são, respectivamente, 30 000 e 0,9.

a) A lei é $v(x) = 30\,000 \cdot 0{,}9^x$. Devemos determinar x para o qual $v(x) = 10\,000$:

$10\,000 = 30\,000 \cdot 0{,}9^x \Rightarrow \frac{1}{3} = 0{,}9^x \Rightarrow \log_{0,9} \frac{1}{3} = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{-\log 3}{2\log 3 - 1} \simeq \frac{-0{,}4771}{-0{,}0458} \simeq 10{,}42$$

Multiplicando 0,42 por 12, temos que a medida de intervalo de tempo aproximada é de 10 anos e 5 meses.

Unidade 2: Matrizes e sistemas lineares

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG01, CG02 e CG06.

Competência específica da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT03.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT301, EM13MAT314 e EM13MAT315.

Habilidade de outras áreas do conhecimento:
EM13LP18 e EM13CNT101.

Temas Contemporâneos Transversais:
Ciência e Tecnologia; *Diversidade Cultural*; *Educação Alimentar e Nutricional*; *Educação para o Consumo*; *Educação para o Trânsito*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Compreender e usar a linguagem matricial de apresentação de dados em uma tabela.
- Efetuar a adição e a subtração de matrizes, bem como a multiplicação de uma matriz por um número real.
- Multiplicar matrizes, estabelecendo as condições de existência do produto.
- Identificar equações lineares, bem como suas soluções.
- Resolver, classificar e interpretar geometricamente um sistema linear com 2 equações e 2 incógnitas.
- Reconhecer sistemas lineares e representá-los na forma matricial.
- Resolver e classificar sistemas lineares com 3 equações e 3 incógnitas utilizando o método do escalonamento.
- Relacionar a classificação de um sistema linear 2×2 e 3×3 ao determinante da matriz de seus coeficientes.
- Calcular, por meio das regras práticas, o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

Chame a atenção dos estudantes para a fotografia que apresenta mulheres confeccionando peças com as fibras do buriti no povoado quilombo Marcelino. Comente com eles que esse quilombo é reconhecido como um patrimônio cultural brasileiro. Se julgar oportuno, assista ao vídeo "A Riqueza do Buriti – o Artesanato Tradicional dos Lençóis Maranhenses", disponível em: https://tedit.net/sy4joq (acesso em: 3 out. 2024).

O texto de abertura da Unidade e as atividades propõem uma investigação acerca da agricultura quilombola e da

importância da leitura dos rótulos dos alimentos, principalmente dos processados.

Questione se todos os estudantes sabem que, ao listar os ingredientes, as empresas os colocam em ordem decrescente de quantidade, isto é, o ingrediente em maior quantidade vem primeiro e aquele em menor quantidade vem em último. Dessa maneira, se um achocolatado, por exemplo, lista os ingredientes começando por açúcar e apenas depois cita cacau, há nele mais açúcar do que cacau.

Se achar pertinente, oriente os estudantes a levar alguns rótulos de alimentos ultraprocessados (como biscoitos recheados, bebidas lácteas, refrigerantes, sobremesas industrializadas, etc.) para a aula, a fim de verificar os ingredientes presentes.

Essa atividade favorece o trabalho com o TCT *Educação Alimentar* e *Nutricional* e também com o TCT *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*.

Capítulo 3

A abertura do capítulo propõe uma contextualização a respeito de matrizes, associando-as a tabelas. Espera-se que os estudantes notem a maneira como as informações de uma matriz, assim como em uma tabela, são organizadas em linhas e colunas. Em uma matriz do tipo $m \times n$, m é a quantidade de linhas e n é a quantidade de colunas. É importante que eles compreendam que cada elemento da matriz pode ser identificado a partir da posição da linha e da coluna em que esse elemento se encontra (elemento a_{ij}).

No tópico "Matrizes especiais", são apresentadas as matrizes linha, coluna, nula e quadrada. Na atividade **1** da seção "Atividades" da página 69, os estudantes devem identificar de maneira autônoma cada um dos tipos de matrizes apresentadas. Na atividade **3**, desenvolva com eles a construção de uma matriz a partir de sua representação genérica por meio de uma lei de formação.

Esse conhecimento será oportuno quando o estudo de sistemas de equações lineares for abordado no capítulo **4**, pois frequentemente essas equações serão representadas na forma matricial, em que a solução do sistema pode ser encontrada por meio de operações com matrizes. Assim, neste momento, trabalhe a igualdade e as operações entre matrizes.

Apresente e explore o conceito de igualdade de matrizes com exemplos de matrizes que podem ser iguais (2 matrizes 2×2) e matrizes que não podem ser iguais (uma matriz 2×3 e outra 3×2), destacando que não apenas os elementos devem ser correspondentes, mas que o formato da matriz também deve ser compatível, caso contrário, não há comparação possível.

Na atividade **13** da seção "Atividades" da página 70, os estudantes precisarão utilizar noções matemáticas relacionadas a sistemas lineares para determinar os valores associados a 3 incógnitas com base em uma igualdade de matrizes, iniciando, assim, o trabalho com a habilidade EM13MAT301.

Analise com os estudantes as operações de adição e subtração de matrizes, deixando claro que essas operações só podem ser realizadas se as matrizes tiverem a mesma quantidade de linhas e colunas.

Desenvolva a ideia de que a adição e a subtração de matrizes consistem na adição ou subtração de elementos que ocupam a mesma posição, e que as matrizes resultantes dessas operações devem ter a mesma ordem das matrizes que foram utilizadas.

A multiplicação de matrizes é usada em casos em que se necessita determinar, por exemplo, a média ponderada de um estudante mediante bimestres que apresentam pesos diferentes.

Destaque que o produto de 2 matrizes A e B será possível somente nos casos nos quais A for matriz do tipo $m \times n$ e B for matriz do tipo $n \times p$, assim, a matriz resultante será uma matriz C, do tipo $m \times p$.

Apresente aos estudantes exemplos de multiplicação entre matrizes. Ao multiplicar:

- uma matriz 1×3 e uma matriz 3×1, o produto será uma matriz 1×1;
- uma matriz 2×3 e uma matriz 3×2, o produto será uma matriz 2×2;
- uma matriz 3×2 e uma matriz 2×2, o produto será uma matriz 3×2.

Destaque que a ordem em que uma multiplicação é realizada influencia diretamente o resultado.

As atividades **26** e **27** da seção "Atividades" da página 74, além de trabalharem operações com matrizes, permitem aos estudantes visualizar de maneira prática como as matrizes podem estar envolvidas em contextos cotidianos. Elas possibilitam estabelecer relação com o TCT *Educação Alimentar e Nutricional*.

Interligando

O trabalho com essa seção permite o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia* ao investigar conjecturas e propriedades matemáticas referentes a matrizes e ao explorar registros de representações matemáticas no contexto computacional. Para complementar a seção, explique aos estudantes que a palavra *pixel* é um acrônimo (palavra formada pela junção das primeiras letras ou das primeiras sílabas de um grupo de palavras) de *picture element* (*pix* – *el*), que em português significa "elemento de imagem".

Explore a ideia de que a resolução de uma foto depende também do sensor da câmera e de fatores como a estabilidade da imagem e a iluminação durante a captura. Portanto, uma boa foto não depende apenas da quantidade de *pixels* que uma câmera fotográfica é capaz de registrar.

Comente que, na computação, a menor unidade de informação é o *bit* (do inglês *binary digit*, ou "dígito binário"). O *bit* só pode assumir 2 valores: 0 e 1. Normalmente, em imagens 2D (2 dimensões) capturadas por uma câmera digital, os programas computacionais associam a cada unidade de imagem um valor inteiro não negativo correspondente a 1 *byte*, que é igual a 8 *bits*.

- O 1º *bit* pode ser 0 ou 1; temos 2 possibilidades.
- O 2º *bit* pode ser 0 ou 1; temos 2 possibilidades.

  ⋮
- O 8º *bit* pode ser 0 ou 1; temos 2 possibilidades.

Assim, a quantidade de valores distintos possíveis que podem ser associados a um *pixel* é 256 ($2^8 = 256$).

Projeto

Nesse projeto, o objetivo é analisar o consumo de energia elétrica em uma residência utilizando o conceito de matrizes. A análise será feita a partir da coleta de dados em faturas de consumo de energia elétrica e de informações obtidas no simulador de medida de consumo de energia a ser pesquisado na internet.

Os estudantes calcularão o valor da energia elétrica média consumida em um período de 4 meses e os gastos de cada eletrodoméstico de maneira individual. Isso lhes possibilitará refletir sobre os hábitos de consumo familiar e propor soluções para a redução do consumo.

Na "Etapa 6", se julgar oportuno, expanda o debate questionando aos estudantes se, agora que realizaram as análises,

são capazes de identificar ações que poderiam ser realizadas no prédio escolar para reduzir o consumo de energia elétrica.

Esse projeto favorece o desenvolvimento da habilidade EM13MAT314 e do TCT *Educação para o Consumo* ao trabalhar com a grandeza quilowatt-hora, que é dada pelo produto de outras grandezas, e com o consumo de energia elétrica.

O uso do simulador de uma plataforma eletrônica na análise do consumo de energia de algum dispositivo e/ou aparelho eletrônico favorece o desenvolvimento da habilidade EM13LP18, principalmente em relação à exploração de recursos diversos e à criação de um infográfico.

Além disso, ao utilizar os conhecimentos sobre matrizes e realizar pesquisas para entender como é realizado o cálculo do valor a pagar pelo fornecimento de energia elétrica, esse projeto favorece o desenvolvimento da competência geral CG01.

Capítulo 4

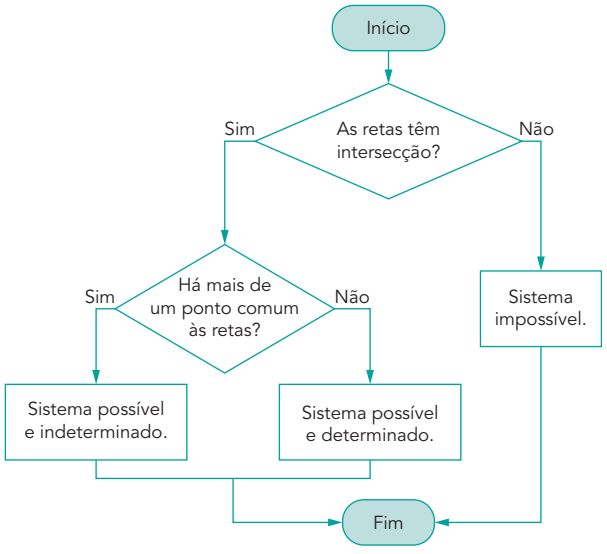
A abertura do capítulo propõe uma investigação a respeito da construção de uma equação linear que modela um problema real. É importante que o estudante compreenda a solução da equação linear (com 2 incógnitas) como sendo sempre um par ordenado de soluções atreladas (a solução y depende da solução x, e vice-versa).

A atividade resolvida **2** do boxe "Atividades resolvidas" tem como propósito mostrar ao estudante que uma equação linear com 2 incógnitas do tipo $ax + by = c$, com a e b diferentes de zero, apresenta infinitas soluções reais. É oportuno mencionar que, no exemplo apresentado na abertura do capítulo, dentro do contexto do caixa eletrônico, a equação apresentava apenas 5 soluções, pois as incógnitas só podiam assumir valores naturais devido à natureza do problema.

Na atividade **7** da seção "Atividades" da página 82, os estudantes devem elaborar um fluxograma que apresente um algoritmo para resolver o problema referente ao conjunto solução para a equação linear $ax + b = 0$, desenvolvendo, assim, a habilidade EM13MAT315.

A seguir, apresentamos o fluxograma proposto no boxe "Pense nisto" da página 87.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Nas atividades **8**, **9**, **11** e **17** da seção "Atividades" da página 89, os estudantes explorarão diferentes registros de representação para verificar a resolução das questões propostas, com ou sem o apoio de tecnologias digitais. Além disso, nesse bloco de atividades, eles resolverão problemas do cotidiano que envolvem equações lineares simultâneas.

A atividade **18** permite que os estudantes construam e resolvam sistemas lineares para modelar um problema de Cinemática, partindo do fato de que uma reta é a representação gráfica de uma equação linear com 2 incógnitas.

Explore com os estudantes a relação entre matrizes e sistemas, utilizando exemplos em que sistemas lineares são escritos na forma de multiplicação de matrizes. A resolução e a classificação de sistemas lineares 2×2 (método algébrico e gráfico) devem resgatar conhecimentos prévios que os estudantes trazem de anos anteriores, como ponto de partida para consolidação e aprofundamento dos conceitos envolvidos. O uso de tecnologias digitais pode ser um importante recurso.

Para resolver problemas que envolvem sistemas lineares quaisquer (geralmente 3×3), é importante enfatizar o método do escalonamento como processo geral de resolução.

As atividades **25** e **28** a **31** da seção "Atividades" da página 99 podem ser utilizadas para fixação, desenvolvendo a habilidade EM13MAT301 por meio da resolução de problemas com equações lineares utilizando a técnica de escalonamento. Destaque que, nesses e em outros casos do mesmo bloco de atividades, os sistemas lineares são usados para "traduzir algebricamente" e resolver um problema cotidiano.

Na atividade **32**, é apresentada uma interessante aplicação dos sistemas lineares na Química, mais especificamente no balanceamento de equações químicas. É importante que os estudantes percebam que, ao balancear uma equação química, os coeficientes usados são os menores números inteiros que fazem com que a quantidade de átomos de cada elemento químico envolvido seja a mesma nos reagentes e produtos, mas não são os únicos – verifica-se que os sistemas obtidos, quando escalonados, são possíveis e indeterminados. Não se pretende, com essa atividade, que os estudantes passem a balancear equações químicas usando sistemas (embora seja um método criativo, é, em geral, trabalhoso), mas que eles reconheçam a presença da Matemática em outra área do conhecimento. Por fim, a atividade proporciona uma ótima oportunidade de trabalho com sistemas possíveis e indeterminados, que, em geral, são mais abstratos e menos intuitivos que os sistemas possíveis e determinados e, assim, apresentam maior dificuldade de compreensão pelos estudantes. Essa atividade desenvolve a habilidade EM13CNT101 e pode ser desenvolvida em conjunto com o professor de Química, favorecendo a interdisciplinaridade com Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

As seções "Experimente" das páginas 84, 88 e 97 permitem aos estudantes usar um *software* de Geometria dinâmica para resolver sistemas lineares de 2 equações com 2 incógnitas e de 3 equações com 3 incógnitas, promovendo mais o trabalho com a habilidade EM13MAT301.

Destaque que só podemos considerar como solução possível o conjunto de valores que satisfaz a verificação de todas as equações do sistema linear. Além disso, a utilização do *software* possibilita realizar a interpretação geométrica de cada situação apresentada.

Sugerimos, por fim, que no tópico "Determinantes", os determinantes sejam apresentados a partir da classificação de um sistema 2×2, por meio de seus coeficientes, reproduzindo, de certa forma, o contexto histórico do "surgimento" dos determinantes. Desse modo, é recomendável que o foco esteja no cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e 3, por meio das regras práticas.

Interligando

Essa seção pode ser trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e o desenvolvimento do TCT *Educação para o Trânsito*.

Proposta para o professor

O engenheiro de tráfego é um profissional especializado em planejar, projetar, operar e gerenciar sistemas de transporte. Sua principal função é garantir a eficiência e a segurança no fluxo de veículos e pedestres.

Para conhecer mais sobre a importância do engenheiro de tráfego, assista ao vídeo indicado a seguir.

- IMPORTÂNCIA da engenharia de tráfego. Crea-Minas Canal. Disponível em: https://tedit.net/kwfddc. Acesso em: 2 out. 2024.

Viralize!

Essa seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* e *Diversidade Cultural* e pode ser trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, a fim de garantir a valorização e o reconhecimento das comunidades quilombolas distribuídas pelos diversos estados brasileiros.

Se julgar oportuno, proponha aos estudantes que assistam à série de vídeos "Quilombos do Brasil", da TV Folha, disponível em: https://tedit.net/5n1mxo. Acesso em: 3 out. 2024.

Para fundamentar saberes

Nas atividades **1** e **2** propostas, os estudantes deverão compreender a linguagem matricial na apresentação de dados e, com base na análise deles, resolver os problemas propostos. Na atividade **3**, os estudantes poderão reconhecer uma importante aplicação das matrizes em criptografia, através de uma equação matricial.

As atividades **4** a **7** possibilitam o desenvolvimento da habilidade EM13MAT301 na resolução de problemas do cotidiano que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas. Proponha aos estudantes que explorem diferentes métodos de resolução nos sistemas de equação lineares propostos.

Proposta para o estudante

Na tabela a seguir, estão representadas as quantidades de proteína, colesterol, cálcio e carboidrato encontradas em alguns tipos de queijos.

Composição parcial de queijos por 100 g de parte comestível

Quantidade de nutriente / Tipo de queijo	Proteína (em g)	Colesterol (em mg)	Cálcio (em mg)	Carboidrato (em g)
Queijo minas frescal	17,4	62	579	3,2
Queijo muçarela	22,6	80	875	3,0
Queijo parmesão	35,6	106	992	1,7

Fonte dos dados: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Núcleo de Estudos e Pesquisas em Alimentação. *Tabela Brasileira de Composição de Alimentos – TACO*. 4. ed. ampl. e rev. Campinas: Unicamp/Nepa, 2011. Disponível em: https://tedit.net/el90xe. Acesso em: 19 ago. 2024.

a) A essa tabela, é possível associar uma matriz $Q = (q_{ij})_{m \times n}$. Quais devem ser os valores de m e n?

b) Obtenha os valores de q_{23} e q_{31}, explicando os respectivos significados.

c) Danilo consome, semanalmente, 300 g de queijo muçarela em sanduíches no café da manhã. Substituindo-o por queijo minas frescal, quantos miligramas a menos de colesterol ele terá ingerido ao fim de um ano? Considere o ano com 52 semanas.

Resolução:

a) Como a tabela tem 3 linhas e 4 colunas, temos que $m = 3$ e $n = 4$.

b) $q_{23} = 875 \Rightarrow$ Em 100 g de queijo muçarela, encontramos 875 mg de cálcio.

$q_{31} = 35{,}6 \Rightarrow$ Em 100 g de queijo parmesão, encontramos 35,6 g de proteína.

c) Queijo muçarela: 300 g por semana $\Rightarrow 3 \cdot (80 \text{ mg}) = 240$ mg de colesterol por semana.

Queijo minas frescal: 300 g por semana $\Rightarrow 3 \cdot (62 \text{ mg}) = 186$ mg de colesterol por semana.

Por semana, a diferença de colesterol ingerida é de 54 mg. Em 52 semanas, a ingestão será de 2 808 mg a menos de colesterol.

Unidade 3: Geometria espacial

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG02, CG03, CG04, CG05, CG06 e CG07.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03 e CEMAT05.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT103, EM13MAT201, EM13MAT301, EM13MAT307, EM13MAT308, EM13MAT309, EM13MAT314, EM13MAT504 e EM13MAT509.

Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia; Diversidade Cultural; Educação Ambiental; Educação para o Consumo.*

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Abstrair os conceitos de ponto, reta e plano valendo-se de objetos reais e, também, do espaço físico da sala de aula.
- Conhecer os principais postulados da Geometria euclidiana espacial.
- Diferenciar postulados de teoremas.
- Compreender, por meio de algumas demonstrações, o método lógico-dedutivo da Geometria.
- Reconhecer projeções ortogonais.
- Reconhecer as características principais de poliedros e identificar as planificações de suas superfícies.
- Calcular medidas de área das superfícies e de volume de prismas e pirâmides.
- Reconhecer a importância do princípio de Cavalieri na dedução das fórmulas dos volumes dos principais sólidos.
- Reconhecer unidades de medidas de área e de volume; transformar unidades de medidas de uma mesma grandeza.
- Reconhecer as características principais dos cilindros e dos cones e identificar as planificações de suas superfícies.
- Calcular medidas de área das superfícies e de volume de cilindros e cones.
- Reconhecer sólidos semelhantes e estabelecer a razão de semelhança (entre elementos lineares, entre medidas de áreas e entre medidas de volumes) na resolução de problemas.
- Reconhecer as características principais de esferas.
- Calcular medidas de área da superfície e de volume de esferas e de suas partes.

Abertura da Unidade

A abertura da Unidade, ao abordar os hologramas, favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*. Promova uma conversa com os estudantes sobre esse tipo de tecnologia, perguntando se conhecem seus usos. Eles podem mencionar ter visto hologramas em filmes de ficção científica; ressalte que o uso dessa tecnologia já é uma realidade. Comente o uso de hologramas em zoológicos ao redor do mundo, onde os animais são apresentados usando esse recurso, proporcionando uma experiência educativa e de entretenimento sem a necessidade de mantê-los em cativeiro.

Sugerimos que essa abertura seja trabalhada em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Capítulo 5

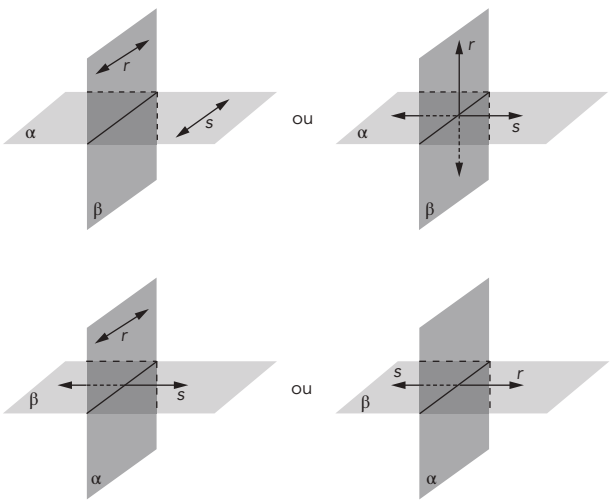
O estudo do capítulo **5** inicia com o boxe "História da Matemática" apresentando um histórico do desenvolvimento da área de Geometria, destacando as contribuições de Pitágoras, conhecido pelo teorema de Pitágoras, e de Euclides, autor de *Os elementos*. É importante destacar aos estudantes o aspecto colaborativo do desenvolvimento desse e de outros campos de estudo, ressaltando que as conquistas científicas são feitas por toda uma comunidade. Dos gregos, como Pitágoras e Euclides, até David Hilbert, matemático alemão conhecido por seu trabalho em fundamentos da Geometria, os estudiosos continuam a expandir nosso entendimento sobre o mundo.

Além das atividades das seções "Atividades" das páginas 123 e 132 possibilitarem a fixação do conteúdo, ao aplicar os postulados, proposições e teoremas associados à Geometria espacial, os estudantes são incentivados a desenvolver habilidades de argumentação matemática, essenciais para o desenvolvimento do raciocínio lógico e espacial.

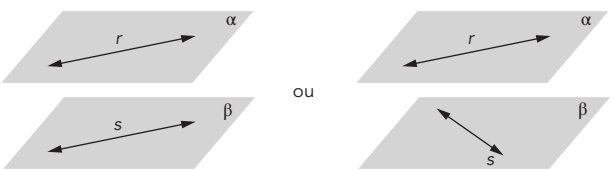
A seguir, apresentamos as respostas às questões propostas nos boxes "Pense nisto" da página 121.

Segundo boxe:

- *r* e *s* podem ser paralelas, concorrentes, reversas ou coincidentes.



- *r* e *s* podem ser paralelas ou reversas.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Terceiro boxe:

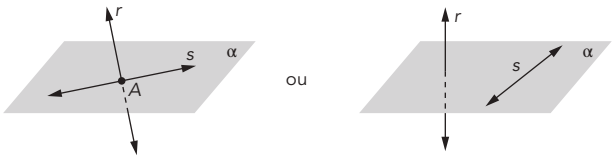
- r e s podem ser paralelas ou reversas.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



$r \parallel \alpha$, $s \subset \alpha$, r e s paralelas; ou $r \parallel \alpha$ e $s \subset \alpha$, r e s reversas.

- r e s podem ser concorrentes ou reversas.



$A \in s$, $s \subset \alpha$ e $A \in r$, r e s são concorrentes; ou $s \subset \alpha$, r e s são reversas.

Interligando

Essa seção permite trabalhar com o TCT *Ciência e Tecnologia* ao abordar o desenvolvimento do astrolábio e da bússola. Ressalte que a aplicação de conhecimentos, ferramentas e técnicas facilita processos e resolve problemas. Portanto, instrumentos como o astrolábio, que podem parecer rudimentares para os estudantes, representaram desenvolvimentos tecnológicos significativos em sua época.

A atividade **2**, ao solicitar a determinação da medida da altura da torre, possibilita um trabalho com a habilidade EM13MAT308 por meio da utilização da relação trigonométrica tangente.

Proposta para o professor

O MAST possui uma coleção de instrumentos históricos relacionados à Astronomia e à navegação, e o astrolábio faz parte desse acervo.

O museu é uma excelente opção de visita para aprender a respeito da história da Astronomia e conhecer um astrolábio de perto.

Visite o *site* do museu (disponível em: https://tedit.net/pc3iyy; acesso em: 4 set. 2024) e saiba mais!

Capítulo 6

No início desse capítulo, apresentamos obras de engenharia no Brasil e no mundo, como a estrutura da Porta da Europa em Madri (Espanha) e a Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida, em Brasília (DF). Explore com os estudantes essas e outras estruturas perguntando se conhecem prédios cujas formas podem ser relacionadas a sólidos geométricos. Essa abordagem não só enriquece o entendimento sobre a aplicação da Geometria na Engenharia, mas também promove um debate sobre a diversidade arquitetônica e cultural e o desenvolvimento do TCT *Diversidade Cultural*.

Ao trabalhar com o tópico "Poliedros de Platão", apresentamos uma observação sobre os 5 tipos de poliedros de Platão. Se julgar oportuno, apresente aos estudantes as demonstrações a seguir.

Propriedade

Existem 5, e somente 5, tipos de poliedros de Platão.

Demonstração 1:

É preciso mostrar que as 3 condições que caracterizam um poliedro de Platão são satisfeitas apenas para 5 tipos de poliedros.

- 1ª condição: Cada uma das F faces do poliedro tem n arestas (com $n \geqslant 3$) e, como cada aresta está contida em 2 faces, temos:

$$n \cdot F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n} \quad \text{I}$$

- 2ª condição: Cada um dos V vértices do poliedro é ponto de concorrência ("encontro") de m arestas (com $m \geqslant 3$) e, como cada aresta contém 2 vértices, temos:

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m} \quad \text{II}$$

- 3ª condição: Como o poliedro é euleriano, temos:

$$V - A + F = 2 \quad \text{III}$$

Substituindo I e II em III, temos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2$$

Dividindo os 2 membros por $2A$ (com $A \neq 0$), obtemos:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \quad \text{IV}$$

Já sabemos que $n \geqslant 3$ e $m \geqslant 3$. Notemos, porém, que m e n não podem ser ambos maiores do que 3, pois se isso ocorresse teríamos:

$$\left.\begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geqslant 4 \Rightarrow \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geqslant 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leqslant 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant 0$$

Isso contraria a igualdade IV, uma vez que:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} > 0, \text{ pois } A > 0.$$

Concluímos então que, nos poliedros de Platão, devemos ter $m = 3$ ou $n = 3$.

- Se $m = 3$ (em cada vértice do poliedro concorrem 3 arestas), retomando a igualdade IV, temos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow n < 6$$

Então, $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$.

Assim, há 3 poliedros nos quais concorrem 3 arestas em cada vértice:

$m = 3$ e $n = 3$; **1** $\quad$ $m = 3$ e $n = 4$; **2** $\quad$ $m = 3$ e $n = 5$. **3**

- Se $n = 3$ (todas as faces do poliedro são triangulares), obtemos, em IV:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow m < 6$$

Assim, podemos ter:

$n = 3$ e $m = 5$; **4** $\quad$ $n = 3$ e $m = 4$; **5** $\quad$ $n = 3$ e $m = 3$. (coincide com **1**)

Reunindo os resultados obtidos para $m = 3$ ou para $n = 3$, concluímos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares do quadro seguinte, que mostra que existem exatamente 5 tipos de poliedros de Platão:

m	n
3	3
3	4
3	5
5	3
4	3

Demonstração 2:

Demonstração da fórmula da medida de volume do paralelepípedo retângulo no caso em que as dimensões a, b e c são números racionais.

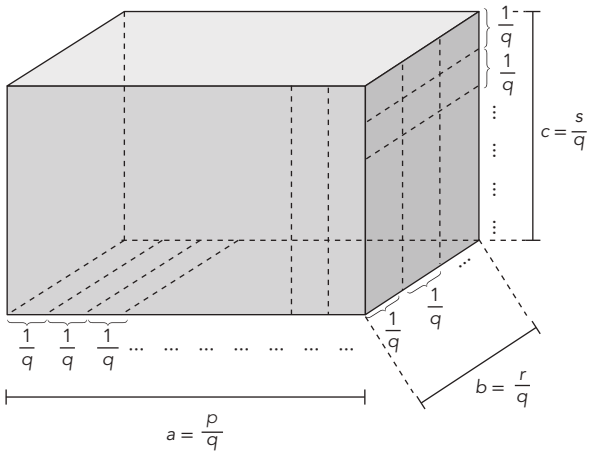
Podemos escrever a, b e c como frações de mesmo denominador. Assim, temos:

$$a = \frac{p}{q},\ b = \frac{r}{q} \text{ e } c = \frac{s}{q}.$$

Tomemos a dimensão de medida a. Vamos decompor as arestas de dimensão a em p partes iguais, cada uma com medida de comprimento $\frac{1}{q}$; analogamente, cada aresta de dimensão b pode ser decomposta em r partes iguais, cada uma com medida de comprimento $\frac{1}{q}$.

Também, cada aresta de dimensão c pode ser decomposta em s partes, cada uma com medida de comprimento $\frac{1}{q}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Desse modo, o paralelepípedo retângulo ficou dividido em $p \cdot r \cdot s$ cubos idênticos, cada qual com aresta medindo $\frac{1}{q}$.

Considerando que a medida de aresta de um cubo é o número racional $\frac{1}{q}$ e a medida de volume de um cubo é igual a $\left(\frac{1}{q}\right)^3$ (acompanhe a demonstração **3** logo em seguida), temos:

$$V_{\text{paral.}} = p \cdot r \cdot s \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^3 = \frac{p \cdot s \cdot r}{q^3} =$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{q} \cdot \frac{s}{q} = a \cdot b \cdot c$$

Demonstração 3:

Vamos decompor cada aresta de um cubo unitário em um mesmo número inteiro q de partes iguais. Obtemos q^3 cubos justapostos, cada um com aresta de medida $\frac{1}{q}$.

Daí:

$$V_{\text{cubo unitário}} = q^3 \cdot V_{\text{cubo de aresta } \frac{1}{q}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = q^3 \cdot V_{\text{cubo de aresta } \frac{1}{q}} \Rightarrow V_{\text{cubo de aresta } \frac{1}{q}} = \frac{1}{q^3}$$

No boxe "Atividades resolvidas" da página 149, ao trabalhar com a atividade resolvida **3**, destaque para os estudantes a aplicação das relações métricas para calcular a medida de área da base triangular do prisma, promovendo o desenvolvimento da habilidade EM13MAT308. Já na atividade resolvida **4**, destaque o trabalho com a grandeza densidade, que é uma grandeza determinada pela razão de outras, assim promovendo o desenvolvimento da habilidade EM13MAT314.

As seções "Atividades" das páginas 145, 151, 160 e 167, de forma geral, possibilitam o trabalho com a habilidade EM13MAT309 ao trazer diversos problemas que envolvem o cálculo de medidas de áreas totais das superfícies e de medidas de volumes de prismas, de pirâmides e de troncos de pirâmides.

Nas seções "Experimente" das páginas 138 e 155, a mesma habilidade é trabalhada com o apoio de *software* de Geometria dinâmica. Os estudantes vão representar regiões limitadas por polígonos na base de prismas e pirâmides e usar ferramentas de modelagem 3D e ferramentas para calcular as medidas de área das superfícies e de volume desses poliedros. Ao considerar um prisma e uma pirâmide com a base limitada por um mesmo polígono e mesma medida da altura, os estudantes conseguirão visualizar a relação existente entre a medida de volume dos 2, percebendo assim que a medida de volume do prisma é 3 vezes maior do que a medida de volume da pirâmide.

Interligando

Essa seção aborda as embalagens, suas funções e atributos, promovendo uma reflexão sobre o impacto ambiental do uso de embalagens e favorecendo o desenvolvimento dos TCTs *Educação Ambiental* e *Educação para o Consumo*.

Aproveite esse momento para avaliar o trabalho dos estudantes com a habilidade EM13MAT309. Além disso, sugerimos que essa seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Proposta para o professor

Se julgar oportuno, para saber mais sobre o assunto, leia o texto "Impacto das Embalagens no Meio Ambiente", do Ministério do Meio Ambiente, disponível em: https://tedit.net/zec8t0. Acesso em: 1º out. 2024.

Capítulo 7

As seções "Atividades" das páginas 173, 178, 181, 184 e 189, de forma geral, possibilitam o trabalho com a habilidade EM13MAT309 ao trazer diversos problemas que envolvem o cálculo de medidas de áreas totais das superfícies e de medidas de volumes de cilindros, cones e troncos de cones.

Nas seções "Experimente" das páginas 172 e 182, são propostas a representação de corpos redondos em um *software* de Geometria dinâmica e a investigação da medida de volume de cilindros e cones, promovendo o desenvolvimento da habilidade EM13MAT504. No desenvolvimento da atividade, espera-se que os estudantes identifiquem que a medida de volume do cilindro é 3 vezes maior do que a medida de volume do cone quando ambos têm a mesma medida do raio e da altura.

No tópico "Esfera", questione os estudantes sobre as deformações analisadas, perguntando se acreditam que a maneira com a qual um país é representado, seja pelo tamanho, seja pela localização (na região central ou nos cantos do mapa), influencia na percepção sobre sua importância.

A seção "Experimente" da página 197 propõe a investigação de deformações de ângulos e áreas em projeções cartográficas, promovendo o desenvolvimento da habilidade EM13MAT509. No desenvolvimento dessa seção, trabalha-se, também, com a habilidade EM13MAT307 ao usar uma tecnologia digital para obter e analisar as medidas de áreas das superfícies propostas.

A seção "Atividades" da página 200 possibilita o trabalho com as habilidades EM13MAT308, EM13MAT309 e EM13MAT509.

Interligando

Aproveite o tema dessa seção, que favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental*, para promover uma conversa com os estudantes sobre as mudanças climáticas e sua relação com a ocorrência de eventos climáticos extremos. Pergunte aos estudantes se eles souberam de outros eventos climáticos extremos, além das chuvas no Rio Grande do Sul em maio de 2024. Os estudantes podem citar eventos como a seca na Amazônia em 2024, por exemplo.

Se julgar oportuno, leia com eles o texto "Relatório revela que Brasil teve 12 eventos climáticos extremos em 2023", da *ONU News*, disponível em: https://tedit.net/n752ir. Acesso em: 1º out. 2024.

Sugerimos que essa seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Além disso, essa seção favorece o trabalho com as habilidades EM13MAT103, EM13MAT201 e EM13MAT309.

Projeto

O objetivo do projeto é fornecer informações que auxiliem os estudantes na percepção da importância da armazenagem de água da chuva de diferentes maneiras e verificar a aplicabilidade de seus estudos na cidade onde vivem. Durante o projeto, os estudantes vão pesquisar quais maneiras podem ser construídos reservatórios de água, e avaliar, entre esses tipos, qual é o mais adequado para ser construído em sua comunidade (essa avaliação deve também levar em conta o formato do reservatório). Ao final, o objetivo é produzir uma maquete simulando essa construção e um infográfico que explicite as informações utilizadas na criação da maquete.

A realização de um projeto de maquete que simula a construção de reservatórios de água auxiliando a comunidade na captação da água da chuva promove o desenvolvimento da competência geral CG02 da BNCC e das habilidades EM13MAT201 e EM13MAT309, pois, ao utilizarem os conhecimentos matemáticos aplicados à situação proposta, estão buscando e sugerindo soluções para um problema de âmbito mundial em nível local, que é o reaproveitamento de água da chuva. Isso requer que os estudantes reflitam sobre o projeto, analisem sua viabilidade, elaborem e testem hipóteses. Além disso, ao participarem desse projeto, eles desenvolvem habilidades como liberdade, autonomia e consciência crítica.

A realização desse projeto está alinhada com o ODS **6**, Água potável e saneamento, no que tange ao apoio e ao fortalecimento da comunidade para melhorar a gestão de água, pois os estudantes pesquisam e propõem maneiras de armazenamento de água para aplicar na comunidade em que vivem.

Para começar

Peça aos estudantes que leiam o texto e observem a ilustração e as imagens. Em seguida, promova um debate, incentivando-os a conversar sobre algumas questões, como:

- Qual é a importância da captação da água das chuvas?
- Quais são outras maneiras de reutilizar água?
- Já existe algum sistema de captação de água na sua residência ou em sua comunidade?

Desenvolvimento do projeto

Organize os estudantes em 7 grupos.

Na "Etapa 1", cada grupo deve pesquisar quais são os tipos de sistemas de captação e quais são os reservatórios de água existentes. Nesse momento, é possível associar os formatos, as medidas de volumes e capacidades dos reservatórios ao conteúdo estudado sobre prismas, pirâmides, cones e cilindros. Auxilie os estudantes na busca por *sites* confiáveis e seguros.

Os estudantes podem classificar os tipos de reservatórios de acordo com o tipo de captação, os materiais usados para construção, entre outras categorias.

Na "Etapa 2", cada grupo apresentará os sistemas de captação que encontraram. Auxilie os grupos na organização dos dados por meio de um esquema na lousa, indicando:

- tipos de sistemas de captação;
- tipos e formatos de reservatórios;
- materiais usados;
- vantagens e desvantagens;
- onde seriam possíveis aplicá-los na comunidade.

Esse último ponto serve de ligação com a etapa seguinte, sobre a pesquisa das regiões em que poderiam ser aplicados esses reservatórios na comunidade.

Na "Etapa 3", auxilie os estudantes na pesquisa que realizarão na comunidade. Divida os grupos de maneira que cada região da cidade possa ser beneficiada com a ação deles. Os estudantes podem consultar informações na prefeitura da cidade sobre pontos em que já existe coleta de água pluvial e, assim, identificar outros pontos para os quais pode haver a necessidade de criação de um sistema de captação de água.

É possível, também, que os estudantes identifiquem em suas residências se há a possibilidade de implementação de um sistema de captação da água da chuva e façam a maquete para um conjunto de moradias, por exemplo.

Na "Etapa 4", os estudantes devem definir qual representação de sistema de captação de água realizarão na maquete. Auxilie-os a estruturar o planejamento de materiais e as tarefas de cada integrante de forma a promover engajamento de cada membro do grupo. Nesse momento, eles vão utilizar conceitos de medidas de área e de volume para planejar a quantidade de

material para criar a maquete e identificar o tamanho correto de cada item da maquete.

Se necessário, retome o conceito de escala e mostre a eles alguns exemplos de como calcular as medidas da representação das construções em miniatura.

Para a coleta de materiais, oriente-os de maneira que reutilizem materiais já existentes na escola ou em casa, como embalagens de papelão.

A "Etapa 5" é destinada à construção da maquete. Acompanhe o processo de perto, auxiliando os estudantes nessas construções, quando necessário. Verifique a participação dos integrantes e o engajamento da turma.

Na "Etapa 6", após a construção da maquete, os estudantes devem montar uma pequena explicação sobre sua construção usando um infográfico. Esse infográfico pode ser compartilhado com a comunidade, para que tenham acesso a tudo o que foi criado. Nele, deve haver informações como:

- vantagens de armazenar água da chuva;
- usos seguros da água da chuva;
- informações técnicas sobre o sistema escolhido e os reservatórios compatíveis;
- custos de implementação.

Produto final

Com a maquete e o infográfico prontos, os grupos devem apresentar suas produções para os demais colegas e o professor. Se possível, divulguem as informações para que a comunidade possa se beneficiar do planejamento feito pela turma. Acompanhe as apresentações de cada grupo. Faça as anotações que achar pertinentes para a etapa de Avaliação.

Avaliação do projeto

Realize com os estudantes o levantamento dos pontos positivos e dos pontos negativos que identificaram no decorrer do planejamento e da execução do projeto. Entre outras perguntas, converse com eles sobre: "Como a comunidade poderá se beneficiar com a construção desses sistemas de captação de água?", "Quais etapas do projeto foram as mais difíceis de desenvolver?", "O que deu certo?", "O que deu errado?" e "O que poderia ter sido feito de maneira diferente?".

Viralize!

Essa seção traz informações sobre a habilidade inata humana de distinguir e utilizar, na vida prática, formas geométricas. Segundo a reportagem escolhida, essa é uma habilidade singularmente humana. Esse tema dialoga com o TCT *Ciência e Tecnologia*.

A seção pode ser trabalhada em conjunto com o professor de Arte, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias, ao estabelecer uma relação entre a Matemática e obras de arte.

A atividade **1** pode ser realizada fora da sala de aula, permitindo aos estudantes explorar o pátio, outras áreas da escola ou até mesmo uma praça. Destaque que pessoas cegas ou com baixa visão podem usar o tato para reconhecer relevos e texturas, identificando diferentes formas geométricas. Aproveite esse momento para promover uma conversa sobre inclusão e empatia.

Explique que o sistema de escrita Braille, amplamente utilizado por pessoas cegas ou com baixa visão, também se baseia em relevos que podem ser sentidos pelo toque. Essa reflexão não apenas enriquece o entendimento dos estudantes sobre o conteúdo, como também os sensibiliza para a importância de práticas inclusivas na sociedade.

Na atividade **3**, os estudantes podem explorar o trabalho de diversos artistas que, de maneira clara e intencional, utilizam a Geometria em suas construções artísticas, como Tarsila do Amaral, Piet Mondrian, Wassily Kandinsky, Lasar Segall, Maria Leontina, entre outros.

Para fundamentar saberes

As atividades propostas nessa seção podem ser usadas para avaliar o desempenho dos estudantes a respeito das habilidades trabalhadas ao longo da Unidade, especialmente com a habilidade EM13MAT309.

Proposta para o estudante

(Unesp-SP) Os pontos P e Q sobre a superfície da Terra possuem as seguintes coordenadas geográficas:

	Latitude	Longitude
P	30° N	45° L
Q	30° N	15° O

Considerando a Terra uma esfera de raio 6 300 km, a medida do menor arco $\overset{\frown}{PQ}$ sobre a linha do paralelo 30° N é igual a:

a) $1150\pi\sqrt{3}$ km.

b) $1250\pi\sqrt{3}$ km.

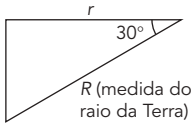
c) $1050\pi\sqrt{3}$ km.

d) $1320\pi\sqrt{3}$ km.

e) $1350\pi\sqrt{3}$ km.

Resolução:

O paralelo 30° N está contido em plano paralelo ao equador e tem raio que mede r, conforme mostra a figura a seguir.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

$$r = R \cdot \cos 30° = 6\,300 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3150\sqrt{3}$$

Os planos dos meridianos 45° L e 15° O formam ângulo de medida 45° + 15° = 60°. Eles intersectam o paralelo em 2 pontos, A e B, de modo que $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 60°$. Então $\overset{\frown}{AB}$ tem medida, em km, igual a $\frac{1}{6}$ do paralelo.

$$\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 6\,300\sqrt{3} = 1050\pi\sqrt{3}$$

Logo, a medida do menor arco $\overset{\frown}{PQ}$ sobre a linha do paralelo 30° é $1050\pi\sqrt{3}$ km.

Alternativa **c**.

Unidade 4: Análise de medidas e representações gráficas

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG01, CG02, CG03, CG04, CG07, CG08 e CG10.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03 e CEMAT04.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT202, EM13MAT316, EM13MAT406 e EM13MAT407.

Temas Contemporâneos Transversais:
Direitos da Criança e do Adolescente; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação Financeira*; *Educação Fiscal*; *Saúde*; *Vida Familiar e Social*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Determinar as medidas de centralidade (ou posição): média, mediana e moda para os valores de uma variável quantitativa e analisar em que situações o uso de uma dessas medidas é mais (ou menos) adequado.
- Resolver problemas em situações cotidianas envolvendo média aritmética simples e ponderada.
- Compreender a necessidade de definir uma medida que revele o grau de variabilidade ou dispersão de um conjunto de dados.
- Calcular a amplitude de um conjunto de dados e usá-la criticamente para comparar, quanto à variabilidade, 2 conjuntos de valores.
- Calcular variância e desvio padrão de uma relação de dados e usá-los, criticamente, para comparar o grau de dispersão (em torno da média) de 2 conjuntos de valores.
- Reconhecer e calcular quartis e percentis para elaborar uma representação em *box-plot* (no caso dos quartis).

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

Essa abertura privilegia o trabalho com os TCTs *Saúde*, *Direito da Criança e do Adolescente* e *Vida Familiar e Social* ao abordar cobertura vacinal no Brasil.

Converse com os estudantes sobre a importância da vacinação. Incentive-os a consultar os calendários de vacinação apresentados a seguir e verificar se a carteirinha de vacinação está completa, de acordo com a faixa etária.

- Calendário nacional de vacinação da criança, disponível em: https://tedit.net/x7mpff. Acesso em: 4 out. 2024.
- Calendário nacional de vacinação do adolescente, disponível em: https://tedit.net/ysqk0s. Acesso em: 4 out. 2024.

Proposta para o professor

Confira o texto "*Fake news* sobre vacinas buscam gerar medo, dúvidas e lucro", da *Agência Brasil*, para compreender melhor como as *fake news* causaram um infodemia durante a pandemia da covid-19. Disponível em: https://tedit.net/6057ee. Acesso em: 2 out. 2024.

A seguir apresentamos os exemplos de resposta às questões propostas na abertura dessa Unidade.

1. Exemplo de resposta: A diminuição da cobertura vacinal de crianças pode ter várias consequências graves para a saúde pública. Entre elas, está a proliferação de doenças infecciosas, que se tornam mais difíceis de controlar quando uma parte significativa da população não está imunizada. Além disso, doenças que haviam sido erradicadas ou controladas, como a poliomielite, podem ressurgir, colocando em risco a saúde de muitas pessoas. Outro problema é o desenvolvimento de novas variantes de vírus, que podem ser mais resistentes às vacinas existentes, complicando ainda mais os esforços de controle de doenças.
2. Exemplo de resposta: O anticientificismo tem consequências sérias para a saúde pública. A disseminação de informações falsas pode levar à hesitação ou recusa vacinal, resultando em um aumento de casos de doenças evitáveis. Isso, por sua vez, pode sobrecarregar os sistemas de saúde, que terão de lidar com surtos de doenças que poderiam ter sido prevenidas. Para combater o anticientificismo, é fundamental investir em educação e informação, reafirmando dados corretos sobre vacinas e incentivando a verificação de notícias antes de compartilhá-las. Campanhas de conscientização sobre a importância da vacinação também são essenciais para aumentar a adesão às vacinas.
3. Exemplo de resposta: A ciência fundamenta a eficácia e a segurança das vacinas através de métodos rigorosos, como ensaios clínicos, que testam a segurança e a eficácia das vacinas em diferentes populações. Esses estudos são revisados por outros cientistas para validar os resultados, garantindo a precisão das conclusões. Após a aprovação, as vacinas continuam a ser monitoradas para identificar quaisquer efeitos adversos raros e a eficácia é continuamente avaliada por meio de dados epidemiológicos que mostram a redução de casos de doenças.

Sugerimos que essa abertura seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Capítulo 8

De forma geral, o capítulo, ao abordar medidas em Estatística, possibilita o desenvolvimento da habilidade EM13MAT316. As seções "Atividades" das páginas 217 e 221 envolvem o cálculo e a interpretação das medidas de tendência central (média, moda e mediana). Já a seção "Atividades" da página 226 está associada às medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

A seguir, apresentamos a resolução do boxe "Pense nisto" da página 224.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)=\left(x_1-\bar{x}\right)+\left(x_2-\bar{x}\right)+\ldots+\left(x_n-\bar{x}\right)=$$

$$=\underbrace{\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)}_{\substack{\text{soma de todos}\\ \text{os valores}}}-\underbrace{\left(\bar{x}+\bar{x}+\ldots+\bar{x}\right)}_{n\text{ parcelas}}$$

Como $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, temos que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \cdot \bar{x}$, logo:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = n \cdot \bar{x} - n \cdot \bar{x} = 0$$

Desse modo, temos $\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0$.

Interligando

O trabalho com essa seção favorece para o desenvolvimento das competências gerais CG07 e CG10 da BNCC, do TCT *Educação em Direitos Humanos* e da habilidade EM13MAT102 relacionada à análise de amostras de pesquisas estatísticas.

Além disso, a seção favorece a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas ao propor o estudo das eleições e das pesquisas eleitorais no Brasil. Dessa maneira, a seção pode ser trabalhada em conjunto com professores da área, favorecendo a integração dos aspectos históricos e geográficos em uma perspectiva nacional ou regional.

Educação financeira

Essa seção contribui para o desenvolvimento das competências gerais CG7 e CG10 da BNCC e dos TCTs *Educação Financeira* e *Educação Fiscal*. Além disso, ao abordar taxas de inflação, é promovido o desenvolvimento da habilidade EM13MAT104.

Ao estudar o cenário político-econômico do Brasil, os estudantes são incentivados a analisar como as políticas públicas e decisões governamentais impactam a economia e as finanças pessoais. A seção permite a integração com outras disciplinas, como História, ao explorar a evolução do dinheiro e dos impostos, e Geografia, ao abordar a distribuição e o impacto das políticas econômicas em diferentes regiões.

O estudo do cenário político em conjunto com aspectos históricos e financeiros oferece uma visão abrangente das questões que envolvem o consumo, o trabalho e o dinheiro, preparando os estudantes para uma compreensão mais profunda e crítica das interações entre política e economia.

Projeto

O objetivo do projeto é promover o planejamento e a execução de uma pesquisa amostral com análises de medidas de tendência e de dispersão, acerca do tema mortalidade infantil no Brasil. Para isso, será necessário buscar e coletar as informações e apresentar os resultados de modo compreensível, usando linguagem estatística, observando dados reais e dando significado da aplicação e modelagem matemática. A ideia oportuniza um espaço para envolver os estudantes em questões relevantes para a sociedade. O produto desse projeto é um relatório analítico e estatístico dos dados de mortalidade infantil no Brasil em comparação aos dados do município/distrito em que vivem.

A realização de uma pesquisa que envolva planejar, coletar e analisar dados sobre a mortalidade infantil no Brasil oportuniza aos estudantes explorar, produzir e partilhar informações que levem ao entendimento mútuo, favorecendo o desenvolvimento da competência geral CG04 da BNCC. Ao participarem desse projeto os estudantes oportunizam desenvolver as habilidades EM13MAT102 e EM13MAT202, uma vez que constroem e interpretam gráficos e tabelas e selecionam cuidadosamente a fonte de informação, analisando as medidas em estatística.

Ao participarem do projeto, os estudantes terão a possibilidade de comunicação colaborativa ao acessar e produzir informações, conhecimento e o desenvolvimento de habilidades, envolvendo autonomia ao exercerem protagonismos de autorias, tomadas de decisões e aprofundamento do conhecimento matemático. O projeto contribui para o ODS **3**, Saúde e Bem-estar, no que tange a assegurar a garantia de vida saudável e promover o bem-estar para todos, em todas as idades, e também o ODS **17**, pois a análise dos dados possibilita a implementação de planos para reduzir a mortalidade infantil.

Para começar

Auxilie os estudantes a trabalhar com pesquisas e oriente sobre a importância da citação das fontes pesquisadas e utilizadas em um determinado estudo. Se necessário, durante o processo, auxilie os estudantes na escolha e na organização dos dados e, também, na escrita dos textos, que devem ser suscintos e didáticos.

Desenvolvimento do projeto

Organize os estudantes em 6 grupos. Cada grupo organizará uma pesquisa envolvendo a interpretação de dados sobre a mortalidade infantil no país e na organização e escolhas que visam a apresentação de relatório analítico e estatístico, pois as atividades envolvem o planejamento, a coleta e a análise de dados realísticos. Se julgar adequado, é possível atribuir um subtema a cada grupo e, ao final do projeto, formalizar um único relatório que inclua todas as pesquisas. Exemplos de subtemas:

- quantidade de nascidos vivos;
- cobertura vacinal de crianças;
- óbitos por causas claramente evitáveis;
- óbitos por desnutrição;
- aleitamento materno;
- taxa de mortalidade infantil.

Na "Etapa 1", os grupos se organizam para pesquisar a temática. Esse momento envolve a busca por fontes confiáveis sobre a mortalidade infantil no Brasil e no município/distrito da comunidade local. Eles não precisam ainda, nessa etapa, ler a fundo o conteúdo pesquisado; o importante é que consigam organizar as fontes de pesquisa.

Na "Etapa 2", os estudantes vão de fato consumir as informações que pesquisaram. Oriente-os a destacar os pontos mais importantes de cada texto lido, de maneira a facilitar a posterior busca das citações que devem entrar no relatório.

Oriente os grupos sobre importância do cuidado ao usar de dados ou fontes de terceiros, da necessidade da citação desses dados e que, mesmo na realização em grupo dos resumos escritos, as fontes devem ser evidenciadas. Explique que, se a fonte for omitida, mesmo que seja um trabalho de escola, a cópia de textos de outras pessoas pode ser considerada plágio.

A "Etapa 3" envolve a busca de dados reais disponibilizados na página de internet do Observatório da Criança e Adolescente. Esses dados disponibilizados são de pesquisas anteriormente realizadas e de domínio público. Os grupos devem realizar as buscas das informações sobre a mortalidade infantil em seu município/distrito e, caso não tenham dados da localidade, sugerimos orientá-los a pesquisar dados de regiões próximas, do próprio estado ou da capital em que residem. Se, por algum motivo, optar-se por não utilizar o *site* indicado, será necessário fazer uma pesquisa mais demorada sobre os dados e transpô-los para uma planilha eletrônica ou *software* de gráficos que crie gráficos e tabelas.

A "Etapa 4" envolve a organização da redação do relatório, nos quais serão apresentados os resumos, as citações, os gráficos gerados, a organização dos dados em tabelas sobre a temática e os possíveis resultados encontrados pelos grupos. Lembre os grupos de priorizar na pesquisa: as principais causas da mortalidade infantil no Brasil e no município/distrito em que vivem, as maneiras de prevenção da mortalidade infantil e as ações que a comunidade pode tomar para prevenir o problema.

A "Etapa 5" favorece a socialização dos resultados encontrados pelos grupos. Auxilie os estudantes no compartilhamento e na escuta dos resultados e planejem alternativas para juntar os dados em um relatório único, como uma só pesquisa, para o projeto de conclusão da turma.

Produto final

Nessa etapa, sugere-se que seja organizada uma roda de conversa com a turma para debater os resultados encontrados pelos grupos, organizados em um único relatório, bem como da possibilidade de esse relatório da turma ser compartilhado com a comunidade escolar por meio de uma campanha de conscientização.

Avaliação do projeto

Oportunize 3 momentos para reflexão com os estudantes. O primeiro relacionado à organização do que foi necessário e como foi demandado o grupo na organização de uma pesquisa envolvendo dados reais. O segundo momento relacionando se a turma consegue observar e avaliar a aplicação de um conhecimento matemático desenvolvido no cotidiano. O terceiro, visando a reflexão sobre a importância de se pensar as principais causas da mortalidade infantil no município/distrito em que vivem, maneiras de prevenção e ações que a comunidade pode tomar para prevenir o problema. Tais ações devem ter como base os dados analisados.

Capítulo 9

As atividades **1** a **4** da seção "Atividades" da página 239 promovem o desenvolvimento da habilidade EM13MAT407 ao propor o trabalho com dados apresentados por meio de diagrama de ramos e folhas, *box-plots* e histogramas.

Aproveite as atividades **5** a **8** propostas na seção "Atividades" da página 243 para promover o desenvolvimento da habilidade EM13MAT316. Na atividade **5**, os estudantes devem interpretar uma tabela de frequência, enquanto nas atividades **6** e **8** eles devem interpretar gráficos de frequência. Já na atividade **7**, eles vão construir um histograma. Essas atividades também contribuem para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT406.

Interligando

As atividades **1** e **2** dessa seção tratam da análise estatística dos dados dos simulados, aplicando conceitos de medidas de tendência central, dispersão e gráficos. Os estudantes usam habilidades matemáticas para criar e interpretar os *box-plots*, ajudando a entender como o tempo de estudo pode impactar o desempenho acadêmico. Embora o foco principal seja em Matemática, a interpretação dos resultados e a argumentação sobre a relação entre o tempo de estudo e o desempenho acadêmico também requerem habilidades de leitura crítica e produção textual. Os estudantes precisam explicar suas descobertas e debater o impacto das práticas de estudo, o que envolve habilidades argumentativas e de comunicação. Portanto, sugere-se que essa seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Língua Portuguesa, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

Para trabalhar o exercício de construção e análise de *box-plots*, comece retomando o conceito de *box-plot*, explicando que se trata de um diagrama que ajuda a visualizar a distribuição dos dados, destacando a mediana, os quartis e possíveis *outliers* (valores discrepantes). Neste exercício em específico não teremos *outliers*. Vale ressaltar que esse diagrama é útil para entender a variabilidade dos dados e comparar diferentes conjuntos de informações de maneira visual e clara.

Para a construção dos *box-plots*, os estudantes devem organizar os dados das notas de cada simulado, separando as informações dos 2 simulados de Matemática e dos 2 simulados de Língua Portuguesa. Em seguida, devem calcular o Limite Inferior (*LI*), o Limite Superior (*LS*), o valor mínimo, o primeiro quartil (Q_1), a mediana (Q_2), o terceiro quartil (Q_3) e o valor máximo. Depois, devem representar esses dados em um *box-plot* para cada conjunto de notas. Os estudantes devem criar então uma caixa que se estenda do Q_1 ao Q_3 e adicionar uma linha para representar a mediana e representar os fios que se estendem até o valor mínimo e máximo, excluindo os *outliers*, que neste caso não teremos. Após a construção dos *box-plots*, oriente os estudantes a analisá-los e compará-los. Peça que avaliem a variabilidade das notas, identificando as diferenças entre as distribuições dos 2 simulados de Matemática e dos 2 simulados de Língua Portuguesa. Eles devem avaliar a posição da mediana e a amplitude da caixa que representa a dispersão dos dados. Questione se identificam *outliers* para avaliar se compreenderam o conceito. Incentive o debate na sala sobre como essas variáveis refletem o desempenho acadêmico e quais podem ser as implicações desses dados para a análise do impacto dos simulados. Destaque que há uma diversidade de variáveis que podem impactar os resultados de uma pesquisa e, por isso, um único método não pode ser suficiente para aferir a validade das conclusões realizadas.

Na atividade **3** dessa seção, organize os estudantes em 10 grupos e proponha que cada grupo fique responsável pela análise das notas de uma disciplina específica. Dessa maneira, ao final, deve ser montado um relatório único para a turma, contendo todas as análises e conclusões das pesquisas. Após a finalização, é possível combinar com a coordenação da escola uma apresentação da turma para propor e justificar a necessidade de aulas de reforço.

Viralize!

Nessa seção, abordamos o tema tempo de tela, propiciando o trabalho com os TCTs *Saúde* e *Vida Familiar e Social*, bem como com o ODS **3**, Saúde e Bem-estar.

Aproveite esse momento para propor uma conversa com os estudantes sobre o tempo que passam em frente às telas e as consequências para a saúde que o uso excessivo delas pode causar.

Na atividade **1**, destaque aos estudantes a importância de analisar, selecionar e apresentar dados de maneira coerente para evitar conclusões errôneas. Nessa atividade, espera-se que os estudantes identifiquem que a manchete pode induzir o leitor ao erro.

Proposta para o professor

Para mais informações sobre a temática tempo de tela envolvendo crianças e adolescentes, acesse o conteúdo "Uso de telas por crianças e adolescentes" da Secretária de Comunicação da Presidência da República. Disponível em: https://tedit.net/begek5. Acesso em: 2 out. 2024.

Para fundamentar saberes

As atividades propostas nessa seção podem ser usadas para avaliar o desempenho dos estudantes a respeito de habilidades trabalhadas ao longo da Unidade. A atividade **1**, por exemplo, promove o trabalho com a habilidade EM13MAT316 e com o cálculo de porcentagens. Já a atividade **2** promove o desenvolvimento das habilidades EM13MAT316 e EM13MAT406.

Proposta para o estudante

(FMC-RJ) Os números 4 (quatro), 5 (cinco), 7 (sete) e 8 (oito) representam as notas de quatro alunos em um teste. O desvio padrão desse conjunto de notas é um número que pertence ao intervalo:

a) (0, 1) **b)** (1, 2) **c)** (2, 3) **d)** (3, 4) **e)** (4, 5)

[O intervalo de números reais $]a, b[$ pode ser expresso por (a, b).]

Resolução:

Calculando a média desses valores, temos:

$$\bar{x} = \frac{4+5+7+8}{4} = 6$$

Calculando agora o desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}\left(x_1 - \bar{x}\right)^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(4-6)^2 + (5-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4+1+1+4}{4}} = \sqrt{2,5}$$

Como $1^2 < 2,5 < 2^2$, temos: $1 < \sqrt{2,5} < 2$.

Logo, $\sigma \in (1, 2)$; alternativa **b**.

Unidade 5: Funções trigonométricas

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG01, CG02, CG08 e CG10.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT03 e CEMAT04.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT306, EM13MAT307 e EM13MAT404.

Temas Contemporâneos Transversais:
Saúde; *Vida Familiar e Social*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Estudar "as demais voltas" na circunferência trigonométrica e, a partir daí, definir as funções trigonométricas.
- Reconhecer que fenômenos periódicos naturais (mudança das marés, por exemplo) podem ser modelados, de forma aproximada, por funções trigonométricas.
- Construir, ler e interpretar gráficos de funções trigonométricas.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

A abertura da Unidade pode ser trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

No segundo questionamento da abertura, caso algum estudante responda que não há periodicidade na ocorrência das estações e apresente dados que justifiquem essa afirmativa, é um momento oportuno para realizar um debate sobre pesquisa na internet, análise de fontes, pensamento científico e pós-verdade. Nesse contexto, é importante destacar que existe um consenso científico sobre a existência das estações do ano. Avalie a fonte citada pelo estudante, identificando, junto da turma, fragilidades tanto no texto quanto na origem do argumento. Compare essa fonte, em aspectos visuais e técnicos, com uma fonte científica fidedigna. As páginas usadas como fonte de pesquisa para a realização da atividade podem servir como exemplos de fontes confiáveis a serem apresentadas aos estudantes.

A decomposição e o reconhecimento de padrões, 2 pilares do pensamento computacional, estão fortemente presentes na construção de saberes científicos. No caso do estudo do movimento da Lua, a identificação do padrão de repetição das fases permite que cientistas decomponham esse movimento de diferentes maneiras para seu estudo.

Capítulo 10

A seguir, apresentamos a resposta da questão do boxe "Pense nisto" da página 252.

As fases da Lua são determinadas pela posição relativa da Lua em relação à Terra e ao Sol. O ciclo lunar é dividido em 4 fases principais: lua nova, quarto crescente, lua cheia e quarto minguante. Essa divisão em 4 fases, ao invés de 8 é baseada em padrões observáveis claros.

- **Lua nova:** A Lua não é visível da Terra porque a parte iluminada está voltada para o Sol.
- **Quarto crescente:** A Lua é parcialmente visível e está crescendo em iluminação.
- **Lua cheia:** A parte visível da Lua está completamente iluminada.
- **Quarto minguante:** A Lua é novamente parcialmente visível, mas está diminuindo em iluminação.

Ao serem agrupadas em 8 fases (e não em 4), as porções iluminadas pelo Sol, em cada fase, são mais parecidas entre si, como pode ser percebido na ilustração da página 252.

Assim, a divisão em 4 fases principais é baseada em padrões visíveis e são suficientes para serem facilmente identificados sem

o uso de instrumentos modernos. Contudo, a depender do objetivo, convém dividir esse movimento em, por exemplo, 8 fases.

A decomposição e o reconhecimento de padrões são 2 pilares do pensamento computacional muito presentes na construção de saberes científicos. No caso do estudo do movimento da Lua, a identificação do padrão de repetição das fases permite que cientistas decomponham esse movimento de diferentes maneiras para seu estudo.

A seguir, apresentamos a resposta da questão no boxe "Pense nisto" da página 253.

Foram obtidas por meio das seguintes conversões:

Quinta-feira (18/5/2023)

2 h 17 min: $2 + (17 \div 60) \simeq 2{,}28$

8 h 38 min: $8 + (38 \div 60) \simeq 8{,}63$

14 h 38 min: $14 + (38 \div 60) \simeq 14{,}63$

20 h 51 min: $20 + (51 \div 60) \simeq 20{,}85$

Sexta-feira (19/5/2023)

24 h + 2 h 58 min: $24 + 2 + (58 \div 60) \simeq 26{,}97$

24 h + 9 h 17 min: $24 + 9 + (17 \div 60) \simeq 33{,}28$

24 h + 15 h 19 min: $24 + 15 + (19 \div 60) \simeq 39{,}32$

24 h + 21 h 26 min: $24 + 21 + (26 \div 60) \simeq 45{,}43$

Sábado (20/5/2023)

48 h + 3 h 34 min: $48 + 3 + (34 \div 60) \simeq 51{,}57$

48 h + 9 h 56 min: $48 + 9 + (56 \div 60) \simeq 57{,}93$

48 h + 16 h 02 min: $48 + 16 + (2 \div 60) \simeq 64{,}03$

48 h + 22 h 04 min: $48 + 22 + (4 \div 60) \simeq 70{,}07$

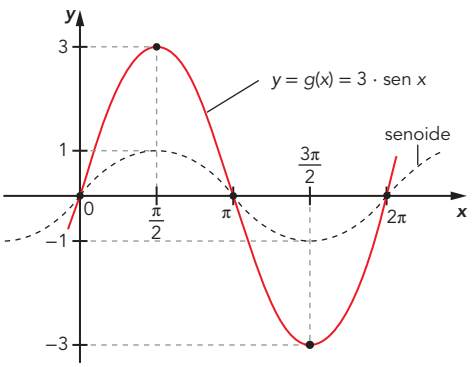
No tópico "As demais voltas na circunferência trigonométrica", reforce que, como a circunferência trigonométrica tem medida de raio 1 u.c., a medida de comprimento do arco é numericamente igual ao módulo da medida dele em radianos. Utilizando esse fato, mostre que os pontos associados aos números reais na circunferência trigonométrica podem ser determinados "enrolando" a reta real na circunferência. "Enrolando" na circunferência, no sentido anti-horário, teremos os pontos associados aos números reais maiores do que zero. No sentido horário, teremos os pontos associados aos números reais menores do que zero.

Na atividade **4** da seção "Atividades" da página 257, os estudantes têm a oportunidade de desenvolver a habilidade EM13MAT307 ao calcularem a medida de área da região limitada por um um polígono regular inscrito em uma circunferência trigonométrica.

A seguir, apresentamos a resposta ao questionamento feito no boxe "Pense nisto" da página 259.

Sim, a afirmação é válida para qualquer que seja o x do domínio de g. Fixemos um valor x_0 do domínio. Na senoide, temos $f(x_0) = \text{sen } x_0$, enquanto na função g dada temos $g(x_0) = 3 \cdot \text{sen } x_0 = 3 \cdot f(x_0)$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



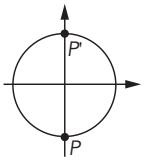
No "Experimente" da página 262, sugira aos estudantes que construam os outros gráficos estudados até agora no *software* de Geometria dinâmica, para comparação com o gráfico de $y = \text{sen } x$.

Alerte-os que, na digitação da lei que define f no *software*, em geral, o uso dos parênteses é obrigatório. Deve-se, por exemplo, digitar "y=sen(2x)" para o gráfico da função $y = \text{sen } 2x$.

Comente com os estudantes que, no *software* de Geometria dinâmica, o número real π, em geral, deve ser digitado por extenso: "pi".

A seguir, apresentamos a resposta ao questionamento feito no boxe "Pense nisto" da página 265.

Os números reais do tipo $\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, estão associados a um mesmo ponto P na circunferência trigonométrica. Daí, $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = -1$, com $k \in \mathbb{Z}$.



Banco de imagens/
Arquivo da editora

Analogamente, os reais do tipo $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, estão associados a um mesmo ponto P' e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = 1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Na atividade **5** da seção "Atividades" da página 266, é possível desenvolver a habilidade EM13MAT404 ao definir o sinal do seno nos períodos apresentados.

A atividade **16** possibilita a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e promove o desenvolvimento do TCT *Saúde*.

Proposta para o professor

Para mais informações sobre vacinas, soros e imunizações no Brasil:

- NOVAES, Hillegonda Maria Dutilh. Vacinas, soros & imunizações no Brasil. *Cadernos de Saúde Pública* [*on-line*], v. 22, n. 10, p. 2255-2257, 2006. ISSN 1678-4464. Disponível em: https://tedit.net/lv9tjd. Acesso em: 18 ago. 2024.

Projeto

Esse projeto propõe uma reflexão, considerando os conhecimentos das funções trigonométricas, acerca das alterações da maré e do nível de água no mar com o objetivo de tornar claras algumas consequências das mudanças climáticas, como o aquecimento global e a poluição dos mares, por meio de um infográfico.

A criação desse infográfico promove as competências gerais CG01 e CG02 e a habilidade EM13MAT306 ao incentivar que os estudantes usem os conhecimentos de funções trigonométricas para entender as marés e as consequentes mudanças em seus ciclos e propor que criem soluções para esses problemas.

A concepção desse projeto está alinhada com o ODS **11**, que busca promover cidades mais sustentáveis e resilientes a eventos ambientais, por incentivar os estudantes a analisar esses eventos; e também com o ODS **14**, que promove a conservação e o uso dos oceanos e seus recursos de forma sustentável,

por incentivar os estudantes a refletir sobre o agravamento das consequências das mudanças climáticas nos problemas existentes.

Para começar

Para esse projeto, os estudantes precisarão de acesso à internet e a algum *software* de gráficos.

Como os estudantes já trabalharam tábuas de marés em outros momentos neste capítulo, pergunte a eles se já passaram por situações em que tiveram de esperar a maré baixar ou aumentar para conseguirem atravessar. Promova um debate sobre a população que mora nesses lugares e como dependem das marés para atividades como turismo, pesca e transporte.

Organize os estudantes em 7 grupos.

Desenvolvimento do projeto

Na "Etapa 1", espera-se que os estudantes apresentem as informações pesquisadas. Direcione as conversas para eventos sobre o assunto que apareceram na mídia. Observe se algum dos grupos trouxe a ferramenta virtual construída pela Nasa, para análise do quanto o nível do mar vai subir em todo o mundo. Ela está disponível em: https://tedit.net/6yddjk (acesso em: 4 out. 2024).

Na "Etapa 2", os estudantes devem expor sobre os conceitos e as informações solicitados. Observe se eles compreenderam que a ação gravitacional do Sol e da Lua, principalmente, tem grande influência no ciclo das marés. É preciso que saibam, também, que a altura das marés varia de um local para o outro, por existir diferentes relevos no fundo do mar e diferentes estruturas rochosas. Além disso, o nível do mar influencia as marés e tende a aumentar por causa das mudanças climáticas. Acesse, a seguir, mais informações sobre alterações no nível do mar:

- Agência Brasil. *Nível do mar subiu mais nos últimos cem anos que nos três milênio anteriores*. Disponível em: https://tedit.net/cknrzd. Acesso em: 4 out. 2024.
- Raíssa Campos. *História do nível do mar*. Zona costeira – Universidade Federal da Bahia. Disponível em: https://tedit.net/kjf8ww. Acesos em: 4 out. 2024.

Na "Etapa 3" e na "Etapa 4", deixe que os estudantes escolham livremente qual localidade gostariam de pesquisar. Tanto as tábuas de marés mais recentes quanto a lista de cidades que apresentam tábuas de marés pela Marinha do Brasil estão disponíveis em: https://tedit.net/oha9jq (acesso em: 4 out. 2024).

O intuito da pesquisa sobre notícias é verificar se ocorreram eventos incomuns relacionados às marés e que possam ter influência sobre o projeto. Em junho de 2024, por exemplo, a população se questionou sobre a maré aparentemente muito baixa em Fortaleza, descrita na reportagem do *Diário do Nordeste*, "Maré mais baixa do que o normal em Fortaleza? Entenda o nível da água no litoral neste período". Disponível em: https://tedit.net/zflkzw. Acesso em: 4 out. 2024.

Auxilie os estudantes a encontrar tábuas de marés mais antigas, pelo menos do ano anterior ao projeto. A comparação de 2 anos pode trazer revelações importantes. Caso tábuas mais antigas não estejam disponíveis, uma alternativa é utilizar o aplicativo da Nasa, indicado anteriormente, para fazer previsões futuras.

Na "Etapa 5", os estudantes deverão aplicar os conhecimentos construídos para modelar uma função à tábua de marés da localidade escolhida. De acordo com a função modelo, ficará mais fácil a comparação entre os pontos que indicam a altura das marés no gráfico. Uma maneira intuitiva que pode ser usada para modelar o fenômeno é inserir os dados reais no *software* e alterar a senoide até que ela se fique próxima de passar por todos os pontos.

Na "Etapa 6", os grupos vão analisar as informações que conseguiram colher, fazendo também uma análise crítica das informações que puderam analisar no gráfico. Ajude-os na interpretação, se for necessário. Como as mudanças nas marés é bem sutil, é possível que a análise seja mais desafiadora.

Na "Etapa 7", caso os estudantes ainda tenham dúvidas, podem fazer mais uma pesquisa em busca de localidades que já têm ações contra a alta das marés, como barreiras físicas para impedir que as atinjam. Um exemplo é a barreira do rio Tâmisa, no Reino Unido, criada para evitar enchentes em Londres há 40 anos. Além disso, diversas cidades brasileiras contam com pequenas barragens na areia.

Se julgar interessante, peça aos estudantes que acessem o texto "Por que devemos nos preocupar com as alterações do nível do mar?", da Unesp para jovens. Disponível em: https://tedit.net/tvt9da. Acesso em: 4 out. 2024.

Produto final

No infográfico, os estudantes devem colocar informações sobre o funcionamento da mudança de marés, a evolução do nível do mar ao longo dos anos, a influência das mudanças climáticas nos oceanos e consequentemente na vida de pessoas que moram em cidades costeiras. Nele, é preciso apresentar imagens e o gráfico que criaram.

Para montar a parte visual, oriente-os a utilizar um aplicativo de edição de textos ou de apresentações.

Avaliação do projeto

Após o evento, realize com os estudantes o levantamento dos pontos positivos e dos pontos negativos que identificaram no decorrer do planejamento e da execução do projeto. Avaliem os infográficos criados de acordo com a variedade de informações e na qualidade da apresentação. Entre outras perguntas, converse com eles sobre: "Você se identificou com o projeto?", "Quais etapas foram mais desafiadoras?" e "O que poderia ter sido feito de maneira diferente?". Oriente-os a refletir sobre o comportamento deles durante o projeto e sobre a interação que tiveram com o grupo.

Interligando

Nessa seção, a Trigonometria é abordada por meio do exemplo da roda-gigante, utilizando a London Eye, localizada em Londres, na Inglaterra, como referência. Além disso, são mencionadas outras rodas-gigantes famosas, como a Roda Rico, localizada em São Paulo. Para enriquecer ainda mais o conteúdo, é interessante apresentar fotografias de outras rodas-gigantes do Brasil e do mundo, como a Yup Star Rio, no Rio de Janeiro, a Singapore Flyer, em Singapura, e a High Roller, em Las Vegas, nos Estados Unidos.

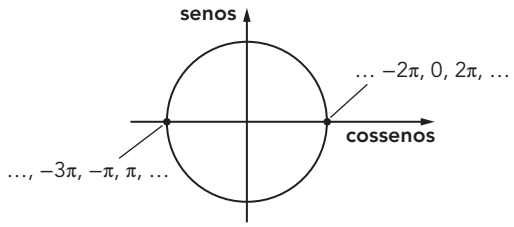
Capítulo 11

A seguir, apresentamos a resposta da questão proposta no boxe "Pense nisto" da página 273.

Se $k \in \mathbb{Z}$:

- $k \cdot 2\pi \in \{..., -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, ...\}$; $\cos(k \cdot 2\pi) = 1$.
- $k \cdot \pi \in \{..., -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...\}$; $\cos(k\pi) = 1$ ou $\cos(k\pi) = -1$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Interligando

Essa seção apresenta a relação entre o estudo da Trigonometria e o fenômeno das marés. Sugerimos que essa seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Física ou Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Do ponto de vista da Física, o fenômeno das marés pode ser abordado a partir da relação com a força gravitacional exercida pela Lua e pelo Sol, que resulta em ciclos de maré alta e maré baixa. A Trigonometria é utilizada para modelar esses ciclos, permitindo previsões precisas sobre a medida da altura e do intervalo de tempo das marés.

Do ponto de vista da Biologia, o fenômeno pode ser analisado a partir do impacto causado pelas mudanças climáticas, resultando na amplificação do efeito das marés e resultando em inundações costeiras mais frequentes e severas. A Trigonometria, novamente, é uma ferramenta útil para modelar e prever esses impactos, auxiliando na elaboração de estratégias de mitigação e adaptação.

Viralize!

Essa seção promove o desenvolvimento dos TCTs *Saúde* e *Vida Familiar e Social* e as competências gerais CG08 e CG10 da BNCC.

Um dos principais assuntos científicos que sofrem com a divulgação em massa de informações falsas é a importância das vacinas para a saúde pública. Se julgar oportuno, antes da realização das atividades, promova um debate sobre as concepções que os estudantes têm sobre vacinas. Procure desmentir quaisquer crenças falsas que possam surgir utilizando dados científicos confiáveis para evitar a presença de negacionismo científico nas respostas das perguntas.

Há um artigo jornalístico que complementa a resposta do item **d** da atividade **1**: https://tedit.net/tgxa1p (acesso em: 4 out. 2024).

O item **b** da atividade **3** pode ser resolvido utilizando um *software* de Geometria dinâmica. Basta inserir no campo de entrada a lei da função "y=3200+1100*sin((π/6)*(x+8))" e analisar o gráfico dela.

Para fundamentar saberes

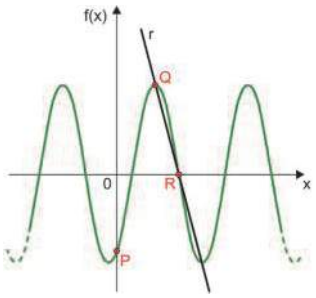
As atividades propostas nessa seção podem ser usadas para avaliar o desempenho dos estudantes a respeito das habilidades trabalhadas ao longo da Unidade. A atividade **4**, por exemplo, permite explorar o desenvolvimento da habilidade EM13MAT306 tendo como contexto o movimento das ondas marítimas.

Proposta para o estudante

(Unesp-SP) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = 2\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

No gráfico de $f(x)$, estão marcados os pontos P, Q e R. O ponto P localiza-se na interseção do gráfico de $f(x)$ com o eixo das ordenadas. Q é o ponto do gráfico de menor abscissa positiva para o qual $f(x)$ é máximo. O ponto R localiza-se na segunda interseção positiva do gráfico de $f(x)$ com o eixo das abscissas. A reta r passa pelos pontos Q e R, como se vê na imagem.

Reprodução/Unesp, 2024



a) Determine as coordenadas do ponto P.

b) Determine o coeficiente angular da reta r.

Resolução:

a) Como o ponto P está localizado na interseção do gráfico com o eixo y, tem-se:

$$f(0) = 2 \cdot \text{sen}\left(3 \cdot 0 - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

Logo, $P(0, -\sqrt{3})$.

b) O ponto Q é o ponto do gráfico de menor abscissa positiva quando $f(x)$ é máximo. A função atinge valor máximo para $\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

$$3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ (com } k \in \mathbb{R})$$

$$x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

Para $k = 0$, tem-se $x = \frac{5\pi}{18}$ e $f\left(\frac{5\pi}{18}\right) = 2 \cdot \text{sen}\left(3 \cdot \frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{3}\right) =$

$= 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 = 2$

Logo, $Q\left(\frac{5\pi}{18}, 2\right)$.

Como o ponto R está localizado na segunda interseção positiva do gráfico com o eixo x, tem-se:

$$0 = 2 \cdot \text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = 0 + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{9}$$

Logo, $R\left(\frac{4\pi}{9}, 0\right)$.

Portanto, o coeficiente angular da reta r, que passa pelos pontos Q e R, é igual a:

$$m_r = \frac{0 - 2}{\frac{4\pi}{9} - \frac{5\pi}{18}} = \frac{-2}{\frac{\pi}{6}} = -\frac{12}{\pi}$$

Resoluções

Unidade 1

Capítulo 1

Atividades

3. **a)** $\frac{11^3 \cdot 11^8 \cdot 11}{11^6} = \frac{11^{12}}{11^6} = 11^6$

b) $\frac{2^{12} \cdot 2^7 \cdot 2^3}{2^{22}} = \frac{2^{22}}{2^{22}} = 2^0 = 1$

c) $\frac{10 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 10^2$

d) $\frac{2^9 \cdot 3^4}{3 \cdot 2^6} = 2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$

e) $\frac{10^{-2} \cdot 10^3}{(10^{-2})^{-1}} = \frac{10}{10^2} = 10^{-1}$

6. **a)** $(a^{-1} + b^{-1}) \cdot ab = a^{-1} \cdot ab + b^{-1} \cdot ab = a + b$

b) $a^{-2} - b^{-2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} = \frac{(b + a) \cdot (b - a)}{a^2b^2}$

c) $(a^{-1})^2 + (b^2)^{-1} + 2(ab)^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{ab} =$

$= \frac{b^2 + a^2 + 2ab}{a^2b^2} = \frac{(a + b)^2}{a^2b^2} = \left(\frac{a + b}{ab}\right)^2$

12. **a)** $\left(3 - \sqrt{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 11 - 6\sqrt{2}$

b) $\left(\sqrt{11} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{11} + \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{11}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 11 - 2 = 9$

c) $\left(\sqrt[4]{3} + 1\right)^2 = \left(\sqrt[4]{3}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot 1 + 1^2 = \sqrt{3} + 2\sqrt[4]{3} + 1$

d) $\left(2 + \sqrt{2}\right)^3 = \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) =$

$= \left(2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2\right) \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) =$

$= \left(6 + 4\sqrt{2}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) = 12 + 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 8 =$

$= 20 + 14\sqrt{2}$

13. **a)** $\sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)} =$

$= \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6 - 2} = \sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt{8 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{8 - \sqrt{15}} = \sqrt{\left(8 + \sqrt{15}\right) \cdot \left(8 - \sqrt{15}\right)} =$

$= \sqrt{8^2 - \left(\sqrt{15}\right)^2} = \sqrt{64 - 15} = \sqrt{49} = 7$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{12} + 2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{12} - 2} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{12} + 2\right) \cdot \left(\sqrt{12} - 2\right)} =$

$= \sqrt[3]{\left(\sqrt{12}\right)^2 - 2^2} = \sqrt[3]{12 - 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{10} + \sqrt{2}} =$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{10 - 2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

14. **a)** $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

e) $\frac{25}{\sqrt[5]{5^2}} = \frac{25}{\sqrt[5]{5^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^3}} = \frac{25\sqrt[5]{125}}{5} = 5\sqrt[5]{125}$

f) $\frac{2}{\sqrt[9]{32}} = \frac{2}{\sqrt[9]{2^5}} = \frac{2}{\sqrt[9]{2^5}} \cdot \frac{\sqrt[9]{2^4}}{\sqrt[9]{2^4}} = \frac{2\sqrt[9]{16}}{2} = \sqrt[9]{16}$

15. **a)** $\frac{2}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)}{2 - 1} =$

$= 2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} =$

$= \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right)}{2 - 1} = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) = 2 + \sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} =$

$= \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{5 - 2\sqrt{10} + 2}{5 - 2} =$

$= \frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{10} + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{5}} =$

$= \frac{\left(\sqrt{10}\right)^2 + \sqrt{10} \cdot \sqrt{5}}{\left(\sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{10 + \sqrt{50}}{10 - 5} =$

$= \frac{10 + 5\sqrt{2}}{5} = \frac{10}{5} + \frac{5\sqrt{2}}{5} = 2 + \sqrt{2}$

19. **a)** Para $x = 10$:

$\sqrt{10 - 1} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \sqrt{10 - 1} = 3$

Como $3 > 2$, o cálculo será $10^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Para $x = \frac{5}{4}$:

$\sqrt{\frac{5}{4} - 1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = \frac{1}{2}$

Como $\frac{1}{2} < 2$, o cálculo realizado será $1 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 =$

$= 1 + \frac{25}{16} = \frac{41}{16}$.

Para $x = \sqrt{2}$: $\sqrt{\sqrt{2} - 1} \simeq \sqrt{1{,}4 - 1} = \sqrt{0{,}4} \simeq 0{,}63$.

Como $0{,}63 < 2$, o cálculo realizado será:

$1 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2 = 3$

b) Como $x^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, será possível executar o fluxograma se, e somente se, os radicandos das raízes quadradas forem maiores do que zero.

Assim, $\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 1$; ou seja, para qualquer número real x maior ou igual 1.

c) Para $\sqrt{x-1} > 2$, temos $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = 26 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = (26)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = 676 \Rightarrow x = \frac{1}{676}$. Esse resultado não serve, já que $x \geqslant 1$ (pelo item **b**).

Para $\sqrt{x-1} < 2$, temos $1 + x^2 = 26 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5$ ou $x = -5$ (não serve, já que, pelo item **b**, $x \geqslant 1$). Logo, $x = 5$.

21. **b)** $2 = \left(\frac{h \cdot 80}{3600}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^2 = \left[\left(\frac{h \cdot 80}{3600}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \Rightarrow 4 = \frac{h \cdot 80}{3600} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 180$; ou seja, 180 cm ou 1,80 m.

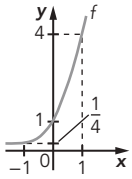
c) $ASC_{Eli} = \sqrt{\frac{h \cdot 81}{3600}}$

$ASC_{Rui} = \sqrt{\frac{1{,}21h \cdot 81}{3600}} = 1{,}1 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot 81}{3600}}$

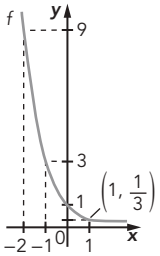
Assim, $ASC_{Rui} = 1{,}1 \cdot ASC_{Eli}$.

Como 1,1 = 110%, concluímos que $x\%$ = 10%; ou seja, $x = 10$.

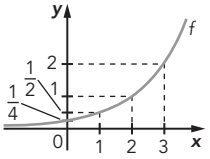
23. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; crescente.



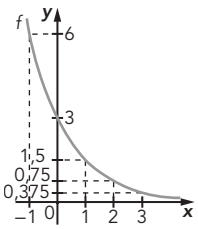
b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; decrescente.



c) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; crescente.



d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; decrescente.



24. **a)** $f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow m \cdot 6^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 3$

b) $f(x) = 3 \cdot 6^{-x}$ e $f(-1) = 3 \cdot 6^1 = 18$.

c) $f(0) = 3 \cdot 6^0 = 3$; $P(0, 3)$, então a ordenada é 3.

25. **a)** $f(0) = 3 \Rightarrow a + b \cdot 2^0 = 3$

$f(1) = 5 \Rightarrow a + b \cdot 2^1 = 5$

$\begin{cases} a + b = 3 \\ a + 2b = 5 \end{cases} \Rightarrow b = 2$ e $a = 1$

b) $f(x) = 1 + 2 \cdot 2^x$

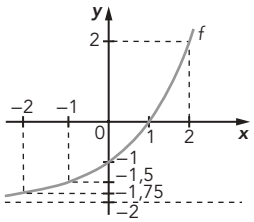
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^x > 0 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2^x > 0 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) > 1 \Leftrightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$

d) Não existe esse ponto. O gráfico de f não intersecta o eixo x. Note que a equação $y = 1 + 2 \cdot 2^x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot 2^x = -1 \Rightarrow 2^x = -\frac{1}{2}$ não possui raiz real.

26. É possível determinar algebricamente o conjunto imagem das funções.

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0 \Rightarrow 2^x - 2 > 0 - 2$, isto é, $y > -2$.
Ou seja:

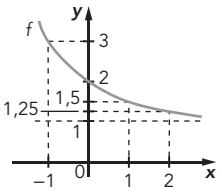
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -2\}$; $D(f) = \mathbb{R}$; crescente.



b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 > 0 + 1$, isto é, $y > 1$.

Ou seja:

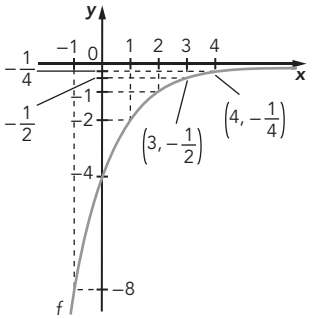
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; $D(f) = \mathbb{R}$; decrescente.



c) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \Rightarrow -4\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0 \cdot (-4)$, isto é, $y < 0$.

Ou seja:

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$; $D(f) = \mathbb{R}$; crescente.

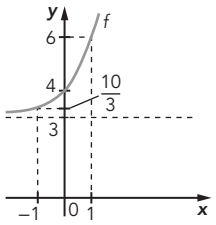


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

d) $\forall x \in \mathbb{R}, 3^x > 0 \Rightarrow 3^x + 3 > 0 + 3$, isto é, $y > 3$. Ou seja: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 3\}$; $D(f) = \mathbb{R}$; crescente.

Banco de imagens/Arquivo da editora



27. **a)**

t (em horas)	0	0,5	1	1,5	2	3	5
Quantidade de bactérias (em milhares)	10	30	90	270	810	7 290	590 490
		$\cdot 3$	$\cdot 3$	$\cdot 3$	$\cdot 3$	$\cdot 3^2$	$\cdot 3^4$

b) $t = 0 \Rightarrow n(0) = 10$

$t = 0{,}5 \Rightarrow n(0{,}5) = 3 \cdot 10 = 3^{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot 10$

$t = 1 \Rightarrow n(1) = 3^2 \cdot 10 = 3^{2 \cdot 1} \cdot 10$

$t = 1{,}5 \Rightarrow n(1{,}5) = 3^3 \cdot 10 = 3^{2 \cdot \frac{3}{2}} \cdot 10$

$t = 2 \Rightarrow n(2) = 3^4 \cdot 10 = 3^{2 \cdot 2} \cdot 10$

Desse modo, a lei que relaciona o número n de bactérias, em milhares, com a medida de intervalo de tempo t, em horas, decorrido a partir do início do estudo é: $n(t) = 3^{2t} \cdot 10$.

29. **a)**

Hoje	R$ 1.000,00
1 ano	$1000 + 0{,}12 \cdot 1000 = 1120$; ou seja, R$ 1.120,00.
2 anos	$1120 + 0{,}12 \cdot 1120 = 1254{,}40$; ou seja, R$ 1.254,40.
3 anos	$1254{,}40 + 0{,}12 \cdot 1254{,}40 \simeq 1404{,}93$; ou seja, aproximadamente R$ 1.404,93.
4 anos	$1404{,}93 + 0{,}12 \cdot 1404{,}93 \simeq 1573{,}52$; ou seja, aproximadamente R$ 1.573,52.
5 anos	$1573{,}52 + 0{,}12 \cdot 1573{,}52 \simeq 1762{,}34$; ou seja, aproximadamente R$ 1.762,34.

b) Hoje: 1000.

1 ano: $1000 \cdot 1{,}12$.

2 anos: $(1000 \cdot 1{,}12) \cdot 1{,}12 = 1000 \cdot (1{,}12)^2$.

3 anos: $[1000 \cdot (1{,}12)^2] \cdot 1{,}12 = 1000 \cdot (1{,}12)^3$.

Desse modo, a lei que relaciona o saldo (s), em reais, desse investimento de Eduardo e o número de anos (x) transcorridos a partir de hoje ($x = 0$) é:

$s(x) = 1000 \cdot (1{,}12)^x$

30. **b)** Em metros quadrados, as medidas de área são:

3 anos: $y = 4000 \cdot (1{,}75)^3 = 4000 \cdot 5{,}4 = 21600$; ou seja, 21 600 m^2.

6 anos: $y = 4000 \cdot (1{,}75)^6 = 4000 \cdot (5{,}4)^2 = 116640$; ou seja, 116 640 m^2.

9 anos: $y = 4000 \cdot (1{,}75)^9 = 4000 \cdot (5{,}4)^3 = 629856$; ou seja, 629 856 m^2.

31. **a)** Para $t = 0$, temos:

$p(0) = 40 - 24 \cdot e^0 = 40 - 24 = 16$; ou seja, 16 unidades.

b) $p(1) = 40 - 24 \cdot e^{-0{,}2} = 40 - \frac{24}{e^{0{,}2}} \simeq 40 - \frac{24}{1{,}2} =$

$= 40 - 20 = 20$; ou seja, aproximadamente 20 unidades.

$p(2) = 40 - 24 \cdot e^{-0{,}2 \cdot 2} = 40 - 24 \cdot e^{-0{,}4} = 40 - \frac{24}{e^{0{,}4}} =$

$= 40 - \frac{24}{\left(e^{0{,}2}\right)^2} \simeq 40 - \frac{24}{1{,}2^2} = 40 - 16{,}6\overline{6} = 23{,}3\overline{3}$. Como devemos ter um número inteiro, arredondamos para 23 unidades. Assim, o acréscimo é de 3 unidades.

c) Quando t é arbitrariamente grande, $e^{-0{,}2t}$ tende a zero, de modo que $p(t)$ tende a $40 - 24 \cdot 0 = 40$; ou seja, 40 unidades.

32. **a)** Falsa. Daqui a 1 ano, a população de **B** será:

$100000 + 20000 = 120000$; ou seja, 120 000 habitantes.

E daqui a 2 anos, a população de **B** será:

$120000 + \underbrace{24000}_{0{,}2 \cdot 120000} = 144000$; ou seja, 144 000 habitantes.

b) Falsa. Em 3 anos, o aumento da população de **A** será de $3 \cdot 25000 = 75000$; ou seja, 175 000 habitantes.

c) Falsa. Em 4 anos, a população de **A** será:

$4 \cdot 25000 + 100000 = 200000$; ou seja, 200 000 habitantes.

População de **B**: pelo item **a**, em 2 anos a população será de 144 mil habitantes.

Em 3 anos: $144000 + 0{,}2 \cdot 144000 = 172800$.

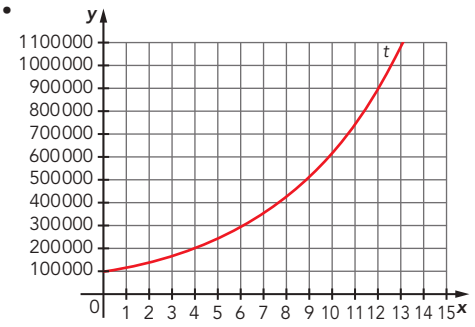
Em 4 anos: $172800 + 0{,}2 \cdot 172800 = 207360$; ou seja, 207 360 habitantes.

Poderíamos também usar a lei $p(t) = 100000 \cdot (1{,}2)^t$:

$p(4) = 100000 \cdot (1{,}2)^4 = 100000 \cdot 2{,}0736 = 207360$.

d) Falsa. A lei é $y = 100000 + 25000x$.

e) Verdadeira. Trata-se da função exponencial $p(t) = 100000 \cdot (1{,}2)^t$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

35. Analisando as alternativas, $M(t) = 2^{at + b}$, em que a e b são constantes reais.

$M(0) = 2^{a \cdot 0 + b} = 16 \Rightarrow 2^b = 2^4 \Rightarrow b = 4$

$M(150) = 2^{a \cdot 150 + 4} = 4 \Rightarrow 2^{150a + 4} = 2^2 \Rightarrow 150a + 4 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\frac{2}{150} = -\frac{1}{75}$

Desse modo, $M(t) = 2^{4 - \frac{t}{75}}$.

Alternativa **a**.

36. De acordo com o enunciado, $f(0) = 3 \Rightarrow 3 = t \cdot u^0 \Rightarrow t = 3$.

Além disso, $f(7) = 18000 \Rightarrow 18000 = 3 \cdot u^7 \Rightarrow$

$\Rightarrow u^7 = 6000 \Rightarrow u = 6000^{\frac{1}{7}}$.

Pelo gráfico, temos que $g(7) = 6\,000^{\frac{1}{7}} = 3{,}47$. Logo, $u = 3{,}47$.

Então, $t + u = 3 + 3{,}47 = 6{,}47$.

Alternativa **c**.

38. **a)** $8^x = 16 \Rightarrow 2^{3x} = 2^4 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$; $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$.

b) $27^x = 9 \Rightarrow 3^{3x} = 3^2 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$; $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

c) $4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$; $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

d) $25^x = 625 \Rightarrow 25^x = 25^2 \Rightarrow x = 2$; $S = \{2\}$.

e) $9^{x+1} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow 3^{2x+2} = 3^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2x + 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 2x = -\frac{5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{5}{6}$; $S = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$.

f) $4^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-1} \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

g) $(0{,}2)^{x+1} = \sqrt{125} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 5^{-x-1} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$; $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

h) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{2^2}\right)^x = \frac{1}{2^3} \Rightarrow 2^{-2x} = 2^{-3} \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$; $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

39. • Nível atual: $t = 0 \Rightarrow n(0) = 7{,}6 \cdot 4^0 = 7{,}6$; ou seja, 7,6 m.

• Devemos determinar t tal que $n(t) = \frac{7{,}6}{8}$:

$\frac{^{1}\cancel{7{,}6}}{8} = \cancel{7{,}6} \cdot 4^{-0{,}2t} \Rightarrow 2^{-3} = (2^2)^{-0{,}2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-3} = 2^{-0{,}4t} \Rightarrow -0{,}4t = -3 \Rightarrow t = 7{,}5$; ou seja, 7,5 meses.

41. **a)** $11^{2x^2-5x+2} = 11^0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = \frac{1}{2}$;

$S = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$.

b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-x} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$;

$S = \{-1\}$.

c) $[(0{,}5)^2]^{x-4} = (0{,}5)^{-2x+1} \Leftrightarrow 2x - 8 = -2x + 1 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$;

$S = \left\{\frac{9}{4}\right\}$.

d) $5^{\frac{2}{3}x} = (5^{-2})^{-x+3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 2x - 6 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$;

$S = \left\{\frac{9}{2}\right\}$.

42. **a)** $2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x-1} = 20 \Rightarrow 2^2 \cdot 2^x - \frac{3 \cdot 2^x}{2} = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x \cdot \frac{5}{2} = 20 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$; $S = \{3\}$.

b) $25^x - 23 \cdot 5^x = 50 \Rightarrow (5^2)^x - 23 \cdot 5^x = 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow (5^x)^2 - 23 \cdot 5^x - 50 = 0$

Fazendo $y = 5^x$, $y^2 - 23 \cdot y - 50 = 0 \Rightarrow y = 25$ ou $y = -2$.

Como $y = 5^x$, temos:

$\begin{cases} 5^x = 25 \Rightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ 5^x = -2 \Rightarrow \text{não existe } x \in \mathbb{R}, \text{ pois } 5^x > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \end{cases}$;

$S = \{2\}$.

43. **b)** $8\,000 \cdot 0{,}125 = 8\,000 \cdot 4^{-0{,}025t} \Rightarrow \frac{1}{8} = 4^{-0{,}025t} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-3} = (2^2)^{-0{,}025t} \Rightarrow 0{,}05t = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 60$; ou seja, 60 meses.

44. **a)** $N(0) = 3\,000 \Rightarrow a \cdot 2^0 = 3\,000 \Rightarrow a = 3\,000$

$N(2) = 24\,000 \Rightarrow a \cdot 2^{2b} =$

$= 24\,000 \xrightarrow{a = 3\,000} 3\,000 \cdot 2^{2b} = 24\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{2b} = 8 \Rightarrow 2^{2b} = 2^3 \Rightarrow b = \frac{3}{2} = 1{,}5$

b) $N(t) = 3\,000 \cdot 2^{1{,}5t}$

16 horas correspondem a: $\frac{16}{24}$ dia $= \frac{2}{3}$ dia.

$N\left(\frac{2}{3}\right) = 3\,000 \cdot 2^{1{,}5 \cdot \frac{2}{3}} = 3\,000 \cdot 2 = 6\,000$; ou seja, 6 000 pessoas.

c) $N(4) = 3\,000 \cdot 2^{1{,}5 \cdot 4} = 3\,000 \cdot 2^6 = 192\,000$; ou seja, 192 000 pessoas.

d) Devemos determinar t correspondente a $N(t) = 3\,000\,000$.

$3\,000\,000 = 3\,000 \cdot 2^{1{,}5t} \Rightarrow 1\,000 = 2^{1{,}5t} \Rightarrow 2^{10} = 2^{1{,}5t} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 6{,}666\ldots \simeq 7$; ou seja, aproximadamente 7 dias.

45. **a)** $t = 0 \Rightarrow n(t) = 10\,000 \Rightarrow 10\,000 =$

$= 15\,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{0+k} \Rightarrow \frac{10\,000}{15\,000} = \left(\frac{3}{2}\right)^k \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^k \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^k \Rightarrow k = -1$

b) $n(t) = 15\,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t-1}$

$n(3) = 15\,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 15\,000 \cdot \frac{9}{4} = 33\,750$; ou seja, 33 750 habitantes.

46. **a)** Sendo $q(t) = 400\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k \cdot t}$, tem-se após 3 anos

$q(3) = 400\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = 200\,000 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$.

Logo, $q(t) = 400\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$.

b) $\frac{1}{512} \cdot 400\,000 = 400\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{t}{3} = 9 \Rightarrow t = 27$; ou seja, 27 anos.

Interligando

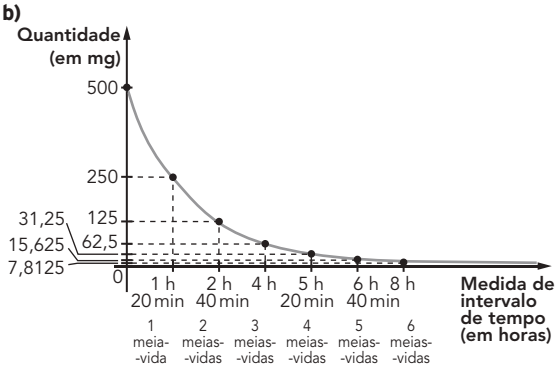
1. **a)**

Dados da Amoxicilina

Número de meias-vidas	Quantidade de Amoxicilina no organismo (em mg)
0	500
1	250
2	125
3	62,5
4	31,25
5	15,625
6	7,8125

Dados elaborados para fins didáticos.

b)



Banco de imagens/Arquivo da editora

c) $q(0) = 500$; $q(1) = \frac{500}{2}$; $q(2) = \frac{\frac{500}{2}}{2} = \frac{500}{2^2}$;

$q(3) = \frac{\frac{500}{2^2}}{2} = \frac{500}{2^3}$; ...

Assim, para um número n de meias-vidas, temos que $q(n) = \frac{500}{2^n}$.

d) Após 8 horas (aproximadamente 6 meias-vidas), a concentração de Amoxicilina é de apenas 7,8125 mg. Em relação à quantidade ingerida, o percentual é:

$\frac{7,8125}{500} = 0,015625 = 1,5625\%$

e) $D(q) = \mathbb{R}_+$; $Im(q) = \mathbb{R}_+^*$; decrescente.

Capítulo 2

Atividades

3. **a)** $\log_{\frac{1}{8}} 4 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^x = 4 \Rightarrow \left(2^{-3}\right)^x = 2^2 \Rightarrow 2^{-3x} = 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

b) $\log_{27} \sqrt{3} = x \Rightarrow (27)^x = \sqrt{3} \Rightarrow \left(3^3\right)^x = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{6}$

c) $\log_{16} 0,125 = x \Rightarrow 16^x = 0,125 \Rightarrow (2^4)^x = 2^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

d) $\log_{\sqrt[5]{7}} 7 = x \Rightarrow \left(\sqrt[5]{7}\right)^x = 7 \Rightarrow \left(7^{\frac{1}{5}}\right)^x = 7^1 \Rightarrow \frac{1}{5}x = 1 \Rightarrow x = 5$

e) Seja $x > 0$ o número, então:

$\log_3 x = -2 \Rightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

f) Seja $1 \neq x > 0$ o valor da base, então:

$\log_x \left(\frac{1}{4}\right) = -1 \Rightarrow x^{-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$

5. $\log a = 2 \Rightarrow 10^2 = 100 = a$; $\log b = -1 \Rightarrow 10^{-1} = b \Rightarrow b = \frac{1}{10}$

a) $\log_b a = \log_{\frac{1}{10}} 100 = -2$, pois $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = 10^2 = 100$.

b) $\log_a b = \log_{100} \frac{1}{10} = -\frac{1}{2}$, pois

$100^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{100^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$.

c) $\log_a b^2 = \log_{100} \frac{1}{100} = -1$

d) $\log (a \cdot b) = \log \left(100 \cdot \frac{1}{10}\right) = \log 10 = 1$

e) $\log \left(\frac{a}{b}\right) = \log \frac{100}{\frac{1}{10}} = \log 1000 = 3$

f) $\log_{\sqrt{b}} a = \log_{\sqrt{\frac{1}{10}}} 100 = x \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right)^x = 100 \Rightarrow \left(10^{-\frac{1}{2}}\right)^x =$

$= 10^2 \Rightarrow x = -4$

6. **a)** $x = 16$

b) A condição de existência da base é:

$x > 0$ e $x \neq 1$ *

Para os logaritmandos, devemos ter:

$2x - 3 > 0$ e $-4x + 8 > 0 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$ **

Como, por * e **, x precisa ser maior do que 0, diferente de 1 e, ao mesmo tempo, $\frac{3}{2} < x < 2$, podemos apenas considerar $\frac{3}{2} < x < 2$.

Com isso, temos: $2x - 3 = -4x + 8 \Rightarrow 6x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{6}$, que satisfaz a condição de existência.

7. **a)** $3^4 = x \Rightarrow x = 81$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = x \Rightarrow x = 2^2 = 4$

c) A condição de existência para os logaritmandos é:

$\begin{cases} 4x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{4}$

$\log_3 (4x - 1) = \log_3 x \Rightarrow 4x - 1 = x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$, que satisfaz a condição de existência.

d) A condição de existência é $x^2 > 0$ e $x > 0 \Rightarrow x > 0$.

$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

Como $x > 0$, temos $x = 1$.

e) $x^0 = 1$ é verdadeiro desde que a base do logaritmo satisfaça a condição $x \in \mathbb{R}$, tal que $x > 0$ e $x \neq 1$.

f) A condição de existência é $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$.

$3^2 = 2x - 1 \Rightarrow x = 5$, que satisfaz a condição de existência.

10. Para que a equação admita uma raiz real dupla, devemos ter $\Delta = 0$, isto é:

$4^2 - 4 \cdot 1 \cdot \log_2 m = 0 \Rightarrow 16 = 4 \log_2 m \Rightarrow \log_2 m = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 2^4 = 16$

Se $m = 16$, a equação é: $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$; ou seja, -2 é a raiz dupla.

11. **a)** $4^3 \cdot 4^{\log_4 2} = 64 \cdot 2 = 128$

b) $\frac{5^1}{5^{\log_5 4}} = \frac{5}{4}$

c) $8^{\log_2 7} = \left(2^3\right)^{\log_2 7} = \left(2^{\log_2 7}\right)^3 = 7^3 = 343$

d) $\left(3^4\right)^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^4 = 2^4 = 16$

e) $5^{\log_{25} 7} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25} 7} = \left(25^{\log_{25} 7}\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

12. $\left(\sqrt{11}\right)^{2018} = a \Rightarrow a = 11^{1009}$

$\left(\sqrt[3]{11}\right)^{3018} = b \Rightarrow b = \left(11^{\frac{1}{3}}\right)^{3018} \Rightarrow b = 11^{1006}$

$\frac{a}{b} = \frac{11^{1009}}{11^{1006}} = 11^3 = 1331$

14. **a)** $\log_b x + \log_b y = -2 + 3 = 1$

b) $\log_b x - \log_b y = -2 - 3 = -5$

c) $\log_b x^3 + \log_b y^2 = 3 \cdot \log_b x + 2 \cdot \log_b y =$
$= 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (3) = -6 + 6 = 0$

d) $\log_b y^2 - \log_b \sqrt{x} = 2 \cdot \log_b y - \frac{1}{2} \cdot \log_b x =$
$= 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot (-2) = 6 + 1 = 7$

e) $\log_b \left(x \cdot \sqrt{y}\right) - \log_b b = \log_b x + \frac{1}{2} \cdot \log_b y - 1 =$
$= -2 + \frac{1}{2} \cdot 3 - 1 = -2 + \frac{3}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

f) $\log_b \left(\sqrt{x} \cdot y^3\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_b \left(\sqrt{x} \cdot y^3\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \left(\log_b x^{\frac{1}{2}} + \log_b y^3\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \log_b x + 3 \cdot \log_b y\right) =$
$= \frac{1}{4} \cdot (-2) + \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{8}{2} = 4$

15. **a)** $\log_5 (5a) - \log_5 (bc) =$
$= (\log_5 5 + \log_5 a) - (\log_5 b + \log_5 c) =$
$= 1 + \log_5 a - \log_5 b - \log_5 c$

b) $\log b^2 - \log (10a) = 2 \cdot \log b - (\log 10 + \log a) =$
$= 2 \cdot \log b - 1 - \log a$

c) $\log_3 (ab^2) - \log_3 c = \log_3 a + 2 \cdot \log_3 b - \log_3 c$

d) $\log_2 (8a) - \log_2 (b^3 \cdot c^2) =$
$= (\log_2 8 + \log_2 a) - (3 \cdot \log_2 b + 2 \cdot \log_2 c) =$
$= 3 + \log_2 a - 3 \cdot \log_2 b - 2 \cdot \log_2 c$

e) $\log_2 \sqrt{8a^2b^3} = \log_2 \sqrt{8} + \log_2 \sqrt{a^2} + \log_2 \sqrt{b^3} =$
$= \frac{3}{2} \cdot \log_2 2 + \log_2 a + \frac{3}{2} \cdot \log_2 b =$
$= \frac{3}{2} + \log_2 a + \frac{3}{2} \cdot \log_2 b$

17. **a)** $\log a + \log b + \log c = \log (a \cdot b \cdot c)$; a expressão é abc.

b) $\log_2 a^3 + \log_2 c^2 - \log_2 b = \log_2 (a^3 \cdot c^2) - \log_2 b =$
$= \log_2 \left(\frac{a^3 \cdot c^2}{b}\right)$; a expressão é $\frac{a^3 \cdot c^2}{b}$.

c) $\log_3 \left(\frac{a}{b}\right) - 2 = \log_3 \left(\frac{a}{b}\right) - \log_3 9 = \log_3 \left(\frac{\frac{a}{b}}{9}\right) =$
$= \log_3 \left(\frac{a}{9b}\right)$; a expressão é $\frac{a}{9b}$.

d) $\log a^{\frac{1}{2}} - \log b = \log \sqrt{a} - \log b = \log \left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)$; a expressão é $\frac{\sqrt{a}}{b}$.

18. **a)** $\log_{15} (3 \cdot 5) = \log_{15} 15 = 1$

b) $\log_3 \left(\frac{72}{12}\right) - \log_3 2 = \log_3 6 - \log_3 2 =$
$= \log_3 \left(\frac{6}{2}\right) = \log_3 3 = 1$

c) $\log_{15} 8^{\frac{1}{3}} + \log_{15} 2^2 + \log_{15} 5 - \log_{15} 9000 =$
$= \log_{15} \left(8^{\frac{1}{3}} \cdot 2^2 \cdot 5\right) - \log_{15} 9000 =$
$= \log_{15} 40 - \log_{15} 9000 = \log_{15} \left(\frac{40}{9000}\right) =$
$= \log_{15} \left(\frac{1}{225}\right) = -2$

20. **a)** $\log (3 \cdot 10^3) = \log 3 + \log 10^3 \simeq 0{,}48 + 3 = 3{,}48$

b) $\log 0{,}002 = \log \left(\frac{2}{1000}\right) = \log 2 - \log 1000 \simeq$
$\simeq 0{,}3 - 3 = -2{,}7$

c) $\log \sqrt{3} = \log 3^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2} \cdot 0{,}48 = 0{,}24$

d) $\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 \simeq 1{,}3$

e) $\log \left(\frac{6}{100}\right) = \log 6 - \log 100 =$
$= \log 2 + \log 3 - 2 \simeq -1{,}22$

f) $\log (2^4 \cdot 3) = 4 \cdot \log 2 + \log 3 \simeq 1{,}68$

g) $\log 125 = 3 \cdot \log 5 = 3 \cdot \log \left(\frac{10}{2}\right) \simeq 3 \cdot (1 - 0{,}3) = 2{,}1$

21. **a)** $\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = 1 + \log_2 5 \simeq 1 + 2{,}32 = 3{,}32$

b) $\log_2 500 = \log_2 (5 \cdot 10^2) = \log_2 5 + 2 \cdot \log_2 10 \simeq$
$\simeq 2{,}32 + 2 \cdot 3{,}32 = 8{,}96$

c) $\log_2 1600 = \log_2 (16 \cdot 100) = \log_2 16 + \log_2 100 =$
$= 4 + 2 \cdot \log_2 10 \simeq 4 + 2 \cdot 3{,}32 = 10{,}64$

d) $\log_2 0{,}2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 \frac{1}{5} = \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot \log_2 5 \simeq -\frac{1}{3} \cdot 2{,}32 =$
$= -0{,}77\overline{3}$

e) $\log_2 \left(\frac{64}{125}\right) = \log_2 2^6 - \log_2 5^3 \simeq 6 \cdot 1 - 3 \cdot 2{,}32 = -0{,}96$

22. Seja d essa medida de distância em parsecs.

$-6{,}8 = 0{,}2 + 5 \cdot \log_3 (3 \cdot d^{-0{,}48}) \Rightarrow$
$\Rightarrow -7 = 5 \cdot \log_3 (3 \cdot d^{-0{,}48}) \Rightarrow$
$\Rightarrow -1{,}4 = \log_3 (3 \cdot d^{-0{,}48}) \Rightarrow$
$\Rightarrow -1{,}4 = \log_3 3 + \log_3 (d^{-0{,}48}) \Rightarrow$
$\Rightarrow -2{,}4 = -0{,}48 \cdot \log_3 d \Rightarrow 5 = \log_3 d \Rightarrow d = 3^5 = 243$

Como 1 parsec é aproximadamente 3×10^{13} km, temos:
$243 \cdot 3 \cdot 10^{13}$ km $= 729 \cdot 10^{13}$ km

24. Pela propriedade do produto do logaritmo, $\log x + \log y = \log (x \cdot y)$.

Para ter $\log (x + y) = \log (x \cdot y)$, fazemos $x + y = xy$ e dividimos ambos os membros da equação por $xy \neq 0$:

$\frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = \frac{xy}{xy} \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$

Exemplo:

$x = \frac{5}{2}$ e $y = \frac{5}{3}$

$\frac{1}{\frac{5}{3}} + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$

30. **a)** $\log_7 3 = \frac{1}{\log_3 7}$; $\log_{11} 5 = \frac{1}{\log_5 11}$; assim, o produto é 1.

b) $z = \frac{\log_2 2}{\cancel{\log_2 3}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 3}}{\cancel{\log_2 4}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 4}}{\cancel{\log_2 5}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 5}}{\log_2 6} = \frac{1}{\log_2 6} = \log_6 2$

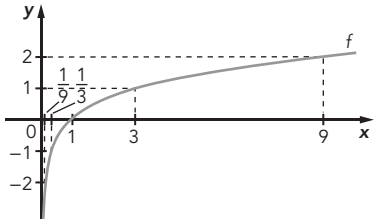
c) $w = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 \sqrt{2}}{\log_3 25} =$

$= \cancel{\log_3 5} \cdot \frac{3}{2 \cdot \cancel{\log_3 2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \cancel{\log_3 2}}{2 \cdot \cancel{\log_3 5}} = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8}$

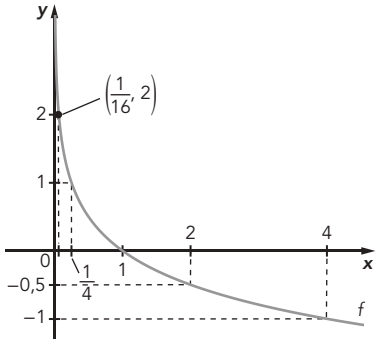
d) Note que $\log_5 4 \cdot \log_4 7 \cdot \log_7 11 =$

$= \cancel{\log_5 4} \cdot \frac{\cancel{\log_5 7}}{\cancel{\log_5 4}} \cdot \frac{\log_5 11}{\cancel{\log_5 7}} = \log_5 11$. Daí, $t = 5^{\log_5 11} = 11$.

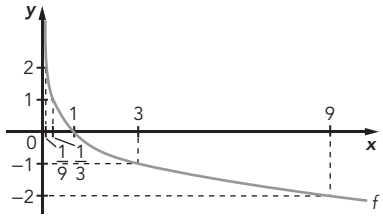
33. **a)** Crescente.



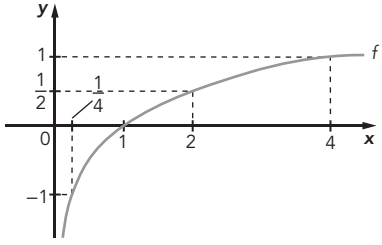
b) Decrescente.



c) Decrescente.



d) Crescente.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

34. **a)** $\begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 3 \\ x = 1 \text{ e } y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a + \log_b (0 + 1) \\ 4 = a + \log_b (1 + 1) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3 = a + \log_b 1 \Rightarrow a = 3 \\ 4 = a + \log_b 2 \Rightarrow 4 - 3 = \log_b 2 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$

b) Para $f(x)$, devemos ter $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$.

$D(f) =]-1, +\infty[$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Para $g(x)$, $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$.

35. **a)** $x = 2$, $y = 0$ (2 é zero de f)

$0 = \log_2 (2 + k) \Rightarrow 2^0 = 2 + k \Rightarrow k = -1$

$y = \log_2 (x - 1)$

b) É preciso determinar a abscissa do ponto A (e do B).

$y = -1 \Rightarrow -1 = \log_2 (x - 1) \Rightarrow 2^{-1} = x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = x - 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

É preciso determinar a ordenada do ponto B (e do C).

$x = 3 \Rightarrow y = \log_2 (3 - 1) = 1$

Assim, $AD = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

$AB = 1 + 1 = 2$, e a medida de área da região retangular $ABCD$ é: $\left(\frac{3}{2} \cdot 2\right)$ u.a. $= 3$ u.a.

c) $f(x) = \log_2 (x - 1)$

$f(1001) = \log_2 1000 = \frac{\log_{10} 1000}{\log_{10} 2} \simeq \frac{3}{0{,}3} = 10$

36. **a)** Para $t = 0$: $f(0) = 400 + 50 \cdot \log_4 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0) = 400 + 50 \cdot \frac{1}{2} = 425$; ou seja, 425 funcionários.

b) Para $t = 2$: $f(2) = 400 + 50 \cdot \log_4 4 = 450$.

Para $t = 6$: $f(6) = 400 + 50 \cdot \log_4 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(6) = 400 + 50 \cdot \frac{3}{2} = 475$.

A diferença $f(6) - f(2)$ é igual a $475 - 450 = 25$; ou seja, 25 funcionários.

c) Devemos calcular a razão $\frac{f(14) - f(6)}{14 - 6}$.

Para $t = 14$: $f(14) = 400 + 50 \cdot \log_4 16 = 500$.

$f(6) = 475$

Daí, a razão é $\frac{500 - 475}{14 - 6} = 3{,}125$; ou seja, cerca de 3 funcionários por ano.

37. **a)** $P(20) = 20 + \ell n \left(\frac{400}{25}\right) - 0{,}1 \cdot 20 = 20 + \ell n\, 16 - 2 =$

$= 18 + \ell n\, 2^4 = 18 + 4 \cdot \ell n\, 2 \simeq 18 + 4 \cdot 0{,}7 = 20{,}8$; ou seja, R$ 20.800,00.

b) $P(30) = 20 + \ell n \left(\frac{900}{25}\right) - 0{,}1 \cdot 30 = 20 + \ell n\, 36 - 3 =$

$= 17 + \ell n\, (2^2 \cdot 3^2) = 17 + 2 \cdot \ell n\, 2 + 2 \cdot \ell n\, 3 \simeq$

$\simeq 17 + 2 \cdot 0{,}7 + 2 \cdot 1{,}1 = 20{,}6$; ou seja, R$ 20.600,00.

20 800 − 20 600 = 200

O lucro mensal vai diminuir R$ 200,00.

38.
- Abscissa de A: $2 = \ell n\, x \Rightarrow \log_e x = 2 \Rightarrow e^2 = x \Rightarrow x = 7{,}4$.
- Ordenada de B: $y = \ell n\,(12{,}2) \Rightarrow \log_e (12{,}2) = y \Rightarrow e^y = 12{,}2 \Rightarrow y = 2{,}5$.
- Abscissa de C: $3 = \ell n\, x \Rightarrow \log_e x = 3 \Rightarrow x = e^3 = 20{,}1$.

A base $\overline{AC}$ do triângulo ABC mede:

$x_C - x_A = 20{,}1 - 7{,}4 = 12{,}7$

A altura relativa à base $\overline{AC}$ mede $y_B = 2{,}5$.

A medida de área da região limitada pelo $\triangle ABC$ é:

$\frac{12{,}7 \cdot 2{,}5}{2} = \frac{127}{8}$; ou seja, $\frac{127}{8}$ u.a.

39. **a)** Suco de limão: $pH = 2 \Rightarrow -\log [H^+] = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log [H^+] = -2 \Rightarrow [H^+] = 10^{-2}$ mol/L.

Amoníaco: $pH = 11 \Rightarrow -\log[H^+] = 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log [H^+] = -11 \Rightarrow [H^+] = 10^{-11}$ mol/L.

b) Vinagre: $pH = 2{,}8$.

$-\log [H^+] = 2{,}8 \Rightarrow \log [H^+] = -2{,}8 \Rightarrow$

$\Rightarrow [H^+] = 10^{-2{,}8} = 10^{-2} \cdot 10^{-0{,}8} = 10^{-2} \cdot \frac{1}{10^{0{,}8}}$ *

Como $\log (6{,}3) \simeq 0{,}8$, temos $10^{0{,}8} \simeq 6{,}3$.

Em *, temos:

$10^{-2} \cdot \frac{1}{6{,}3} \simeq 0{,}159 \cdot 10^{-2} = 1{,}59 \cdot 10^{-3}$; ou seja, $1{,}59 \cdot 10^{-3}$ mol/L.

c) A solução de tomate é "mais ácida".

Tomate: $pH = 4 \Rightarrow [H^+] = 10^{-4}$ mol/L.

Urina: $pH = 6 \Rightarrow [H^+] = 10^{-6}$ mol/L.

A razão pedida é $\frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 10^2 = 100$.

d) $y = -\log x \Rightarrow y = \log_{10^{-1}} x = \log_{0{,}1} x$. Assim, a função é decrescente.

40. **a)** $IDH_R = \frac{\ell n\, 14\,616 - \ell n\, 100}{\ell n\, 75\,000 - \ell n\, 100} =$

$= \frac{\ell n\, 14\,616 - 2 \cdot \ell n\, 10}{\ell n \left(\frac{75\,000}{100}\right)} \simeq \frac{9{,}6 - 2 \cdot \ell n\, 10}{\ell n\, 750} =$

$= \frac{9{,}6 - 2 \cdot 2{,}3}{\ell n \left(\frac{3 \cdot 10^3}{2^2}\right)} = \frac{9{,}6 - 4{,}6}{\ell n\, 3 + 3 \cdot \ell n\, 10 - 2 \cdot \ell n\, 2} \simeq$

$\simeq \frac{5}{1{,}1 + 3 \cdot 2{,}3 - 2 \cdot 0{,}7} = \frac{5}{6{,}6} \simeq 0{,}7576$

b) $IDH_R = \frac{\ell n\,(RNB) - \ell n\, 100}{\ell n\, 75\,000 - \ell n\, 100} = \frac{23}{66} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\ell n\,(RNB) - 2 \cdot \ell n\, 10}{\ell n \left(\frac{75\,000}{100}\right)} = \frac{23}{66} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\ell n\,(RNB) - 2 \cdot \ell n\,(10)}{\ell n \left(\frac{3 \cdot 10^3}{2^2}\right)} = \frac{23}{66} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\ell n\,(RNB) - 2 \cdot \ell n\, 10}{\ell n\, 3 + 3 \cdot \ell n\, 10 - 2 \cdot \ell n\, 2} = \frac{23}{66} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\ell n\,(RNB) - 2 \cdot 2{,}3}{1{,}1 + 3 \cdot 2{,}3 - 2 \cdot 0{,}7} = \frac{23}{66} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\ell n\,(RNB) - 4{,}6}{6{,}6} = \frac{23}{66} \Rightarrow \ell n\,(RNB) - 4{,}6 = 2{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell n\,(RNB) = 6{,}9 = 3 \cdot 2{,}3 \simeq 3 \cdot \ell n\, 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell n\,(RNB) \simeq \ell n\, 10^3 \Rightarrow RNB \simeq 10^3$; ou seja, aproximadamente 1000 dólares PPC.

c) Analisando a expressão $IDH_R = \frac{\ell n\,(RNB) - \ell n\, 100}{\ell n\, 75\,000 - \ell n\, 100}$, para que o quociente seja 1, a RNB deve ser igual a 75 000 dólares PPC.

41. **a)** $x = \log_3 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 3} \simeq \frac{1}{0{,}48} = 2{,}08\overline{3}$; $S = \{2{,}08\overline{3}\}$.

b) $4^x = 3 \Rightarrow \log 4^x = \log 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 4} = \frac{\log 3}{2 \cdot \log 2} \simeq \frac{0{,}48}{0{,}6} = 0{,}8$; $S = \{0{,}8\}$.

c) $2^x = 27 \Rightarrow \log 2^x = \log 27 \Rightarrow x = \frac{\log 27}{\log 2}$ (ou, ainda, $x = \log_2 27) \Rightarrow x = \frac{\log 3^3}{\log 2} \simeq \frac{3 \cdot 0{,}48}{0{,}3} = 4{,}8$; $S = \{4{,}8\}$.

d) $10^x = 6 \Rightarrow x = \log_{10} 6 = \log (3 \cdot 2) =$

$= \log 3 + \log 2 \simeq 0{,}48 + 0{,}3 = 0{,}78$; $S = \{0{,}78\}$.

e) $2^x = 5 \Rightarrow \log_2 5 = x \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{\log \left(\frac{10}{2}\right)}{\log 2} =$

$= \frac{1 - \log 2}{\log 2} \simeq \frac{1 - 0{,}3}{0{,}3} = \frac{0{,}7}{0{,}3} = 2{,}\overline{3}$; $S = \{2{,}\overline{3}\}$.

f) $3^x = 2 \Rightarrow \log_3 2 = x \Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq \frac{0{,}3}{0{,}48} = 0{,}625$; $S = \{0{,}625\}$.

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{9} \Rightarrow \log \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \log \frac{1}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1) \cdot \log \frac{1}{2} = \log 3^{-2} \Rightarrow (x + 1) \cdot \log 2^{-1} =$

$= -2 \cdot \log 3 \Rightarrow -(x + 1) \cdot \log 2 = -2 \cdot \log 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 1 = \frac{2 \cdot \log 3}{\log 2} \Rightarrow x = -1 + \frac{2 \cdot \log 3}{\log 2} \simeq$

$\simeq -1 + \frac{2 \cdot 0{,}48}{0{,}3} = -1 + 3{,}2 = 2{,}2$; $S = \{2{,}2\}$.

h) $2^x = 3 \Rightarrow \log_2 3 = x \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2} \simeq \frac{0{,}48}{0{,}3} = 1{,}6$; $S = \{1{,}6\}$.

42. Devemos determinar x tal que $y = 90$:

$90 = 40 \cdot (1{,}2)^x \Rightarrow \frac{9}{4} = (1{,}2)^x \Rightarrow \log \left(\frac{9}{4}\right) = \log (1{,}2)^x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\log \left(\frac{9}{4}\right)}{\log (1{,}2)} \Rightarrow x = \frac{\log 9 - \log 4}{\log 12 - \log 10} =$

$= \frac{2 \cdot \log 3 - 2 \cdot \log 2}{\log 3 + \log 2^2 - 1} = \frac{2 \cdot \log 3 - 2 \cdot \log 2}{\log 3 + 2 \cdot \log 2 - 1} \simeq$

$\simeq \frac{2 \cdot 0{,}48 - 2 \cdot 0{,}3}{0{,}48 + 2 \cdot 0{,}3 - 1} = \frac{0{,}36}{0{,}08} \Rightarrow x = 4{,}5$; ou seja, aproximadamente 4,5 anos.

43. **a)** Para $t = 0$: $v(0) = 600\,000 \cdot 0{,}9^0 = 600\,000$; ou seja, R$ 600.000,00.

b) $v(1) = 600\,000 \cdot (0{,}9)^1 = 540\,000$; ou seja, R$ 540.000,00.

A perda é dada por $v(0) - v(1) = 600\,000 - 540\,000 =$ $= 60\,000$; ou seja, R$ 60.000,00.

c) 1º modo:

Analisando a lei, podemos perceber que o valor do imóvel em uma década é 90% do valor desse imóvel na década anterior. Assim, a desvalorização percentual é de 10% por década.

2º modo:

$v(t+1) = 600\,000 \cdot (0{,}9)^{t+1} = 600\,000 \cdot (0{,}9)^t \cdot (0{,}9)^1$

$v(t+1) - v(t) = 600\,000 \cdot (0{,}9)^t \cdot (0{,}9)^1 - 600\,000 \cdot (0{,}9)^t =$

$= 600\,000 \cdot (0{,}9)^t \cdot (0{,}9 - 1) = -600\,000 \cdot (0{,}9)^t \cdot 0{,}1$

$\frac{v(t+1) - v(t)}{v(t)} = \frac{-600\,000 \cdot (0{,}9)^t \cdot 0{,}1}{600\,000 \cdot (0{,}9)^t} = -0{,}1 = -10\%$

d) $450\,000 = 600\,000 \cdot (0{,}9)^t \Rightarrow \frac{3}{4} = (0{,}9)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow \log \frac{3}{4} = t \cdot \log 0{,}9 \Rightarrow \log\left(\frac{3}{4}\right) = t \cdot \log\left(\frac{9}{10}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{3}{4}\right)}{\log\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{\log 3 - 2 \cdot \log 2}{2 \cdot \log 3 - \log 10} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \simeq \frac{0{,}48 - 2 \cdot 0{,}30}{2 \cdot 0{,}48 - 1} = \frac{-0{,}12}{-0{,}04} = 3$; 3 décadas, ou seja, 30 anos.

45. **a)** $8\,000 = 5\,000 \cdot e^{0{,}02t} \Rightarrow 1{,}6 = e^{0{,}02t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(1{,}6) = \ln e^{0{,}02t} \Rightarrow \ln(1{,}6) = 0{,}02 \cdot t \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\ln(1{,}6)}{0{,}02} = \frac{\ln\left(\frac{16}{10}\right)}{0{,}02} = \frac{\ln 16 - \ln 10}{0{,}02} =$

$= \frac{\ln 2^4 - \ln(2 \cdot 5)}{0{,}02} = \frac{4 \cdot \ln 2 - \ln 2 - \ln 5}{0{,}02} =$

$= \frac{3 \cdot \ln 2 - \ln 5}{0{,}02} \simeq \frac{2{,}07 - 1{,}6}{0{,}02} = \frac{0{,}47}{0{,}02} = 23{,}5$; ou seja, 23,5 anos.

Logo, são necessários 24 anos.

b) $10\,000 = 5\,000 \cdot e^{0{,}02t} \Rightarrow 2 = e^{0{,}02t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln 2 = \ln e^{0{,}02t} \Rightarrow \ln 2 = 0{,}02 \cdot t \Rightarrow \frac{0{,}69}{0{,}02} \simeq t \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 34{,}5$; ou seja, 34,5 anos.

Logo, são necessários 35 anos.

46. **a)** $\frac{\cancel{P_0}}{2} = \cancel{P_0} \cdot 2^{-b \cdot 29} \Rightarrow \frac{1}{2} = 2^{-29b} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{-29b} \Rightarrow b = \frac{1}{29}$

b) Devemos determinar t tal que $P(t) = \frac{P_0}{5}$.

$\frac{\cancel{P_0}}{5} = \cancel{P_0} \cdot 2^{-\frac{1}{29} \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{5} = 2^{-\frac{1}{29} \cdot t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 \frac{1}{5} = \log_2 2^{-\frac{1}{29} \cdot t} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\log_2 5 = -\frac{1}{29} \cdot t \Rightarrow$

$\Rightarrow -(\log_2 10 - 1) = -\frac{t}{29} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 3{,}32 \simeq -\frac{t}{29} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 67{,}28$; ou seja, 67,28 anos.

47. Considerando M_1 e M_2 as magnitudes dos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente, tem-se:

$M_1 = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \Rightarrow 9{,}0 = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{27{,}0}{2} = \log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \Rightarrow 10^{\frac{27{,}0}{2}} = \frac{E_1}{E_0} \Rightarrow E_0 = \frac{E_1}{10^{\frac{27{,}0}{2}}}$

$M_2 = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) \Rightarrow 7{,}0 = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{21{,}0}{2} = \log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) \Rightarrow 10^{\frac{21{,}0}{2}} = \frac{E_2}{E_0} \Rightarrow E_0 = \frac{E_2}{10^{\frac{21{,}0}{2}}}$

Assim:

$\frac{E_1}{10^{\frac{27{,}0}{2}}} = \frac{E_2}{10^{\frac{21{,}0}{2}}} \Rightarrow E_1 = 10^3 \cdot E_2$

Alternativa **c**.

Viralize

1. **a)** A medida de amplitude das ondas no terremoto T_2 é 1000 vezes (3 graus na escala Richter equivalem a $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$) a medida de amplitude das ondas em T_1.

b) Como cada grau na escala Richter equivale a uma medida de energia 32 vezes maior, um terremoto com escala Richter 3 unidades maior ($9 - 6 = 3$, 3 graus na escala Richter) tem uma medida de energia liberada no terremoto da ordem de 32 768 vezes maior ($32 \cdot 32 \cdot 32 = 32\,768$).

2. Uma variação de 1 ponto na escala Richter equivale a uma liberação de energia de aproximadamente $32 = 2^5$ vezes maior, ou seja, se $E_3 = 2^{25} \cdot E_4$, portanto $E_3 = (2^5)^5 \cdot E_4 = (32)^5 \cdot E_4$. Logo, T_3 alcançou 5 pontos a mais na escala Richter.

3. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: tornados, grandes tempestades, enchentes, deslizamentos, queimadas, maremotos, etc.

Para fundamentar saberes

2. Produção quando $t = 1$: 8 000 unidades.

Quando $t = 2$: $8\,000 \cdot 1{,}5$ (crescimento de 50% em relação ao ano anterior).

Quando $t = 3$: $(8\,000 \cdot 1{,}5) \cdot 1{,}5 = 8\,000 \cdot (1{,}5)^2$ (crescimento de 50% em relação ao ano anterior), etc.

Assim, a expressão que representa o número de unidades produzidas é:

$P(t) = 8\,000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$

Alternativa **e**.

3. Para $p = 0{,}8$ atm, a altitude do avião era de:

$h(0{,}8) = 30 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{0{,}8}\right) = 30 \cdot \log_{10}\left(\frac{10}{8}\right) =$

$= 30 \cdot (\log_{10} 10 - \log 2^3) = 30 \cdot (1 - 3 \cdot 0{,}3) = 3$; ou seja, 3 km.

Alternativa **b**.

4. Considere os pontos $(t_0, \log x_0) = (t_0, -1{,}3)$ e $(t_1, \log x_1) = (t_1, -0{,}3)$ do gráfico. Assim, $\log x_0 = -1{,}3 \Leftrightarrow x_0 = 10^{-1,3}$ e $\log x_1 = -0{,}3 \Leftrightarrow x_1 = 10^{-0,3}$.

Sendo P a quantidade de bactérias e de acordo com o enunciado – "A quantidade de bactérias em um líquido é diretamente proporcional à medida da turbidez desse líquido" –, concluímos que $P = k \cdot x$, em que k é a constante de proporcionalidade.

A população aumentou $\frac{P_1}{P_0} = \frac{k \cdot 10^{-0,3}}{k \cdot 10^{-1,3}} = 10^{-0,3-(-1,3)} = 10$; ou seja, 10 vezes.

Alternativa **d**.

5. Tem-se que:

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{5730}} = \frac{Q_0}{Q(t)} \Rightarrow \log_2 2^{\frac{t}{5730}} =$$

$$= \log_2\left(\frac{Q_0}{Q(t)}\right) \Rightarrow t = 5730 \cdot \log_2\left(\frac{Q_0}{Q(t)}\right)$$

Como a função $y = \log_2 x$ é crescente, o fóssil mais antigo é aquele que tiver a maior razão $r_i = \frac{Q_0}{Q(t)}$. Assim, $r_1 = \frac{128}{32} = 4$, $r_2 = \frac{256}{8} = 32$, $r_3 = \frac{512}{64} = 8$, $r_4 = \frac{1024}{512} = 2$ e $r_5 = \frac{2048}{128} = 16$. Logo, o fóssil mais antigo é o 2.

Alternativa **b**.

Unidade 2

Capítulo 3

Atividades

5. $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$

$c_{11} = 1 + 1 - 1 = 1$

$c_{12} = 1 + 1 - 2 = 0$

$c_{13} = 1 + 1 - 3 = -1$

$c_{14} = 1 + 1 - 4 = -2$

$c_{21} = 1 + 2 - 1 = 2$

$c_{22} = 1 + 2 - 2 = 1$

$c_{23} = 1 + 2 - 3 = 0$

$c_{24} = 1 + 2 - 4 = -1$

Assim, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

A soma pedida é: $1 + 2 + 0 + 1 + (-1) + (-2) + (-1) = 0$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$; portanto, pertencem à diagonal principal os elementos 1, 4 e 9; e à diagonal secundária, os elementos 3, 4 e 3.

8. **a)** $a_{21} = 1485$; ou seja, 1485 sorvetes.

b) $2040 - 1850 = 190$; ou seja, 190 sorvetes.

c) 1 bola: $1320 + 1850 = 3170$

$3170 \cdot 6 = 19020$

2 bolas: $1485 + 2040 = 3525$

$3525 \cdot 10 = 35250$

$35250 + 19020 = 54270$

A arrecadação no bimestre foi de R$ 54.270,00.

10. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. **a)** Como $q_{34} = 0$ (Canadá marcou 0 gol contra México) e $q_{43} = 1$ (México marcou 1 gol contra Canadá), concluímos que o placar do jogo foi Canadá 0×1 México.

b) $q_{12} = 0$ e $q_{21} = 1 \Rightarrow$ Argentina 0×1 Brasil.

$q_{13} = 2$ e $q_{31} = 3 \Rightarrow$ Argentina 2×3 Canadá.

$q_{14} = 2$ e $q_{41} = 1 \Rightarrow$ Argentina 2×1 México.

$q_{23} = 3$ e $q_{32} = 3 \Rightarrow$ Brasil 3×3 Canadá.

$q_{24} = 2$ e $q_{42} = 2 \Rightarrow$ Brasil 2×2 México.

Pontuação final:

Argentina: 3 pontos (1 vitória e 2 derrotas);

Brasil: 5 pontos (1 vitória e 2 empates);

Canadá: 4 pontos (1 vitória, 1 empate e 1 derrota);

México: 4 pontos (1 vitória, 1 empate e 1 derrota).

Menor pontuação: Argentina, com 3 pontos.

13. $\begin{cases} x + y = 7 & * \\ z = 2 \\ z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2 \\ x - y = 1 & ** \end{cases} \rightarrow z = 2$

Adicionando * e ** temos: $2x = 8 \Rightarrow x = 4$ e $y = 3$.

14. **a)** $\begin{cases} m - 1 = 3 \Rightarrow m = 4 \\ 0 = 2m \Rightarrow m = 0 \\ 1 - m = -3 \Rightarrow m = 4 \\ m = 4 \end{cases}$

Como a 1ª, a 3ª e a 4ª equações resultam em $m = 4$, e a 2ª resulta em $m = 0$, não existe m que satisfaça, simultaneamente, as igualdades entre os elementos correspondentes das matrizes.

b) $\begin{cases} 9 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 3 \\ 1 = 1 \\ -3 = m \Rightarrow m = -3 \\ 7 = 7 \end{cases}$; portanto, $m = -3$.

16. **a)** $c_{78} = a_{78} + b_{78}$ I

$a_{78} = 2 \cdot 7 - 8 = 6$ II

$b_{78} = 7 + 8 = 15$ III

Aplicando II e III em I, temos $c_{78} = 6 + 15 = 21$.

$c_{95} = a_{95} + b_{95}$ IV

$a_{95} = 2 \cdot 9 - 5 = 13$ V

$b_{95} = 9 + 5 = 14$ VI

Aplicando V e VI em IV, temos: $c_{95} = 13 + 14 = 27$.

b) $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \Rightarrow c_{ij} = (2i - j) + (i + j) = 3i$

18. **a)** $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-3) & 4 \cdot 5 & 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -12 & 20 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 1 & \frac{1}{3} \cdot 2 & \frac{1}{3} \cdot 3 \\ \frac{1}{3} \cdot (-3) & \frac{1}{3} \cdot 5 & \frac{1}{3} \cdot (-1) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c) $(-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 2 & (-2) \cdot 3 \\ (-2) \cdot (-3) & (-2) \cdot 5 & (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 6 & -10 & 2 \end{pmatrix}$

19. **a)** $3A + B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 15 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 2 & 21 \\ 9 & 29 \end{pmatrix}$

b) $A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -3 & 18 \\ 27 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -13 \\ -27 & -17 \end{pmatrix}$

21. $2A + B = X + 2C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = X + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = X + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

22. **a)** $A_{3\times2} \cdot B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B_{2\times2} \cdot A_{3\times2} \Rightarrow$ Como o número de colunas de B (2) não é igual ao número de linhas de A (3), não existe o produto.

c) $A_{3\times2} \cdot C_{2\times1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

d) $B_{2\times2} \cdot C_{2\times1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 5x \\ 4y + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 8 - 5x = -2 \Rightarrow x = 2 \\ 4y + 15 = -1 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$

25. **a)** $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$

c) $A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A^5 = A^4 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$

e) Note que, para A^n, com n ímpar, conforme item **b** e **d**, temos $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$, portanto, $A^{35} = A$.

26. **a)** $\begin{bmatrix} 177 & 16 & 98 & 43 & 14 \\ 26 & 5 & 82 & 10 & 6 \end{bmatrix}_{2\times5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{5\times3} =$

$= \begin{bmatrix} 346 & 297 & 553 \\ 130 & 197 & 167 \end{bmatrix}_{2\times3}$

b) $c_{12} = 297$: 297 mg é a quantidade total de cálcio encontrada na receita **II**.

c) $c_{23} = 167$: 167 mg é a quantidade total de magnésio encontrada na receita **III**.

27. **a)** • Bicarbonato de sódio: $2{,}3 \cdot 6000 + 2{,}5 \cdot 4000 =$
$= 13800 + 10000 = 23800$; 23 800 g, ou seja, 23,8 kg.

• Carbonato de sódio: $0{,}5 \cdot 6000 + 0{,}5 \cdot 4000 =$
$= 3000 + 2000 = 5000$; 5 000 g, ou seja, 5 kg.

• Ácido cítrico: $2{,}2 \cdot 6000 + 2 \cdot 4000 =$
$= 13200 + 8000 = 21200$; 21 200 g, ou seja, 21,2 kg.

c) Sejam x o número de envelopes na versão **T** e y o número de envelopes na versão **E**. Desse modo, temos:

$\begin{cases} x + y = 15000 \\ 2{,}3x + 2{,}5y = 35600 \end{cases} \Rightarrow x = 9500$ e $y = 5500$

Logo, são 9 500 envelopes na versão **T** e 5 500 na versão **E**.

Interligando

1. **a)** A matriz transposta é dada por:

$$E^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a imagem correspondente é a imagem **VI**.

b) $E + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$

$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Assim, a imagem equivalente é a **V**.

Capítulo 4

Atividades

4. **a)** Sejam x a quantidade de moedas de R$ 1,00 e y a quantidade de cédulas de R$ 5,00. Desse modo, temos:

$x + 5y = 35 \Rightarrow y = \dfrac{35 - x}{5}$

Para que y resulte inteiro, o numerador deve ser múltiplo de 5, então atribuímos a x os valores 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 35, obtendo, respectivamente, os resultados: (0, 7); (5, 6); (10, 5); (15, 4); (20, 3); (25, 2); (30, 1) e (35, 0), ou seja, Cíntia poderá fazer o pagamento de 8 maneiras diferentes.

b) Sejam x a quantidade de cédulas de R$ 2,00, y a quantidade de cédulas de R$ 5,00 e z a quantidade de cédulas de R$ 10,00. Desse modo, temos:

$2x + \underbrace{5y + 10z}_{\text{múltiplo de 5}} = 35$

$2x$ deve ser múltiplo de 5 (e x deve ser natural).

Logo:

• $2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y + 2z = 7$

x	y	z
0	7	0
0	5	1
0	3	2
0	1	3

• $2x = 10 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y + 2z = 5$

x	y	z
5	1	2
5	3	1
5	5	0

• $2x = 20 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y + 2z = 3$

x	y	z
10	1	1
10	3	0

• $2x = 30 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow y + 2z = 1$

x	y	z
15	1	0

Há, ao todo, 10 maneiras distintas.

5. Sejam $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e x e y as incógnitas.

a) Considerando a equação $ax + by = c$, temos:

$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 1 = c \\ -2a - 3b = c \end{cases} \Rightarrow a + b = -2a - 3b \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a = -4b \Rightarrow a = -\dfrac{4b}{3}$

Escolhendo, por exemplo, $b = 3$, temos: $a = -4$ e, da 1ª equação, $-4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = c \Rightarrow c = -1$. Se $ax + by = c$, então: $-4x + 3y = -1$.

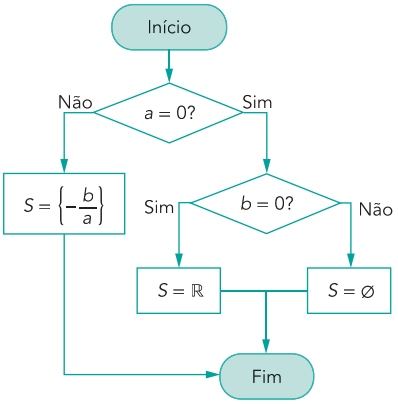
b) Considerando a equação $-4x + 3y = -1$, temos:

• $x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$ é solução;

• $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$ é solução;

• $x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow y = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}\right)$ é solução.

7.



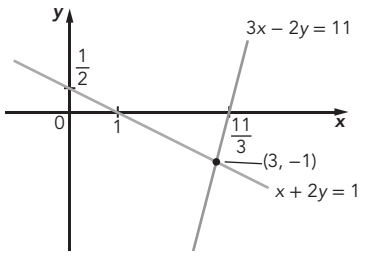
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

8. **a)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases} +$

$4x = 12$

$x = 3 \Rightarrow y = -1$

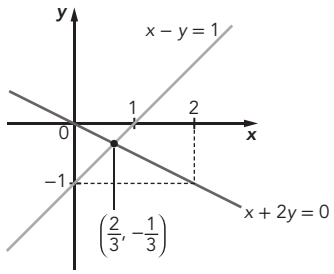
$S = \{(3, -1)\}$; sistema possível e determinado.



b) $\begin{cases} x - y = 1 \cdot (2) \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases} +$

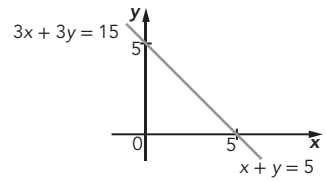
$3x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$ e $y = -\dfrac{1}{3}$

$S = \left\{\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)\right\}$; sistema possível e determinado.



c) $\begin{cases} x + y = 5 \cdot (-3) \\ 3x + 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -15 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases} +$

$0 = 0$



As 2 equações são equivalentes, e o sistema se reduz a $x + y = 5$.

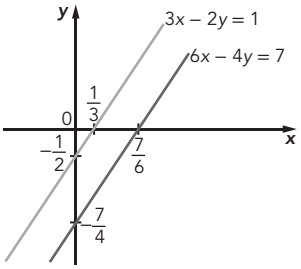
Ao fazer $x = 5 - y$, qualquer par ordenado da forma $(5 - y, y)$, em que $y \in \mathbb{R}$, é solução. Utilizando $y = 5 - x$, temos que qualquer par ordenado da forma $(x, 5 - x)$, em que $x \in \mathbb{R}$, também é solução.

$S = \{(5 - y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$; ou $S = \{(x, 5 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado.

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \cdot (-2) \\ 6x - 4y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 4y = -2 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases} +$

$0 = 5$ (Falso)

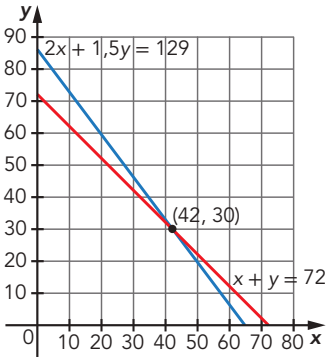
$S = \varnothing$; sistema impossível.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

9. Vamos chamar de x a quantidade de embalagens de 2 L e de y a quantidade de embalagens de 1,5 L. Logo:

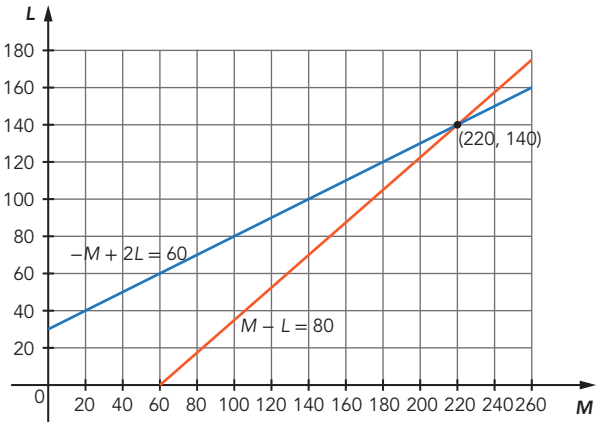
$\begin{cases} x + y = 72 \\ 2x + 1{,}5y = 129 \end{cases}$



A solução para as equações lineares é $S = \{(42, 30)\}$. Portanto, foram compradas 30 unidades de suco de uva de 1,5 L.

11. Sendo M a quantia que Maíra possui e L a quantia que Luís possui. Logo:

$\begin{cases} M - 40 = L + 40 \\ L - 30 = \frac{M}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M - L = 80 \\ -M + 2L = 60 \end{cases}$



A solução do sistema de equações lineares é, portanto, $M = 220$ e $L = 140$. A soma das quantias de Maíra e Luís é R$ 220,00 + R$ 140,00 = R$ 360,00.

12. **a)** $13 \cdot 5 - 7 \cdot 2 = 65 - 14 = 51$; ou seja, 51 pontos.

b) Sejam x o número de acertos e y o número de erros:

$\begin{cases} x + y = 20 \\ 5x - 2y = 23 \end{cases} \Rightarrow x = 9$ e $y = 11$

Então, Amanda errou 11 questões.

c) $\begin{cases} x + y = 20 \cdot (2) \\ 5x - 2y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ 5x - 2y = 17 \end{cases} +$

$7x = 57 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$

Não é possível.

15. Para que a solução gráfica do sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ mx + ny = -6 \end{cases}$ seja formada por infinitos pontos, as retas que representam as equações dadas devem ser coincidentes. Multiplicando a 1ª equação por (−2), obtemos:

$\begin{cases} -4x + 2y = -6 \\ mx + ny = -6 \end{cases} \Rightarrow m = -4$ e $n = 2$

16. **a)** $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -2x - 2y = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -10x + 10y = 0 \end{cases}$

17. **b)** Basta considerar 2 retas concorrentes, por exemplo, as retas u e s. A partir delas é possível escrever o seguinte sistema:

$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

Ao resolver o sistema, obtemos (1, 1) como solução (ponto de intersecção das 2 retas).

c) Sistema impossível: basta considerar 2 retas paralelas distintas, por exemplo, as retas v e u. A partir delas é possível escrever o seguinte sistema:

$\begin{cases} -2x - 2y = 12 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

Sistema possível e indeterminado: é preciso considerar retas coincidentes, o que não ocorre entre as 5 equações e as 5 retas apresentadas. Logo, não é possível exemplificar um sistema indeterminado com os dados do enunciado.

18. Sabe-se que (0, 30) e (8, 10) são possíveis soluções para a equação linear que representa a alteração na medida de velocidade do corpo **B**. Assim, temos:

$\begin{cases} 0 \cdot a + b = 30 \\ 8 \cdot a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = -2{,}5$ e $b = 30$

Logo, a equação linear que descreve a desaceleração (medida de aceleração negativa) do corpo **B** em função da medida de intervalo de tempo é:

$-2{,}5x + 30 = y$ ou $2{,}5x + y = 30$.

Analogamente, para o corpo **A**, em que (0, 0) e (8, 10) são soluções:

$\begin{cases} 0 \cdot a + b = 0 \\ 8 \cdot a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = 1{,}25$ e $b = 0$

Logo, a equação linear que descreve a medida de aceleração do corpo **A** é:

$1{,}25x = y$ ou $1{,}25x - y = 0$.

Vamos descobrir o valor de x para que a medida de velocidade de **B** seja 0.

$2{,}5x + 0 = 30 \Rightarrow x = 12$

Calculando a medida de velocidade de **A** para $x = 12$:

$1{,}25 \cdot 12 = y \Rightarrow y = 15$

Assim, a medida de velocidade do corpo **A** quando o corpo **B** chegar ao repouso é 15 m/s.

23. **a)** $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 \leftarrow (-2) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (2ª \text{ eq.}) \\ -7y - 5z = -31 \leftarrow (-3) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ -7y - 5z = -31 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4 \leftarrow 7 \cdot (2ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}) \end{cases}$

Daí, $z = 2$; $y = 3$; $x = 1$; $S = \{(1, 3, 2)\}$; sistema possível e determinado.

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 3z = 1 \\ 3x - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -3y + 7z = 1 \leftarrow (1ª \text{ eq.}) + (-2) \cdot (2ª \text{ eq.}) \\ 3y - 7z = -3 \leftarrow (1ª \text{ eq.}) \cdot (-3) + (3ª \text{ eq.}) \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -3y + 7z = 1 \\ -3y + 7z = 3 \end{cases}$ equações incompatíveis

$S = \varnothing$; sistema impossível.

c) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -4y - 2z = -2 \leftarrow (-3) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (2ª \text{ eq.}) \\ -12y - 6z = -20 \leftarrow (-5) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 2y + z = 1 \\ 6y + 3z = 10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 2y + z = 1 \\ 0 = 7 \leftarrow (-3) \cdot (2ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}) \text{ (F)} \end{cases}$

$S = \varnothing$; sistema impossível.

d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - z = -1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 3z = -5 \leftarrow (-2) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (2ª \text{ eq.}) \\ -2y - 3z = -5 \leftarrow (-3) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{cases}$

Da 2ª equação, obtemos: $y = \dfrac{5 - 3z}{2}$

Da 1ª equação, obtemos: $x + \dfrac{5 - 3z}{2} + z = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 5 - 3z + 2z = 4 \Rightarrow 2x = -1 + z \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-1 + z}{2}$; $S = \left\{ \left(\dfrac{-1 + \alpha}{2}, \dfrac{5 - 3\alpha}{2}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$;

sistema possível e indeterminado.

24. **a)** Exemplo de resposta:

$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x - y - 2z = -4 \end{cases}$

Para "gerar" as equações do sistema, basta considerar a expressão numérica $a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c \cdot 2$ e atribuir valores quaisquer para a, b e c; por exemplo, se $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$, temos:

$1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 2$

Assim, uma equação seria: $1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 2$ (1ª equação)

Se quiséssemos uma equação diferente da apresentada, poderíamos admitir $a = 3$, $b = -5$ e $c = 7$, e teríamos:

$3 \cdot 1 + (-5) \cdot (-1) + 7 \cdot 2 = 22$

Assim, uma equação seria: $3x - 5y + 7z = 22$, e assim por diante.

b) Exemplo de resposta:

$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = -3 \\ -x + y - z = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 4x + 3z = 3 \end{cases}$

Note que, no primeiro sistema, a 2ª e a 3ª equações são incompatíveis e, no segundo sistema, se adicionarmos membro a membro às 2 primeiras equações, obtemos: $4x + 3z = 2$, que é incompatível com a 3ª equação.

c) Exemplo de resposta:

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ -5x + 7y - z = -1 \end{cases}$

26. **a)** $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ -2y = -6 \leftarrow (-1) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (2ª \text{ eq.}) \\ -7y = -21 \leftarrow (-2) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$

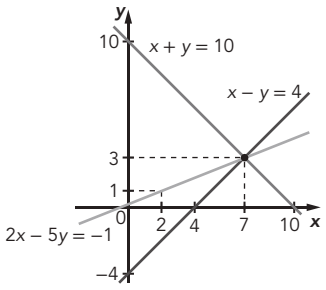
$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ y = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 7$; $S = \{(7, 3)\}$.

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 3x + 7y = 11 \end{cases} \Rightarrow$

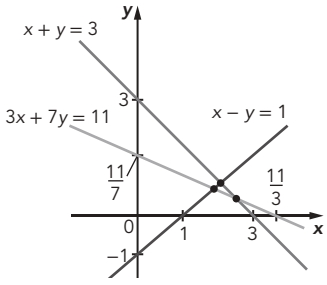
$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ -2y = -2 \leftarrow (-1) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (2ª \text{ eq.}) \\ 4y = 2 \leftarrow (-3) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 1 \\ y = 0{,}5 \end{cases} ; S = \varnothing.$

27. **a)**



b)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

29. Sejam x, y e z os preços, em reais, da calça, da camisa e do par de meias, respectivamente.

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 287 \\ 2x + 5y + 7z = 674 \\ 2x + 3y + 4z = 462 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 287 \\ y + z = 100 \\ -y - 2z = -112 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 287 \\ y + z = 100 \\ -z = -12 \end{cases} \Rightarrow z = 12; y = 88; x = 75.$

Cada camisa custou R$ 88,00.

30. Sejam a, b e c as quantias de Ana, Beatriz e Carolina, respectivamente. Note que 40% de a é igual a $\frac{2}{5}a$, e o que sobra é $\frac{3}{5}a$. Assim, temos:

$\begin{cases} a + b + c = 340 \\ a - 10 = 2b \\ \frac{3}{5}a = c - 9 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 340 \\ a - 2b = 10 \\ 3a - 5c = -45 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 340 \\ -3b - c = -330 \\ -3b - 8c = -1065 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 340 \\ 3b + c = 330 \\ -7c = -735 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 105$; na 2ª equação temos $b = 75$ e na 1ª equação obtemos $a = 160$.

Ana tem R$ 160,00, Beatriz tem R$ 75,00 e Carolina R$ 105,00.

31. $\begin{cases} 4c + 3l + 6b = 37{,}20 \\ 2c + 2l + 3b = 20{,}60 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4c + 3l + 6b = 37{,}20 \\ -l = -4 \leftarrow (1ª \text{ eq.}) + (-2) \cdot (2ª \text{ eq.}) \end{cases}$

O sistema é indeterminado, com $l = 4$; $4c = 37{,}20 - 6b - 12 \Rightarrow 4c = 25{,}20 - 6b \Rightarrow 2c + 3b = 12{,}60$.

a) R$ 4,00

b) Não é possível determinar.

c) Como $2c + 3b = 12{,}60$, temos: $12{,}60 + 5 \cdot 4{,}00 = 12{,}60 + 20{,}00 = 32{,}60$; ou seja, R$ 32,60.

d) Não é possível determinar.

32. **a)** **I.** Oxigênio (O): $11x + y = z + 2w$

II. Carbono (C): $12x = 2z + w$

III. Hidrogênio (H): $22x + 2y = 6z$

b) $\begin{cases} 11x + y - z - 2w = 0 \\ 12x - 2z - w = 0 \\ 22x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 11x + y - z - 2w = 0 \\ 12x - 2z - w = 0 \\ 22x + 2y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 11x + y - z - 2w = 0 \\ 12y + 10z - 13w = 0 \leftarrow 12 \cdot (1ª \text{ eq.}) + (-11) \cdot (2ª \text{ eq.}) \\ -4z + 4w = 0 \leftarrow (-2) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}) \end{cases}$

d) O sistema escalonado obtido é possível e indeterminado.

3ª equação: $z = w$

2ª equação: $12y + 10w - 13w = 0 \Rightarrow 12y = 3w \Rightarrow y = \frac{w}{4}$

1ª equação: $11x + \frac{w}{4} - w - 2w = 0 \Rightarrow 11x = \frac{11w}{4} \Rightarrow x = \frac{w}{4}$

Considerando $w = \alpha$, a solução geral é:

$S = \left\{ \left(\frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{4}, \alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$

e) Se $w = 4$, temos que: $x = 1$, $y = 1$, $z = 4$ e $w = 4$.

A equação balanceada é:

$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O \rightarrow 4\ C_2H_5OH + 4\ CO_2$

f) $x\ A\ell_2(CO_3)_3 \rightarrow y\ A\ell_2O_3 + z\ CO_2$

Aℓ: $2x = 2y$

C: $3x = z$

O: $9x = 3y + 2z$

$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 3x - 2z = 0 \\ 9x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}\alpha$, $y = \frac{1}{3}\alpha$ e $z = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para que x, y e z resultem nos menores valores inteiros possíveis, vamos escolher $\alpha = 3$. Daí, $x = 1$, $y = 1$ e $z = 3$.

33. **a)** $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -y = 0 \leftarrow (-3) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (2ª \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 0$ e $x = 0$; $S = \{(0, 0)\}$; sistema possível e determinado.

b) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 7x - 14y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \leftarrow \left(\frac{1}{7}\right) \cdot (2ª \text{ eq.}) \end{cases}$

Obtemos equações equivalentes e o sistema se reduz à equação linear $-x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$; $S = \{(2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado.

c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 11y - 3z = 0 \leftarrow (1ª \text{ eq.}) + (-2) \cdot (2ª \text{ eq.}) \\ 7y + z = 0 \leftarrow (1ª \text{ eq.}) \cdot 3 + (3ª \text{ eq.}) \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 11y - 3z = 0 \\ -32z = 0 \leftarrow 7 \cdot (2ª \text{ eq.}) + (-11) \cdot (3ª \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$; $S = \{(0, 0, 0)\}$; sistema possível e determinado.

d) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \leftarrow (-2) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (2ª \text{ eq.}) \\ 5y + 5z = 0 \leftarrow (-4) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$

Na 2ª equação, temos que $y = z$ e, na 1ª equação: $x + 2z - z = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow x = -z$.

Assim, para um valor α real qualquer de z, obtemos:

$S = \{(-\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado.

34. **a)** $m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

b) $\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 6x - y + 15z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 5y - 9z = 0 \leftarrow (-2) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (2ª \text{ eq.}) \\ 5y - 9z = 0 \leftarrow (-6) \cdot (1ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 5y - 9z = 0 \end{cases}$

De $5y - 9z = 0$, obtemos $y = \frac{9z}{5}$ e, da 1ª equação: $x = \frac{-11z}{5}$. Se $z = \alpha$, escrevemos:

$S = \left\{\left(\frac{-11\alpha}{5}, \frac{9\alpha}{5}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$. Para que x, y e z resultem inteiros, α deve ser múltiplo de 5. Assim, para $\alpha = 5$, obtemos como solução $(-11, 9, 5)$; para $\alpha = 10$, obtemos $(-22, 18, 10)$; e assim por diante.

35. Temos que:

$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ (m + 1)y = 0 \end{cases}$

Se na 2ª equação o coeficiente de y se anular, isto é, se $m = -1$, o sistema admitirá infinitas soluções. Assim, se $m \neq -1$, teremos, como única solução, o par ordenado $(0, 0)$.

36. **a)** $\begin{cases} 3 + (-2) = 1 \text{ (V)} \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0 \text{ (V)} \end{cases}$; $(3, -2)$ é solução.

$\begin{cases} -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1 \text{ (V)} \\ 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 \cdot \frac{4}{3} = 0 \text{ (F)} \end{cases}$; $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ não é solução.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

37. Fazendo a multiplicação entre as matrizes, obtemos o sistema:

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 4 \\ -x + y + 2z = -5 \end{cases}$

a) $(2, 1, 3)$ não satisfaz a 3ª equação:

$-2 + 1 + 2 \cdot 3 = -2 + 7 = 5 \neq -5$

Logo, $(2, 1, 3)$ não é solução.

b) 1ª equação: $2 - \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = 0$ (V)

2ª equação: $2 + \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2 + 2 = 4$ (V)

3ª equação: $-2 - \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = -2 - 3 = -5$ (V)

Logo, $\left(2, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ é solução.

c) $(-1, 1, 0)$ não é solução, pois não satisfaz a 2ª equação: $-1 - 1 + 0 = -2 \neq 4$. A tripla $(-1, 1, 0)$ também não satisfaz a 3ª equação, pois: $-(-1) + 1 + 0 = 2 \neq -5$, mas qualquer uma das 2 equações pode ser utilizada para indicar que a tripla não é solução, pois basta não satisfazer uma única equação.

38. **a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -13 \\ -1 & 1 & 10 & 4 \end{bmatrix}$

39. **a)** $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 7y - 2z = 11 \\ x - y + 3z = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 4y + 3z = 11 \\ -3x - 3y - 3z = 10 \end{cases}$

40. **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) (–5, 4, 2) é solução, pois:

$-5 + 8 + 2 = 5$

$-10 + 12 - 2 = 0$

(1, 1, 1) não satisfaz nenhuma das equações:

1ª equação: $1 + 2 + 1 = 4 \neq 5$

2ª equação: $2 + 3 - 1 = 4 \neq 0$

c) 1ª equação:

$-15 + 5\alpha + 2 \cdot (10 - 3\alpha) + \alpha =$

$= -15 + \cancel{5\alpha} + 20 - \cancel{6\alpha} + \cancel{\alpha} = 5$

2ª equação:

$2 \cdot (-15 + 5\alpha) + 3 \cdot (10 - 3\alpha) - \alpha =$

$= -\cancel{30} + 10\alpha + \cancel{30} - 9\alpha - \alpha = 0$

Portanto, a terna ordenada é solução do sistema linear.

d) Ao aplicar a tripla $(p, 16, -2)$ na 1ª equação:

$p + 2 \cdot 16 - 2 = 5 \Rightarrow p + 30 = 5 \Rightarrow p = -25$

42. **a)** $-8 - 3 = -11$

b) $3 - 0 = 3$

c) $A + B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$; $\det (A + B) = -15 - 0 = -15$.

d) $A - B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; $\det (A - B) = +5 - 6 = -1$.

e) $A + 2B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$; $\det (A + 2B) = -16 + 3 = -13$.

f) $A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$;

$\det (A \cdot B) = -42 + 9 = -33$.

45. **a)** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^2 & (-1)^2 & (-2)^2 \\ 1^2 & 0^2 & (-1)^2 \\ 2^2 & 1^2 & 0^2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det A = -0 - 0 - 0 + 0 + 4 + 4 = 8$

b) $A^t = A$, portanto $\det A^t = \det A = 8$.

46. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\det A = -2 - 2 - 2 + 1 + 4 + 2 = 1$

$\det B = -4$

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\det (A + B) = 0$.

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det (A \cdot B) =$

$= -6 - 0 - 12 + 10 + 0 + 4 = -4$.

47. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 2$

a) Devemos ter $D \neq 0$, isto é, $m \neq 2$.

b) A condição $D = 0$, ou seja, $m = 2$, é necessária, porém não suficiente.

Se $m = 2$:

$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$; equações incompatíveis.

Assim, não existe $m \in \mathbb{R}$ para o qual o sistema possui infinitas soluções.

c) $m = 2$, pelo item anterior.

48. O sistema é: $\begin{cases} x + ky = -1 \\ (k + 1)x + 2y = 0 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k + 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - k(k + 1) = 2 - k^2 - k$

Devemos ter $D \neq 0$, isto é: $-k^2 - k + 2 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \neq 1$ e $k \neq -2$.

49. $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -5 & -4 & m \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & 5 \end{matrix}$

$+8 \quad +5m \quad -20 \quad -16 \quad +m \quad -50$

$D = 6m - 78$

- Se $D \neq 0$, isto é, se $6m - 78 \neq 0 \Rightarrow m \neq 13$, o sistema é possível e determinado.
- Se $D = 0$, isto é, se $m = 13$, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado; para $m = 13$, temos:

$\begin{cases} -x + y + 2z = 3 \\ -5x - 4y + 13z = -9 \\ x + 5y - 4z = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 3 \\ -9y + 3z = -24 \\ 6y - 2z = 16 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 3 \\ -3y + z = -8 \\ 3y - z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 3 \\ -3y + z = -8 \end{cases}$

Sistema possível e indeterminado.

Interligando

1. Fluxo em cada nó:

A: $x + 300 = 100 + y \Rightarrow x - y = -200$

B: $y + 300 = z \Rightarrow y - z = -300$

C: $z + 100 = w + 200 \Rightarrow z - w = 100$

$\begin{cases} x - y = -200 \\ y - z = -300 \\ z - w = 100 \end{cases}$

O sistema tem 3 equações e 4 incógnitas.

2. Para $x = 250$, temos:

Da 1ª equação, segue que: $250 - y = -200 \Rightarrow y = 450$;

Substituindo na 2ª equação: $450 - z = -300 \Rightarrow z = 750$;

Substituindo na 3ª equação: $750 - w = 100 \Rightarrow w = 650$.

3. Da 1ª equação, segue que $y = x + 200$.

Substituindo na 2ª equação, obtemos:

$(x + 200) - z = -300 \Rightarrow z = x + 500$;

Substituindo na 3ª equação, obtemos:

$(x + 500) - w = 100 \Rightarrow w = x + 400$.

Assim, podemos escrever $S = \{(x, x + 200, x + 500, x + 400) \mid x \in \mathbb{N}^*\}$, o que indica que há, portanto, inúmeras soluções (do ponto de vista teórico, são infinitas soluções, mas há um limite natural para o fluxo de veículos, por hora, em certa via).

Viralize

3. Sejam x, y, z e w, respectivamente, as populações quilombolas dos estados da Bahia, do Maranhão, de Minas Gerais e do Pará. Assim, temos:

$y = 2w$ **I**

$z = w$ **II**

$\frac{x+y}{2} = 333\,500 \Rightarrow x + y = 667\,000$ **III**

$x - w = 262\,000$ **IV**

Substituindo **I** em **III**, temos: $x + 2w = 667\,000$. **V**

Fazendo **V** − **IV**, obtemos: $3w = 405\,000 \Rightarrow w = 135\,000$ (população quilombola no Pará).

Por **II**, segue $z = 135\,000$ (população quilombola em Minas Gerais).

Por **I**, segue que $y = 2 \cdot 135\,000 = 270\,000$ (população quilombola no Maranhão).

Por **IV**, segue que $x = w + 262\,000 = 135\,000 + 262\,000 = 397\,000$ (população quilombola na Bahia).

Para fundamentar saberes

3. Da equação matricial, obtemos $MC = P$.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & a-b+2c & c \\ d & d-e+2f & f \\ g & g-h+2i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, temos que:

$(a, b, c, d, e, f, g, h, i) = (15, 1, 13, 19, 1, 13, 1, 11, 0)$

A mensagem enviada foi:

(15, 1, 13, 19, 1, 13, 1, 11, 0) = (P, A, N, T, A, N, A, L, !)

PANTANAL!

Alternativa **c**.

4. Sejam a e v os preços unitários dos tíquetes azul e vermelho, respectivamente.

Como cada cartela tem 9 tíquetes, podemos escrever:

$$\begin{cases} 2 \cdot 9 \cdot a + 9 \cdot v = 32{,}40 \Rightarrow 18a + 9v = 32{,}40 \Rightarrow 2a + v = 3{,}60 \text{ I} \\ a - v = v + 0{,}05 \Rightarrow a - 2v = 0{,}05 \text{ II} \end{cases}$$

Ao resolver o sistema formado por **I** e **II**, concluímos que:

$v = 0{,}70$ e $a = 1{,}45$; assim a cartela de 9 tíquetes vermelho custa $9 \cdot$ R$ 0,70 = R$ 6,30.

Alternativa **b**.

5. Para atingir a meta é preciso vender ainda, naquele mês, no mínimo 86 carros (104 − 18 = 86).

Sejam x, y e z, o número de dias (entre os 20 restantes) em que não há desconto, há desconto mínimo e há desconto máximo, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \text{ I} \\ 3x + 4y + 5z = 86 \text{ II} \end{cases}$$

Calculando $(-3) \cdot$ **I** + **II**, obtemos $y + 2z = 26 \Rightarrow y = 26 - 2z$ **III**.

Em **I**, obtemos: $x = z - 6 \Rightarrow z = x + 6$ **IV**.

Por **IV**, concluímos que, se $x = 0$ (menor valor possível para x), z assumirá seu valor mínimo, que é igual a 6 (6 dias com desconto máximo).

Alternativa **a**.

6. Sejam x, y e z as quantidades de porções (de 100g) de pão, fruta e iogurte:

$$\begin{cases} \text{Proteínas:} & 8x + 0y + 4z = 16 \Rightarrow 2x + z = 4 \text{ I} \\ \text{Carboidratos:} & 60x + 20y + 2z = 124 \Rightarrow 30x + 10y + z = 62 \text{ II} \\ \text{Gorduras:} & 4x + 0y + 3z = 10 \Rightarrow 4x + 3z = 10 \text{ III} \end{cases}$$

Calculando $(-2) \cdot$ **I** + **III**, obtemos: $z = 2$. Logo, em **I**, obtemos $x = 1$ e, em **II**, $y = 3$.

Portanto, essa pessoa deve ingerir 1 porção de pão, 3 porções de frutas e 2 porções de iogurte.

7. $a_{11} = 5 - 1 = 4$ $\quad a_{21} = 10 - 1 = 9$ $\quad a_{12} = 5 - 4 = 1$ $\quad a_{22} = 10 - 4 = 6$

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$; $\det A = 24 - 9 = 15$.

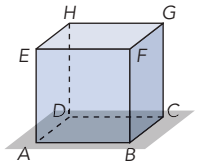
Alternativa **c**.

Unidade 3

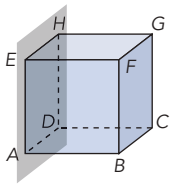
Capítulo 5

Atividades

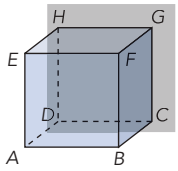
1. **a)**



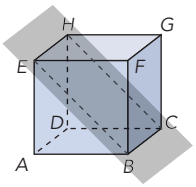
b)



c)

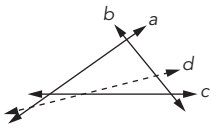


d)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Sejam a, b, c e d as retas. As retas a, b e c, em 2 a 2 concorrentes, são as retas-suporte dos lados de um triângulo; portanto, são coplanares. A reta d, sendo concorrente com as 3 anteriores, estará também contida nesse plano. Logo, é determinado um único plano.

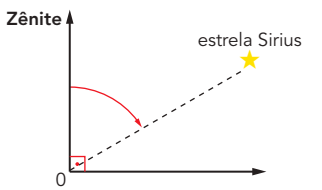


Interligando

1. O ponto mais alto do céu que pode ser observado a partir desse local corresponde ao zênite, cujo ângulo em relação ao horizonte mede 90°, conforme ilustra o esquema. Para determinar a medida do ângulo entre a estrela Sirius e o ponto mais alto do céu (ângulo zenital), basta subtrair a medida do ângulo da estrela Sirius, em relação ao horizonte (ângulo de elevação), ângulo que mede 90°:

$90° - 30° = 60°$

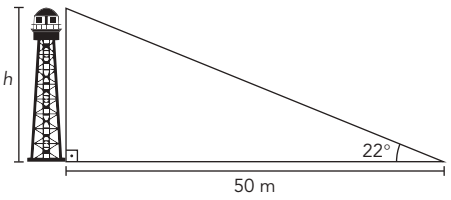
Logo, o ângulo zenital mede 60°.



2. Sejam h a medida da altura da torre e d a medida de distância do estudante até a base da torre.

$\tan 22° = \frac{h}{d} \Rightarrow 0{,}4 \simeq \frac{h}{50} \Rightarrow h \simeq 20$

Portanto, a altura da torre mede aproximadamente 20 m.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Capítulo 6

Atividades

5. **a)** Como $a = 2{,}5 \text{ cm} = \frac{5}{2} \text{ cm}$, temos:

$d = a\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$

$A_t = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot (2{,}5 \text{ cm})^2 = 37{,}5 \text{ cm}^2$

$V = a^3 = (2{,}5 \text{ cm})^3 = 15{,}625 \text{ cm}^3$

b) Sendo $a = b = 2$ cm e $c = 2{,}5$ cm, temos:

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(2 \text{ cm})^2 + (2 \text{ cm})^2 + (2{,}5 \text{ cm})^2} =$

$= \sqrt{(14{,}25 \text{ cm})} = \sqrt{\frac{57}{4} \text{ cm}^2} = \frac{\sqrt{57}}{2} \text{ cm}$

A medida de área total é calculada pela adição das medidas de área das bases com a de área lateral.

$A_b = a \cdot b \Rightarrow A_b = (2 \text{ cm}) \cdot (2 \text{ cm}) = 4 \text{ cm}^2$

$A_\ell = 4 \cdot a \cdot c \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot (2 \text{ cm}) \cdot (2{,}5 \text{ cm}) = 20 \text{ cm}^2$

Logo, $A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 8 \text{ cm}^2 + 20 \text{ cm}^2 = 28 \text{ cm}^2$.

Por fim, a medida de volume:

$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = (2 \text{ cm}) \cdot (2 \text{ cm}) \cdot (2{,}5 \text{ cm}) = 10 \text{ cm}^3$

c) Como $a = 3$ cm, $b = 1{,}5$ cm e $c = 2$ cm, fazemos:

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(3 \text{ cm})^2 + (1{,}5 \text{ cm})^2 + (2 \text{ cm})^2} =$

$= \sqrt{\frac{61}{4} \text{ cm}^2} = \frac{\sqrt{61}}{2} \text{ cm}$

A medida de área total é calculada pela adição das medidas de área das bases com a de área lateral.

$A_b = a \cdot b \Rightarrow A_b = (3 \text{ cm}) \cdot (1{,}5 \text{ cm}) = 4{,}5 \text{ cm}^2$

$A_\ell = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 2 \cdot (3 \text{ cm}) \cdot (2 \text{ cm}) + 2 \cdot (1{,}5 \text{ cm}) \cdot (2 \text{ cm}) = 18 \text{ cm}^2$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 2 \cdot 4{,}5 \text{ cm}^2 + 18 \text{ cm}^2 = 27 \text{ cm}^2$

$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = (3 \text{ cm}) \cdot (1{,}5 \text{ cm}) \cdot (2 \text{ cm}) = 9 \text{ cm}^3$

8. Considere a, b e c as medidas das dimensões do paralelepípedo, em centímetros, e $V = 192 \text{ cm}^3$ a medida de volume do paralelepípedo. Assim, temos:

$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow abc = 192 \text{ cm}^3$ I

Considerando $a \cdot b = 32 \text{ cm}^2$ e $a \cdot c = 24 \text{ cm}^2$, temos, de I:

$\left.\begin{array}{l} 32 \cdot c = 192 \text{ cm} \Rightarrow c = 6 \text{ cm} \\ 24 \cdot b = 192 \text{ cm} \Rightarrow b = 8 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow b \cdot c = 48 \text{ cm}^2$

A_t: medida de área total do paralelepípedo é:

$A_t = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 64 \text{ cm}^2 + 48 \text{ cm}^2 + 96 \text{ cm}^2 = 208 \text{ cm}^2$

9. V_p: medida de volume do paralelepípedo;
$V_p = (20\text{ cm}) \cdot (30\text{ cm}) \cdot (45\text{ cm}) = 27\,000\text{ cm}^3$.
V_c: medida de volume do cubo medindo x cm de aresta;
$V_c = x^3\text{ cm}^3$.

a) Como $V_c = V_p$, temos $x^3 = 27\,000\text{ cm}^3 \Rightarrow x = 30\text{ cm}$.

b) $d = x\sqrt{3} \Rightarrow d = 30\sqrt{3}\text{ cm}$

c) Medida de área total do paralelepípedo:

$A_{T_p} = 2 \cdot 20 \cdot 30 + 2 \cdot 20 \cdot 45 + 2 \cdot 30 \cdot 45 = 5\,700$;
$A_{T_p} = 5\,700\text{ cm}^2$

Medida de área total do cubo:

$A_{T_c} = 6 \cdot 30^2 = 5\,400$; $A_{T_c} = 5\,400\text{ cm}^2$

Assim, $\frac{A_{T_p}}{A_{T_c}} = \frac{5\,700\text{ cm}^2}{5\,400\text{ cm}^2} = \frac{19}{18}$.

10. Dados da caixa-d'água original:

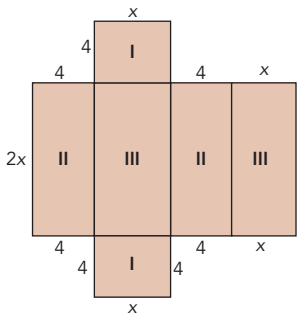
- Medida das arestas da base: x dm.
- Medida da altura: $h_1 = 8$ dm.
- Medida de volume: $V_1 = 8x^2\text{ dm}^3$.

Dados da nova caixa-d'água:

- Medida das arestas da base: $(x + 0{,}2x)\text{ dm} = 1{,}2x$ dm.
- Medida da altura: $h_2 = (8 + 0{,}2 \cdot 8)\text{ dm} = 9{,}6$ dm.
- Medida de volume: $V_2 = (1{,}2x)^2 \cdot 9{,}6\text{ dm}^3 = 13{,}824x^2\text{ dm}^3$.

Como $1\text{ L} = 1\text{ dm}^3$ e $V_2 = 3\,110{,}4\text{ L}$, então $V_2 = 3\,110{,}4\text{ dm}^3$.
Logo, $13{,}824x^2 = 3\,110{,}4 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = 15$.
Portanto, $x = 15$ dm.

11. **a)**



Banco de imagens/Arquivo da editora

$A_t = 364\text{ cm}^2 \Rightarrow 2 \cdot A_{\text{I}} + 2 \cdot A_{\text{II}} + 2 \cdot A_{\text{III}} = 364\text{ cm}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot 4 \cdot x + 2 \cdot 4 \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 2x = 364 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 6x - 91 = 0 \Rightarrow x = 7$ (Desconsideramos a opção negativa $x = -13$.)

Portanto, $x = 7$ cm.

b) Sendo $x = 4$ cm:

$V = x \cdot 2x \cdot 4 \Rightarrow V = (4\text{ cm}) \cdot (8\text{ cm}) \cdot (4\text{ cm}) = 128\text{ cm}^3$

c) Sendo $x = 6$ cm:
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 4^2 + x^2 + (2x)^2 = 5x^2 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow d^2 = 5 \cdot 6^2 + 16 \Rightarrow d^2 = 196 \Rightarrow d = 14$; ou seja, 14 cm.

12. Exemplo de problema: "Um empresário [...] elas terão". Ele pensou em confeccionar embalagens cúbicas de arestas medindo, em relação às embalagens atuais (caixa **1**), 40% a mais, a terça parte e o dobro, respectivamente as caixas **2**, **3**, e **4**.

a) Compare a medida de capacidade das novas caixas com a da caixa **1**.

b) Compare a quantidade total de material necessário para confeccionar cada uma das caixas com o gasto para confeccionar a caixa **1**.

13. **a)** $0{,}2 \cdot (50 \cdot 20 \cdot 2{,}5) = 500$; $500\text{ m}^3 = 500\,000\text{ L}$.

b) O nível "atual" que a água atinge é dado, em metros, por $0{,}8 \cdot 2{,}5 = 2$.

$150\,000\text{ L} = 150\text{ m}^3$

$150 = 50 \cdot 20 \cdot h \Rightarrow h = \frac{150}{1000} \Rightarrow h = 0{,}15$

Logo, $h = 0{,}15\text{ m} = 15\text{ cm}$, o que faz com que o nível da água atinja $2\text{ m} + 0{,}15\text{ m} = 2{,}15\text{ m}$.

c) $40\text{ cm} = 0{,}4\text{ m}$

$V_{\text{retirado}} = (50\text{ m}) \cdot (20\text{ m}) \cdot (0{,}4\text{ m}) =$
$= 400\text{ m}^3 = 400\,000\text{ L}$

15. Em 1 bloco, temos que $a = 12$ cm e $b = 21$ cm são as medidas das arestas das bases. Além disso, a medida da altura é $h = \frac{1}{11} \cdot (2a + 2b) = \frac{24 + 42}{11} \Rightarrow h = 6$; ou seja, 6 cm.

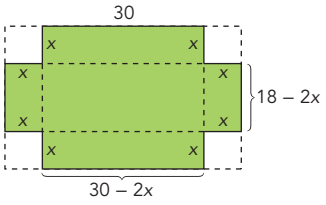
Seja V a medida de volume de 1 bloco:
$V = a \cdot b \cdot h = (12\text{ cm}) \cdot (21\text{ cm}) \cdot (6\text{ cm}) \Rightarrow V = 1512\text{ cm}^3$
Seja V_1 a medida de volume de 1 bloquinho de 3 cm de medida de aresta:
$V_1 = (3\text{ cm})^3 = 27\text{ cm}^3$
Se n é o número de bloquinhos de 1 bloco, então $n = \frac{V}{V_1} = \frac{1512}{27} = 56$.

Assim, temos que C é o custo dos 20 blocos,
$C = 20 \cdot \text{R\$ } 15{,}00 = \text{R\$ } 300{,}00$;

P é o preço de venda dos 1120 cubinhos $(20 \cdot 56)$,
$P = 1120 \cdot \text{R\$ } 0{,}80 = \text{R\$ } 896{,}00$.

Assim, o lucro L obtido é calculado $L = P - C =$
$= 896 - 300 = 596$.
Portanto, o lucro será de R$ 596,00.

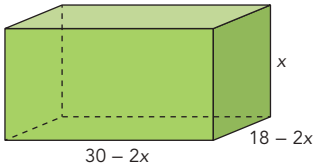
16. **a)**



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Devemos ter:
$18 - 2x > 0 \Rightarrow x < 9$;
$30 - 2x > 0 \Rightarrow x < 15$;
x não podendo ser negativo.
Daí, $x \in]0, 9[$, ou $0 < x < 9$.

b)



Medida de volume da caixa:

$V = (30 - 2x) \cdot (18 - 2x) \cdot (x) = 4x^3 - 96x^2 + 540x$

c) A medida de área da superfície lateral será:
$A_\ell = [(2 \cdot x \cdot (18 - 2x)] + [2 \cdot x \cdot (30 - 2x)] \Rightarrow$
$\Rightarrow A_\ell = 96x - 8x^2$
Assim, $270 = 96x - 8x^2$. Resolvendo a equação de 2º grau, temos $x = 4{,}5$ cm ou $x = 7{,}5$ cm.

18. **b)** A medida de área superficial do biscoito inteiro é assim calculada: 6 cm · 6 cm = 36 cm². Como estamos dividindo o biscoito pela metade, na diagonal, a medida de área superficial será 18 cm².

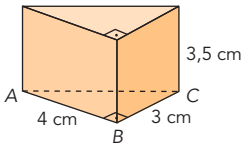
c) Como a pilha de biscoitos foi dividida em 2 colunas iguais, a medida de volume de cada pilha será igual à metade da medida de volume da pilha original de biscoitos, ou seja, $\frac{720\ \text{cm}^3}{2} = 360\ \text{cm}^3$. Além disso, espera-se que os estudantes percebam que a medida de volume da pilha será igual ao produto da medida de área superficial de um biscoito pela medida da altura da pilha, ou seja, 18 cm² · 20 cm = 360 cm³.

d) A seguir estão indicadas algumas possibilidades.

- Região limitada por um triângulo retângulo: Como a medida de área do biscoito será a mesma, 36 cm², o produto entre as medidas dos catetos deve ser 72, pois a medida de área da região limitada pelo triângulo retângulo será igual à metade do produto das medidas dos catetos. Considerando números inteiros, teríamos 8 e 9 como possibilidades para as medidas dos catetos. Nesse caso, as medidas dos catetos seriam 8 cm e 9 cm e a da hipotenusa, $\sqrt{145}$ cm.
- Região retangular: Como a medida de área do biscoito será a mesma, 36 cm², o produto entre as medidas dos lados da região limitada pelo retângulo deverá ser igual a 36. Logo, considerando números inteiros em que o produto é 36, temos 4 cm e 9 cm ou 3 cm e 12 cm como possibilidades de medida dos lados da região retangular.
- Região limitada por um hexágono regular: Considerando 36 cm² como a medida de área de uma região limitada por um hexágono regular, a medida do lado será $\sqrt[4]{192}$ cm. Como a região limitada pelo hexágono é composta de 6 regiões limitadas por triângulos equiláteros, temos que $A = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 36 = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \ell = \sqrt[4]{192}$.

e) A medida de volume do pacote de biscoitos será igual ao produto da medida de área do biscoito pela medida da altura da pilha, ou seja, 36 cm² · 20 cm = 720 cm³.

19. **a)**



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\triangle ABC$ retângulo: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow AC = 5$; ou seja, 5 cm.

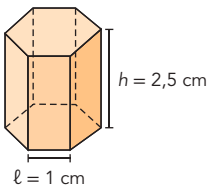
$A_\ell = 4 \cdot 3{,}5 + 3 \cdot 3{,}5 + 5 \cdot 3{,}5$; ou seja, 42 cm².

$A_b = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$; ou seja, 6 cm².

$A_t = 2 \cdot A_b + A\ell \Rightarrow A_t = 2 \cdot 6 + 42$; ou seja, 54 cm².

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = 6 \cdot 3{,}5 = 21$; ou seja, 21 cm³.

b)



$A_\ell = 6 \cdot (1 \cdot 2{,}5) = 15$; ou seja, 15 cm².

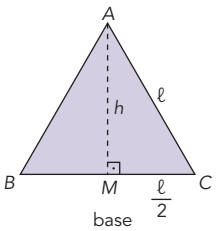
A_b é a medida de área da região limitada pelo hexágono regular de lado ℓ medindo 1 cm.

$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; ou seja, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm².

$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b \Rightarrow A_t = 15 + 3\sqrt{3} = 3\left(5 + \sqrt{3}\right)$; ou seja, $3\left(5 + \sqrt{3}\right)$ cm².

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2{,}5 = \frac{15\sqrt{3}}{4}$; ou seja, $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm³.

20.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$3\ell = 12$ dm $\Rightarrow \ell = 4$ dm

$\triangle AMC$ retângulo:

$h^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$; ou seja, $2\sqrt{3}$ dm.

H: medida da altura do prisma

$H = 2h = 4\sqrt{3}$; ou seja, $4\sqrt{3}$ dm.

$A_b = \frac{1}{2} \cdot \ell\, h \Rightarrow A_b = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$; ou seja, $4\sqrt{3}$ dm².

$A_\ell = 3 \cdot (\ell \cdot H) = 3 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$; ou seja, $48\sqrt{3}$ dm².

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 8\sqrt{3} + 48\sqrt{3} = 56\sqrt{3}$;

ou seja, $56\sqrt{3}$ dm².

$V = A_b \cdot H = \left(4\sqrt{3}\right) \cdot \left(4\sqrt{3}\right) = 48$; ou seja, 48 dm³.

21. **a)**

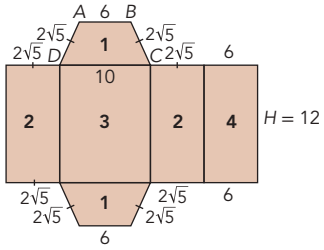


Figura **1**.

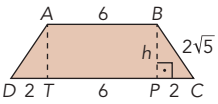


Figura **2**.

Na figura **2** (base do prisma), como o $\triangle BPC$ é retângulo, temos $h^2 + 4 = 20 \Rightarrow h = 4$.

Medida de área da base do prisma, em centímetros quadrados:

$A_b = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h = \frac{1}{2}(6 + 10) \cdot 4 \Rightarrow A_b = 32$

Logo, $V = A_b \cdot H = (32\ \text{cm}^2) \cdot (12\ \text{cm}) = 384\ \text{cm}^3$.

b) Medida de área lateral, em centímetros quadrados:

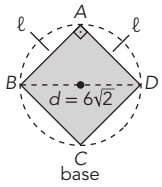
$A_\ell = 2 \cdot A_2 + A_3 + A_4 = 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 12 + 10 \cdot 12 + 6 \cdot 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 48\left(4 + \sqrt{5}\right)$

Logo, a razão será $\frac{A_b}{A_\ell} = \frac{32}{48\left(4 + \sqrt{5}\right)} \Rightarrow \frac{A_b}{A_\ell} = \frac{8 - 2\sqrt{5}}{33}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

22. Seja h a medida da altura do prisma. Pelo enunciado, $h = 8$ cm.



Sendo $\overline{BD}$ a diagonal do quadrado $ABCD$:

$d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow 6\sqrt{2} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 6$; ou seja, 6 cm.

Para calcular a medida de área total, precisamos calcular a medida de área da base e a medida de área lateral.

$A_b = \ell^2 \Rightarrow A_b = (6\text{ cm})^2 = 36\text{ cm}^2$

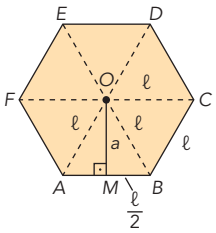
$A_\ell = 4 \cdot \ell \cdot h \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot (6\text{ cm}) \cdot (8\text{ cm}) = 192\text{ cm}^2$

Portanto, a medida de área total será $A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 72\text{ cm}^2 + 192\text{ cm}^2 = 264\text{ cm}^2$.

Por fim, a medida de volume será $V = A_b \cdot h = 36 \cdot 8 = 288$, ou seja, 288 cm³.

23. Sejam h a medida da altura do prisma e a a medida do apótema. Pelo enunciado, $h = 20$ dm e $a = 6\sqrt{3}$ dm.



O $\triangle AOB$ é equilátero, logo M é o ponto médio de $\overline{AB}$, ou seja, $MB = \frac{\ell}{2}$.

Como $\triangle OMB$ é retângulo, temos:

$\ell^2 = a^2 + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow \frac{3\ell^2}{4} = \left(6\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow \ell = 12$; ou seja, 12 dm.

Sabendo a medida do lado, é possível calcular a medida de área total.

$A_b = 6 \cdot A_{AOB} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot a\right) = 3 \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 216\sqrt{3}$; ou seja, $216\sqrt{3}$ dm².

$A_\ell = 6 \cdot \ell \cdot h = 6 \cdot 12 \cdot 20 = 1440$; ou seja, 1440 dm².

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell = 432\sqrt{3}\text{ dm}^2 + 1440\text{ dm}^2 =$

$= 144\left(10 + 3\sqrt{3}\right)\text{ dm}^2$

Por fim, a medida de volume será

$V = A_b \cdot h = \left(216\sqrt{3}\right) \cdot 20 = 4320\sqrt{3}$; ou seja, $V = 4320\sqrt{3}$ dm³.

25. Pelo enunciado, $A_t = 2 \cdot A_\ell \Rightarrow A_\ell + 2 \cdot A_b = 2 \cdot A_\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot A_b = A_\ell$.

Assim, temos:

$2 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \ell \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\ell^2}{2} = 12\ell \Rightarrow \ell = 24$; ou seja, 24 cm.

Sabendo a medida do lado, é possível calcular a medida de volume total da embalagem:

$V = \frac{24^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3} = 1728$; ou seja, 1728 cm³.

Por fim, a medida de volume será $0{,}6 \cdot 1728\text{ cm}^3 =$

$= 1036{,}8\text{ cm}^3$.

27. A base do prisma é uma região limitada por um hexágono regular, e a medida do lado do hexágono é igual a ℓ cm. Dessa maneira, a medida de área da base será:

$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Sendo $h = 18$ cm, a medida de área lateral será:

$A_\ell = 6(\ell \cdot h) = 6 \cdot 18\ell = 108\ell$

Logo, tomando a razão entre essas medidas de área:

$\frac{A_b}{A_\ell} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2}\right) \cdot 3 = 108\ell \Rightarrow \ell = 8\sqrt{3}$; ou seja, $8\sqrt{3}$ cm.

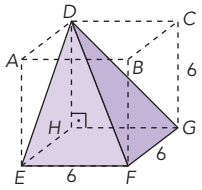
A medida de área lateral será:

$A_\ell = 108\ell = 108 \cdot 8\sqrt{3} = 864\sqrt{3}$; ou seja, $864\sqrt{3}$ cm².

Com isso, a medida de volume será:

$V = A_b \cdot h = \frac{3 \cdot \left(8\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 18 = 5184\sqrt{3}$; ou seja, $5184\sqrt{3}$ cm³.

29. **a)**

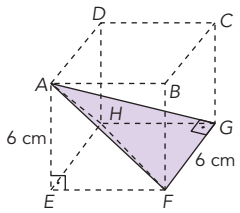


$A_b = (6\text{ cm})^2 = 36\text{ cm}^2$

$DH = h = 6$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36\text{ cm}^2 \cdot 6\text{ cm} = 72\text{ cm}^3$

b)



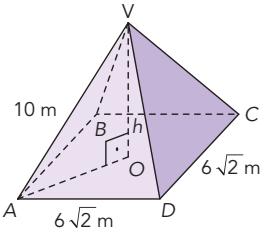
$\triangle FGH$ retângulo isósceles

$A_{FGH} = \frac{1}{2} \cdot FG \cdot GH = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$; $A_{FGH} = 18\text{ cm}^2$

$AE = h = 6$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{FGH} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 18\text{ cm}^2 \cdot 6\text{ cm} = 36\text{ cm}^3$

32. Na figura, temos:



$AO = \frac{AC}{2} = \frac{AD\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AO = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow AO = 6$; ou seja, 6 cm.

$\triangle VOA$ retângulo: $h^2 = 10^2 - 6^2 = 8$; ou seja, $h = 8$ cm.

Logo: $V = \frac{1}{3} \cdot \left(6\sqrt{2}\right)^2 \cdot 8 = 192$; ou seja, 192 cm³.

33. A base do tetraedro uma região limitada por um triângulo equilátero de lado de medida igual a ℓ cm.

Da medida de perímetro, $3\ell = 12\text{ cm} \Rightarrow \ell = 4$ cm.

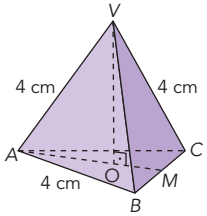


Figura **1**.

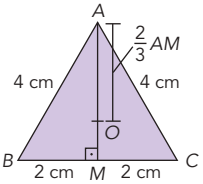


Figura **2**.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Como todas as faces do tetraedro são regiões limitadas por triângulos equiláteros congruentes, temos:

$A_t = 4 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_t = 4^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow A_t = 16\sqrt{3}$; ou seja, $16\sqrt{3}$ cm².

b) Medida da altura: $h = VO$.

Na figura **1**, o $\triangle VOA$ é retângulo:

$(VO)^2 + (AO)^2 = 4^2 = 16$ **1**

Na figura **2**, o $\triangle ABC$ é equilátero:

$AO = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{2}{3}\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\ell\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AO = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ **2**

Substituindo **2** em **1**, temos:

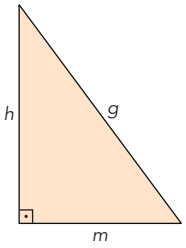
$h^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{6}}{3}$; ou seja, $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm.

c) $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (4\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$; ou seja, $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm³.

35. **a)** Não, nesse caso, seria necessário conhecer a medida da altura ou a medida do apótema da pirâmide.

b) Sim. Sejam, por exemplo, a altura h da pirâmide igual a 4 cm e o apótema g igual a 5 cm.



Pela região limitada pelo triângulo retângulo, é possível determinar a medida da aresta do cubo, pois será o dobro da medida do cateto m.

Como $h^2 + m^2 = g^2$, temos $m = 3$ cm.

Logo, a aresta do cubo medirá 6 cm.

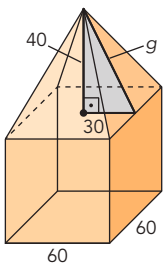
Dessa maneira, a medida de volume do sólido será calculada pela soma da medida de volume do cubo com o da pirâmide.

$V_{cubo} = 6^3 = 216$; ou seja, 216 cm³.

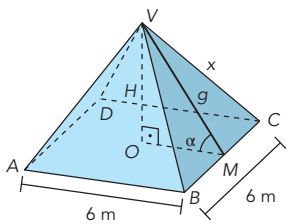
$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 48$; ou seja, 48 cm³.

Portanto, a medida de volume total será igual a 216 cm³ + 48 cm³ = 264 cm³. Poderíamos executar um processo análogo para o cálculo independentemente dos valores das medidas conhecidas.

c) Exemplo de problema: O sólido geométrico representado na figura **1** foi construído em acrílico, cujo custo é de R$ 15,00/m². Sabendo que a aresta do cubo mede 60 cm e a altura da pirâmide, 40 cm, determine o gasto total para confeccionar 20 sólidos geométricos iguais a esse. Despreze a espessura do acrílico.



39.



$\ell = 6$ m; $x = 3\sqrt{5}$ m.

$OC = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OC = 3\sqrt{2}$; ou seja, $3\sqrt{2}$ m.

$\triangle VOC$ é retângulo: $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = H^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 3\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 3\sqrt{3}$; ou seja, $3\sqrt{3}$ m.

a) $A_b = (6 \text{ cm})^2 \Rightarrow A_b = 36$ m²

$\triangle VMC$ é retângulo: $g^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 - 3^2 = 6 \Rightarrow g = 6$; ou seja, 6 m.

$A_\ell = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\right) = 72 \Rightarrow A_\ell = 72$; ou seja, 72 m².

$A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 108$; ou seja, 108 m².

b) $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 36\sqrt{3}$; ou seja, $36\sqrt{3}$ m³.

c) $\left.\begin{array}{l} \alpha = \text{med}(V\hat{M}O) \\ \triangle VOM \text{ retângulo} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{OM}{g} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$

40. **a)** Por contagem: 13 vértices, 20 arestas e 10 faces.

b) $V_{enfeite} = V_{cubo} - V_{pirâmide}$

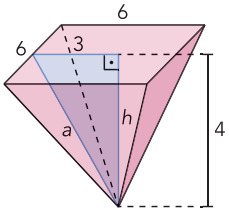
$V_{enfeite} = 12^3 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 1728 - 48 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{enfeite} = 1680$; ou seja, 1 680 cm³.

$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ cm}^3 \text{ ——— } 0{,}87 \text{ g} \\ 1680 \text{ cm}^3 \text{ ——— } x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1\,461{,}6$

Logo, $x = 1461{,}6$ g.

c)



Banco de imagens/Arquivo da editora

Temos:

- 5 faces quadradas, cada uma com medida de área $(12 \text{ cm})^2 = 144$ cm²;
- 1 face (superior) cuja medida de área é $(12 \text{ cm})^2 - (6 \text{ cm})^2 = 108$ cm²;
- 4 faces triangulares, correspondentes à superfície lateral da pirâmide:

$a^2 = (3 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2 \Rightarrow a = 5$ cm

$A_{face\ lateral} = \frac{6 \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2}$

$A_{face\ lateral} = 15$; ou seja, 15 cm².

Assim, a medida de área total da superfície do poliedro é dada por:

$5 \cdot 144 + 108 + 4 \cdot 15 = 888$; ou seja, 888 cm².

41. Com os dados, e possível calcularmos a medida de volume da pirâmide original:

$V_I = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 20 \Rightarrow V_I = 960$; ou seja, 960 cm³.

Sendo **I** e **II** as pirâmides semelhantes:

$\frac{V_I}{V_{II}} = \frac{960}{120} = 8 = k^3 \Rightarrow k = 2$ (razão de semelhança linear)

$\frac{20}{5} = \frac{12}{\ell} = k = 2 \Rightarrow h = 10$ cm e $\ell = 6$ cm.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

42. **a)** Temos que $h_2 = 45$ cm e $h_1 = 15$ cm.

Assim, a razão é $\frac{h_2}{h_1} = k \Rightarrow \frac{45}{15} = k \Rightarrow k = 3$.

Sabendo que a razão entre as medidas das alturas das pirâmides é igual a 3, podemos determinar a medida da aresta da base da nova pirâmide. Sendo $\ell_2 = 60$ cm, precisamos determinar a medida da aresta da base da pirâmide obtida (ℓ_1):

$\frac{\ell_2}{\ell_1} = k \Rightarrow \frac{60}{\ell_1} = 3 \Rightarrow \ell_1 = 20$; ou seja, 20 cm.

43. Exemplo de problema: O interior de um objeto oco de vidro, com formato de pirâmide regular quadrangular, contém água até o nível correspondente a $\frac{4}{5}$ da medida da altura dele. Invertendo a posição, qual será o novo nível da água no interior desse objeto, em função de h?

44. V: vértice da pirâmide que originou o tronco.

x: medida de distância entre V e a base menor do tronco, em centímetros.

Comparando as 2 pirâmides semelhantes, temos:

$\frac{12}{24} = \frac{x}{x + 27} \Rightarrow x + 27 = 2x \Rightarrow x = 27$; ou seja, 27 cm.

V_1: medida de volume da pirâmide maior.

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot (27 + x) = \frac{1}{3} \cdot 576 \cdot 54 \Rightarrow V_1 = 10\,368$; ou seja, $10\,368$ cm^3.

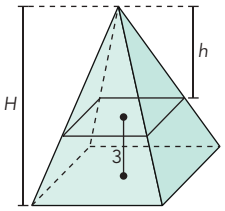
V_2: medida de volume da pirâmide menor.

$V_2 = \frac{1}{3} 12^2 x = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 27 \Rightarrow V_2 = 1296$; ou seja, 1296 cm^3.

Logo, $V_{tronco} = V_1 - V_2 = 10\,368$ cm^3 $- 1296$ cm^3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} = 9\,072$ cm^3 $= 9{,}072$ L.

45.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Do enunciado, temos $k^2 = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$.

$\frac{h}{h + 3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3h = 2h + 6 \Rightarrow h = 6$; ou seja, 6 m.

$H = 6$ m $+ 3$ m $= 9$ m

a) $V_{pirâmide\ maior} = \frac{1}{3} \cdot 18$ m$^2 \cdot 9$ m $= 54 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{pirâmide\ maior} = 54$ m^3

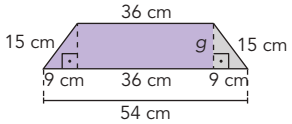
b) $V_{pirâmide\ menor} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 54$ m^3 $= \frac{8}{27} \cdot 54$ m^3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow V_{pirâmide\ menor} = 16$ m^3

$V_{tronco} = V_{pirâmide\ maior} - V_{pirâmide\ menor} =$

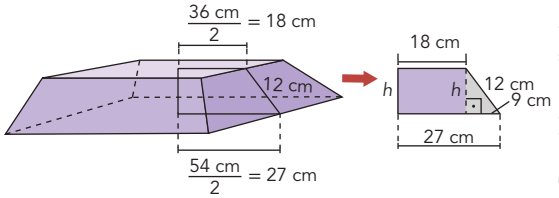
$= 54$ m^3 $- 16$ m^3 $= 38 \Rightarrow V_{tronco} = 38$ m^3

47. **a)** Inicialmente, devemos determinar a medida do apótema do tronco de pirâmide (medida da altura do trapézio – polígono que limita a face lateral do tronco de pirâmide):



$15^2 = 9^2 + g^2 \Rightarrow g = 12$; ou seja, 12 cm.

Vamos determinar agora a medida da altura do tronco de pirâmide:



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$h^2 + 9^2 = 12^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{7}$; ou seja, $3\sqrt{7}$ cm.

Seja V o vértice da pirâmide que originou esse tronco e x a medida de distância de V à base menor do tronco. Comparando a razão entre os elementos lineares das 2 pirâmides (pirâmide menor sem o tronco e pirâmide que originou o tronco), temos:

$\frac{54}{36} = \frac{3\sqrt{7} + x}{x} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{7} + x}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 6\sqrt{7} + 2x \Rightarrow x = 6\sqrt{7}$; ou seja, $6\sqrt{7}$ cm.

$V_{pirâmide\ maior} = \frac{1}{3} \cdot 54^2 \cdot (h + x) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{pirâmide\ maior} = \frac{1}{3} \cdot 2\,916 \cdot 9\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{pirâmide\ maior} = 8\,748\sqrt{7}$; ou seja, $8\,748\sqrt{7}$ cm^3.

$V_{pirâmide\ menor} = \frac{1}{3} \cdot 36^2 \cdot x \Rightarrow V_{pirâmide\ menor} = \frac{1}{3} \cdot 1296 \cdot 6\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{pirâmide\ menor} = 2\,592\sqrt{7}$; ou seja, $2\,592\sqrt{7}$ cm^3.

$V_{tronco} = V_{pirâmide\ maior} - V_{pirâmide\ menor} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} = 8\,748\sqrt{7} - 2\,592\sqrt{7} \Rightarrow V_{tronco} = 6\,156\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} \simeq 6\,156 \cdot 2{,}65 = 16\,313{,}4$; ou seja, aproximadamente $16\,313{,}4$ cm^3.

$V_{prisma} = 1296 \cdot 65 = 84\,240$; ou seja, $84\,240$ cm^3

Como 1 m^3 $= 10^6$ cm^3, temos:

$V_{tronco} \simeq 0{,}0163134$ m^3

$V_{prisma} = 0{,}08424$ m^3

$V_{suporte} \simeq (0{,}0163134 + 0{,}08424)$ m^3 $\simeq 0{,}1$ m^3

b) A_1: medida de área da superfície do prisma, em centímetros quadrados, a ser impermeabilizada (superfície lateral e uma base).

$A_1 = 36^2 + 4 \cdot 36 \cdot 65 \Rightarrow A_1 = 10\,656$; ou seja, $10\,656$ cm^2.

A_2: medida de área da superfície do tronco de pirâmide, em centímetros quadrados, a ser impermeabilizada (superfície lateral e a base maior).

$A_2 = 54^2 + 4 \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot (54 + 36) \cdot 12\right]}_{\substack{\text{medida de área} \\ \text{da região limitada} \\ \text{pelo trapézio}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2 = 5\,076$; ou seja, $5\,076$ cm^2.

A: medida de área total a ser impermeabilizada.

$A = A_1 + A_2 = 15\,732$; ou seja, $15\,732$ cm^2.

medida de área		quantidade de impermeabilizante
1000 cm^2	———	400 mL
15 732 cm^2	———	x

$\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{15\,732 \cdot 400}{1000} = 6\,292{,}8$; ou seja, $6\,292{,}8$ mL ou aproximadamente 6,29 L.

Como o custo é calculado para valores inteiros do litro de impermeabilizante, então serão necessários 7 L desse produto.

C: custo aproximado da pintura.

$C = 7 \cdot R\$\ 28{,}00 = R\$\ 196{,}00$

48. Consideremos que a medida de distância do vértice da pirâmide que originou o tronco à base menor do tronco seja x. Usando a semelhança entre as 2 pirâmides, temos:

$\frac{12}{6} = \frac{4 + x}{x} \Rightarrow 2x = 4 + x \Rightarrow x = 4$; ou seja, 4 dm.

$V_{\text{pirâmide maior}} = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8 \Rightarrow V_{\text{pirâmide maior}} = 384$; ou seja, 384 dm^3.

$V_{\text{pirâmide menor}} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 \Rightarrow V_{\text{pirâmide menor}} = 48$; ou seja, 48 dm^3.

$V_{\text{tronco}} = V_{\text{pirâmide maior}} - V_{\text{pirâmide menor}} =$

$= 384\ dm^3 - 48\ dm^3 = 336\ dm^3$

Interligando

1. $V = a \cdot b \cdot c$

$V = 14 \cdot 9{,}6 \cdot 32$

$V = 4\,300{,}8$

Portanto, a medida de volume da embalagem atual é 4 300,8 cm^3.

2. Para calcular a medida de volume da embalagem nova, após a redução de 25%, basta multiplicar a medida de volume atual por 0,75 (75% em forma decimal).

$V = 4\,300{,}8 \cdot 0{,}75 \Rightarrow V = 3\,225{,}6$

Portanto, a medida de volume da embalagem nova será 3 225,6 cm^3.

3. Para calcular a quantidade de litros de sabão que a empresa deixará de utilizar por embalagem após a redução de 25% na medida de volume, é preciso calcular a diferença entre as 2 medidas de volume e converter a quantidade para litros.

A diferença é 4 300,8 $cm^3 - 3\,225{,}6\ cm^3 = 1075{,}2\ cm^3$.

Como 1 litro corresponde a 1000 cm^3, temos que:

$\frac{1075{,}2}{1000} = 1{,}0752$

Assim, a empresa deixará de utilizar 1,0752 L de sabão por embalagem após a redução de 25%.

Capítulo 7

Atividades

3. $d = 8\ m \Rightarrow r = 4\ m$

$h = 14\ m$

$V = \pi r^2 \cdot h \simeq \frac{22}{7} \cdot (4\ m)^2 \cdot 14 \simeq 704\ m^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V \simeq 704\ m^3 \simeq 704\,000\ L$

$\left.\begin{array}{l} 1\ min \text{ ——— } 160\ L \\ x \text{ ——— } 704\,000\ L \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 4\,400\ min = 73\frac{1}{3}\ h = \underbrace{3\ dias}_{72\ h} + 1\ h + \underbrace{20\ min}_{\frac{1}{3}\ h}$

Assim, o número inteiro mínimo de dias é 4.

4. Do sistema linear $\begin{cases} 4r + 2h = 28 \\ 2\pi rh = 48\pi \end{cases}$, tem-se:

$\begin{cases} h = 14 - 2r & \text{I} \\ r = \frac{24}{h} & \text{II} \end{cases}$

Substituindo II em I, tem-se $h^2 - 14h + 48 = 0$, de soluções $h = 6$ cm ou $h = 8$ cm.

Se $h = 6$ cm, então $r = 4$ cm e $V = \pi\ (4\ cm)^2 \cdot (6\ cm) =$

$= 96\pi\ cm^3$.

Se $h = 8$ cm, então $r = 3$ cm e $V = \pi\ (3\ cm)^2 \cdot (8\ cm) =$

$= 72\pi\ cm^3$.

5. A medida de volume, em cm^3, de café que pode ser servido na garrafa térmica é $\pi \cdot 5^2 \cdot 18 = \pi \cdot 25 \cdot 18 = 450\pi$.

A medida de volume, em cm^3, de café que pode ser servido em um copinho plástico é, no máximo, $\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$.

a) Como $30 \cdot (16\pi\ cm^3) = 480\pi\ cm^3 > 450\pi\ cm^3$, não haverá café suficiente para todos.

b) A medida de área total da superfície de um copinho plástico é:

$\underbrace{(\pi \cdot 2^2)}_{\text{medida de área de uma base}}\ cm^2 + \underbrace{(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4)}_{\text{medida de área da superfície lateral}}\ cm^2 = 20\pi\ cm^2$

Com o acréscimo de 25% de plástico, a quantidade de material usado na confecção de um copinho é $(1{,}25 \cdot 20\pi)\ cm^2 = 25\pi\ cm^2 \simeq (25 \cdot 3{,}1)\ cm^2 = 77{,}5\ cm^2$.

Para fabricar 1500 desses copinhos, são gastos $1500 \cdot (77{,}5\ cm^2) = 116\,250\ cm^2$. Como $1\ m^2 = 10\,000\ cm^2$, temos um gasto de 11,625 m^2. O custo desse material é $11{,}625 \cdot R\$\ 8{,}50 \simeq R\$\ 98{,}81$. Com o acréscimo de 30%, o valor a ser pago nessa encomenda é de $1{,}3 \cdot R\$\ 98{,}81 \simeq R\$\ 128{,}45$.

7. **a)** Prisma: $\begin{cases} h = 10\ cm \\ A_b = (18\ cm)^2 = 324\ cm^2. \\ V_1 = A_b \cdot h \end{cases}$

$V_1 = (324\ cm^2) \cdot (10\ cm) = 3\,240\ cm^3$

Cilindro: $\begin{cases} h = 10\ cm;\ r = 2{,}8\ cm \\ A_b = \pi r^2 \simeq \frac{22}{7} \cdot (2{,}8\ cm)^2 = 24{,}640\ cm^2. \\ V_2 = A_b \cdot h \end{cases}$

$V_2 \simeq (24{,}640\ cm^2) \cdot (10\ cm) = 246{,}40\ cm^3$

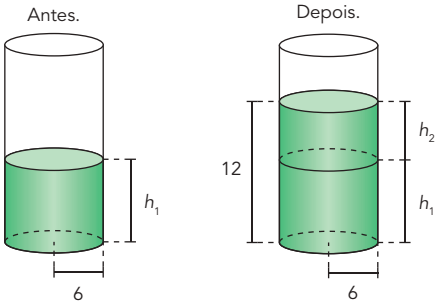
O volume da peça mede $V_1 - V_2 \simeq 2\,993{,}60\ cm^3$.

b) m: medida de massa da madeira.

$\left.\begin{array}{l} 1\ cm^3 \text{ ——— } 0{,}93\ g \\ 2\,993{,}60\ cm^3 \text{ ——— } m \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 0{,}93 \cdot 2\,993{,}60\ g = 2\,784{,}048\ g \simeq 2{,}784\ kg$

8.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de volume das peças é $16 \cdot (3\text{ cm})^3 = 432\text{ cm}^3$, e deve ser igual à medida de volume do cilindro cuja altura mede h_2 e cujo raio da base mede 6 cm.

$\pi \cdot r^2 \cdot h_2 = 432 \Rightarrow h_2 = \frac{432}{36\pi} \simeq \frac{12}{3} \Rightarrow h_2 = 4$

Logo, $h_2 = 4$ cm. Como $h_1 + h_2 = 12$ cm, então $h_1 = 8$ cm.

12. O semicírculo tem raio que mede 28 cm e comprimento que mede 28π cm. O cone tem geratriz que mede 28 cm e raio da base que mede 14 cm, pois $2\pi r = 28\pi$.

a) De $g^2 = h^2 + r^2$, obtém-se $h = 14\sqrt{3}$ cm.

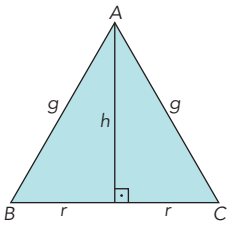
b) Cada folha permite o recorte de 2 semicírculos, portanto serão usadas 60 folhas, no mínimo.

A medida de área da folha é $56^2\text{ cm}^2 = 3136\text{ cm}^2$.

A medida de área do círculo é $\pi \cdot (28\text{ cm})^2 = 784\pi\text{ cm}^2 \simeq 2352\text{ cm}^2$.

A diferença, por folha, é aproximadamente 784 cm^2 e no total de 60 folhas serão desperdiçados aproximadamente $47\,040\text{ cm}^2$, ou $4{,}704\text{ m}^2$.

15.



Banco de imagens/Arquivo da editora

No $\triangle ABC$, $A = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = 36\text{ cm}^2 \Rightarrow rh = 36\text{ cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{12}{5}$ cm.

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot 15 = 28{,}8\pi \Rightarrow V = 28{,}8\pi$

Portanto, a medida de volume do cone é $28{,}8\pi\text{ cm}^3$.

17. Recipiente:

$r = 0{,}20$ m $= 20$ cm; $h = 0{,}80$ m $= 80$ cm.

Medida de volume, em cm^3:

$V = \pi \cdot 20^2 \cdot 80 = 32\,000\pi \Rightarrow V = 32\,000\pi$

Taça:

$r = 4$ cm; $h = 18$ cm.

Medida de volume da taça, em cm^3:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 18 = 96\pi \Rightarrow V = 96\pi$

Número de taças: $\frac{32\,000\pi\text{ cm}^3}{96\pi\text{ cm}^3} = 333{,}33\ldots$

Assim, o número mínimo de taças é 334.

20. De $g^2 = r^2 + (1{,}5)^2$ e $g + r = 4{,}5$, temos:

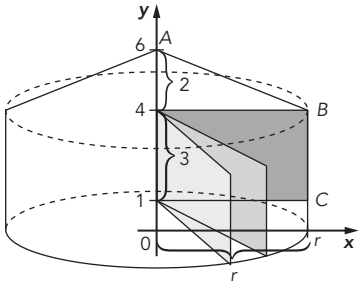
$$\begin{cases} g^2 - r^2 = (1{,}5)^2 \Rightarrow (g + r) \cdot g - r = 2{,}25 \quad \text{I} \\ g + r = 4{,}5 \quad \text{II} \end{cases}$$

Substituindo II em I, $4{,}5 \cdot (g - r) = 2{,}25 \Rightarrow g - r = \frac{1}{2}$. III

De II e III, temos $r = 2$ m e $g = 2{,}5$ m.

A medida de área lateral é $\pi \cdot (2\text{ m}) \cdot (2{,}5\text{ m}) = 5\pi\text{ m}^2$.

21. Ao girar a região plana *ABCD* em torno do eixo *y*, obtemos uma composição de um cilindro e de um cone, como representado na imagem a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Seja *r* a abscissa de *C*:

$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot 3$

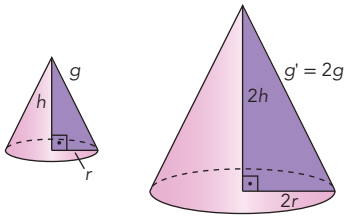
$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2$

Daí, $3\pi r^2 + \frac{2\pi r^2}{3} = \frac{275\pi}{3} \Rightarrow 11\pi r^2 = 275\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$.

A abscissa de *C* é 5.

23.



Como $(g')^2 = (2h)^2 + (2r)^2 = 4 \cdot \underbrace{\left(h^2 + r^2\right)}_{g^2}$, temos que $g' = 2 \cdot g$.

a) $A_b = \pi r^2$

$A_\ell = \pi r g$

$A_t = A_b + A_\ell$

$A'_b = \pi \cdot (2r)^2 = 4\pi r^2$

$A'_\ell = \pi \cdot (2r) \cdot (2g) = 4\pi r g$

$A'_t = A'_b + A'_\ell = 4 \cdot \underbrace{\left(A_b + A_\ell\right)}_{A_t}$

Assim, a medida de área fica multiplicada por 4.

b) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (2r)^2 \cdot 2h$

$V' = \frac{1}{3}\pi \cdot 8r^2 \cdot h = 8 \cdot \underbrace{\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h}_{V}$

Assim, a medida de volume fica multiplicada por 8.

24. **a)** Sejam:

h_1 a medida da altura do cone;

h_2 a medida da altura do cilindro.

$h_1 + h_2 = 15$ I

$V_{\text{cone}} + V_{\text{cilindro}} = 325\pi \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot h_1 + \pi \cdot 5^2 \cdot h_2 = 325\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 \cdot \left(\frac{h_1}{3} + h_2\right) = 325 \Rightarrow \frac{h_1}{3} + h_2 = 13$ II

Substituindo I em II, obtemos $\frac{h_1}{3} + 15 - h_1 = 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2h_1}{3} = 2$.

Logo, $h_1 = 3$ m e $h_2 = 12$ m.

Portanto, a altura do cone mede 3 m.

b) $A_{silo} = A_{b\ (cilindro)} + A_{\ell\ (cilindro)} + A_{\ell\ (cone)}$ *

No cone, temos $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + 5^2 = 34$.

Portanto, $g = \sqrt{34}$ m $\simeq 5{,}8$ m.

$A_{b\ (cilindro)} = \pi \cdot (5\text{ m})^2 \Rightarrow A_{b\ (cilindro)} = 25\pi\text{ m}^2$

$A_{\ell\ (cilindro)} = 2\pi \cdot (5\text{ m}) \cdot (12\text{ m}) \Rightarrow A_{\ell\ (cilindro)} = 120\pi\text{ m}^2$

$A_{\ell\ (cone)} = \pi \cdot (5\text{ cm}) \cdot (5{,}8\text{ m}) \Rightarrow A_{\ell\ (cone)} = 29\pi\text{ m}^2$

Substituindo em *, obtemos:

$A_{silo} = 25\pi\text{ m}^2 + 120\pi\text{ m}^2 + 29\pi\text{ m}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{silo} = 174\pi\text{ m}^2 \simeq 174 \cdot 3{,}1\text{ m}^2 = 539{,}40\text{ m}^2$

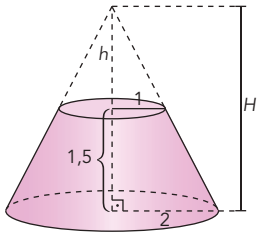
O custo de fabricação é de, aproximadamente, 539,4 · R$ 200,00 = R$ 107.880,00.

25. Podemos calcular a medida de volume de dois modos.

1º modo:

$V = \frac{\pi \cdot 1{,}5}{3} \cdot (4 + 2 + 1)\text{ cm}^3 \Rightarrow V = \frac{7\pi}{2}\text{ cm}^3$

2º modo:



$\frac{2}{1} = \frac{H}{h} \Rightarrow H = 2h$

$h + 1{,}5 = H$

$h + 1{,}5 = 2h \Rightarrow h = 1{,}5$

$H = 3$

$V_{cone\ maior} = \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 3\right)\text{cm}^3 = 4\pi\text{ cm}^3$

$V_{cone\ menor} = \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1{,}5\right)\text{cm}^3 = 0{,}5\pi\text{ cm}^3$

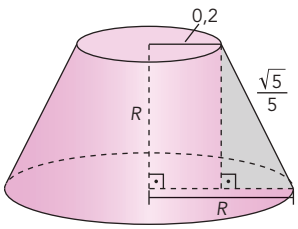
$V_{tronco} = 4\pi\text{ cm}^3 - 0{,}5\pi\text{ cm}^3 = \frac{7\pi}{2}\text{ cm}^3$

$g^2 = 1^2 + (1{,}5)^2 \Rightarrow g = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$A_t = \pi \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot (2 + 1) + \pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A_t = \pi \cdot \left(5 + \frac{3\sqrt{13}}{2}\right)\text{cm}^2$

26. $A_{\ell\ (cilindro)} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 0{,}2\text{ m} \cdot 0{,}4\text{ m} = 0{,}16\pi\text{ m}^2 = \frac{4\pi}{25}\text{ m}^2$

Na região triangular destacada:



$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = R^2 + (R - 0{,}2)^2 \Rightarrow \frac{1}{5} = R^2 + R^2 - \frac{2}{5}R + \frac{1}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow 25R^2 - 5R - 2 = 0 \Rightarrow R = \frac{2}{5} = 0{,}4$; ou seja, 0,4 m.

- $A_{\ell\ (tronco)} = \pi \cdot g \cdot (R + r) = \left(\pi \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right)\right)\text{m}^2 =$

$= \left(\frac{3\pi\sqrt{5}}{25}\right)\text{m}^2$

- $A_{total\ (coifa)} = \left(\frac{4\pi}{25} + \frac{3\pi\sqrt{5}}{25}\right)\text{m}^2 = \frac{\pi \cdot (4 + 3\sqrt{5})}{25}\text{m}^2$

27. Cada vaso de vidro tem medida de volume igual a:

$(40\text{ cm}) \cdot (30\text{ cm}) \cdot (20\text{ cm}) = 24\,000\text{ cm}^3$

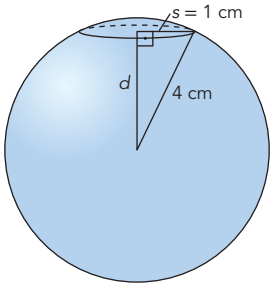
Vaso com formato de tronco de cone: de $g^2 = h^2 + (R - r)^2$, tem-se que $h = 10\sqrt{15}$ cm e a medida de volume é $\frac{\pi \cdot 10\sqrt{15}}{3} \cdot (30^2 + 30 \cdot 20 + 20^2)\text{ cm}^3 \simeq 74\,100\text{ cm}^3$.

Serão necessários 4 vasos, pois $3 \cdot 24\,000 =$

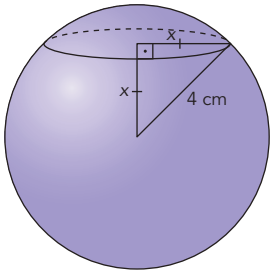
$= 72\,000 < 74\,100$.

31. A partir do enunciado, pelo triângulo retângulo, temos $4^2 = d^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{15}$.

Logo, a distância entre o plano e o centro da esfera mede $\sqrt{15}$ cm.



32. Podemos representar o círculo que secciona a esfera, conforme demonstrado na figura.



a) Sabendo que a medida do raio da esfera é 4 cm, temos:

$4^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8$

Assim, a medida de área da secção é $\pi \cdot x^2 = 8\pi$, ou seja, $8\pi\text{ cm}^2$.

b) A medida de área do círculo máximo é $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$, ou seja, $16\pi\text{ cm}^2$.

34. **a)** Seja n o número de esferas menores que serão fundidas. Devemos ter:

$n \cdot V_{menor} \geqslant V_{maior} \Rightarrow n \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \geqslant \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \Rightarrow 8n \geqslant 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \geqslant \frac{27}{8}$, isto é, $n \geqslant 3{,}375$.

Como n é inteiro positivo, o número mínimo de esferas menores que serão fundidas é 4.

b) A medida de volume da sobra de ouro é:

$4 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (2\text{ cm})^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (3\text{ cm})^3 =$

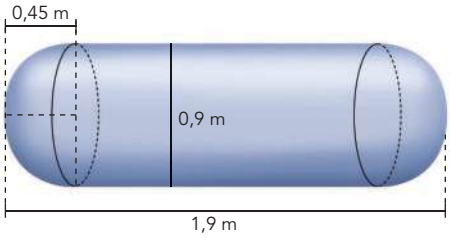
$= \left(\frac{128\pi}{3} - 36\pi\right)\text{cm}^3 = \frac{20\pi}{3}\text{cm}^3 \simeq \frac{20 \cdot 3}{3}\text{cm}^3 = 20\text{ cm}^3$

Como a medida de densidade é 19,3 g/cm³, a medida de massa de ouro que sobra é, aproximadamente, 386 g (19,3 · 20 = 386), que será vendida ao preço, em reais, de, aproximadamente, 140 · 386 = 54 040.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

35. **a)** Note que o raio da base do cilindro coincide com o raio da semiesfera.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O comprimento, em metros, do cilindro é: $1{,}9 - 2 \cdot \frac{0{,}9}{2} = 1$

$A_{\text{semiesfera}} = \frac{4\pi R^2}{2} = 2 \cdot \pi \cdot (0{,}45\ \text{m})^2 \simeq 6 \cdot 0{,}2025\ \text{m}^2 = 1{,}215\ \text{m}^2$

$A_{\text{lateral cilindro}} = 2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot (0{,}45\ \text{m}) \cdot (1\ \text{m}) = 0{,}9\pi\ \text{m}^2 \simeq 2{,}7\ \text{m}^2$

A medida de área da superfície do aquecedor é, aproximadamente: $(2 \cdot 1{,}215 + 2{,}7)\ \text{m}^2 = 5{,}13\ \text{m}^2$

b) $V_{\text{semiesfera}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

Como são 2 semiesferas, temos:

$V_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}45)^3 \simeq 4 \cdot \left(\frac{45}{100}\right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^3 = 4 \cdot \frac{9^3}{20^3} = \frac{729}{2\,000}$

$V_2 = V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^2 \cdot 1 \simeq \frac{3 \cdot 81}{400} = \frac{243}{400}$

Portanto, $V_1 \simeq \frac{729}{2\,000}\ \text{m}^3$ e $V_2 \simeq \frac{243}{400}\ \text{m}^3$.

$V = V_1 + V_2 \simeq \frac{729}{2\,000} + \frac{243}{400} = \frac{1944}{2\,000} = 0{,}972$

Portanto, $V \simeq 0{,}972\ \text{m}^3 = 972\ \text{L}$.

36. Devemos ter:

$$\underbrace{\pi \cdot 70^2 \cdot h}_{\substack{\text{medida de volume inicial,} \\ \text{em cm}^3\text{, da água ao nível } h}} + \underbrace{\frac{4}{3}\pi \cdot 21^3}_{\substack{\text{medida de volume da pedra,} \\ \text{em cm}^2}} = \underbrace{\pi \cdot 70^2 \cdot (h + x)}_{\substack{\text{medida de volume final (água +} \\ \text{+ pedra), em cm}^2\text{, ao nível } h + x}}$$

$\cancel{4\,900\pi h} + 12\,348\pi = \cancel{4\,900\pi h} + x \cdot \pi \cdot 4\,900 \Rightarrow \frac{12\,348\pi}{4\,900\pi} = x$

Portanto, $x = 2{,}52$ cm.

37. A altura do cilindro mede $6 \cdot (2{,}0\ \text{cm}) = 12{,}0$ cm, e o raio da base do cilindro mede $\frac{(2{,}0\ \text{cm})}{2} = 1{,}0$ cm.

Assim, a medida de volume do cilindro é:

$\pi \cdot (1\ \text{cm})^2 \cdot (12\ \text{cm}) = 12\pi\ \text{cm}^3$

A medida de volume de uma esfera é:

$\frac{4}{3}\pi \cdot (1\ \text{cm})^3 = \frac{4\pi}{3}\ \text{cm}^3$

A medida de volume de ar é:

$\left(12\pi - 6 \cdot \frac{4\pi}{3}\right)\ \text{cm}^3 = 4\pi\ \text{cm}^3 \simeq 12{,}56\ \text{cm}^3$

39. $A_{\text{sup. esférica}} = 4\pi \cdot (6\ \text{cm})^2 = 144\pi\ \text{cm}^2$

$A_{\text{fuso}} = \frac{1}{12} \cdot 144\pi\ \text{cm}^2 = 12\pi\ \text{cm}^2$

$A_{\text{cunha}} = A_{\text{fuso}} + 2 \cdot A_{\text{semicírculo}} = 12\pi\ \text{cm}^2 + 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 6^2}{2}\right) = 12\pi\ \text{cm}^2 + 36\pi\ \text{cm}^2 = 48\pi\ \text{cm}^2$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi}{3} \cdot (6\ \text{cm})^3 = 288\pi\ \text{cm}^3$

$V_{\text{cunha}} = \frac{1}{12} \cdot 288\pi\ \text{cm}^3 = 24\pi\ \text{cm}^3$

Interligando

1. Como 1 m corresponde a 1000 mm, teríamos o nível de 0,025 m (25 : 1000 = 0,025). Note, então, que a medida de volume de água de chuva "recolhida" na semana seria $V = A_b \cdot h = (1\ m^2) \cdot (0{,}025\ m) = 0{,}025\ m^3$. Como $1\ m^3$ equivale a 1000 litros, teríamos 25 L. Assim, uma chuva de 25 mm significa que, para cada metro quadrado na região, houve uma precipitação de 25 litros ao longo da semana.

3. A medida de área da abertura maior do funil é:

$\pi \cdot (5\ cm)^2 \simeq 78{,}5\ cm^2 = 78{,}5 \cdot 10^{-4}\ m^2$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}3\ L \text{ —— } 78{,}5 \cdot 10^{-4}\ m^2 \\ x \text{ —— } 1\ m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x \simeq 38{,}22\ L$$

Assim, houve precipitação de 38,22 litros de água de chuva em cada metro quadrado na região, o que equivale a dizer que a precipitação foi de 38,22 mm.

Para fundamentar saberes

1. **I.** Falsa. As retas contidas nos planos podem ser paralelas.

II. Verdadeira. Se um plano é paralelo a uma reta, então existem infinitas retas contidas no plano que são paralelas a essa reta.

III. Verdadeira. Se dois planos têm uma única reta em comum, então eles devem ser secantes.

IV. Falsa. As retas perpendiculares a uma terceira podem ser paralelas entre si.

V. Falsa. Uma reta de um deles pode ser paralela ao outro.

Alternativa **a**.

2. A aresta do cubo mede 8 m; logo, PT = 8 m. O segmento de reta $\overline{TS}$ é diagonal do cubo; então, $TS = 8\sqrt{2}\ m \simeq 11{,}2\ m$. Da imagem, conclui-se que $SN = NR = RM = MQ = \frac{8\ m}{2} = 4\ m$.

Assim, a extensão total da linha de conduíte é, em metros, $(8 + 11{,}2 + 4 \cdot 4)\ m = 35{,}2\ m$.

Alternativa **a**.

4. A medida da área dos espelhos, em m^2, é dada por:

$A_{espelhos} = 3 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}2 = 0{,}60$

A medida da área dos pisos, em m^2, é dada por:

$A_{pisos} = 3 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}25 = 0{,}75$

A medida da área das paredes laterais, em m^2, é dada por:

$A_{paredes\ laterais} = 2 \cdot 0{,}25 \cdot (0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}2) = 0{,}60$

Portanto, a medida da área a ser revestida é:

$(0{,}60 + 0{,}75 + 0{,}60)\ m^2 = 1{,}95\ m^2$

Alternativa **e**.

5. A medida do volume de água restante é igual à medida de volume de um cilindro de raio medindo 5 m e altura medindo 1,5 m. Então:

$\pi \cdot r^2 \cdot h \simeq 3 \cdot (5\ m)^2 \cdot (1{,}5\ m) = 112{,}5\ m^3 = 112\,500\ L$

Cada morador poderá consumir, por dia: 112 500 L : (75 · 10) = 150 L por dia. Ou seja, uma economia de 50 litros por dia.

Alternativa **a**.

6. A medida da altura do cone menor pode ser obtida por semelhança:

$$\frac{h_{maior}}{h_{menor}} = \frac{D_{maior}}{d_{menor}} \Rightarrow \frac{36\ cm}{h_{menor}} = \frac{18\ cm}{6\ cm} \Rightarrow h_{menor} = 12\ cm$$

Logo, a medida da altura do cilindro é:

$h' = 36\ cm - 12\ cm = 24\ cm$.

A medida do volume da escultura, em cm^3, é dada por:

$V_{escultura} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor} - V_{cilindro}$

$$V_{escultura} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} - \pi \cdot r^2 \cdot h'$$

$$V_{escultura} \simeq \frac{3 \cdot 9^2 \cdot 36}{3} - \frac{3 \cdot 3^2 \cdot 12}{3} - 3 \cdot 3^2 \cdot 24 \simeq 2160$$

Logo, a medida de massa da escultura é:

$0{,}6 \cdot 2160 = 1296$; ou seja, 1296 g.

Alternativa **b**.

Unidade 4

Capítulo 8

Atividades

2. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ os 20 números. Temos:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{20}}{20} = 12 \Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_{20} = 240$$

a) Acrescentando o número 33, a soma será:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{20} + 33 = 240 + 33 = 273$.

A nova média será: $\bar{x}' = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{20} + 33}{20 + 1} = \frac{273}{21} = 13$.

b) Retirando o número 50 dessa lista, a soma será:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{20} - 50 = 240 - 50 = 190$.

A nova média será: $\bar{x}' = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{20} - 50}{20 - 1} = \frac{190}{19} = 10$.

c) Acrescentando o número 63 e retirando o 51 dessa lista, a soma será: $x_1 + x_2 + \ldots + x_{20} + 63 - 51 = 240 + 63 - 51 = 252$. Assim, a média será $\frac{252}{20} = 12{,}6$.

4. Sejam S e S', respectivamente, a soma das notas dos 80 candidatos e a soma das 40 menores notas.

A soma S das notas dos 80 candidatos foi:

$\frac{S}{80} = 74{,}5 \Rightarrow S = 5960$.

A soma S' das 40 menores notas foi: $\frac{S'}{40} = 67 \Rightarrow S' = 2680$.

A soma das 40 maiores notas foi: $S - S' = 5960 - 2680 = 3280$.

Assim, a média das 40 maiores notas foi: $\frac{3280}{40} = 82$.

5. Originalmente, $5{,}5 = \frac{\sum_{i=1}^{40} x_i}{40} \Rightarrow \sum_{i=1}^{40} x_i = 220$

Com a correção feita, a nova média será:

$$\frac{\sum_{i=1}^{40} x_i - 6{,}5 - 3{,}5 + 9{,}5 + 5{,}5}{40} = \frac{220 - 10 + 15}{40} = 5{,}625$$

O acréscimo na média das notas foi: $5{,}625 - 5{,}5 = 0{,}125$.

7. **a)** O número mínimo pedido corresponde ao caso em que todos os novos questionários são preenchidos com a nota máxima 5.

Seja n esse número:

1º mês: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{2000} x_i}{2000} = 3{,}9 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2000} x_i = 7800$

Novos questionários: $S'_{notas} = 5 \cdot n$

Devemos ter:

$$4{,}6 = \frac{7800 + 5 \cdot n}{2000 + n} \Rightarrow 5n + 7800 =$$

$= 9200 + 4{,}6n \Rightarrow 0{,}4n = 1400 \Rightarrow n = 3500$; ou seja, 3 500 questionários.

b) Considerando que a nota máxima é 5, para que a média fosse igual a 5 todos os questionários deveriam ser preenchidos com a nota 5. Logo, não é possível.

---

8. **a)** $\bar{x} = \frac{2+2+3+3+3+4+4+4+4}{9} = \frac{29}{9} = 3{,}\overline{2}$

O rol dos valores é: 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Como são 9 valores, a mediana é o 5º valor $\left(\frac{9+1}{2}\right)$ do rol, isto é, $Me = x_5 = 3$.

$Mo = 4$, já que é o valor mais frequente.

b) $\bar{x} = \frac{16+18+18+17+19+18}{6} = \frac{106}{6} = 17{,}\overline{6}$

O rol dos valores é: 16, 17, 18, 18, 18, 19. Como são 6 valores, a mediana é a média entre o 3º valor $\left(\frac{6}{2}\right)$ e o 4º valor $\left(\frac{6}{2}+1\right)$ do rol, isto é, $Me = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{18+18}{2} = 18$.

$Mo = 18$, já que é o valor mais frequente.

c) $\bar{x} = \frac{1+5+3+2+4}{5} = \frac{15}{5} = 3$

O rol dos valores é: 1, 2, 3, 4, 5. Como são 5 valores, a mediana é o 3º valor $\left(\frac{5+1}{2}\right)$ do rol, isto é, $Me = x_3 = 3$.

Não há moda, já que não há repetição de valor algum.

d) $\bar{x} = \frac{11+8+15+19+6+15+13+21}{8} = \frac{108}{8} = 13{,}5$

O rol dos valores é: 6, 8, 11, 13, 15, 15, 19, 21. Como são 8 valores, a mediana é a média entre o 4º valor $\left(\frac{8}{2}\right)$, e o 5º valor $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ do rol, isto é, $Me = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{13+15}{2} = 14$.

$Mo = 15$, já que é o valor mais frequente.

e) $\bar{x} = \frac{44+43+42+43+45+44+40+41+49+46}{10} = \frac{437}{10} = 43{,}7$

O rol dos valores é: 40, 41, 42, 43, 43, 44, 44, 45, 46, 49. Como são 10 valores, a mediana é a média entre 5º valor $\left(\frac{10}{2}\right)$, e o 6º valor $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ do rol, isto é, $Me = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{43+44}{2} = 43{,}5$.

As modas são 43 e 44, já que são os valores mais frequentes.

10. Como são 10 valores, a mediana é a média entre o 5º valor $\left(\frac{10}{2} = 5\right)$ e o 6º valor $\left(\frac{10}{2} + 1 = 6\right)$ do rol. Assim, temos:

$Me = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{x+16}{2} = 15 \Rightarrow x = 14$

Podemos calcular a média:

$$\frac{1+5+8+9+x+16+18+y+23+26}{10} = 14 \Rightarrow 120 + y = 140 \Rightarrow y = 20$$

11. **a)** Média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{2\,719\,751 + 949\,301 + 857\,593 + 581\,284 + 549\,973 + 428\,571 + 352\,618 + 286\,944 + 269\,628 + 262\,905}{10} =$$

$= 725\,856{,}8$; ou seja, 725 856,8 milhões de reais.

Mediana:

Como são 10 termos, a mediana será a média entre o 5º e o 6º termo do rol.

Logo, $Me = \frac{549\,973 + 428\,571}{2} = 489\,272$; ou seja, 489 272 milhões de reais.

A média foi "influenciada" por um valor discrepante: o PIB do estado de São Paulo, que é quase o triplo do PIB do 2º maior, que é o do Rio de Janeiro. Assim, a mediana é um indicador mais adequado do panorama geral.

b) Deveríamos eliminar o PIB do estado de São Paulo; assim, a nova média seria:

$\bar{x} = \frac{949\,301 + 857\,593 + 581\,284 + 549\,973 + 428\,571 + 352\,618 + 286\,944 + 269\,628 + 262\,905}{9} = 504\,313$; ou seja, 504 313 milhões de reais.

A nova mediana seria o 5º dado do rol. Assim, $Me = 428\,571$ milhões de reais.

Note que a média está próxima da mediana, ocupando uma posição aproximadamente central; 4 dados estão acima da média e 5, abaixo da média.

12. **a)** Média: $\bar{x} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3}{18} = \frac{64}{18} = 3,\overline{5}$

Mediana: Como $\frac{18}{2} = 9$, devemos calcular a média entre o 9º e o 10º valor do rol.

Temos: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6; logo, $Me = \frac{3+3}{2} = 3$.

Moda: 3 (possui a maior frequência absoluta)

b) Como 25 é ímpar, a mediana de uma relação com 25 valores corresponde ao 13º valor do rol. Assim, a mediana será um elemento dessa relação.

Como o lançamento do dado só resulta em número inteiro, não é possível que a mediana seja 3,5.

Até o 21º lançamento, temos os seguintes valores ordenados (rol): 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6. Para que a mediana seja 5, o 13º valor da relação ordenada deve ser 5. Como já há 14 valores menores do que 5 nos 21 primeiros lançamentos, não é possível que o 13º valor da relação ordenada seja igual a 5.

c) Sim. Considere algumas possibilidades para os 4 últimos lançamentos:

4, 5, 5 e 6 (em qualquer ordem); nesse caso, teríamos o seguinte rol:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, $\underset{\substack{\downarrow \\ Me = 4}}{4}$, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6

4, 5, 6 e 6 (em qualquer ordem); nesse caso, teríamos o seguinte rol:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, $\underset{\substack{\downarrow \\ Me = 4}}{4}$, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6

1, 2, 4 e 4 (em qualquer ordem); nesse caso, teríamos o seguinte rol:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, $\underset{\substack{\downarrow \\ Me = 4}}{4}$, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6

2, 3, 4, 5 (em qualquer ordem); nesse caso, teríamos o seguinte rol:

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, $\underset{\substack{\downarrow \\ Me = 4}}{4}$, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6

13. **a)** Cálculo da média aritmética:

$\bar{x} = \frac{24 + 16 + 30 + 20 + 28 + 30 + 20 + 40 + 18 + 16 + 30 + 16}{12} = 24$

Cálculo da variância:

$(24 - 24)^2 = 0$; $(16 - 24)^2 = 64$; $(30 - 24)^2 = 36$; $(20 - 24)^2 = 16$; $(28 - 24)^2 = 16$; $(30 - 24)^2 = 36$; $(20 - 24)^2 = 16$; $(40 - 24)^2 = 256$; $(18 - 24)^2 = 36$; $(16 - 24)^2 = 64$; $(30 - 24)^2 = 36$; $(16 - 24)^2 = 64$.

Temos $0 + 64 + 36 + 16 + 16 + 36 + 16 + 256 + 36 + 64 + 36 + 64 = 640$

Então, temos: $\sigma^2 = \frac{640}{12} \simeq 53,33$; ou seja, a variância é aproximadamente 53,33 reais^2.

b) $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{640}{12}} \simeq 7,3$; ou seja, o desvio padrão é aproximadamente 7,30 reais.

c) $40 - 16 = 24$; ou seja, a amplitude é 24 reais.

14. **a)** Amplitude da turma **A**: $7 - 3 = 4$; amplitude da turma **B**: $6 - 4 = 2$; amplitude da turma **C**: $9 - 1 = 8$; amplitude da turma **D**: $8 - 2 = 6$. A ordem da relação de notas da mais regular para a menos regular é: **B**, **A**, **D** e **C**.

b) Média da turma **C**: $\overline{x_C} = \frac{9 + 1 + 6 + 5 + 4}{5} = 5$.

Variância da turma **C**:

$\sigma_C^2 = \frac{(9-5)^2 + (1-5)^2 + (6-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2}{5} \Rightarrow \sigma_C^2 = \frac{16 + 16 + 1 + 0 + 1}{5} = 6,8$

Média da turma **D**: $\overline{x_D} = \frac{7 + 8 + 5 + 2 + 3}{5} = 5$.

Variância da turma **D**: $\sigma_D^2 = \frac{(7-5)^2 + (8-5)^2 + (5-5)^2 + (2-5)^2 + (3-5)^2}{5} \Rightarrow \sigma_D^2 = \frac{4 + 9 + 0 + 9 + 4}{5} = 5,2$

Como $\sigma_D^2 < \sigma_C^2$, os estudantes da turma **D** tiveram um aproveitamento mais regular, quando comparados aos da turma **C**.

15. Cálculo da média:

$\bar{x} = \frac{8,7 + 8,5 + 9,2 + 8,8 + 8,9 + 8,6 + 8,7 + 8,6 + 8,4 + 8,7 + 8,6 + 8,7}{12} = 8,7$

Cálculo da variância:

$(8,4 - 8,7)^2 = 0,09$; $(8,5 - 8,7)^2 = 0,04$; $3 \cdot (8,6 - 8,7)^2 = 0,01$; $3 \cdot (8,7 - 8,7)^2 = 0$; $(8,8 - 8,7)^2 = 0,01$; $(8,9 - 8,7)^2 = 0,04$; $(9,2 - 8,7)^2 = 0,25$.

$0,09 + 0,04 + 0,03 + 0 + 0,01 + 0,04 + 0,25 = 0,46$

$\sigma^2 = \frac{0,46}{12} \simeq 0,038$; logo, a variância é 0,038 mm^2.

Cálculo do desvio padrão:

$\sigma = \sqrt{0,038} \simeq 0,195$; logo, o desvio padrão é 0,195 mm.

Os resultados aceitáveis estão no intervalo: $[8,7 - 0,195; 8,7 + 0,195] = [8,505; 8,895]$.

Logo, apenas 4 estudantes não tiveram resultado aceitável.

---

16. Seja n o número de treinos que o ciclista deverá realizar a mais.

Cálculo da média dos 8 treinos:

$\bar{x} = \frac{6 + 6 + 8 + 4 + 10 + 6 + 4 + 4}{8} = 6$

Cálculo do desvio padrão dos 8 treinos:

$(6 - 6)^2 = 0$; $(6 - 6)^2 = 0$; $(8 - 6)^2 = 4$; $(4 - 6)^2 = 4$; $(10 - 6)^2 = 16$; $(6 - 6)^2 = 0$; $(4 - 6)^2 = 4$; $(4 - 6)^2 = 4$.

$0 + 0 + 4 + 4 + 16 + 0 + 4 + 4 = 32$

$\sigma = \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{4} = 2$; logo, o desvio padrão é 2 min.

Cálculo do desvio padrão de todos os treinos ($8 + n$ treinos):

$(6 - 6)^2 = 0$; $(6 - 6)^2 = 0$; $(8 - 6)^2 = 4$; $(4 - 6)^2 = 4$; $(10 - 6)^2 = 16$; $(6 - 6)^2 = 0$; $(4 - 6)^2 = 4$; $(4 - 6)^2 = 4$; $n \cdot (6 - 6)^2 = 0$.

$0 + 0 + 4 + 4 + 16 + 0 + 4 + 4 + 0 = 32$

$\sigma = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{32}{8 + n}} = 1 \Rightarrow 8 + n = 32 \Rightarrow n = 24$

Logo, 24 treinos.

Capítulo 9

Atividades

1. **a)** O 2º quartil é a mediana dos 100 termos, que é a média entre o 50º e 51º termos do rol.

Logo, $Q_2 = Me = \frac{38 + 40}{2} = 39$, ou seja, R$ 3.900,00.

O 1º quartil é a mediana dos 50 primeiros termos, que é a média entre o 25º e 26º termos do rol.

Logo, $Q_1 = \frac{22 + 22}{2} = 22$ centenas de reais, ou seja, R$ 2.200,00.

O 3º quartil é a mediana dos 50 últimos termos, que é a média entre o 75º e 76º termos do rol.

Logo, $Q_3 = \frac{60 + 61}{2} = 60,5$, ou seja, R$ 6.050,00.

b) O 25º percentil é o 1º quartil, que é igual a R$ 2.200,00.

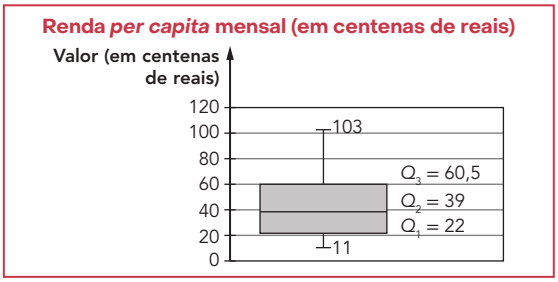
O 75º percentil é o 3º quartil, que é igual a R$ 6.050,00.

c) $LI = Q_1 - 1,5 \cdot (Q_3 - Q_1) = -35,75$

$LS = Q_3 + 1,5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 118,25$

Valor mínimo: 11

Valor máximo: 103



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Não há *outliers*.

2. **a)** Na turma **A**, todas as notas foram 5, uma vez que o gráfico não apresenta variação, o que permite afirmar que apresentou um desempenho regular.

c) Como todas as notas são 5, não há variação nas notas. O desvio padrão, que mede a dispersão dos dados em torno da média, será 0.

d) A falta da haste inferior no gráfico indica que todas as notas abaixo do primeiro quartil são iguais a 1. Portanto, a nota mínima também será 1.

3. **a)** 1º quartil (Q_1): $\frac{x_9 + x_{10}}{2} = \frac{3,72 + 3,9}{2} = 3,81$; ou seja, 3,81 salários mínimos.

2º quartil (Q_2 ou mediana):

$\frac{x_{18} + x_{19}}{2} = \frac{4,9 + 5,2}{2} = 5,05$; ou seja, 5,05 salários mínimos.

3º quartil (Q_3): $\frac{x_{27} + x_{28}}{2} = \frac{6,95 + 7,35}{2} = 7,15$; ou seja, 7,15 salários mínimos.

b) Calculando LS e LI da amostra:

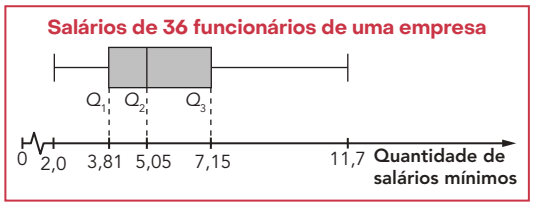
$LS = 7,15 + 1,5 \cdot (7,15 - 3,81) = 12,16$

$LI = 3,81 - 1,5 \cdot (7,15 - 3,81) = -1,2$

Portanto, não há *outliers*.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c)



Dados elaborados para fins didáticos.

d) Mais heterogêneo: [7,15; 11,7], pois é o intervalo com a maior amplitude. A saber: 11,7 − 7,15 = 4,55.

Mais homogêneo: [3,81; 5,05], pois é o intervalo com a menor amplitude. A saber: 5,05 − 3,81 = 1,24.

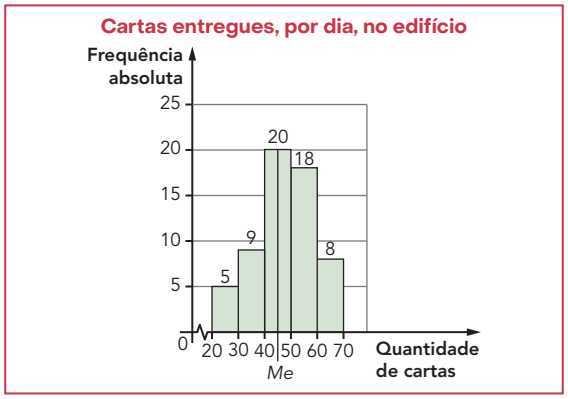
4. **b)** Resposta pessoal. Exemplo de resposta: O *box-plot* é mais adequado para mostrar a distribuição dos dados e identificar mediana, quartis e valores atípicos. É útil se você quer uma visão detalhada da dispersão e variabilidade dos gastos. Já o gráfico de setores é mais adequado para mostrar a proporção dos diferentes intervalos de gasto e a distribuição relativa entre categorias e também pode ser útil se você estiver interessado em saber como as diferentes faixas de gasto se comparam em termos de quantidade de estudantes.

5. A média será a média ponderada entre os valores centrais de cada classe (pontos médios). Assim,

$\bar{x} = \frac{5 \cdot 25 + 9 \cdot 35 + 20 \cdot 45 + 18 \cdot 55 + 8 \cdot 65}{60} =$

$= 47{,}5$; ou seja, 47,5 cartas.

A mediana está no intervalo 40 ⊢ 50. Representando os dados em um histograma, temos:



Dados elaborados para fins didáticos.

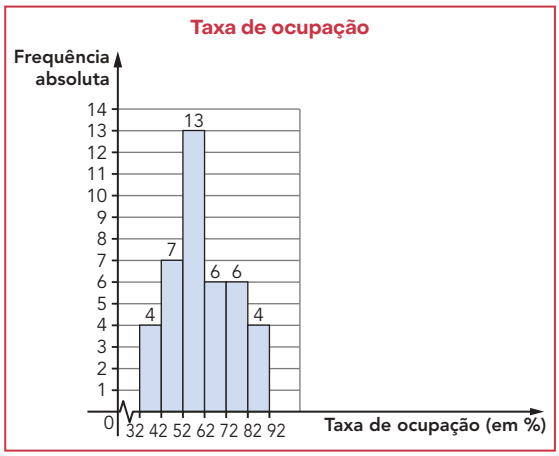
A soma das medidas de áreas das 5 barras é $5 \cdot 10 + 9 \cdot 10 + 20 \cdot 10 + 18 \cdot 10 + 8 \cdot 10 = 600$.

Assim, $5 \cdot 10 + 9 \cdot 10 + 20 \cdot (Me - 40) = \frac{600}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (Me - 40) = 8 \Rightarrow Me = 48$; logo, 48 cartas.

A classe modal é [40,50[, já que é a classe que tem maior frequência absoluta.

7. **a)** Sendo as faixas de valores: [32, 42[; [42,52[; [52,62[; [62,72[; [72,82[.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Calculando a taxa média a partir dos dados agrupados:

$\bar{x} = \frac{4 \cdot 37 + 7 \cdot 47 + 13 \cdot 57 + 6 \cdot 67 + 6 \cdot 77 + 4 \cdot 87}{40} =$

$= 60{,}75$; ou seja, 60,75%.

A soma das medidas de área de todas as barras é: $4 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 13 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 10 = 400$.

A mediana se encontra na classe 52% ⊢ 62%.

Assim, $4 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 13 \cdot (Me - 52) = \frac{400}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 13 \cdot (Me - 52) = 90 \Rightarrow Me \simeq 58{,}92\%$.

Classe modal: 52 ⊢ 62 ou [52, 62[.

c) Aproximando a taxa média para 61, o cálculo das somas dos desvios quadráticos será:

$(37 - 61)^2 \cdot 4 + (47 - 61)^2 \cdot 7 + (57 - 61)^2 \cdot 13 +$

$+ (67 - 61)^2 \cdot 6 + (77 - 61)^2 \cdot 6 + (87 - 61)^2 \cdot 4 = 8\,340$

Assim, o cálculo da variância será:

$\sigma^2 = \frac{8\,340}{40} = 208{,}5$

Cálculo do desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \simeq 14{,}44$; ou seja, aproximadamente 14,44%.

8. **a)** Total da amostra: 80

Entre 30 min (incluindo 30 min) e 1 h 30 min: 18 + 22 = 40; $\frac{40}{80} = 0{,}5$ ou seja, 50%.

b) Cálculo da média:

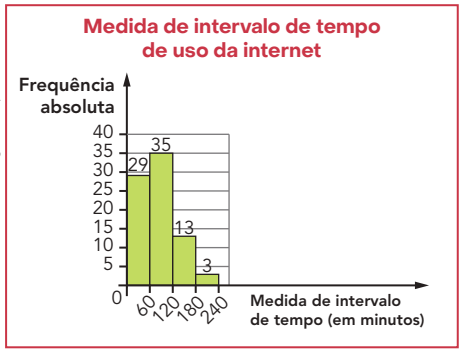
$\bar{x} = \frac{11 \cdot 15 + 18 \cdot 45 + 22 \cdot 75 + 13 \cdot 105 + 8 \cdot 135 + 5 \cdot 165 + 2 \cdot 195 + 1 \cdot 225}{80} = 81{,}375$; ou seja, 81,375 min.

Cálculo da mediana: a mediana encontra-se no intervalo 60 ⊢ 90. Antes dele, estão acumulados 36,25% $\left(\frac{11 + 18}{80} = \frac{29}{80} = 0{,}3625\right)$ dos dados, e o intervalo 60 ⊢ 90 concentra 27,5% $\left(\frac{22}{80} = 0{,}275\right)$ dos dados.

Assim: $\frac{Me - 60}{(50 - 36{,}25)\%} = \frac{90 - 60}{27{,}5\%} \Rightarrow Me = 75$; ou seja, 75 min.

c) O histograma formado pelo agrupamento das medidas de intervalo de tempo de hora em hora é:

Banco de imagens/Arquivo da editora



Dados elaborados para fins didáticos.

A média aritmética ($\bar{x}$) é calculada por:

$$\bar{x} = \frac{29 \cdot 30 + 35 \cdot 90 + 13 \cdot 150 + 3 \cdot 210}{80} = 82{,}5;$$ ou seja, 82,5 min.

Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, a mediana (*Me*) é dada por:

$$\frac{Me - 60}{50 - 36{,}25} = \frac{120 - 60}{43{,}75} \Rightarrow Me \simeq 78{,}86;$$ ou seja, 78,86 min.

Desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(30 - 82{,}5)^2 \cdot 29 + (90 - 82{,}5)^2 \cdot 35 + (150 - 82{,}5)^2 \cdot 13 + (210 - 82{,}5)^2 \cdot 3}{80}}$$

$\simeq 48{,}7$; ou seja, 48,7 min.

Interligando

1. **a)** Simulado **1** de Matemática.

Rol dos dados:

11, 15, 17, **18**, 19, 20, 23, **28**, 29, 29, 38, **38**, 39, 40, 41

$Q_1 = 18$ $Q_2 = 28$ $Q_3 = 38$

$LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = -12$

$LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 68$

Valor mínimo: 11

Valor máximo: 41

Simulado **2** de Matemática.

Rol dos dados:

15, 16, 21, **21**, 22, 25, 28, **28**, 28, 29, 36, **38**, 39, 40, 40

$Q_1 = 21$ $Q_2 = 28$ $Q_3 = 38$

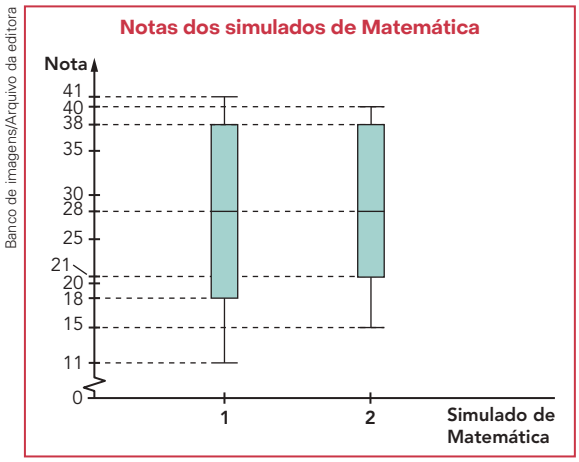
$LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = -4{,}5$

$LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 63{,}5$

Valor mínimo: 15

Valor máximo: 40

Banco de imagens/Arquivo da editora



Dados elaborados para fins didáticos.

Simulado **1** de Língua Portuguesa.

Rol dos dados:

10, 13, 19, **20**, 20, 21, 22, **25**, 25, 28, 30, **37**, 40, 42, 42

$Q_1 = 20$ $Q_2 = 25$ $Q_3 = 37$

$LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = -5{,}5$

$LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 62{,}5$

Valor mínimo: 10

Valor máximo: 42

Simulado **2** de Língua Portuguesa.

Rol dos dados:

18, 19, 25, **25**, 25, 26, 28, **28**, 28, 29, 35, **36**, 38, 42, 45

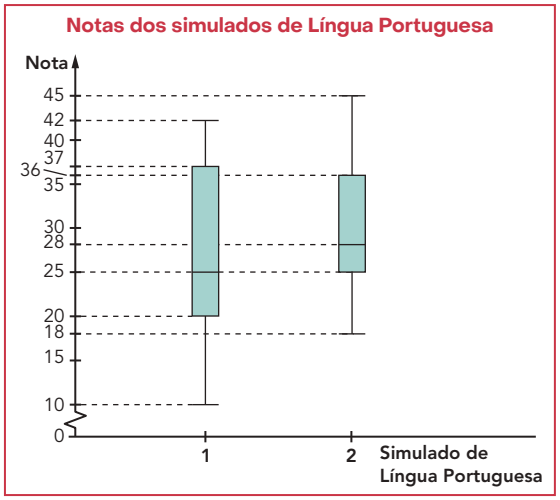
$Q_1 = 25$ $Q_2 = 28$ $Q_3 = 36$

$LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 8{,}5$

$LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 52{,}5$

Valor mínimo: 18

Valor máximo: 45



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Possíveis interpretações: compare os *box-plots* dos 2 simulados de cada disciplina para identificar qualquer mudança no desempenho entre os simulados. Se houver uma melhoria nas notas de um simulado para o outro, isso pode indicar que o projeto de reforço escolar está tendo um impacto positivo, porém não podemos afirmar. Note que várias variáveis podem influenciar os resultados, como o nível de dificuldade dos simulados, que pode variar de um para o outro. Para chegar a uma conclusão mais precisa, é necessário considerar outros tipos de análises estatísticas. No entanto, se as notas do Simulado **2** mostram uma mediana mais alta e menor variabilidade, pode-se inferir que houve uma melhora no desempenho acadêmico dos estudantes.

Matemática

Variabilidade: Há maior variabilidade no Simulado **1**.

Língua Portuguesa

Variabilidade: Há maior variabilidade no Simulado **1**.

Para fundamentar saberes

1. Alternativa **a**: incorreta. Analisando o gráfico e representando uma reta paralela ao eixo das ordenadas, é possível verificar que houve sábados em que a medida de "energia" sísmica média esteve acima de 380 $(nm/s)^2$.

Alternativa **b**: incorreta. Analisando o gráfico e representando uma reta paralela ao eixo das abscissas, é possível verificar que em nenhum dia de semana a fração de pessoas em casa foi inferior a 0,4 (40%).

Alternativa **c**: incorreta. Aos domingos e feriados, a maior medida de "energia" sísmica média foi, aproximadamente, 379,6 $(nm/s)^2$.

Alternativa **d**: correta. Em todas as frequências, a medida de "energia" sísmica média em dias úteis foi maior do que em outros dias.

Alternativa **e**: incorreta. A medida de "energia" sísmica média aos sábados quando $F = 0{,}6$ foi maior do que 190 $(nm/s)^2$.

Observação: a grandeza apresentada no eixo das abscissas não é energia, é apenas o quadrado da medida de velocidade.

Alternativa **d**.

3. Se cada um dos 12 meses apresentasse 10 mm de acréscimo, a média também apresentaria 10 mm de acréscimo. Portanto, a nova média seria:

$\bar{x} = 92{,}5 + 10 = 102{,}5$; ou seja, 102,5 mm.

Já o desvio padrão não sofreria alteração, uma vez que a média em cada um dos 12 meses apresentaram o mesmo aumento a cada mês.

Portanto, o desvio padrão em 2022 permaneceria 100,0 mm.

Alternativa **d**.

Unidade 5

Capítulo 10

Atividades

1. 1º Q: $\frac{41\pi}{5}\left(\frac{41\pi}{5} = 8\pi + \frac{\pi}{5}\right)$; $-\frac{11\pi}{3}\left(-\frac{11\pi}{3} = -2\pi - \frac{5\pi}{3}\right)$.

2º Q: $-\frac{5\pi}{4}$; $\frac{26\pi}{3}\left(\frac{26\pi}{3} = 8\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$

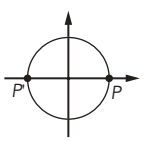
3º Q: $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{49\pi}{10}\left(-\frac{49\pi}{10} = -4\pi - \frac{9\pi}{10}\right)$;

$10\left(\frac{7\pi}{2} > 10 > 3\pi, \text{ pois } \frac{7\pi}{2} \simeq 11 \text{ e } 3\pi \simeq 9{,}42\right)$.

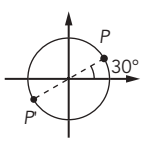
4º Q: $-0{,}5$ (lembre-se de que $-\frac{\pi}{2} < -0{,}5 < 0$);

$\frac{15\pi}{4}\left(\frac{15\pi}{4} = 2\pi + \frac{7\pi}{4}\right)$.

3. **a)**

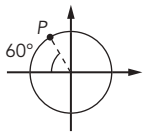


b)

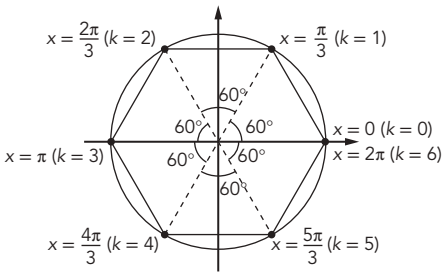


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c)



4. **a)**



É um hexágono.

b) Na circunferência trigonométrica, o lado de cada triângulo mede 1 u.c. (medida do raio).

Medida de área (A) da região limitada pelo hexágono:

$A = 6 \cdot \ell^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ u.a.

Medida de perímetro (P) do hexágono:

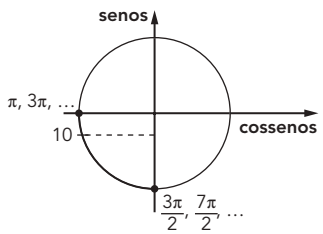
$P = 6 \cdot 1$ u.c. $= 6$ u.c.

7. **a)** $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right) = \text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (V)

b) Quando $|k|$ é par, sen $(k\pi)$ = sen (2π) = sen (-2π) = = sen (4π) = sen (-4π) = … = 0. Quando $|k|$ é ímpar, sen $(k\pi)$ = sen (π) = sen $(-\pi)$ = sen (3π) = sen (-3π) = = … = 0. (V)

c) sen $1000° = \text{sen}\,(2 \cdot 360° + 280°) = \text{sen}\,280° < 0$ ($280°$ está associado a um ponto no 4º Q). (F)

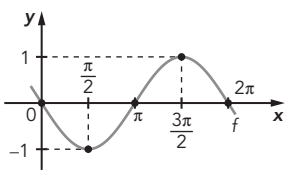
d) Lembre-se de que o número real 10 é maior do que 3π (aproximadamente 9,42) e menor do que $\frac{7\pi}{2}$ (aproximadamente 10,99).



Desse modo, o número real 10 está associado a um ponto no 3º Q e, assim, sen $10 < 0$. (V)

e) $\frac{\pi}{9}$ está associado a um ponto no 1º Q, então sen $\frac{\pi}{9} > 0$. Mas $-\frac{\pi}{9}$ está associado a um ponto no 4º Q, então $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{9}\right) < 0$. (F)

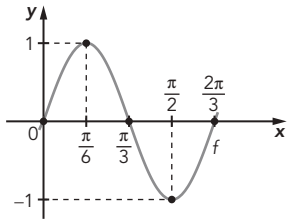
8. **a)** $p = 2\pi$; $Im(f) = [-1, 1]$.



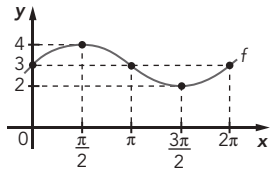
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

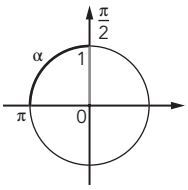
b) $p = \frac{2\pi}{3}$; $Im(f) = [-1, 1]$.



c) $p = 2\pi$; $Im(f) = [2, 4]$.



10.



$\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi \Leftrightarrow 0 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$

Daí:

$0 \leqslant 2m - 3 \leqslant 1 \Leftrightarrow 3 \leqslant 2m \leqslant 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leqslant m \leqslant 2$;

$\left\{m \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} \leqslant m \leqslant 2\right\}$.

12. **a)** $t = 0 \Rightarrow h(0) = 6 + 4 \cdot \text{sen } 0 = 6 + 0 = 6 \Rightarrow h(0) = 6$

Logo, no início da observação do passeio, a medida da altura é 6 m.

b) $h(9) = 6 + 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{9\pi}{12}\right) = 6 + 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$

$= 6 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 + 2 \cdot 1{,}4 \Rightarrow h(9) = 8{,}8$

Logo, após 9 s, a medida da altura do passageiro é 8,8 m.

c) O menor valor possível de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$, $t \in [0, 270]$, é -1.

Assim, $h_{mín.} = 6 + 4 \cdot (-1) = 2 \Rightarrow h_{mín.} = 2$. Logo, a medida da altura mínima é 2 m.

d) O período de f é $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{12}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$.

Logo, são necessários 24 s para a roda-gigante dar uma volta completa.

e) $n = \frac{270}{24} = 11{,}25$

Assim, são 11 voltas completas.

13. **a)** Como $\text{sen}(k\pi) = 0$, para $k \in \mathbb{Z}$, as raízes de f em $[-14, 10]$ são:

- -4π ($\simeq -12{,}56$)
- -3π ($\simeq -9{,}42$)
- -2π ($\simeq -6{,}28$)
- $-\pi$ ($\simeq -3{,}14$)
- 0
- π ($\simeq 3{,}14$)
- 2π ($\simeq 6{,}28$)
- 3π ($\simeq 9{,}42$)

b) f é mínimo se $\text{sen } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

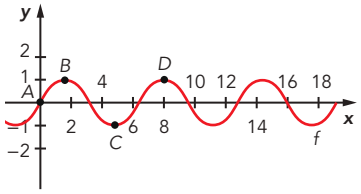
$k = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin [6, 12]$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{7\pi}{2} \simeq 10{,}99$

Pela leitura do gráfico, há apenas um valor de x no qual f é mínimo.

Logo, $x = \frac{7\pi}{2}$.

c)



Os pontos destacados são:

Origem: $A(0, 0)$;

Pontos associados aos valores máximos de f: $B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ e $D\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi, 1\right) = D\left(\frac{5\pi}{2}, 1\right)$.

Ponto associado ao valor mínimo de f: $C\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

Assim, f é crescente, no intervalo $[0, 10]$ em $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$.

15. **a)** O período de f é $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$; o período de g é $\frac{2\pi}{3}$; o período de h é $\frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$.

$\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \pi$, isto é, o período de h é menor do que o período de g, que, por sua vez, é menor do que o período de f. O gráfico mais achatado na horizontal corresponde ao de menor período, isto é, **II**-h. O gráfico mais alongado na horizontal corresponde ao de maior período, isto é, **III**-f. Assim, **I**-g.

b) Pontos A e B:

$\text{sen } 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ (não serve); ou $4x = \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \simeq 0{,}785$ (abscissa de A);

$4x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$ (não serve); $4x = 3\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \simeq 2{,}36$ (abscissa de B).

A abscissa de A é $\frac{\pi}{4}$ e de B é $\frac{3\pi}{4}$.

Ponto C:

$\text{sen } 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ (não serve); $3x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ (não serve); $3x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ (não serve); $3x = 3\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pi$ (não serve); $3x = 4\pi \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \simeq 4{,}19$ (abscissa de C).

A abscissa de C é $\frac{4\pi}{3}$.

16. **(01)** Falsa. O pico da concentração ocorre quando $\text{sen } t = 1$. Logo, $t = \frac{\pi}{2}$. Portanto, o primeiro instante em que ocorre o pico da concentração é aproximadamente 1,57, $t = \frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$.

(02) Falsa. Os soros, ao contrário das vacinas, não promovem a produção de anticorpos, pois eles já contêm anticorpos específicos que vão combater rapidamente os antígenos invasores.

(04) Verdadeira. Imediatamente após a introdução da vacina, a concentração era $f(0) = \text{sen } 0 + 1 = 1$. Após 1 mês da introdução, a concentração era $f(1) = \text{sen } 1 + 1$.
Como $\text{sen } 1 > \text{sen } 0 \Rightarrow f(1) > f(0)$.

(08) Falsa. As duas funções têm o mesmo período, mas conjuntos imagem diferentes. Basta analisar a concentração imediatamente após a introdução da vacina.
Na função dada por $f(t) = \text{sen } (t + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(0) = \text{sen } (0 + 1) = \text{sen } 1$.
Na função dada por $f(t) = \text{sen } t + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(0) = \text{sen } 0 + 1 = 0 + 1 = 1$.
Logo, $\text{sen } 1 \neq 1$.

(16) Verdadeira. A função f é crescente entre $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, assim a concentração de anticorpos aumentará até atingir o valor máximo. Em seguida, no intervalo $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2}$, f é decrescente, assim a concentração de anticorpos diminui até atingir o valor mínimo.

Soma: 20.

17. **(01)** Falso. $h_{mín} = 8 + 4\,(-1) \Rightarrow h_{mín} = 4$ m.

(02) Falso. Se $t = 12$, $h(12) = 8 + 4 \text{ sen } \pi \Rightarrow h(12) = 8 > 4$.

2º modo:

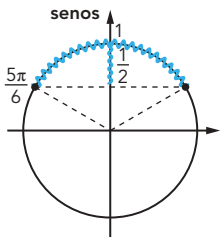
$8 + 4 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ é mínimo se $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\pi}{12}t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \frac{t}{12} = \frac{3}{2} + 2k \Rightarrow t = 12\left(\frac{3}{2} + 2k\right)$.

Para $k \in \mathbb{Z}$:
$k = 0 \Rightarrow t = 18$; 18 h
$k = 1 \Rightarrow t = 42$; 42 h > 24 h

(04) Verdadeiro. O período dessa função é $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{12}\right|} = 24$ h.

(08) Verdadeiro. $t = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h(2) = 8 + 4\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$
$= 8 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 10$; ou seja, 10 m.
$t = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow h(10) = 8 + 4 \text{ sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$
$= 8 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 10 \Rightarrow h(10) = 10$; ou seja, 10 m.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como entre 2 e 10 horas ($2 \leqslant t \leqslant 10$), $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ é um número real pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ e, desse modo, a medida de altura da maré é maior do que ou igual a 10 m. Logo, nesse período, o navio pode permanecer na região.

Soma: 12.

18. $\text{sen } (\pi x) \simeq 4x - 4x^2$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \simeq 4 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$

Erro: $\left|\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \simeq \left|\frac{3}{4} - \frac{1{,}41}{2}\right| = \left|\frac{3 - 2{,}82}{4}\right| =$
$= |0{,}045| = 0{,}045$

Interligando

2. O período é a menor medida de intervalo de tempo que a roda leva para dar uma volta completa, ou seja, 2 minutos (ou 120 segundos). Aplicando a fórmula $\frac{2\pi}{|c|}$, obtemos $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{60}} = 120$; ou seja, 120 s.

$-1 \leqslant \text{sen}\left(\frac{\pi t}{60}\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow -9 \leqslant 9 \text{ sen}\left(\frac{\pi t}{60}\right) \leqslant 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 - 9 \leqslant 10 + 9 \text{ sen}\left(\frac{\pi t}{60}\right) \leqslant 10 + 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant 10 + 9 \text{ sen}\left(\frac{\pi t}{60}\right) \leqslant 19$

Logo, o valor máximo é 19 m e o valor mínimo é 1 m. Ou diretamente da tabela, temos: $h(30) = 19$ m é a medida da altura máxima e $h(90) = 1$ m é a medida da altura mínima.

Capítulo 11

Atividades

2. $\cos \frac{9\pi}{2} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\text{sen } \frac{9\pi}{2} = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

$\cos \frac{17\pi}{4} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } \frac{17\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \frac{0 - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

4. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{3m}{2} - \frac{1}{3} \leqslant 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leqslant \frac{3m}{2} \leqslant \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leqslant 3m \leqslant \frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{4}{9} \leqslant m \leqslant \frac{8}{9}$

O único número inteiro pertencente ao intervalo $\left[-\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right]$ é o zero.

5. **a)** Em 2020: $f(0) = 400 + 18 \cdot \cos 0 = 418$; ou seja, 418 milhões de dólares.
Em 2025: $f(5) = 400 + 18 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 400 + 18 \cdot \frac{1}{2} =$
$= 409$; ou seja, 409 milhões de dólares.
Em 2030: $f(10) = 400 + 18 \cdot \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) =$
$= 400 + 18 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 400 + 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$
$= 400 - 9 = 391$; ou seja, 391 milhões de dólares.

b) O menor valor possível de $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ é -1.
$x \in \{0, 1, \ldots, 20\}$.
$f_{mín.} = 400 + 18 \cdot (-1) = 400 - 18 = 382$; ou seja, 382 milhões de dólares.
Devemos ter:
$\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \underbrace{\cos\,(\pi + k \cdot 2\pi)}_{-1}$, com $k \in \mathbb{Z}$, isto é,

$\frac{\pi}{3}x = \pi + k \cdot 2\pi$; $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 2k)$ tal que $k \in \mathbb{Z}$.

$k = 0 \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 0) = 3$ (ano de 2023)

$k = 1 \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 2) = 9$ (ano de 2029)

$k = 2 \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 4) = 15$ (ano de 2035)

$k = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 6) = 21$ (ano de 2041); não convém!

Assim, por 3 vezes f atinge seu menor valor.

6. Analisando cada item, temos:

a) Não é correta, pois $I_{máx.} = 50 - 10 \cdot (-1) = 60$ decibels.

b) É correta, pois $I_{máx.} = 30 + 10 \cdot (1) = 40$ decibels e $I_{mín.} = 30 + 10 \cdot (-1) = 20$ decibels.

c) Não é correta, pois $I_{máx.} = 40 + 20 \cdot (1) = 60$ decibels.

d) Não é correta, pois $I_{máx.} = 60 - 20 \cdot (-1) = 80$ decibels.

Portanto, alternativa **b**.

7. Como a função cosseno varia de –1 a 1, a medida da altura da maré será máxima quando $\cos\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, ou seja, quando $\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{2}$ for igual a 0, 2π, 4π, ...

Para $\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{2} = 0$, temos $t < 0$ (não convém).

$\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{8}t = \frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 12$

$\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{2} = 4\pi \Rightarrow \frac{\pi}{8}t = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 28$

Portanto, as luas cheia e nova ocorreram nos dias 12 e 28.

9. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-3, 1]$, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$-1 \leqslant \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 \leqslant -1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1$; $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$.

b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-3, 3]$, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$-1 \leqslant \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow -3 \leqslant 3 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 3$;

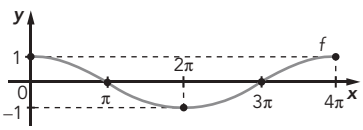
$p = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$.

c) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, 4]$, pois, para $x \in \mathbb{R}$,

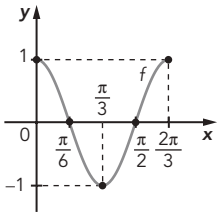
$-1 \leqslant \cos 6x \leqslant 1 \Leftrightarrow (-1) \cdot (-4) \geqslant (-4) \cdot \cos 6x \geqslant 1 \cdot (-4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \geqslant -4 \cdot \cos 6x \geqslant -4$; $p = \frac{2\pi}{|6|} = \frac{\pi}{3}$.

10. **a)** $p = 4\pi$; $Im(f) = [-1, 1]$

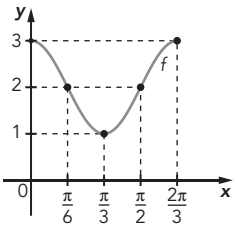


b) $p = \frac{2\pi}{3}$; $Im(f) = [-1, 1]$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c) $p = \frac{2\pi}{3}$; $Im(f) = [1, 3]$



Banco de imagens/Arquivo da editora

11. **a)** F, pois $\cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) F, pois $f_{mín.} = 2 \cdot (-1) = -2$.

c) F, pois $f(x) = x \cdot (-1) = -x$ é uma função que é apenas decrescente e, portanto, não é periódica.

d) V, pois $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{8}\right|} = 16$.

e) V, pois $\cos\left(-\frac{3\pi}{20}\right) = \cos\frac{3\pi}{20} > 0$; já que $\frac{3\pi}{20}$ está associado a um ponto no 1º Q.

15. **a)** A partir da análise do gráfico gerado em um *software* de Geometria dinâmica, percebe-se que o período de F é 24 horas. Durante esse período, a temperatura varia de 17 °C a 25 °C (ao clicar no ponto de máximo e de mínimo, o *software* mostra as coordenadas).

Sem a utilização do *software* de Geometria dinâmica, o valor máximo de F ocorre quando $\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) = -1$ (mínimo) e o valor mínimo de F ocorre quando $\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) = 1$ (máximo), já que o coeficiente do cosseno é negativo. Logo, o valor máximo de F é $21 - 4 \cdot (-1) = 25$; ou seja, 25 °C. E o valor mínimo de F é $21 - 4 \cdot 1 = 17$; 17 °C.

b) Digitando no campo de entrada a função $y = 23$, verificamos os pontos de intersecção dessa reta com o gráfico de $F(t)$, que são $t = 8$ e $t = 16$. O valor $t = 8$ equivale a 14 horas (pois $8 + 6 = 14$) e o valor $t = 16$ equivale a 22 horas (pois $16 + 6 = 22$).

Sem a utilização do *software* de Geometria dinâmica, podemos resolver algebricamente a equação $F(t) = 21 - 4\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 23$, obtendo $t = 8$ ou $t = 16$.

Logo, as horas do dia serão: 14 h (8 h + 6 h) e 22 h (16 h + 6 h).

Interligando

1. **a)** As marés altas repetem-se de 12 em 12 horas, de 24 em 24 horas e de 36 em 36 horas, o mesmo ocorrendo com as marés baixas. Assim, o período da função é 12 horas.

Como $p = \frac{2\pi}{|w|}$, temos: $12 = \frac{2\pi}{|w|} \xrightarrow{w > 0} w = \frac{\pi}{6}$.

b) $h(t) = A + B \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$

$h(0) = 2{,}2 \Rightarrow A + B \cdot \cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A + B \cdot \cos(0) = 2{,}2 \Rightarrow A + B = 2{,}2$

$h(6) = 0{,}3 \Rightarrow A + B \cdot \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow A + B \cdot \cos(\pi) = 0{,}3 \Rightarrow A - B = 0{,}3$

Resolvendo o sistema com as 2 equações anteriores, concluímos que $A = 1{,}25$ e $B = 0{,}95$.

c) Como $A = 1{,}25$, $B = 0{,}95$ e $w = \frac{\pi}{6}$, então $h(t) = 1{,}25 + 0{,}95 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$.

d) Para $t = 10$ s:

$h(10) = 1{,}25 + 0{,}95 \cdot \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) =$

$= 1{,}25 + 0{,}95 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1{,}25 + 0{,}95 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}725 \Rightarrow$

$\Rightarrow h(10) = 1{,}725$ m

Para $t = 28$ s:

$h(28) = 1{,}25 + 0{,}95 \cdot \cos\left(\frac{28\pi}{6}\right) =$

$= 1{,}25 + 0{,}95 \cdot \cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)$

Como $\frac{14\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$, temos:

$h(28) = 1{,}25 + 0{,}95 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= 1{,}25 + 0{,}95 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0{,}775 \Rightarrow h(28) = 0{,}775$; logo, 0,775 m

Viralize

3. **a)** O maior número de casos apontados foi $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t+8)\right) = 1$. Assim, $f_{máx.} = 3200 + 1100 \cdot 1 = 4300$, ou seja, 4300 casos. Isso ocorre quando $\frac{\pi}{6}(t+8) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = 12k - 5$, com $k \in \mathbb{Z}$. Para $k = 1$, $t = 7$. Logo, no mês de julho.

b) O menor número de casos ocorreu quando $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t+8)\right) = -1$. Assim, $f_{mín.} = 3200 + 1100 \cdot (-1) = 2100$, ou seja, 2100 casos. Isso aconteceu quando $\frac{\pi}{6}(t+8) = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = 12k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Para $k = 0$, $t = 1$. Logo, foi no mês de janeiro, ou seja, no verão.

c) $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = 12$; logo, ele atingirá novamente o mesmo valor (no mínimo) após 12 meses.

d) De acordo com os itens **a** e **b**, a função atinge seu valor mínimo quando $t = 1$ e máximo quando $t = 7$. Entre esses meses (janeiro e julho), o número de casos será crescente.

Para fundamentar saberes

2. A função h deve ser do tipo $h(t) = a + b \cdot \text{sen}(ct + d)$.

Sabendo que o período da função h é $\frac{1}{2}$ s, temos:

$\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{|c|} \Leftrightarrow |c| = 4\pi$. Eliminamos as alternativas **c**, **d** e **e**.

Além disso, como $h(0) = 0$ e $\text{sen}\ 0 = 0$, eliminamos a alternativa **b**, pois $h(t) = 25 + 25 \cdot \text{sen}(4\pi t) \Rightarrow$ $\Rightarrow h(0) = 25 + 25 \cdot \text{sen}(4\pi \cdot 0) = 25$.

Na alternativa **a**, $h(t) = 25 + 25 \cdot \text{sen}\left(4\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow h(0) = 25 + 25 \cdot \text{sen}\left(4\pi \cdot 0 + \frac{3\pi}{2}\right) =$

$= 25 + 25 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 25 + 25 \cdot (-1) = 0$.

Alternativa **a**.

4. **a)** Do gráfico, temos $f(0) = 1$. Portanto, $m = 1$.

Como o comprimento da onda mede $25 - 5 = 20$, ou seja, 20 metros, então:

$20 = \frac{2\pi}{|n|} \Rightarrow n = \frac{\pi}{10}$, pois se $n = -\frac{\pi}{10}$, $f(15)$ seria diferente de zero.

b) $-1 \leqslant \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow 3 - 1 \leqslant 3 + \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leqslant 3 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \leqslant 3 + \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leqslant 4 \Leftrightarrow 2 \leqslant g(x) \leqslant 4$

Considerando a medida da altura da crista como o valor máximo de $g(x)$, sua altura mede 4 metros.

A medida de comprimento da onda é dada pelo período da função: $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

Logo, o comprimento da onda mede 4 metros.

6. A medida de temperatura atingirá seu valor mínimo quando $\text{sen}\left(\pi \cdot \frac{x}{4}\right) = 1$.

Assim, $\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (com $k \in \mathbb{R}$)

Isolando x, obtém-se:

$x = 2 + 8k$

$k = 0 \Rightarrow x = 2$

$k = 1 \Rightarrow x = 10$

$k = 2 \Rightarrow x = 18$

$k = 3 \Rightarrow x = 26$ (não convém)

Portanto, a estufa atingiu o seu valor mínimo 3 vezes (às 2 h, às 10 h e às 18 h).

Alternativa **b**.

7. De acordo com o gráfico, $A(0, 0)$.

Como C é o ponto de interseção entre as funções a partir de $x = 0$, então: $\text{sen}\ x = \cos x$.

Assim, temos: $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = \text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, $C\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Já o ponto B é dado por: $\cos x = 0$.

Assim, temos: $x = \frac{\pi}{2}$.

Portanto, $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Logo, a medida de área do triângulo ABC é igual a:

$S = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$; ou seja, $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$ u.a.

Alternativa **b**.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

Todos os *sites* foram acessados em 9 de setembro de 2024.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução de Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

Essa obra apresenta uma visão histórica da Matemática e mostra como a Matemática é uma construção humana e social, possibilitando que professores levem para a sala de aula novas abordagens e perspectivas. A obra também é referência de contextos históricos importantes para o enriquecimento das aulas.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

A autora desse livro é precursora das mentalidades matemáticas, uma abordagem que busca incentivar o potencial dos estudantes mediante metodologias ativas de aprendizagem e criatividade. Essa perspectiva permeia a elaboração dos textos desta coleção, servindo de referencial teórico para a proposta teórico-metodológica.

BORBA, M. de C. *et al*. *Fases das tecnologias digitais em Educação matemática*: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Referência para o uso de tecnologias proposto nesta coleção, essa obra apresenta uma visão sobre a aplicação de tecnologias em Educação matemática, exemplificando questões teóricas e propostas de atividades, bem como dissertando sobre o presente e o futuro da sala de aula de Matemática.

BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica. 2017. 226 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://tedit.net/rd6pjs.

Essa tese explora métodos para fomentar o pensamento computacional utilizando atividades práticas e interativas, sem o uso de computadores. Foi consultada como referência na elaboração de estratégias para integrar conceitos de computação e lógica matemática nas atividades desta coleção.

BRASIL. *Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Senado Federal, 1996. Disponível em: https://tedit.net/81p5f9.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional é um marco regulatório fundamental que estabelece as diretrizes gerais para a organização e o funcionamento da educação no Brasil. Abrange desde a Educação Infantil até a Educação Superior e define princípios, como a igualdade de condições para o acesso e a permanência na escola, a liberdade de aprender e ensinar, bem como a valorização dos profissionais da educação brasileira.

BRASIL. *Lei n. 13.005, de 25 de junho de 2014*. Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. Brasília, DF: MEC, 2014.

O Plano Nacional de Educação (PNE), instituído em 2014, define 20 tópicos para garantir o acesso à educação de qualidade no Brasil até 2024, para todos os níveis e modalidades de ensino no país, quando deverão ser determinadas novas metas para o novo ciclo. O documento também foi referência para a elaboração de orientações didáticas desta coleção.

BRASIL. *Lei n. 14.533, de 11 de janeiro de 2023*. Institui a Política Nacional de Educação Digital [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, edição extra, ano CLXI, n. 8-B, p. 1, 11 jan. 2023.

Promulgado em 2023, esse documento apresenta a lei que estabelece a criação da Política Nacional de Educação Digital (Pned). Esse documento foi consultado para guiar a elaboração das orientações e das propostas de atividades que envolvem a educação digital nesta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://tedit.net/q0hay4.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo. Define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceituam o Plano Nacional de Educação (PNE) e as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN). A BNCC também estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo de cada ano da escolaridade básica. Os conteúdos selecionados para esta coleção, bem como as orientações didáticas e a proposta teórico-metodológica, têm como referência esse documento.

BRASIL. Ministério da Educação. *Computação*: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://tedit.net/93oura.

Em 2022, a BNCC foi complementada com diretrizes específicas que incluem o ensino de Computação no currículo escolar brasileiro. O documento, que visa promover o desenvolvimento de habilidades dos estudantes associadas ao pensamento computacional e à cultura digital, foi consultado para a elaboração de conteúdos e atividades desta coleção, bem como para as orientações didáticas deste Manual.

BRASIL. Ministério da Educação. *Projeto de vida*: ser ou existir. Caderno de práticas. Disponível em: https://tedit.net/nhft2i.

Nesse caderno de práticas são apresentadas reflexões sobre o papel da escola no projeto de vida dos estudantes. O material serviu de referência para a elaboração de atividades que envolvem projetos e suas respectivas orientações didáticas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a. Disponível em: https://tedit.net/3acdu3.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019b. Disponível em: https://tedit.net/3pnyp2.

Esses dois documentos visam esclarecer a inserção dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), trabalhados nesta coleção, nos currículos escolares e nortear as contextualizações dos conteúdos ensinados por meio de temas do interesse dos estudantes e que têm relevância para o desenvolvimento deles como cidadãos.

CARATTI, R. L.; VASCONCELOS, F. H. L. O pensamento computacional na visão dos professores da Educação Básica. *Educação em foco*, Juiz de Fora, n. 28, 2023. Disponível em: https://tedit.net/gianev.

O artigo investiga a percepção dos professores da Educação Básica sobre o pensamento computacional e destaca a importância dele na formação dos jovens para a melhoria na resolução de problemas e no pensamento crítico dos estudantes.

COSTA, A. C. G. da. *Protagonismo juvenil*: adolescência, educação e participação democrática. Salvador: Fundação Odebrecht, 2000.

Nesse livro, o autor aborda a educação considerando o jovem o núcleo do processo educativo. Também apresenta a descrição de projetos desenvolvidos na prática envolvendo experiências de protagonismo juvenil. Essas propostas foram referência na elaboração de algumas seções da coleção e de orientações neste Manual.

COSTA, C. F. da. Ubiratan D'Ambrosio e a decolonialidade na Etnomatemática. *Revista de Educação Matemática*, [*s. l.*], v. 18, Edição Especial, 2021. Disponível em: https://tedit.net/512lsk.

Nesse artigo, as contribuições de Ubiratan D'Ambrosio para a Etnomatemática são exploradas, destacando a importância de uma abordagem decolonial que valorize os saberes matemáticos de diferentes culturas. A perspectiva inclusiva e multicultural para o ensino da Matemática, que reconhece e integra a diversidade cultural dos estudantes, foi referência para a elaboração das atividades que envolvem o tema nesta coleção.

DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Estado de Educação. *Convivência escolar e Cultura de Paz*. Brasília, DF, 2020. Disponível em: https://tedit.net/fc8gpy.

Nessa publicação são abordadas estratégias e práticas para promover um ambiente escolar harmonioso e pacífico, enfatizando a importância da convivência respeitosa e da resolução de conflitos. Foi consultada na elaboração desta coleção como fonte de orientações sobre como criar um ambiente de sala de aula que favoreça a aprendizagem colaborativa e o bem-estar dos estudantes.

FAVA, R. *Trabalho, educação e inteligência artificial*. Porto Alegre: Penso, 2018.

O debate apresentado nesse livro sobre o impacto da inteligência artificial no mercado de trabalho e suas implicações para a educação pode ser utilizado como base para a elaboração de estratégias para integração da inteligência artificial à sala de aula visando preparar melhor os estudantes para os desafios do século XXI.

FAZENDA, I. *O que é interdisciplinaridade*. São Paulo: Cortez, 2008.

O livro explora a interdisciplinaridade sob uma análise da história, não apenas como integração de componentes curriculares, mas também sob a perspectiva da busca de novos conhecimentos e do enriquecimento da prática pedagógica, facilitando a construção de conhecimentos mais significativos e contextualizados. As atividades e seções interdisciplinares desta coleção foram propostas tendo esse material como embasamento bibliográfico.

FERNANDES, D. *Avaliar para aprender*: fundamentos, práticas e políticas. São Paulo: Unesp, 2009.

A avaliação educacional é abordada nesse livro como um processo formativo, enfatizando práticas que promovem a aprendizagem contínua dos estudantes. Serviu de referência bibliográfica para as diretrizes e estratégias de avaliações presentes nesta coleção, concebendo a avaliação não apenas como instrumento de medida das competências matemáticas desenvolvidas pelos estudantes, mas também como um instrumento que incentive o desenvolvimento delas.

FREITAS, M. C. de. Educação inclusiva: diferenças entre acesso, acessibilidade e inclusão. *Cadernos de Pesquisa*, n. 53, 2023. Disponível em: https://tedit.net/j976u1.

Esse artigo discute as distinções fundamentais entre proporcionar acesso à educação, garantir a acessibilidade e promover a verdadeira inclusão de todos os estudantes no ambiente escolar. Também foi referência para o desenvolvimento das sugestões de adaptação das atividades desta coleção, para que elas não apenas facilitem o acesso e a acessibilidade, mas também assegurem a inclusão efetiva de estudantes com diferentes necessidades e habilidades.

HOFFMANN, J. *Avaliação*: mito & desafio – uma perspectiva construtivista. Porto Alegre: Mediação, 2003.

O livro explora a avaliação educacional sob a ótica do construtivismo, desmistificando práticas tradicionais e propondo novos métodos que promovem a aprendizagem ativa e reflexiva dos estudantes. Foi referência para as abordagens de avaliação presentes nesta coleção, para que elas também fomentem o desenvolvimento contínuo e a compreensão profunda dos conceitos matemáticos.

KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias*: o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

O livro examina o impacto das tecnologias digitais na educação e destaca como essas ferramentas transformam a dinâmica do ensino e da aprendizagem. Foi referência na elaboração desta coleção para a integração de tecnologias digitais nas aulas de Matemática, visando enriquecer o processo educativo e engajar os estudantes de modo mais eficaz.

LASCANE, M. M.; HOMSY, N. P. B.; MONTEIRO, A. F. B. S. Construção do raciocínio lógico matemático. *Unisanta Humanitas*, Santos, v. 8, n. 2, p. 117-127, 2020.

Nesse artigo são debatidas estratégias e metodologias para desenvolver o raciocínio lógico-matemático dos estudantes, enfatizando a importância de práticas pedagógicas que promovam o pensamento crítico e a resolução de problemas. Foi utilizado nesta coleção como referência de possibilidades de abordagens práticas para fortalecer as habilidades lógicas e matemáticas dos estudantes de maneira eficaz e contextualizada.

LIRA, B. C. *Práticas pedagógicas para o séc. XXI*: a sociointeração digital e o humanismo ético. Petrópolis, RJ: Vozes, 2016.

O trabalho do autor propõe reflexões importantes sobre diversas áreas da educação. Além de favorecer a formação dos estudantes, o texto aborda a necessidade de melhoria e constante aperfeiçoamento da formação docente, a fim de que professores estejam cada vez mais capacitados para auxiliar os estudantes nesse mundo em constante transformação.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

O livro aborda a avaliação educacional como um processo formativo e transformador. Propõe práticas que visam promover a aprendizagem efetiva dos estudantes, fornecendo fundamentos teóricos e práticos para a implementação de orientações avaliativas nesta coleção que incentivem o desenvolvimento contínuo e integral dos estudantes.

Todos os *sites* foram acessados em 9 de setembro de 2024.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. *História nas aulas de Matemática*: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

Esse livro explora a integração da História da Matemática no ensino e oferece fundamentos teóricos e sugestões práticas para enriquecimento das aulas. Foi utilizado nesta coleção como referência para a elaboração de estratégias para contextualizar historicamente conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais significativo e engajador para os estudantes.

MILANI, D. R. C. *Contemporaneidade e educações*: mídias digitais nas culturas juvenis. 2012. 207 f. Tese (Doutorado em Educação Escolar) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Letras, Araraquara, 2012.

Essa tese investiga o papel das mídias digitais na formação das culturas juvenis contemporâneas e suas implicações para a educação, inspirando a elaboração das estratégias de inserção de mídias digitais propostas nesta coleção. Desse modo, o ensino torna-se mais relevante e conectado com as vivências e os interesses dos estudantes.

MOEHLECKE, S. O Ensino Médio e as novas diretrizes curriculares nacionais: entre recorrências e novas inquietações. *Revista Brasileira de Educação*, v. 17, n. 49, p. 39-58, 2012. Disponível em: https://tedit.net/rm3e4u.

Esse artigo retoma parte do debate envolvendo a criação de um novo modelo de Ensino Médio, servindo para a compreensão do histórico de leis e debates que resultaram no Novo Ensino Médio proposto em 2017 pela Lei n. 13.415/2017.

MORÁN, J. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, C. A. de; MORALES, O. E. T. (org.). *Convergências midiáticas, educação e cidadania*: aproximações jovens. Ponta Grossa: Proex: UEPG, 2015. v. II, p. 15-33. Disponível em: https://tedit.net/gn1b88.

Essa publicação explora diversas metodologias ativas de ensino e destaca como essas abordagens podem transformar a educação ao promover uma aprendizagem engajada e participativa, conforme sugerido nas orientações didáticas desta coleção.

PERRENOUD, P. *Avaliação*: da excelência à regulação das aprendizagens. Porto Alegre: Artmed, 1999.

No capítulo "A avaliação entre duas lógicas" desse livro, o autor debate as diferentes abordagens de avaliação, contrastando a lógica da excelência com a lógica da regulação das aprendizagens. Foi utilizado como referencial teórico para a perspectiva sobre práticas avaliativas desta coleção.

PERRENOUD, P.; THURLER, M. G. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação de professores e o desafio da avaliação. 1. ed. São Paulo: Penso, 2002.

Esse livro traz para o leitor os textos nos quais os autores suíços apoiaram suas falas na vinda ao Brasil, em 2001, em conferências que contavam com a participação dos educadores brasileiros Lino de Macedo, Nilson José Machado e Cristina D. Allessandrini. Serviu de referência teórica para a elaboração de diretrizes e estratégias pedagógicas e avaliativas alinhadas às demandas do século XXI.

PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Os métodos criativos de resolução de problemas apresentados nesse livro revelam as 4 etapas básicas de uma resolução e estratégias a serem desenvolvidas que inspiraram o trabalho com resolução e elaboração de problemas nesta coleção.

ROCHA, A. D. G. da; OTA, M. A.; HOFFMANN, G. (org.). *Aprendizagem digital*: curadoria, metodologias e ferramentas para o novo contexto educacional. Porto Alegre: Penso, 2020.

O livro analisa as experiências e os desafios enfrentados por estudantes com deficiência ao longo da jornada educacional, à luz das políticas de inclusão. Foi utilizado como referência para as sugestões de práticas inclusivas que promovam a equidade e a continuidade educacional presentes no material.

SILVA, R. V. Autonomia na BNCC: uma análise sob a perspectiva de Paulo Freire. *Revista Educação Pública*, Rio de Janeiro, v. 22, n. 36, 27 de setembro de 2022. Disponível em: https://tedit.net/bcfior.

Esse artigo examina como o conceito de autonomia é tratado na BNCC utilizando como referência os princípios pedagógicos de Paulo Freire. Também serviu de fundamentação teórica da proposta teórico-metodológica desta coleção, propondo uma análise crítica que ajuda a entender e aplicar os conceitos de autonomia no contexto do ensino de Matemática, alinhados com a BNCC.

VARIZO, Z. C. M.; MAGALHÃES, A. P. de A. S. *Atividades investigativas como uma estratégia de ensino e aprendizagem da matemática*. Curitiba: CRV, 2016.

O livro explora o uso de atividades investigativas como uma metodologia eficaz para o ensino e a aprendizagem da Matemática e oferece estratégias práticas, que podem ser incorporadas no planejamento das aulas. Foi referência de consulta para a elaboração de atividades que promovem o pensamento crítico dos estudantes e a resolução de problemas.

WING, J. *Pensamento computacional*: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://tedit.net/gzsm98.

O pensamento computacional é uma habilidade fundamental para todos, pois envolve, com destaque, a resolução de problemas e a identificação de padrões, processos inerentes à atividade matemática e a situações cotidianas. Na publicação original, traduzida para o português, a autora disserta sobre os estudos relacionados ao pensamento computacional. Essa publicação serviu de referência para a elaboração desta coleção e das orientações didáticas deste Manual.