Gelson **Iezzi** · David **Degenszajn**
Marcio **Tamari** · Guilherme **Pasmanik**

Identidade Saraiva

MANUAL DO PROFESSOR

Ensino Médio

3º ANO

Volume III

PNLD EM 2026 – 2029 – CATEGORIA 1 – MATERIAL DE DIVULGAÇÃO

CÓDIGO DA COLEÇÃO: 0086P26010120214

Matemática

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Editora Saraiva

Identidade Saraiva

Ensino Médio

3º ANO

Volume III

Matemática

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Gelson Iezzi

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP).

Engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP).

Atuou como professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Atuou como professor do Ensino Médio na rede particular de ensino.

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

David Degenszajn

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP).

Professor da rede particular de ensino há mais de 30 anos.

Marcio Tamari

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP).

Mestre em Matemática pela Universidade Federal do ABC (UFABC-SP).

Professor da rede particular de ensino de São Paulo.

Guilherme Pasmanik

Graduado em Engenharia Elétrica com ênfase em Computação pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP).

Licenciado em Matemática pelo Centro Universitário Nove de Julho (Uninove-SP).

Professor da rede particular de ensino de São Paulo.

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição, São Paulo, 2024.

Editora Saraiva

Editora Saraiva

Direção executiva de negócio e editorial: Flavia Alves Bravin

Direção de negócio: Volnei Korzenieski

Direção editorial: Lidiane Vivaldini Olo

Gerência de conteúdo: Alice Ribeiro Silvestre

Edição: Pamela Hellebrekers Seravalli (ger.), Victor Hugo dos Santos Gois, Marianna Capani Dominguez, Gabriela Barbosa da Silva, Heitor Pooli (assist.), Julia Lima Souza, Juliana Aparecida Bomjardim Soares, João Paulo Caixeta, Saulo Augusto Nascimbem e Julia Correa Bueno (assist.)

Produção editorial: Renata Galdino

Revisão: Letícia Bento Pieroni (ger.), Carlos Eduardo Sigrist (coord.), Anderson Félix (líder de projeto), Aline Vieira, Ana Paula C. Malfa, Bruno Freitas, Daniela Lima, Danielle Modesto, Diego Carbone, Gabriela M. Andrade, Helena Settecerze, Heloísa Schiavo, Kátia Godoi, Luciana B. Azevedo, Luis Boa Nova, Luiz Gustavo Bazana, Luiza Thomaz, Malvina Tomaz, Marilia Lima, Paula de Jesus, Raquel Taveira, Ricardo Miyake e Vanessa P. Santos

Arte: Fernanda Costa da Silva (ger.), Elen Coppini Camioto e Erika Tiemi Yamauchi (coord.), Nilza Shizue Yoshida (ed. arte) e Teclas Editorial (diagramação)

Digital: Daniela Teves Nardi (ger.), Rafael Pereira de Paula Freitas (coord. produção multimídia), Daniella dos Santos Di Nubila (coord. produção digital) e Rogério Fábio Alves (coord. conteúdo digital e publicação)

Ilustrações: Alex Argozino, Cássio Bittencourt, Davi Augusto, Ericson Guilherme Luciano, Felix Reiners e Luis Moura

Cartografia: Fernanda Costa da Silva (ger.), Eric Fuzii (coord.) e Alexandre Bueno

Design: Fernanda Costa da Silva (ger.), Erik Taketa (coord.), Luis Vassallo (proj. gráfico) e Gustavo Vanini (capas)

Licenciamentos: Flávio Matuguma

Licenciamento e iconografia: Roberta Bento (ger.), Iron Mantovanello (coord.), Alice Matoso, Claudia Balista, Douglas Cometti, Mariana Valeiro, Paula Squaiella, Roberta Freire, Thaisi Albarracin Lima (pesquisa e licenciamento), Fernanda Crevin (tratamento de imagens), Beatriz Alves dos Santos, Daniel Scucuglia, Ligia Dona, Liliane Rodrigues, Raísa Maris Reina, Sabrina Regina de Marinho e Sueli Ferreira (analista de licenciamento)

Fotos de capa: insta_photos/Adobe Stock, mimagephotos/Adobe Stock, Prostock-studio/Adobe Stock, BlueJeanImages/Shutterstock e m.jrn/Shutterstock

Pré-impressão: Michel Shimamoto (coord.), Alessandro de Oliveira Queiroz, Camilla Félix Cianelli Chaves, Debora Fernandes, Diego Rodrigues de Lima, Fernanda de Oliveira, Lucas Meireles dos Santos e Valmir da Silva Santos

Todos os direitos reservados por Saraiva Educação S.A.

Alameda Santos, 960, 4ª andar, setor 3
Cerqueira César – São Paulo – SP – CEP 01418-002
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
saceditorasaraiva@somoseducacao.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Identidade Saraiva : Matemática : área de Matemática e suas Tecnologias : volume 3 : Ensino médio / Gelson Iezzi...[et al]. -- 1. ed. -- São Paulo : Saraiva, 2024.

Outros autores: David Degenszajn, Marcio Tamari, Guilherme Pasmanik
ISBN 978-65-5766-414-8 - aluno
ISBN 978-65-5766-415-5 - professor

1. Matemática (Ensino médio) I. Iezzi, Gelson

24-4411 CDD 510.7

Angélica Ilacqua - Bibliotecária - CRB-8/7057

2024
Código da obra CL 821251
CAE 876608 (AL) / 876609 (PR)
1ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Envidamos nossos melhores esforços para localizar e indicar adequadamente os créditos dos textos e imagens presentes nesta obra didática. Colocamo-nos à disposição para avaliação de eventuais irregularidades ou omissões de créditos e consequente correção nas próximas edições. As imagens e os textos constantes nesta obra que, eventualmente, reproduzam algum tipo de material de publicidade ou propaganda, ou a ele façam alusão, são aplicados para fins didáticos e não representam recomendação ou incentivo ao consumo.

Impressão e acabamento

SOBRE SEU LIVRO

Caros estudantes,

É sempre um grande desafio para um autor definir os conteúdos a serem ministrados no Ensino Médio, distribuindo-os pelos 3 anos de ensino. Por isso, depois de uma leitura cuidadosa da BNCC de Matemática do Ensino Médio e de ouvir a opinião de inúmeros professores e professoras, optamos pelo programa de conteúdos explicado a seguir.

Buscamos iniciar a apresentação dos conteúdos considerando fatos do cotidiano ou situações-problema. Ao longo dos capítulos, sempre que possível, relacionamos a Matemática a práticas sociais e a outras áreas do conhecimento, empregando uma linguagem mais cotidiana. Entretanto, ao formalizar os conceitos em estudo, optamos por garantir um rigor matemático.

Outra estratégia adotada é a ampla utilização de imagens variadas, gráficos, matérias de jornais e revistas, bem como textos científicos e textos não científicos veiculados na internet, para aproximar a Matemática de seu cotidiano juvenil. Essas temáticas despertam a curiosidade e podem dialogar com temas como cidadania, meio ambiente, saúde, população e Educação financeira. Além disso, ao debater alguns assuntos, procuramos apresentar um breve relato histórico do desenvolvimento das descobertas associadas ao tópico em estudo.

As atividades e os problemas estão organizados em ordem crescente de dificuldade. Alguns desafios exigem raciocínio mais elaborado, articulação e criatividade na busca da solução, proporcionando a oportunidade de vivenciar a resolução de problemas. Ao final de cada Unidade, há uma seção com questões do Enem e de vestibulares de todo o país, bem como perguntas para autoavaliação, que auxiliam na verificação da aprendizagem dos conteúdos estudados.

Esperamos que esta coleção colabore não apenas para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, mas também para a ampliação de seu repertório cultural, que é essencial para entender e transformar o mundo à nossa volta. Aproveite ao máximo esta coleção!

Os autores

VOLUME 1

Noções de conjuntos, conjuntos numéricos, noções gerais sobre funções, função afim, função quadrática, semelhança de triângulos, trigonometria no triângulo retângulo, áreas das principais figuras geométricas planas, trigonometria na circunferência, trigonometria em um triângulo qualquer e noções básicas de Estatística.

VOLUME 2

Função exponencial, função logarítmica, matrizes, sistemas lineares, geometria espacial de posição, áreas e volumes dos principais sólidos geométricos, medidas estatísticas e funções trigonométricas.

VOLUME 3

Sequências, progressões, matemática financeira, grandezas e medidas, pensamento computacional, análise combinatória, probabilidades, noções de geometria analítica plana, transformações geométricas no plano e ladrilhamento do plano.

CONHEÇA SEU LIVRO

Cada Volume desta coleção está organizado em Unidades e capítulos. Conheça a seguir um pouco da estrutura de Unidades, capítulos, seções e boxes deste Volume.

ABERTURA DE UNIDADE

A abertura de cada uma das 5 Unidades do Volume, organizada em dupla de páginas, apresenta uma ou mais imagens e textos relacionados a temas interdisciplinares e contemporâneos que vão despertar sua curiosidade.

Unidade 4 COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Placas veiculares padrão Mercosul: o que mudou?

Durante anos, as placas de identificação veicular no Brasil eram sequências compostas de 3 letras e 4 algarismos. Ainda há muitos veículos com esse formato de identificação, pois entrou em vigor somente em 2020 o novo padrão Mercosul de placas veiculares.

A nova placa padrão Mercosul apresenta o fundo branco e uma faixa azul na parte superior, com o nome Brasil ao centro e a bandeira do país à direita. A simbologia do Mercosul aparece na ponta esquerda da mesma faixa. Logo abaixo, vem o QR Code e, na área de fundo branco, a sequência de identificação com um novo padrão, na seguinte ordem: 3 letras, 1 número, 1 letra e 2 números.

OLIVEIRA, Josiene. Esclareça suas dúvidas sobre a placa padrão Mercosul. *Departamento de Trânsito do Governo do Estado do Ceará*, Fortaleza, 13 mar. 2020. Disponível em: https://tedit.net/mlKkac. Acesso em: 30 jul. 2024.

Não escreva no livro.

1. O que é o Mercosul?
2. Qual seria uma possível função do *QR Code* na placa?
3. Considerando que existem 10 algarismos de 0 a 9 e 26 letras no alfabeto de A a Z, determine o número de placas distintas que podem ser formadas no padrão Mercosul. Em seguida, determine quantas delas são formadas por caracteres distintos, isto é, sem repetição de letras e algarismos.

As imagens não estão representadas em proporção.

BRA 2025
Placa de moto do modelo antigo.

BRA 2025
Placa de moto no padrão Mercosul.

BRA 2025
Placa de carro no modelo antigo.

BRA2025
Placa de carro no padrão Mercosul.

Trânsito intenso em uma avenida da cidade de Salvador (BA). Foto de 2024.

168

169

Dica

Neste boxe, há sugestões de *sites*, textos, tecnologias digitais, entre outros recursos que podem auxiliá-lo a compreender, ampliar ou aprofundar os estudos ao longo dos capítulos.

Observação

Em momentos oportunos, são apresentadas observações que complementam o estudo com informações adicionais sobre os conteúdos abordados.

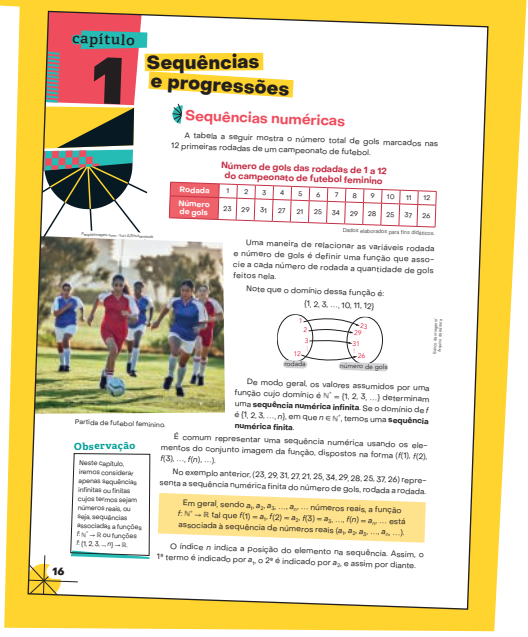
PRODUÇÕES EM FOCO

Vídeos, *podcasts*, infográficos, *blogs* e outros recursos e mídias podem ser muito úteis para a produção e o compartilhamento de conteúdos. Nesta seção, disposta antes da Unidade **1**, há dicas relacionadas a esses e outros tipos de mídia para serem consultadas ao longo de todo o ano letivo.

Em alguns momentos do livro, também indicamos um ícone para relembrá-lo de que pode retomar essas dicas para a produção sugerida na seção.

CAPÍTULO

Dois ou três capítulos estão reunidos em uma mesma Unidade e organizados em assuntos seguidos por blocos de atividades, boxes e seções variadas para o desenvolvimento dos conteúdos propostos.



capítulo 1

Sequências e progressões

Sequências numéricas

A tabela a seguir mostra o número total de gols marcados nas 12 primeiras rodadas de um campeonato de futebol.

Número de gols das rodadas de 1 a 12 do campeonato de futebol feminino

Rodada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de gols	23	29	31	27	21	25	34	29	28	25	37	26

Dados elaborados para fins didáticos.

Partida de futebol feminino.

Uma maneira de relacionar as variáveis rodada e número de gols é definir uma função que associe a cada número de rodada a quantidade de gols feitos nela.

Note que o domínio dessa função é:

{1, 2, 3, ..., 10, 11, 12}

Texto de produção e figura elaborados especialmente para esta obra.

De modo geral, os valores assumidos por uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ determinam uma **sequência numérica infinita**. Se o domínio de f é $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, em que $n \in \mathbb{N}^*$, temos uma **sequência numérica finita**.

É comum representar uma sequência numérica usando os elementos do conjunto imagem da função, dispostos na forma $(f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots)$.

No exemplo anterior, (23, 29, 31, 27, 21, 25, 34, 29, 28, 25, 37, 26) representa a sequência numérica finita do número de gols, rodada a rodada.

Em geral, sendo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ números reais, a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$, ... está associada à sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$.

O índice n indica a posição do elemento na sequência. Assim, o 1º termo é indicado por a_1, o 2º é indicado por a_2 e assim por diante.

Observação

Neste capítulo, iremos considerar apenas sequências infinitas ou finitas cujos termos sejam números reais, ou seja sequências associadas a funções $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ ou funções $f: \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$.

16

ATIVIDADES

Nesta seção, presente em todos os capítulos, você encontrará uma grande variedade de atividades e problemas para consolidar os conteúdos e conceitos abordados. Algumas atividades são acompanhadas dos destaques **Experimente**, incentivando o uso de tecnologias digitais, e **Troque ideias**, que sugere a troca de ideias e opiniões em duplas ou grupos.

Atividades resolvidas

Neste boxe, você encontra a resolução detalhada de atividades que ajudam a compreender melhor os conceitos estudados e ampliam seu repertório de técnicas de resolução de problemas.

Pense nisto

Neste boxe há chamadas curtas, intercaladas em meio ao texto, convidando você a refletir sobre algum detalhe, propriedade ou solução de um problema. Além disso, incentivam o levantamento de hipóteses e o uso de estratégias pessoais para responder às perguntas.

EXPERIMENTE

Esta seção propõe o desenvolvimento de atividades com o apoio de tecnologias digitais, como *softwares* de Geometria dinâmica e planilhas eletrônicas.

Interligando

Esta seção apresenta, por meio de textos, recursos visuais diversificados e atividades, assuntos relevantes da área de Matemática e suas Tecnologias, relacionando-os com outros temas da própria área ou de outras áreas do conhecimento.

História da Matemática

Os textos deste boxe põem você em contato com o processo de construção do conhecimento e a criatividade na resolução de problemas enfrentados pela humanidade ao longo da história, situando os acontecimentos na linha do tempo.

Educação financeira

Na seção há textos, imagens, gráficos e tabelas que abordam temas de Educação financeira em situações reais, incentivando a reflexão sobre atitudes que devem ser incorporadas à nossa rotina.

PROJETO

A seção oferece, por meio de questões e situações-problema, a oportunidade de você e os colegas colocarem em prática conhecimentos e habilidades, seguindo um percurso construído coletivamente. Os projetos propostos abordam temas relevantes para os contextos juvenis e sociais, mobilizando o trabalho com diferentes Temas Contemporâneos Transversais e com os Objetivos do Desenvolvimento Sustentável.

PROJETO

Horta comunitária

Leia o texto a seguir, que trata do direito à alimentação saudável.

Com alta de preços, nutricionista diz que acesso a alimentos é direito constitucional

[...] Vanille Pessoa, que integra a diretoria da Associação Brasileira de Nutrição, falou à ONU News sobre as mudanças que a alta no preço dos alimentos tem provocado na dieta do país. [...]

[Ela] citou dados oficiais que indicam 33 milhões de pessoas em situação de fome. A nutricionista lembra que o direito à alimentação está previsto na Constituição federal. [...]

Vanille Pessoa explica que a garantia ao alimento não assegura uma comida saudável e de qualidade. O Guia Alimentar para a População Brasileira e a Organização Mundial da Saúde, OMS, descrevem que a base de uma dieta saudável deve ser composta por alimentos naturais ou minimamente processados. [...]

Vanille Pessoa afirma que ainda há no Brasil o que o setor chama de "desertos alimentares", ou seja, locais onde há pouca disponibilidade de alimentos in natura. Isso impõe um desafio, mas também uma oportunidade para o fomento da produção e consumo locais. [...]

Sua avaliação está em linha com a análise da diretora regional do Fundo Internacional para o Desenvolvimento Agrícola, Fida, Para Rossana Polastri, o preço em alta dos alimentos afeta particularmente as populações mais vulneráveis, que gastam uma fatia maior da renda na compra.

Ela recomenda que soluções inovadoras sejam promovidas, para a diversificação da produção e aumento de oferta de alimentos saudáveis, que melhorem o acesso dos pequenos produtores a mercados e alimentos de qualidade.

ONU News. Com alta de preços, nutricionista diz que acesso a alimentos é direito constitucional. Perspectiva global reportagem Rosmyse, 23 jan. 2023. Disponível em: https://tedi.net/9wtuyno. Acesso em: 27 jun. 2024.

Pensando em um projeto

Apesar do acesso a alimentação ser um direito, em 2023, 21,6 milhões de brasileiros enfrentavam dificuldade para adquirir alimentos, e desse total, 8,7 milhões ainda passavam fome. Além disso, muitos brasileiros têm uma dieta predominantemente composta de produtos processados e ultraprocessados e consomem pouca variedade de frutas, verduras e legumes.

Para aumentar o acesso da comunidade em torno do local onde você vive a alimentos in natura orgânicos e incentivar uma alimentação saudável, que tal propor a fundação de uma horta comunitária?

Fonte dos gráfico: Inquérito Nacional de Insegurança Alimentar no Contexto da Pandemia da COVID-19 no Brasil, coordenado pela Rede PENSSAN, Ibase e Ação da Cidadania, divulgado pela Fundação Getulio Vargas (FGV) e Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Casal colhendo beterrabas em horta comunitária.

Para começar

Organizem-se em 7 grupos, considerando a proximidade do local onde os integrantes vivem.

Plano de ação

Etapa 1

Pesquisem a regulamentação relacionada à criação de hortas comunitárias no Brasil e no município em que o projeto será desenvolvido. Identifiquem e registrem os espaços adequados para o cultivo na região de vocês e os requisitos e autorizações necessários.

Etapa 2

Elaborem um fluxograma descrevendo o processo que vocês devem seguir para criar a horta comunitária de acordo com as informações levantadas na etapa anterior.

Etapa 3

Determinem o local em que potencialmente será implementada a horta comunitária. Façam um esboço em escala da planta baixa desse local, mostrando medidas e outras informações importantes. Calculem também a medida de área do local, que será utilizada para o cálculo da quantidade total de insumos.

Etapa 4

Pesquisem qual é o tipo de clima e de solo da região em que vocês vivem. A partir disso, selecionem cultivos adequados para essas condições. Pesquisem também modelos de cultivo agroecológicos que evitem o aparecimento de pragas.

Etapa 5

Estipulem a quantidade de terra, de adubo, de sementes e de outros insumos, de acordo com a realidade da sua comunidade, que vocês utilizarão para o plantio no começo da horta. Depois, façam uma estimativa da quantidade de água diária necessária para manter a horta.

Etapa 6

Coletivamente, criem o roteiro de um vídeo convidando as pessoas da comunidade a criar uma horta. Esse roteiro deve contemplar:

- bons motivos para participar da criação da horta comunitária;
- o local onde se planeja criar a horta;
- o passo a passo da criação da horta;
- os insumos necessários para a criação da horta;
- um pedido de colaboração com insumos para os que têm sementes, terra ou algum outro item necessário;
- um convite para a participação na horta, indicando como os interessados podem se inscrever e como podem contribuir para o projeto.

Etapa 7

Gravem o vídeo de acordo com o roteiro que vocês elaboraram. Depois, divulguem-no para as pessoas da comunidade que vocês desejam alcançar.

Etapa 8

Com base na lista de interessados na horta comunitária e nas descrições de vocês, criem uma escala de trabalho semanal. Para isso, elaborem uma lista de tarefas e dividam-nas de acordo com a disponibilidade de cada participante.

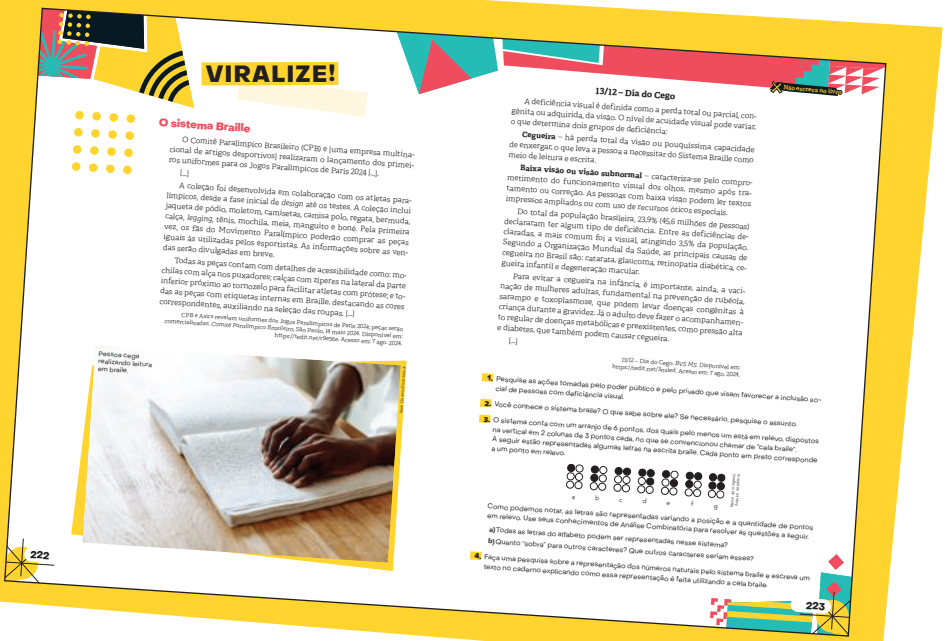
Produto final: um documento de fundação da horta, explicando onde ela se localiza e adicionando as informações coletadas nas etapas do projeto. Esse documento deve ser compartilhado com todos os inscritos no projeto e deve servir de guia para a criação e formalização da horta.

90

91

VIRALIZE!

Nesta seção constam textos de diferentes mídias, envolvendo alguns Temas Contemporâneos Transversais, e questões de interpretação e opinião pessoal com argumentação.



VIRALIZE!

O sistema Braille

O Comitê Paralímpico Brasileiro (CPB) e uma empresa multinacional de artigos desportivos] realizaram o lançamento dos primeiros uniformes para os Jogos Paralímpicos de Paris 2024 [...].

A coleção foi desenvolvida em colaboração com os atletas paralímpicos, desde a fase inicial de design até os testes. A coleção inclui jaqueta de pódio, moletom, camisetas, camisa polo, regata, bermuda, calça, legging, tênis, mochila, meia, manguito e boné. Pela primeira vez, os fãs do Movimento Paralímpico poderão comprar as peças iguais às utilizadas pelos esportistas. As informações sobre as vendas serão divulgadas em breve.

Todas as peças contam com detalhes de acessibilidade como: mochilas com alça nos puxadores; calças com zíperes na lateral da parte inferior próximo ao tornozelo para facilitar atletas com próteses; e todas as peças com etiquetas internas em Braille, destacando as cores correspondentes, auxiliando na seleção das roupas. [...]

CPB e Asics revelam uniformes dos Jogos Paralímpicos de Paris 2024; peças serão comercializadas. Comitê Paralímpico Brasileiro, São Paulo, 31 maio 2024. Disponível em: https://tedi.net/9e5ge. Acesso em: 7 ago. 2024.

Pessoa cega realizando leitura em braile.

222

13/12 – Dia do Cego

A deficiência visual é definida como a perda total ou parcial, congênita ou adquirida, da visão. O nível de acuidade visual pode variar, o que determina dois grupos de deficiência:

Cegueira – há perda total da visão ou pouquíssima capacidade de enxergar, o que leva a pessoa a necessitar do Sistema Braille como meio de leitura e escrita.

Baixa visão ou visão subnormal – caracteriza-se pelo comprometimento do funcionamento visual dos olhos, mesmo após tratamento ou correção. As pessoas com baixa visão podem ler textos impressos ampliados ou com uso de recursos óticos especiais.

Do total da população brasileira, 23,9% (46,6 milhões de pessoas) declararam ter algum tipo de deficiência. Entre as deficiências declaradas, a mais comum foi a visual, atingindo 3,5% da população. Segundo a Organização Mundial da Saúde, as principais causas de cegueira no Brasil são: catarata, glaucoma, retinopatia diabética, cegueira infantil e degeneração macular.

Para evitar a cegueira na infância, é importante, ainda, a vacinação de mulheres adultas, fundamental na prevenção de rubéola, sarampo e toxoplasmose, que podem levar doenças congênitas à criança durante a gravidez. Já o adulto deve fazer o acompanhamento regular de doenças metabólicas e preexistentes, como pressão alta e diabetes, que também podem causar cegueira.

[...]

13/12 – Dia do Cego. IFCE Mx. Disponível em: https://tedit.net/3ssled. Acesso em: 7 ago. 2024.

1. Pesquise as ações tomadas pelo poder público e pelo privado que visam favorecer a inclusão social de pessoas com deficiência visual.
2. Você conhece o sistema braile? O que sabe sobre ele? Se necessário, pesquise o assunto.
3. O sistema conta com um arranjo de 6 pontos, dos quais pelo menos um está em relevo, dispostos na vertical em 2 colunas de 3 pontos cada, no qual se convencionou chamar de "cela braile". A seguir estão representadas algumas letras na escrita braile. Cada ponto em preto corresponde a um ponto em relevo.

a b c d e f g

Como podemos notar, as letras são representadas variando a posição e a quantidade de pontos em relevo. Use seus conhecimentos de Análise Combinatória para resolver as questões a seguir.

a) Todas as letras do alfabeto podem ser representadas nesse sistema?

b) Quanto "sobra" para outros caracteres? Que outros caracteres seriam esses?

4. Faça uma pesquisa sobre a representação dos números naturais pelo sistema braille e escreva um texto no caderno explicando como essa representação é feita utilizando a cela braile.

223

Para fundamentar saberes

Para finalizar cada Unidade, propomos atividades do Enem e de vestibulares relacionadas aos conteúdos abordados. Em seguida, são propostas perguntas para que você reflita sobre o próprio aprendizado.

SUMÁRIO

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) 11

PRODUÇÕES EM FOCO 12

UNIDADE 1

SEQUÊNCIAS E MATEMÁTICA FINANCEIRA 14

Capítulo 1 – Sequências e progressões 16
Sequências numéricas 16
Termo geral 17
Lei de recorrência 17
Progressões aritméticas 18
Classificação de uma PA 19
Termo geral da PA 19
Soma dos *n* primeiros termos de uma PA 21
Progressões geométricas 23
Classificação de uma PG 23
Termo geral da PG 24
Soma dos *n* primeiros termos de uma PG 25
Educação financeira – Investimentos financeiros 27
Soma dos termos de uma PG infinita 29
Progressões e funções 30
Progressões e função constante 30
Progressão aritmética e função polinomial de 1º grau 31
Progressão geométrica e função exponencial 31
Planilhas eletrônicas 34
Como funciona a planilha eletrônica? 35
Sequências recursivas 36
Interligando – Transmissibilidade de doenças 38
Projeto – Empreendedorismo na escola 40

Capítulo 2 – Matemática comercial e financeira 42
Introdução 42
Aumentos e descontos 43
Variação percentual 44
Educação financeira – A Matemática e o trabalho: entendendo o holerite 47
Juro 49
Juro simples 50
Juro composto 53
Experimente utilizar uma planilha eletrônica para efetuar o cálculo do montante de um investimento financeiro 57
Compras à vista ou a prazo 59
Experimente utilizar uma planilha eletrônica para decidir a melhor opção financeira de pagamento 60
Valor atual de um conjunto de pagamentos 61
Amortização de financiamentos 63
Interligando – Planejamento financeiro e orçamento familiar 67
Juros e funções 69
Juro simples e função polinomial de 1º grau 69
Juro composto e função exponencial 69

Viralize! – Mais de 1 milhão de mulheres começaram a investir na B3 nos últimos 5 anos 72

Para fundamentar saberes 74

tete_escape/Shutterstock

O planejamento de gastos é fundamental para a boa saúde financeira.

UNIDADE 2

GRANDEZAS E MEDIDAS 76

Capítulo 3 – Sistema Internacional de Unidades 78
Grandezas de base e unidades de medida 78
Interligando – Hierarquia do Sistema Metrológico 81
Grandezas derivadas e unidades de medida 82
Múltiplos e submúltiplos decimais de unidades de medida 86
Conversão de unidades de medida 87
Notação científica 88
Projeto – Horta comunitária 90
Unidades que são aceitas para uso científico 92
Educação financeira – Consumo de energia elétrica 96

Capítulo 4 – Outras unidades de medida 98
Acurácia e estimativa 98
Estimativa 99
Interligando – Definição das unidades fundamentais 102
Instrumentos de medida 103
Algarismos significativos exatos e algarismos duvidosos 106
Operações com algarismos significativos 107
Arredondamento 107
Adição e subtração 109
Multiplicação e divisão 109
Comparações entre grandezas 111
Viralize! – Sacas de café 113
Para fundamentar saberes 114

UNIDADE 3

PENSAMENTO COMPUTACIONAL 116

Capítulo 5 – Algoritmos e fluxogramas 118
Lógica formal 118
Conectivos lógicos 119
Tabela-verdade 122
Proposição condicional 124
Algoritmos 127
Fluxogramas 132
Projeto – Guia alimentar para a comunidade 137
Pseudocódigos 139
Interligando – Unidades de armazenamento e velocidade de transferência de dados 145

Capítulo 6 – Noções de programação 146
Desenvolvimento da solução digital 146
Scratch 149
Interligando – Criptografia 157
Implementando algoritmos interativos no *Scratch* 158
Viralize! – Bolhas digitais 164
Para fundamentar saberes 166

UNIDADE 4

COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE 168

Capítulo 7 – Análise combinatória 170
Princípio fundamental da contagem 170
Princípio aditivo da contagem 175
Fatorial de um número natural 179
Interligando – Uma breve introdução à teoria dos grafos 181
Agrupamentos simples 183
Permutações 183
Arranjos 186
Combinações 186
Permutações com elementos repetidos 193

Capítulo 8 – Probabilidade 196
Fenômenos aleatórios e fenômenos determinísticos 196
Espaço amostral e evento 197
Espaço amostral 197
Evento 199
Frequência relativa e probabilidade 202
Definição de probabilidade 202

Carlos Barquero/Shutterstock

Um grupo de 4 jovens pode se organizar em duplas de 6 maneiras distintas.

Probabilidades em espaços amostrais equiprováveis 204
Propriedades 204
Projeto – Relatório de catástrofes climáticas 210
Probabilidade da união de dois eventos 212
Probabilidade condicional 213
Probabilidade da intersecção de dois eventos 215
Teorema da multiplicação 215
Eventos independentes 216
Interligando – Probabilidades e os métodos contraceptivos 220
Viralize! – O sistema Braille 222
Para fundamentar saberes 224

UNIDADE 5

GEOMETRIA ANALÍTICA, TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E LADRILHAMENTO 226

Capítulo 9 – Noções de Geometria analítica 228
Plano cartesiano 228
O ponto 229
Distância entre 2 pontos 231
Interligando – Coordenadas do GPS 234
Ponto médio de um segmento de reta 236
Condição de alinhamento de 3 pontos 238
A reta 239
Equação geral da reta 240
Retas e funções 243
Inclinação de uma reta 245
Coeficiente angular 246
Equação reduzida de uma reta 247
Função afim e a equação reduzida da reta 250
Paralelismo 251
Perpendicularidade 253
Projeto – Mapeamento de presença pública na região 256

Capítulo 10 – Transformações geométricas no plano 258
Introdução 258
Isometrias 260
Reflexão 260
Translação 264
Rotação 269
Composição de isometrias 272
Homotetias 275
Interligando – A Geometria fractal 282

Capítulo 11 – Ladrilhamento do plano 284
Mosaicos 284
Ladrilhamentos regulares 285
Interligando – Ladrilhamentos de Escher 286
Experimente compor um ladrilhamento usando um *software* de Geometria dinâmica 288
Ladrilhamentos semirregulares 289
Viralize! – Sona, a arte de contar histórias por meio de desenhos 292
Para fundamentar saberes 294

RESPOSTAS 296
LISTA DE SIGLAS 307
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS 308
TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIOS 310

Taj Mahal, em Agra, Índia.
Foto de 2022.

Alexander Lupin/Adobe Stock

OBJETOS EDUCACIONAIS DIGITAIS (OEDs)

Cidades e comunidades sustentáveis 15

A espiral áurea 37

Um percentual especial: aumentos e reduções 43

A história do dinheiro 53

O número de Euler 70

Notação científica 88

Funcionamento de um chuveiro elétrico 97

Computadores ao longo do tempo 141

Armazenamento em nuvem 145

Linguagens de programação 149

Análise combinatória 171

Probabilidade: testes de múltipla escolha 204

Transcrição de áudios 310

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A BNCC é o documento que define as aprendizagens mínimas que o estudante deve desenvolver em cada etapa da Educação Básica, de modo a estabelecer um currículo básico comum a todos os estudantes brasileiros.

Esse documento foi elaborado considerando os conhecimentos e as habilidades essenciais para o desenvolvimento dos estudantes na sociedade do século XXI e visando garantir uma educação de qualidade e com equidade.

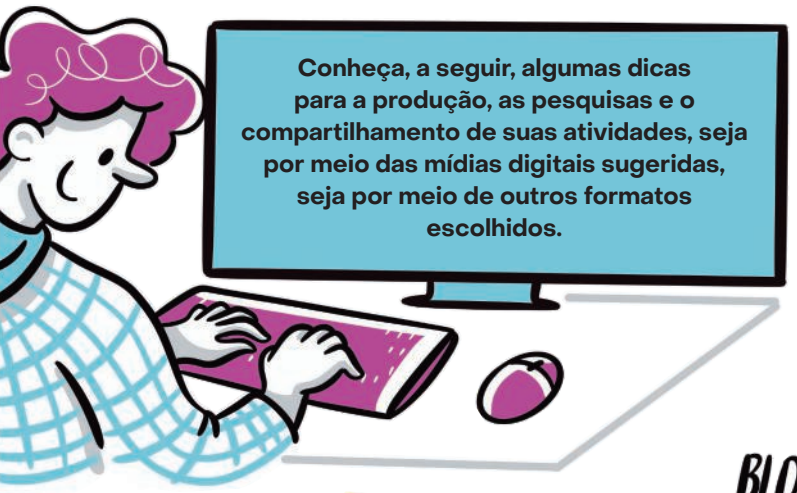
Ao longo dos 3 Volumes desta coleção, todas as competências e as habilidades da BNCC e os Temas Contemporâneos Transversais são trabalhados. A seguir apresentamos aqueles que são trabalhados em cada Unidade deste Volume.

Os textos correspondentes aos códigos indicados podem ser consultados no documento oficial da BNCC. Disponível em: https://tedit.net/0blon1. Acesso em: 4 ago. 2024.

VOLUME 3

Unidade	Competência geral da Educação Básica (CG)	Competência específica de Matemática e suas Tecnologias (CEMAT)	Habilidade de Matemática e suas Tecnologias (EM13MAT)	Tema Contemporâneo Transversal (TCT)
Unidade 1	CG01, CG04, CG10	CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03, CEMAT05	EM13MAT101; EM13MAT104; EM13MAT203; EM13MAT301; EM13MAT302; EM13MAT303; EM13MAT304; EM13MAT507; EM13MAT508	*Educação Ambiental*; *Educação Financeira*; *Educação Fiscal*; *Educação para o Consumo*; *Saúde*; *Trabalho*
Unidade 2	CG01, CG02, CG05, CG07, CG09, CG10	CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03	EM13MAT103; EM13MAT201; EM13MAT313; EM13MAT314	*Educação Alimentar e Nutricional*; *Educação Ambiental*; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação Financeira*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Vida Familiar e Social*
Unidade 3	CG07	CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03, CEMAT04	EM13MAT103; EM13MAT202; EM13MAT313; EM13MAT315; EM13MAT316; EM13MAT405	*Ciência e Tecnologia*; *Educação Alimentar e Nutricional*
Unidade 4	CG07, CG10	CEMAT01, CEMAT03, CEMAT05	EM13MAT102; EM13MAT106; EM13MAT310; EM13MAT311; EM13MAT312; EM13MAT511	*Ciência e Tecnologia*; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação para o Trânsito*; *Vida Familiar e Social*; *Saúde*
Unidade 5	CG01, CG02, CG03, CG04, CG05, CG09	CEMAT01, CEMAT03, CEMAT05	EM13MAT105; EM13MAT307; EM13MAT308; EM13MAT505	*Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*

PRODUÇÕES EM FOCO



Conheça, a seguir, algumas dicas para a produção, as pesquisas e o compartilhamento de suas atividades, seja por meio das mídias digitais sugeridas, seja por meio de outros formatos escolhidos.

- Escolha a mídia (digital ou não) que será usada e o público-alvo a quem ela se destina.
- Defina o formato da mídia e como o conteúdo deve ser apresentado.
- Em suas pesquisas, só use informações de fontes confiáveis.
- Ao final, revise detalhadamente cada aspecto de seu trabalho (texto, imagens, fontes, etc.).

BLOG

Blog é um *site* que permite postagens de textos, imagens, vídeos, áudios e *links*, possibilitando a interação com o público por meio de comentários.

- Você pode usar qualquer estilo textual (conto, reportagem, crônica, entrevista, poesia, etc.) para abordar o assunto escolhido.
- Hospede o *blog* em um *site* que ofereça endereço e acesso. Há vários *sites* que dispõem gratuitamente desses serviços.

VÍDEO

- Elabore um roteiro com todos os itens que devem ser observados.
- Escolha o local e o cenário para a gravação.
- Use um *smartphone* para gravar os sons e as imagens. Dica! Você pode utilizar outro *smartphone* como microfone ou o microfone de um fone de ouvido.
- Insira legendas da locução.
- Pesquise na internet aplicativos ou *softwares* gratuitos para fazer a edição do vídeo.
- Não esqueça de inserir uma trilha sonora (gratuita) ao vídeo.

INFOGRÁFICO

Trata-se de um recurso visual que combina textos e imagens para transmitir uma mensagem.

- Os textos devem ser curtos e objetivos.
- As imagens (fotografias, ilustrações, gráficos e mapas) e o texto devem ser complementares.
- Para começar, elabore um rascunho do que pretende colocar no infográfico (textos e imagens).
- Junto a cada imagem, identifique o nome do fotógrafo ou do ilustrador.
- Existem aplicativos e programas *on-line* gratuitos que permitem fazer infográficos digitalmente. Escolha um deles e siga as instruções do tutorial.

Gabi Emmerich/Arquivo da editora

PODCAST

Podcasts são arquivos de áudio que podem ser ouvidos tanto *on-line* como *off-line*. Podem ser entrevistas, contos, debates, etc.

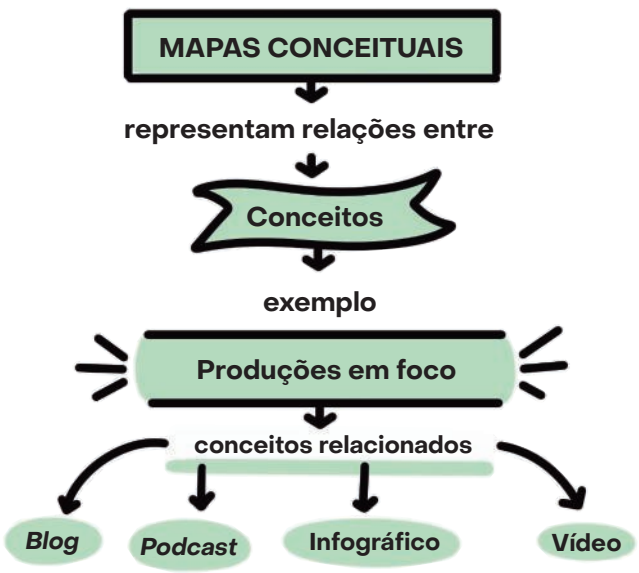
- Seja responsável quanto ao conteúdo que vai publicar, pois qualquer pessoa poderá acessá-lo.
- Prepare o texto e um roteiro sobre o tema escolhido e que possa ser consultado durante a gravação.
- A narração deve ser clara e organizada.
- Procure na internet aplicativos e *softwares* gratuitos para gravar e editar o seu *podcast*.

CITAÇÃO

- Escolha um buscador de *sites* e digite nele as palavras-chave de sua pesquisa. Vai ser apresentada uma lista de *sites*.
- Dê preferência aos *sites* governamentais, de instituições de Ensino Superior e de ONGs, além de revistas e jornais de grande circulação.
- Escolha os *sites* com data de publicação ou de atualização mais recentes.
- Cite os nomes dos *sites* consultados em seu trabalho.
- Na parte final do material produzido (escrito ou oral), cite todas as fontes de onde obteve as informações de suas pesquisas: livro, revista, *site*, jornal, documentário, etc.
- Para citar um *site*, indique o título da matéria, o nome do *site*, o ano de publicação, o endereço do *site* e a data de acesso.

MAPAS CONCEITUAIS

São diagramas que indicam as relações entre conceitos e palavras-chave. O conceito principal deve vir no topo do mapa conceitual. Ele se conecta aos conceitos relacionados por linhas, que trazem os conectivos (palavras ou frases) que explicam a relação entre eles.

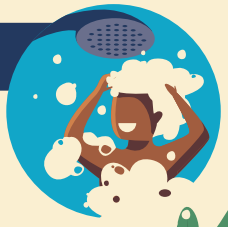


8 ações que contribuem para a economia de dinheiro e ajudam o planeta

1 Desligue aparelhos elétricos que não estiverem sendo usados.

2 Troque as lâmpadas incandescentes por lâmpadas econômicas.

3 Troque as pilhas descartáveis por pilhas recarregáveis.



4 Não tome banhos demorados.

5 Pratique o consumo consciente.

6 Verifique a existência de vazamentos de água ou torneiras pingando.

7 Reutilize embalagens.

8 Aproveite todas as partes dos alimentos.

As imagens não estão representadas em proporção.

Cássio Bittencourt/Arquivo da editora

Esta abertura favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Ambiental* e *Educação Financeira*.

Sugerimos que esta abertura seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Unidade 1

SEQUÊNCIAS E MATEMÁTICA FINANCEIRA

Mapa clicável

Economia e sustentabilidade

A expressão “rasgar dinheiro” é usada cotidianamente para se referir ao desperdício de dinheiro. Ela é usada, por exemplo, quando alguém paga por um serviço que não utiliza ou compra um produto que estraga com pouco ou nenhum tempo de uso. No entanto, muitas vezes “rasgamos dinheiro” sem perceber, e, por isso, é importante ficarmos atentos aos diversos fatores que podem causar desperdício.

Reduzir ou eliminar o desperdício de água, de energia elétrica e de alimentos, por exemplo, são excelentes maneiras de fazer seu dinheiro render mais. Isso significa usar seus recursos de maneira mais eficiente, ao mesmo tempo que você contribui para a sustentabilidade dos recursos naturais.

Pequenas ações cotidianas podem gerar grandes economias ao longo do mês. Diminuir o tempo do banho (independentemente de ser a gás ou elétrico, há o desperdício de água), trocar lâmpadas incandescentes por lâmpadas econômicas, desligar aparelhos eletrônicos quando não estão em uso e optar por eletrodomésticos mais eficientes no momento da compra podem resultar em uma conta de energia elétrica significativamente menor, além de colaborar positivamente com o meio ambiente.

Não escreva no livro

1. Quais medidas você e seus familiares adotam no dia a dia para economizar dinheiro e promover a sustentabilidade? Resposta pessoal.
2. Converse com os colegas e o professor sobre quais das sugestões apresentadas nesta abertura de Unidade podem ser aplicadas na escola para tornar o ambiente mais sustentável. Há outras sugestões de mudança ou adaptação que podem contribuir para economizar e, ao mesmo tempo, tornar o ambiente mais sustentável? Resposta pessoal.

capítulo 1

Sequências e progressões

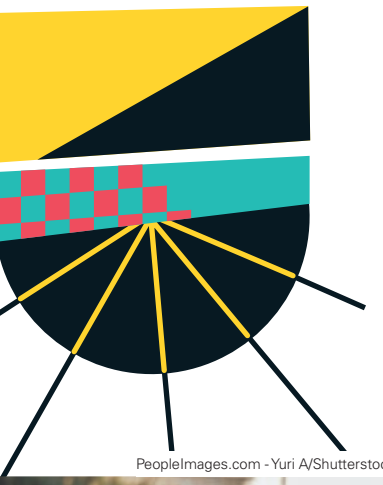
Sequências numéricas

A tabela a seguir mostra o número total de gols marcados nas 12 primeiras rodadas de um campeonato de futebol.

Número de gols das rodadas de 1 a 12 do campeonato de futebol feminino

Rodada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de gols	23	29	31	27	21	25	34	29	28	25	37	26

Dados elaborados para fins didáticos.



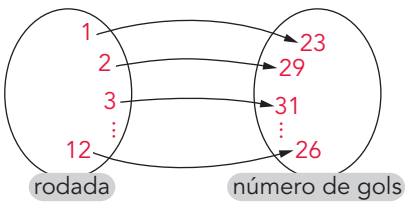
PeopleImages.com - Yuri A/Shutterstock

Partida de futebol feminino.

Uma maneira de relacionar as variáveis rodada e número de gols é definir uma função que associe a cada número de rodada a quantidade de gols feitos nela.

Note que o domínio dessa função é:

$\{1, 2, 3, \ldots, 10, 11, 12\}$



Banco de imagens/ Arquivo da editora

De modo geral, os valores assumidos por uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ determinam uma **sequência numérica infinita**. Se o domínio de f é $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, em que $n \in \mathbb{N}^*$, temos uma **sequência numérica finita**.

É comum representar uma sequência numérica usando os elementos do conjunto imagem da função, dispostos na forma $(f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots)$.

No exemplo anterior, (23, 29, 31, 27, 21, 25, 34, 29, 28, 25, 37, 26) representa a sequência numérica finita do número de gols, rodada a rodada.

Em geral, sendo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ números reais, a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, …, $f(n) = a_n$, … está associada à sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$.

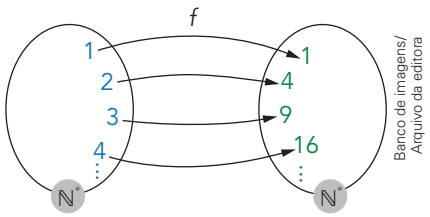
O índice n indica a posição do elemento na sequência. Assim, o 1º termo é indicado por a_1, o 2º é indicado por a_2, e assim por diante.

Observação

Neste capítulo, iremos considerar apenas sequências infinitas ou finitas cujos termos sejam números reais, ou seja, sequências associadas a funções $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ ou funções $f: \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$.

Termo geral

Vamos considerar a função $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ que associa a cada número natural não nulo o quadrado desse número.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Essa função está associada à sequência (1, 4, 9, 16, ...), em que:

$f(1) = a_1 = 1^2 = 1$ $\qquad$ $f(4) = a_4 = 4^2 = 16$

$f(2) = a_2 = 2^2 = 4$ $\qquad$ ⋮ ⋮ ⋮

$f(3) = a_3 = 3^2 = 9$ $\qquad$ $f(n) = a_n = n^2$

A expressão $a_n = n^2$ é a **lei de formação**, ou o **termo geral**, dessa sequência, pois permite o cálculo de qualquer termo da sequência por meio da atribuição dos valores possíveis para n (ou seja, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ...).

Atividades resolvidas

1. Encontre os 5 primeiros termos da sequência numérica cujo termo geral é:

$$a_n = 1{,}5 \cdot n + 8; \text{ com } n \in \mathbb{N}^*.$$

Solução:

Para calcular os 5 primeiros termos dessa sequência, é preciso atribuir os valores sucessivamente para n (ou seja, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$).

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1{,}5 \cdot 1 + 8 = 9{,}5$ $\qquad$ $n = 4 \Rightarrow a_4 = 1{,}5 \cdot 4 + 8 = 14$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 1{,}5 \cdot 2 + 8 = 11$ $\qquad$ $n = 5 \Rightarrow a_5 = 1{,}5 \cdot 5 + 8 = 15{,}5$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 1{,}5 \cdot 3 + 8 = 12{,}5$

2. A lei de formação dos elementos de uma sequência de números reais é $a_n = 3n - 16$, com $n \in \mathbb{N}^*$. O número 113 pertence a essa sequência?

Solução:

Se quisermos saber se o número 113 pertence à sequência, devemos substituir a_n por 113 e verificar se a equação obtida tem solução em $\mathbb{N}^*$.

$$113 = 3n - 16 \Rightarrow 3n = 129 \Rightarrow n = 43, \text{ e temos } 43 \in \mathbb{N}^*.$$

Concluímos, então, que o número 113 pertence à sequência e ocupa a 43ª posição.

Lei de recorrência

Considere a lei de uma função definida por $f(n) = k$, sendo $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, para exemplificar uma sequência numérica constante. Nesse caso, o domínio dessa função é $\mathbb{N}^*$. Exemplos: $f(n) = -2$ está associada à sequência $(-2, -2, -2, -2, -2, \ldots)$, $f(n) = 3$ está associada à sequência $(3, 3, 3, 3, \ldots)$, etc.

Muitas vezes conhecemos o 1º termo de uma sequência e uma lei que permite calcular cada termo a_n (com $n \geqslant 2$) a partir do anterior a_{n-1} (ou a partir de outros termos anteriores). Quando isso ocorre, dizemos que a sequência é determinada por uma **lei de recorrência**.

Vamos construir, por exemplo, a sequência definida pela relação de recorrência a seguir.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

A segunda sentença indica como obter a_2 a partir de a_1, a_3 a partir de a_2, a_4 a partir de a_3, etc. Para isso, é preciso atribuir valores a n.

$n = 1 \Rightarrow a_{1+1} = a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow a_2 = 2$ $\qquad$ $n = 3 \Rightarrow a_{3+1} = a_4 = 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow a_4 = 8$

$n = 2 \Rightarrow a_{2+1} = a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow a_3 = 4$ $\qquad$ $n = 4 \Rightarrow a_{4+1} = a_5 = 2 \cdot a_4 = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow a_5 = 16$

Assim, a sequência indicada é (1, 2, 4, 8, 16, ...).

4. $a_1 = 2$; $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$; $a_3 = 3 \cdot 6 = 18$; $a_4 = 3 \cdot 18 = 54$; $a_5 = 3 \cdot 54 = 162$; $a_6 = 3 \cdot 162 = 486$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

5. O 3º termo da sequência é $f(3) = 3^3 + 3^2 + 1 = 37$ e o 6º termo da sequência é $f(6) = 6^3 + 6^2 + 1 = 253$. Portanto, a sequência é (3, 13, 37, 81, 151, 253, ...).

1. Considere a sequência definida por $a_n = -3 + 5n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Determine:

a) a_2 **b)** a_4 **c)** a_{11}

c) $a_{11} = -3 + 5 \cdot 11 = 52$

a) $a_2 = -3 + 5 \cdot 2 = 7$ **b)** $a_4 = -3 + 5 \cdot 4 = 17$

2. Represente cada função definida a seguir usando os 4 primeiros elementos do conjunto imagem dela.

a) $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ que associa a cada número natural não nulo o triplo do sucessor.

b) $g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ tal que $g(x) = x^2 - 2x + 4$.

(6, 9, 12, 15, ...)

(3, 4, 7, 12, ...)

3. Considere o termo geral de uma sequência $a_n = 143 - 4n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Qual é a soma dos 3 primeiros termos? 405

b) Os números 71, –345 e –195 pertencem à sequência? Em caso afirmativo, determine as posições. 71: sim, 18º termo; –345: sim, 122º termo; –195: não.

4. Determine o 6º termo da sequência definida pela lei de recorrência:

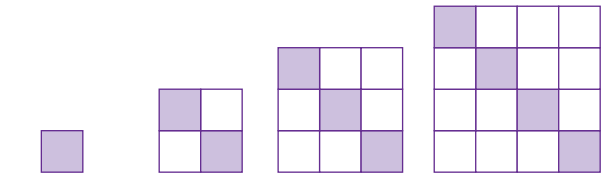
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n, \text{ com } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

5. Seja $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n^3 + n^2 + 1$. Ao representar a sequência associada a f, um estudante apresentou a seguinte resolução:

(3, 13, [illegible], 81, 151, [illegible], ...)

Por algum motivo, dois números da sequência saíram borrados. Determine-os e reescreva a sequência.

6. Considere a sequência de imagens a seguir, na qual estão representados os 4 primeiros termos.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Imagem 1. Imagem 2. Imagem 3. Imagem 4.

Determine: **a)** A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) para a 5ª e a 6ª imagem da sequência, o número total de quadradinhos, o número de quadradinhos em branco e o número de quadradinhos coloridos;

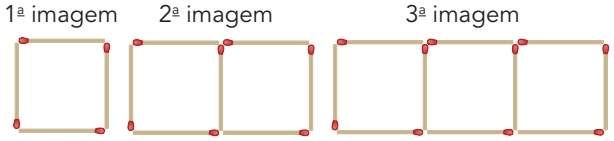
b) o termo geral da sequência correspondente ao número total de quadradinhos de cada imagem; $a_n = n^2$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c) o termo geral da sequência correspondente ao número total de quadradinhos em branco de cada imagem; $a_n = n^2 - n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

d) a posição do termo que representa a imagem que contém 90 quadradinhos em branco. 10ª posição.

Progressões aritméticas

Vamos analisar as imagens a seguir, que apresentam a construção de quadrados justapostos usando palitos, e tentar responder a algumas perguntas.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

- Mantendo o padrão apresentado, que regularidade você verifica?
- Quantos palitos são usados na 15ª imagem?
- Qual é a posição da imagem formada com 493 palitos?

Para responder a questões como essas, desenvolveremos o conceito de **progressão aritmética**.

Caso julgue pertinente, reserve um tempo para que os estudantes tentem resolver as questões apresentadas. Assim, eles deverão concluir que o número de palitos aumenta de 3 em 3, a partir da 2ª imagem; na 15ª imagem haverá 46 palitos; e na 164ª posição haverá 493 palitos.

Pense nisto: $a_n = 3n + 1$, sendo a_n a quantidade de palitos e $n \in \mathbb{N}^*$; $b_n = n$, sendo b_n a quantidade de quadrados e $n \in \mathbb{N}^*$.

Pense nisto

Qual é o termo geral da sequência das quantidades de palitos? Qual é o termo geral da sequência que representa a quantidade de quadrados formados?

Progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior adicionado a uma constante real r, chamada **razão** da PA.

Exemplos:

a) $(-6, -1, 4, 9, 14, 19)$ é uma PA de razão $r = 5$.

b) $(2; 2{,}3; 2{,}6; 2{,}9; \ldots)$ é uma PA de razão $r = 0{,}3$.

c) $\left(0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1, \ldots\right)$ é uma PA de razão $r = -\frac{1}{3}$.

d) $(7, 7, 7, 7, \ldots)$ é uma PA de razão $r = 0$.

Classificação de uma PA

De acordo com a razão, podemos classificar uma PA da seguinte maneira.

- Se $r > 0$, então cada termo, a partir do segundo, é maior do que o anterior; isto é, $a_n > a_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Dizemos, então, que a PA é **crescente** (como os itens **a** e **b** dos exemplos anteriores).
- Se $r < 0$, então cada termo, a partir do segundo, é menor do que o anterior; isto é, $a_n < a_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Dizemos, então, que a PA é **decrescente** (como o item **c** dos exemplos anteriores).
- Se $r = 0$, então todos os termos da PA são iguais. Dizemos, então, que ela é **constante** (como o item **d** dos exemplos anteriores).

Termo geral da PA

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da PA conhecendo apenas o 1º termo e a razão. Seja uma PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r. Temos:

$a_2 - a_1 = r \Rightarrow a_2 = a_1 + r$

$a_3 - a_2 = r \Rightarrow a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 - a_3 = r \Rightarrow a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

De modo geral, o termo a_n, que ocupa a n-ésima posição na sequência, é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Essa expressão, conhecida como **fórmula do termo geral da PA**, possibilita-nos expressar qualquer termo da PA em função de a_1 e r. Assim, podemos escrever, por exemplo:

- $a_4 = a_1 + 3r$
- $a_{12} = a_1 + 11r$
- $a_{32} = a_1 + 31r$

Atividades resolvidas

3. Calcule o 20º termo da PA $(26, 31, 36, 41, 46, \ldots)$.

Solução:

Sabemos que $a_1 = 26$ e $r = 31 - 26 = 5$.

Usando a fórmula do termo geral, temos:

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1)r \Rightarrow a_{20} = 26 + 19 \cdot 5 \Rightarrow a_{20} = 121$$

Pense nisto: Considerando $(_, _, _, _, _, _, a_7, _, _, a_{10})$, temos:

$a_7 + r = a_8$

$a_7 + 2r = a_9$

$a_7 + 3r = a_{10}$

Então, basta calcular $a_{10} = a_7 + 3r$.

Não escreva no livro

Pense nisto

Como podemos expressar o 10º termo de uma PA em função apenas do 7º termo e da razão?

Pense nisto: Apesar de os 3 primeiros termos coincidirem, temos $a_4 = 11$ e $b_4 = 17$, ou seja, são diferentes. Portanto, não podemos dizer que (–1, 3, 7, ...) é uma PA sem que sejam dadas mais informações sobre essa sequência.

O objetivo desta atividade é alertar os estudantes do risco quando se analisa, de maneira precipitada, uma sequência considerando apenas os 2 ou 3 primeiros termos, sem levar em conta o termo geral.

Pense nisto

Analisando a sequência (–1, 3, 7, ...), compare os quatro primeiros termos de $a_n = 4n - 5$ com os de $b_n = n^3 - 6n^2 + 15n - 11$, com $n \in \mathbb{N}^*$. O que você conclui disso?

4. Determine $x \in \mathbb{R}$ de modo que a sequência $(x + 5, 4x - 1, x^2 - 1)$ seja uma PA.

Solução:

Como $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, podemos escrever:

$$(4x - 1) - (x + 5) = (x^2 - 1) - (4x - 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x - 6 = x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

As raízes dessa equação são $x = 1$ e $x = 6$.

Podemos verificar que, para $x = 1$, a PA é (6, 3, 0) e, para $x = 6$, é (11, 23, 35).

14. Temos (73, 75, 77, ..., 467). Assim: $467 = 73 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow \frac{394}{2} = n - 1 \Rightarrow n = 198$; ou seja, 198 números.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

7. Quais das sequências seguintes podem representar progressões aritméticas? Alternativas **b**, **c** e **e**.

a) (0, –7, 7, –14, 14, ...)

b) (–8, 0, 8, 16, 24, 32, ...)

c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \ldots\right)$

d) (–30, –36, –41, –45, ...)

e) $\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots\right)$

8. Dada a PA (28, 36, 44, 52, ..., a_n, ...), determine:

a) o 8º termo;

b) o 19º termo;

c) a_{31};

d) o termo geral.

8. a) $a_8 = a_1 + 7r = 28 + 7 \cdot 8 = 84$

b) $a_{19} = a_1 + 18r = 28 + 18 \cdot 8 = 172$

c) $a_{31} = a_1 + 30r = 28 + 30 \cdot 8 = 268$

d) $a_n = 28 + (n - 1) \cdot 8 = 28 + 8n - 8 = 8n + 20$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Durante um treinamento de 30 dias para uma prova de longo percurso, um atleta corre sempre 400 m a mais que a medida de distância percorrida no dia anterior. Sabe-se que no 6º dia ele correu 3,2 km. Qual foi a medida de distância percorrida pelo atleta no 2º dia? 1 600 m

10. Uma loja de tecidos tinha, em janeiro de 2023, um estoque de 5100 m de certo tecido. A cada mês, o estoque diminuiu exatamente 300 m até zerar.

a) Em que mês e ano o estoque desse tecido foi igual a 1200 m? Fevereiro de 2024.

b) Em que mês e ano acabou o estoque? Junho de 2024.

11. Escreva os cinco primeiros termos da PA em que $a_1 + a_3 + a_4 = 0$ e $a_6 = 40$. –20, –8, 4, 16 e 28.

12. Qual é a razão da PA dada pelo termo geral $a_n = 310 - 8n$, com $n \in \mathbb{N}^*$?

13. Determine o valor de x em cada caso, sabendo que a sequência é uma PA. $x = 4$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

a) $(3x - 5, 3x + 1, 25)$ $x = 6$

b) $(x + 3, x^2, 6x + 1)$

12. $\begin{cases} a_1 = 310 - 8 = 302 \\ a_2 = 310 - 16 = 294 \end{cases} \Rightarrow r = a_2 - a_1 = 294 - 302 = -8$

14. Há quantos números ímpares entre 72 e 468?

15. Na semana do dia 14/11, o Dia Mundial de Combate ao Diabetes, uma escola promoveu um mutirão de saúde para testar o nível glicêmico dos estudantes do Ensino Médio. Foram distribuídas senhas numeradas de 1 a 380, e cada estudante recebeu uma.

a) No 1º dia, fizeram o exame os estudantes cuja senha fosse algum número múltiplo de 3. Quantos estudantes fizeram o exame nesse 1º dia? 126 estudantes.

b) No 2º dia, foi decidido que apenas os estudantes identificados por um múltiplo de 7 fariam o exame. Quantos fizeram o exame no 2º dia considerando que todos os estudantes que foram convocados no 1º dia não realizaram novamente o exame? 36 estudantes.

16. A soma de 3 números consecutivos que compõem uma PA é 72, e o produto dos termos extremos é 560.

Troque ideias com um colega sobre como podemos representar 3 termos consecutivos quaisquer de uma PA e resolva essa atividade. Em seguida, escreva os 5 primeiros termos da PA indicada. Os números são 20, 24 e 28; (20, 24, 28, 32, 36) ou (28, 24, 20, 16, 12).

17. Em um triângulo, a medida do maior ângulo interno é 105°. Determine as todas as medidas dos ângulos internos desse triângulo sabendo que elas estão em PA. (15°, 60°, 105°)

18. As medidas dos lados de um triângulo retângulo, expressas em centímetros, são numericamente iguais aos termos de uma PA de razão 4. Qual é a medida da hipotenusa? 20 cm

Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Muitas foram as contribuições do alemão Carl Friedrich Gauss (1777–1855) à Ciência e, em particular, à Matemática. O interesse dele pela Matemática se manifestou desde cedo, perto dos 10 anos de idade. Conta-se que Gauss surpreendeu o professor dele ao responder, em pouquíssimo tempo, o valor da soma $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$.

Que ideia Gauss teria tido para calcular esse valor? Provavelmente ele notou que, na PA (1, 2, 3, ..., 98, 99, 100), vale a seguinte propriedade:

$$a_1 + a_{100} = 1 + 100 = 101$$
$$a_2 + a_{99} = 2 + 99 = 101$$
$$a_3 + a_{98} = 3 + 98 = 101$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{50} + a_{51} = 50 + 51 = 101$$

Assim, Gauss teria agrupado as 100 parcelas da adição em 50 pares de números cuja soma é 101, obtendo como resultado $50 \cdot 101 = 5\,050$.

Vamos agora utilizar essa ideia para uma PA qualquer, calculando a soma de seus *n* primeiros termos, que indicaremos por S_n.

Considerando $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ uma PA de razão *r*, podemos escrever:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n \quad \text{I}$$

Se escrevermos a soma I começando pela última parcela e terminando na primeira, obteremos II. Em seguida, fazemos I + II:

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n \quad \text{I} \\ + & S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \ldots + (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1 \quad \text{II} \\ \hline 2 \cdot S_n = & \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas}} \end{array}$$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

Considerando a situação apresentada no início do tópico "Progressões aritméticas", vamos determinar a quantidade total de palitos usada para construir as 20 primeiras imagens.

Temos a PA (4, 7, 10, 13, ...). Então, o 20º termo é:

$$a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow a_{20} = 4 + 19 \cdot 3 = 61$$

Assim, é preciso determinar:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(4 + 61) \cdot 20}{2} = 650$$

Precisamos, então, de 650 palitos.

Professor, reforce com os estudantes que a_1 e a_n são chamados **termos extremos** e os termos a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2}, a_4 e a_{n-3}, e assim por diante, são chamados **termos equidistantes dos extremos**.

Maya Shustov/Shutterstock

Na peça de crochê da foto, a cada rodada de pontos de mesma cor, a quantidade de pontos aumenta em 4. Sabendo a quantidade de linha necessária para cada ponto, é possível determinar quantos metros serão utilizados para produzir uma peça com 10 rodadas utilizando a propriedade da soma dos *n* primeiros termos de uma PA.

Observação

Em uma PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, a soma de 2 termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos termos extremos.

Observação

Podemos verificar a resposta encontrada no item **b** atribuindo valores para n (com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 1$).

- $n = 1$: a sequência é (1) e a soma é: $S_1 = 1 = 1^2$.
- $n = 2$: a sequência é (1, 3) e a soma é: $S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$.

E assim por diante.

Atividades resolvidas

5. Em relação à sequência dos números naturais ímpares, calcule:

a) a soma dos 50 primeiros termos;

b) a soma dos n primeiros termos.

Solução:

A sequência é a PA (1, 3, 5, 7, ...), em que $r = 2$.

a) $a_{50} = a_1 + (50 - 1)r \Rightarrow a_{50} = 1 + 49 \cdot 2 \Rightarrow a_{50} = 99$

Assim:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} \Rightarrow S_{50} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} \Rightarrow S_{50} = 2\,500$$

b) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = -1 + 2n$

Daí, $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(1 - 1 + 2n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = n^2$.

24. a) $n = 1 \Rightarrow S_1 = 18 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 = 15$; ou seja, $a_1 = 15$.
b) $n = 2 \Rightarrow S_2 = 18 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 24 \Rightarrow a_1 + a_2 = 24$. Como $a_1 = 15$: $15 + a_2 = 24 \Rightarrow a_2 = 9$; PA: (15, 9, 3, ...); ou seja, $r = -6$.
c) $a_{10} = 15 + 9 \cdot (-6) = -39$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

19. Calcule a soma dos 15 primeiros termos da PA (−45, −41, −37, −33, ...). $S_{15} = -255$

20. Calcule a soma dos 20 primeiros termos da PA (0,15; 0,40; 0,65; 0,9; ...). $a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{20} = 0{,}15 + 19 \cdot 0{,}25 = 4{,}9$; $S_{20} = \frac{(0{,}15 + 4{,}9) \cdot 20}{2} = 50{,}5$.

21. Para a compra de uma TV, pode-se optar por um dos seguintes planos.

- **Plano alfa**: entrada de R$ 400,00 e mais 13 prestações mensais crescentes, sendo a primeira de R$ 35,00, a segunda de R$ 50,00, a terceira de R$ 65,00, e assim por diante, de modo que o valor dessas prestações forme uma PA.
- **Plano beta**: 15 prestações mensais iguais de R$ 130,00 cada uma.

a) Em qual dos planos o custo total é maior? Plano alfa.

b) Qual deveria ser o valor da entrada do plano alfa para que, mantidas as demais condições, os custos totais fossem iguais nos dois planos? R$ 325,00

22. Em cada item a seguir, determine a soma pedida, sabendo que as parcelas formam uma PA.

a) 0,5 + 0,8 + 1,1 + ... + 9,2 145,5

b) 6,8 + 6,4 + 6,0 + ... + (−14) −190,8

23. Suponha que, em certo mês (com 30 dias), o número de queixas diárias registradas em um órgão de defesa do consumidor aumente segundo uma PA.
Sabendo que, nos 10 primeiros dias, houve 245 reclamações e, nos 10 dias seguintes, mais 745 reclamações, represente a sequência do número de queixas naquele mês.

(2, 7, 12, 17, 22, ..., 147)

24. A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por $S_n = 18n - 3n^2$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Determine:

a) o 1º termo da PA;

b) a razão da PA;

c) o 10º termo da PA.

25. Usando um fio de medida de comprimento L, é possível construir uma sequência de 16 quadrados cuja medida do lado, a partir do segundo quadrado, é 2 cm maior do que a medida do lado do quadrado anterior. Sabendo que, para a construção do sétimo quadrado, são necessários 68 cm de fio, determine a medida de comprimento de L.

$L = 1\,280$ cm $= 12{,}8$ m

Progressões geométricas

Você já imaginou a velocidade com que uma notícia – verdadeira ou falsa –, um boato, uma fotografia ou um vídeo podem ser compartilhados pelas redes sociais?

Suponha que, em certo dia, 2 amigos tenham criado uma conta em uma rede social para falar de saúde e bem-estar, com dicas, receitas de comida saudável, relatos de experiência pessoal, etc.

No dia seguinte, cada um desses amigos convidou 3 novos amigos para seguir o perfil. Cada um desses 3 novos amigos convidou, no outro dia, 3 outros novos amigos para seguir o perfil, e assim sucessivamente.

Progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante real q, chamada **razão** da PG.

Exemplos:

a) (4, 12, 36, 108, 324, 972, 2 916, 8 748) é uma PG de razão $q = 3$.

b) $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ é uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$.

c) $(2, -8, 32, -128, 512, \ldots)$ é uma PG de razão $q = -4$.

d) $\left(\sqrt{3}, 0, 0, 0, \ldots\right)$ é uma PG de razão $q = 0$.

Classificação de uma PG

Há 5 categorias de PG.

1ª) Crescente: cada termo, a partir do segundo, é maior do que o termo antecedente. Isso ocorre quando:

- $a_1 > 0$ e $q > 1$, como em $(3, 6, 12, 24, \ldots)$;
- $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$, como em $(-32, -16, -8, \ldots)$.

2ª) Decrescente: cada termo, a partir do segundo, é menor do que o termo antecedente. Isso ocorre quando:

- $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, como em $\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots\right)$;
- $a_1 < 0$ e $q > 1$, como em $(-2, -6, -18, -54, \ldots)$.

3ª) Constante: todos os termos são iguais. Isso ocorre quando:

- $q = 1$, como em $(19, 19, 19, 19, \ldots)$;
- $a_1 = 0$ e q é qualquer número real, como em $(0, 0, 0, \ldots)$.

4ª) Alternada ou **oscilante**: os termos são alternadamente positivos e negativos. Isso ocorre quando $q < 0$, como em $(-1, 2, -4, 8, \ldots)$.

5ª) Estacionária: é uma PG constante a partir do segundo termo. Isso ocorre quando $a_1 \neq 0$ e $q = 0$, como em $(7, 0, 0, 0, \ldots)$.

Comente com os estudantes que a razão de uma PG (0, 0, 0, ...) é indeterminada, pois $0 \cdot a = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$. Assim, qualquer número real pode ser a razão.

Não escreva no livro

Pense nisto

Em relação à situação envolvendo os 2 amigos e a criação de uma conta em uma rede social responda às perguntas a seguir.

a) Começando pelo dia em que a conta foi criada, escreva os 5 primeiros termos da sequência que representa o número diário de novos seguidores do perfil. 2, 6, 18, 54 e 162.

b) Que regularidade é possível notar nessa sequência?

Cada termo, a partir do segundo, é igual ao triplo do anterior.

Observação

- Uma PG cujo 1º termo é a_1 e cuja razão é q pode ser definida por meio da lei de recorrência $a_n = a_{n-1} \cdot q$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.
- Nos exemplos de PG apresentados, é possível notar que, se a PG não tem termos nulos, a razão é igual ao quociente entre um termo qualquer (a partir do segundo) e o termo antecedente, isto é:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

com $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 1$

Termo geral da PG

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da PG conhecendo apenas o 1º termo (a_1) e a razão (q).

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma PG. De acordo com a definição de PG, podemos escrever:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

De modo geral, o termo a_n, que ocupa a n-ésima posição na sequência, é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Essa expressão, conhecida como **fórmula do termo geral da PG**, nos permite expressar qualquer termo da PG em função do 1º deles, a_1, e da razão, q. Assim, temos, por exemplo:

- $a_6 = a_1 \cdot q^5$
- $a_{11} = a_1 \cdot q^{10}$
- $a_{29} = a_1 \cdot q^{28}$

Atividades resolvidas

6. Determine o 10º termo da PG $\left(\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots\right)$.

Solução:

Sabendo que $a_1 = \frac{1}{3}$ e calculando a razão entre dois termos consecutivos, encontramos $q = 3$. Assim, pela expressão do termo geral, podemos escrever:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{3} \cdot 3^9 = 3^8 = 6\,561$$

7. Determine $x \in \mathbb{R}$ a fim de que a sequência $(5x + 1, x + 1, x - 2)$ seja uma PG.

Solução:

$$q = \frac{x+1}{5x+1} = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow (x+1)^2 = (x-2) \cdot (5x+1) \Rightarrow 4x^2 - 11x - 3 = 0$$

As raízes dessa equação são $x_1 = 3$ e $x_2 = -\frac{1}{4}$.

Verificando: para $x = 3$, a PG é (16, 4, 1) e, para $x = -\frac{1}{4}$, é $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{9}{4}\right)$.

Pense nisto

Como podemos expressar o 7º termo de uma PG em função apenas do 4º termo e da razão?

Considerando:
$(_, _, _, a_4, _, _, a_7)$, temos:
$a_4 \cdot q = a_5$
$a_4 \cdot q^2 = a_6$
$a_4 \cdot q^3 = a_7$
Então, basta calcular $a_7 = a_4 \cdot q^3$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

26. Identifique as sequências que representam progressões geométricas. Alternativas **a**, **b**, **d** e **e**.

a) (3, 12, 48, 192, ...)

b) (−3, 6, −12, 24, −48, ...)

c) (5, 15, 75, 375, ...)

d) $\left(\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\right)$

e) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}, \ldots\right)$

f) $\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \ldots\right)$

27. Calcule a razão de cada uma das seguintes progressões geométricas:

a) (1, 2, 4, 8, 16, ...) — **a)** $q = \frac{8}{4} = 2$

b) $(10^{40}, 10^{42}, 10^{44}, 10^{46}, \ldots)$ — **b)** $q = \frac{10^{42}}{10^{40}} = 10^2 = 100$

c) (−2, 6, −18, 54, ...) — **c)** $q = \frac{6}{-2} = -3$

d) (5, −5, 5, −5, 5, ...) — **d)** $q = \frac{-5}{5} = -1$

e) (80, 40, 20, 10, 5, ...) — **e)** $q = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

f) $(10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, \ldots)$ — **f)** $q = \frac{10^{-2}}{10^{-1}} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

28. Qual é o 8º termo da PG (−1, 4, −16, 64, ...)?

$a_8 = a_1 \cdot q^7 = -1 \cdot (-4)^7 = (-1) \cdot (-16\,384) = 16\,384$

32. b) Em 6 anos: aproximadamente 520,2 mil unidades.
Em 9 anos: aproximadamente 884,34 mil unidades.

29. Em uma PG crescente, o 3º termo é igual a −80, e o 7º termo, −5. Qual é o 1º termo? $a_1 = -320$

30. Durante os primeiros meses, o número de acessos ao perfil de um comércio eletrônico em uma rede social aumentou semanalmente (desde a data em que o perfil ficou acessível), segundo uma PG de razão 3.
Sabendo que na 6ª semana foram registradas 1458 visitas, determine o número de visitas ao perfil registrado na 3ª semana. 54 visitas.

31. O número de bactérias de uma colônia dobra a cada hora. Sabendo que, na 5ª hora de observação, esse número igual a 4^{19}, determine:

a) o número de bactérias na colônia, na 1ª hora de observação (expresse o resultado como uma potência de base 2);

b) o número de bactérias esperado para a 10ª hora de observação (expresse o resultado como uma potência de base 2).
2^{34} bactérias.
2^{43} bactérias.

32. Uma empresa de *videogames* planeja aumentar as vendas de jogos à taxa de 20% ao ano nos próximos 10 anos. Atualmente, a produção é estimada em 180 mil jogos ao ano. Suponha que tal expansão realmente ocorra.

a) Classifique a sequência correspondente à produção anual de jogos nos próximos 10 anos. PG de razão $q = 1{,}2$.

b) Determine a produção daqui a 6 anos e a 9 anos. Considere $(1{,}2)^3 \simeq 1{,}7$.

33. Uma sequência de quadrados $(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots)$ é construída de modo que a medida do lado de cada um deles é $\frac{3}{2}$ da medida do lado do quadrado anterior. Sabendo que a medida de perímetro do quadrado Q_2 é 24 cm, determine:

a) a medida da área de Q_4; $A = \frac{729}{4}$ cm²

b) a medida de perímetro de Q_{10}. $P = \frac{19\,683}{32}$ cm

34. Em cada item a seguir, a sequência é uma PG. Determine o valor de x.

a) $(4, x, 9)$ $x = -6$ ou $x = 6$

b) $(x^2 - 4, 2x + 4, 6)$ $x = 10$

c) $(-2, x + 1, -4x + 2)$ $x = 1$ ou $x = 5$

35. A idade de Beatriz, a idade da filha dela e a idade da neta formam, nessa ordem, uma PG de razão $\frac{2}{3}$. Determine as 3 idades sabendo que a neta tem 50 anos a menos do que a avó.

36. Uma dívida deverá ser paga em 7 parcelas, de modo que elas constituam termos de uma PG. Sabe-se que os valores da 3ª e da 6ª parcelas são, respectivamente, R$ 144,00 e R$ 486,00. Determine:

a) o valor da 1ª parcela; R$ 64,00

b) o valor da última parcela. R$ 729,00

37. Os números que expressam as medidas do lado, de perímetro e de área de um quadrado podem estar, nessa ordem, em PG? Em caso afirmativo, qual deve ser a medida do lado do quadrado em centímetros? Sim; 16 cm.

38. A sequência $(13, 4x + 1, 21)$ é uma PA, e a sequência $\left(\frac{x}{8}, y, 32\right)$ é uma PG. Quais são os valores de x e y? $x = 4$ e $y = -4$ ou $y = 4$.

39. Em uma PA crescente cujo 1º termo vale 2, o 2º, o 5º e o 14º termo formam, nessa ordem, uma PG. Obtenha a razão dessa PG. $q = 3$

40. Qual é a condição dos números reais a, b e c de modo que a sequência (a, b, c) seja, simultaneamente, uma PA e uma PG? $a = b = c$

35. Sendo b a idade de Beatriz, temos:
$\left(b, \frac{2}{3}b, \left(\frac{2}{3}\right)^2 b\right)$ é PG.
$b - \left(\frac{2}{3}\right)^2 b = 50 \Rightarrow \left(1 - \frac{4}{9}\right) b = 50 \Rightarrow b = 90$
Beatriz: 90 anos; filha: 60 anos; neta: 40 anos.

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

Seja $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ uma PG.

Queremos encontrar uma expressão para a soma dos n primeiros termos.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad \text{I}$$

Multiplicando por q (com $q \neq 0$) os 2 membros da igualdade anterior, segue que:

$$q \cdot S_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} + \underbrace{a_2 \cdot q}_{a_3} + \underbrace{a_3 \cdot q}_{a_4} + \ldots + \underbrace{a_{n-1} \cdot q}_{a_n} + a_n \cdot q \quad \text{II}$$

Subtraindo I de II, membro a membro, obtemos:

$$q \cdot S_n - S_n = (\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} + a_n \cdot q) - (a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_n \cdot (q - 1) = a_n \cdot q - a_1$$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos $S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1$, isto é:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot q^n - a_1 \xrightarrow{q \neq 1} \boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Note que, se $q = 1$, a fórmula deduzida não pode ser aplicada, pois anula o denominador. Nesse caso, todos os termos da PG são iguais e, para calcular a soma dos n primeiros termos, basta fazermos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{n \text{ parcelas}} \Rightarrow S_n = n \cdot a_1$$

Vamos, por exemplo, calcular a soma dos 10 primeiros termos da PG $\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots\right)$.

Como $q = \frac{1}{2}$, temos:

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{20 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{20 \cdot \left(-\frac{1023}{1024}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5115}{256}}{-\frac{1}{2}} = \frac{5115}{128} \simeq 39{,}96$$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

41. Calcule a soma dos 6 primeiros termos da PG $(-2, 4, -8, 16, \ldots)$.

42. Calcule a soma dos 8 primeiros termos da PG $(320, 160, 80, \ldots)$.

43. A tabela seguinte informa a projeção do número de livros vendidos em uma livraria, nos primeiros anos de atividade dela.

Números de livros vendidos na livraria

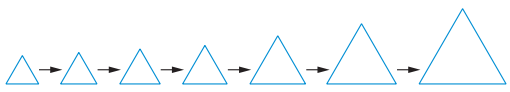
Ano	Número de livros
1	50 000
2	60 000
3	72 000
4	86 400

Dados elaborados para fins didáticos.

Se for mantido esse padrão, qual será o total de livros vendidos nessa livraria nos 10 primeiros anos de atividade? Considere $(1{,}2)^5 \simeq 2{,}5$.

Aproximadamente 1 312 500 livros.

44. Na sequência a seguir, todos os triângulos são equiláteros, e a medida de perímetro de cada triângulo, a partir do 2º, é $\frac{5}{4}$ da medida de perímetro do triângulo anterior.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Sabendo que o lado do 2º triângulo mede 1 m, determine:

a) a medida de perímetro do 1º triângulo; 2,4 m

b) a medida do lado do 4º triângulo; 1,5625 m

c) o número inteiro mínimo de metros necessários para a construção dos 7 triângulos representados na sequência. Considere $(1{,}25)^7 \simeq 4{,}8$. 37 m

42. $q = \frac{1}{2}$; $S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{320 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = 637{,}5$.

41. $q = -2$; $S_6 = \frac{a_1 \cdot (q^6 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{(-2) \cdot \left[(-2)^6 - 1\right]}{-2 - 1} = \frac{(-2) \cdot 63}{-3} = 42$.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Financeira e Educação Fiscal.*

Investimentos financeiros

A caderneta de poupança é, historicamente, o investimento financeiro mais conhecido dos brasileiros, pelo funcionamento relativamente simples e por oferecer baixos riscos.

O rendimento da poupança sempre foi determinado pela variação da taxa referencial (TR) mais juro de 0,5% a.m (ao mês). A partir de maio de 2012, os novos depósitos na poupança ficaram sujeitos às seguintes regras em relação ao juro.

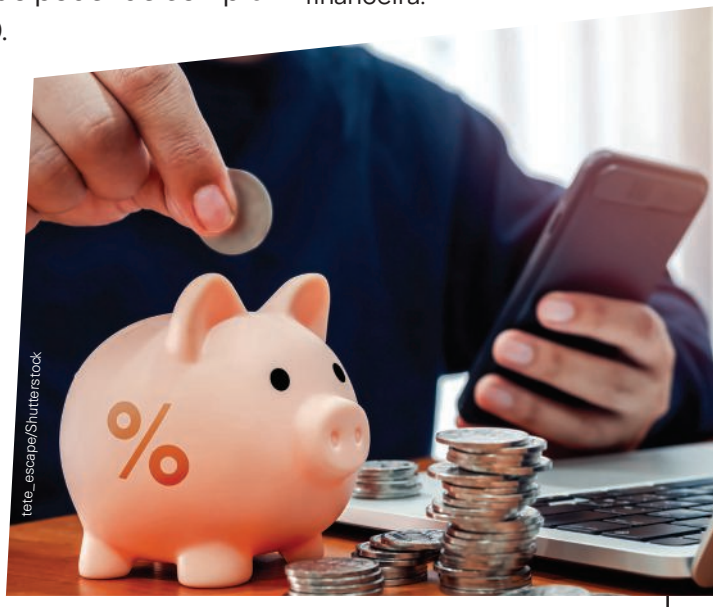
- Se a taxa básica de juro da economia (a taxa Selic) for maior que 8,5% a.a., o cálculo anterior não se altera.
- Se a taxa for menor ou igual a 8,5% a.a., o juro passa a ser igual a 70% da Selic.

Mas o que são TR e Selic?

Inicialmente, precisamos entender o que é a inflação. Ela é a variação do preço de bens e serviços consumidos pela população em geral, causada por fatores como demanda, pressão nos custos e gastos públicos, entre outros. O índice oficial que mede a inflação brasileira é o Índice de Preço ao Consumidor Amplo (IPCA), que aponta a variação do custo médio de vida de famílias com renda mensal de 1 a 40 salários mínimos. O IPCA é calculado mensalmente pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que faz um levantamento de preços em 13 regiões metropolitanas do Brasil.

A TR é um índice financeiro criado em 1991 para corrigir o dinheiro (correção monetária) e diminuir o impacto da perda do poder de compra do cidadão na época da hiperinflação, nos anos 1990.

Ainda na década de 1990, a TR foi perdendo espaço para a taxa Selic, que é, até hoje, a taxa de juro de referência da economia brasileira e o principal instrumento do Banco Central para controle da inflação. A Selic tem impacto na taxa de juro de empréstimos, financiamentos e aplicações financeiras. O termo **Selic** é a sigla de Sistema Especial de Liquidação e Custódia, no qual são feitas operações envolvendo títulos públicos federais. Apesar de a Selic ser o principal índice de referência, a TR ainda é usada para calcular o rendimento da poupança, a correção do saldo do FGTS e a atualização de alguns financiamentos imobiliários.



O planejamento de gastos é fundamental para a boa saúde financeira.

Em maio de 2024, a taxa Selic estava em 10,50% a.a. (ao ano). Se a taxa Selic se mantivesse nesses patamares até o final de 2024, o rendimento da poupança naquele ano teria sido 0,5% a.m. + TR.

É fundamental lembrar que existe uma variedade muito grande de investimentos disponíveis nas instituições financeiras.

Com as mudanças no cenário econômico no Brasil e um gradativo amadurecimento da população em relação ao mercado financeiro, os brasileiros começaram a buscar opções mais rentáveis de investimentos, em vez da tradicional caderneta de poupança.

Basicamente, os investimentos se dividem em dois grupos: os de renda fixa e os de renda variável.

Na renda fixa, a remuneração ou a forma de cálculo da remuneração é conhecida no momento da aplicação. A renda fixa sempre atraiu um número grande de investidores, dado o histórico de altas taxas de juros da economia brasileira.

Na renda variável, o investidor não conhece previamente as condições de valorização, podendo eventualmente obter um montante menor do que o valor aplicado no momento do resgate, acarretando perda de capital. Por exemplo, ao investir no mercado de ações, o investidor está sujeito à valorização ou à desvalorização da cota da ação da empresa.

A despeito do maior risco envolvido, o investimento em renda variável acena, em médio e longo prazos, com rentabilidades atrativas, possivelmente maiores do que as obtidas na renda fixa.

Ao investir, é indispensável que tenhamos clareza de nossos objetivos, dos prazos e de nosso perfil de investidor e conhecer os parâmetros do investimento avaliando a rentabilidade e os riscos envolvidos.

Destinar parte do dinheiro para aplicações financeiras é um excelente modo de se planejar para o futuro, mas é importante se organizar bem para não aplicar um dinheiro que será importante para os gastos essenciais do dia a dia.

Se considerarmos o ano de 2023, a poupança rendeu 7,43%, e a inflação oficial no Brasil foi de 4,62%. Isso significa que quem investiu na caderneta de poupança em 2023 teve um ganho real (descontada a inflação) de 2,81% ao ano.

Pense nisto

Por que a queda da Selic pode favorecer o aquecimento da economia?

Com a queda da Selic, fazer um empréstimo torna-se mais barato, por conta do juro menor, o que pode incentivar o consumo das pessoas físicas e novos investimentos por parte das empresas.

storyset/Freepik

Fontes dos dados: TAXA Selic. *Banco Central do Brasil*, Brasília. Disponível em: https://tedit.net/38jzkz; REMUNERAÇÃO dos depósitos de poupança. *Banco Central do Brasil*, Brasília, [201-?]. Disponível em: https://tedit.net/avs895; IBGE. Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo – IPCA, *Sidra*. Disponível em: https://tedit.net/dr6ap1. Acesso em: 23 set. 2024.

1. Junte-se a um colega e pesquisem o valor da taxa Selic atualmente para saber qual é a atual taxa de juro da caderneta de poupança (desconsiderando a TR). Depois, elaborem um problema envolvendo a Selic atual. Troquem o problema elaborado com o de outra dupla.

2. Com o mesmo colega, pesquisem sobre os principais tipos de investimento de renda fixa e variável. Você já ouviu falar de algum deles? Escolham um investimento de renda fixa e um de renda variável e descrevam as principais características específicas de cada um deles.

3. Você conhece alguém que já fez algum investimento financeiro? Qual? Em sua opinião, qual é a importância de investir?

1. Resposta pessoal. Caso a Selic esteja abaixo de 8,5% a.a., por exemplo, 7,5% a.a., os juros da poupança devem ser 0,7 · 7,5% = 5,25%; ou seja, 5,25% a.a.

2. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

3. Respostas pessoais.

Soma dos termos de uma PG infinita

Seja (a_n) uma sequência dada pelo termo geral $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ para $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos atribuir valores para n (com $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ...) para caracterizar essa sequência:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

$\vdots \quad \vdots$

Trata-se da PG (0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ...), de razão $q = \frac{1}{10}$. Podemos perceber que, à medida que o valor do expoente n aumenta, o valor do termo a_n fica cada vez mais próximo de zero.

Dizemos, então, que o limite de $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ quando n tende ao infinito (isto é, quando n se torna "arbitrariamente grande") vale zero e representamos esse fato da seguinte maneira: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ ou $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$, em que ∞ é o símbolo matemático que representa o infinito.

De modo geral, pode-se mostrar que, se $q \in \mathbb{R}$, com $|q| < 1$, isto é, $-1 < q < 1$, então $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Nosso objetivo é calcular a soma dos infinitos termos de uma PG cuja razão q é tal que $-1 < q < 1$. Para isso, precisamos analisar o que ocorre com a soma dos n primeiros termos quando n tende ao infinito, isto é, quando n se torna "arbitrariamente grande". Então, temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}\right), \text{ com } -1 < q < 1.$$

Levando em conta as considerações anteriores, temos $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Assim:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Pense nisto

Faça os cálculos com algumas outras sequências desse tipo, como $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ou $c_n = (0{,}75)^n$, e verifique se você chega à mesma conclusão. Use uma calculadora.

Observação

Essa propriedade não vale para os casos nos quais a razão da PG q é tal que $q \leqslant -1$ ou $q \geqslant 1$. Considere, por exemplo, a PG $(2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots)$, cujo termo geral é $a_n = 2^n$, com $n \geqslant 1$. Quando n tende ao infinito, 2^n é um número arbitrariamente grande, de modo que $\lim\limits_{n \to \infty} 2^n = \infty$.

Pense nisto: Vamos considerar $b_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$; temos:

$n = 1 \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{3} = -0{,}\overline{3}$

$n = 2 \Rightarrow b_2 = -\left(\frac{1}{3}\right)^2 = -0{,}\overline{1}$

$n = 3 \Rightarrow b_3 = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 = -0{,}\overline{037}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$n = 10 \Rightarrow b_{10} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{10} \simeq -0{,}000017$

Podemos perceber que, à medida que o valor do expoente n aumenta, o valor do termo b_n fica cada vez mais próximo de 0. Para as demais sequências, o raciocínio é análogo.

Atividades resolvidas

8. Dada a PG $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \ldots\right)$, calcule o valor de $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \ldots$

Solução:

Precisamos calcular a soma dos infinitos termos da PG $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \ldots\right)$.

Note que $q = -\frac{1}{3}$ e $-1 < -\frac{1}{3} < 1$.

Assim, $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \ldots = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$.

45. Determine o valor de:

a) $20 + 10 + 5 + 2{,}5 + \ldots$ 40

b) $10^{-3} + 10^{-4} + 10^{-5} + \ldots$ $\frac{1}{900}$

c) $-25 - 5 - 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \ldots$ $-\frac{125}{4}$

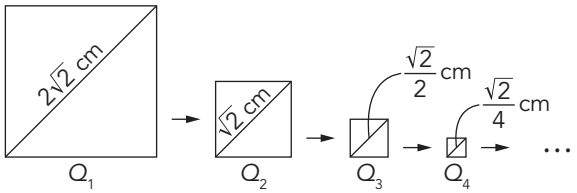
d) $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \ldots$ $\frac{27}{4}$

e) $2\sqrt{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \ldots$ $4\sqrt{2}$

46. Seja a sequência (a_n) dada pelo termo geral $a_n = \frac{9}{2 \cdot 3^n}$, em que $n \in \mathbb{N}^*$. Qual é o valor de $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \ldots$? $\frac{9}{16}$

47. Verifique a sequência de quadrados construída segundo um padrão.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



Elabore e resolva um problema envolvendo a soma dos infinitos termos de uma PG.

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

48. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações, considerando que as parcelas da adição são os termos de uma sequência em PG.

a) $x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} + \ldots = \frac{1}{3}$ $S = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

b) $(1 + x) + (1 + x)^2 + (1 + x)^3 + \ldots = 3$ $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

c) $x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{64} + \ldots = \frac{4}{3}$ $S = \{1\}$

d) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = 0{,}25$ $S = \{-3\}$

49. Seja um triângulo equilátero de lado medindo 12 cm. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se outro triângulo equilátero no interior do primeiro, com a medida do lado igual à metade da medida do lado do triângulo original. Unindo os pontos médios dos lados desse segundo triângulo, obtém-se outro triângulo no interior do segundo triângulo, e assim indefinidamente.

a) Qual é a soma das medidas de perímetro de todos os triângulos assim construídos? 72 cm

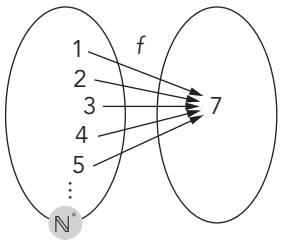
b) Qual é a soma das medidas de áreas de todos os triângulos assim construídos? $48\sqrt{3}$ cm²

50. Uma bola é atirada ao chão a partir da medida de altura igual a 200 cm. Ao atingir o solo pela primeira vez, ela sobe até a medida de altura igual a 100 cm, cai e atinge o solo pela segunda vez, subindo até a medida de altura igual a 50 cm, e assim por diante, subindo sempre metade da medida de altura anterior. Se esse procedimento pudesse ser repetido infinitas vezes, quantos metros a bola percorreria, verticalmente, ao todo? 600 cm

Progressões e funções

Progressões e função constante

Banco de imagens/Arquivo da editora



A sequência (7, 7, 7, 7, 7, 7, ...) pode ser uma progressão aritmética constante de razão $r = 0$ ou uma progressão geométrica constante de razão $q = 1$. Verificamos que a sequência (7, 7, 7, 7, 7, 7, ...) está associada a uma função f de domínio $\mathbb{N}^*$, como mostra o diagrama.

O termo geral dessa sequência é $a_n = 7$. Trata-se da função constante $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 7$.

Pense nisto

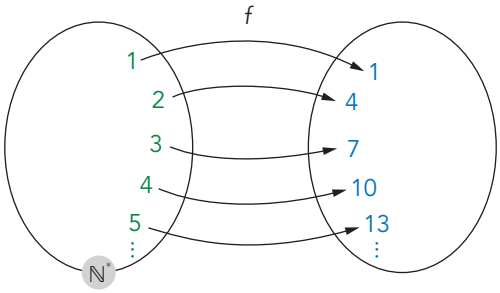
Como é a representação gráfica dessa função f com domínio $\mathbb{N}^*$? E se o domínio dessa função f for o conjunto dos números reais?

Se o domínio de f for $\mathbb{N}^*$, a imagem é um conjunto infinito de pontos, todos com ordenada 7 e abscissas números naturais não nulos. Se o domínio for $\mathbb{R}$, a representação gráfica de f é a reta $y = 7$.

Progressão aritmética e função polinomial de 1º grau

Vamos estabelecer uma importante conexão entre PA não constante e função polinomial de 1º grau.

Já vimos que a PA (1, 4, 7, 10, 13, 16, ...) está associada a uma função f de domínio em $\mathbb{N}^*$, como mostra o diagrama.



Banco de imagens/Arquivo da editora

No gráfico **1**, podemos notar parte do conjunto dos pontos que representam f. Como o domínio de f contêm apenas valores naturais não nulos, o gráfico é formado por um conjunto infinito de pontos alinhados, mas não podemos traçar a reta que contém esses pontos, já que não há pontos entre dois valores consecutivos da imagem (ou seja, entre 1 e 4, entre 4 e 7, entre 7 e 10, e assim por diante) que estejam associados a algum elemento do domínio.

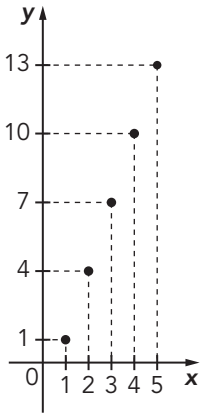


Gráfico **1**.

O termo geral dessa PA é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 1 + (n - 1) \cdot 3 = -2 + 3n$$

Podemos, desse modo, associar f à função dada por $y = -2 + 3x$, restrita aos valores naturais não nulos que a variável x assume.

Verifique agora o gráfico **2**, da função definida por $y = -2 + 3x$, de domínio $\mathbb{R}$, e compare esse gráfico com o anterior.

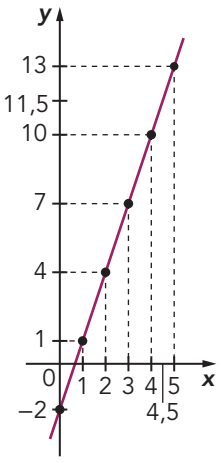
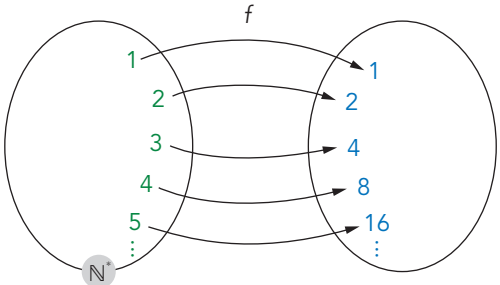


Gráfico **2**.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Progressão geométrica e função exponencial

Vamos estabelecer uma conexão entre uma PG não constante e a função exponencial. Seja a PG (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...). Essa sequência está associada a uma função f com domínio em $\mathbb{N}^*$, como mostra o diagrama.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A representação gráfica de f é dada no gráfico **3**.

Podemos escrever o termo geral dessa PG como:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = \frac{2^n}{2^1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n$$

Desse modo, é possível associar f à função exponencial dada por $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$, restrita aos valores de x naturais não nulos.

Considere agora o gráfico **4**, da função exponencial dada por $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$, com domínio em $\mathbb{R}$, e compare esse gráfico com o anterior.

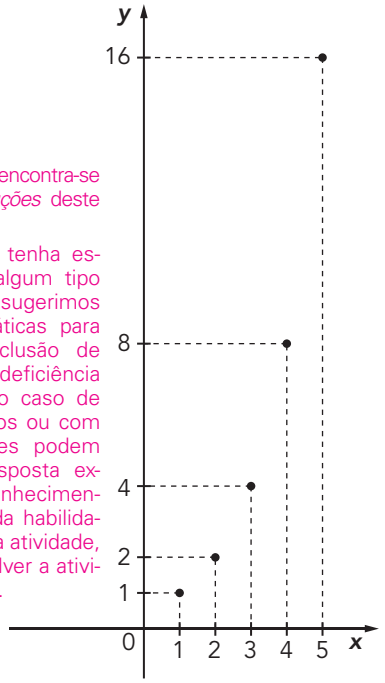


Gráfico **3**.

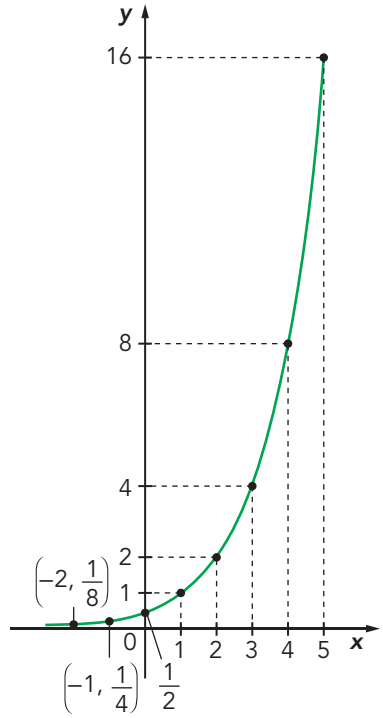


Gráfico **4**.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

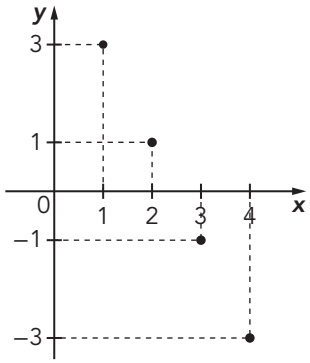
52. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

51. Seja f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ a função representada pelo gráfico a seguir.



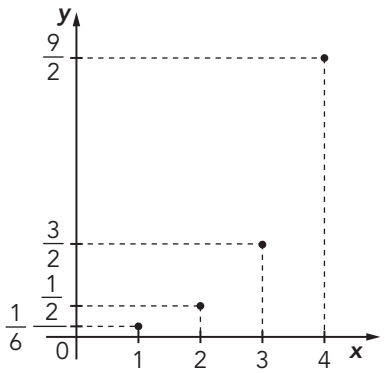
Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Determine a lei de f.

b) Qual é a progressão aritmética associada à função f? Obtenha o termo geral.

52. Seja f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 4 \cdot (0{,}5)^x$. Esboce o gráfico de f.

53. O gráfico a seguir representa a função f, de domínio $\mathbb{N}^*$, definida por $y = \frac{1}{6} \cdot 3^{x+k}$, sendo k uma constante real.



Banco de imagens/Arquivo da editora

51. a) $f(x) = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{N}^*$.

$\begin{cases} x = 1,\ y = 3 \\ x = 3,\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1 + b = 3 \\ a \cdot 3 + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -2$ e $b = 5 \Rightarrow f(x) = -2x + 5$

b) $(3, 1, -1, -3, \ldots)$; $a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-2) \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = -2n + 5$; com $n \in \mathbb{R}^*$.

a) Determine o valor de k. $k = -1$

b) Qual é a progressão geométrica associada à função f? Obtenha o termo geral e a razão. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{n-1}$, com $q = 3$.

54. Um jovem casal começou a escrever o nome dos ascendentes deles, durante uma pesquisa de árvore genealógica, pelos nomes dos pais (2ª geração), dos avós (3ª geração) e dos bisavós (4ª geração). Ao contar a quantidade de ascendentes de cada geração, o casal percebeu uma regularidade.

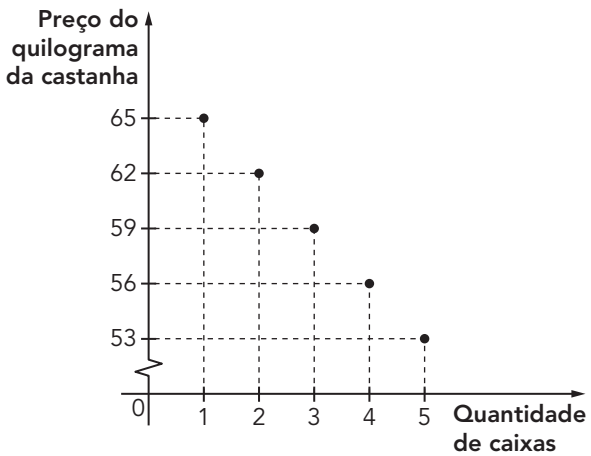
a) Que regularidade é essa? A cada geração passada, o número de ascendentes dobra.

b) Classifique a sequência formada pela quantidade de ascendentes de cada geração. A sequência (2, 4, 8, 16, ...) é uma PG com termo inicial 2 e razão 2.

c) Qual é a quantidade de trisavós que o casal tem conjuntamente? 32 trisavós.

d) Qual é a lei da função que associa cada geração x, em que $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, com o valor y de ascendentes? $y = 2^x$

55. Um atacadista vende castanhas-de-caju em caixas com 50 embalagens de 0,5 kg cada. Para incentivar as vendas, o atacadista promoveu uma promoção de acordo com o número de caixas vendidas (com limite de 10 caixas). O gráfico a seguir apresenta o valor pago pelo quilograma da castanha em função da quantidade de caixas compradas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é o valor pago por um comerciante que comprou 2 caixas de castanhas? E por um comerciante que comprou o dobro de caixas? R$ 3.100,00; R$ 5.600,00.

b) Classifique a sequência formada pelos preços do quilograma da castanha nessa promoção. Obtenha o termo geral.
PA de termo inicial 65 e razão −3; $a_n = 68 - 3n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

57. a) (212 000; 224 720; 238 203,20; 252 495,392; ...). PG de razão 1,06.

c) Qual é o preço mínimo do quilograma da castanha-de-caju nessa promoção? Qual seria o preço pago por um comerciante que optasse por comprá-la pelo menor preço possível do quilograma?
R$ 38,00; R$ 9.500,00.

56. Um biólogo mediu o crescimento de uma planta no laboratório durante os 5 primeiros dias em que foi plantada. A tabela a seguir mostra a medida de altura da planta, em centímetros, nesse período.

Crescimento da planta

Dia	1º	2º	3º	4º	5º
Medida da altura (em cm)	2,6	3,4	4,2	5,0	5,8

Dados elaborados para fins didáticos.

Admitindo que essa tendência de crescimento se mantenha por mais uma semana, a contar do 5º dia, determine:

a) a medida de altura da planta no 12º dia;
11,4 cm

b) a lei da função que relaciona a medida de altura da planta y com o dia x de crescimento; $y = 1{,}8 + 0{,}8x$, com $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$.

c) o que significa o termo independente da função encontrada no item **b**, em relação ao experimento do biólogo.
O termo representa a medida de altura da planta no dia em que foi plantada pelo biólogo.

57. Um comerciante investiu o lucro acumulado ao longo de um ano do comércio em um fundo de investimento com rendimento de 6% ao ano. O valor investido foi R$ 200.000,00, e o comerciante foi informado que, para calcular o valor total dos investimentos ao longo dos anos, deveria usar a expressão $200\,000 \cdot (1{,}06)^x$, em que x é o número de anos que o dinheiro ficará aplicado.

a) Escreva a sequência formada pelo saldo do investimento do comerciante ao longo dos 4 primeiros anos da aplicação. Classifique a sequência e encontre a razão.

b) Qual é o 10º termo da sequência encontrada no item **a**? O que significa esse termo de acordo com o contexto apresentado? Considere $(1{,}06)^5 \simeq 1{,}34$.
Aproximadamente 359 120. Esse é o valor do investimento após 10 anos.

58. Ao estudar o crescimento de uma colônia de bactérias em um alimento estragado no período de 1 dia, um biólogo montou uma tabela com a quantidade de bactérias detectadas a cada hora transcorrida.

Concentração de bactérias

Medida de tempo (em h)	1	2	3	4	5	6
Quantidade de bactérias	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}

Dados elaborados para fins didáticos.

Suponha que a tendência mostrada na tabela seja válida para o período de 1 dia.

a) Determine o termo geral da sequência formada pelo número de bactérias na amostra por hora do experimento. A sequência forma uma PG de razão 3. Portanto, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3^{11} \cdot 3^{n-1} = 3^{n+10}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Qual é a lei da função que relaciona a quantidade y de bactérias com a medida de tempo x de observação, em horas, considerando que $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 24\}$?
Como $a_n = 3^{n+10}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, a função é dada por $y = 3^{x+10}$.

História da Matemática

Ada Lovelace

A inglesa Augusta Ada Byron King, Condessa de Lovelace (1815-1852), mais conhecida por Ada Lovelace, escreveu o que pode ter sido o primeiro algoritmo capaz de ser processado por uma máquina. Vale ressaltar que a primeira estação geradora de energia elétrica de Londres, na Inglaterra, só foi implementada em 1882, 30 anos após a morte de Lovelace.

Ada era colega do matemático inglês Charles Babbage (1791-1871), que desenvolveu a ideia da chamada Máquina Analítica, que, além de realizar os cálculos tradicionais de uma calculadora, seria capaz de fazer previsões matemáticas funcionando com um motor a vapor.

Na época, a Máquina Analítica chamou a atenção de toda a comunidade matemática, e o matemático italiano Luigi Menabrea (1809-1896) escreveu um artigo sobre a invenção. Ada foi convidada a fazer a tradução desse artigo, aproveitou para fazer as próprias anotações e criou um algoritmo para calcular a chamada sequência de Bernoulli.

Fonte dos dados: ADA Lovelace. *Projeto Enigma*, Porto Alegre, 18 jan. 2021. Disponível em: https://tedit.net/7pmygy. Acesso em: 5 jul. 2024.

SSPL/Science Museum/Getty Images

Portrait of Ada King, Countess of Lovelace (Ada Lovelace), de Edward Alfred Chalon, 1840. Aquarela, 250 mm × 183 mm.

Planilhas eletrônicas

O trabalho de Ada Lovelace foi precursor para toda a área hoje conhecida como Ciência da Computação, que é responsável pelo desenvolvimento de *softwares* que facilitam nossa vida, entre os quais as planilhas eletrônicas.

Vamos acompanhar um exemplo.

Diariamente a chefe de cozinha de um restaurante elabora uma lista de alimentos que devem ser comprados para fazer o prato do dia no horário do almoço. Em seguida, ela consulta o preço dos produtos em 3 mercados e, depois de preencher a planilha eletrônica, decide em qual mercado efetuará a compra.

O *software* usado para a construção da planilha é o LibreOffice Calc, parte integrante do pacote LibreOffice, disponível em https://tedit.net/puht4z (acesso em: 5 jul. 2024). Além desse, existem outros *softwares* livres que têm funções de planilha eletrônica.

Produto	Quantidade	Mercado A		Mercado B		Mercado C	
		Preço unitário (em R$)	Custo (em R$)	Preço unitário (em R$)	Custo (em R$)	Preço unitário (em R$)	Custo (em R$)
Tomate (kg)	10	9,76	97,60	10,73	107,30	7,80	78,00
Cebola (kg)	5	7,35	36,75	6,61	33,05	5,88	29,40
Alho (kg)	2	23,42	46,84	28,10	56,21	18,73	37,46
Batata (kg)	10	9,85	98,50	10,83	108,30	8,87	88,65
Carne (kg)	12	54,25	651,00	65,10	781,20	43,40	520,80
Arros (pacote 5 kg)	2	21,35	42,70	23,48	46,96	17,08	34,16
Feijão (kg)	4	12,35	49,40	13,59	54,34	11,11	44,44
Banana (dúzia)	3	9,87	29,61	8,88	26,64	10,85	32,55
Maçã (unidade)	23	2,21	50,83	1,98	45,54	1,76	40,48
Total		1103,23		1259,538		905,94	

Reprodução/LibreOffice

No exemplo anterior, podemos notar as vantagens do uso de uma planilha eletrônica: leitura fácil e rápida dos dados, agilidade no cálculo para a tomada de decisões, facilidade de manipulação, etc.

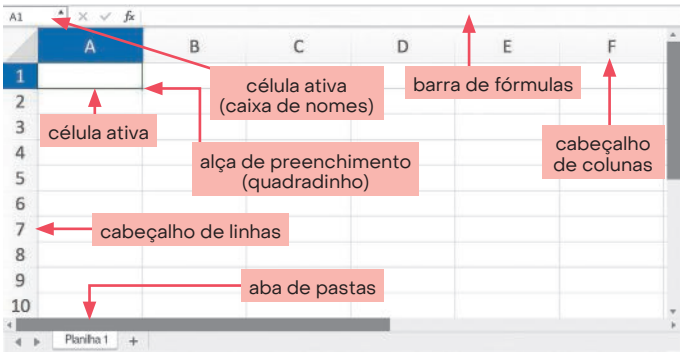
No dia a dia, encontramos um número cada vez maior de profissionais que lançam mão das planilhas eletrônicas nas rotinas de trabalho. Elas são convenientes, inclusive, para a organização de orçamentos e calendários familiares.

Como funciona a planilha eletrônica?

Em geral, as planilhas eletrônicas são parecidas entre si. Todas são compostas de linhas e colunas. Cada linha é nomeada com um número natural positivo, e cada coluna, com uma letra do alfabeto. Quando todas as letras do alfabeto são usadas, as colunas começam a ser nomeadas com 2 letras, e assim sucessivamente.

Como efetuar cálculos na planilha?

Digite o sinal = e, em seguida, os números e os operadores que você deseja usar no cálculo. Os operadores devem ser inseridos de acordo com o quadro a seguir.



Reprodução/LibreOffice

Principais operações	Linguagem matemática	Linguagem da planilha
Adição	$a + b$	=a+b
Subtração	$a - b$	=a–b
Multiplicação	$a \cdot b$	=a*b
Divisão	$a : b$	=a/b
Potenciação	a^n	=a^n

Por exemplo, para efetuar o cálculo da expressão numérica $3 + 25 - \frac{3 \cdot 5}{2}$, escolha uma célula, digite "=3+2^5–(3*5)/2" e tecle *Enter*.

Como inserir uma fórmula na planilha?

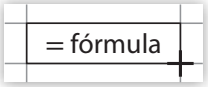
Os operadores devem ser inseridos de acordo com a tabela já apresentada; por exemplo, para calcular o quociente entre a soma do valor de A1 com B1 pelo valor de C1:

- Digite um valor em A1, um valor em B1 e outro valor não nulo em C1.
- Escolha outra célula, por exemplo, a A2; digite "=(A1+B1)/C1"; e tecle *Enter*.

A planilha efetuará o cálculo indicado. Se você alterar os valores de A1, B1 ou C1, perceberá que o valor de A2 será alterado a cada mudança.

Como copiar uma fórmula arrastando a alça de preenchimento?

- Selecione a célula que contém a fórmula que você deseja copiar nas células adjacentes (da mesma coluna ou da mesma linha).
- Posicione o cursor no canto inferior direito. Note que o cursor vai se transformar em uma pequena cruz.
- Com o auxílio do *mouse*, clique e arraste a alça de preenchimento pelas células que você deseja preencher.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A planilha copiará a fórmula e efetuará os cálculos para as células adjacentes.

Sequências recursivas

Conforme apresentado neste capítulo, a lei de formação da progressão aritmética pode ser expressa como lei de recorrência.

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Essas sequências que podem ser expressas por uma lei de recorrência são chamadas **sequências recursivas**. Vamos usar a planilha eletrônica para determinar a soma dos 7 primeiros termos de uma progressão aritmética em que $a_1 = 2{,}8$ e $r = 1{,}3$. Para isso, na célula:

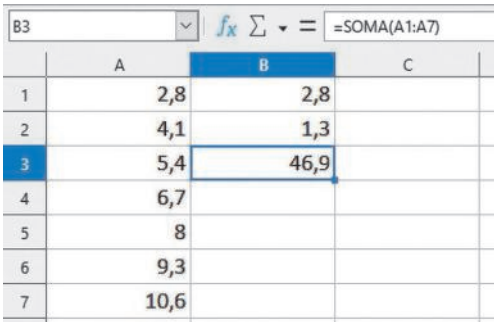
- B1 digite "2,8";
- B2 digite "1,3";
- A1 digite "=B1" e pressione *Enter*;
- A2 digite "=A1+B$2" e pressione *Enter*.

Selecione A2 e, com o auxílio do *mouse*, arraste a alça de preenchimento até a célula A7. Como o valor que consta na célula B2 (1,3) foi fixado, nesse procedimento, cada valor de célula da coluna A corresponde ao valor de célula imediatamente acima dela, adicionado de 1,3.

Repare que, de A1 a A7, temos os 7 primeiros termos da progressão aritmética.

Agora, para calcular a soma desses termos, na célula B3 digite "=SOMA(A1:A7)" e pressione *Enter*. O *software* exibirá nessa célula a soma dos primeiros 7 termos dessa progressão.

Caso não seja possível todos os estudantes acessarem planilhas eletrônicas para realizar as atividades, sugira a eles que simulem os algoritmos das planilhas eletrônicas em papel quadriculado ou em uma folha sulfite.



Reprodução/LibreOffice

O símbolo $ fixa a informação logo à direita dele. Já o símbolo : indica um intervalo de células.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

As resoluções dependem do *software* utilizado pelos estudantes.

Experimente usar uma planilha eletrônica para realizar as atividades.

59. Determine o 25º termo da PA (–45, –40, –35, –30, ...). 75

60. Calcule a soma dos 25 primeiros termos de uma progressão aritmética em que $a_1 = 1$ e $r = \frac{1}{4}$. 100

61. Determine o 15º termo da PG (–3, 6, –12, 24, ...). –49 152

62. Calcule a soma dos 16 primeiros termos da PG (1, 3, 9, 27, ...). 21 523 360

63. Uma sequência muito conhecida é a sequência de Fibonacci. A lei de formação é: 2 178 308

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ com } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3 \end{cases}$$

Calcule a soma dos 30 primeiros termos da sequência de Fibonacci.

História da Matemática

Carrossel de imagens

A sequência de Fibonacci

Uma sequência muito conhecida na Matemática é a sequência de Fibonacci, nome pelo qual ficou conhecido o italiano Leonardo de Pisa (c. 1180-1250). Em 1202, Fibonacci apresentou, no livro *Liber abaci*, o problema que o consagrou.

Fibonacci considerou, no período de 1 ano, um cenário hipotético para a reprodução de coelhos. Para isso, ele supôs:

- no início, há apenas um casal que acabou de nascer;
- os casais alcançam a maturidade sexual e se acasalam ao final de um mês;
- um mês é o período de gestação dos coelhos;
- todos os meses, cada casal maduro dá à luz um novo casal;
- os coelhos nunca morrem.

Acompanhe a seguir a quantidade de pares de coelhos ao final de cada mês.

- Início: um único casal.
- Ao final de 1 mês, o casal acasala. Continuamos com 1 par.
- Ao final de 2 meses, a fêmea dá à luz um novo par. Agora são 2 pares.
- Ao final de 3 meses, o primeiro casal dá à luz outro par, e o segundo casal acasala. São 3 pares.
- Ao final de 4 meses, o primeiro casal dá à luz outro par, o segundo dá à luz pela primeira vez a um par e o terceiro acasala. São 5 pares. E assim por diante.

A sequência de pares de coelhos existentes, ao final de cada mês, evolui segundo os termos da sequência: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)

Note que, a partir do terceiro, cada termo dessa sequência é igual à soma dos dois termos anteriores. Assim, a sequência pode ser definida pela lei de recorrência:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3 \end{cases}$$

Mais de 500 anos mais tarde, o matemático escocês Robert Simson (1687-1768) provou essa propriedade dessa sequência: à medida que consideramos cada vez mais termos, o quociente entre um termo qualquer e o termo antecedente aproxima-se de 1,61803398..., que é conhecido como **número de ouro**.

Fonte dos dados: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

INTERLIGANDO

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Saúde*.

Transmissibilidade de doenças

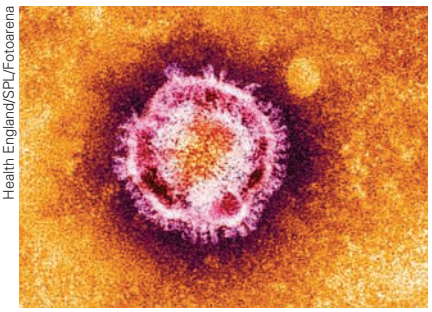
Quando a pandemia da covid-19 começou, muito se falou sobre o parâmetro R_0 do vírus Sars-CoV-2.

Em epidemiologia, o R_0 é um dos principais parâmetros para avaliar a intensidade de transmissão da infecção de uma doença e é chamado **número básico de reprodução**. Esse valor indica o número médio de pessoas que serão infectadas por um único indivíduo, durante o período de contágio, em uma população totalmente suscetível a essa doença.

Por exemplo, se cada pessoa contaminada com determinada doença transmitir, em média, essa doença a 2 outras pessoas, que, por sua vez, transmitem, cada uma, a outras 2 pessoas, e assim por diante, o R_0 dessa doença é 2. Quanto maior é o R_0 de uma doença, mais contagiosa ela é.

Cores fantasia.

As imagens não estão representadas em proporção.



Centre For Infections/public Health England/SPL/Fotoarena

Partícula do vírus causador da síndrome respiratória aguda grave (SARS), doença pulmonar frequentemente fatal. O vírus SARS é um coronavírus. Os coronavírus são assim nomeados devido à sua coroa (coroa) de proteínas de superfície (roxa), que são usadas para se fixar e penetrar na célula hospedeira. Um coronavírus que se tornou bastante conhecido nos últimos anos é o SARS-CoV-2, o vírus causador da covid-19. Imagem ampliada em 213 000 vezes.

Fonte dos dados: ZAPAROLLI, Domingos. O desafio de calcular o R. *Revista Pesquisa Fapesp*, São Paulo, ed. 293, jul. 2020. Disponível em: https://tedit.net/lq7ln9. Acesso em: 6 jul. 2024.

A vacinação é uma das maneiras mais eficazes de preservar a saúde da população de um país, reduzir o número de pessoas infectadas por uma doença e proteger pessoas que não podem ser vacinadas.

No Brasil, o Programa Nacional de Imunizações disponibiliza gratuitamente, no Sistema Único de Saúde, aproximadamente 30 tipos de vacina, como a vacina contra a covid-19.

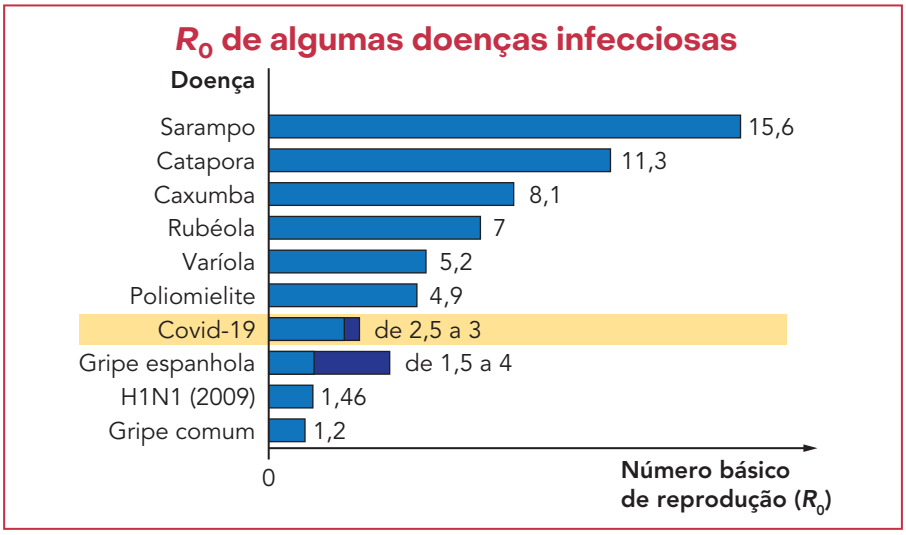
Na foto, pessoas aguardam para se vacinarem contra a covid-19, na cidade de São Paulo (SP). Foto de 2021.

1. Considerando um valor de $R_0 = 3$ e supondo que a transmissão de uma pessoa a outra ocorra diariamente, use uma calculadora para determinar o número inteiro de dias necessários para que o total de infectados, a partir de um único indivíduo infectado, ultrapasse:

a) 5 000; 9 dias. **b)** 80 000; 11 dias. **c)** 1 000 000. 14 dias.

2. O gráfico a seguir apresenta o valor de R_0 de algumas doenças infecciosas.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Fonte dos dados: ZAPAROLLI, Domingos. O desafio de calcular o R. *Revista Pesquisa Fapesp*, São Paulo, ed. 293, jul. 2020. Disponível em: https://tedit.net/lq7ln9. Acesso em: 6 jul. 2024.

Nesse gráfico, o R_0 do sarampo é 15,6. Isso quer dizer que, se houver uma pessoa infectada com sarampo em uma população suscetível a essa doença, ela infectará, em média, outras 15 pessoas durante o período de contágio.

Troque ideias com um colega e elabore um problema que envolva o conceito do número básico de reprodução R_0 e o conceito de progressão geométrica finita. Em seguida, resolva o problema elaborado pelo colega e verifique a resolução a que ele chegou do seu problema.

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Pense nisto

A pós-verdade é um conceito em que a verdade sobre um assunto é substituída por informações distorcidas e crenças pessoais, influenciando a opinião pública e os comportamentos sociais. De que maneira a percepção distorcida da população, influenciada pela pós-verdade, pode afetar o valor do número básico de reprodução R_0 de uma doença?

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Orientações específicas* deste Manual.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão.

Nelson Antoine/Shutterstock

Não escreva no livro

PROJETO

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Financeira* e *Educação Fiscal*, das competências gerais **4** e **10** da BNCC e da habilidade **EM13MAT203**.

Reprodução/ ONU

Empreendedorismo na escola

Leia o texto a seguir.

Mas afinal, o que é empreendedorismo?

[...]

De forma bem simplificada, podemos dizer que empreender é também saber identificar oportunidades e transformá-las em negócios. Isso pode se dar, por exemplo, a partir de uma solução criada para sanar alguma necessidade dos consumidores, que pode ser um produto ou serviço, com base em um conhecimento ou habilidade específica.

Empreender também envolve a habilidade de gerenciar recursos, tomar decisões estratégicas e adaptar-se às mudanças no mercado. [...]

MAS afinal, o que é empreendedorismo? *Sebrae*, 8 nov. 2023. Disponível em: https://tedit.net/v2un0x. Acesso em: 9 ago. 2024.

Pensando em um projeto

O empreendedorismo tem atraído cada vez mais jovens que querem autonomia, flexibilidade, independência financeira e oferta de produtos inovadores para o mercado e buscam ser protagonistas da própria vida profissional.

Vale destacar que a organização financeira é fundamental para desenvolver qualquer empreendimento, e conhecimentos em Matemática Financeira, incluindo uso de planilhas eletrônicas, por exemplo, para controlar fluxos de caixa, organizar orçamentos e projetar receitas e despesas, auxiliam na gestão e nas tomadas de decisões.

Agora, que tal se aventurar um pouco no mundo do empreendedorismo elaborando um produto sustentável e destinando o lucro da venda dele para melhorias na comunidade escolar? Considere algumas dicas importantes para desenvolver esse projeto.

Planejamento

Para iniciar e ter êxito em qualquer negócio, é fundamental um planejamento para a implementação de processos. Esse planejamento prévio inclui o detalhamento de etapas que considerem objetivos, riscos, estratégias, pesquisa de mercado e como será a gestão financeira.

Público-alvo

Por meio de uma pesquisa de mercado, é possível conhecer o perfil das pessoas que podem ter interesse no produto ou no serviço oferecido.

Inovação e diferencial no mercado

Criar soluções, pensar e fazer diferente da concorrência aumentam as chances de se destacar no mercado e agregar valor ao produto ou serviço.

Gestão financeira

Responsável por sustentar todas as operações do empreendimento, para uma boa gestão financeira é importante atentar e controlar o fluxo de caixa e liquidez, evitando dívidas e cobranças de juros.

Nichos de mercado

Uma alternativa para evitar concorrência é procurar investir em um nicho pouco explorado, o que também possibilita o crescimento de um negócio.

Cássio Bittencourt/Arquivo da editora

Para começar

- Organizem-se em 5 grupos.

Plano de ação

Etapa 1

Inicialmente, definam junto ao professor:

- uma data para a realização de um evento na escola a fim de vender um produto elaborado anteriormente pelo grupo;
- para onde será destinado o lucro obtido com a venda dos produtos.

Etapa 2

Façam uma pesquisa de mercado, identificando os tipos de produto que costumam ser vendidos na região em que estudam, se existe alguma demanda ou necessidade específicas, entre outras informações que contribuam para a escolha de um produto que atenda ao público-alvo.

Etapa 3

Em grupo, discutam as informações obtidas nas etapas **1** e **2** e decidam qual será o produto elaborado e vendido no dia do evento. O produto deve corroborar com a produção ou o consumo sustentável. Pode ser, por exemplo, sabão feito de óleo de cozinha usado, acessórios para animais domésticos feitos de materiais recicláveis, etc.

Após a definição do produto, pesquisem onde ele pode ser adquirido ou como o fabricar. É importante estarem atentos aos custos para que o produto seja vendido a um preço viável, obtendo, assim, algum lucro.

Etapa 4

Estudem e determinem a precificação do produto. Considerem os custos para obtê-lo ou elaborá-lo e a média de preço de venda praticada no mercado. Definam previamente o porcentual de lucro que pretendem obter com a venda de cada produto.

Etapa 5

Elaborem uma embalagem sustentável para o produto. Ela deve ser apresentável e evitar o desperdício de materiais. Definam um nome para a marca desse produto.

Etapa 6

Confeccionem um material para divulgar a data do evento à comunidade, aproveitando para divulgar o produto que será vendido. Pode ser um panfleto, uma imagem ou um vídeo para ser veiculado em alguma rede social, por exemplo. Lembrem-se de mencionar o destino do lucro arrecadado com as vendas na feira.

Etapa 7

Organizem as funções de cada integrante do grupo e definam o que será necessário providenciar antes da realização do evento. Escolham quem ficará responsável pelo atendimento aos clientes e pela realização das vendas, pelo controle financeiro, pela elaboração do produto e pela realização do *marketing* (divulgação do produto).

Para o controle financeiro, podem ser elaboradas planilhas contendo informações de orçamentos, custos para aquisição dos produtos, estoque, quantidade de produtos vendidos, lucro obtido, etc.

Etapa 8

Produto final: realização de um evento na escola para venda de produtos sustentáveis elaborados pela turma.

A turma deve organizar e dividir os espaços destinados para a venda dos produtos de cada grupo.

Cada grupo deve apresentar seu produto aos visitantes e realizar as vendas.

Ao final do evento, a turma deve gravar um vídeo ou um *podcast* relatando a experiência durante a execução do projeto, desde o planejamento, a elaboração e a venda do produto até a entrega do lucro obtido nas vendas para melhorias na comunidade.

Para criar o vídeo ou o *podcast*, consultem a seção *Produções em foco*.

Etapa 3: Professor, a realização de um evento para a venda de produtos elaborados sustentáveis pelos estudantes, cuja destinação do lucro será revertida em melhorias para a comunidade escolar ou local, contribui para o ODS **11**, o ODS **12** e o ODS **15**, incentivando práticas econômicas, sociais e sustentáveis, bem como a reflexão sobre o empreendedorismo como forma de aderir ao mercado de trabalho e contribuir para o desenvolvimento pessoal e do local onde está inserido.

capítulo

2 Matemática comercial e financeira

Introdução

Denominamos Matemática comercial e financeira a área da Matemática que estuda o dia a dia da vida em sociedade no que diz respeito à relação do cidadão com o dinheiro e com o mundo financeiro: nas transações comerciais, no holerite (ou contracheque) que o trabalhador recebe todo mês, no financiamento de bens e imóveis ou na organização do orçamento doméstico, buscando equilíbrio entre a renda familiar e os gastos, no planejamento para o futuro por meio da economia gradativa para formação de uma poupança, etc.

Diariamente, entramos em contato com informações numéricas diversas, algumas delas de grande relevância social. Saber compreendê-las e interpretá-las corretamente é fundamental ao exercício pleno da cidadania. Acompanhe, a seguir, algumas das muitas situações a que nos referimos.

É comum encontrarmos um mesmo produto sendo vendido com preços diferentes em lugares distintos. Imagine que uma caneta seja vendida por R$ 2,65 em uma loja **A** e por R$ 2,20 em uma loja **B**. Embora a diferença seja de "apenas" R$ 0,45, é importante ter em mente que, ao comprar na loja **A**, pagamos uma diferença percentual de aproximadamente 20% em relação ao menor preço. Para que as pequenas diferenças de preço que pagamos por produtos ao longo do mês não impactem no orçamento familiar, é importante fazer pesquisa de preços em diferentes lojas antes de realizar as compras.

É necessário também compreender conceitos matemáticos para tomar certas decisões comerciais, como em uma promoção de Black Friday, em que, por exemplo, 2 mercados diferentes aplicam 2 promoções distintas para um mesmo produto.

Halil Korkmazer/Shutterstock

A Black Friday ocorre um dia depois do Dia de Ação de Graças nos Estados Unidos, na última sexta-feira do mês de novembro. Esse dia dá início às compras natalinas, e diversos estabelecimentos em todo o mundo aplicam descontos nos produtos que comercializam. Mas é necessário ficar atento a eventuais golpes, muito comuns nesse período.

Pense nisto

Não escreva no livro

Considere que dois mercados **A** e **B** vendem um mesmo produto a um mesmo preço e decidem fazer uma promoção no preço desse produto. No mercado **A**, a promoção é "leve 3, pague 2"; já no mercado **B**, a oferta é de 25% de desconto em cada unidade vendida. Do ponto de vista matemático, qual promoção é mais vantajosa para o consumidor?

Em outras situações comerciais, como na aquisição de bens como eletrodomésticos, computadores, *smartphones*, veículos e imóveis, é necessário conhecer ferramentas matemáticas que permitam a tomada de decisões financeiras conscientes, a fim de proteger nossa saúde financeira familiar.

Pense nisto: A do mercado **A**. Supondo que uma unidade de um produto custe R$ 10,00, na promoção "leve 3, pague 2", o valor total de 3 unidades será R$ 20,00; já na promoção que dá 25% de desconto em cada unidade, o valor total de 3 unidades será R$ 22,50. Porém, apesar de a promoção do mercado **A** dar um desconto maior, é necessário comprar 2 unidades a mais para participar dela.

Na compra de algum bem ou produto, precisamos saber se há descontos para o pagamento à vista e conhecer os mecanismos dos financiamentos, as taxas cobradas, o valor das prestações e o prazo, para tomar a decisão que melhor se encaixe em nosso perfil e em nossa condição financeira.

Outro exemplo de aplicação das ferramentas matemáticas se dá quando uma pessoa tem uma reserva de dinheiro e procura uma instituição financeira para fazer um investimento. É fundamental que ela conheça minimamente as diferentes opções de aplicação do capital, as vantagens e os riscos inerentes a cada operação. Além disso, espera-se que a pessoa esteja munida de habilidades que permitam a ela calcular as taxas cobradas pela instituição e os impostos devidos, bem como o montante de investimento ao final do prazo da operação.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Aumentos e descontos

Acompanhe a situação de uma mercadoria que teve seu preço reajustado para um valor maior do que o atual.

Certa loja vende um monitor de computador por R$ 750,00. Se a loja promover um aumento de 6% nos preços, quanto o monitor passará a custar?

- O aumento será 6% de 750 reais: 0,06 · (750 reais) = 45 reais.
- O novo preço do monitor será 750 reais + 45 reais = 795 reais.

Poderíamos fazer $750 + 0{,}06 \cdot 750 = 750 \cdot (1 + 0{,}06) = 1{,}06 \cdot 750 = 795$.

Note que o preço inicial do monitor ficou multiplicado por 1,06. Dispondo de uma calculadora simples, obtemos esse resultado pressionando:

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Exemplo de resposta: calcular 1% de 750 e depois multiplicar por 6: 10% de 750 é 75; 1% de 750 é 7,5; e 6% de 750 é 6 · 7,5 = 45.

Não escreva no livro

Pense nisto

Como você calcula mentalmente 6% de 750?

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos concluir que:

- se o aumento fosse de 30%, multiplicaríamos o preço original por (1 + 0,30) = 1,30;
- se o aumento fosse de 16%, multiplicaríamos o preço original por (1 + 0,16) = 1,16;
- se o aumento fosse de x%, multiplicaríamos o preço original por:

$$1 + \frac{x}{100}$$

Vídeo

Agora, acompanhe a situação dessa mesma mercadoria tendo um desconto.

Se, em uma liquidação, fosse anunciado um desconto de 20% no preço do monitor de computador, quanto ele passaria a custar?

- O desconto seria 20% de 750 reais: 0,2 · (750 reais) = 150 reais.
- O novo preço do monitor seria 750 reais − 150 reais = 600 reais.

Poderíamos fazer diretamente $750 - 0{,}2 \cdot 750 = 750 \cdot (1 - 0{,}2) = 750 \cdot 0{,}80 = 600$.

Note que o preço original do monitor ficou multiplicado por 0,8. Isso significa que, nessa liquidação, pagaríamos 80% do valor original do monitor.

Para fazermos esses cálculos com uma calculadora simples, basta pressionar:

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Pense nisto: Seja p o preço inicial. Aumento: 250% de p, isto é, $\frac{250}{100} \cdot p = 2{,}5p$.

Assim, o novo preço será $p + 2{,}5p = 3{,}5p$, isto é, o preço original é multiplicado por 3,5. É importante que os estudantes saibam lidar com aumentos percentuais maiores do que 100%.

Não escreva no livro

Pense nisto

Se o aumento no preço de um produto fosse de 250%, por qual número multiplicaríamos o preço original para saber quanto passará a custar esse produto?

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos concluir que:

- se o desconto fosse de 8%, multiplicaríamos o preço original por $(1 - 0{,}08) = 0{,}92$;
- se o desconto fosse de 15%, multiplicaríamos o preço original por $(1 - 0{,}15) = 0{,}85$;
- se o desconto fosse de x%, multiplicaríamos o preço original por:

$$1 - \frac{x}{100}$$

Variação percentual

No início do mês, o preço promocional do quilograma do peito de frango, em um mercado, era de R$ 20,00. No fim do mês, o mesmo corte de frango era vendido a R$ 23,40 o quilograma.

De que maneira podemos expressar esse aumento?

- Em valores absolutos, o aumento foi de R$ 3,40.
- Calculando a razão entre esse aumento e o valor inicial, encontramos $\frac{3{,}40}{20} = 0{,}17 = 17\%$.

Dizemos que 17% é a **variação percentual** do preço do quilograma do frango.

Outra possibilidade é fazer $\frac{23{,}40}{20{,}00} = 1{,}17 = 1 + \underbrace{0{,}17}_{\text{aumento de 17\%}}$.

Temos a seguinte relação que expressa a variação percentual.

$$p = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{V_1}{V_0} - 1$$

Em que:

- V_0 é o valor inicial de um produto (com $V_0 \neq 0$);
- V_1 é o valor desse produto em uma data futura;
- p é a variação percentual do preço desse produto no período considerado, expressa na forma decimal;
- se $p > 0$, dizemos que p representa a taxa percentual de crescimento (ou acréscimo), conforme vimos anteriormente, no preço do quilograma de peito de frango;
- se $p < 0$, dizemos que p representa a taxa percentual de decrescimento (ou decréscimo).

Se, em certo mês, o preço do quilograma do peito de frango tivesse diminuído de R$ 20,00 para R$ 17,00, teríamos:

$$p = \frac{17 - 20}{20} = \frac{-3}{20} = -0{,}15$$

O sinal negativo obtido indica uma redução de 15% no valor inicial do quilograma do peito de frango.

Horizon Space/Shutterstock

De acordo com a Associação Brasileira de Proteína Animal (ABPA), em 2022, o Brasil assumiu o posto de segundo maior produtor de frango no mundo.

Atividades resolvidas

1. O Produto Interno Bruto (PIB) de um país aumentou 3% em um ano, passando a ser de 412 bilhões de dólares. Qual era o PIB antes desse aumento?

Solução:

1º modo

Podemos fazer:

$$p = \frac{V_1 - V_0}{V_0} \Rightarrow 0{,}03 = \frac{412 - V_0}{V_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}03\,V_0 = 412 - V_0 \Rightarrow 1{,}03 \cdot V_0 = 412 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{412}{1{,}03} = 400 \text{ (em bilhões de dólares)}$$

2º modo

Podemos montar a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{rcl} 412 \text{ bilhões} & \text{———} & 103\% \\ x & \text{———} & 100\% \end{array} \Rightarrow x = 400$$

O PIB era de 400 bilhões de dólares.

2. Um produto sofreu dois reajustes mensais e consecutivos de 5% e 10%, respectivamente.

a) Qual será o preço do produto após os aumentos se antes custava R$ 400,00?

b) E o aumento percentual acumulado?

Solução:

a) Após o 1º aumento, o preço em reais passará a ser $1{,}05 \cdot 400 = 420$. Após o 2º aumento, o preço em reais passará a ser $1{,}10 \cdot 420 = 462$.

Note que o preço original fica multiplicado por 2 fatores (1,05 e 1,1) após os 2 aumentos sucessivos: $1{,}05 \cdot 1{,}10 \cdot 400 = 462$.

b) $p = \frac{462 - 400}{400} = \frac{62}{400} = 0{,}155$; isto é, 15,5% de aumento acumulado.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. $0{,}15 \cdot 68 = 10{,}20$
$68 - 10{,}20 = 57{,}80$; ou seja, R$ 57,80.

1. O preço de um par de sapatos era R$ 68,00. Em uma liquidação, ele foi vendido com 15% de desconto. Quanto passou a custar?

2. Uma loja aumentou em 12% o preço de todos os produtos. Quanto passará a custar um artigo cujo preço antes do aumento era:

a) R$ 40,00? **b)** R$ 150,00?

a) $40 \cdot 1{,}12 = 44{,}80$; ou seja, R$ 44,80.

3. O preço de um produto aumentou de R$ 320,00 para R$ 360,00.

a) Qual é a taxa percentual desse aumento?

b) Qual seria o novo preço do produto se o aumento tivesse sido de 35%?

4. Em pesquisa em um *site* de reserva de hotéis, Raul encontrou uma promoção na diária de um hotel de R$ 250,00 por R$ 210,00.

a) Qual é o percentual de desconto oferecido? 16%

b) Raul aproveitou a promoção e fez uma reserva de uma semana no hotel pelo *site*. Sabendo que serão cobradas as taxas de 1,5% sobre o total da reserva e R$ 15,00 pela emissão do *voucher*, qual será o total a ser pago por Raul? R$ 1.507,05

5. **Experimente** usar uma calculadora simples para responder às perguntas a seguir.

a) O preço do quilograma do tomate em um sacolão é R$ 8,40 e sofrerá uma redução de 7,5%. Qual será o novo preço?

b) O aluguel de uma sala comercial é R$ 1.480,00 ao mês. Foi autorizado um aumento de 11,3% nesse valor. Qual será o novo valor do aluguel dessa sala?

c) O valor do salário bruto de um trabalhador é R$ 2.850,00 e sobre esse valor incidem 9,40% de descontos. Qual é o valor do salário líquido desse trabalhador?

6. Compare os aumentos percentuais dos preços de 3 produtos que foram reajustados em um mercado.

Reajuste de preços

Produto	Preço anterior (em R$)	Preço atual (em R$)
A	4,00	5,00
B	15,00	18,00
C	6,00	7,50

Dados elaborados para fins didáticos.

5. a) $8{,}40 - 7{,}5\% = 7{,}77$; ou seja, R$ 7,77.
b) $1\,480 + 11{,}3\% = 1\,647{,}24$; ou seja, R$ 1.647,24.
c) $2\,850 - 9{,}40\% = 2\,582{,}10$; ou seja, R$ 2.582,10.

2. b) $150 \cdot 1{,}12 = 168{,}00$; ou seja, R$ 168,00.

3. a) $\frac{360 - 320}{320} = 0{,}125 = 12{,}5\%$; ou seja, 12,5% de aumento.
b) $1{,}35 \cdot 320 = 432$; ou seja, R$ 432,00.

A variação do preço do produto **B** é menor do que as do produto **A** e do produto **C**, que são iguais.

8. a) $\begin{matrix}150 \text{ — } 0{,}12 \\ x \text{ — } 1\end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}12x = 150 : 1 \Rightarrow x = \frac{150}{0{,}12} \Rightarrow x = 1\,250$; ou seja, R$ 1.250,00.

b) 1 250 − 150 = 1 100; ou seja, R$ 1.100,00.

Não escreva no livro

7. Após um aumento de 24%, o salário bruto de Ana passou a ser de R$ 4.340,00.

a) Qual era o salário bruto de Ana? R$ 3.500,00

b) Supondo que, sobre os salários brutos, original e reajustado, incidam impostos de 16%, determine quanto Ana passará a pagar a mais de impostos por mês. R$ 134,40

8. Uma companhia aérea promoveu uma redução de R$ 150,00 no preço de uma passagem, o que corresponde a 12% de desconto. Determine em seu caderno o preço da passagem:

a) sem a redução;

b) com a redução.

9. Por meio de uma campanha de redução do consumo de água, um edifício residencial, em certo mês, reduziu o consumo em 14% e passou a gastar 1075 m^3 de água.

a) Qual foi o consumo de água do condomínio no mês anterior? 1 250 m^3

b) Para o mês seguinte, os moradores se comprometeram em reduzir o consumo para 1000 m^3 de água. Qual deverá ser, aproximadamente, a nova redução percentual no consumo de água para atingir essa meta? Aproximadamente 6,98%.

10. Considere p o preço de um produto (artigo ou serviço). Determine, em função de p, o preço desse produto após:

a) dois aumentos sucessivos de 20%; $1{,}44p$

b) duas reduções sucessivas de 20%; $0{,}64p$

c) um aumento de 20% seguido de uma redução de 20%. $0{,}96p$

11. Um sabonete, cujo preço tabelado de venda é R$ 2,40, é vendido em três mercados distintos, **X**, **Y** e **Z**, com as seguintes promoções:

- mercado **X**: leve 4, pague 3;
- mercado **Y**: desconto de 15% sobre o preço de cada unidade;
- mercado **Z**: leve 6, pague 5.

Determine em seu caderno a opção mais vantajosa, do ponto de vista matemático, para o consumidor que comprar:

a) 12 unidades do sabonete; Mercado **X**.

b) 7 unidades do sabonete. Mercado **Y**.

12. O reajuste anual autorizado para certo plano de saúde foi de 32%. Enquanto aguardava o resultado das negociações sobre os reajustes, a seguradora do plano já havia aumentado a mensalidade em 10%. Determine o percentual que deve ser aplicado ao valor vigente da mensalidade a fim de se cumprir o reajuste autorizado. 20%

13. Maria Clara comprou um apartamento por R$ 120.000,00 e o revendeu, 10 anos depois, por R$ 450.000,00. Qual é o percentual de valorização desse imóvel no período?

14. O número de reclamações registradas no Serviço de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa aumentou 28% em maio, em comparação com abril, e 5% em junho, em comparação com maio. Em julho foi realizada uma campanha que conseguiu reduzir o número em 10%, em comparação com junho, resultando em 9 072 reclamações.
Determine:

a) o percentual acumulado de aumento do número de reclamações nesses 3 meses; 20,96%

b) o número de reclamações recebidas em maio. 9 600 reclamações.

15. Um espetáculo musical aumentou o preço do ingresso em 5%. Verificou-se, então, a partir desse aumento, uma queda de 10% no número de ingressos vendidos.

a) A receita obtida pelo espetáculo aumentou ou diminuiu? Qual foi a variação percentual? Diminuiu; −5,5%.

b) Se o número de ingressos vendidos tivesse diminuído x% no lugar de 10%, a receita permaneceria a mesma. Qual é o valor de x, aproximadamente? Aproximadamente 4,76%.

16. Considere p o preço original de um produto (artigo, bem ou serviço) que sofreu variações em seu valor. Para cada item, elabore no caderno um problema que possa ser respondido pela equação dada. Em seguida, obtenha o valor de p em cada caso.

Os exemplos de resposta encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $(0{,}9)^3 \cdot p = 2916$

b) $0{,}8 \cdot 0{,}85 \cdot p = 142{,}80$

c) $(1{,}05)^2 \cdot p = 4410$

d) $p + 1{,}14 \cdot p = 181900$

13. 450 000 − 120 000 = 330 000

$\begin{matrix}330\,000 \text{ — } x \\ 120\,000 \text{ — } 100\end{matrix} \Rightarrow 120\,000 \cdot x = 330\,000 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{33\,000\,000}{120\,000} = 275$; ou seja, 275%.

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Financeira* e *Educação Fiscal*.

A Matemática e o trabalho: entendendo o holerite

Você conhece o termo **holerite** ou **contracheque**? O holerite é um documento que registra o pagamento recebido por um trabalhador, incluindo o salário-base, eventuais horas extras, comissões, férias, 13º salário (quando pertinente) e os descontos previstos por lei. Esse documento é emitido pela empresa empregadora, seja pública, seja privada.

Analise o holerite de Samara, referente ao salário de novembro de 2024. Ela trabalha há 10 anos como gerente de relacionamento na rede de drogarias Vida e Saúde.

Empregador — **Recibo de Pagamento de Salário**

Nome Vida e Saúde Cia. — Referente ao mês/Ano

Endereço Av. Liberdade, 2300 Bairro: Jardins da Colina CEP: 52350-002 Belém/PA

CNPJ **00.000.000/00001-10** — **Novembro - 24**

CÓDIGO: NOME DO FUNCIONÁRIO	CBO	FUNÇÃO
05564 Samara de Souza Braga	**5211-10**	**Gerente**

Cód.	Descrição	Proventos	Referência	Descontos
001	SALÁRIO	3.763,55		
051	INSS SOBRE SALÁRIO		12%	350,45
063	IRRF SOBRE SALÁRIO		15%	130,53
063	PLANO DE SAÚDE			105,40
			Total de Proventos 3.763,55	Total dos Descontos 586,38
			Líquido a Receber	3.177,17

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Holerite elaborado para fins didáticos.

Você conhece os principais descontos que incidem sobre os salários e como eles são calculados?

O **INSS** sobre o salário refere-se à contribuição que o trabalhador faz mensalmente ao Instituto Nacional de Seguro Social, que é o órgão responsável pelo pagamento das aposentadorias e dos demais benefícios aos trabalhadores brasileiros que contribuem com a Previdência Social. Dentre os principais benefícios, podemos citar: aposentadoria, pensão por morte, auxílio-doença e salário-maternidade, já estudados no Volume 1 desta coleção. O Imposto de Renda Retido na Fonte (**IRRF**) passou a ser cobrado dessa maneira, diretamente na folha de pagamento, em 1954. Com o término do ano, muitos brasileiros precisam fazer a declaração de Imposto de Renda da Pessoa Física (**IRPF**), na qual se prestam as contas do ano anterior para que a Receita Federal verifique se há mais impostos a se pagar, ou se há impostos a serem restituídos ao trabalhador.

Mehaniq/Shutterstock

Receita Federal

Ao final de 1979, em uma campanha publicitária para aumentar a arrecadação, foi usada a imagem de um leão – símbolo da ação fiscalizadora da Receita Federal. Até hoje, o imposto de renda está intimamente associado à imagem do leão.

Eric Isselee/Shutterstock

O IRRF é um tributo que a Receita Federal cobra sobre a renda do trabalhador e uma das principais fontes de arrecadação da União, que repassa parte dos valores arrecadados a estados e municípios. Os recursos provenientes dessa arrecadação podem ser destinados a saúde, educação e programas de assistência social, entre outras áreas.

O cálculo do IRRF mensal é progressivo e análogo ao cálculo do INSS. No entanto, a tabela a seguir explica como calcular diretamente o imposto de acordo com a faixa salarial, sem que seja necessário calcular os impostos das faixas anteriores.

Tabela de IRRF vigente em novembro de 2024

Base de cálculo	Alíquota	Dedução
Até R$ 2.259,20	isento	R$ 0,00
De R$ 2.259,21 até R$ 2.826,65	7,50%	R$ 169,44
De R$ 2.826,66 até R$ 3.751,05	15,00%	R$ 381,44
De R$ 3.751,06 até R$ 4.664,68	22,50%	R$ 662,77
Acima de R$ 4.664,68	27,50%	R$ 896,00

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Fazenda. Tributação de 2024, 4 maio 2023 [atualizado em 9 fev. 2024]. Disponível em: https://tedit.net/4azyw3. Acesso em: 12 jul. 2024.

No holerite de Samara, precisamos primeiro levar em consideração que o IRRF recairá sobre o resultado da subtração do salário bruto dela pelo desconto do INSS, ou seja, sobre: 3 763,55 – 350,45 = 3 413,10. Devemos observar, então, que a terceira faixa da tabela deve ser aplicada, usando a alíquota de 15,00% e, do valor obtido, subtraímos 381,44:

$$\text{IRRF} = 0{,}15 \cdot 3\,413{,}10 - 381{,}44 \simeq 511{,}97 - 381{,}44 = 130{,}53;$$ ou seja, R$ 130,53.

1. Calcule, pela tabela de 2024, o imposto de renda de um brasileiro que receba salário de R$ 5.620,00, já com o INSS descontado. Quem recebe R$ 5.620,00, já com o INSS descontado, está na quinta faixa da tabela do IRRF de 2024. Assim, o valor do imposto será: 0,275 · R$ 5.620,00 – R$ 896,00 = R$ 649,50.

2. Atualmente, no Brasil, existem duas maneiras principais de se trabalhar: com a Carteira de Trabalho assinada ou como trabalhador autônomo. Pesquise as principais características de cada um desses tipos, suas vantagens e desvantagens. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

3. Nos últimos anos, um novo tipo de trabalhador autônomo surgiu: o trabalhador autônomo que atende demandas a partir de aplicativos digitais, chamado trabalhador plataformizado ou uberizado. Junto a um colega, levante as principais características desse regime de trabalho. Depois, conversem sobre elas, comparando-as às características do trabalho autônomo não uberizado, e registrem no caderno as conclusões.
Resposta pessoal.

Juro

A palavra **juro** é bem familiar ao nosso cotidiano e está amplamente difundida nos mais variados veículos de comunicação (rádio, TV, jornal, internet, etc.).

Note a seguir algumas situações do dia a dia em que aparecem juro.

- Depois de fazer um empréstimo em um banco, o cliente deverá, ao final do prazo estabelecido, devolver ao banco a quantia emprestada parcelada mensalmente e acrescida de juro, devido ao "aluguel" do dinheiro.
- Para investir em uma caderneta de poupança, o poupador transfere uma quantia ao banco. A cada mês é incorporado juro ao saldo dessa poupança.
- Ao comprar um imóvel financiado, cada prestação mensal paga pelo consumidor embute um valor correspondente ao juro.
- Quando o saldo da conta-corrente fica negativo, os bancos podem cobrar juro diário sobre o saldo devedor até que o cliente deposite o valor necessário para quitar a dívida.

Geralmente, quando se realiza alguma dessas operações, fica estabelecida uma taxa de juro (i por cento) por período (dia, mês, ano, etc.) que incide sobre o valor da transação.

Conheça alguns termos de uso frequente em Matemática financeira.

- **UM – unidade monetária**: real, dólar, euro ou qualquer outra moeda.
- ***C* – capital**: o valor inicial de um empréstimo, dívida ou investimento.
- ***i* – taxa de juro**: a letra i vem do inglês *interest* ("juro"), e a taxa é expressa na forma percentual por período. Por exemplo, 5% ao mês (a.m.), 0,2% ao dia (a.d.), 10% ao ano (a.a.), etc.
- ***J* – juro**: corresponde ao valor obtido quando aplicamos a taxa sobre o capital ou sobre algum outro valor da transação. O juro é expresso em unidade monetária.
- ***M* – montante**: corresponde ao capital acrescido do juro obtidos na transação, isto é, $M = C + J$.

Em Matemática financeira, costuma-se adotar, para o período de um mês, o chamado **mês comercial**, com 30 dias.

Muitas pessoas recorrem ao empréstimo bancário quando querem abrir um negócio próprio, por exemplo.

Zivica Kerkez/Shutterstock

Juro simples

No chamado regime de juro simples, a taxa de juro incide, a cada período, sobre o valor inicialmente devido e, desse modo, o juro acrescido é constante por período. Considere a seguinte situação envolvendo regime de juro simples.

Marcos teve um problema de infiltração de água na residência dele e precisou fazer um reparo de urgência. Como ele estava sem nenhuma reserva de dinheiro disponível, pediu a um amigo que lhe emprestasse os R$ 4.500,00 necessários para esse reparo. O amigo ofereceu o recurso e, como forma de retribuir a gentileza, Marcos comprometeu-se a devolver o dinheiro emprestado acrescido de juro simples de 1% a.m. ao final de 6 meses.

Ground Picture/Shutterstock

Segundo a Federação Brasileira de Bancos (Febraban), em 2022, houve um aumento de cerca de 18% na realização de empréstimos bancários pelas famílias brasileiras em relação ao ano anterior.

Que valor Marcos devolverá ao amigo no final de 6 meses?

Nesse regime, o juro incide, todo mês, sobre o valor inicialmente emprestado, isto é, é constante todo mês. Assim, em cada mês, o juro é de:

$$1\% \text{ de } 4\,500 = 0{,}01 \cdot 4\,500 = 45; \text{ ou seja, R\$ } 45{,}00.$$

Como o prazo estipulado para o pagamento foi de 6 meses, o total de juro a ser pago é de:

$$6 \cdot 45 = 270; \text{ ou seja, R\$ } 270{,}00.$$

Desse modo, Marcos devolverá ao amigo um total de:

$$4\,500 + 270 = 4\,770; \text{ ou seja, R\$ } 4.770{,}00.$$

Podemos obter uma expressão geral para o juro simples e para o montante de uma transação financeira nesse regime, baseando-nos no exemplo anterior.

Um capital C, aplicado a juro simples a uma taxa i por período (na forma decimal), gera, no final de n períodos, um total de juro J, dado por:

$$J = i \cdot C \cdot n$$

Logo, o montante dessa transação é dado por:

$$M = C + J \Rightarrow M = C + i \cdot C \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = C \cdot (1 + i \cdot n)$$

Atividades resolvidas

3. Um capital de R$ 1.200,00 é aplicado em regime de juro simples, por 3 anos, à taxa de 1% ao mês. Calcule o juro dessa operação.

Solução:

Podemos aplicar a fórmula do juro, lembrando que a taxa deve ser compatível com a unidade de medida de tempo considerada.

Assim, $C = 1200$; $i = \frac{1}{100} = 0{,}01$ e $n = 36$ meses.

Logo, temos:

$$J = C \cdot i \cdot n = 1200 \cdot 0{,}01 \cdot 36 \Rightarrow J = 432$$

O total do juro é R$ 432,00.

4. Um capital de R$ 5.400,00, aplicado por 1,5 ano em regime de juro simples, gerou um montante de R$ 7.830,00. Qual foi a taxa de juro mensal dessa aplicação?

Solução:

Temos $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$. Note que 1,5 ano = 18 meses. Assim:

$$7830 = 5400 \cdot (1 + i \cdot 18) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7830}{5400} = 1 + 18i \Rightarrow 1{,}45 = 1 + 18i \Rightarrow 0{,}45 = 18i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \frac{0{,}45}{18} = 0{,}025 = 2{,}5\%$$

A taxa de juro mensal foi de 2,5% a.m.

Não escreva no livro

Pense nisto

Explique como resolver a atividade resolvida **4** sem usar fórmula.

O total de juro da transação é igual a 7 830 – 5 400 = 2 430, ou seja, R$ 2.430,00. Percentualmente, esse valor representa $\frac{2430}{5400} = 0{,}45 = 45\%$ do capital investido. Como o juro é constante por mês (pois é aplicado sempre sobre o mesmo valor), para obter a taxa mensal, basta fazer $i = \frac{0{,}45}{18} = 0{,}025$, ou seja, 2,5% a.m.

Em alguns raros casos, o juro simples é usado em transações financeiras. Porém, a maioria das transações financeiras oficiais (empréstimos bancários, financiamentos, investimentos e aplicações financeiras, juro de cheque especial, juro de cartão de crédito, etc.) não obedece a esse regime de juro, e sim ao regime de juro compostos, que será estudado mais adiante neste capítulo.

Você já ouviu falar do "juro de mora"?

Essa expressão refere-se ao juro cobrado quando um consumidor atrasa o pagamento de uma conta, geralmente de consumo, como água, luz, gás, internet, etc.

Além da multa, o consumidor deve pagar juro pelo tempo de atraso, obtido pela aplicação de um percentual (taxa) sobre o valor da conta. Geralmente, esse percentual não passa de 1% a.m.

Se o consumidor atrasa um período menor do que 30 dias (situação muito comum no dia a dia), o cálculo é proporcional:

$$\frac{1\%}{30} = \frac{0{,}01}{30} \simeq 0{,}00033 \simeq 0{,}033\% \text{ (ao dia)}$$

Nesse caso, se uma conta de R$ 400,00 é paga com 20 dias de atraso, haverá cobrança de juro igual a:

$20 \cdot (0{,}033\% \text{ de } 400) = 20 \cdot (0{,}00033 \cdot 400) = 2{,}64$; ou seja, R$ 2,64.

Nesse contexto, para saber o total de juro que o consumidor irá pagar, é aplicado juro simples sobre o valor da conta.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

22. a) $2C = C \cdot (1 + 0{,}05 \cdot n) \Rightarrow 2 = 1 + 0{,}05n \Rightarrow n = 20$; ou seja, 20 meses.
b) $3C = C \cdot (1 + 0{,}05 \cdot n) \Rightarrow 3 = 1 + 0{,}05n \Rightarrow n = 40$; ou seja, 40 meses.
c) $10C = C \cdot (1 + 0{,}05 \cdot n) \Rightarrow 10 = 1 + 0{,}05n \Rightarrow n = 180$; ou seja, 180 meses.
d) $M = C + 0{,}8C = 1{,}8C$
$1{,}8C = C \cdot (1 + 0{,}05 \cdot n) \Rightarrow 1{,}8 = 1 + 0{,}05n \Rightarrow n = 16$; ou seja, 16 meses.

17. Calcule o juro simples obtido nas seguintes condições.

a) Um capital de R$ 220,00, aplicado por 3 meses, à taxa de 4% a.m.
$J = 3 \cdot 0{,}04 \cdot 220 = 26{,}40$; ou seja, R$ 26,40.

b) Um capital de R$ 540,00, aplicado por 1 ano, à taxa de 5% a.m.
$J = 12 \cdot 0{,}05 \cdot 540 = 324{,}00$; ou seja, R$ 324,00.

c) Uma dívida de R$ 80,00, paga em 8 meses, à taxa de 12% a.m.
$J = 8 \cdot 0{,}12 \cdot 80 = 76{,}80$; ou seja, R$ 76,80.

d) Uma dívida de R$ 490,00, paga em 2 anos, à taxa de 2% a.m.
$J = 24 \cdot 0{,}02 \cdot 490 = 235{,}20$; ou seja, R$ 235,20.

18. Um capital de R$ 200,00 é empregado em regime de juro simples. Passados 4 meses, o montante é R$ 240,00. Qual é a taxa mensal de juro simples dessa operação? 5% ao mês.

19. Obtenha o montante de uma dívida, contraída a juro simples, nas seguintes condições.

a) Capital: R$ 400,00; taxa: 48% ao ano; prazo: 5 meses. R$ 480,00

b) Capital: R$ 180,00; taxa: 72% ao semestre; prazo: 8 meses. R$ 352,80

c) Capital: R$ 5.000,00; taxa: 0,25% ao dia; prazo: 3 meses. R$ 6.125,00

20. Uma conta de gás no valor de R$ 48,00 com vencimento em 13 de abril trazia a informação: "Se a conta for paga após o vencimento, incidirão sobre o valor dela multa de 2% e juro de mora de 0,033% ao dia, que serão incluídos na conta futura". Qual será o acréscimo a ser pago sobre o valor da próxima conta por um consumidor que quitou o débito em 17 de abril? E se ele tivesse atrasado o dobro do número de dias para efetuar o pagamento? R$ 1,02; R$ 1,09.

21. Uma conta telefônica trazia a informação: "Contas pagas após o vencimento terão multa de 2% e juro de mora de 0,04% ao dia, a serem incluídos na próxima conta". Sabe-se que Elisa se esqueceu de pagar a conta de agosto, no valor de R$ 255,00. Na conta de setembro, foram incluídos R$ 7,14, referentes ao atraso no pagamento do mês anterior. Com quantos dias de atraso Elisa pagou a conta de agosto?
Valor da multa: $0{,}02 \cdot 255 = 5{,}10$.
Juro total cobrado: $7{,}14 - 5{,}10 = 2{,}04$.
Juro diário: $\frac{0{,}04}{100} \cdot 255 = 0{,}102$.
Número de dias em atraso: $\frac{2{,}04}{0{,}102} = 20$.

22. Um capital é aplicado, a juro simples, à taxa de 5% a.m. Quanto tempo, no mínimo, ele deverá ficar aplicado a fim de que seja possível resgatar:

a) o dobro da quantia aplicada?

b) o triplo da quantia aplicada?

c) 10 vezes a quantia aplicada?

d) a quantia aplicada acrescida de 80% de juro?

23. O preço à vista de uma TV é R$ 900,00. Pode-se, entretanto, optar pelo pagamento de R$ 500,00 de entrada e mais R$ 500,00 um mês após a compra.

a) Qual é a taxa mensal de juro simples do pagamento parcelado? 25% a.m.

b) Qual seria a taxa mensal de juro simples do financiamento se a 2ª parcela fosse paga 2 meses após a compra? 12,5% a.m.

24. Em 01/03/2024, Sônia fez um empréstimo no regime de juro simples. A proposta é que ela devolva a quantia emprestada acrescida de juro em uma das seguintes datas:

01/06/2024 → R$ 1.325,00
01/08/2024 → R$ 1.375,00
01/02/2025 → R$ 1.525,00

Com essas informações é possível determinar a taxa mensal de juro paga por Sônia? E o valor emprestado? Em caso afirmativo, determine-os. Sim; taxa mensal de juro: 2% a.m.; valor emprestado: R$ 1.250,00.

25. Sabe-se que 70% de um capital foi aplicado a juro simples, por 1,5 ano, à taxa de 2% a.m., e o restante foi aplicado no mesmo regime de juro, por 2 anos, à taxa de 18% a.s. (ao semestre). Sabendo que o juro total recebido foi de R$ 14.040,00, determine o valor do capital.
R$ 30.000,00

26. Parte de um capital de R$ 4.000,00 é aplicado a juro simples de 1,5% a.m. O restante é aplicado, na mesma data e pelo mesmo período, à taxa de 36% a.a. Sabendo que, um ano depois, o montante resultante dessas operações é de R$ 5.116,00, qual foi o valor aplicado em cada uma das operações?
Primeira operação: R$ 1.800,00; segunda operação: R$ 2.200,00.

Juro composto

Professor, se julgar pertinente, faça um levantamento prévio do conhecimento dos estudantes sobre caderneta de poupança, o investimento mais conhecido dos brasileiros.

Considere a situação: Miguel juntou R$ 500,00 e abriu uma caderneta de poupança para o filho como presente pelo 10º aniversário do menino.

Vamos supor que o rendimento dessa caderneta de poupança seja de 0,5% ao mês e que não será feita nenhuma retirada de dinheiro nem aporte de recursos nos próximos anos.

Quando completar 18 anos, que valor o filho de Miguel terá disponível nessa caderneta?

O mecanismo pelo qual o saldo dessa poupança vai crescer, mês a mês, é conhecido como regime de **capitalização acumulada** ou regime de **juro composto**.

Qual é o princípio básico desse sistema de capitalização?

- No final do 1º mês, o juro de 0,5% incide sobre os R$ 500,00. O juro obtido (R$ 2,50) é incorporado ao capital, produzindo o primeiro montante (R$ 2,50 + R$ 500,00 = R$ 502,50).
- No final do 2º mês, o juro de 0,5% incide sobre o primeiro montante (R$ 502,50) e o juro obtido (R$ 2,51 aproximadamente) é incorporado ao primeiro montante, produzindo o segundo montante (R$ 2,51 + R$ 502,50 = R$ 505,01).
- No final do 3º mês, o juro de 0,5% incide sobre o segundo montante (R$ 505,01) e o juro obtido (R$ 2,53, aproximadamente) é incorporado ao segundo montante, produzindo o terceiro montante (R$ 2,53 + R$ 505,01 = R$ 507,54), e assim sucessivamente.

Infográfico clicável

Para responder ao problema, seria necessário fazer, mês a mês, durante 96 meses (8 anos), a atualização do saldo dessa caderneta de poupança seguindo o raciocínio apresentado para os 3 primeiros meses. Tal trabalho fica inviável pelo tempo demandado.

No entanto, é possível generalizar esse raciocínio a fim de obter uma expressão que forneça diretamente o saldo da caderneta em certo mês sem que seja necessário conhecer o saldo dos meses anteriores. Também é possível usar planilhas eletrônicas como ferramenta útil na resolução desse e de outros problemas.

Monkey Business Images/Shutterstock

É importante conversar sobre o hábito de poupar, a necessidade de consumir conscientemente e outros temas de educação financeira.

Vamos agora apresentar o raciocínio de maneira genérica.

Consideremos um capital C, aplicado a juro composto, a uma taxa de juro i (expressa na forma decimal) fixa por período, durante n períodos. O período considerado deve ser compatível com a unidade de medida de tempo da taxa.

Temos estas situações.

- Ao final do primeiro período, o primeiro montante será igual a:

$$M_1 = C + C \cdot i \Rightarrow M_1 = C \cdot (1 + i) \quad \text{I}$$

- Ao final do segundo período, o segundo montante será igual a:

$$M_2 = M_1 + i \cdot M_1 = M_1 \cdot (1 + i) \xrightarrow{\text{I}} M_2 = C \cdot (1 + i)^2 \quad \text{II}$$

- Ao final do terceiro período, o terceiro montante será igual a:

$$M_3 = M_2 + i \cdot M_2 = M_2 \cdot (1 + i) \xrightarrow{\text{II}} M_3 = C \cdot (1 + i)^3 \quad \text{III}$$

- Ao final do quarto período, o quarto montante será igual a:

$$M_4 = M_3 + i \cdot M_3 = M_3 \cdot (1 + i) \xrightarrow{\text{III}} M_4 = C \cdot (1 + i)^4$$

- Ao final do n-ésimo período, o n-ésimo montante será igual a:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

fizkes/Shutterstock

Para que possamos investir nosso dinheiro, é muito importante entender os diferentes parâmetros de investimento, o tempo que vamos deixar o dinheiro investido, as taxas envolvidas, etc.

Voltando ao problema da caderneta de poupança do filho de Miguel, vamos determinar o valor que o menino terá ao completar 18 anos, admitindo que não haja nenhuma retirada nem novos depósitos nesse período.

Temos $C = 500$; $i = 0{,}5\% = \frac{0{,}5}{100} = 0{,}005$; e $n = 96$ meses (8 anos).

Precisamos calcular:

$M_{96} = 500 \cdot (1 + 0{,}005)^{96} = 500 \cdot (1{,}005)^{96}$

Com auxílio de uma calculadora científica ou de um computador, obtemos o valor da potência, a saber, $(1{,}005)^{96} \simeq 1{,}61414$, e o montante pedido é $500 \cdot 1{,}61414 = 807{,}07$.

Logo, o filho de Miguel terá R$ 807,07 na caderneta de poupança.

Considere agora esta situação: um jovem cuja renda mensal é R$ 4.800,00 decide organizar uma planilha de custos para equilibrar o orçamento doméstico. A análise dessa planilha nos primeiros meses revelou que, descontados os custos fixos, sobram ainda R$ 600,00.

O jovem tomou, então, uma importante decisão: reservar R$ 250,00 desse excedente para gastos eventuais e aplicar, mensalmente, a quantia de R$ 350,00 em um fundo de investimento pelos próximos 2 anos, a fim de construir outra reserva financeira.

Vamos admitir que o rendimento mensal líquido desse fundo seja, em média, de 0,7% ao mês nesse período. Qual será o valor da reserva financeira disponível do jovem imediatamente após o 24º depósito?

Se julgar oportuno, incentive os estudantes a pesquisarem a respeito dos rendimentos de algumas aplicações financeiras. No ano de 2024, por exemplo, havia algumas aplicações em renda fixa que remuneravam o investidor com uma taxa próximo a 0,7% a.m.

Vamos construir uma tabela para acompanhar a evolução dos rendimentos de cada parcela.

- O 1º depósito renderá juro composto de 0,7% ao mês por 23 meses.
- O 2º depósito renderá juro composto de 0,7% ao mês por 22 meses.
- O 3º depósito renderá juro composto de 0,7% ao mês por 21 meses.

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

- O 23º depósito renderá juro composto de 0,7% ao mês por 1 mês.
- O 24º depósito não renderá juro.

No corpo da tabela a seguir, você encontrará valores do tipo $350 \cdot (1{,}007)^n$, com $n \in \{0, 1, \ldots, 23\}$, em que n é o número de meses de acúmulo de juro. Tais valores foram obtidos da fórmula $M_n = C \cdot (1 + i)^n$.

Evolução dos rendimentos

Mês / Depósito	1	2	3	4	…	23	24
1º depósito	350	$350 \cdot 1{,}007$	$350 \cdot (1{,}007)^2$	$350 \cdot (1{,}007)^3$	…	$350 \cdot (1{,}007)^{22}$	$350 \cdot (1{,}007)^{23}$
2º depósito	–	350	$350 \cdot 1{,}007$	$350 \cdot (1{,}007)^2$	…	$350 \cdot (1{,}007)^{21}$	$350 \cdot (1{,}007)^{22}$
3º depósito	–	–	350	$350 \cdot 1{,}007$	…	$350 \cdot (1{,}007)^{20}$	$350 \cdot (1{,}007)^{21}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
23º depósito	–	–	–	–	…	350	$350 \cdot 1{,}007$
24º depósito	–	–	–	–	…	–	350

Dados elaborados para fins didáticos.

Para responder à pergunta sobre o valor da reserva financeira do jovem, é preciso adicionar os valores da última coluna da tabela:

$$350 \cdot (1{,}007)^{23} + 350 \cdot (1{,}007)^{22} + 350 \cdot (1{,}007)^{21} + \ldots + 350 \cdot 1{,}007 + 350$$

Perceba que essa expressão representa a soma dos termos de uma PG. Invertendo a ordem das parcelas, podemos reescrevê-la assim:

$$350 + 350 \cdot 1{,}007 + 350 \cdot (1{,}007)^2 + \ldots + 350 \cdot (1{,}007)^{22} + 350 \cdot (1{,}007)^{23}$$

Temos:

$$a_1 = 350;\ q = 1{,}007;\ n = 24$$

Lembrando que $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, obtemos:

$$S_{24} = \frac{350 \cdot \left((1{,}007)^{24} - 1\right)}{1{,}007 - 1} \simeq \frac{350 \cdot 0{,}182244}{0{,}007} = 9\,112{,}2$$

Caso julgue pertinente, comente com os estudantes que no estudo do juro composto, deduzimos a fórmula do montante admitindo a taxa de juro constante em cada um dos períodos. No entanto, muitas vezes, as taxas de rentabilidade de um fundo de investimento, por exemplo, variam de um mês para o outro. Quando isso ocorre, podemos calcular os montantes mês a mês lembrando que o princípio de capitalização acumulado é o mesmo.

Ao final de 2 anos, o jovem terá construído uma reserva financeira aproximada de R$ 9.100,00. Essa reserva poderá ser útil em diversos contextos: para quitar, abater ou renegociar a dívida do financiamento de um veículo; em uma eventual perda de emprego; tratamento médico; investimento em cursos para desenvolvimento profissional, entre outros.

Atividades resolvidas

5. Um investidor aplicou R$ 10.000,00 em um fundo de investimento que tem rendimento líquido, em média, de 5% ao ano, a juro composto. Qual é o menor número inteiro de meses necessário para que o montante dessa aplicação seja R$ 50.000,00?

Considere $\log 5 \simeq 0{,}7$ e $\log 105 \simeq 2{,}02$.

Solução:

Temos $\begin{cases} C = 10\,000 \\ M_n = 50\,000 \\ i = 0{,}05 \\ n = ? \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 50\,000 = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}05)^n \Rightarrow 5 = (1{,}05)^n.$

Logo:

$$\log 5 = \log (1{,}05)^n \Rightarrow \log 5 = n \cdot \log \left(\frac{105}{100}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 5 = n \cdot (\log 105 - \log 100) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}7 = n(2{,}02 - 2) \Rightarrow n = 35$$

Assim, o menor número inteiro de meses é 35.

6. No começo do ano, o valor da ação de uma empresa era R$ 80,00. Nos meses de janeiro e fevereiro, as ações dessa empresa valorizaram 30% e 20%, respectivamente. Qual será o valor da ação no final de fevereiro?

Solução:

- No final de janeiro, a ação passará a valer, em reais, $80 + 30\% \cdot 80 = 80 + 0{,}3 \cdot 80 = 80 + 24 = 104$.
- No final de fevereiro, com a valorização de 20%, a ação passará a valer, em reais:

$$104 + 20\% \cdot 104 = 104 + 20{,}8 = 124{,}8$$

Note que:

- o valor da ação, em reais, no final de janeiro é $1{,}3 \cdot 80$;
- o valor da ação, em reais, no final de fevereiro é:

$$1{,}2 \cdot \underbrace{1{,}3 \cdot 80}_{\text{valor de janeiro}} = 1{,}56 \cdot 80 = 124{,}8$$

A valorização acumulada nesses 2 primeiros meses é:

$$(1{,}2 \cdot 1{,}3) - 1 = 1{,}56 - 1 = 0{,}56 = 56\%$$

Observação

- Dados os números reais a e b, com $a > 0$ e $0 < b$ e $b \neq 1$, chama-se **logaritmo** de a na base b (indica-se $\log_b a$) o número real x tal que $b^x = a$:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Assim, por exemplo, $\log_3 9 = 2$; $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; $\log_5 1 = 0$; $\log 1\,000 = 3$ (lembre-se de que, quando a base é omitida, convenciona-se que ela é igual a 10, ou seja, é o **logaritmo decimal**).

- Propriedades dos logaritmos:
Sejam a e c números reais positivos, $b > 0$ e $b \neq 1$, e $\alpha \in \mathbb{R}$.
Valem as seguintes propriedades:

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c \qquad \log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c \qquad \log_b a^{\alpha} = \alpha \cdot \log_b a$$

EXPERIMENTE

Não escreva no livro

Utilizar uma planilha eletrônica para efetuar o cálculo do montante de um investimento financeiro

Agora, vamos usar uma planilha eletrônica para efetuar o cálculo do montante de um investimento financeiro como os mencionados até aqui. Considere uma aplicação de R$ 2.000,00 cujo rendimento fixo é de 9% a.a. (ao ano), no regime de juro composto, já descontados os impostos.

Experimente calcular o saldo dessa aplicação durante 12 anos com o auxílio de uma planilha eletrônica da seguinte maneira:

- Digite o valor inicial (capital) em uma célula qualquer, por exemplo, A1, "2000", e pressione a tecla *Enter*.
- Na célula abaixo dessa (nesse caso, A2) digite "=A1*1,09" (que corresponde ao capital multiplicado pela soma: 1 + taxa de juro no período) e pressione a tecla *Enter*.

  O valor que aparece nessa célula corresponde ao montante da aplicação após 1 ano.
- Para sabermos o montante do investimento após 2 anos, podemos repetir o procedimento descrito anteriormente. Digite, na célula A3, "=A2*1,09" e pressione a tecla *Enter*.
- Para conhecer o montante após 12 anos de aplicação com a mesma taxa de juro, selecione a célula A2, clique no canto inferior direito (alça de preenchimento) e arraste o cursor até a célula A13.

Dessa maneira, o *software* preenche automaticamente cada célula selecionada com o valor da célula anterior (célula acima) multiplicado por 1,09.

	A	B	
1	2000		← Capital
2	2180		← Montante após 1 ano de aplicação
3	2376,2		
4	2590,058		
5	2823,16322		
6	3077,24791		
7	3354,200222		
8	3656,078242		
9	3985,125283		
10	4343,786559		
11	4734,727349		
12	5160,852811		
13	5625,329564		← Montante após 12 anos de aplicação
14			
15			

Reprodução/LibreOffice

Nos *softwares* de planilha eletrônica, é possível formatar os valores como moeda.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

27. **Experimente** usar uma calculadora comum ou a de um computador para calcular o juro e o montante de uma transação financeira a juro composto nas seguintes condições.

a) Capital de R$ 300,00 à taxa de 2% a.m. por 4 meses.

b) Capital de R$ 2.500,00 à taxa de 5% a.m. por 1 ano.

c) Capital de R$ 100,00 à taxa de 16% a.a. por 3 anos.

d) Capital de R$ 900,00 à taxa de 27% a.a. por 6 meses.

a) $M = 300 \cdot (1 + 0{,}02)^4 = 300 \cdot 1{,}0824 \simeq 324{,}73$; ou seja, R$ 324,73.
$J = M - C = 324{,}73 - 300 = 24{,}73$; ou seja, R$ 24,73.

b) $M = 2500 \cdot (1 + 0{,}05)^{12} = 2500 \cdot (1{,}05)^{12} = 4489{,}64$; ou seja, R$ 4.489,64.
$J = M - C = 4489{,}64 - 2500 = 1989{,}64$; ou seja, R$ 1.989,64.

c) $M = 100 \cdot (1 + 0{,}16)^3 = 100 \cdot (1{,}16)^3 = 156{,}09$; ou seja, R$ 156,09.
$J = M - C = 156{,}09 - 100 = 56{,}09$; ou seja, R$ 56,09.

d) $M = 900 \cdot (1 + 0{,}27)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow M = 900 \cdot (1{,}27)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow M = 900 \cdot \sqrt{1{,}27} \Rightarrow M \simeq 1\,014{,}25$; ou seja, R$ 1.014,25.
$J = 1\,014{,}25 - 900 = 114{,}25$; ou seja, R$ 114,25.

28. Poupança: $M = 2\,000 \cdot (1{,}005)^3 = 2\,030$; ou seja, R$ 2.030,00.
Fundo de renda fixa: $M = 2\,000 \cdot (1{,}008)^3 = 2\,048$; ou seja, R$ 2.048,00. $J = 2\,048 - 2\,000 = 48$; ou seja, R$ 48,00.
Imposto: $0{,}25 \cdot 48 = 12$; ou seja, R$ 12,00.
Valor líquido disponível: $2\,048 - 12 = 2\,036$; ou seja, R$ 2.036,00.
O fundo de renda fixa é mais vantajoso.

28. Bete dispõe de R$ 2.000,00 para investir por 3 meses. Ela pretende escolher uma das opções: caderneta de poupança ou um fundo de renda fixa.

Condições de cada investimento

Opção	Rendimento	Imposto
Poupança	0,5% a.m.	–
Fundo de renda fixa	0,8% a.m.	25% sobre o ganho

Dados elaborados para fins didáticos.

Qual é a opção mais vantajosa para Bete, levando em conta exclusivamente o critério financeiro? Nos cálculos, considere $(1{,}005)^3 \simeq 1{,}015$ e $(1{,}008)^3 \simeq 1{,}024$.

29. A caderneta de poupança é o investimento mais popular entre os brasileiros. O rendimento dela gira em torno de 0,5% ao mês e não há cobrança de imposto sobre os ganhos. Márcio investiu R$ 2.000,00 na caderneta de poupança. Admita que, no período considerado, ele não fez depósitos nem saques nessa caderneta de poupança e use: $(1{,}005)^{12} \simeq 1{,}06$; $(1{,}005)^{60} \simeq 1{,}35$; $\log 1{,}005 \simeq 0{,}002$ e $\log 2 \simeq 0{,}301$.

a) Determine o montante obtido por Márcio se ele deixar o recurso investido por: 1 ano, 2 anos, 5 anos e 10 anos. Respectivamente: R$ 2.120,00; R$ 2.247,20; R$ 2.700,00; R$ 3.645,00

b) Qual é o menor número inteiro de meses que o valor investido deverá ficar aplicado para que Márcio possa resgatar R$ 4.000,00? E R$ 10.000,00? 151 meses. 350 meses.

30. Um capital de R$ 5.000,00 é aplicado à taxa de juro composto de 10% ao ano.

a) Qual é o montante da aplicação após 5 anos? Considere $(1{,}1)^5 \simeq 1{,}6$. R$ 8.000,00

b) Qual é o rendimento percentual acumulado dessa aplicação considerando o período de 5 anos? 60%

c) Qual é o tempo mínimo necessário para que o montante dessa aplicação seja R$ 20.000,00? 15 anos.

Considere $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 11 \simeq 1{,}04$.

31. Um capital de R$ 5.000,00, aplicado a uma taxa fixa mensal de juro composto, gerou, em 4 meses, um montante de R$ 10.368,00. Qual foi a taxa praticada? 20% a.m.

32. Suponha que o valor de uma residência em uma área nobre de uma cidade possa aumentar à taxa de 100% ao ano. Qual seria o número mínimo inteiro de anos necessários para que o valor da residência fosse superior a 100 vezes o valor atual dela? 7 anos.

33. Uma dívida do cartão de crédito passou, no regime de juro composto, de R$ 2.000,00 para R$ 5.120,00 em 2 anos. Sabendo que a administradora do cartão opera com uma taxa percentual de juro fixa por ano, determine:

a) o valor dessa taxa ao ano; 60% ao ano.

b) o montante aproximado dessa dívida meio ano após a data na qual ela foi contraída. R$ 2.531,65

Considere $\sqrt{10} \simeq 3{,}16$.

34. Um terreno adquirido por R$ 10.000,00 é valorizado à taxa de 8% ao ano. Qual é a medida de tempo necessária para que o terreno passe a valer R$ 30.000,00? Considere $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$. 12 anos.

35. No quadro a seguir, consta a variação percentual mensal do valor da ação de uma empresa comercializada na Bolsa de Valores:

Mês	Variação
Março	+8%
Abril	+4,5%
Maio	–3,0%

a) Sabendo que, no início de março, a ação valia R$ 25,00, determine o valor dela no final de maio.

b) Qual é a variação percentual do valor da ação nesse período?

36. Um fundo de investimento em ações valorizou 25% no primeiro ano. No segundo ano, o fundo desvalorizou 30% e, no terceiro ano, recuperou 35% das perdas do ano anterior.

a) Quem aplicou R$ 4.800,00 nesse fundo, desde a criação, saiu com lucro ou prejuízo no final dos 3 anos? Expresse esse valor em reais e em termos percentuais, levando em conta o valor investido. Lucro de R$ 30,00, que, percentualmente, equivale a 0,625%.

b) Qual é o rendimento percentual desse fundo no terceiro ano? 15% de valorização.

35. a) $25 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}045 \cdot 0{,}97 \simeq 27{,}37$
b) $\frac{27{,}37}{25} = 1{,}0948$; $1{,}0948 - 1 = 0{,}0948 = 9{,}48\%$ (de valorização)

38. Exemplo de problema: Um capital de R$ 500,00 é empregado à taxa de juro composto de 25% ao ano. Qual é o menor número inteiro de anos necessários para ser atingido um montante mínimo de R$ 8.000,00? Use log 2 ≃ 0,3.

Não escreva no livro

37. Um capital é aplicado a juro composto à taxa de 20% ao ano. Qual é o menor número inteiro de anos necessários para que o montante dessa operação seja pelo menos:

a) o dobro do capital? 4 anos.

b) o triplo do capital? 6 anos.

c) o quíntuplo do capital? 9 anos.

d) 800% a mais que o capital? 12 anos.

Considere log 2 ≃ 0,3 e log 3 ≃ 0,48.

38. Ao resolver um problema sobre juro composto, um estudante chegou à seguinte equação.

$$(1{,}25)^n \cdot 500 = 8\,000$$

Elabore e resolva no caderno um problema ao qual possa ser aplicada a equação dada. É possível resolver essa equação conhecendo-se o logaritmo decimal de apenas um número real positivo?

39. Fernanda aplicou R$ 200,00 em um fundo de ações. No primeiro ano, as ações valorizaram 25%, e, no segundo ano, a valorização foi de 8%.

a) Qual é o rendimento percentual bruto do fundo nesses 2 anos? 35%

b) Qual é o valor líquido resgatado por Fernanda após esses 2 anos se nesse fundo é cobrado imposto de 20% sobre o ganho? R$ 256,00

40. Uma empresa foi multada em R$ 80.000,00 por irregularidades trabalhistas e se comprometeu a pagar essa multa no final de um período de 10 anos, acrescentando a ela juro composto de 10% ao ano. Passados esses 10 anos, a empresa conseguiu pagar apenas o valor da multa, sem o juro devido, e renegociou a dívida a uma taxa anual de juro composto de 4% ao ano, com prazo de 5 anos. Qual será o montante a ser pago nessa nova negociação?
Considere $(1{,}04)^5 = 1{,}2$ e $(1{,}1)^5 = 1{,}6$. R$ 149.760,00

41. Um investimento de risco apresentou uma taxa anual de rendimento fixa, gerando um aumento de 44% do capital investido em 2 anos. Qual foi a taxa anual de juro paga por esse investimento? 20% ao ano.

42. Um economista analisou que, durante os próximos 10 anos, o valor de uma ação de certa empresa sofrerá, em cada ano, uma desvalorização de 5% em relação ao valor do ano anterior.
Admita que o valor atual de uma ação seja V_0.

a) Qual é a fórmula que prevê o valor V dessa ação daqui a t anos ($t \leqslant 10$)? $V(t) = (0{,}95)^t \cdot V_0$

b) Qual é a medida de tempo necessária para que se reduza à metade o valor atual da ação? Use log 19 ≃ 1,28 e log 5 ≃ 0,69. 10 anos e 4 meses.

c) Considerando a queda no valor da ação no item **b**, qual é o percentual de valorização da ação a fim de voltar ao preço inicial dela? 100% de aumento.

43. Um fundo de investimento rende 3% ao semestre no regime de juro composto. A tributação de impostos se dá de acordo com o prazo do investimento da seguinte maneira.

- Até 180 dias: 22,5% sobre o ganho.
- De 181 a 360 dias: 20% sobre o ganho.
- De 361 dias a 720 dias: 17,5% sobre o ganho.
- Acima de 720 dias: 15% sobre o ganho.

a) Edgar investiu, por 180 dias, certa quantia nesse fundo de investimento e recebeu, no final de um semestre, o valor líquido de R$ 2.455,80. Determine em seu caderno qual foi a quantia aplicada por Edgar.

b) Elabore e resolva no caderno um problema considerando esse fundo de investimento e que use na resolução a informação $(1{,}03)^4 \simeq 1{,}126$.

43. a) $C \cdot 1{,}03 - 0{,}225 \cdot (0{,}03 \cdot C) = 2\,455{,}80 \Rightarrow 1{,}03 \cdot C - 0{,}00675 \cdot C = 2\,455{,}80 \Rightarrow 1{,}02325 \cdot C = 2\,455{,}80 \Rightarrow C = 2\,400{,}00$; ou seja, R$ 2.400,00.

b) Exemplo de problema: Um investidor aplicou R$ 2.000,00 nesse fundo de investimento e o resgatou depois de 2 anos. Qual foi o valor líquido resgatado?

Compras à vista ou a prazo

Muitas vezes, o consumidor, ao comprar determinado produto, tem que decidir pela modalidade à vista ou a prazo. Quando não é possível, ou não há o interesse em desembolsar o valor total do produto no ato da compra, existe a opção da compra parcelada. Essa prática é frequente, especialmente na compra de eletrodomésticos, eletroeletrônicos, móveis, automóveis, imóveis, etc. A compra parcelada apresenta juro embutido nas prestações.

Do ponto de vista financeiro, qual é a melhor opção de pagamento nesse caso? Vamos considerar o seguinte problema.

Um modelo de *smart* TV é vendido por R$ 2.500,00 à vista, ou em 5 parcelas mensais de R$ 520,00, sendo a primeira paga 1 mês após a compra.

Natália tem uma reserva de dinheiro que lhe permite comprar à vista. Ela acredita que é melhor aplicar esse dinheiro em um fundo de investimento e, a cada mês, fazer retiradas (saques) para pagar a prestação no caso da compra a prazo. Vamos admitir que, em todos os meses, o rendimento líquido do fundo de investimento seja, em média, de 0,6% a.m.

EXPERIMENTE

Não escreva no livro

Utilizar uma planilha eletrônica para decidir a melhor opção financeira de pagamento

Vamos usar uma planilha eletrônica para decidir a melhor opção financeira de pagamento para Natália. Para tanto:

- Digite o valor da TV em uma célula qualquer, por exemplo, A1, "2500" e pressione a tecla *Enter*.
- Na célula abaixo (nesse caso, A2), digite "=A1*1,006−520" (que corresponde ao valor aplicado acrescido do juro, do qual subtraímos a prestação) e pressione a tecla *Enter*.

O valor que aparece nessa célula corresponde ao saldo da conta de investimentos após 1 mês, já subtraído o valor correspondente à prestação.

	A	B
1	2500	
2	1995	
3	1486,97	
4	975,89182	
5	461,7471709	
6	-55,4823461	
7		

Reprodução/LibreOffice

- Para saber o saldo do investimento após 5 meses com retiradas mensais de R$ 520,00 (valor da prestação), selecione a célula A2, clique no canto inferior direito (alça de preenchimento) e arraste o cursor até a célula A6.

Note que, optando por esse modo de pagamento (aplicar esse dinheiro em um fundo de investimento e, a cada mês, fazer retiradas para pagar a prestação), no último mês, Natália terá que desembolsar R$ 55,48 para completar o valor da última prestação.

Logo, nessas condições, a melhor opção financeira para ela é aproveitar o desconto oferecido para pagamento à vista.

É comum também encontrarmos, no comércio, situações em que o valor total a ser desembolsado em uma compra a prazo coincide com o valor à vista. Imagine que uma outra loja vendesse o mesmo modelo de *smart* TV por R$ 2.500,00 à vista ou em 10 parcelas mensais de R$ 250,00, sendo a primeira 1 mês após a compra.

Nessa situação, é possível perceber a vantagem de manter o recurso aplicado nesse fundo com rendimento de 0,6% a.m. e fazer retiradas mensais para pagamento da prestação.

1. **Experimente** usar um procedimento análogo ao apresentado em uma planilha eletrônica para calcular o valor que sobraria nas condições descritas.

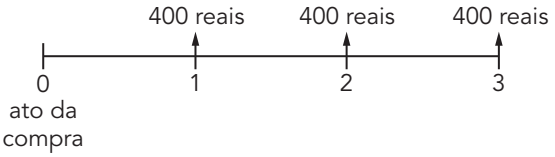
A resposta depende do *software* utilizado pelo estudante.

Valor atual de um conjunto de pagamentos

Vamos agora iniciar o estudo do conceito de **valor atual** (ou **valor presente**) de um conjunto de pagamentos, que nos permite compreender como funcionam alguns financiamentos.

Imagine que um forno de embutir seja vendido em 3 prestações mensais de R$ 400,00, considerando a primeira a ser paga 1 mês após a compra. Sabendo que a loja cobra juro (composto) no financiamento de 5% ao mês, como podemos determinar o preço à vista desse forno?

O esquema a seguir mostra o valor da prestação a ser pago em cada data (mês).



Banco de imagens/ Arquivo da editora

- O pagamento de R$ 400,00 daqui a 1 mês (data **1**) equivale a um pagamento de x_1 reais (na data **zero**), tal que:

$$x_1 \cdot 1{,}05 = 400 \Rightarrow x_1 = \frac{400}{1{,}05}$$

Isto é, aplicando 5% de juro sobre x_1 e adicionando a x_1, obtemos o valor de R$ 400,00, a ser pago na data **1**.

x_1 é o valor atual do pagamento a ser feito na data **1**.

- O pagamento de R$ 400,00 daqui a 2 meses (data **2**) equivale a um pagamento de x_2 reais (na data **zero**), tal que:

$$x_2 \cdot (1{,}05)^2 = 400 \Rightarrow x_2 = \frac{400}{(1{,}05)^2}$$

Ou seja, aplicamos, sobre x_2, juro composto de 5% ao mês por 2 meses seguidos para obter o valor de R$ 400,00, a ser pago na data **2**.

x_2 é o valor atual do pagamento a ser feito na data **2**.

- O pagamento de R$ 400,00 daqui a 3 meses (data **3**) equivale a um pagamento de x_3 reais (na data **zero**), tal que:

$$x_3 \cdot (1{,}05)^3 = 400 \Rightarrow x_3 = \frac{400}{(1{,}05)^3}$$

Aplicamos, sobre x_3, juro composto de 5% ao mês por 3 meses consecutivos para obter o valor de R$ 400,00, que será pago na data **3**.

x_3 é o valor atual do pagamento a ser feito na data **3**.

Assim, calculamos o valor atual de cada prestação. O preço à vista desse forno é:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{400}{1{,}05} + \frac{400}{(1{,}05)^2} + \frac{400}{(1{,}05)^3} \simeq$$

$$\simeq 380{,}95 + 362{,}81 + 345{,}54 \simeq 1089{,}30$$

Logo, o preço à vista do forno de embutir é R$ 1.089,30.

No momento da compra, o consumidor deve analisar com cautela as diferentes opções de pagamento.

Podemos generalizar o raciocínio usado no exemplo anterior considerando uma sequência uniforme de pagamentos iguais a p (com $p \in \mathbb{R}_+$), nas datas 1, 2, ..., n (com $n \in \mathbb{N}^*$), e supondo que a taxa de juro composto do financiamento seja igual a i (com $i \in \mathbb{R}_+$).

Professor, se achar oportuno, apresente e debata em aula a demonstração da fórmula, passagem por passagem.

A fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG é: $S_n = a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$ Temos: $S_n = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} \Rightarrow$

O valor presente (V_a) desse conjunto de pagamentos é:

$$V_a = p \cdot \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right) \Rightarrow S_n = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{-i}{1+i}} \Rightarrow$$

A soma $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}$ corresponde à soma dos n primeiros termos de uma PG com primeiro termo igual a $\frac{1}{1+i}$ e razão também igual a $\frac{1}{1+i}$.

$$\Rightarrow S_n = \frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{-i} \Rightarrow S_n = \frac{1-(1+i)^n}{-i \cdot (1+i)^n}$$

Aplicando a fórmula que aprendemos no capítulo **1** deste Volume, chegamos a:

$$V_a = p \cdot \frac{1-(1+i)^n}{-i \cdot (1+i)^n}$$

Podemos aplicar a fórmula obtida para saber diretamente o valor à vista do forno do exemplo anterior.

$$V_a = 400 \cdot \frac{1-(1{,}05)^3}{-0{,}05 \cdot (1{,}05)^3} \simeq \frac{-63{,}05}{-0{,}05788} \simeq 1089{,}32$$

(a diferença de centavos é devida a arredondamentos).

Atividades resolvidas

7. Um conjunto de sofás pode ser adquirido em 3 prestações mensais iguais de R$ 900,00, considerando a primeira a ser paga 1 mês após a compra. A taxa de juro no financiamento é de 5% a.m. Qual seria o preço à vista desse conjunto de sofás?

Solução:

1º modo: Preço à vista: $\frac{900}{1{,}05} + \frac{900}{(1{,}05)^2} + \frac{900}{(1{,}05)^3} \simeq 857{,}14 + 816{,}33 + 777{,}45 = 2450{,}92$; ou seja, aproximadamente R$ 2.450,92.

2º modo: Podemos usar diretamente a fórmula:

$V_a = 900 \cdot \frac{1-(1{,}05)^3}{-0{,}05 \cdot (1{,}05)^3} \simeq 900 \cdot \frac{-0{,}157625}{-0{,}05788} \simeq 900 \cdot 2{,}7233 = 2450{,}97$; ou seja, aproximadamente R$ 2.450,97.

Note que há uma diferença de valores decimais por causa das aproximações realizadas.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

44. Um *smartphone* é vendido por R$ 3.000,00 à vista ou em 5 prestações mensais iguais sem entrada, considerando a primeira a ser paga 30 dias após a compra. Qual é o valor de cada prestação se a loja cobra juro composto de 4% a.m. no financiamento? Considere $(1{,}04)^5 \simeq 1{,}22$.

45. Um contrato de empréstimo no valor de R$ 504.000,00 foi firmado em condição de pagamento de 2 parcelas anuais de R$ 350.000,00 cada, considerando a primeira a ser paga 1 ano após a assinatura do contrato. Qual é a taxa anual de juro composto cobrada para esse empréstimo? 25% a.a.

46. Uma moto é vendida por R$ 35.000,00 à vista ou em 12 prestações mensais iguais, sem entrada. Qual é o valor de cada parcela se a concessionária opera, no financiamento, com uma taxa de juro composto de 2% ao mês? Considere $(1{,}02)^{12} \simeq 1{,}2682$. R$ 3.301,88

44. $3000 = p \cdot \frac{1-(1{,}04)^5}{-0{,}04 \cdot (1{,}04)^5} \Rightarrow 3000 = p \cdot \frac{1-1{,}22}{-0{,}04 \cdot 1{,}22} \Rightarrow 3000 = p \cdot \frac{-0{,}22}{-0{,}0488} \Rightarrow 3000 \simeq p \cdot 4{,}5082 \Rightarrow p \simeq 665{,}45$; ou seja, R$ 665,45.

Amortização de financiamentos

Em geral, as parcelas de um financiamento são pagas em intervalos regulares de tempo, isto é, elas têm vencimento mensal, bimestral, semestral, anual, e assim por diante.

Amortizar um financiamento significa reduzir o valor da dívida correspondente ao valor financiado. Tal redução ocorre toda vez que uma parcela do financiamento é paga.

Um **sistema de amortização** é um fluxo de pagamentos em que o valor financiado é concedido no início da operação e esse valor, acrescido de juro, é amortizado (diminuído) até o final da operação.

Vamos estudar dois dos principais tipos de financiamento mais usados em nosso sistema financeiro: o Sistema Francês de Amortização (SFA), que teve Richard Price (1723-1791) como um dos pioneiros de uso, dando origem à conhecida Tabela Price, que já foi amplamente usada em financiamentos imobiliários; e o Sistema de Amortização Constante (SAC).

Como características comuns a esses sistemas, podemos citar estas.

- O juro é sempre calculado sobre o saldo devedor, que vai diminuindo a cada parcela paga.
- A amortização mensal (ou bimestral, ou semestral, ...) da dívida corresponde à diferença entre o valor da prestação e o juro cobrado naquele mês (bimestre, semestre, ...), correspondendo, assim, ao valor que efetivamente é abatido da dívida quando se paga uma prestação.
- Existe a possibilidade de antecipação de parcelas, o que reduz encargos e juro.

No SFA, o valor da prestação é sempre o mesmo, enquanto no SAC é o valor amortizado em cada parcela que se mantém constante.

Para entendermos o funcionamento desses dois sistemas, vamos considerar o seguinte exemplo.

De acordo com o Banco Central do Brasil, a taxa de juro de financiamento de veículos novos, em junho de 2024, variava de 0,90% a.m. a 3,90% a.m.

Vamos imaginar um veículo novo, cujo valor nesse ano, de R$ 108.000,00, foi totalmente financiado em 12 meses, à taxa de 2% a.m., considerando a primeira prestação a ser paga 1 mês após a compra.

Vamos simular adiante dois financiamentos possíveis, um do SFA e outro do SAC:

Sistema Francês de Amortização (SFA)

Usando a fórmula estudada no tópico anterior, $V_a = p \cdot \frac{1-(1+i)^n}{-i \cdot (1+i)^n}$, que fornece o valor atual (V_a) de uma sequência uniforme de pagamentos, cada qual igual a p, sendo i a taxa mensal de juro do financiamento, é possível determinar o valor de p.

Temos:

$$108\,000 = p \cdot \frac{1-(1{,}02)^{12}}{-0{,}02 \cdot (1{,}02)^{12}} \Rightarrow p = 10\,212{,}44 \text{ (valor fixo da prestação mensal)}$$

Vamos agora compreender a estrutura desse tipo de financiamento.

- No mês **1**, calculamos o juro de 2% sobre o saldo devedor, que é R$ 108.000,00, e obtemos $0{,}02 \cdot 108\,000 = 2160$. Com o pagamento da prestação, o novo saldo devedor é, em reais:

$$108\,000 + 2160 - 10\,212{,}44 = 99\,947{,}56$$

O valor da dívida amortizado no mês é $10\,212{,}44 - 2160 = 8\,052{,}44$.

- No mês **2**, calculamos o juro de 2% sobre 99 947,56 e obtemos 0,02 · 99 947,56 = 1998,95. Com o pagamento da prestação, o novo saldo devedor é, em reais:

$$99\,947{,}56 + 1998{,}95 - 10\,212{,}44 = 91\,734{,}07$$

O valor da dívida amortizado no mês é 10 212,44 – 1998,95 = 8 213,49.

Repetindo esse raciocínio, é possível completar a tabela até o mês 12, como é mostrado a seguir.

Não escreva no livro

Pense nisto

Como seriam os cálculos para o mês 3?

Calculamos 2% de juro sobre 91 734,07 = 0,02 · 91 734,07 = = 1 834,68. Com o pagamento da prestação, o novo saldo devedor é: 91 734,07 + 1 834,68 – 10 212,44 = = 83 356,31.

O valor da dívida amortizado no mês é 10 212,44 – 1 834,68 = = 8 377,76.

Amortização SFA

Mês	Prestação	Juro	Amortização	Saldo devedor
0	0	0	0	108 000,00
1	10 212,44	2160	8 052,44	99 947,56
2	10 212,44	1998,951	8 213,4888	91 734,0712
3	10 212,44	1834,681	8 377,75858	83 356,31262
4	10 212,44	1667,126	8 545,31375	74 810,99888
5	10 212,44	1496,22	8 716,22002	66 094,77885
6	10 212,44	1321,896	8 890,54442	57 204,23443
7	10 212,44	1144,085	9 068,35531	48 135,87912
8	10 212,44	962,7176	9 249,72242	38 886,1567
9	10 212,44	777,7231	9 434,71687	29 451,43984
10	10 212,44	589,0288	9 623,4112	19 828,02863
11	10 212,44	396,5606	9 815,87943	10 012,14921
12	10 212,44	200,243	10 012,197	–0,047810361
Total		**14 549,23**	**108 000,048**	

Dados elaborados para fins didáticos.

Note que a soma dos valores amortizados corresponde ao valor total financiado (R$ 108.000,00; salvo valores não arredondados) e o saldo devedor, após o pagamento da 12ª prestação, é igual a zero (o valor de –R$ 0,04 é devido a valores que foram arredondados).

Perceba que, nesse sistema, à medida que o tempo passa, o saldo devedor e o juro diminuem, ao passo que a parcela amortizada aumenta.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Nesse sistema, o valor da prestação, assim como o juro, varia, diminuindo com o passar do tempo.

O valor amortizado, mês a mês, não varia e ele pode ser obtido dividindo-se o valor total financiado pelo número de prestações, isto é, $\frac{108\,000}{12} = 9\,000$. Isso significa que, se não houvesse cobrança de juro, esse também seria o valor da prestação.

Desse modo, para saber o valor da prestação em cada mês, é preciso adicionar a esse valor o juro calculado sobre o saldo devedor correspondente.

Acompanhe como isso funciona.

- No mês 1, calculamos 2% de 108 000, obtemos 2160 e o valor da primeira parcela será: 9 000 + 2160 = 11160. O saldo devedor é amortizado em 9 000 reais, reduzindo-se a 108 000 – 9 000 = 99 000.
- No mês 2, calculamos 2% de 99 000, obtemos 1980 e o valor da segunda parcela será: 9 000 + 1980 = 10 980. O saldo devedor é amortizado em 9 000 reais, reduzindo-se a 99 000 – 9 000 = 90 000.

Seguindo esse raciocínio, é possível completar a tabela a seguir até o último mês.

Amortização SAC

Mês	Parcela	Juro	Amortização	Saldo devedor
0	0	0	0	108 000
1	11160	2160	9 000	99 000
2	10 980	1980	9 000	90 000
3	10 800	1800	9 000	81 000
4	10 620	1620	9 000	72 000
5	10 440	1440	9 000	63 000
6	10 260	1260	9 000	54 000
7	10 080	1080	9 000	45 000
8	9 900	900	9 000	36 000
9	9 720	720	9 000	27 000
10	9 540	540	9 000	18 000
11	9 360	360	9 000	9 000
12	9 180	180	9 000	0
Total		**14 040**	**108 000**	

Dados elaborados para fins didáticos.

SFA × SAC

Em qualquer sistema de financiamento, vale a regra que, quanto mais rápido se amortiza o saldo devedor, menor será o juro pago.

No SAC, como as prestações são decrescentes e o valor mensal amortizado é constante, o saldo devedor é reduzido mais rapidamente, o que resulta em juro um pouco menor, se esse sistema for comparado ao sistema francês (nas mesmas condições de taxas e prazos). No SFA, a amortização do saldo devedor ocorre de maneira mais lenta.

No exemplo anterior, o financiamento de R$ 108.000,00 para pagamento em 12 meses, à taxa de 2% a.m., acarreta um total de juro de R$ 14.549,23 pelo SFA e um total de R$ 14.040,00 pelo SAC.

No entanto, o SAC requer uma maior capacidade de desembolso do tomador do financiamento nas parcelas iniciais, o que pode ser, para muitos cidadãos, uma desvantagem na comparação com o SFA.

Fonte dos dados: Financiamento imobiliário: passos, indexadores e sistemas de amortização. *Caixa*, Brasília, DF, jul. 2022. Disponível em: https://tedit.net/b414qp. Acesso em: 12 ago. 2024.

Não escreva no livro

Pense nisto

- Como seriam os cálculos para o mês 3?
- Qual é a regularidade dos valores correspondentes ao saldo devedor da tabela apresentada? E ao juro?

- Calculamos 2% de juro sobre 90 000, ou seja, 0,02 · 90 000 = 1 800, e o valor da terceira parcela será 9 000 + 1 800 = 10 800. O saldo devedor é amortizado em 9 000 reais, reduzindo-se a 90 000 – 9 000 = = 81 000.
- A sequência determinada pelo saldo devedor, mês a mês, corresponde a uma PA decrescente, em que $a_1 = 108\,000$ (valor financiado) e $r = -9\,000$ (pois 9 000 é a amortização mensal). A sequência determinada pelo juro, mês a mês, corresponde a uma PA decrescente em que $a_1 = 2\,160$ (juro de 2% sobre o valor financiado) e $r = -180$ (pois 180 é igual a 2% de 9 000).

51. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

52. SFA: 2 000 + 1 975,52 + 1 950,79 = 5 926,31 (valores aproximados).
SAC: 2 000 + 1 966,67 + 1 933,34 = 5 900,01 (valores aproximados). No SAC é menor.
A diferença é de aproximadamente R$ 26,30.

Experimente usar uma calculadora científica sempre que necessário.

47. Rebeca financiou um apartamento de R$ 400.000,00 a serem pagos em prestações anuais, à taxa de 8% a.a., no prazo de 15 anos, por meio do Sistema Francês de Amortização.

a) Qual será o valor de cada uma das prestações? Aproximadamente R$ 46.731,16.
Considere $(1{,}08)^{15} \simeq 3{,}17217$.

b) Qual será o saldo devedor após o pagamento da primeira prestação? R$ 385.268,84

48. Ernesto financiou a reforma do escritório dele no valor de R$ 96.000,00, pelo SAC, à taxa de 0,8% a.m., em 48 prestações mensais.

a) Qual é o valor mensal de amortização? R$ 2.000,00

b) Qual é o valor da primeira prestação? R$ 2.768,00

c) Qual é o saldo devedor após o pagamento da segunda prestação? R$ 92.000,00

d) Qual é o valor da segunda prestação? R$ 2.752,00

49. Um trabalhador financiou um veículo 0 km em 48 prestações mensais e iguais a R$ 1.881,50, à taxa de 0,5% a.m.

a) Qual foi o sistema de amortização usado? Explique. Sistema Francês de Amortização, pois as prestações têm o mesmo valor.

b) Qual foi o valor financiado? Considere $(1{,}005)^{48} \simeq 1{,}2705$. Aproximadamente R$ 80.148,89

c) Qual valor da dívida foi amortizado após o pagamento da primeira prestação? Aproximadamente R$ 1.480,76

50. Uma empresa captou um empréstimo de R$ 150.000,00, pelo SAC, em 3 prestações anuais, a uma taxa de juro de 10% a.a. Qual é o valor total do juro pago nesse empréstimo? R$ 30.000,00

51. Um casal deu uma entrada de R$ 30.000,00 para a compra de um apartamento e financiou o valor de R$ 200.000,00 restante em 5 anos, à taxa de 1% a.m.
Construa uma tabela que contenha o saldo devedor, o valor da prestação, o juro e o valor amortizado das 3 primeiras prestações, considerando cada sistema.

a) No SFA, arredonde o valor da prestação para o inteiro mais próximo e considere $(1{,}01)^{60} \simeq 1{,}817$.

b) No SAC, arredonde o valor mensal amortizado para o inteiro mais próximo.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

52. Em relação à questão anterior, determine em qual sistema o total de juro das 3 primeiras parcelas é menor. Qual é a diferença entre os valores?

53. Um imóvel de R$ 1.000.000,00 na praia de Boa Viagem, no Recife (PE), foi totalmente financiado pelo SAC em 50 meses. Sabendo que o valor da primeira prestação foi de R$ 27.500,00, determine a taxa de juro mensal desse financiamento. 0,75% a.m.

ByDroneVideos/Shutterstock

A praia de Boa Viagem em Recife (PE) tem 8 km de medida de extensão e em alguns trechos há piscinas naturais formadas pela presença de diversos recifes. Foto de 2023.

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Computação, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Educação Digital.

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira.*

Planejamento financeiro e orçamento familiar

Um dos fundamentos da educação financeira é o planejamento financeiro. Ao organizar e controlar as finanças, é possível fazer projeções de ganhos e gastos, perceber excessos e despesas desnecessárias e zelar pela saúde financeira da instituição que se está gerenciando.

Uma ferramenta muito comum utilizada para organizar planejamentos financeiros é a planilha eletrônica, e um dos modos de se organizar com ela é construir uma planilha para as contas a receber e uma para as contas a pagar. No exemplo a seguir estão representadas planilhas de planejamento financeiro de uma empresa hipotética.

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Planilha de contas a receber**					
2	**ENTRADAS**	**Mês 1**	**Mês 2**	**Mês 3**	**Mês 4**	**Mês 5**	**Mês 6**
3	Previsão de recebimento de vendas						
4	Contas a receber – vendas realizadas						
5	Aporte de recurso próprio						
6	Aporte proveniente de empréstimo						
7	Outros recebimentos						
8	**Total a receber**						

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Planilha de contas a pagar**					
2	**SAÍDAS**	**Mês 1**	**Mês 2**	**Mês 3**	**Mês 4**	**Mês 5**	**Mês 6**
3	Fornecedores						
4	Folhas de pagamento (funcionários)						
5	INSS a recolher						
6	FGTS						
7	13º salário						
8	Verbas para rescisão						
9	Impostos com vendas						
10	Aluguéis						
11	Energia elétrica						
12	Telefone						
13	Serviços de contabilidade						
14	Serviços de terceiros						
15	**Total a pagar**						

Ilustrações: Reprodução/Arquivo da editora

A mesma lógica de planejamento pode ser aplicada para se gerenciar finanças de um lar, organizando um **orçamento familiar**.

Chamamos de orçamento familiar o controle de todas as receitas e despesas de pessoas que moram juntas. Assim, organizar um orçamento familiar é registrar todos os ganhos e todas as despesas da casa. Com esse controle, torna-se mais fácil equilibrar as contas no final do mês e atingir objetivos.

As famílias brasileiras apresentam uma grande diversidade em relação à composição. Essa diversidade também existe em relação à condição econômica de cada família, aliada

às desigualdades regionais e sociais de cada população. Por esse motivo, para montar uma planilha de orçamento familiar funcional, é indispensável que cada família selecione os elementos presentes na realidade dela.

Embora seja algo aparentemente trabalhoso de início e que requer muita dedicação, a tarefa de organizar receitas e despesas é fundamental para uma vida financeira saudável, que inclui melhor gerenciamento dos recursos, construção de poupança e planos para o futuro.

Agora, vamos tentar organizar planilhas de orçamento familiar? **Troque ideias** com seus colegas para responder às perguntas.

1. Que tipos de recebimentos podem compor uma planilha de receitas em um orçamento familiar?

2. Que tipos de despesas podem compor uma planilha de gastos de uma família?

3. **Experimente** usar um *software* para organizar uma planilha com os tipos de receitas e despesas citados nas atividades anteriores.
A resposta depende do *software* utilizado pelo estudante.

4. Usando a planilha desenvolvida na atividade anterior, analise o caso a seguir e escreva no caderno um breve texto sobre ele. O texto deve indicar se o orçamento analisado se encontra positivo ou negativo, justificando essa conclusão, e sugerir maneiras de aprimorar o uso dos recursos desta família, considerando os dados apresentados. Resposta pessoal.

Um casal mora na Zona Norte na cidade do Rio de Janeiro (RJ). Os dois trabalham e juntos têm uma renda mensal líquida de R$ 8.970,00 (já descontado o valor de um plano de saúde oferecido pela empresa), proveniente exclusivamente dos salários que recebem.

Atualmente, o casal paga R$ 1.980,00 no aluguel do apartamento onde moram e um adicional de R$ 740,00, referente ao valor da cota do condomínio, que já inclui água e gás. Em 2 anos, ficará pronto o apartamento que compraram na Tijuca, por meio de um financiamento de 20 anos, com prestação mensal de R$ 1.850,00. Quando se estabelecerem nesse apartamento, desejam adotar uma criança.

Em alimentação, gastam mensalmente R$ 2.300,00. Além disso, em alguns itens de higiene pessoal e doméstica gastam bimestralmente R$ 300,00. Entre as atividades preferidas de lazer do casal estão frequentar o cinema, ir a *shows* e à praia. Com essas atividades, desembolsam aproximadamente R$ 1.000,00 por mês, com possibilidade de aumentar para R$ 1.800,00 caso algum artista internacional de quem gostam vá realizar um *show* na cidade naquele mês.

O transporte para o trabalho é coberto pela empresa no sistema de vale-transporte, com valor já descontado na renda mensal líquida apresentada. Para o transporte nos momentos de lazer, eles gastam aproximadamente R$ 190,00 mensais. Atualmente, não têm dívidas ou débitos em instituições financeiras.

1. As receitas domésticas podem vir de diversas fontes e é esperado que os estudantes apresentem os itens presentes em suas realidades ou os estudados durante a trajetória escolar. Dentre os mais comuns estão: salários, renda extra fixa (por exemplo, aluguéis), renda extra variável (por exemplo, comissões), pensão, aposentadoria e investimentos financeiros.

2. As despesas domésticas são muito diversas, então será uma lista longa de itens. É interessante sugerir que os estudantes dividam esses valores em subgrupos, se julgarem necessário, para melhor visualização.

Dica

Além das planilhas eletrônicas, existem aplicativos destinados à gestão do orçamento familiar. Apesar de serem menos flexíveis e adaptáveis do que uma planilha eletrônica, por vezes são mais simples de se utilizar.

Para fazer uma previsão de rendimento dos investimentos presentes em um orçamento financeiro, é possível usar a Calculadora do cidadão, oferecida pelo Banco Central do Brasil, disponível em: https://tedit.net/iiwxdf (acesso em: 22 set. 2024).

Juros e funções

Uma dívida de R$ 1.000,00 será paga com juro de 50% ao ano. Ela deverá ser quitada após um número inteiro de anos.

Vamos calcular, ano a ano, os montantes dessa dívida nos dois regimes de capitalização (simples e composto) e comparar os valores obtidos.

Juro simples e função polinomial de 1º grau

No regime de juro simples, o juro, por ano, é de 50% de 1000.

$0{,}5 \cdot 1000 = 500$; isto é, R$ 500,00.

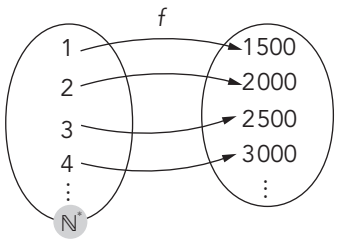
Para uma dívida de R$ 1.000,00, temos:

Ano	1	2	3	4	5	6	...
Montante	1500	2000	2500	3000	3500	4000	...

A sequência de montantes (1500, 2000, 2500, 3000, 3500, ...) é uma progressão aritmética (PA) de razão 500 cujo termo geral é:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1500 + (n-1) \cdot 500 \Rightarrow a_n = \underbrace{500 \cdot n}_{\text{acréscimo}} + \underbrace{1000}_{\text{capital}}$$

Lembremos que toda PA está associada a uma função f de domínio em $\mathbb{N}^*$. Desse modo, a PA (1500, 2000, 2500, 3000, ...) está associada a uma função f cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$, como sugere a associação a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos associar essa função f à função definida por $y = 500x + 1000$ (que é uma **função polinomial de 1º grau**), restrita aos valores naturais não nulos que a variável x assume.

Juro composto e função exponencial

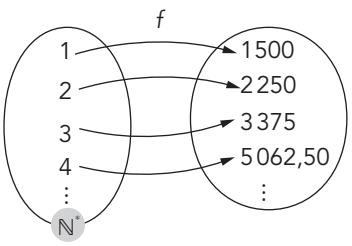
Agora, para o regime de juro composto, vamos montar a tabela, lembrando que o montante da dívida em determinado ano é 50% maior do que o montante relativo ao ano anterior (ou 1,5 vez o montante anterior). Para uma dívida de R$ 1.000,00, temos:

Ano	1	2	3	4	5	6	...
Montante	1500	2250	3375	5062,50	7593,75	11390,62	...

A sequência de montantes (1500; 2250; 3375; 5062,50; ...) é uma progressão geométrica (PG) de razão 1,5 cujo termo geral é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1500 \cdot (1{,}5)^{n-1} \Rightarrow a_n = 1500 \cdot \frac{(1{,}5)^n}{1{,}5} \Rightarrow a_n = \underbrace{1000}_{\text{capital}} \cdot (1{,}5)^n$$

Lembremos que toda PG está associada a uma função f de domínio em $\mathbb{N}^*$. Desse modo, a PG (1500; 2250; 3375; 5062,50; ...) está associada a uma função f cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$, como sugere a associação a seguir.

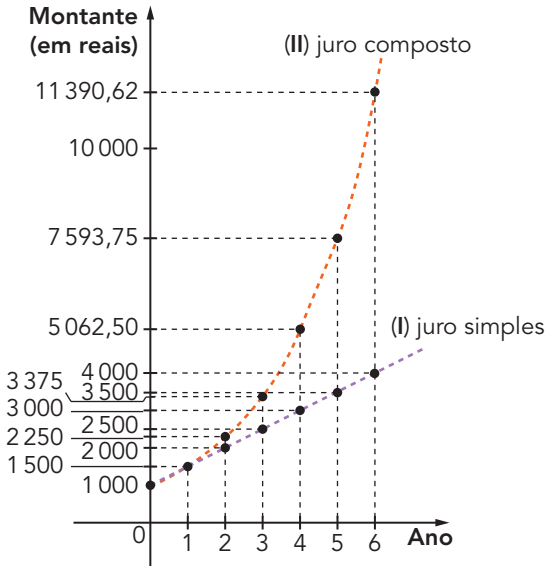


Note que essa função f pode ser associada à função definida por $y = 1000 \cdot (1{,}5)^x$ (que é uma **função exponencial**), restrita aos valores naturais não nulos que x assume.

Podcast

Transcrição de áudio

Representando graficamente as duas funções, temos:



Ilustrações: Reprodução/Arquivo da editora

Os pontos do gráfico **I** correspondem aos pontos da reta que representa a função polinomial de 1º grau dada por $y = 500 \cdot x + 1000$, quando a variável x assume valores naturais. Perceba que, se $x = 0$, então $y = 1000$ corresponde ao capital da dívida. Os pontos do gráfico **II** correspondem aos pontos da curva exponencial dada por $y = 1000 \cdot (1{,}5)^x$, quando a variável x assume valores naturais. Se $x = 0$, então $y = 1000$ é o capital da dívida.

Note que no caso **I** não traçamos uma reta e no caso **II** não traçamos uma curva exponencial contínua, pois, em ambos os casos, temos funções cujo domínio é $\mathbb{N}^*$ (e não $\mathbb{R}$).

Os dois gráficos têm em comum o ponto (1, 1500), isto é, decorrido exatamente 1 ano da aquisição da dívida, os montantes a juro simples e a juro composto se equivalem. A partir daí, o gráfico **II** está sempre acima do gráfico **I**, mostrando que, para qualquer valor de x (ano), tal que $x > 1$, o montante da dívida a juro composto é maior do que o montante da dívida de mesmo capital e taxa de juro, calculado a juro simples.

55. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas.

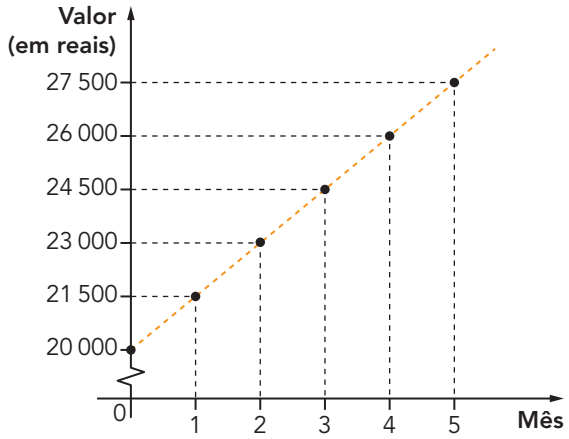
ATIVIDADES

Não escreva no livro

54. c) Como a operação envolve juro simples, temos que, ao final de 10 meses, o total de juro é de $10 \cdot$ R$ 1.500,00 = R$ 15.000,00 e o montante pedido é R$ 20.000,00 + R$ 15.000,00 = R$ 35.000,00.

54. Um capital de R$ 20.000,00 é empregado a juro simples, por 10 meses, a uma taxa de z% a.m. No gráfico a seguir, estão representados os valores dos montantes nos cinco primeiros meses da operação:

Banco de imagens/Arquivo da editora



Analisando o gráfico, responda às questões seguintes:

a) O acréscimo mensal nos montantes é constante? Qual é esse valor?

b) Qual é o valor de z?

c) Qual será o montante dessa operação ao final do prazo?

55. Um capital de R$ 600,00 é aplicado a uma taxa anual de 10% ao ano, por 5 anos.

a) Construa as sequências referentes aos montantes anuais dessa aplicação considerando o regime de juro simples e o de juro composto. Juro simples: (660, 720, 780, 840, 900); juro composto: (660; 726; 798,60; 878,46; 966,306).

b) Associe cada sequência anterior a uma PA ou a uma PG e determine a razão dela. Juro simples: PA; $r = 60$; juro compostos: PG; $q = 1,1$.

c) Represente graficamente, em um mesmo sistema de coordenadas, as sequências do item anterior. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

d) Qual é, em reais, a diferença entre os montantes obtidos no final dos 5 anos considerando os dois regimes de juro? R$ 66,31

56. A função $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = 6000 \cdot (1,2)^x$, representa o valor de uma dívida, em reais, x anos após a data em que ela foi contraída ($x = 0$).

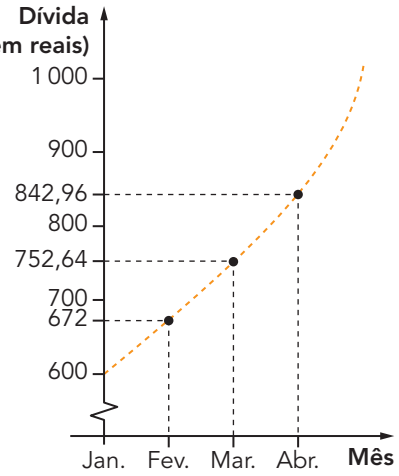
a) Qual é o valor original da dívida? R$ 6.000,00

b) A dívida cresce segundo o regime de juro simples ou de juro composto? Qual é a taxa anual de juro dessa dívida? Juro composto; 20% a.a.

c) Em 4 anos, a dívida já terá dobrado de valor? Sim.

57. O gráfico a seguir mostra a evolução, mês a mês, da dívida no cartão de crédito de um cliente, a partir do mês de janeiro de 2024.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Sabendo que a operadora do cartão de crédito cobra juro mensal cumulativo a uma taxa percentual fixa por mês, analise cada afirmação seguinte, classifique-a em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) e justifique.

a) A dívida do cliente no mês de maio superava R$ 900,00. V

b) Os valores mensais da dívida do cliente formam uma PG de razão 0,12. F

c) A taxa mensal de juro do cartão é de 12%. V

d) O valor, em reais, dessa dívida em julho de 2024 era de $600 \cdot (1,12)^7$. F

e) Se o cliente só quitou a dívida em dezembro de 2024, com um único pagamento, ele pagou, considerando todo o período, mais de 240% de juro sobre o valor inicial da dívida. V

58. **Experimente** comparar, ano a ano, durante 15 anos, por meio da planilha eletrônica, os montantes de duas transações financeiras de mesmo capital (R$ 5.000,00) e mesma taxa (10,5% a.a.), considerando dois regimes de capitalização: o de juro simples e o de juro composto. A resposta depende do *software* utilizado pelo estudante.

54. a) Sim; R$ 1.500,00

b) O juro do primeiro mês é de R$ 21.500,00 − R$ 20.000,00 = R$ 1.500,00. Esse valor resulta da aplicação da taxa z ao capital de R$ 20.000,000, isto é: $z \cdot 20000 = 1500 \Rightarrow z = 0,075$; ou seja, 7,5% a.m.

VIRALIZE!

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Fiscal*.

Mais de 1 milhão de mulheres começaram a investir na B3 nos últimos 5 anos

Um estudo inédito realizado pela B3 identificou preferências e características da mulher investidora. Dados dos últimos 5 anos mostraram que aumentou em mais de 1 milhão o número de investidoras em renda variável e constatou que os valores investidos por elas são mais altos.

A análise considerou o valor mediano do primeiro investimento. Apesar de estar caindo significativamente nos últimos anos, o que demonstra a democratização do acesso à bolsa, ele é historicamente maior para as mulheres do que para os homens. Em 2018, as mulheres entravam com R$ 3,5 mil, contra R$ 2 mil dos homens. Hoje, os valores medianos são de R$ 167 para elas e de R$ 62 para eles.

Isso se reflete no saldo médio de cada investidor no primeiro ano do investimento. Em 2023, o volume médio sob custódia era de R$ 9,8 mil para os homens e R$ 26 mil para as mulheres.

Por outro lado, os homens entram em maior quantidade do que as mulheres na bolsa. Há cinco anos, a quantidade de novos investidores homens era de 173,9 mil por ano e de mulheres, de 49,8 mil. Atualmente, o número é de 1,1 milhão de homens contra 253,8 mil mulheres no ano.

Arsenii Palivoda/Shutterstock

A desigualdade de gênero no mundo dos investimentos é consequência do que acontece fora dessa indústria: é o machismo estrutural que explica por que as mulheres investem menos e são mais conservadoras nas suas decisões de investimentos.

"A minha percepção é de que a mulher se prepara mais para entrar na bolsa. Seja buscando informações ou mesmo juntando mais dinheiro antes de começar a investir. Temos visto uma tendência no comportamento delas, muito parecida com a dos homens, como

a busca maior por fundos imobiliários no ano passado, por exemplo", afirma Christianne Bariquelli, superintendente de Educação da B3. "Temos disponibilizado no site da B3 Educação e no aplicativo HUB3, conteúdos gratuitos produzidos por mulheres, que ajudam a criar conexão, garantem representatividade e podem contribuir na decisão de começar a investir", completa.

Participação de jovens cresceu mais nos últimos anos

Em relação à faixa etária, a maior parte das mulheres que investem em renda variável estão na faixa entre 25 e 39 anos (46%), seguida pela faixa dos 40 a 59 anos (34%). Nos últimos 5 anos, a faixa etária que mais cresceu percentualmente foi a de 18 a 24 anos. Eram 4,4 mil investidoras em 2018 e hoje são mais de 85,7 mil mulheres.

Fundos imobiliários cresceram mais entre elas no ano passado

O estudo mostrou ainda que as ações são o produto preferido pela maior parte das investidoras.

Entre as mais de 1,253 milhão de investidoras de renda variável, 951,9 mil investem em ações. O número é inclusive maior do que as mulheres que investem no Tesouro Direto, de 903,6 mil. Fundos Imobiliários são o terceiro produto mais procurado, com 641,9 mil investidoras. Esse, porém, foi o produto que registrou maior crescimento entre elas no último ano, de 19%.

Mais da metade das mulheres que investem na bolsa (694,8 mil) diversificam, com mais de um produto de renda variável na carteira. A proporção é parecida com a dos homens.

MAIS de 1 milhão de mulheres começaram a investir na B3 nos últimos 5 anos. *Revista Lide*. Disponível em: https://tedit.net/5tnwko. Acesso em: 12 ago. 2024.

Saldo médio no ano em que entram

Ano	Mulheres (em mil reais)	Homens (em mil reais)
2018	73,9	41,4
2019	48	32,2
2020	30,5	30,5
2021	20,7	11,2
2022	20,6	6,2
2023	26	9,8

Ativos de renda variável.

Fonte dos dados: MAIS de 1 milhão de mulheres começaram a investir na B3 nos últimos 5 anos. *B3*, 8 mar. 2021. Disponível em: https://tedit.net/ivgple. Acesso em: 12 ago. 2024.

1. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

1. Você sabe o que são bolsas de valores? Faça uma pesquisa sobre o que são, qual sua importância e quais são as principais do mundo, bem como sobre a história da Bolsa de Valores no Brasil.

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

2. O que significa que o valor mediano do primeiro investimento das mulheres em 2024 era de R$ 167,00? Do total de mulheres que fazem o primeiro investimento (em 2024), 50% investem R$ 167,00 ou menos, e as outras 50% investem R$ 167,00 ou mais.

3. Na tabela apresentada há uma considerável redução no saldo médio dos investidores de homens e mulheres. A que pode ser atribuída tal redução? Você a considera positiva?

A resposta para essa pergunta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

4. Qual é o aumento percentual do número de jovens investidoras (18 a 24 anos) na B3 de 2018 a 2024?

5. Qual é a sua opinião sobre o aumento da participação feminina no mercado financeiro? Resposta pessoal.

4. O número de investidoras aumentou de 4 400 para 85 700. Trata-se de um aumento de 81 300 investidoras. Percentualmente, esse aumento é de $\frac{81\,300}{4\,400} \simeq 18{,}48$; ou seja, aproximadamente 1 848%.

PARA FUNDAMENTAR SABERES

1. **(Unicamp-SP)** Dizemos que uma sequência de números reais não nulos $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ é uma progressão harmônica se a sequência dos inversos $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética (PA).

a) Dada a progressão harmônica $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$, encontre o seu sexto termo. $\frac{4}{5}$

b) Sejam a, b e c termos consecutivos de uma progressão harmônica. Verifique que $b = \frac{2ac}{(a+c)}$. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. **(Enem)** Um ciclista participará de uma competição e treinará alguns dias da seguinte maneira: no primeiro dia, pedalará 60 km; no segundo dia, a mesma distância do primeiro mais r km; no terceiro dia, a mesma distância do segundo mais r km; e, assim, sucessivamente, sempre pedalando a mesma distância do dia anterior mais r km. No último dia, ele deverá percorrer 180 km, completando o treinamento com um total de 1560 km. A distância r que o ciclista deverá pedalar a mais a cada dia, em km, é:

a) 3. **b)** 7. **c)** 10. **d)** 13. **e)** 20.

Alternativa **c**.

3. **(Enem)** Com o objetivo de trabalhar a concentração e a sincronia de movimentos dos alunos de uma de suas turmas, um professor de educação física dividiu essa turma em três grupos (**A**, **B** e **C**) e estipulou a seguinte atividade: os alunos do grupo **A** deveriam bater palmas a cada 2 s, os alunos do grupo **B** deveriam bater palmas a cada 3 s e os alunos do grupo **C** deveriam bater palmas a cada 4 s.
O professor zerou o cronômetro e os três grupos começaram a bater palmas quando ele registrou 1 s. Os movimentos prosseguiram até o cronômetro registrar 60 s. Um estagiário anotou no papel a sequência formada pelos instantes em que os três grupos bateram palmas simultaneamente.
Qual é o termo geral da sequência anotada?

a) $12n$, com n um número natural, tal que $1 \leqslant n \leqslant 5$.

b) $24n$, com n um número natural, tal que $1 \leqslant n \leqslant 2$.

c) $12(n-1)$, com n um número natural, tal que $1 \leqslant n \leqslant 6$.

d) $12(n-1)+1$, com n um número natural, tal que $1 \leqslant n \leqslant 5$.

e) $24(n-1)+1$, com n um número natural, tal que $1 \leqslant n \leqslant 3$. Alternativa **d**.

4. **(FGV-SP)** Um investidor aplicou certa quantia, em reais, à taxa de juro composto de 1% ao mês. Neste problema, desprezando qualquer tipo de correção monetária devido à inflação, responda [ao que se pede] a seguir.

a) Neste investimento, após 2 meses, seria possível resgatar o valor aplicado com lucro de R$ 4.020,00. Calcule o valor inicialmente aplicado. R$ 200.000,00

b) No investimento indicado, é possível resgatar um montante de 4 vezes o capital inicialmente aplicado em 139,3 meses. Caso o cálculo fosse feito adotando-se $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 202 = 2{,}305$, que são logaritmos com apenas 3 casas decimais de aproximação, seria obtido um valor aproximado de t anos. Chamando de $E = t - 139{,}3$ ao erro cometido no cálculo devido ao uso de apenas 3 casas decimais de aproximação nos logaritmos indicados, calcule E. 11,2 meses.

5. **(Uerj)** Uma instituição financeira oferece os seguintes tipos de aplicação a seus clientes:

- Alfa – rendimento com juros simples, a uma taxa de 12% ao ano, durante 5 anos;
- Beta – rendimento com juros compostos, a uma taxa de 10% ao ano, durante 2 anos.

Considere que um cliente fez uma aplicação Alfa no valor de R$ 2.000,00. Após 5 anos, esse cliente fez uma aplicação Beta, durante dois anos, com o montante y obtido na

aplicação Alfa acrescido de x reais. Sabe-se que os juros obtidos pela aplicação Beta foram iguais a R$ 1.050,00. Calcule o valor de x, em reais, que foi acrescentado ao montante y.

R$ 1.800,00

6. **(Unicamp-SP)** Diversas padarias e lanchonetes vendem o "cafezinho" e o "cafezinho com leite". Uma pesquisa realizada na cidade de Campinas registrou uma variação grande de preços entre dois estabelecimentos, **A** e **B**, que vendem esses produtos com um volume de 60 mL, conforme mostra a tabela a seguir.

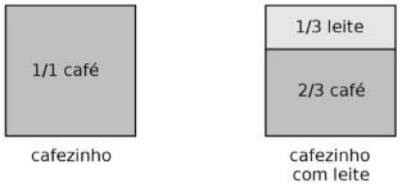
Produto	A	B
Cafezinho	R$ 2,00	R$ 3,00
Cafezinho com leite	R$ 2,50	R$ 4,00

a) Determine a variação percentual dos preços do estabelecimento **A** para o estabelecimento **B**, para os dois produtos.

Cafezinho: 50%; cafezinho com leite: 60%.

b) Considere a proporção de café e de leite servida nesses dois produtos, conforme indica a figura a seguir. Suponha que o preço cobrado se refere apenas às quantidades de café e de leite servidas. Com base nos preços praticados no estabelecimento **B**, calcule o valor que está sendo cobrado por um litro de leite.

R$ 100,00



Comvest/Unicamp, 2017.

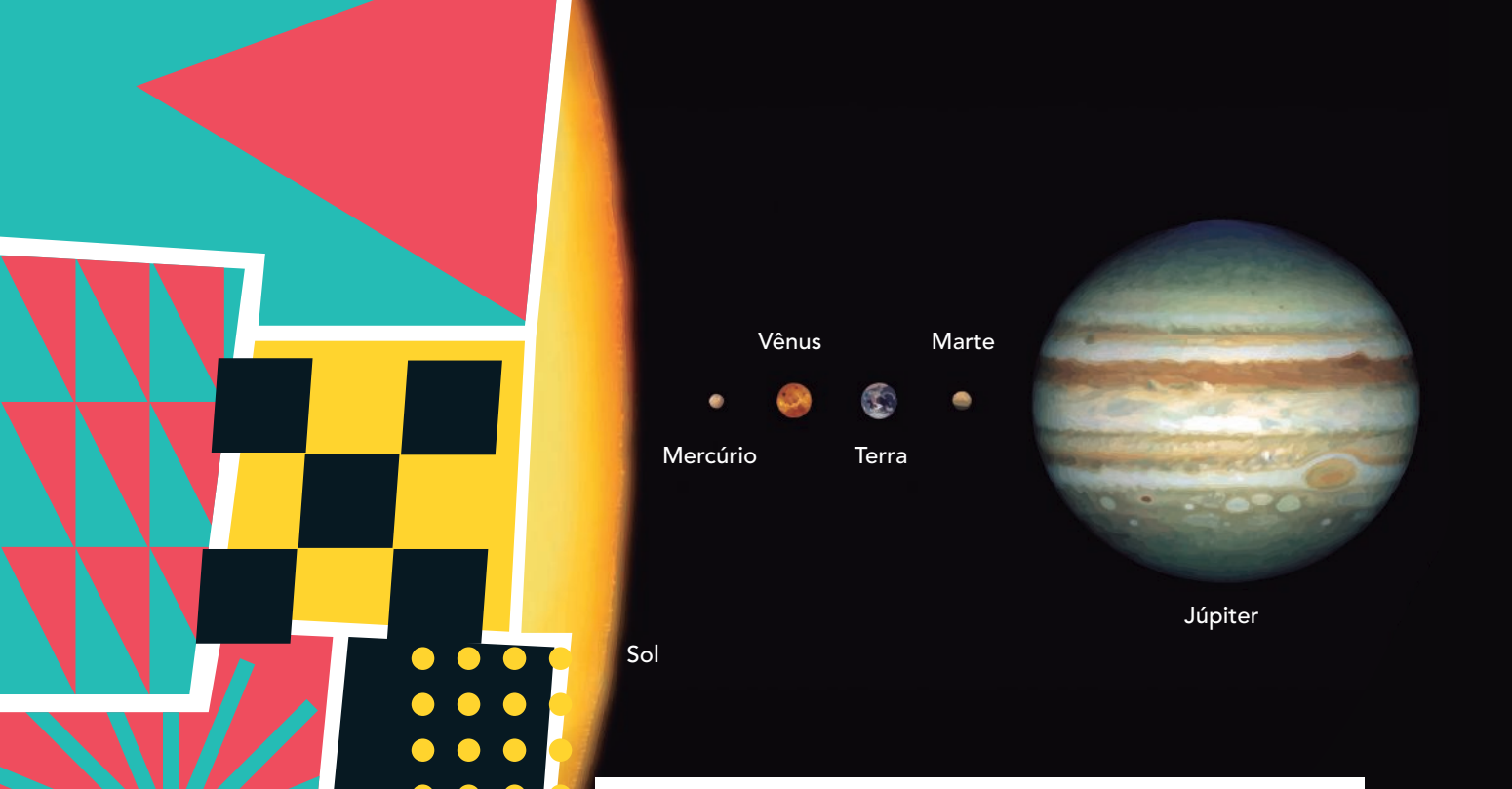
7. **(Enem)** Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180.000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso. Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de:

a) 2 075,00.
b) 2 093,00.
c) 2 138,00.
d) 2 255,00.
e) 2 300,00.

Alternativa **d**.

Nesta Unidade, estudamos as sequências numéricas, com destaque para a PA e a PG. Também aprendemos a usar planilhas eletrônicas, que são uma ferramenta muito útil para o mercado de trabalho e para a organização financeira pessoal e familiar. Por fim, estudamos a Matemática comercial e financeira, com destaque para o juro composto e as diversas aplicações dele. Respostas pessoais.

1. Reconheço as principais sequências numéricas estudadas nesta Unidade como funções e identifico as representações gráficas dessas funções?
2. Identifico padrões e regularidades na PA e na PG e entendo a importância disso? Resolvo problemas variados de PA e PG envolvendo o termo geral e a soma dos n primeiros termos dessas sequências?
3. Consigo enumerar algumas experiências do meu dia a dia em que possam ser usados conceitos como porcentagem e variação percentual? Consigo dar um exemplo em que usei algo aprendido neste capítulo?
4. Consigo enumerar alguns exemplos do dia a dia em que é usado juro composto? Para algum dos exemplos citados, consigo formular e resolver um problema real que possa ser resolvido empregando-se juro composto?
5. Reconheço que os assuntos estudados são relevantes para a educação financeira de um cidadão? Em que sentido?
6. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
7. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas e exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?



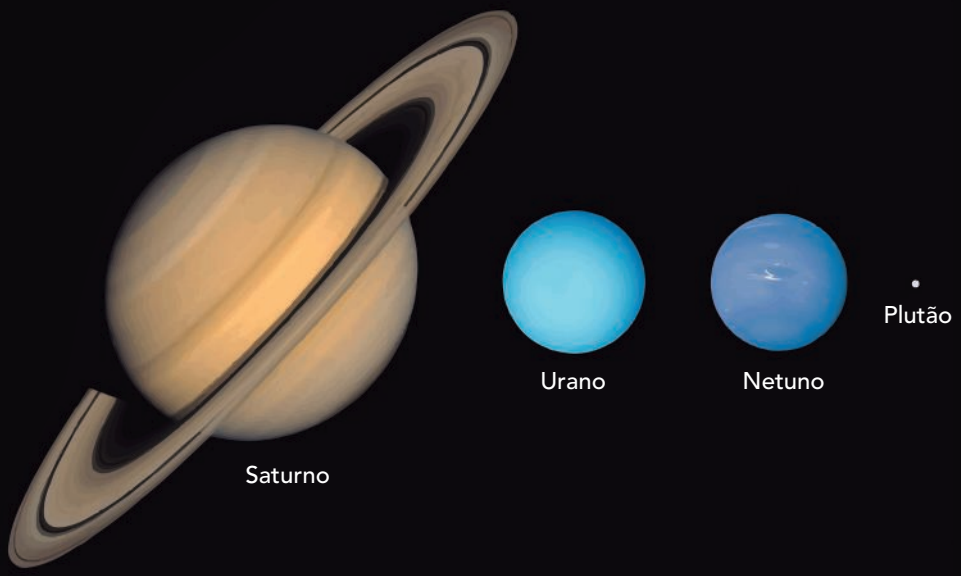
Representações do Sistema Solar

As representações do Sistema Solar são feitas com esquemas que mostram os planetas como esferas com raios de medidas distintas, ordenados de acordo com as medidas de distância deles ao Sol. No entanto, se a escala das medidas dos raios das esferas que representam os planetas reflete a realidade, então a escala das medidas de distância é desconsiderada, e vice-versa.

Isso ocorre porque a medida do raio de cada planeta do Sistema Solar é extremamente pequena em comparação com a medida de distância entre o planeta e o Sol. Por exemplo, a medida do raio da Terra é de aproximadamente 6 378 km, enquanto a medida de distância média da Terra até o Sol é cerca de 149 597 870,7 km. Isso significa que a medida do raio da Terra é menor do que 0,0043% da medida de distância Sol-Terra.

Unidade 2

GRANDEZAS E MEDIDAS



As imagens não estão representadas em proporção.

Cores fantasia.

John J Lutheran/Shutterstock

Esquema ilustrativo do Sistema Solar mostrando o Sol, os planetas e o planeta-anão Plutão em escala de dimensões. As medidas de distância apresentadas não são proporcionais, para caberem no papel.

Desse modo, é inviável representar em um livro didático ou em uma tela de computador as medidas das dimensões dos planetas e as medidas de distância deles até o Sol usando uma única escala, pois a representação dos planetas ficaria tão pequena que não seria possível visualizá-la. Ainda assim, algumas pessoas buscam superar essas dificuldades geométricas para fazer modelos fiéis à escala, como o apresentado no vídeo sugerido no boxe *Dica*.

Dica

Vídeo *To scale: the Solar System* ("O Sistema Solar: em escala")

Nesse vídeo de 7 min 6 s, um grupo de amigos elabora um modelo em escala das medidas de distância do Sistema Solar.

É possível optar pela transmissão com legendas em português para acompanhar o áudio em inglês. Disponível em: https://tedit.net/g0g2j7. Acesso em: 8 ago. 2024.

Não escreva no livro

1. A complexidade para representar um planeta usando uma única escala aumenta conforme as dimensões do planeta e a medida de distância entre ele e o Sol. Considerando a medida de distância ao Sol, qual seria o planeta do Sistema Solar mais complexo de ser representado usando apenas uma escala? Por quê?

Netuno. Por ser o planeta do Sistema Solar mais distante do Sol.

2. Pesquise e escreva no caderno as medidas do raio e de distância média até o Sol do planeta que respondeu na atividade anterior. Se ele fosse representado por um círculo de medida do raio igual a 1 mm, a quantos metros de medida de distância estaria o Sol, nessa representação?

Aproximadamente 182 m.

2. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

capítulo

3 Sistema Internacional de Unidades

Grandezas de base e unidades de medida

Ao longo do tempo, nós, como espécie humana, desenvolvemos estruturas de comunicação extremamente complexas, que nos ajudam tanto a descrever objetos concretos como a expressar abstrações e ideias intangíveis.

Antigamente, isso não era tão óbvio. Antes de dar nomes às coisas que nos rodeiam, éramos apenas capazes de nos comunicarmos com o que nossos sentidos nos permitiam perceber. As diversas linguagens que desenvolvemos são responsáveis por nos tornarmos cada vez mais independentes do mundo concreto quando queremos comunicar algo a alguém.

Vamos considerar como exemplo um agricultor de arroz ao longo da história. A partir do momento em que esse agricultor começa a estabelecer relações comerciais com aldeias vizinhas, passa a ser importante encontrar um modo de expressar o tamanho da produção da safra dele para que os compradores possam manifestar a quantidade de arroz em que têm interesse. Imagine se ele fosse obrigado a transportar toda a produção para a aldeia vizinha e, chegando lá, descobrisse que só teriam interesse em comprar 10% de tudo o que ele levou. Seria mais prático o agricultor comunicar que produziu 10 sacos de arroz naquela safra, para, então, transportar 1 saco que foi comercializado.

Evidentemente, essa solução traz novos problemas. Será que a medida de capacidade de armazenamento de um saco em uma aldeia é a mesma da aldeia vizinha? E qual seria a equivalência entre um saco dessa aldeia e um barril de outro vilarejo distante? Essas questões levaram à necessidade de unificar as unidades de medida.

Assim, começaram a surgir tentativas de padronizar as unidades de medida, facilitando o comércio e a comunicação entre diferentes povos e culturas. Esse processo de unificação das unidades de medida é essencial para o desenvolvimento da ciência, tecnologia e comércio, permitindo uma compreensão mútua e precisa das quantidades envolvidas.

A iniciativa mais bem-sucedida de unificação de unidades de medida tem origem na França, no final do século XVIII. O período da Revolução Francesa trouxe consigo propostas de unificação nacional que abrangiam, entre outras, o esforço de padronizar as diversas maneiras de medir então existentes.

Antes disso, as unidades de medida variavam muito de uma região para outra, o que dificultava o comércio e a comunicação. Essa tarefa não foi fácil, já que levou praticamente 2 séculos para que unidades de medida mais concretas, porém menos padronizáveis, fossem amplamente substituídas por unidades de medida mais padronizáveis, porém mais abstratas. Por exemplo, as unidades de medida baseadas em partes do corpo humano, como o pé ou o braço, foram substituídas por unidades e medida baseadas em padrões físicos constantes.

O sistema métrico, que surgiu desse esforço de padronização, foi uma das maiores conquistas dessa época. Foi com ele que surgiram as unidades de medida como o metro, o litro e o quilograma, que são baseadas em critérios científicos e universais. Esse sistema foi adotado oficialmente pela França em 1795 e, ao longo dos anos, foi sendo aceito ao redor do mundo, inclusive no Brasil, devido à sua precisão e praticidade.

Dica

Vídeo *Why the metric system matters* (“Por que o sistema métrico é importante”)

Esse vídeo, com duração de 4 min 23 s, mostra a importância de unificar as unidades de medida existentes a partir da Revolução Francesa. Ele destaca como o sistema métrico trouxe precisão e consistência às medições, facilitando o comércio e a ciência em escala global.

Habilite as legendas em português para acompanhar o áudio do vídeo em inglês. Disponível em: https://tedit.net/0a3vps. Acesso em: 8 ago. 2024.

Pense nisto

Usando apenas partes do seu corpo, encontre uma maneira de expressar a medida de área da mesa mais próxima de você. Compartilhe com os colegas e descubra se você usou a mesma técnica que eles. Quais são as vantagens e desvantagens de usarmos partes do corpo para definir a medida de uma grandeza?

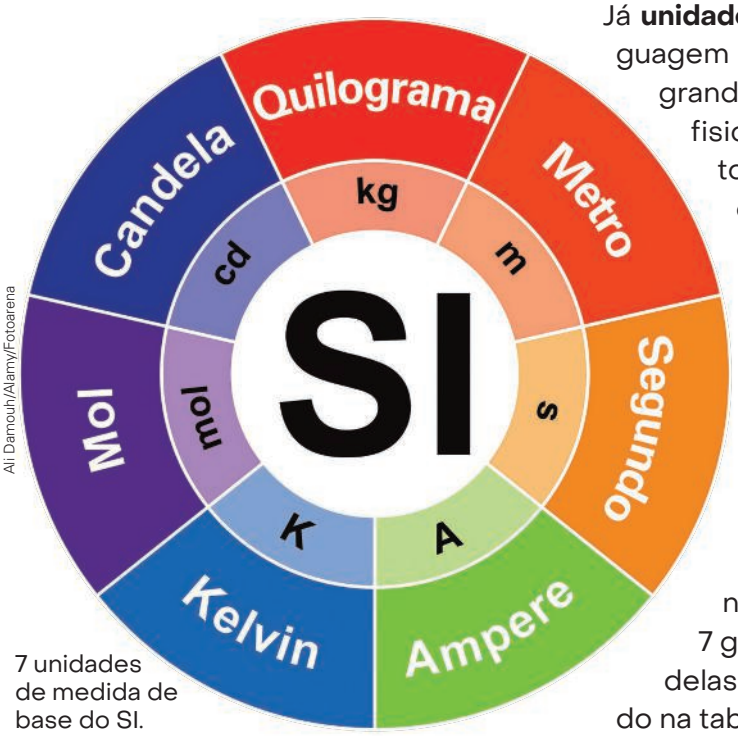
Exemplo de resposta: Utilizando a medida do antebraço como unidade de medida. Uma das vantagens é que partes do corpo não requerem ferramentas adicionais. E uma das desvantagens é a falta de precisão, pois as medidas com partes do corpo são menos precisas e variam de pessoa para pessoa.

Museu Real de Belas Artes de Antuérpia/Bridgeman/Fotoarena

A pintura retrata o comércio em Gante, na Bélgica, na Idade Média.
A Fair in Ghent in the Middle Ages, de Felix De Vigne, 1862, óleo sobre tela de 100,5 cm × 168,3 cm.

No ano de 1960, cientistas de diversos países se reuniram na 11ª reunião da Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM) para assumir o compromisso de adotar formalmente o **Sistema Internacional de Unidades** (SI). O principal esforço do SI é o de associar **grandezas** a **unidades de medida** padronizadas internacionalmente.

Chamamos de **grandeza** tudo aquilo que pode ser medido ou contado. A quantidade de gasolina no tanque de um carro, a velocidade de um carro e a quantidade de estudantes em uma sala de aula são exemplos de grandezas.



Ali Damouh/Alamy/Fotoarena

7 unidades de medida de base do SI.

Já **unidades de medida** são as estruturas de linguagem que criamos para comparar valores de grandezas sem a necessidade de mostrá-las fisicamente. Sem visualizar nada concreto, você é capaz de dimensionar, mesmo que imprecisamente, a diferença entre a quantidade de gasolina correspondente a meio tanque de um carro e a quantidade referente a um quarto desse mesmo tanque. Você também é capaz de assumir se um ônibus que se move a 25 km/h está mais lento ou mais rápido do que um carro que se move a 10 km/h.

Atualmente, o Sistema Internacional de Unidades considera que existem 7 grandezas de base e associa a cada uma delas uma unidade de medida, como indicado na tabela a seguir.

Não escreva no livro

Pense nisto

Você conhece todas essas grandezas? Pesquise-as na internet, descubra mais informações sobre aquelas que você não conhece e escreva-as no caderno.

Resposta pessoal.

A unidade de medida Ampere é usada para quantificar a carga elétrica que passa por um ponto em um segundo; a unidade de medida Kelvin é utilizada para quantificar a intensidade térmica de um corpo; a unidade de medida mol é usada para quantificar átomos, moléculas, etc. em uma substância; e a unidade de medida Candela é utilizada para quantificar a potência luminosa emitida por uma fonte em uma determinada direção.

Grandezas de base do SI

Grandeza de base		Unidade de medida de base	
Nome	**Símbolo típico**	**Nome**	**Símbolo**
Tempo	t	Segundo	s
Comprimento	l, x, r, etc.	Metro	m
Massa	m	Quilograma	kg
Corrente elétrica	I, i	Ampere	A
Temperatura	T	Kelvin	K
Quantidade de substância	n	Mol	mol
Intensidade luminosa	I_v	Candela	cd

Fonte dos dados: BRASIL. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia. *O Sistema Internacional de Unidades*. Brasília, DF: Inmetro, 2021. Disponível em: https://tedit.net/9nv3ss. Acesso em: 8 ago. 2024.

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

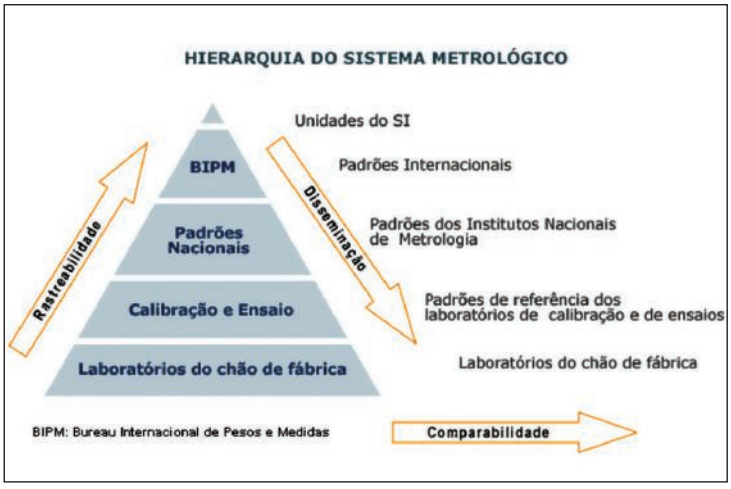
Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Hierarquia do Sistema Metrológico

Para garantir a padronização de instrumentos de medida no Brasil e no exterior, foi criada uma hierarquia que deve ser seguida. O Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM), localizado na França, é o órgão internacional responsável por assegurar que as unidades de medida sejam padronizadas no mundo. Cada país tem seu órgão nacional que garante que os instrumentos de medição do seu país são compatíveis com as unidades de medida estabelecidas pelo BIPM. No Brasil, esse órgão é o Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro). Ou seja, para garantir que 1 kg seja igual no Brasil, na França, na China, ou na África do Sul, por exemplo, os órgãos nacionais equiparam seus instrumentos de medida aos padrões determinados pelo BIPM.

Uma vez que o Inmetro, no Brasil, se adéqua aos padrões internacionais, é a vez dos laboratórios de calibração e ensaio, que estão espalhados pelo Brasil, de se adequarem aos padrões, recebendo, assim, uma certificação do Inmetro. Por último, cada empresa com seu laboratório de chão de fábrica deverá equiparar seus instrumentos de medida aos dos laboratórios de calibração e ensaio.

No esquema, há 3 setas que ilustram diferentes aspectos do sistema metrológico. A seta que indica a rastreabilidade sugere que, se houver um problema de medição no laboratório de chão de fábrica, é possível rastrear a origem do erro testando o instrumento utilizado na camada superior para realizar a calibração, e assim por diante. Dessa maneira, é possível identificar se houve uma adulteração no instrumento de medida, ou se um dos equipamentos utilizados para a calibração está com problema.



Reprodução/Inmetro

A seta da comparabilidade indica que a correta manutenção da hierarquia do sistema metrológico possibilita que medidas realizadas em diferentes países, estados ou cidades sejam equivalentes.

1. Um possível sinônimo para o verbo "disseminar" é "espalhar". O que significa, então, a seta do esquema que indica a disseminação?

2. Considere a seguinte situação: os responsáveis de um bebê estão na dúvida se sua filha está com febre e compram um termômetro que não foi certificado pelo Inmetro. Ao medirem a temperatura, o termômetro indica 36 °C. O que se pode afirmar sobre o estado desse bebê? Qual outra informação poderia ser relevante para responder a essa pergunta?

3. Elabore no caderno outra situação-exemplo que demonstre por que pode ser tão problemático não seguir corretamente a hierarquia do sistema metrológico.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Sugerimos que este tópico seja trabalhado em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Grandezas derivadas e unidades de medida

As 7 grandezas apresentadas como base do SI são chamadas de grandezas de base porque, a partir da definição delas, é possível obter outras grandezas importantes para o nosso dia a dia.

Para isso, utilizamos o que chamamos de **análise dimensional**, uma espécie de cálculo que avalia qual é a unidade de uma grandeza composta de outras. Acompanhe os exemplos a seguir.

- **Unidade de medida de área**: O conceito de área está associado à intenção de medir uma quantidade de espaço bidimensional, ou seja, é uma grandeza que depende de 2 dimensões. A medida de área de um retângulo, por exemplo, é o produto da medida da base e da medida da altura desse retângulo, ambas em metros, de acordo com o SI. Como é realizado um produto de 2 medidas de comprimento em metros, a unidade de medida de área (A) no SI é o metro quadrado ($[m] \times [m] = [m^2]$).
- **Unidade de medida de volume**: Volume é a quantidade de espaço que determinado corpo ocupa. É, portanto, uma grandeza que depende das 3 dimensões que compõem o espaço. A medida de volume de um prisma reto, por exemplo, é o produto da medida de área da base, em metros quadrados, pela medida da altura do prisma, em metros. A unidade de medida de volume (V) no SI, então, é o metro cúbico ($[m^2] \times [m] = [m^3]$).
- **Unidade de medida de velocidade**: A medida de velocidade corresponde à medida de distância que um corpo percorre em determinada medida de intervalo de tempo, ou seja, a velocidade é uma grandeza que deriva simultaneamente do comprimento e do intervalo de tempo, e sua medida é calculada pela razão entre as medidas de comprimento, em metros, e de intervalo de tempo, em segundos. A unidade de medida de velocidade (v) no SI é, portanto, o metro por segundo $\left(\frac{[m]}{[s]} = [m/s]\right)$.
- **Unidade de medida de força**: Isaac Newton (1643–1727) notou que, quanto maior a medida de massa de um corpo, maior deve ser a medida da força sobre ele para causar uma alteração no movimento do corpo. Um corpo parado permanecerá parado, e um corpo em movimento manterá esse movimento, a não ser que uma força atue sobre ele gerando uma aceleração positiva ou negativa, a depender da direção do movimento. Essa tendência do corpo de manter o movimento é chamada **inércia** e é enunciada na **primeira lei de Newton**.

Observação

Usamos colchetes para expressar que vamos realizar apenas a análise das unidades de medida, ignorando a parte numérica.

Reprodução/Galeria Nacional de Retratos, Londres, Inglaterra.

O físico, matemático e astrônomo Isaac Newton (1643–1727) é conhecido como um dos maiores cientistas da história. Sua contribuição para a ciência inclui a formulação das leis do movimento e da gravitação universal. Na imagem, vemos uma representação artística do cientista.

Isaac Newton, de Sir Godfrey Kneller, 1702, óleo sobre tela de 756 mm × 622 mm.

Pense nisto: Resposta pessoal. A maior parte está atrelada à Física, particularmente no campo do Eletromagnetismo: hertz, watt, coulomb, volt, farad, ohm, siemens, weber, tesla e henry.

Não escreva no livro

Pense nisto

Quais dessas unidades de medida que recebem um nome especial você já conhecia? A qual área do conhecimento a maior parte delas está atrelada?

Já a **segunda lei de Newton** estabelece a relação entre a medida de força (F) e a medida de aceleração (a) do corpo. Em termos simplificados, podemos escrever a medida da força como o produto da medida da massa (m) do corpo, dada em quilogramas, pela medida da aceleração sofrida por ele, em metros por segundo ao quadrado. Então, temos que a medida de força, no SI, é dada em quilogramas vezes metros por segundo ao quadrado $\left([\text{kg}] \cdot \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]\right)$. Essa unidade de medida, muito usada em Ciências da Natureza e suas Tecnologias, recebe o nome de newton (N), de modo que $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Além da unidade de medida de força, existem outras unidades de medida derivadas das unidades de medida de base do SI que recebem nomes e símbolos próprios por causa da importância delas. Elas estão descritas na tabela a seguir.

Outras grandezas derivadas do SI

Grandeza derivada	Nome especial da unidade de medida	Expressão da unidade de medida em unidades de medida de base	Expressão da unidade de medida em outras unidades de medida do SI
Ângulo plano	radiano	$\text{rad} = \text{m/m}$	
Ângulo sólido	esferorradiano	$\text{sr} = \text{m}^2/\text{m}^2$	
Frequência	hertz	$\text{Hz} = \text{s}^{-1}$	
Força	newton	$\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	
Pressão, tensão mecânica	pascal	$\text{Pa} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	
Energia, trabalho, quantidade de calor	joule	$\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{N} \cdot \text{m}$
Potência	watt	$\text{W} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$	J/s
Carga elétrica	coulomb	$\text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$	
Diferença de potencial elétrico	volt	$\text{V} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$	W/A
Capacitância	farad	$\text{F} = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$	C/V
Resistência elétrica	ohm	$\Omega = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$	V/A
Condutância elétrica	siemens	$\text{S} = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2$	A/V
Fluxo magnético	weber	$\text{Wb} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$	$\text{V} \cdot \text{s}$
Densidade de fluxo magnético	tesla	$\text{T} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$	Wb/m^2
Indutância	henry	$\text{H} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$	Wb/A
Temperatura	grau Celsius	$°\text{C} = \text{K} - 273{,}15$	
Fluxo luminoso	lúmen	$\text{lm} = \text{cd} \cdot \text{sr}$	$\text{cd} \cdot \text{sr}$
Iluminância	lux	$\text{lx} = \text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{m}^{-2}$	lm/m^2
Atividade de um radionuclídeo	becquerel	$\text{Bq} = \text{s}^{-1}$	
Dose absorvida, kerma	gray	$\text{Gy} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	J/kg
Equivalente de dose	sievert	$\text{Sv} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	J/kg
Atividade catalítica	katal	$\text{kat} = \text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$	

Fonte dos dados: BRASIL. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia. *O Sistema Internacional de Unidades*. Brasília, DF: Inmetro, 2021. Disponível em: https://tedit.net/9nv3ss. Acesso em: 8 ago. 2024.

Atividades resolvidas

1. (EEMP-RJ) O Coeficiente de Reynolds (R_e) é uma grandeza física adimensional, dada pela seguinte expressão:

$$R_e = \frac{\rho v D}{\mu}$$

Em que:

- ρ é a medida de massa específica (medida de massa dividida pela medida de volume);
- v é a medida de velocidade;
- D é a medida do diâmetro; e
- μ é uma constante.

A unidade de medida da constante μ no Sistema Internacional de Unidades é:

a) $kg \cdot m \cdot s^{-2}$.
b) $kg \cdot m \cdot s$.
c) $kg \cdot m \cdot s^{-1}$.
d) $kg \cdot m^{-2} \cdot s$.
e) $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$.

Solução:

Uma grandeza adimensional é aquela que não apresenta unidade de medida própria. Portanto, na análise a ser feita, o produto das unidades de medida de ρ, v e D precisa ser igual à unidade de medida de μ para possibilitar a simplificação na divisão:

$$\rho = \left[\frac{kg}{m^3}\right],\ v = \left[\frac{m}{s}\right] \text{ e } D = [m]$$

$$\mu = \rho \cdot v \cdot D = \left[\frac{kg}{m^3}\right] \cdot \left[\frac{m}{s}\right] \cdot [m] =$$

$$= \left[\frac{kg \cdot m^2}{m^3 \cdot s}\right] = \left[\frac{kg}{m \cdot s}\right] = [kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$$

Alternativa **e**.

ATIVIDADES

1. a) Um corpo não tem as mesmas dimensões que outro, tornando a unidade de medida imprecisa.

Não escreva no livro

1. Para medir determinados comprimentos, os egípcios usavam o cúbito, definido como a medida de distância do cotovelo à ponta do dedo médio. Com o intuito de padronizar as medidas, o cúbito passou a ser definido no Egito antigo como a medida de distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio do faraó (aproximadamente 0,524 metro). Para realizar as medições no solo, os medidores esticavam cordas e faziam marcações dos cúbitos com nós, como se fosse uma régua rudimentar. Com essa ferramenta, os egípcios conseguiram avanços no sistema de tributação e na área de construção, entre outras áreas. A pirâmide de Quéops, por exemplo, foi feita com uma base quadrada cuja medida de cada lado teria sido algo muito próximo de 440 cúbitos.

a) Qual é a principal dificuldade de se usar medidas definidas com base no tamanho de partes do corpo humano?

b) Aproximadamente quanto mede, na unidade do SI, o lado da base quadrangular da pirâmide de Quéops?

2. De acordo com cientistas da Nasa, a perda da sonda Mars Climate Orbiter ocorreu porque parte do sistema usava unidades de medida do SI, mas outra parte usava as unidades de medida do Sistema Imperial, empregado até hoje nos Estados Unidos, na Libéria e em Mianmar.

a) No caderno, copie e complete a tabela a seguir, que relaciona algumas das unidades de medida de comprimento do Sistema Imperial com a unidade de medida de comprimento do SI.

Conversão entre unidades de medidas

Sistema Imperial	Equivalência em pés (ft)	Equivalência em metros (m)
1 polegada (in)	$\frac{1}{12}$	0,0254
1 pé (ft)	1	$12 \cdot 0{,}0254 = 0{,}3048$
1 jarda (yd)	3	$3 \cdot 0{,}3048 = 0{,}9144$
1 milha (mi)	5 280	$5280 \cdot 0{,}3048 = 1609{,}344$

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Você conhece algum contexto em que unidades de medida de comprimento do Sistema Imperial são usadas? Se conhecer, escreva no caderno esse contexto.

Resposta pessoal.

1. b) $\frac{0{,}524}{1} = \frac{x}{440} \Rightarrow x = 0{,}524 \cdot 440 = 230{,}56$; ou seja, 230,56 m.

3. c) Um alqueire representa diferentes medidas de área a depender da região do Brasil. Usar a unidade do SI para área, metro quadrado, garante que não haja confusão ao comparar medidas de área de diferentes regiões.

3. Uma unidade de medida comumente usada nas zonas rurais brasileiras é o alqueire. Pesquise na internet e escreva no caderno essa unidade de medida, para responder às seguintes perguntas.

a) A qual grandeza essa unidade de medida está associada? Área de uma superfície.

b) Quanto vale 1 alqueire na unidade de medida correspondente a essa grandeza no SI?

c) Qual é a principal vantagem de usar a unidade de medida do SI em vez do alqueire?

4. Ao programar uma viagem para os Estados Unidos, uma família conferiu a previsão do tempo e descobriu que a medida de temperatura máxima que vivenciariam ao longo da viagem seria de 50 graus Fahrenheit. Para definir se precisariam levar roupa de frio ou de calor, essa família obteve, de uma pesquisa na internet, que a relação entre a medida de temperatura em graus Fahrenheit (T_F) e a medida em graus Celsius (T_C) é dada pela relação $T_C = \left(T_F - 32\right) \times \frac{5}{9}$.

a) Que tipo de roupa essa família deveria separar para a viagem: roupas de frio ou de calor? Justifique no caderno sua resposta. Roupas de frio.

b) Se essa família considerasse que roupas de calor são usadas em locais com medidas de temperatura acima de 20 °C, qual deveria ser a medida de temperatura mínima encontrada, em graus Fahrenheit, para optarem por esse tipo de roupa na viagem? 68 °F

c) A unidade de medida de temperatura do SI é Kelvin (K), de maneira que a medida de temperatura T_K, em Kelvin, pode ser obtida pela relação $T_K = T_C + 273{,}15$, em que T_C é a medida de temperatura em graus Celsius. Qual é a relação algébrica entre T_K e a temperatura T_F, medida em graus Fahrenheit? $T_K = T_C + 273{,}15 = (T_F - 32) \cdot \frac{5}{9} + 273{,}15$

5. A medida de aceleração média de um corpo é calculada a partir da razão entre a medida de variação da velocidade desse corpo e a medida de intervalo de tempo dessa variação da velocidade.

a) A partir da definição dada no enunciado, qual deve ser a unidade de medida do SI para a medida de aceleração média de um corpo? $\frac{\left[\frac{m}{s}\right]}{[s]} = \left[\frac{m}{s} \times \frac{1}{s}\right] = \left[\frac{m}{s^2}\right]$

b) Um motorista que se deslocava em um veículo a 30 m/s avistou uma placa anunciando a necessidade de redução da velocidade. Entre o instante em que notou a placa e o instante em que passou por ela, levou 4 segundos para atingir a nova medida de velocidade máxima, de 25 m/s. Qual foi a medida de aceleração média do veículo nessa medida de intervalo de tempo? $-\frac{5}{4} = -1{,}25$; ou seja, $-1{,}25\ m/s^2$.

6. Uma das unidades de medida do SI que recebem nome especial e símbolo particular (como o caso da unidade newton) é a unidade pascal (Pa), usada para medir pressão. Na Física, a pressão é definida como a razão entre a medida de intensidade de uma força aplicada em uma superfície e a medida de área dessa superfície. Como a unidade de medida pascal pode ser representada usando apenas unidades de medida de base do SI? $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$

7. Densidade demográfica ou populacional é o índice que mede povoamento. Ele é calculado a partir da divisão da quantidade total de habitantes (hab) que vivem em determinada região pela medida de área dessa região. Com base nessa definição, responda aos itens a seguir.

a) Elabore no caderno uma justificativa que explique por que zonas rurais tendem a ser menos povoadas do que zonas urbanas.

b) Pesquise e escreva no caderno a densidade demográfica do estado em que você mora e elabore e resolva no caderno um problema que a compare com a densidade demográfica de outra região à sua escolha. Resposta pessoal. A resposta depende da pesquisa realizada pelo estudante.

8. Segundo a lei da gravitação universal de Isaac Newton, a medida da força de atração gravitacional F entre 2 corpos que distam uma medida r e que têm medidas de massa m_1 e m_2 é dada pela equação:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

G é chamada constante gravitacional universal. Qual é a unidade de medida de G considerando que todas as grandezas relacionadas são medidas expressas apenas em unidades de base do SI? $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$

3. b) Alqueire é uma unidade de medida que pode variar de região para região. Os principais são alqueire mineiro/goiano, que equivale a 48 400 m^2; alqueire paulista, a 24 200 m^2; e alqueire da região Norte, a 27 225 m^2.

9. Exemplo de resposta: Se uma borracha é solta de determinada medida da altura, em queda livre, e demora 3 segundos para atingir o chão, com qual medida de velocidade essa borracha atingirá o chão?

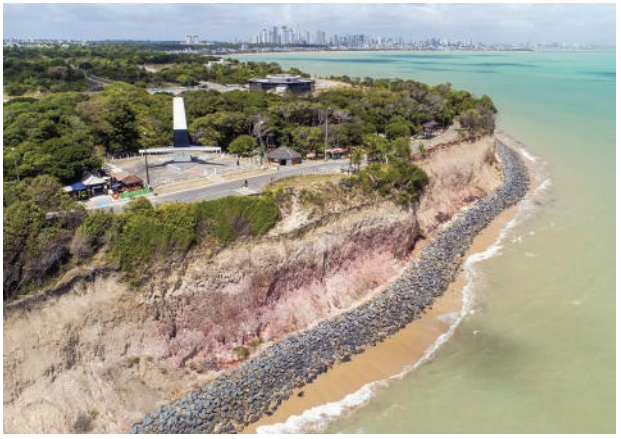
9. De acordo com a Física, a medida de velocidade de um corpo em queda livre, quando desprezamos o atrito com o ar, é dada por:

$$v = g \cdot t$$

em que v é a medida de velocidade; g é a medida de aceleração gravitacional, que pode ser aproximada por $g = 10\ m/s^2$ na superfície terrestre; e t é a medida de intervalo de tempo. Elabore no caderno um problema com esses dados e depois troque de caderno com um colega, para ele resolver o seu problema enquanto você resolve o elaborado por ele.

10. No caderno, faça uma estimativa para cada uma das perguntas a seguir, sem fazer nenhum tipo de pesquisa ou medição.

- Qual é a medida de distância entre a ponta do Seixas (limite leste do Brasil, localizado na Paraíba) e a nascente do rio Moa, na serra de Contamana (limite oeste do Brasil, localizado no Acre)?
  Aproximadamente 4319 km.
- Qual é a medida de espessura média de um fio de cabelo? 0,07 mm
- Qual é a medida da altura do seu professor?
  Resposta pessoal.



Tales Azzi/Pulsar Imagens

A ponta do Seixas (PB) é o ponto mais oriental do continente americano. Foto de 2021.

Troque ideias com os colegas, depois de ter realizado as 3 estimativas, para conferir se chegaram a valores parecidos. Em seguida, debatam estas perguntas.

a) As três perguntas se referiam a um mesmo tipo de grandeza ou a mais de um tipo? Que tipo(s) seria(m)?
As três se referiam à mesma grandeza de base: comprimento.

b) As perguntas não mencionavam nenhuma unidade de medida específica. Por quais razões vocês escolheram as unidades de medida usadas nas respostas?
Resposta pessoal.

Múltiplos e submúltiplos decimais de unidades de medida

É muito comum, em nosso dia a dia, nos referirmos a um mesmo tipo de grandeza usando unidades de medida distintas. Provavelmente, você usaria quilogramas para informar sua medida de massa corporal a um médico, mas usaria gramas ao se referir à quantidade de fermento que vai usar ao preparar um bolo; ou então usaria centímetros para expressar a medida da altura de uma mesa, mas quilômetros para estimar a medida de distância que percorre de ônibus.

Para garantir a conveniência no uso das unidades de medida, foram padronizados múltiplos e submúltiplos decimais que podem ser usados com as unidades de medida do SI. Esses múltiplos e submúltiplos expressam uma potência de 10 que é multiplicada pelo valor numérico da medida. A unidade de medida centímetro (cm), por exemplo, é a união do prefixo **cent(i)-** à unidade de medida metro. Esse prefixo representa o fator 10^{-2} no SI. Por exemplo, 5 cm são equivalentes a 5×10^{-2} m, ou seja, 0,05 m.

A tabela a seguir indica os prefixos para representar múltiplos e submúltiplos decimais de unidades de medida.

Prefixos do SI

Fator	Nome	Símbolo
10^{1}	deca	da
10^{2}	hecto	h
10^{3}	quilo	k
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y

Fator	Nome	Símbolo
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

Fonte dos dados: BRASIL. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia. *O Sistema Internacional de Unidades*. Brasília, DF: Inmetro, 2021. Disponível em: https://tedit.net/9nv3ss. Acesso em: 8 ago. 2024.

Observação

A unidade base de medida de massa, no SI, é o quilograma (kg). Esse é o único caso entre as grandezas de base que, por razões históricas, inclui um prefixo na unidade de base.

Conversão de unidades de medida

Imagine que a dona de uma quitanda de frutas e legumes esteja orçando o preço do tomate com alguns fornecedores. São enviados 3 orçamentos.

- Fornecedor **A**: R$ 5,00 por quilograma.
- Fornecedor **B**: R$ 4.000,00 por tonelada.
- Fornecedor **C**: R$ 66,00 por arroba.

A partir do momento que existe mais de uma unidade de medida para uma única grandeza, passa a ser necessário estabelecer métodos de realizar conversões entre essas unidades. Sem essas conversões, seria inviável identificar, entre os 3 fornecedores, aquele que oferece o melhor preço.

Não escreva no livro

Pense nisto

Se a dona da quitanda quisesse verificar os preços sempre em reais/kg, qual seria o preço oferecido pelo fornecedor **C**?

As conversões se dão por meio de equivalências entre as unidades de medida. Uma tonelada (ton), por exemplo, equivale a 1000 quilogramas (kg); uma arroba (@), por sua vez, equivale a aproximadamente 15 quilogramas. Assim, podemos reescrever as propostas dos fornecedores para uma única unidade de medida. Supondo que a dona da quitanda prefira saber quanto custa a arroba do tomate e sabendo que, se 1 @ equivale a 15 kg, 1 kg equivale a $\frac{1}{15}$@, temos:

- Fornecedor **A**: $5\ \frac{\text{reais}}{\text{kg}} = 5\ \frac{\text{reais}}{\frac{1}{15}@} = 5 \cdot 15\ \frac{\text{reais}}{@} = 75$ reais/@

R$ 4,40 por quilograma:

$66\ \frac{\text{reais}}{@} = 66\ \frac{\text{reais}}{15\ \text{kg}} = 4{,}4$ reais/kg

- Fornecedor **B**: $4\,000\ \frac{\text{reais}}{\text{ton}} = 4\,000\ \frac{\text{reais}}{1000\ \text{kg}} = 4\ \frac{\text{reais}}{\text{kg}} = 4\ \frac{\text{reais}}{\frac{1}{15}@} = 4 \cdot 15\ \frac{\text{reais}}{@} = 60$ reais/@

Portanto, é possível definir que o melhor preço para a dona da quitanda seria o oferecido pelo fornecedor **B**.

Um cuidado especial deve ser tomado no caso de conversões de unidades de medida que são potências de outras, como o caso de medidas de volume. Deve-se considerar que o expoente da potência não recai apenas sobre a unidade de medida, mas também sobre o prefixo de múltiplo ou submúltiplo decimal que eventualmente a acompanha.

Pense nisto: Exemplos de resposta: 0,8768 fm (femtômetros), 876,8 am (attômetros); resposta pessoal.

Por exemplo, sabemos que (1 m) · (1 m) · (1 m) = 1 m^3. Para convertermos uma medida de m^3 para dm^3, lembrando que 10 dm equivalem 1 m, fazemos:

$$1\ m^3 = (10\ dm) \cdot (10\ dm) \cdot (10\ dm) = 1000\ dm^3$$

Essa conversão é muito útil quando precisamos converter uma medida em m^3 para L, visto que 1 L equivale a 1 dm^3.

Não escreva no livro

Pense nisto

Como você poderia representar convenientemente a medida aproximada do raio de um próton usando um dos prefixos determinados pelo SI? De que maneira é mais fácil entender o número que expressa a medida do raio do próton: por notação científica ou por prefixos do SI?

Notação científica

Outra maneira que os cientistas encontraram para contornar o desafio de expressar, com uma mesma unidade, medidas de mesma grandeza com valores muito distintos foi usar a **notação científica**. Esse método, em vez de prefixos, utiliza diretamente potências de 10 ao expressar numericamente a medida. Em vez de representar, por exemplo, 0,05 m como 5 cm, a notação científica indica que seja expresso como 5×10^{-2} m.

Formalmente, para escrever um número em notação científica, é necessário que haja uma multiplicação com 2 fatores se multiplicando: o primeiro deles deve ser um número real igual ou maior do que 1, mas menor do que 10, e o segundo fator é uma potência de 10 com expoente inteiro. Confira os exemplos.

- A massa da Terra mede 5974200000000000000000000 kg, aproximadamente, que pode ser expressa em notação científica como $5{,}9742 \times 10^{24}$ kg.
- O raio de um próton pode medir 0,0000000000000008768 m, aproximadamente. Em notação científica, essa medida é expressa como $8{,}768 \times 10^{-16}$ m.

Vídeo

Uma técnica comumente associada à notação científica é a análise de **ordem de grandeza**. Em determinadas situações, o interesse pode estar na comparação de quão diferentes são os valores de duas medidas. Para expressarmos essas discrepâncias, costumamos considerar os números apenas em potências de 10, usando a seguinte estratégia.

- Coloca-se o número em notação científica.
- Se o número multiplicado pela potência de 10 for menor do que 3,16, a ordem de grandeza é a própria potência da notação científica.
- Caso contrário (número maior ou igual a 3,16), a ordem de grandeza é a potência de 10 somada a 1 (ou seja, 10^{n+1}).

Exemplo de análise de ordem de grandeza:

- A medida de massa de um átomo de hidrogênio é aproximadamente $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg. Como 1,67 é menor do que 3,16, a ordem de grandeza é 10^{-27} kg.
- A medida de distância média de Júpiter ao Sol é aproximadamente $7{,}53 \times 10^{8}$ km. Como 7,53 é maior do que 3,16, a ordem de grandeza é 10^{9} km.

Essa técnica simplifica a comparação entre medidas muito diferentes, facilitando a compreensão das escalas envolvidas.

Dica

Vídeo Assista esse vídeo quando você quiser se sentir pequeno

Esse vídeo com duração de 12 min 48 s, mostra que, numa viagem entre as escalas das menores às maiores coisas que existem, o ser humano está no meio do caminho. Disponível em: https://tedit.net/mme6rx (acesso em: 12 ago. 2024).

Atividades resolvidas

2. Em 2023, o salário mínimo no Brasil era de R$ 1.320,00. No mesmo ano, o PIB brasileiro foi de 10,9 trilhões de reais. Determine a ordem de grandeza de cada uma dessas medidas e, em seguida, calcule a ordem de grandeza da razão entre o PIB e o salário mínimo.

Solução:

- Salário mínimo: 1.320 reais $= 1{,}32 \cdot 10^3$ reais. Então, a ordem de grandeza será dada por 10^3 reais.
- PIB: 10,9 trilhões de reais $= 10{,}9 \cdot 10^{12}$ reais $= 1{,}09 \cdot 10^{13}$ reais. Então a ordem de grandeza será dada por 10^{13} reais.
- Razão: $\frac{10^{13}}{10^3} = 10^{13-3} = 10^{10}$. Então, a ordem de grandeza da razão entre o PIB e o salário mínimo é 10^{10}.

Observação

O número 3,16 é usado por ser uma aproximação da média geométrica entre 1 e 10, que são os limites inferior e superior que o número pode atingir em uma notação científica. A média geométrica de um conjunto de n números é calculada a partir da raiz n-ésima do produto de todos os números do conjunto.

Podemos calcular a média geométrica de 1 e 10, então, da seguinte maneira:

$$\sqrt{1 \cdot 10} = \sqrt{10} \simeq 3{,}16$$

11. $n = \frac{1\ \text{m}^3}{1\ \text{cm}^3} = \frac{1 \cdot (100\ \text{cm})^3}{1\ \text{cm}^3} = 1\,000\,000$; portanto, cabem 1 000 000 de caixinhas.

12. a) Frequência mínima: 3 000 Hz; frequência máxima: 300 000 000 000 Hz.

b) Frequência mínima: $3 \cdot 10^3$ Hz; frequência máxima: $3 \cdot 10^{11}$ Hz.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

11. Quantas caixinhas cúbicas de 1 cm^3 cabem em uma caixa cúbica de 1 m^3?

12. Leia o texto e consulte a tabela de prefixos do SI apresentada anteriormente.

> Quando você está ouvindo a sua música preferida no aparelho de som, o alto-falante está convertendo os sinais elétricos em ondas mecânicas que comprimem e descomprimem as moléculas de ar. [...]
>
> A onda mecânica pode ser descrita como um fenômeno ondulatório que se repete e se propaga através de um meio (diferente da luz que pode se propagar mesmo no vácuo). [...] O número de vezes que uma mesma onda se repete na unidade de tempo chamamos de frequência cuja unidade é o Hertz (Hz).
>
> TROLL, Juliana; NISHIDA, Silvia Mitiko. O Corpo Humano. *Museu Escola do IB*, Botucatu. Disponível em: https://tedit.net/hwi1cj. Acesso em: 9 ago. 2024.

a) As ondas de rádio têm frequências que variam entre 3 kHz e 300 GHz. Quais são as frequências mínima e máxima dessas ondas, em Hz?

b) Escreva no caderno os resultados do item anterior em notação científica.

c) Quantas vezes a frequência máxima é maior do que a frequência mínima? 100 milhões.

13. A unidade de medida parsec foi criada pelos astrônomos para expressar medidas de distância entre estrelas. A medida de distância entre o Sol e a estrela mais próxima a ele, *Proxima Centauri* (ou *Alpha Centauri* C), mede aproximadamente 1,3 parsec.

Cores fantasia.

ECKHARD SLAWIK/SPL/Fotoarena

Imagem do céu em que é possível notar em **1** a estrela *Proxima Centauri* e em **2** a constelação do Cruzeiro do Sul.

a) Sabendo que 1 parsec equivale a 30,86 trilhões de quilômetros, qual é a medida de distância entre essas estrelas em notação científica e na unidade de medida padrão do SI? $4{,}0118 \cdot 10^{16}$ m

b) Qual é a ordem de grandeza da medida obtida no item anterior, em metros? 10^{17}

PROJETO

Não escreva no livro

Esta seção favorece o desenvolvimento da competência geral **10** da BNCC e da habilidade **EM13MAT201**.

Reprodução/ ONU

Horta comunitária

Leia o texto a seguir, que trata do direito à alimentação saudável.

Com alta de preços, nutricionista diz que acesso a alimentos é direito constitucional

[...] Vanille Pessoa, que integra a diretoria da Associação Brasileira de Nutrição, falou à ONU News sobre as mudanças que a alta no preço dos alimentos tem provocado na dieta do país. [...]

[Ela] citou dados oficiais que indicam 33 milhões de pessoas em situação de fome. A nutricionista lembra que o direito à alimentação está previso na Constituição federal. [...]

Vanille Pessoa explica que a garantia ao alimento não assegura uma comida saudável e de qualidade. O Guia Alimentar para a População Brasileira e a Organização Mundial da Saúde, OMS, descrevem que a base de uma dieta saudável deve ser composta por alimentos naturais ou minimamente processados. [...]

Vanille Pessoa afirma que ainda há no Brasil o que o setor chama de "desertos alimentares", ou seja, locais onde há pouca disponibilidade de alimentos *in natura*. Isso impõe um desafio, mas também uma oportunidade para o fomento da produção e consumo locais. [...]

Sua avaliação está em linha com a análise da diretora regional do Fundo Internacional para o Desenvolvimento Agrícola, Fida. Para Rossana Polastri, o preço em alta dos alimentos afeta particularmente as populações mais vulneráveis, que gastam uma fatia maior da renda na compra.

Ela recomenda que soluções inovadoras sejam promovidas, para a diversificação da produção e aumento de oferta de alimentos saudáveis, que melhorem o acesso dos pequenos produtores a mercados e alimentos de qualidade.

ONU News. Com alta de preços, nutricionista diz que acesso a alimentos é direito constitucional. *Perspectiva global reportagens humanas*, 23 jan. 2023. Disponível em: https://tedit.net/fwnuno. Acesso em: 27 jun. 2024.

Pensando em um projeto

Apesar do acesso à alimentação ser um direito, em 2023, 21,6 milhões de brasileiros enfrentavam dificuldade para adquirir alimentos, e desse total, 8,7 milhões ainda passavam fome. Além disso, muitos brasileiros têm uma dieta predominantemente composta de produtos processados e ultraprocessados e consomem pouca variedade de frutas, verduras e legumes.

Para aumentar o acesso da comunidade em torno do local onde você vive a alimentos *in natura* orgânicos e incentivar uma alimentação saudável, que tal propor a fundação de uma horta comunitária?

Fonte dos dados: Módulo Segurança Alimentar da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) Contínua, divulgado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Monkey Business Images/Shutterstock

Casal colhendo beterrabas em horta comunitária.

Professor, a proposição de uma horta comunitária contribui para o ODS **2**, ao fazer com que os estudantes tenham iniciativa para combater a falta de acesso a alimentos nutritivos, e para o ODS **12**, por propor um manejo ambientalmente saudável da produção da horta.

Para começar

Organizem-se em 7 grupos, considerando a proximidade do local onde os integrantes vivem.

Plano de ação

Etapa 1

Pesquisem a regulamentação relacionada à criação de hortas comunitárias no Brasil e no município em que o projeto será desenvolvido. Identifiquem e registrem os espaços adequados para o cultivo na região de vocês e os requisitos e autorizações necessários.

Etapa 2

Elaborem um fluxograma descrevendo o processo que vocês devem seguir para criar a horta comunitária de acordo com as informações levantadas na etapa anterior.

Etapa 3

Determinem o local em que potencialmente será implementada a horta comunitária. Façam um esboço em escala da planta baixa desse local, mostrando medidas e outras informações importantes. Calculem também a medida de área do local, que será utilizada para o cálculo da quantidade total de insumos.

Etapa 4

Pesquisem qual é o tipo de clima e de solo da região em que vocês vivem. A partir disso, selecionem cultivos adequados para essas condições. Pesquisem também modelos de cultivo agroecológicos que evitem o aparecimento de pragas.

Etapa 5

Estipulem a quantidade de terra, de adubo, de sementes e de outros insumos, de acordo com a realidade da sua comunidade, que vocês utilizarão para o plantio no começo da horta. Depois, façam uma estimativa da quantidade de água diária necessária para manter a horta.

Etapa 6

Coletivamente, criem o roteiro de um vídeo convidando as pessoas da comunidade a criar uma horta. Esse roteiro deve contemplar:

- bons motivos para participar da criação da horta comunitária;
- o local onde se planeja criar a horta;
- o passo a passo da criação da horta;
- os insumos necessários para a criação da horta;
- um pedido de colaboração com insumos para os que têm sementes, terra ou algum outro item necessário;
- um convite para a participação na horta, indicando como os interessados podem se inscrever e como podem contribuir para o projeto.

Etapa 7

Gravem o vídeo de acordo com o roteiro que vocês elaboraram. Depois, divulguem-no para as pessoas da comunidade que vocês desejam alcançar.

Etapa 8

Com base na lista de interessados na horta comunitária e nas descrições de vocês, criem uma escala de trabalho semanal. Para isso, elaborem uma lista de tarefas e dividam-nas de acordo com a disponibilidade de cada participante.

Produto final: um documento de fundação da horta, explicando onde ela se localiza e adicionando as informações coletadas nas etapas do projeto. Esse documento deve ser compartilhado com todos os inscritos no projeto e deve servir de guia para a criação e formalização da horta.

Serghei V/Adobe Stock

Unidades que são aceitas para uso científico

Apesar de o Sistema Internacional de Unidades ter sido desenvolvido para padronizar mundialmente as unidades de medida usadas nos meios sociais e científicos, o próprio documento que descreve o SI reconhece a legitimidade de outras unidades de medida que têm uso extremamente difundido nesses meios. Essas unidades são frequentemente utilizadas devido à sua conveniência histórica e prática em contextos específicos.

Unidades usuais e conversões

Grandeza	Nome da unidade	Símbolo da unidade	Conversão
Tempo	minuto	min	1 min = 60 s
	hora	h	1 h = 60 min = 3 600 s
	dia	d	1 d = 24 h = 86 400 s
Comprimento	unidade astronômica	UA	1 UA = 149 597 870 700 m
Ângulo plano e de fase	grau	°	$1° = (\pi/180)$ rad
	minuto	'	$1' = (1/60)° = (\pi/10\,800)$ rad
	segundo	"	$1'' = (1/60)' = (\pi/648\,000)$ rad
Área	hectare	ha	$1\ ha = 1\ hm^2 = 10^4\ m^2$
Volume	litro	l, L	$1\ l = 1\ L = 1\ dm^3 = 10^3\ cm^3 = 10^{-3}\ m^3$
Massa	tonelada	t	$1\ t = 10^3\ kg$
Energia	elétron-volt	eV	$1\ eV = 1{,}602176634 \times 10^{-19}\ J$

Fonte dos dados: BRASIL. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia. *O Sistema Internacional de Unidades*. Brasília, DF: Inmetro, 2021. Disponível em: https://tedit.net/9nv3ss. Acesso em: 8 ago. 2024.

Não escreva no livro

Pense nisto

Qual ajuste teria que ser realizado no resultado da multiplicação para que ele fosse medido em newtons nessa situação?

Como 1 kg equivale a 1 000 g, então 1 g equivale a 0,001 kg, temos que $1\ g = 1 \cdot 10^{-3}$. Portanto, o resultado precisaria ser multiplicado por 10^{-3} (ou dividido por 1 000).

É importante destacarmos que, embora essas unidades de medida sejam também comuns no meio científico, não devemos misturar as unidades de medida do SI com outras quando efetuamos contas, a fim de evitar erros nas medidas que estão sendo calculadas.

Vamos tomar a grandeza força como exemplo. A segunda lei de Newton associa a medida da grandeza força ao produto da medida de massa pela da aceleração do corpo ($F = m \cdot a$). Usando as unidades de medida de base para massa (kg) e aceleração (m/s^2), o resultado do produto é medido em $kg \cdot m/s^2$ ou, ainda, em newtons (N).

Se a medida de massa fosse dada em gramas (g) e a da aceleração em metros por segundo ao quadrado (m/s^2), teríamos a força medida em $g \cdot m/s^2$, que não equivale a N, ou seja, seria necessário fazer um ajuste no resultado da multiplicação para que o valor numérico fosse de fato medido em newtons. Assim, podemos garantir que estamos utilizando as unidades corretas e obtendo resultados precisos e consistentes.

História da Matemática

Por que um dia tem 24 horas, cada hora tem 60 minutos e cada minuto tem 60 segundos?

A maior parte das unidades de medida que usamos são definidas com base no sistema decimal. O tempo, no entanto, tem um sistema de unidades particular que não segue exatamente esse padrão. Isso ocorre por razões históricas relacionadas à maneira como as antigas civilizações marcavam a passagem de tempo.

Uma das teorias sobre a origem do sistema de divisão de tempo atribui ao Egito antigo a definição de que o tempo que leva para o Sol sair de determinada posição e voltar para ela seria dividido em 24 horas. Segundo Marek Kukula (1969–), astrônomo do Observatório Real de Greenwich, em Londres, os egípcios dividiam o céu noturno em 12 partes, usando alguns conjuntos de estrelas como referência. Durante o dia, relógios solares também foram divididos em 12 partes para indicar a posição do Sol no céu, resultando na divisão de um dia em 24 horas.

A divisão de 1 hora em 60 minutos e de um minuto em 60 segundos tem origem provável no Império Sumério. Naquela época, era comum utilizar apenas números inteiros para facilitar os cálculos. Divisões na base 10 não eram tão convenientes, porque 10 é divisível apenas por 2 e 5, além de por 1 e por ele mesmo. Já a base 60 oferece uma possibilidade maior de divisões, pois é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30, além de por 1 e por ele próprio. Isso facilitava a divisão da hora em partes menores, levando à definição de 60 minutos por hora e 60 segundos por minuto.

Fontes dos dados: AO CONTRÁRIO do que parece, astronomia garante que nossos dias têm ficado mais longos. *BBC News Brasil*, São Paulo, 5 jan. 2018. Disponível em: https://tedit.net/3kwarw. DUARTE, Marcelo. Por que as horas são divididas em 60 minutos e os minutos em 60 segundos? *O guia dos curiosos*, São Paulo, 24 abr. 2019. Disponível em: https://tedit.net/o0h5al. Acesso em: 8 ago. 2024.

JeanLuclchard/Shutterstock

Relógio do prédio da Concierge, em Paris, que funciona há mais de 600 anos. Foto de 2023.

AxiVector/Adobe Stock

14. a) $10 \text{ km} = 10 \cdot 10^3 \text{ m} = 1 \cdot 10^4 \text{ m}$; 1 h 59 min 30 s = 119 min 30 s = $119 \cdot (60 \text{ s}) + 30 \text{ s} =$ $= 7\,170 \text{ s} = 7{,}17 \cdot 10^3 \text{ s}$; 2 h 04 min 15 s = 124 min 15 s = $124 \cdot (60 \text{ s}) + 15 \text{ s} = 7\,455 \text{ s} = 7{,}455 \cdot 10^3 \text{ s}$.

b) $\frac{1 \cdot 10^4 \text{ m}}{7{,}455 \cdot 10^3 \text{ s}} = \frac{10 \text{ m}}{7{,}455 \text{ s}} \simeq 1{,}34$; ou seja, aproximadamente 1,34 metro por segundo.

Não escreva no livro

ATIVIDADES

14. Nos Jogos Olímpicos de Tóquio, no Japão, que ocorreram em 2021, a brasileira Ana Marcela Cunha conquistou a medalha de ouro na modalidade maratona aquática. A prova consiste em nadar ao longo de 10 km por águas abertas, o que a atleta conseguiu realizar em aproximadamente 1 h 59 min 30 s. Já nos Jogos Olímpicos de Paris, em 2024, a brasileira ficou em 4º lugar realizando a prova em aproximadamente 2 h 04 min 15 s.

ATSUSHI TOMURA/Getty Images/AFP

Ana Marcela Cunha nos Jogos Olímpicos de Tóquio, no Japão. Fotografia de 2021.

a) No caderno, escreva as medidas expressas em notação científica e nas unidades de medida base do SI.

b) Determine, em média, quantos metros a atleta percorreu a cada segundo nos Jogos Olímpicos de 2024.

c) Determine quanto tempo (em minutos e segundos), aproximadamente, a atleta levou, em média, para percorrer cada quilômetro da prova em 2024.

d) Compare o desempenho de Ana Marcela Cunha com o de outros atletas que competiram na mesma prova em 2021 e em 2024. Pesquise e escreva no caderno as medidas de tempo finais de pelo menos 2 outras nadadoras e calcule a medida de velocidade média de cada uma delas. Apresente os resultados em uma tabela no caderno e analise as diferenças, debatendo possíveis fatores que podem ter contribuído para essas variações. Resposta pessoal.

14. c) Ela percorreu 10 km em $7{,}455 \cdot 10^3$ s. Então, o tempo, em segundos, para cada quilômetro foi:

$$\frac{7{,}455 \cdot 10^3}{10} = 745{,}5$$

Aproximando para 745 s e convertendo em minutos e segundos: 745 s = 720 s + 25 s = $= 12 \cdot (60 \text{ s}) + 25 \text{ s} = 12 \text{ min} +$ + 25 s; ou seja, aproximadamente 12 min 25 s.

15. Um campo de futebol americano oficial tem medida de área igual a 6 420 yd^2 (jardas quadradas). Já a área do campo de futebol tradicional pode medir aproximadamente 8 250 m^2. Usando uma calculadora, responda no caderno: Qual dos campos é o maior e em quantos por cento ele é maior do que o outro? Dado: 1 yd = 0,9144 m.

15. O campo de futebol tradicional é 53,69% maior.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

16. O *Guinness World Records*, instituição que documenta uma série de recordes que ocorreram no mundo, deu o título de "carro elétrico que atinge mais rapidamente 100 km/h a partir do repouso" para o veículo feito por uma equipe de estudantes do Instituto Federal Suíço de Tecnologia (ETH) e da Universidade de Lucerna, na Suíça. O carro foi capaz de atingir essa marca em 0,956 segundo.

Fonte dos dados: FASTEST 0-100 km/h *acceleration by an eletric-car. Guinness World Records*, Londres, [2023] Disponível em: https://tedit.net/tto0gi. Acesso em: 12 ago. 2024.

ALESSANDRO DELLA BELLA/ETH ZURICH/AFP

O pequeno veículo experimental, batizado de Mythen.

Experimente usar uma calculadora para responder no caderno: Qual é, aproximadamente, a medida da aceleração média desse carro em m/s^2?

$$a = \frac{100 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{0{,}956 \text{ s}} = \frac{100 \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}}}{0{,}956 \text{ s}} \simeq 29{,}06 \text{ m/s}^2$$

As imagens não estão representadas em proporção.

18. a) 1 mm de chuva equivale a 1 L de água em uma área medindo 1 m^2, então 700 mm equivalem a 700 L de água em uma área medindo 1 m^2.

$700\ L = 700\ dm^3 = 700 \cdot (10^{-3})\ m^3 = 700 : 10^{-3}\ m^3 = 0{,}7\ m^3$

17. O ano-luz é uma medida de distância que equivale à medida de distância percorrida pela luz no vácuo no período de um ano. Já a unidade astronômica (UA) equivale à medida de distância média entre o Sol e a Terra.

a) A luz emitida pelo Sol chega à Terra em aproximadamente 8 minutos e 20 segundos e demora cerca de 26 mil anos para chegar ao centro de nossa galáxia. Com base nessa informação, responda no caderno: Qual das duas unidades de medida apresentadas é mais conveniente para expressar medidas de distância dentro do Sistema Solar e qual é mais conveniente para expressar medidas de distância relacionadas à nossa galáxia? Justifique sua resposta.

b) A velocidade da luz é de aproximadamente $3 \cdot 10^8$ m/s. Considerando que um ano tem 365 dias, a quantos metros aproximadamente equivale um ano-luz? Dê sua resposta expressa em notação científica.

c) Considerando as informações fornecidas no enunciado e nos itens anteriores, responda no caderno: A quantos metros equivale, aproximadamente, 1 unidade astronômica? Dê a resposta expressa em notação científica.

17. a) 1 ano-luz é uma medida de distância muito maior do que a medida de distância entre Sol e Terra, que pode ser percorrida à velocidade da luz em apenas 8 minutos e 20 segundos. Portanto, é mais adequado usar unidade astronômica para distâncias dentro do Sistema Solar e anos-luz para distâncias que ultrapassam muito esse limite, como distâncias relacionadas ao tamanho de nossa galáxia.

b) 1 ano = 365 dias =
$= 365 \cdot 24$ horas =
$= 365 \cdot 24 \cdot 3\,600$ s =
$= 31\,536\,000$ s

Se a luz percorre $3 \cdot 10^8$ metros a cada segundo, em 31 536 000 segundos, temos: $3 \cdot 10^8 \cdot 3{,}1536 \cdot 10^7 = 9{,}4608 \cdot 10^{15}$.

A luz percorre, em 1 ano, $9{,}4608 \cdot 10^{15}$ metros.

c) O intervalo de tempo que a luz do Sol demora para chegar à Terra mede: 8 min 20 s =
$= 8 \cdot (60\ s) + 20\ s = 500$ s.

Se a luz percorre $3 \cdot 10^8$ metros a cada segundo, em 500 segundos, então:
$3 \cdot 10^8 \cdot 500 =$
$= 3 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^2 = 1{,}5 \cdot 10^{11}$.

A distância média entre o Sol e a Terra e, portanto, uma unidade astronômica, mede $1{,}5 \cdot 10^{11}$ metros.

18. Leia os trechos das notícias a seguir.

Após mês de chuva recorde e volumes superiores a mil milímetros, RS [Rio Grande do Sul] tem previsão de dias secos em sequência

APÓS mês de chuva recorde e volumes superiores a mil milímetros, RS tem previsão de dias secos em sequência. *G1. Rio Grande do Sul*. Disponível em: https://tedit.net/1r57va. Acesso em: 12 ago. 2024.

Quantos milímetros de chuva é muito? Saiba quando ficar em alerta

Especialistas explicam como a quantidade de água é contabilizada

Segundo a definição do **Cemaden** (Centro Nacional de Monitoramento e Alertas de Desastres Naturais), uma chuva de 1 milímetro por minuto é equivalente a 1 litro de água por minuto em uma área de 1 metro quadrado.

FANTIN, Marcos. *Globo Rural*. Previsão do tempo. Quantos milímetros de chuva é muito? Saiba quando ficar em alerta. Disponível em: https://tedit.net/ukl5aj. Acesso em: 12 ago. 2024.

Considerando que o acumulado de chuva em Porto Alegre foi de 700 milímetros ao longo de 30 dias, responda no caderno.

a) Qual foi a medida de volume de água que se precipitou em um metro quadrado de Porto Alegre nessa medida de intervalo de tempo, em unidades de medida do SI?

b) Considerando que Porto Alegre tem uma medida de área de aproximadamente 500 km^2, qual foi a medida de volume de chuva que caiu nesse intervalo de 30 dias, em unidades de medida do SI? Dê sua resposta em notação científica.

c) Se uma piscina olímpica comporta 2 500 m^3 de medida de volume de água, quantas piscinas olímpicas poderiam ser enchidas com toda a medida de volume de água que caiu sobre Porto Alegre durante esses 30 dias?

18. b) Convertendo a medida de área de Porto Alegre de km^2 para m^2, temos:
$500\ km^2 = 500 \cdot (10^6\ m^2) =$
$= 500\,000\,000\ m^2 = 5 \cdot 10^8\ m^2$
De acordo com o texto, caiu 0,7 m^3 de chuva por metro quadrado. Assim, teremos:
$0{,}7\ m^3/m^2 \cdot 5 \cdot 10^8\ m^2 =$
$= 3{,}5 \cdot 10^8\ m^3$.
Portanto, a medida de volume de água que caiu sobre Porto Alegre em 30 dias foi $3{,}5 \cdot 10^8\ m^3$.

Douglas Pfeiffer/Shutterstock

Praça no centro histórico de Porto Alegre inundada, após fortes chuvas. Foto de 2024.

18. c) Para determinar quantas piscinas olímpicas poderiam ser enchidas, dividimos a medida de volume total de água pela medida de volume de uma piscina olímpica:

Quantidade de piscinas olímpicas: $\frac{3{,}5 \cdot 10^8}{2\,500} = 1{,}4 \cdot 10^5 = 140\,000$. Portanto, poderiam ser enchidas 140 000 piscinas olímpicas.

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Financeira* e *Educação para o Consumo*.

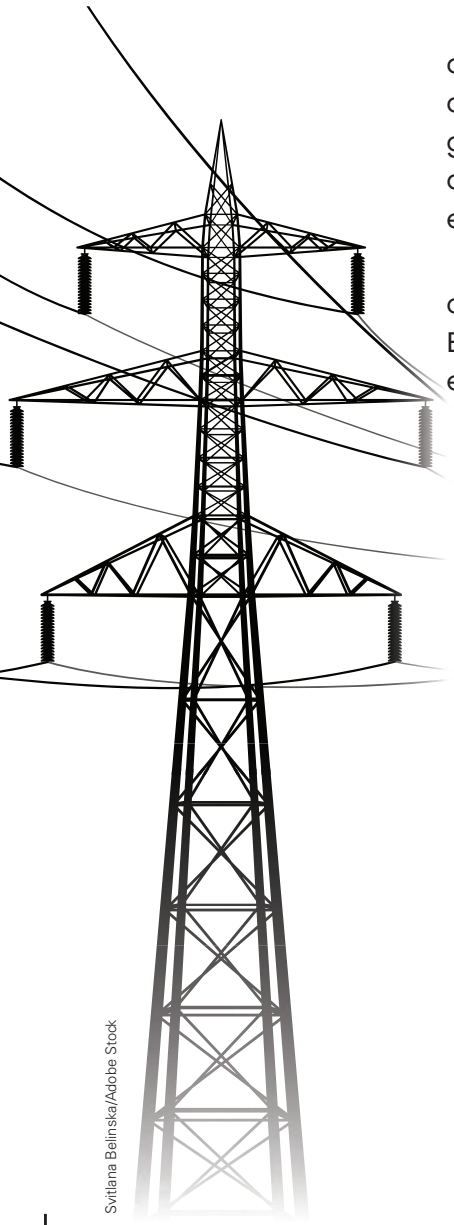
Consumo de energia elétrica

Segundo a Pesquisa de Orçamento Familiar (POF), realizada entre os anos de 2017 e 2018 pelo IBGE, em média 2,5% do orçamento do brasileiro é destinado a pagar contas de energia elétrica. Para famílias de baixa renda, esse comprometimento no orçamento sobe para 4,4%.

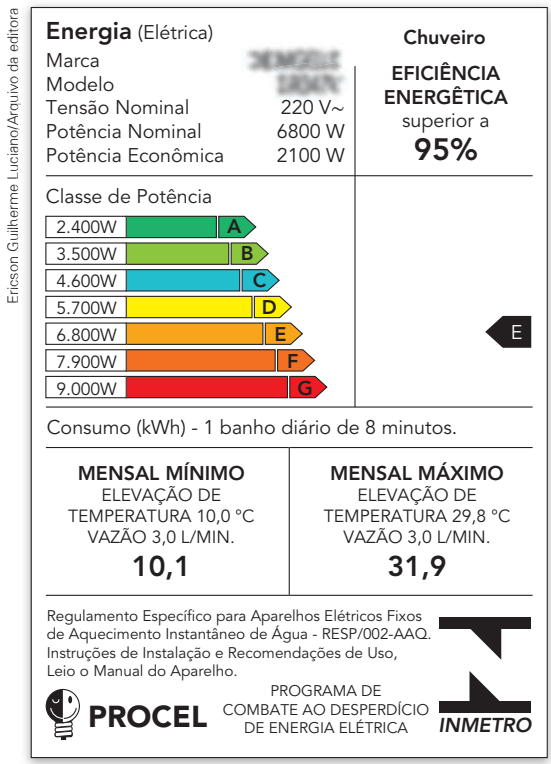
Dada a relevância das contas de energia no orçamento familiar, economizar energia é uma maneira importante de economizar dinheiro e reduzir impactos ambientais.

Equipamentos que transformam energia em calor, como geladeiras e chuveiros elétricos, são considerados os grandes vilões da conta de luz, pois demandam uma quantidade significativa de energia elétrica para funcionar. Por conta disso, é essencial analisar cuidadosamente o aparelho antes de adquiri-lo para entender quanto ele pode impactar financeiramente a família.

Para facilitar a comparação entre eletrodomésticos, etiquetas como a mostrada na imagem a seguir acompanham os produtos no Brasil. Essas etiquetas fornecem informações sobre o consumo de energia por ciclo de uso.



Svitlana Belinska/Adobe Stock



Energia (Elétrica) — **Chuveiro**

Marca	[redacted]
Modelo	[redacted]
Tensão Nominal	220 V~
Potência Nominal	6800 W
Potência Econômica	2100 W

EFICIÊNCIA ENERGÊTICA superior a **95%**

Classe de Potência

2.400W	A
3.500W	B
4.600W	C
5.700W	D
6.800W	E
7.900W	F
9.000W	G

E

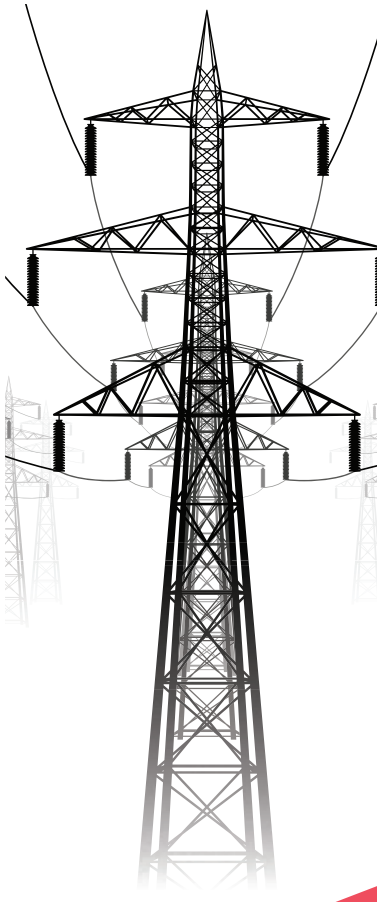
Consumo (kWh) - 1 banho diário de 8 minutos.

MENSAL MÍNIMO	MENSAL MÁXIMO
ELEVAÇÃO DE TEMPERATURA 10,0 °C VAZÃO 3,0 L/MIN.	ELEVAÇÃO DE TEMPERATURA 29,8 °C VAZÃO 3,0 L/MIN.
10,1	**31,9**

Regulamento Específico para Aparelhos Elétricos Fixos de Aquecimento Instantâneo de Água - RESP/002-AAQ.
Instruções de Instalação e Recomendações de Uso, Leio o Manual do Aparelho.

PROCEL — PROGRAMA DE COMBATE AO DESPERDÍCIO DE ENERGIA ELÉTRICA — INMETRO

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora



No caso específico da etiqueta do chuveiro mostrado, um banho de 8 minutos por dia pode representar um consumo de 10,1 kWh a 31,9 kWh por mês. Vale notar que kWh é uma unidade derivada do produto de uma medida de potência (em kW) por uma medida de tempo (em h), resultando em uma unidade de medida de energia, porém diferente da proposta pelo SI.

Para calcular financeiramente o gasto representado por essa quantidade de energia, é necessário conhecer o preço da tarifa de energia. Cada estado do Brasil tem diferentes preços, e em 2022 a tarifa média era de 0,688 reais por kWh, de acordo com o *Ranking* da Tarifa Residencial da Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel).

Levando em conta essa tarifa, conclui-se que, na melhor das hipóteses, o custo mensal, em reais, de energia elétrica para banhos diários de 8 minutos com esse chuveiro seria de $10{,}1\ \text{kWh} \cdot \text{R\$ } 0{,}688 \simeq \text{R\$ } 6{,}95$. Na pior das hipóteses, se o chuveiro for usado na potência máxima, o custo mensal em reais pode chegar a: $31{,}9\ \text{kWh} \cdot \text{R\$ } 0{,}688 \simeq \text{R\$ } 21{,}95$.

Fontes dos dados: IBGE. Tabela 1.1.2 - Distribuição das despesas monetária e não monetária média mensal familiar, por classes de rendimento total e variação patrimonial mensal familiar, segundo os tipos de despesa – Brasil – período 2017-2018. *IBGE* [documento Tab 1.1.1 até 1.1.6.xls], Rio de Janeiro, 8 nov. 2019. Disponível em: https://tedit.net/p9dfh3. *RANKING* da Tarifa Residencial. *Aneel*, 2023. Disponível em: https://tedit.net/g44jbo. Acesso em: 12 ago. 2024.

1. 1 kWh equivale a quantas unidades da unidade de medida de energia no SI? Busque as informações necessárias nas tabelas apresentadas ao longo deste capítulo. $1\ \text{kWh} = 1 \cdot (10^3) \cdot \left(\frac{\text{J}}{\text{s}}\right) \cdot (3\,600\ \text{s}) = 3\,600\,000\ \text{J}$

2. Suponha que uma família de 4 pessoas use esse chuveiro elétrico e pague a tarifa de luz como descrito anteriormente. Suponha ainda que todos os membros da família tomem banhos diariamente usando a medida de potência máxima do chuveiro. Qual é a diferença no preço da conta de luz ao final do mês caso todos os banhos sejam de 16 minutos em vez de 8 minutos? A diferença seria de R$ 87,80, pois $4 \cdot 21{,}95 \cdot 2 - 4 \cdot 21{,}95 = 4 \cdot 21{,}95 = 87{,}8$.

3. Além da questão financeira, quais outros motivos deveriam incentivar essa família a tomar banhos de menor duração? Resposta pessoal.

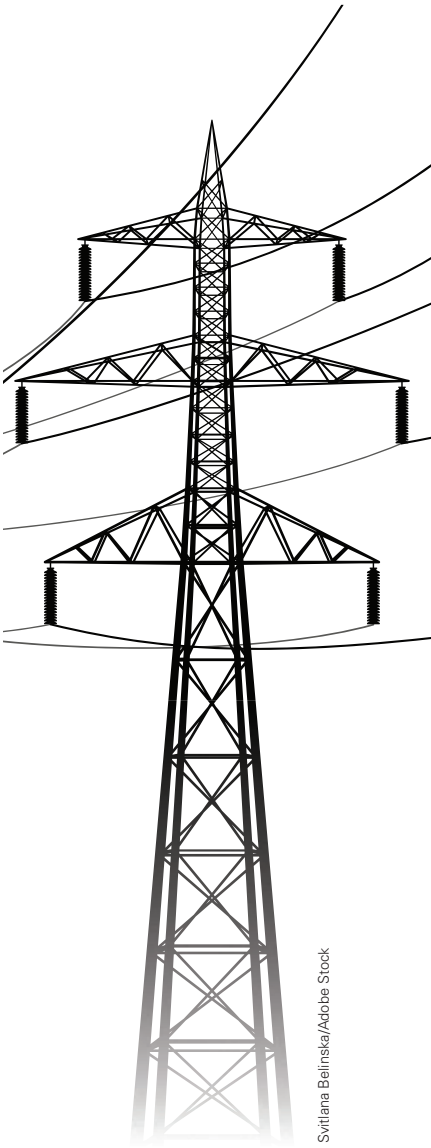
4. Suponha, agora, que essa família tenha decidido trocar o chuveiro elétrico por outro que gaste 25 kWh por mês em banhos diários de 8 minutos na máxima potência. Quanto tempo levará para a família recuperar os R$ 190,00 investidos na troca do aparelho considerando que os banhos sempre são de 8 minutos com a máxima potência do chuveiro?

5. Pesquise, em contas de energia elétrica ou na internet, o preço da tarifa de energia elétrica na cidade em que você mora e procure as especificações de um equipamento eletrônico da sua casa para descobrir quanto ele gasta de energia por mês (o manual de instruções costuma trazer essas informações). Em seguida, faça a estimativa, no caderno, de quanto custa manter esse aparelho funcionando ao longo do mês e pense se há maneiras de minimizar esse gasto. Resposta pessoal.

Infográfico clicável

4. O gasto mensal dessa família considerando o novo chuveiro seria, em reais, $4 \cdot 25 \cdot 0{,}688 = 68{,}8$; portanto, a economia mensal, com energia elétrica, seria, em reais, $4 \cdot 21{,}95 - 68{,}8 = 87{,}8 - 68{,}8 = 19$.

Assim, em 10 meses $\left(\frac{190}{19} = 10\right)$ de uso do novo chuveiro, a família conseguirá recuperar o investimento.



Svitlana Belinska/Adobe Stock

capítulo

4 Outras unidades de medida

Acurácia e estimativa

Um dos desafios de analisar grandes eventos abertos ao público é estimar a quantidade de pessoas presentes quando não há ingressos ou controle de acesso para contar com **exatidão** os participantes. Nesse tipo de situação, é possível realizar **estimativas** para ter uma noção aproximada do público.

Acurácia refere-se à proximidade do resultado de uma medida ou cálculo a um valor exato. Existem diversas situações em que uma medida ou cálculo absolutamente exato não é possível, necessário ou viável, como é o caso da quantidade de participantes do bloco de Carnaval. Nessas situações, podemos usar estratégias de estimativa para obter um resultado suficientemente preciso.

Por exemplo, o bloco de Carnaval Galo da Madrugada já foi reconhecido como o maior bloco do mundo pelo *Guiness Book*. Para ter esse reconhecimento, foi utilizada uma estimativa da quantidade de pessoas presentes no bloco. Uma maneira de estimar essa quantidade é calcular a densidade de pessoas por metro quadrado e multiplicar essa medida pela medida de área ocupada pela multidão.

Rafael Vieira/AGIF/AFP

Imagem aérea do bloco de Carnaval Galo da Madrugada, em Recife (PE). Foto de 2023.

Estimativa

Uma possível estratégia para a resolução de problemas envolvendo estimativas é subdividir o problema em partes menores. Considere o exemplo a seguir.

A direção de uma escola precisa estimar a quantidade de comida necessária para o almoço dos estudantes e funcionários da escola. Para isso, ela pode seguir alguns passos simples.

1. Quantas pessoas almoçam na escola?

- Obter ou estimar a quantidade total de estudantes e funcionários que vão almoçar. Nesse caso é preciso considerar que nem todos consomem a mesma quantidade de alimento, então a direção da escola pode subdividir esse questionamento.
  - **a)** Quantos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental almoçam na escola?
  - **b)** Quantos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental almoçam na escola?
  - **c)** Quantos estudantes do Ensino Médio almoçam na escola?
  - **d)** Quantos funcionários almoçam na escola?

2. Quantos gramas de alimento consome uma pessoa?

- A direção da escola pode subdividir as pessoas em 4 categorias com hábitos alimentares semelhantes. Embora haja variação individual, ela pode usar médias para a estimativa.
  - **a)** Quantos gramas de alimento, em média, consome um estudante dos anos iniciais do Ensino Fundamental?
  - **b)** Quantos gramas de alimento, em média, consome um estudante dos anos finais do Ensino Fundamental?
  - **c)** Quantos gramas de alimento, em média, consome um estudante do Ensino Médio?
  - **d)** Quantos gramas de alimento, em média, consome um funcionário?

Em seguida, fazem-se os seguintes cálculos.

Multiplicam-se os valores respondidos:

- na pergunta **1**, item **a**, e na pergunta **2**, item **a**;
- na pergunta **1**, item **b**, e na pergunta **2**, item **b**;
- na pergunta **1**, item **c**, e na pergunta **2**, item **c**;
- na pergunta **1**, item **d**, e na pergunta **2**, item **d**.

Então, adicionando todos os produtos, a direção dessa escola vai obter uma estimativa da quantidade total necessária de gramas de alimento. Para uma estimativa ainda mais precisa, ela pode considerar as porções de cada tipo de alimento que será consumido.

Com estratégias parecidas à essa da direção da escola, podemos realizar estimativas práticas e confiáveis para diversas situações do cotidiano, desenvolvendo um entendimento mais profundo sobre acurácia e estimativa.

Joa Souza/Shutterstock

Estudantes almoçando no refeitório de uma escola, na cidade de Curaçá (BA). É importante estimar quantas pessoas se alimentam nele e quanto de alimento elas consomem para evitar desperdícios. Foto de 2023.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. A partir de 2011, foi proibida no Brasil a comercialização de tomadas ou plugues que não seguissem o padrão estabelecido pelo Inmetro (3 pinos para o caso das tomadas e 2 ou 3 pinos para o caso dos plugues). Muitos prédios de escolas já construídos até então tiveram de atualizar as tomadas para ficar de acordo com esse padrão.

Fonte dos dados: NOVO padrão de tomadas é obrigatório a partir desta sexta. *G1*. Economia. 1º jul. 2011. Disponível em: https://tedit.net/i4g2d2. Acesso em: 12 ago. 2024.

Gabriel_Ramos/Shutterstock

Modelo de tomada e plugue de 3 pinos.

As imagens não estão representadas em proporção.

E se hoje fosse decretado que outro tipo de tomada deve substituir a de 3 pinos? Em pequenos grupos, façam uma estimativa de quantas tomadas novas precisariam ser compradas para que todas as tomadas do prédio da escola em que estudam fossem substituídas.

Troque ideias com outros grupos a respeito da estratégia desenvolvida e o número final obtido. Qual estratégia parece oferecer um resultado mais exato? Resposta pessoal.

2. Para estimar a quantidade de participantes em uma manifestação, foi realizada a contagem de quantas pessoas havia em um quadrado medindo 1 m de lado, obtendo-se o valor de 6 pessoas/m^2. Em seguida, estimou-se a medida de área total ocupada pelos manifestantes, obtendo-se 0,03 km^2. Qual foi o resultado da estimativa de participantes nessa manifestação, considerando que a proporção de 6 pessoas/m^2 se manteve para toda a medida de área ocupada?

2. $6\ \frac{\text{pessoas}}{\text{m}^2} = 6\ \frac{\text{pessoas}}{\left(10^{-3}\ \text{km}\right)^2} =$

$= \frac{6}{10^{-6}}\left(\frac{\text{pessoas}}{\text{km}^2}\right) =$

$= 6\,000\,000$ pessoas/km^2

Como a medida de área ocupada era 0,03 km^2, temos:

$n = 6\,000\,000 \cdot 0{,}03 = 180\,000$;

ou seja, 180 000 pessoas.

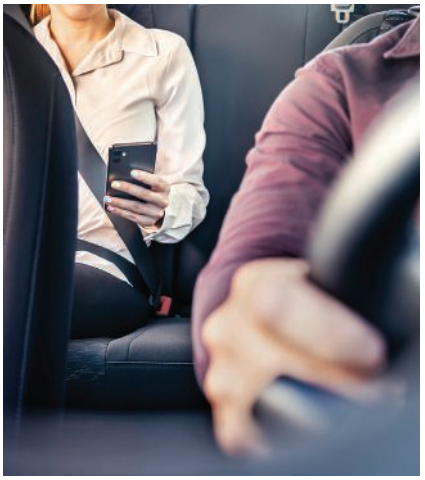
3. Orçamento é um planejamento em que se estimam despesas e ganhos para avaliar a situação financeira de um indivíduo ou grupo de indivíduos. Elabore no caderno 3 perguntas que poderiam ajudar as pessoas de uma residência a estimar os gastos com supermercado durante o próximo mês.

Exemplos de respostas: Quantas pessoas moram na residência? Quais são as idades dos moradores? Quantas refeições diárias essas pessoas consomem? Quais são os alimentos consumidos pelas pessoas?

4. Uma motorista precisa estimar quanto cobrará para transportar uma família de Porto Velho (RO) a Rio Branco (AC). Para isso, ela fez os levantamentos indicados a seguir.

- A medida de distância entre essas cidades é de aproximadamente 510 km.
- A medida de tempo estimada de viagem é de 6 h 30 min, aproximadamente 1 diária dessa motorista.
- O consumo médio do veículo dela é de 15 km/L de gasolina.
- O preço do litro da gasolina é R$ 7,00.
- O preço cobrado pela diária dessa motorista é R$ 250,00.
- Para compensar a eventualidade de não conseguir passageiro para o trajeto de volta, a motorista coloca uma margem extra de 100% sobre o valor estimado.

Qual deve ser o resultado da estimativa do valor cobrado pela motorista para realizar o trajeto?



Tero Vesalainen/Shutterstock

Use sempre o cinto de segurança mesmo ao viajar no banco de trás do carro.

4. Consumo: $\frac{510}{15} = 34$; ou seja, 34 L. Gasto com gasolina: $34 \cdot 7 = 238$; ou seja, R$ 238,00.

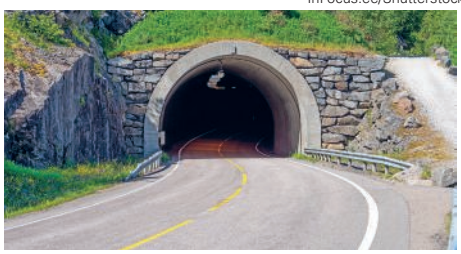
Custo total: $238 + 250 = 488$.

Valor a ser cobrado: $(1 + 1) \cdot 488 = 976$; ou seja, R$ 976,00, considerando a margem de 100%.

5. a) Medida de área da região da imagem **2**: $A_1 = 2 \cdot (1 \cdot 3) + 2 \cdot (1 \cdot 4) = 6 + 8 = 14$; ou seja, $A_1 = 14\ m^2$.
Medida de área da região da imagem **3**: $A_2 = 2 \cdot (1 \cdot 3) = 6$; ou seja, $6\ m^2$.
Média aritmética das medidas de área das duas regiões: $A_m = \frac{14\ m^2 + 6\ m^2}{2} = 10\ m^2$.

5. Para estimar a medida de área da abertura de um túnel, um estudante usou a seguinte técnica: aproximou a medida de área da região sob a curva (imagem **1**) pela média aritmética de 2 medidas: a soma das medidas de área das regiões delimitadas pelos retângulos apresentados na imagem **2** e a soma das medidas de área das regiões delimitadas pelos retângulos apresentados na imagem **3**.

InFocus.ee/Shutterstock



Vista frontal de um túnel.

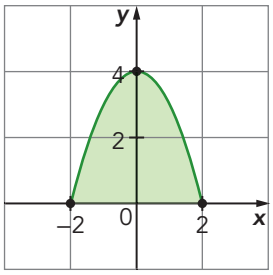


Imagem **1**.

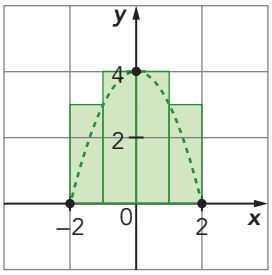


Imagem **2**.

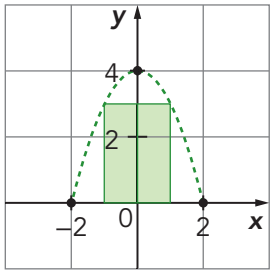


Imagem **3**.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

a) Qual foi a medida de área obtida sabendo que a medida do lado de cada quadrado da malha quadriculada corresponde a 1 m?

b) O que o estudante poderia ter feito para tornar a estimativa mais exata, sem abandonar por completo a estratégia adotada?

5. b) Dividir as imagens em mais regiões delimitadas por retângulos com medida da base menor, de modo que as medidas de área excedente na imagem **2** e faltante na imagem **3** sejam menores.

6. Considere uma garrafa térmica cilíndrica, como a apresentada na imagem. Suponha que seja necessário estimar a medida de capacidade dessa garrafa, em litros, e para isso estejam disponíveis os seguintes materiais: uma régua, uma jarra milimetrada e água.
Descreva em seu caderno qual método você utilizaria para estimar a medida de capacidade da garrafa térmica.

devrawat21/ Adobe Stock

Modelo de garrafa térmica cilíndrica com tampa.

6. Exemplo de resposta: Encher a garrafa térmica de água e utilizar a jarra milimetrada para medir a quantidade de água que a garrafa térmica comporta ou calcular a medida de volume do cilindro com as medidas do raio e da altura da garrafa.

7. É comum casas, prédios e outras edificações, como escolas, terem uma caixa-d'água, que pode ser utilizada como reservatório caso o fornecimento de água seja interrompido.

a) **Troque ideias** com um colega e faça no caderno uma estimativa de quantos litros de água você utiliza na escola durante um dia de aula. Compare o valor da sua estimativa com a dos outros colegas. Resposta pessoal.

b) Pesquise, com os colegas e com a direção da escola, e registre no caderno se a escola possui uma caixa-d'água. Em caso positivo, pergunte a medida de capacidade dessa caixa-d'água. Resposta pessoal.

c) Em seu caderno faça uma estimativa da quantidade de estudantes e funcionários que frequentam a escola durante um dia comum. A partir dos valores obtidos nos itens **a** e **b**, determine se a medida de capacidade da caixa-d'água é suficiente para suprir as necessidades da escola durante um dia letivo completo, caso o fornecimento de água seja interrompido. Resposta pessoal.

d) Caixas-d'água precisam ser higienizadas periodicamente. Em grupo, pesquisem as recomendações de periodicidade desse processo e elaborem panfletos de conscientização a respeito do assunto que possam ser distribuídos pela comunidade, de maneira física ou digital.

7. d) A recomendação das Agências de Vigilância Sanitária é de que caixas-d'água de estabelecimentos de uso coletivo sejam higienizadas a cada 6 meses. A higienização deve ser feita utilizando água sanitária, com a diluição de 1 litro de água sanitária a cada 1 000 litros de água.

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

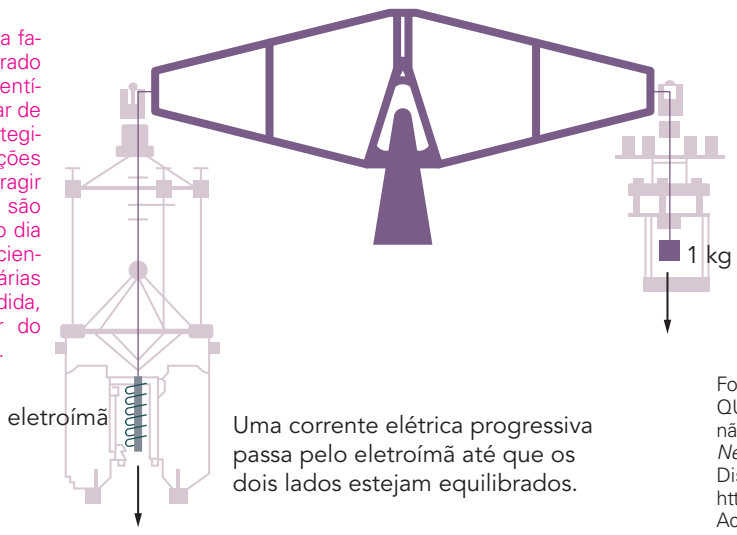
Definição das unidades fundamentais

Como você já estudou no capítulo anterior, existem 7 unidades de medida de base sobre as quais são derivadas todas as outras. As definições dessas unidades de medida precisam ser consistentes para não afetar a estrutura do conhecimento construído a partir delas, o que já não foi verdade.

Desde 1889, o quilograma, por exemplo, era definido por um protótipo: um cilindro de platina e irídio, fabricado em Londres, armazenado em um cofre no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, localizado na França. Outras réplicas foram feitas para serem levadas para o exterior, mas todos esses protótipos sofreram e continuam sofrendo pequenas alterações ao perder átomos ou interagir com o ar, mesmo sendo guardados de maneira bem protegida. Essas variações são imperceptíveis para usos do dia a dia, mas, para pesquisas científicas, em que é necessária exatidão na unidade de medida, a diferença com o passar do tempo se torna significativa.

Por conta disso, na Conferência Geral sobre Pesos e Medidas (CGPM) de novembro de 2018, os cientistas aprimoraram a definição do quilograma. Em vez de ser definido por um protótipo arbitrário, passou a ser definido por meio de uma constante fundamental, chamada constante de Planck, que relaciona a medida de massa e a medida da corrente elétrica necessária para equiparar energia mecânica com eletromagnética em uma balança, chamada balança de Kibble (ou de Watt).

Balança de Kibble (ou de Watt)



Uma corrente elétrica progressiva passa pelo eletroímã até que os dois lados estejam equilibrados.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

1. O protótipo do quilograma fabricado em 1889 foi considerado inadequado para medidas científicas precisas porque, apesar de ser guardado de forma protegida, sofria pequenas alterações ao perder átomos ou interagir com o ar. Essas variações são imperceptíveis para usos do dia a dia, mas, para pesquisas científicas, em que são necessárias exatidão na unidade de medida, a diferença com o passar do tempo se torna significativa.

2. Na CGPM de 2018, a definição do quilograma foi aprimorada, passando a ser baseada na constante de Planck, uma constante fundamental que relaciona a medida de massa e a medida da corrente elétrica necessária para equiparar energia mecânica com eletromagnética em uma balança, em vez de ser baseada em um protótipo arbitrário, como ocorria anteriormente.

Fonte dos dados: POR QUE em 2019 1 kg já não pesará 1 kg. *BBC News Brasil*, 28 out. 2017. Disponível em: https://tedit.net/r1tsmx. Acesso em: 29 ago. 2024.

1. Por que o protótipo do quilograma fabricado em 1889 foi considerado inadequado para medidas científicas precisas?

2. Qual foi a mudança significativa na definição do quilograma decidida na CGPM de 2018?

Instrumentos de medida

Antigamente, era muito comum que se usassem partes do corpo como instrumentos de medida de comprimento. Esses instrumentos eram bastante acessíveis, mas pouco padronizados. No Egito antigo, as pessoas buscaram diminuir as inconsistências usando cordas esticadas com nós para marcar uma unidade de cúbito (medida de distância do cotovelo à ponta do dedo médio do Faraó).

Com o passar do tempo, começaram a surgir diversos motivos para que se buscassem medidas cada vez mais precisas e exatas e, consequentemente, instrumentos de medida mais elaborados para dar conta dessa demanda. Hoje, pode-se medir, por exemplo, as dimensões de um móvel usando uma trena, os diâmetros interno e externo de um cano de PVC com um paquímetro e a espessura de uma folha de papel com um micrômetro.

Observação

O conceito de precisão está relacionado à proximidade dos resultados de uma medição realizada várias vezes; o conceito de acurácia, por sua vez, refere-se à proximidade dos resultados do valor real ou de referência.

Para exemplificar, considere a seguir um alvo e 4 exemplos de precisão e acurácia.

1

Não preciso e não acurado
Pontos dispersos longe do alvo.

2

Preciso e não acurado
Pontos de acerto bem concentrados, mas longe do alvo.

3

Não preciso e acurado
Vários pontos dispersos por todo o alvo.

4

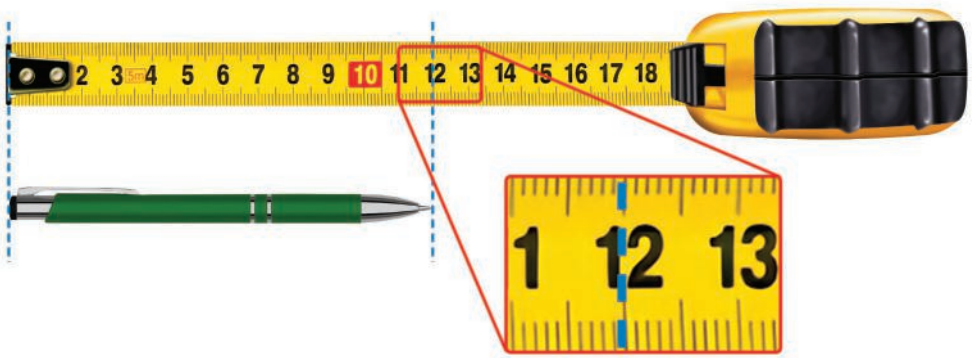
Preciso e acurado
Vários pontos de acerto concentrados no centro do alvo.

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Caso julgue pertinente apresente, aos estudantes o vídeo Qual a diferença entre exatidão e precisão?, do canal *Ted Ed* (disponível em: https://tedit.net/k8d7hy; acesso em: 31 ago. 2024). O vídeo está em inglês, mas é possível ativar legendas em português.

A **trena** é um instrumento de medida bastante usado na marcenaria, mas também comumente encontrado na maior parte das residências. A fita amarela apresenta marcações numéricas tanto em centímetros quanto em polegadas. Nas marcações em centímetros há também marcações com traços menores a cada milímetro.

No exemplo a seguir, podemos determinar que a medida de comprimento da caneta é um número entre 11,9 e 12,0 cm.



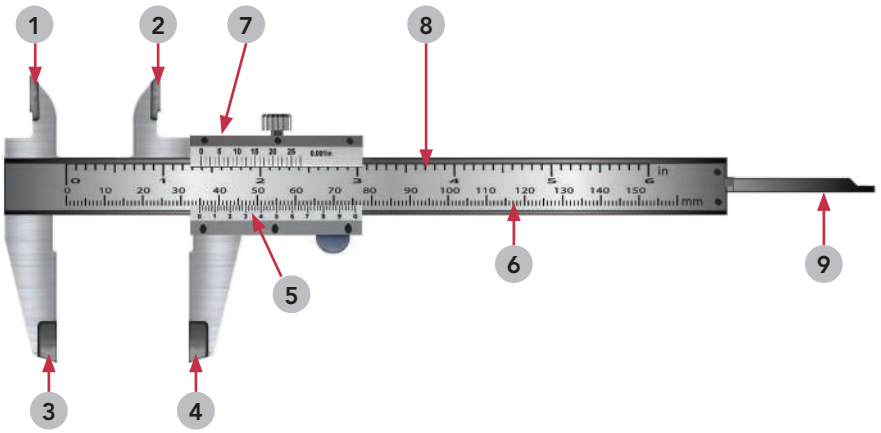
Luis Moura/Arquivo da editora

Observação

O paquímetro é muito utilizado por eletricistas, engenheiros, arquitetos e outros profissionais que necessitam medir dimensões internas (utilizando a orelha fixa e a móvel), externas (utilizando o bico fixo e o móvel) ou profundidade de objetos (utilizando a haste de profundidade).

As imagens não estão representadas em proporção.

O instrumento de medida a seguir é chamado **paquímetro**, cuja escala principal é dada tanto em milímetros quanto em polegadas, e conta também com o nônio, ou *vernier*, que também é dado tanto em milímetro quanto em polegadas.

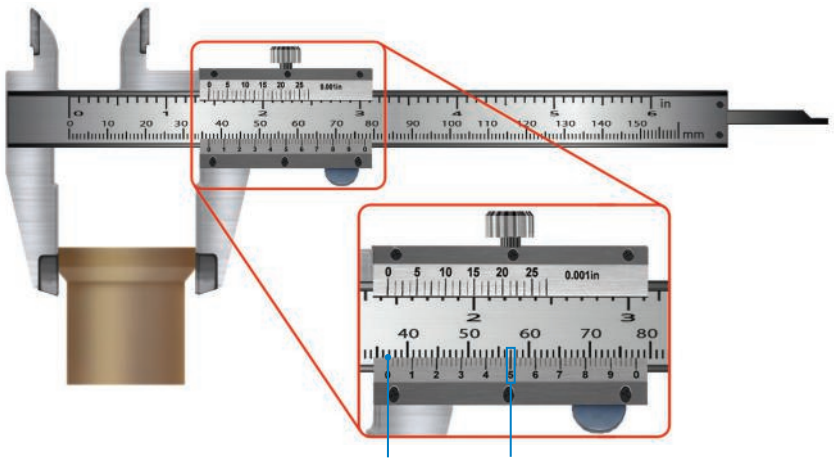


Luis Moura/Arquivo da editora

1. orelha fixa
2. orelha móvel
3. bico fixo
4. bico móvel
5. nônio ou *vernier* (milímetro)
6. escala fixa de milímetros
7. nônio ou *vernier* (polegada)
8. escala fixa de polegadas
9. haste de profundidade

No exemplo a seguir, para medir o diâmetro externo do cano utilizando o paquímetro, posiciona-se o cano entre o bico fixo e o móvel e, depois, é necessário verificar a posição do zero do nônio em relação à escala principal. Nesse caso, é possível notar que o zero está um pouco depois da marcação do milímetro 36, indicando que esse diâmetro mede mais do que 36 mm.

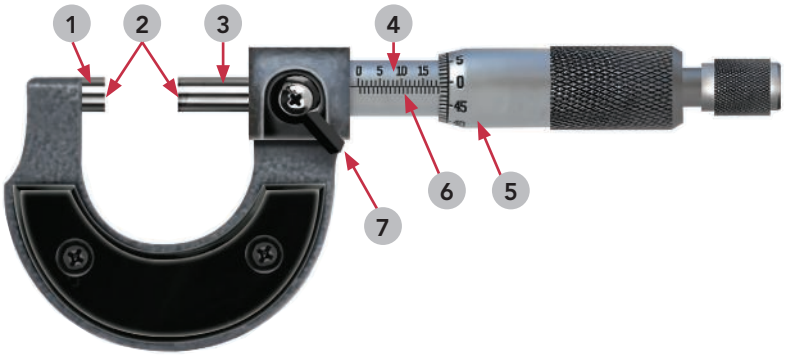
Em seguida, deve-se buscar a posição em que uma das marcações do nônio fica perfeitamente alinhada com uma da escala principal. Isso ocorre, nesse exemplo, na posição 5 do nônio, indicando que a medida de interesse é próxima de 36,5 mm.



Luis Moura/Arquivo da editora

A seguir, está representado outro instrumento de medida, chamado **micrômetro**. A escala fixa na bainha é dada em metades de milímetro, indicando que cada volta completa no tambor representa um aumento de 0,5 mm na medida realizada. No tambor graduado, as marcações representam 0,01 mm.

As imagens não estão representadas em proporção.

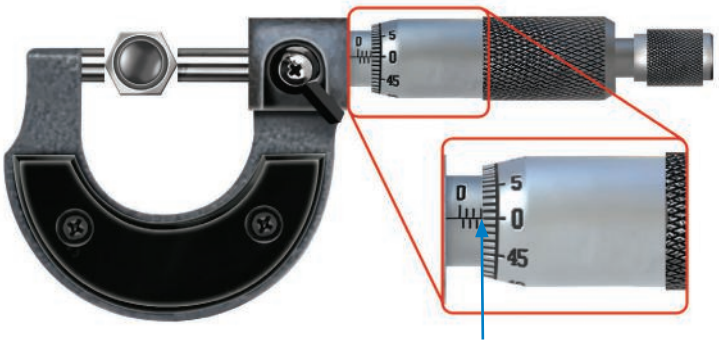


1 batente
2 faces de medição
3 encosto móvel
4 bainha
5 tambor graduado
6 escala fixa
7 trava

Luis Moura/Arquivo da editora

Para medir a dimensão da porca representada na imagem, é necessário primeiro colocá-la entre o batente e o encosto móvel e ir girando o tambor graduado até prender a peça entre as faces de medição. Para fixar o encosto móvel se utiliza a trava.

Em seguida, verifica-se em que posição o tambor graduado parou na escala fixa, que, no caso, foi 3 mm. Em seguida, deve-se notar qual marcação do tambor graduado coincide com a linha horizontal da bainha. Nesse caso, coincide com 0, indicando uma medida próxima de 3,00 mm.



Luis Moura/Arquivo da editora

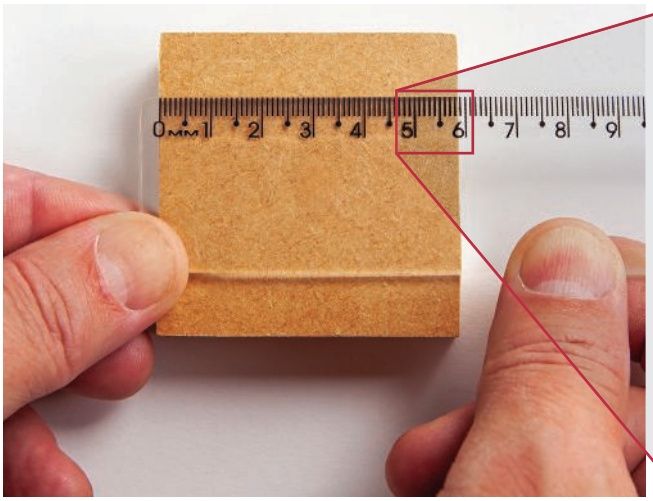
Independentemente da escala que esses instrumentos usam há sempre a limitação de sermos capazes de ler o resultado apenas pelas marcações. Quando a medida cai entre duas marcações, podemos estimar a medida de distância entre as marcações anterior e posterior, mas não passa de uma estimativa. Para expressar a acurácia de uma medida, então, foi desenvolvido o conceito de algarismos significativos.

Algarismos significativos exatos e algarismos duvidosos

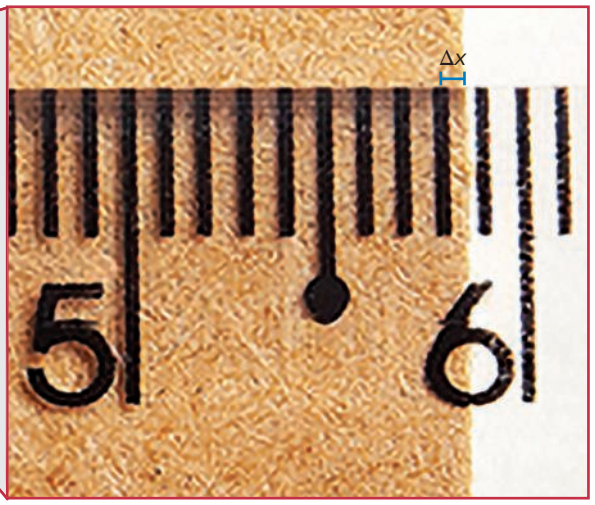
Nas medições realizadas com a trena, o paquímetro e o micrômetro, foi possível medir a dimensão analisada com diferentes precisões.

Vamos analisar mais detalhadamente a precisão de uma medida realizada com uma régua.

Dotta2/Arquivo da editora



Régua sendo utilizada para medir um pedaço de madeira.



Zoom da região da régua mostrando o valor de Δx, que pode ser estimado por quem está realizando a medida.

As imagens não estão representadas em proporção.

Ao analisarmos com mais cuidado a imagem ampliada, é possível verificar que o objeto é um pouco maior do que 5,8 cm, porém menor do que 5,9 cm.

O valor adicional da medida do objeto Δx (lê-se "delta x", em que Δ é a letra grega delta maiúscula) pode ser estimado pela pessoa que estiver realizando a medida, porém não é um valor exato como os demais. Digamos que esse valor seja estimado como 0,6 mm. Desse modo, a medição realizada é de 5,86 cm. Como o valor 5,8 cm foi medido com precisão pelo instrumento de medida e o valor 0,06 cm foi estimado, dizemos que, nessa medida, temos 3 algarismos significativos, sendo 2 corretos ou exatos e 1 duvidoso (o algarismo estimado).

Quando utilizamos um instrumento de medida, é estimado que o erro na medida, para mais ou para menos, devido à imprecisão do instrumento, equivale à metade da menor divisão que conseguimos ler na escala. No caso da régua, a menor divisão que conseguimos ler na escala é o milímetro, portanto, temos um erro estimado de 0,5 mm ou 0,05 cm.

Para expressar esse erro da medida, devido ao próprio instrumento de medida, que pode ser tanto para mais quanto para menos, escrevemos da seguinte maneira:

$$c = 5{,}86 \text{ cm} \pm 0{,}05 \text{ cm ou } (5{,}86 \pm 0{,}05) \text{ cm}$$

Vamos aprender a reconhecer os algarismos significativos. Acompanhe alguns exemplos a seguir.

- 356 s: possui 3 algarismos significativos.
- 3,020 kg: possui 4 algarismos significativos.
- 8,00040 m: possui 6 algarismos significativos.

Quando o algarismo zero estiver à esquerda do primeiro algarismo não nulo correto, antes ou depois da vírgula, ele não é um algarismo significativo. Considere os exemplos a seguir.

- 0,003 s: possui 1 algarismo significativo.
- 0,098 t: possui 2 algarismos significativos.
- 0,4180 m: possui 4 algarismos significativos.

Como os zeros à esquerda do primeiro dígito diferente de zero não são contabilizados, podemos expressar medidas em notação científica sem que isso interfira na quantidade total de algarismos significativos. Se uma medida é de 0,000721 m, por exemplo, podemos expressá-la como $7{,}21 \cdot 10^{-4}$ m. Em ambas as maneiras, é possível verificar que o número é composto de 3 algarismos significativos.

Pense nisto

Não escreva no livro

Com relação à medida próxima de 3,00 mm realizada com micrômetro anteriormente, determine:

- quantos algarismos fomos capazes de obter com exatidão?
- qual seria uma boa estimativa para o algarismo duvidoso?
- quantos seriam os algarismos significativos no caso dessa medição?
- qual é o erro instrumental dessa medida? E caso a medida fosse realizada em metros?

Foi possível ler com exatidão a medida de 3,00 mm, ou seja, 3 algarismos exatos se medidos em milímetros. Como a menor divisão do micrômetro é de 0,01 mm, estimamos que a imprecisão desse instrumento é de até 0,005 mm. Portanto, a medida seria expressa como $3{,}000 \text{ mm} \pm 0{,}005 \text{ mm}$ ou $3{,}000 \cdot 10^{-3} \text{ m} \pm 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, sendo composta de quatro algarismos significativos, independentemente de a medida ser realizada em milímetros ou em metros.

Operações com algarismos significativos

Ao medir perímetros, é necessário adicionar medidas de comprimento. Ao medir uma área, contudo, é necessário multiplicar duas medidas. Existem convenções acerca dos algarismos significativos de medidas caso operações precisem ser realizadas com esses valores.

Arredondamento

Para realizar adição, subtração, multiplicação e divisão de medidas no padrão dos algarismos significativos, é comum ser necessário realizar, ao final da operação, um arredondamento do valor. Para isso, devemos seguir algumas regras de acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT NBR 5891:2014).

- Quando o algarismo a ser conservado for seguido de algarismo inferior a 5, permanece o algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores.
  Exemplo de arredondamento para um número com 1 casa decimal:
  1,**31**4: 1 é menor do que 5, então o arredondamento será 1,3.
- Quando o algarismo a ser conservado for seguido de algarismo superior a 5, ou igual a 5 seguido de no mínimo um algarismo diferente de zero, adiciona-se uma unidade ao algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores.
  Exemplos de arredondamento para um número com 1 casa decimal:
  1,**68**1: 8 é maior do que 5, então o arredondamento será 1,7;
  4,**25**6: 5 é igual 5 e há um algarismo diferente de 0 depois dele, então o arredondamento será 4,3.
- Quando o algarismo a ser conservado for ímpar, seguido de 5 e posteriormente de zeros, adiciona-se uma unidade ao algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores.
  Exemplo de arredondamento para um número com 1 casa decimal:
  4,**75**0: 7 é ímpar e satisfaz todas as condições, então o arredondamento será 4,8.
- Quando o algarismo a ser conservado for par, seguido de 5 e posteriormente de zeros, permanece o algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores.
  Exemplo de arredondamento para um número com 1 casa decimal:
  6,**85**0: 8 é par e satisfaz todas as condições, então o arredondamento será 6,8.

Atividades resolvidas

1. Arredonde cada um dos números dados a seguir de modo a terem apenas 3 algarismos significativos.

a) 4,5963 **b)** 120,5001 **c)** 0,00137500 **d)** 10,625

Solução:

a) O último algarismo a ser conservado é o 9, e como 6 é maior do que 5, devemos adicionar 1 ao último dígito a ser considerado (9 + 1 = 10) e descartar o restante. O número arredondado será 4,60.

b) O último algarismo a ser mantido é o primeiro zero da esquerda para a direita. Após ele, temos 5, 0, 0 e 1 (5 seguido de no mínimo um algarismo diferente de zero), então devemos adicionar 1 ao último dígito a ser considerado (0 + 1 = 1) e descartar o restante. O número arredondado será 121.

c) O último algarismo a ser conservado é o 7. Após ele, temos 5, 0 e 0. Como o último dígito a ser mantido é ímpar, então devemos adicionar 1 ao último dígito (7 + 1 = 8) e descartar o restante. O número arredondado será 0,00138.

d) O último algarismo a ser conservado é o 6, e como 2 é menor do que 5, devemos manter o último dígito e descartar o restante. O número arredondado será 10,6.

Adição e subtração

No caso de adição ou subtração de 2 números considerando algarismos significativos, deve-se realizar a operação e, em seguida, arredondar o resultado de maneira que ele tenha a mesma quantidade de casas decimais do número inicial com a menor quantidade de casas decimais.

Multiplicação e divisão

No caso de multiplicação ou divisão de 2 números considerando algarismos significativos, deve-se realizar a operação e, em seguida, arredondar o resultado de maneira que ele tenha a mesma quantidade de algarismos significativos que o número inicial com a menor quantidade de algarismos significativos.

Atividades resolvidas

2. Realize a operação solicitada levando em consideração os algarismos significativos:

a) Adicionar 4,590 e 0,1. **b)** Subtrair 0,082 de 107,0849.

Solução:

a) 4,590 + 0,1 = 4,690. Como o número inicial que tem menos casas decimais é o 0,1, o resultado deve ser arredondado de modo a ter apenas uma casa decimal. Portanto:

$$4{,}590 + 0{,}1 = 4{,}690 \xrightarrow{\text{arredondamento}} 4{,}7$$

b) 107,0849 – 0,082 = 107,0029. Como o número inicial que tem menos casas decimais é o 0,082, o resultado deve ser arredondado de modo a ter também três casas decimais. Portanto:

$$107{,}0849 - 0{,}082 = 107{,}0029 \xrightarrow{\text{arredondamento}} 107{,}003$$

3. Realize cada uma das operações levando em consideração os algarismos significativos:

a) Multiplicar 4,590 e 0,1. **b)** Dividir 10,0 por 3,0.

Solução:

a) 4,590 · 0,1 = 0,4590. Como o fator inicial que tem menos algarismos significativos é o 0,1, o resultado deve ser arredondado de modo a ter apenas um algarismo significativo. Portanto:

$$4{,}590 \cdot 0{,}1 = 0{,}4590 \xrightarrow{\text{arredondamento}} 0{,}5$$

b) $\frac{10{,}0}{3{,}0} = 3{,}333\ldots$ Como o fator inicial que tem menos algarismos significativos é o 3,0, o resultado deve ser arredondado de modo a ter dois algarismos significativos. Portanto:

$$\frac{10{,}0}{3{,}0} = 3{,}333\ldots \xrightarrow{\text{arredondamento}} 3{,}3$$

Login/Adobe Stock

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

8. Uma pessoa tem à disposição 3 balanças, **A**, **B** e **C**, cujas menores marcações são de 1 mg, 1 g, 1 kg, respectivamente. Qual das balanças é mais indicada para cada uma das situações a seguir? Qual será o valor do erro instrumental da medida em cada caso?

a) Medir a massa de um medicamento veterinário em pó que será inserido em uma cápsula para medicar um gato.
Balança **A**. Erro de 0,5 miligrama.

b) Medir a massa de uma pessoa adulta.
Balança **C**. Erro de 0,5 quilograma.

c) Medir a massa de farinha que deve ser usada para uma receita de bolo.
Balança **B**. Erro de 0,5 grama.

9. Para cada uma das medidas fornecidas a seguir, identifique no caderno quais são os algarismos significativos exatos, quais são os duvidosos e quantos algarismos significativos há no total. Em seguida, expresse os valores em unidades de medida do SI, utilizando notação científica.
As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) 102,37 cm

b) 0,006235 g

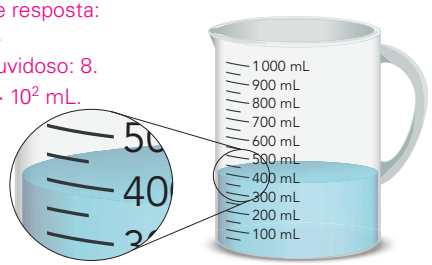
c) 200,2 m

d) 220,004 J

10. As imagens a seguir registram a leitura de diferentes instrumentos de medida. Indique no caderno o valor da medida de cada um deles, estimando o algarismo duvidoso e o erro instrumental em notação científica.

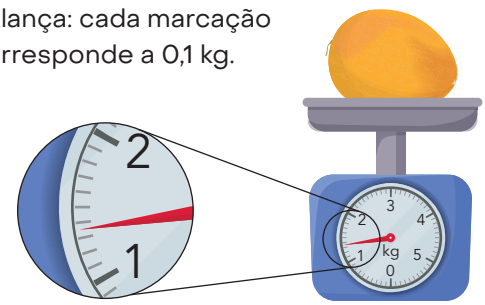
a) Jarra graduada: cada marcação corresponde a 50 mL.

Exemplos de resposta: $3{,}8 \cdot 10^2$ mL.
Algarismo duvidoso: 8.
$(3{,}8 \pm 0{,}25) \cdot 10^2$ mL.



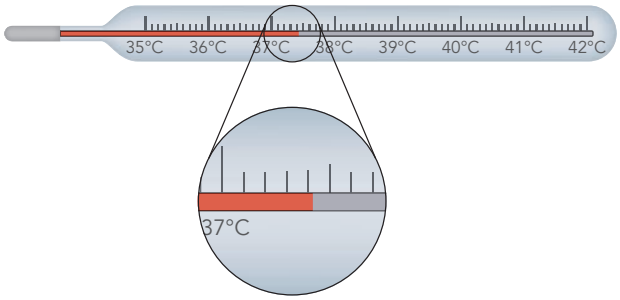
Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

b) Balança: cada marcação corresponde a 0,1 kg.



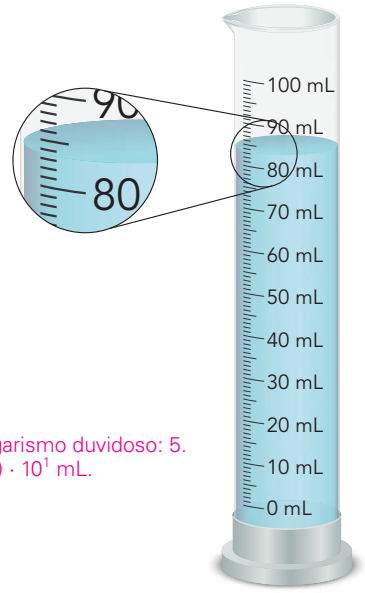
1,35 kg. Algarismo duvidoso: 5.
$(1{,}35 \pm 0{,}05) \cdot 10^0$ kg ou $(1{,}35 \pm 0{,}05)$ kg.

c) Termômetro: cada marcação corresponde a 0,1 °C.
37,41 °C. Algarismo duvidoso: 1.
$(3{,}741 \pm 0{,}005) \cdot 10^1$ °C.



Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

d) Proveta de laboratório: cada marcação corresponde a 1 mL.



83,5 mL. Algarismo duvidoso: 5.
$(8{,}35 \pm 0{,}05) \cdot 10^1$ mL.

11. Usando as regras de arredondamento estudadas neste capítulo, arredonde os seguintes valores para que fiquem com apenas 2 algarismos significativos:

a) 0,002684 0,0027

b) 1,55003 1,6

c) 7,828282 7,8

d) 4,500 4,5

e) 9,750 9,8

f) 0,00500 0,0050

12. Realize em seu caderno as operações levando em consideração os algarismos significativos. Aplique as regras de arredondamento quando necessário.

a) Multiplicar 1,1 por 2,5. 2,8

b) Dividir 1,024 por 2,56. 0,400

c) Subtrair 22,2 de 842,275. 820,1

Comparações entre grandezas

Se uma pessoa curiosa perguntasse a você a diferença entre um milhão e um bilhão, o que você responderia?

O ser humano desenvolveu uma maneira artificial de expressar medidas muito grandes ou muito pequenas. No entanto, ao falarmos desses números extremamente distantes do cotidiano, nosso cérebro tem muita dificuldade de processá-los e de compreender seus significados.

Uma estratégia bastante disseminada nas mídias é o uso de comparações com grandezas mais próximas da nossa realidade, mantendo determinada proporção.

Para responder à pergunta, por exemplo, podemos pensar no significado de 1 000 000 de segundos em comparação a 1 000 000 000 de segundos. É difícil entender a diferença considerando apenas os 3 zeros a mais que um tem em relação ao outro. Porém, ao convertermos essas medidas para outras unidades de tempo, a discrepância entre esses 2 valores fica bem evidente: 1 milhão de segundos equivalem a menos do que 12 dias, enquanto 1 bilhão de segundos equivalem a pouco menos do que 32 anos!

Outro exemplo bastante disseminado de comparação entre grandezas proporcionais são as notícias que relatam desmatamentos em florestas. Geralmente a extensão do desmatamento é comparada com a medida de área de um campo de futebol ou com a de uma cidade, por exemplo: "10 781 km^2 de floresta desmatada equivalem a 7 vezes a cidade de São Paulo". Por ser um número de difícil dimensionamento, a comparação torna a informação mais compreensível.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão.

13. A medida do raio equatorial do planeta Terra é aproximadamente 6 371 km, já a medida do raio equatorial do Sol é aproximadamente 695 700 km. Em uma maquete, a Terra foi representada por 1 grão de quinoa, cuja medida do raio é aproximadamente igual a 1 mm.

a) Utilizando uma calculadora, determine qual deveria ser, aproximadamente, a medida do raio do Sol, em centímetros, nessa maquete. $\frac{x}{1\text{ mm}} = \frac{695\,500}{6\,371} \Rightarrow x \simeq 109$; arredondando, aproximadamente 11 cm.

b) Faça uma breve pesquisa e responda: Que tipo de bola poderia ser usado nessa maquete para representar a diferença real entre as dimensões da Terra e do Sol? A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

14. É recorrente notícias usarem campos de futebol como uma referência para expressar medidas de área, por ser um tamanho conhecido pela maioria das pessoas. Segundo registros do Instituto do Homem e Meio Ambiente da Amazônia (Imazon), o último ano em que houve uma diminuição da medida de área desmatada na Amazônia entre um ano e o ano seguinte foi em 2017, quando aproximadamente 2 900 km^2 foram desmatados. Já em 2022, foram registrados aproximadamente 10 780 km^2 de desmatamento. Isso quer dizer que, em média, houve um aumento da medida de área desmatada de 1 576 km^2/ano nesse período.

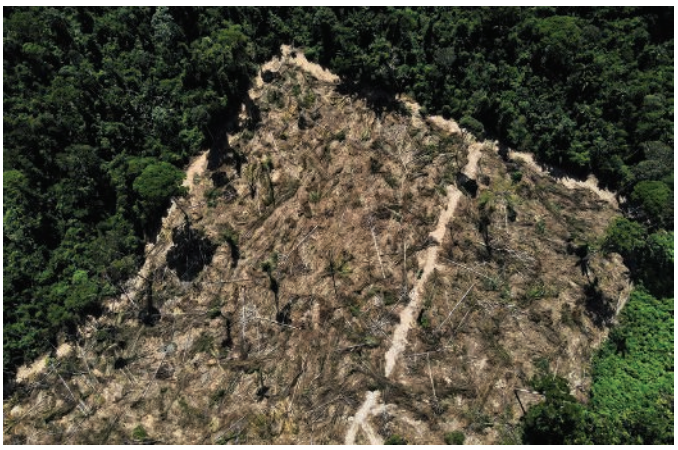
14. a) Temos que 1 m = 10^{-3} km, portanto: 7 880 m^2 = 7 880 · $(10^{-3}\ km)^2$ = = 7,88 · 10^{-3} km^2.

b) Número de campos de futebol:

$$\frac{1\,576}{7{,}88 \cdot 10^{-3}} = \frac{1\,576 \cdot 10^3}{7{,}88} =$$

$= 200 \cdot 10^3 = 200\,000$; ou seja, 200 000 campos de futebol a mais por ano foram desmatados em média entre 2017 e 2022.

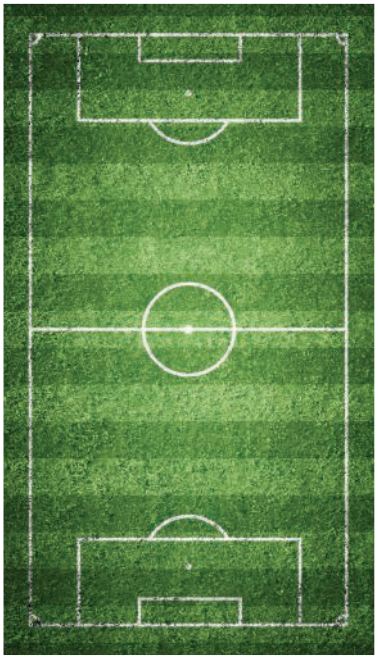
c) Exemplo de resposta: Mudar a unidade de medida de tempo de ano para uma menor, como hora – seriam desmatados, aproximadamente, 23 campos de futebol a mais por hora ao longo desses 5 anos; em vez de comparar com campo de futebol, comparar com algo que tenha medida de área maior – seria aproximadamente a medida de área equivalente à medida de área do município de São Paulo a mais por ano.



Bruno Kelly/Reuters/Fotoarena

Vista de uma área desmatada em meio à Floresta Amazônica, no município de Uruará (PA). Foto de 2021.

As imagens não estão representadas em proporção.



Thaut Images/Adobe Stock

Além das medidas das dimensões do campo de futebol oficial, também é necessário seguir os padrões na marcação das linhas que delimitam as áreas do campo.

a) A Federação Internacional de Futebol Associado (Fifa) estabelece que a medida de comprimento de um campo de futebol oficial pode variar entre 100 m e 110 m, e a medida da largura entre 64 m e 75 m. Um campo com 108 m de medida de comprimento e aproximadamente 73 m de medida da largura tem medida de área igual a 7 880 m^2. Determine em seu caderno a medida de área desse campo em quilômetros quadrados e escreva o valor em notação científica.

b) Em média, quantos campos de futebol como o do item **a** foram desmatados a mais por ano entre 2017 e 2022?

c) Defina uma estratégia que poderia ser adotada para tornar ainda mais compreensível o que representa o resultado obtido no item **b**.

d) Converse com pessoas mais velhas sobre a arborização no município em que a escola que você estuda se encontra. Havia mais ou menos árvores plantadas no passado? Existe ou existia alguma reserva ambiental no município? Se sim, a medida de área dessa reserva aumentou ou diminuiu? O número de praças arborizadas aumentou ou diminuiu com o passar dos anos?

Respostas pessoais.

e) **Troque ideias** com os colegas e o professor e, a partir dos dados obtidos no item **d**, estimem a medida de área recuperada ou desmatada de alguma região do município. Em seguida, elaborem no caderno uma proposta de arborização de uma região para ser entregue à direção da escola ou à prefeitura (pode ser a recuperação de uma praça, horta, jardim, etc.), estimando as medidas de área e de perímetro da região a ser arborizada, os tipos de planta a serem utilizados (grama, arbustos, árvores, leguminosas, etc.) e o orçamento do projeto, incluindo uma estimativa de valor dos materiais e de mão de obra. Resposta pessoal.

15. Segundo dados da Embrapa Pecuária Sudeste, a quantidade de água utilizada para a produção de 1 quilograma de carne bovina (considerando a água que os bois bebem e a água usada pelos equipamentos, para a limpeza dos currais, nos abatedouros e em todo o processo até que a carne chegue ao consumidor final) é de 15,5 mil litros.

Troque ideias com um colega e realizem uma comparação que auxilie na compreensão do significado dessa quantidade de água utilizada para a produção de 1 quilograma de carne bovina.

15. Exemplo de resposta: Uma pessoa bebe, em média, 2 L de água por dia, então 15 500 L de água seriam suficientes para uma pessoa beber por pouco mais de 21 anos.

VIRALIZE!

Não escreva no livro

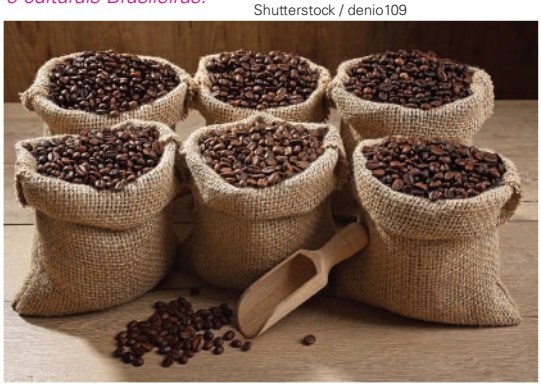
Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras.*

Sacas de café

A produção total de café em nível mundial estimada para a safra 2023-2024 atingiu o volume físico equivalente a 171,4 milhões de sacas de 60 kg. Como parte desse volume, a safra dos cafés da espécie de *Coffea arabica* (café arábica) foi calculada em 97,3 milhões de sacas, que correspondem a 56,7%, e, adicionalmente, a de *Coffea canephora* (robusta+conilon) 74,1 milhões de sacas, as quais representam 43,3% do total geral mundial.

FERREIRA, Lucas Tadeu. Produção mundial de café para safra 2023-2024 totaliza 171,4 milhões de sacas de 60 kg. *Embrapa Notícias*, 18 abr. 2024. Disponível em: https://tedit.net/dikatr. Acesso em: 13 ago. 2024.

Shutterstock / denio109



Algumas sacas de café.

O tempo de torra do grão de café depende do resultado desejado, de modo que o tempo maior de torra deixa o sabor da bebida mais forte e encorpado.

A produção do café no Brasil teve início no século XVIII, e ele rapidamente se tornou um dos principais produtos da agricultura nacional. Em 2022, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) classificou o café como o quarto produto agrícola de maior valor da produção no país, ficando atrás apenas da soja, do milho em grão e da cana-de-açúcar.

Note que a unidade de medida da safra, mencionada no trecho da notícia transcrita, é um pouco diferente daquela usada para a grandeza massa no SI. Isso é bastante comum no meio rural, em que unidades de medidas tradicionais e práticas são frequentemente preferidas devido à conveniência e ao uso histórico.

1. Qual foi a estimativa da safra de café entre 2023 e 2024 na unidade de medida de massa do SI?
$171{,}4 \cdot 60 = 10\,284$; ou seja, 10 284 milhões de kg, ou aproximadamente 10,3 bilhões de kg.

2. Cite outra unidade de medida de massa utilizada na agropecuária brasileira. Qual é a equivalência dela em sacas e em quilogramas? Arroba é uma unidade de medida bastante utilizada na agropecuária brasileira e corresponde a 15 quilogramas, ou 0,25 saca de 60 kg.

3. **Troque ideias** com o colega do porquê é importante a manutenção de unidades de medida usadas no campo mesmo que, eventualmente, não sejam contempladas no SI.
O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

4. Os trabalhadores do campo na cafeicultura brasileira têm diferentes origens étnicas e culturais, entre elas, indígena, africana, europeia e asiática. Faça uma pesquisa e escreva um texto no caderno sobre a influência desse multiculturalismo nas práticas agrícolas e na produção de café.
O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Dica

Museu do Café

O museu, localizado na cidade de Santos (SP), tem como objetivos preservar e divulgar a história do café, utilizando objetos, documentos e recursos audiovisuais para apresentar a evolução da cafeicultura e o desenvolvimento político, econômico e cultural do país, desde o século XVIII até os dias atuais.

Faça um *tour* virtual, participe das visitas mediadas *on-line* e explore os conteúdos. Disponível em: https://tedit.net/6m183b. Acesso em: 14 ago. 2024.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

PARA FUNDAMENTAR SABERES

1. **(Uece)** O sistema de unidades CGS (centímetro-grama-segundo) foi proposto em 1832 pelo matemático Carl Friedrich Gauss. Por ser inconveniente do ponto de vista prático, esse sistema foi substituído internacionalmente, para propósitos científicos, pelo sistema MKS (metro-kilograma-segundo). Um estudante deseja fazer uso de um novo sistema de unidades no qual a unidade padrão de comprimento é 5 cm, ao passo que a unidade padrão para massa é 20 g. Um objeto cuja densidade no sistema CGS seja dada por 8 g/cm^3 terá, no novo sistema adotado pelo estudante, um valor numérico dado por: Alternativa **b**.

a) 4.

b) 50.

c) 8.

d) 100.

2. **(Fuvest-SP)** Um vídeo tem três minutos de duração. Se o vídeo for reproduzido, desde o seu início, com velocidade de 1,5 vezes a velocidade original, o tempo de reprodução do vídeo inteiro será de:

a) 1 min 30s.

b) 1 min 50s.

c) 2 min 00s.

d) 2 min 30s.

e) 2 min 50s.

Temos que: $3\text{ min} = 3 \cdot 60\text{ s} = 180\text{ s}$.
Como velocidade e tempo de duração são grandezas inversamente proporcionais:
$1 \cdot 180 = 1{,}5 \cdot t \Rightarrow t = \frac{180}{\frac{3}{2}} \Rightarrow t = 120$;
temos 120 s = 2 min. Alternativa **c**.

3. **(FCMSCSP)** O resultado de um exame de dosagem de glicose foi apresentado como 91 mg/dL. Se esse resultado fosse apresentado em unidades do Sistema Internacional, o valor seria: Alternativa **c**.

a) $9{,}1 \cdot 10^2$ kg/m^3.

b) $9{,}1 \cdot 10^3$ kg/m^3.

c) $9{,}1 \cdot 10^{-1}$ kg/m^3.

d) $9{,}1 \cdot 10^{-2}$ kg/m^3.

e) $9{,}1 \cdot 10^{-3}$ kg/m^3.

4. **(Fuvest-SP)** Em fevereiro de 2021, um grupo de físicos da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) publicou um artigo que foi capa da importante revista *Nature*. O texto a seguir foi retirado de uma reportagem do *site* da UFMG sobre o artigo:

> O nanoscópio, prossegue Ado Jorio (professor da UFMG), ilumina a amostra com um microscópio óptico usual. O foco da luz tem o tamanho de um círculo de 1 micrômetro de diâmetro. "O que o nanoscópio faz é inserir uma nanoantena, que tem uma ponta com diâmetro de 10 nanômetros, dentro desse foco de 1 micrômetro e escanear essa ponta. A imagem com resolução nanométrica é formada por esse processo de escaneamento da nanoantena, que localiza o campo eletromagnético da luz em seu ápice", afirma o professor.
>
> Itamar Rigueira Jr. "Nanoscópio da UFMG possibilita compreender estrutura que torna grafeno supercondutor". Adaptado. Disponível em https://ufmg.br/comunicacao/noticias/. Gadelha A C *et al.* (2021), *Nature*, 590, 405-409, doi: 10.1038/s41586-021-03252-5.

Com base nos dados mencionados no texto, a razão entre o diâmetro do foco da luz de um microscópio óptico usual e o diâmetro da ponta da nanoantena utilizada no nanoscópio é da ordem de:

a) 0,0001.

b) 0,01.

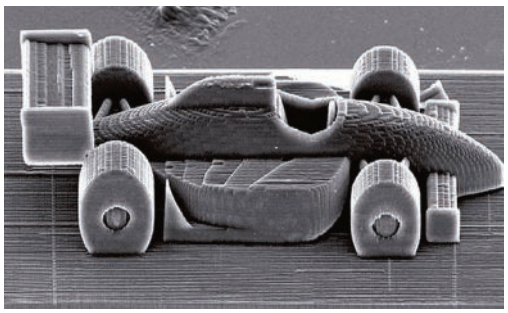
c) 1.

d) 100.

e) 10 000.

Medida do diâmetro do foco da luz de um microscópio óptico usual: 1 micrômetro.
Medida do diâmetro da ponta da nanoantena utilizada no nanoscópio: 10 nanômetros.
Razão: $\frac{1\ \mu m}{10\ nm} = \frac{1\ \mu m}{10\ nm} = \frac{1 \cdot 10^{-6}\ m}{10 \cdot 10^{-9}\ m} = 10^2 = 100$.
Alternativa **d**.

5. **(Enem)** Pesquisadores da Universidade de Tecnologia de Viena, na Áustria, produziram miniaturas de objetos em impressoras 3D de alta precisão. Ao serem ativadas, tais impressoras lançam feixes de *laser* sobre um tipo de resina, esculpindo o objeto desejado. O produto final da impressão é uma escultura microscópica de três dimensões, como visto na imagem ampliada.



Reprodução/Enem, 2020.

A escultura apresentada é uma miniatura de um carro de Fórmula 1, com 100 micrômetros de comprimento. Um micrômetro é a milionésima parte de um metro.

Usando notação científica, qual é a representação do comprimento dessa miniatura, em metro?

a) $1{,}0 \cdot 10^{-1}$
b) $1{,}0 \cdot 10^{-3}$
c) $1{,}0 \cdot 10^{-4}$
d) $1{,}0 \cdot 10^{-6}$
e) $1{,}0 \cdot 10^{-7}$

Para converter a medida de comprimento de uma miniatura de carro de Fórmula 1 de micrômetro para metro e expressá-la em notação científica, precisamos entender a relação entre micrômetro e metro.

$100\ \mu m = 100 \cdot 10^{-6}\ m = 1 \cdot 10^{-4}\ m$

Alternativa **c**.

6. **(Enem PPL)** Um asteroide batizado de 2013-TV135 passou a aproximadamente $6{,}7 \times 10^6$ quilômetros da Terra. A presença do objeto espacial nas proximidades da Terra foi detectada por astrônomos ucranianos, que alertaram para uma possível volta do asteroide em 2032.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 30 out. 2013.

O valor posicional do algarismo 7, presente na notação científica da distância, em quilômetro, entre o asteroide e a Terra, corresponde a

a) 7 décimos de quilômetro.
b) 7 centenas de quilômetros.
c) 7 dezenas de milhar de quilômetros.
d) 7 centenas de milhar de quilômetros.
e) 7 unidades de milhão de quilômetros.

6. Analisando a notação científica, temos:

$6{,}7 \cdot 10^6\ km = 6\,700\,000\ km$

Portanto, são 7 centenas de milhar de quilômetros.

Alternativa **d**.

7. **(FGV-RJ)** A medida de certo comprimento foi apresentada com o valor $2{,}954 \cdot 10^3$ m. Levando-se em conta a teoria dos algarismos significativos, essa medida foi feita com um instrumento cuja menor divisão era o:

a) quilômetro.
b) hectômetro.
c) decâmetro.
d) metro.
e) decímetro.

7. Alternativa **c**.

8. **(Enem)** A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

Revista Veja. Ano 41, n. 25, 25 jun. 2008 (adaptado).

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

a) 406
b) 1334
c) 4 002
d) 9 338
e) 28 014

Dentro de Júpiter cabem 23 Netunos, e dentro de Netuno cabem 58 Terras. Portanto, dentro de Júpiter cabem 1 334 Terras (pois $23 \cdot 58 = 1\,334$). Alternativa **b**.

Nesta Unidade, estudamos o Sistema Internacional de Unidades e outras unidades de medida.

Respostas pessoais.

1. Consigo converter unidades de medida de área e de volume envolvendo prefixos do SI? Sei escrever, interpretar e operar números expressos em notação científica?
2. Consigo interpretar a medida nos instrumentos de medida, identificando os algarismos significativos exatos e o duvidoso? Sei operar medidas expressas em algarismos significativos?
3. Sei realizar e interpretar comparações proporcionais de medidas que facilitam a compreensão dos tamanhos das grandezas?
4. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
5. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas e exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

Unidade 3 PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Reprodução/CAPTCHA

pikisuperstar/Freepik

Com o aumento das funcionalidades executáveis dos computadores, uma ação para evitar acessos automatizados excessivos a páginas da internet foi a implementação de testes para diferenciar máquinas de humanos, chamados **CAPTCHA**.

CAPTCHA
sigla para "*Completely Automated Public Turing test to tell Computers and Humans Apart*", cuja tradução é "Teste de Turing público completamente automatizado para diferenciar humanos de computadores".

A importância do pensamento computacional

Aprender sobre pensamento computacional é essencial, pois ajuda a desenvolver habilidades para resolver problemas de maneira lógica e eficiente. Essa abordagem permite a decomposição de tarefas complexas em partes menores e a criação de algoritmos que facilitam a solução de desafios tecnológicos e analíticos, preparando indivíduos para um ambiente digital cada vez mais complexo.

Inteligência artificial (IA) é o campo da ciência da computação que se dedica ao desenvolvimento de sistemas que imitam a inteligência humana. Isso inclui a capacidade de aprender com dados, reconhecer padrões e tomar decisões baseadas em algoritmos. A IA abrange desde assistentes virtuais simples até sistemas avançados de análise e previsão.

Os impactos da IA na sociedade são amplos. Ela pode impulsionar a eficiência e a inovação em diversas indústrias, mas também levanta preocupações sobre a automação de empregos e a privacidade. Além disso, a IA tem o potencial de transformar áreas como saúde e educação, oferecendo novos recursos e oportunidades, mas exige uma gestão cuidadosa para equilibrar seus benefícios e desafios.

Este texto foi gerado por uma inteligência artificial, projetada para fornecer informações de forma clara e precisa. Como uma IA, eu processo dados e utilizo algoritmos para criar respostas, sem experiências pessoais ou emoções. Meu objetivo é ajudar a disseminar conhecimento e facilitar a compreensão sobre diversos tópicos.

Texto criado com o uso de plataforma de IA, 2024.

Os quatro parágrafos anteriores foram criados por uma ferramenta de inteligência artificial. Para gerar esse texto, a seguinte instrução foi dada pelos autores à máquina: "Escrever quatro parágrafos bem sucintos sobre inteligência artificial. O primeiro deve falar sobre a importância de aprender sobre pensamento computacional, o segundo deve incluir a definição de inteligência artificial, o terceiro deve falar sobre os impactos na sociedade, e o quarto deve contar que quem está escrevendo esse texto é uma inteligência artificial".

2. Exemplo de resposta: Os parágrafos são autossuficientes, não havendo necessidade de ler o anterior para entender o seguinte; o texto parece ser composto de parágrafos que respondem a cada uma das quatro perguntas propostas pelos autores à máquina; não são usados conectivos entre os parágrafos.

Não escreva no livro

1. Você tinha percebido inicialmente que esse texto havia sido escrito por uma máquina, e não por seres humanos? Como você se sente ao descobrir isso? Resposta pessoal.

2. Uma das críticas comuns a textos escritos por uma ferramenta de IA é a falta de coesão entre parágrafos, ou seja, de uma lógica coerente que "costura" o texto como um todo. O que é possível notar no texto que corrobora com essa crítica?

3. De acordo com seus conhecimentos e as informações a respeito de IA presentes no texto, formule uma hipótese sobre o motivo de algumas inteligências artificiais não serem capazes de passar no teste apresentado na imagem.

3. Exemplo de resposta: Pensando na informação de que as IA são treinadas com a utilização de grandes volumes de texto, uma IA de identificação de imagens seria treinada com um grande volume de imagens. Com a análise feita na questão **2**, de que o entendimento de problemas da IA se dá parte a parte, é possível que uma IA identifique a lanterna dos carros da imagem como luzes de um semáforo e por isso falhe no teste.

capítulo

5 Algoritmos e fluxogramas

Lógica formal

Os idiomas são estruturas complexas e vivas que passam por constantes mudanças conforme o desenvolvimento cultural de seus falantes. No cotidiano, não temos necessariamente a preocupação de usá-los do modo mais preciso. No entanto, existem situações nas quais transmitir uma mensagem de maneira precisa é extremamente importante (por exemplo, ao comunicar os procedimentos de evacuação de um prédio em caso de incêndio). Vários fatores são importantes para alcançar esse objetivo, como criar frases que tenham uma estrutura compreensível.

Aristóteles foi um dos precursores do estudo de estruturas de frases, o que posteriormente recebeu o nome de **lógica formal**. No século IV a.C., esse pensador estudou as chamadas **proposições lógicas**, orações que assumem algo, podendo ser julgadas como verdadeiras ou como falsas. "Você está sentado." é um exemplo de proposição lógica, pois ou é uma oração verdadeira, caso esteja sentado, ou é uma oração falsa, caso não esteja. "Onde você está?", por sua vez, não é uma proposição lógica, pois não há como valorarmos a sentença em verdadeira ou falsa.

Aristóteles, então, sistematizou princípios que foram fundamentais para a evolução tecnológica que vivemos atualmente. Dois deles são apresentados a seguir.

- **Princípio da não-contradição**: estabelece que uma proposição não pode ser, simultaneamente, verdadeira e falsa. Ou a oração "Você está sentado." é verdadeira, ou é falsa, pois não há como você estar e não estar sentado ao mesmo tempo.
- **Princípio do terceiro excluído**: estabelece que há apenas duas possíveis maneiras de valorar uma proposição: verdadeira ou falsa. Não há uma terceira possibilidade.

Robson90/Shutterstock

Estátua de bronze de Aristóteles, localizada na Praça Aristotélica, na cidade de Salonica (Grécia). Foto de 2022.

Baseado nesses princípios, Aristóteles desenvolve a ideia de **silogismo**: técnica de argumentação dedutiva que permite combinar proposições para obter conclusões precisas. Um exemplo clássico de silogismo é:

> Todos os seres humanos são mortais.
> Sócrates é ser humano. Logo, Sócrates é mortal.

ATIVIDADES

4. a) A conclusão não é dedutível, pois não sabemos se ele entra nos casos de exceção.

Não escreva no livro

1. Analise cada item a seguir e registre no caderno quais são proposições e quais não são.

a) Hoje está chovendo. Proposição.

b) Qual é sua banda favorita? Não é proposição.

c) Por favor, verifique se os celulares estão no modo silencioso. Não é proposição.

d) Todos os cachorros soltam pelos. Proposição.

e) Se a casca da fruta está verde, então ela necessariamente não está madura. Proposição.

f) $x^2 - 4 = 0$ Não é proposição.

g) $x^2 - 4 = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Proposição.

2. Transforme, em seu caderno, as seguintes sentenças em proposições verdadeiras. Exemplos de resposta:

a) Qual é a atual estação do ano?
A atual estação do ano é o verão.

b) $x - 2 > 0$ $x - 2 > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tal que $x > 2$.

c) Feche o caderno. O caderno está fechado.

Troque ideias com os colegas para conhecer as sentenças que eles criaram.

3. Elabore 5 sentenças, no caderno, de modo que 3 sejam proposições e 2 não sejam. Troque-as com um colega e tente descobrir quais são as 3 proposições criadas por ele. Resposta pessoal.

4. Todas as crianças e adolescentes no Brasil são protegidos pelo Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA). Para a lei, crianças têm até 12 anos incompletos; e adolescentes, entre 12 e 18 anos. Em alguns casos excepcionais, pessoas podem ser consideradas adolescentes até os 21 anos.
Analise os itens a seguir e responda em seu caderno: Quais das conclusões são de fato dedutíveis a partir das informações dadas?

a) Joaquim é brasileiro e tem 19 anos. Logo, no Brasil, ele não é protegido pelo ECA.

b) Joana é brasileira e nasceu há 2 anos a partir da data em que você está lendo essa informação. Logo, ela é considerada criança perante a lei brasileira. A conclusão é dedutível.

c) Dandara é brasileira. Logo, no Brasil, ela é protegida pelo ECA. A conclusão não é dedutível, pois não sabemos a idade de Dandara.

Conectivos lógicos

Com o passar do tempo, a lógica aristotélica foi se desenvolvendo e se tornando cada vez mais abrangente para ser aplicada em diversas áreas do conhecimento, passando a receber o nome de **lógica moderna**. Uma das grandes novidades foi a utilização de linguagem matemática para expressar relações entre as proposições por meio de **conectivos lógicos**.

Os conectivos lógicos são operações entre proposições que resultam em proposições mais elaboradas. Existem 3 deles que são considerados base para a construção de todos os outros conectivos mais complexos: **não**, **e** e **ou**.

Pense nisto

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Em dupla, analisem cada uma das afirmativas e julguem se ela é verdadeira ou falsa. Em seguida, escrevam no caderno sobre as diferenças entre os conectivos **e** e **ou** utilizados.

a) Angola é um país que fica no continente africano.

b) Não é verdade que Angola é um país que fica no continente africano.

c) Angola fica no continente africano e no continente americano.

d) Angola fica no continente europeu e no continente americano.

e) Angola fica no continente africano ou no continente americano.

f) Angola fica no continente europeu ou no continente americano.

O conectivo **não** é usado para expressar o sentido oposto da proposição original. Vamos analisar a proposição "Eu tenho 17 anos de idade". Se você tem, de fato, 17 anos, essa proposição é verdadeira; caso contrário, ela é falsa. No entanto, se negarmos essa proposição, ela expressaria "Eu não tenho 17 anos de idade." ou "Não é verdade que eu tenho 17 anos de idade.". Note que, se a proposição original era verdadeira para seu caso, agora ela passa a ser falsa; e, se ela era orginalmente falsa, então passa a ser verdadeira.

Vamos analisar outro exemplo. A proposição "A equação de 2º grau $x^2 + x + 1 = 0$ não possui raízes reais.". Ao calcular o discriminante dessa equação, obtemos $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$. Por ser negativo, de fato a equação não possui raízes reais, portanto a proposição é verdadeira. Assim, caso a proposição original fosse negada, a nova proposição poderia ser expressa por "Não é verdade que a equação $x^2 + x + 1 = 0$ não possui raízes reais.", ou seja, ela sugeriria que a equação tem, sim, raízes reais. Desse modo, a nova proposição seria falsa.

Os conectivos **e** e **ou** são utilizados para criar uma proposição composta de outras 2 proposições. No caso do **e**, a proposição será verdadeira se ambas as proposições originais também forem. Vamos considerar as proposições "A umidade relativa do ar está abaixo das condições ideais." e "Hoje bebi menos água que deveria.". Ao conectar essas 2 proposições simples, formamos a proposição composta "A umidade relativa do ar está abaixo das condições ideais, e hoje bebi menos água que deveria.". O conectivo **e** faz que a proposição composta só seja verdadeira se, de fato, a umidade relativa estiver abaixo das condições ideais, ao mesmo tempo que você bebeu menos água que deveria. Se pelo menos uma das proposições simples for falsa, então necessariamente toda a proposição composta também se torna falsa.

O conectivo **ou**, por sua vez, indica que, se pelo menos uma das proposições for verdadeira, então a proposição composta também será. Considere o uso do conectivo para o exemplo anterior: "A umidade relativa do ar está abaixo das condições ideais ou hoje bebi menos água que deveria.". Nesse caso, a proposição composta só será falsa se nem a umidade relativa do ar estiver abaixo das condições ideais nem você tiver bebido menos água que deveria.

Com o objetivo de facilitar a análise de sentenças mais complexas, foram desenvolvidos símbolos para cada um dos conectivos. Conheça o nome da operação e o símbolo associado a cada conectivo.

Conectivo	Operação	Símbolo
Não	Negação	¬ ou !
E	Conjunção	∧
Ou	Disjunção	∨

Não escreva no livro

Pense nisto

Ao perceber que sua garganta estava seca, uma pessoa tentou identificar o que poderia ter causado isso. Ela pensou em duas razões possíveis: uma era a baixa umidade do ar no dia e outra era a pouca quantidade de água que ela tinha bebido no dia. Como você expressaria em apenas uma frase o raciocínio dessa pessoa?

Resposta pessoal.

5. c) Falsa, pois uma caixa de 1 m^3 de medida de volume interno pode armazenar até 1 000 litros de água.

d) Verdadeira, pois uma caixa de 1 m^3 de medida de volume interno pode armazenar até 1 000 litros de água.

e) Falsa, pois as 2 proposições simples precisariam ser verdadeiras para que a proposição composta também fosse.

f) Verdadeira, pois basta que ao menos 1 das 2 proposições simples seja verdadeira para que a proposição composta também seja.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

5. Julgue como verdadeira ou falsa cada uma das proposições a seguir.

a) 10 000 m equivalem a 10 km. Verdadeira.

b) 10 000 m não equivalem a 10 km. Falsa.

c) Uma caixa de 1 m^3 de medida de volume interno pode armazenar apenas 1 L de água.

d) Uma caixa de 1 m^3 de medida de volume interno não pode armazenar apenas 1 L de água.

e) 10 000 m equivalem a 10 km e uma caixa de 1 m^3 de medida de volume interno pode armazenar apenas 1 L de água.

f) Uma caixa de 1 m^3 de medida de volume interno pode armazenar apenas 1 L de água ou 10 000 m equivalem a 10 km.

g) 10 000 m equivalem a 10 km e uma caixa de 1 m^3 de medida de volume interno não pode armazenar apenas 1 L de água. Verdadeira, pois ambas as proposições simples são verdadeiras.

h) Uma caixa de 1 m^3 de medida de volume interno pode armazenar apenas 1 litro de água ou 10 000 m equivalem a 10 km. Falsa, pois ambas as proposições simples são falsas.

6. Considerando seus conhecimentos em Biologia e as proposições simples "Sapos são mamíferos." e "Pinguins são aves." faça o que se pede a seguir, no caderno. Respostas pessoais.

a) Crie uma proposição verdadeira composta das proposições simples e dos conectivos **e** e **não**.

b) Crie uma proposição falsa composta das proposições simples e dos conectivos **e** e **não**.

c) Crie uma proposição verdadeira composta das proposições simples e dos conectivos **ou** e **não**.

d) Crie uma proposição falsa composta das proposições simples e dos conectivos **ou** e **não**.

7. Crie em seu caderno 2 proposições simples falsas e, em seguida, construa com elas 3 proposições compostas verdadeiras com o uso dos conectivos **não**, **e** e **ou**. Resposta pessoal

8. Julgue como verdadeira ou falsa cada uma das proposições compostas.

a) Cachorros são mamíferos ou abelhas são insetos. Verdadeira.

b) História é uma das ciências humanas e não é verdade que Biologia é uma das ciências naturais. Falsa.

c) 7 200 segundos equivalem a 1 hora ou 7 200 segundos equivalem a 60 minutos. Falsa.

d) Maio tem 31 dias ou não é verdade que maio vem depois de abril. Verdadeira.

9. Ao tentar resolver a inequação de 2º grau $(-x - 2) \cdot (x - 6) > 0$, um estudante notou ser necessário que ambos os fatores da multiplicação fossem positivos, ou ambos fossem negativos, para que o resultado do produto fosse positivo (ou seja, maior do que 0). Qual das alternativas a seguir expressa corretamente o conjunto solução dessa inequação? Alternativa **b**.

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -2 \text{ ou } x > 6) \text{ e } (x > -2 \text{ ou } x < 6)\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -2 \text{ e } x > 6) \text{ ou } (x > -2 \text{ e } x < 6)\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (x > -2 \text{ ou } x > 6) \text{ e } (x < -2 \text{ ou } x < 6)\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (x > -2 \text{ e } x > 6) \text{ ou } (x < -2 \text{ e } x < 6)\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -2 \text{ ou } x = 6\}$

Pense nisto

Na atividade **9**, um dos intervalos propostos nas alternativas é sempre verdadeiro para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e outro é sempre falso para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Quais são esses intervalos? Mesmo sendo sempre falso para qualquer $x \in \mathbb{R}$ um dos intervalos que compõe o conjunto solução, é possível que o conjunto solução como um todo seja verdadeiro em algum momento? A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Tabela-verdade

Uma técnica para expressar os possíveis resultados de uma operação entre proposições envolvendo conectivos é a **tabela-verdade**. Antes de apresentar as tabelas-verdade das operações, vamos analisar as seguintes proposições:

- ***M***: Vitória é capital do Espírito Santo.
- ***N***: Girafas são carnívoras.
- ***O***: $2 + 8 = 10$
- ***P***: $1{,}01 - 1 = 0{,}1$

As proposições *M* e *O* são verdadeiras, mas as proposições *N* e *P* são falsas. Considere no quadro a seguir algumas operações envolvendo essas proposições.

Item	Operação	Tradução
a)	$\neg M$	Não é verdade que Vitória é capital de Espírito Santo.
b)	$\neg N$	Não é verdade que girafas são carnívoras.
c)	$M \wedge O$	Vitória é capital do Espírito Santo e $2 + 8 = 10$.
d)	$M \wedge N$	Vitória é capital do Espírito Santo e girafas são carnívoras.
e)	$N \wedge O$	Girafas são carnívoras e $2 + 8 = 10$.
f)	$N \wedge P$	Girafas são carnívoras e $1{,}01 - 1 = 0{,}1$.
g)	$M \vee O$	Vitória é capital do Espírito Santo ou $2 + 8 = 10$.
h)	$M \vee N$	Vitória é capital do Espírito Santo ou girafas são carnívoras.
i)	$N \vee O$	Girafas são carnívoras ou $2 + 8 = 10$.
j)	$N \vee P$	Girafas são carnívoras ou $1{,}01 - 1 = 0{,}1$.

Não escreva no livro

Pense nisto

Converse com os colegas e definam se o resultado de cada operação apresentada no quadro, entre as proposições *M*, *N*, *O* e *P*, é uma nova proposição verdadeira ou falsa.

Os resultados das operações dos itens **b**, **c**, **g**, **h** e **i** são proposições verdadeiras e os dos itens **a**, **d**, **e**, **f** e **j** são proposições falsas.

Esses casos descritos exemplificam o comportamento esperado para cada uma das operações apresentadas até o momento.

- A operação de negação sempre terá resultado verdadeiro se a proposição inicial for falsa, como no item **b**, e sempre terá resultado falso se a proposição inicial for verdadeira, como no item **a**.
- A operação de conjunção terá resultado verdadeiro se as 2 proposições iniciais foram verdadeiras, como no item **c**, e terá resultado falso caso contrário, como nos itens **d**, **e** e **f**.
- A operação de disjunção terá resultado verdadeiro se pelo menos 1 das 2 proposições iniciais for verdadeira, como nos itens **g**, **h** e **i**, e terá resultado falso apenas caso as 2 sejam falsas, como no item **j**.

Pense nisto

Quando a negação de uma negação, representada por $\neg(\neg A)$, é verdadeira?

Quando *A*, ou seja, a proposição original, é verdadeira.

Para generalizar as possibilidades de resultado, considere as proposições A e B. Nas tabelas-verdade a seguir, são apresentados os resultados das operações considerando todos os possíveis valores lógicos (verdadeiros ou falsos) de A e B.

A	$\neg A$
V	F
F	V

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Lê-se a tabela-verdade da seguinte maneira:

- se a proposição A é verdadeira e a proposição B é verdadeira, então a proposição $A \wedge B$ é verdadeira;
- se a proposição A é verdadeira e a proposição B é falsa, então a proposição $A \wedge B$ é falsa; etc.

Atividades resolvidas

1. Considere a frase: "Os hemisférios norte e sul recebem a mesma incidência de raios solares nos equinócios e não é verdade que: os dias ficam mais longos a partir do solstício de verão ou que os dias ficam mais curtos a partir do solstício de inverno.".

a) Quais são as proposições simples que compõem essa frase? Nomeie-as como proposições A, B, C, ...

b) Reescreva a frase utilizando apenas as letras designadas para cada proposição simples e os símbolos das operações lógicas.

c) Julgue a frase completa como verdadeira ou falsa.

Globo terrestre com a indicação dos hemisférios norte e sul delimitados pela linha do equador.

Solução:

a) Proposição A: "Os hemisférios norte e sul recebem a mesma incidência de raios solares nos equinócios.".

Proposição B: "Os dias ficam mais longos a partir do solstício de verão.".

Proposição C: "Os dias ficam mais curtos a partir do solstício de inverno.".

b) $A \wedge (\neg(B \vee C))$

c) As proposições B e C são falsas, uma vez que, a partir do solstício de verão, os dias ficam mais curtos e, a partir do solstício de inverno, os dias ficam mais longos. Nesse caso, $B \vee C$ é falso; então, $\neg(B \vee C)$ é verdadeiro. Ou seja, está correto dizer que "Não é verdade que: os dias ficam mais longos a partir do solstício de verão ou que os dias ficam mais curtos a partir do solstício de inverno.".

A proposição A é verdadeira, portanto a frase completa também é verdadeira, pois a operação lógica **e** tem como resultado verdade se ambas as entradas forem verdadeiras, como ocorre nesse caso.

11. A primeira afirmativa está correta e a segunda é falsa, pois, no caso da disjunção, o resultado é verdadeiro se pelo menos uma das proposições for verdadeira. A terceira afirmativa propõe que P e Q são falsas e que $\neg P \vee (\neg Q)$ é verdadeira, o que está correto. Alternativa **a**.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

10. Copie as seguintes tabelas-verdade no caderno e complete-as.

a)

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

b)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

11. **(Idam/IBFC)** Considere as afirmações sobre lógica propositiva e sua análise por meio de tabelas-verdade. Analise as afirmativas a seguir e dê valores verdadeiro (**V**) ou falso (**F**).

I. A conjunção (e, $\wedge$) entre duas proposições P e Q, só é verdadeira se ambas forem verdadeiras.

II. A disjunção (ou, $\vee$) entre duas proposições P e Q, só é verdadeira se ambas forem verdadeiras.

III. A disjunção (ou, $\vee$) entre a negação de duas proposições falsas é verdadeira.

[Indique no caderno] a alternativa que apresenta a sequência correta de cima para baixo.

a) V, F, V
b) V, V, F
c) F, F, V
d) F, V, V

12. Analise a sentença: "Não é verdade que todo mamífero é vertebrado e não é verdade que: nenhum mamífero bota ovo ou que nenhum mamífero voa.". Considerando as proposições simples A: "Todo mamífero é vertebrado.", B: "nenhum mamífero bota ovo" e C: "nenhum mamífero voa", qual das alternativas combina corretamente as proposições com operadores lógicos?

a) $A \wedge (\neg (B \vee C))$
b) $\neg A \wedge (\neg (B \vee C))$
c) $A \wedge (\neg (B \wedge C))$
d) $\neg A \wedge (\neg (B \wedge C))$
e) $A \wedge (B \wedge C)$

"Não é verdade que todo mamífero é vertebrado." é o mesmo que escrever $\neg A$. Além disso, "Não é verdade que: nenhum mamífero bota ovo ou que nenhum mamífero voa." pode ser escrito como $\neg(B \vee C)$. Como as partes estão conectadas pela operação de conjunção, temos $\neg A \wedge (\neg(B \vee C))$. Alternativa **b**.

Proposição condicional

Pense nisto

Tome como verdadeira a proposição "Se você tomar chuva, ficará molhado." e avalie qual das alternativas completa corretamente as frases a seguir ou se nenhuma das alternativas a completa corretamente. Indique suas respostas no caderno.

1. Você não está molhado, então:

a) não tomou chuva. **b)** tomou chuva. **c)** está molhado.

Alternativa **a**. Pois é fato, de acordo com a sentença, que, tomando chuva, a pessoa ficaria molhada. Como ela não está molhada, é impossível que tenha tomado chuva.

2. Você não tomou chuva, então:

a) não está molhado. **b)** está molhado. **c)** tomou chuva.

Pense nisto: 2. Nenhuma das alternativas completa corretamente a sentença, pois a sentença não expressa que a única maneira de a pessoa ficar molhada é tomando chuva, então a pessoa pode estar molhada por ter caído em uma piscina ou em um lago, por exemplo, o que torna impossível afirmar, com as informações dadas, se a pessoa está ou não molhada.

A proposição do *Pense nisto* é um exemplo de **proposição condicional**. Em proposições desse tipo, há uma relação de **implicação** entre as proposições simples, uma vez que uma **conclusão** deverá ocorrer caso a **hipótese** se confirme.

Vamos analisar o exemplo “Se tiver previsão de chuva para hoje, então levarei meu guarda-chuva comigo.”. A **hipótese** está relacionada à possibilidade de haver previsão de chuva para aquele dia. Se essa hipótese se confirmar, a **conclusão** será que a pessoa em questão levará o guarda-chuva consigo. Mas o que podemos afirmar caso a hipótese não se confirme, ou seja, caso não haja previsão de chuva para aquele dia?

Se a hipótese não se confirmar, não podemos ter certeza da conclusão. Por um lado, pode ser que a pessoa decida não levar o guarda-chuva, uma vez que não há previsão de chuva. Por outro, mesmo sem previsão de chuva, ela pode acabar optando por levar consigo o objeto por algum outro motivo, como se proteger do sol intenso previsto para aquele dia.

A única situação que não seria possível de acordo com o que foi proposto no exemplo é se houvesse previsão de chuva para o dia, mas a pessoa não levasse com ela o guarda-chuva. Nesse caso, a proposição condicional seria falsa, uma vez que ela necessariamente precisava levar o guarda-chuva caso houvesse previsão de chuva para aquele dia.

Para representar proposições condicionais, usamos a estrutura “Se A, então B.” ou “A implica B”, que também pode ser expressa por $A \Rightarrow B$. A tabela-verdade a seguir resume as possibilidades do exemplo anterior.

A	B	$A \Rightarrow B$	Explicação considerando o exemplo:
V	V	V	Como a previsão se confirmou, a pessoa levará o guarda-chuva.
V	F	F	A previsão se confirmou, mas a pessoa não levará o guarda-chuva, o que é incoerente com a relação estabelecida; portanto, nessa situação, a proposição condicional $A \Rightarrow B$ é falsa.
F	V	V	A previsão não se confirmou, mas a pessoa levará o guarda-chuva por algum outro motivo, o que é perfeitamente possível.
F	F	V	A previsão não se confirmou, e a pessoa não levará o guarda-chuva, o que também é perfeitamente possível.

A proposição condicional também pode ser definida utilizando uma estrutura lógica equivalente que utiliza apenas os conectivos básicos **não**, **e** e **ou**. Considere a tabela-verdade a seguir.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

14. a) Verdadeira, pois, se é possível dividir o número por 6, quer dizer que ele pode ser dividido por 2 e por 3.

b) Falsa. Exemplo de contraexemplo: 6 é divisível por 2, mas não por 4.

c) Falsa, pois todo número real elevado ao quadrado tem resultado positivo. Exemplo de contraexemplo: $2^2 = 4$.

d) Verdadeira, pois se pode escrever: caso quaisquer 2 números pares nas formas $2p$ e $2q$ sejam adicionados, obtém-se $2p + 2q = 2(p + q)$, que é um número par.

Note que o resultado lógico da última coluna é idêntico ao apresentado na tabela-verdade da proposição condicional. Isso nos permite concluir, por exemplo, que escrever "Se tiver previsão de chuva para hoje, então levarei meu guarda-chuva comigo." equivale, do ponto de vista da lógica, a escrever "Não há previsão de chuva para hoje ou levarei meu guarda-chuva comigo.". A única possibilidade de esta última proposição composta ser falsa seria caso a proposição "Não há previsão de chuva para hoje." fosse falsa, ou seja, caso houvesse previsão de chuva para aquele dia, e caso a proposição "Levarei meu guarda-chuva comigo." também fosse falsa, ou seja, se a pessoa não levasse o guarda-chuva consigo, o que condiz exatamente com a situação descrita na proposição condicional original.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

13. Felipe faz a seguinte proposta a Guilherme: "Se você me ajudar no dever de Matemática, então eu o ajudo no dever de Inglês.". Descreva em seu caderno as 4 situações possíveis para o desenrolar dessa proposta e responda: Em qual dessas situações Felipe não honraria a promessa feita?

14. Analise cada proposição condicional a seguir e julgue-a como verdadeira ou falsa. Se ela for falsa, apresente no caderno um contraexemplo que comprove esse valor lógico, ou seja, um exemplo que refute a proposição.

a) Se um número é divisível por 6, então ele será divisível por 3.

b) Se um número é divisível por 2, então ele será divisível por 4.

c) Se um número real for elevado ao quadrado, então o resultado será negativo.

d) Se 2 números pares forem adicionados, então o resultado será um número par.

15. A seguinte frase é um exemplo que envolve a operação lógica implicação:

"$\underbrace{\text{Se eu perder a hora}}_{P}$, então $\underbrace{\text{vou chegar atrasada}}_{Q}$."

a) Entre as possibilidades a seguir, qual é a única que não pode ser verdade? Justifique sua resposta.

I. Perdi a hora e me atrasei.

II. Perdi a hora e não me atrasei.

III. Não perdi a hora e me atrasei.

IV. Não perdi a hora e não me atrasei.

15. a) A **II** é a única que não pode ocorrer, pois chegar atrasada era uma implicação obrigatória do perder a hora.

b) Considerando as proposições P e Q da proposição condicional dada, no caderno, copie e complete a tabela-verdade da operação implicação.

P	Q	$P \Rightarrow Q$ (equivalente a $\neg P \vee Q$)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

16. **(Vunesp)** Sabendo que é verdadeira a afirmação "Todos os alunos de Fulano foram aprovados no concurso.", então é necessariamente verdade: Alternativa **e**.

a) Fulano foi aprovado no concurso.

b) se Elvis foi aprovado no concurso, então ele é aluno de Fulano.

c) se Roberto não é aluno de Fulano, então ele não foi aprovado no concurso.

d) Fulano não foi aprovado no concurso.

e) se Carlos não foi aprovado no concurso, então ele não é aluno de Fulano.

13. As 4 situações são: Guilherme ajuda Felipe no dever de Matemática e Felipe ajuda Guilherme no dever de Inglês; Guilherme ajuda Felipe no dever de Matemática e Felipe não ajuda Guilherme no dever de Inglês; Guilherme não ajuda Felipe no dever de Matemática e Felipe ajuda Guilherme no dever de Inglês; Guilherme não ajuda Felipe no dever de Matemática e Felipe não ajuda Guilherme no dever de Inglês. Apenas na segunda situação descrita Felipe não honraria sua promessa.

Algoritmos

A lógica formal busca organizar e padronizar o raciocínio com a intenção de diminuir ao máximo os eventuais ruídos de comunicação. Assim, qualquer pessoa que entende a linguagem deve ser capaz de compreender com exatidão o raciocínio descrito pelo autor, sem que haja brechas para diferentes interpretações.

Essa exatidão é especialmente importante quando precisamos ensinar etapas de realização de processos, os chamados algoritmos.

Algoritmo é um conjunto finito e exato de passos que indica o que deve ser executado para realizar um processo. Quando estamos ensinando um algoritmo a um humano, podemos fazê-lo usando estruturas dos idiomas (com os devidos cuidados visando à precisão exigida pela lógica formal) ou por meio de esquemas chamados **fluxogramas**.

Atualmente também precisamos ensinar algoritmos a máquinas que, de maneira geral, não são capazes de interpretar os diversos idiomas que nós, humanos, falamos. Nesse caso, não se trata mais de não querermos múltiplas interpretações, mas de desenvolver uma maneira de nos comunicarmos com esses novos interlocutores. Surge, então, a **lógica de programação**, campo que busca padronizar técnicas de descrição de processos fazendo uso de **linguagens de programação**.

Pense nisto

Não escreva no livro

Em duplas, façam a seguinte experiência e, depois, respondam às perguntas no caderno.

Organizem-se para uma pessoa da dupla realizar os comandos destinados à pessoa **A** e outro à pessoa **B**.

A pessoa **A** deve imaginar um desenho simples que costumava fazer quando era criança. Sem contar para a pessoa **B** qual era esse desenho, a pessoa **A** deve dar uma sequência ordenada de instruções para que a pessoa **B** reproduza com sucesso o desenho que escolheu. A pessoa **A** não pode ver o que a pessoa **B** está desenhando, deve apenas dar as instruções do que deve ser feito.

1. O desenho ficou parecido com o que era esperado?

2. O que pode ter atrapalhado a construção do desenho?

3. O que poderia ser feito para facilitar a comunicação entre instrutor e desenhista?

Pense nisto: 1. Resposta pessoal.

2. Provavelmente instruções pouco precisas que davam margem a diferentes interpretações do desenhista.

3. Exemplo de resposta: Usar um papel quadriculado ou um plano cartesiano para poder comunicar ao desenhista, com mais precisão, onde deve ser feito cada traço; o instrutor poderia fazer o desenho antes de passar as instruções para organizar o passo a passo para fazer os traços.

Um exemplo de algoritmo para ser processado por um ser humano, mas não por uma máquina, é a receita de um bolo de laranja. Ela detalha as instruções do que precisa ser feito com os ingredientes para que, ao final do processo, o resultado seja um bom bolo de laranja.

sunnya738/Shutterstock

Uma receita culinária também pode ser considerada um algoritmo.

Professor, no item **a** do boxe *Pense nisto*, destaque aos estudantes que no cotidiano, dificilmente construímos algoritmos com extrema exatidão para nos comunicar, o que pode abrir uma margem para interpretação.

Bolo de laranja

[...]

Ingredientes

- 2 laranjas pera
- 2 ovos
- 1 xícara (chá) de óleo
- $1\frac{1}{2}$ xícara (chá) de açúcar
- 2 xícaras (chá) de farinha de trigo
- 2 colheres (chá) de fermento em pó
- manteiga e farinha de trigo para untar e polvilhar a forma

Modo de preparo

1. Pré-aqueça o forno a 180 °C (temperatura média). Com um pedaço de papel-toalha, unte com manteiga uma forma com furo no meio de 24 cm de diâmetro – espalhe uma camada bem fina e uniforme. Polvilhe com farinha e chacoalhe bem para espalhar. Bata sobre a pia para retirar o excesso.
2. Descasque uma das laranjas, eliminando toda a parte branca. Lave bem a outra sob água corrente e corte e descarte as pontas, mantendo a casca (se preferir um sabor menos amargo, descasque e elimine a parte branca das duas laranjas). Corte as laranjas em quatro gomos. Descarte o miolo branco e os caroços, corte cada gomo em três pedaços e transfira para o liquidificador.
3. Numa tigela pequena quebre um ovo de cada vez e transfira para o liquidificador – se um estiver estragado você não perde a receita. Junte o óleo, o açúcar e bata bem até ficar liso.
4. Numa tigela média, misture a farinha com o fermento em pó.
5. Transfira a laranja batida com os líquidos para uma tigela grande e acrescente a farinha com o fermento aos poucos, passando pela peneira. Misture delicadamente com o batedor de arame a cada adição para incorporar.
6. Transfira a massa do bolo para a forma e leve ao forno para assar por cerca de 50 minutos. Para verificar se o bolo está pronto: espete um palito na massa, se sair limpo pode retirar do forno; caso contrário, deixe por mais alguns minutos, até que asse completamente.
7. Retire o bolo do forno e deixe esfriar por 30 minutos antes de desenformar – cuidado, o bolo pode rachar se estiver quente ao ser desenformado. Cubra a forma com um prato e vire de uma só vez para desenformar.

[...]

BOLO de laranja. *Panelinha*. Disponível em: https://tedit.net/nda552. Acesso em: 2 ago. 2024.

Não escreva no livro

Pense nisto

Considerando a receita do bolo de laranja, faça o que se pede.

a) No caderno, transcreva uma sentença da receita de bolo que abre margem para interpretação e explique por que isso ocorre.

b) Em algumas passagens, a receita apresenta o conectivo **e** da conjunção. Transcreva uma sentença da receita que use esse conectivo e explique por que ele foi escolhido, em vez do conectivo **ou** da disjunção.

c) A receita também conta com algumas proposições condicionais ao longo dela. Transcreva uma e explique os 4 cenários possíveis variando os valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Pense nisto: As respostas dependem das sentenças transcritas pelos estudantes.

Espera-se que, ao se executar precisamente os passos descritos em um algoritmo bem detalhado, o resultado seja aquele esperado. No caso da receita de bolo de laranja, por exemplo, é esperado que um preparo sem falhas, seguindo a receita, forneça um bom bolo de laranja.

As imagens não estão representadas em proporção.

sunnya738/Shutterstock

Ingredientes do bolo de laranja.

Execução precisa do algoritmo

Elena Veselova/Shutterstock

Bolo de laranja pronto após a execução precisa dos procedimentos indicados na receita.

No entanto, se a receita não estiver bem detalhada ou se o executor do bolo não estiver atento às instruções, é provável que o resultado não seja satisfatório. O algoritmo, portanto, deve buscar o máximo de exatidão, sem dar margem a interpretações. Para isso, existe uma série de técnicas e estruturas que auxiliam na produção de uma boa sequência de instruções.

Marco Regalia/Shutterstock

Ingredientes do bolo de laranja.

Execução imprecisa do algoritmo

sunnya738/Shutterstock

Bolo de laranja caso alguma instrução da receita seja ignorada ou executada sem precisão.

Para a produção de um algoritmo com uma boa sequência finita de instruções para executar determinada tarefa, primeiro devemos buscar definir com cuidado o problema a ser resolvido, sendo essencial identificar quais são as **entradas** (elementos que serão usados para a execução do algoritmo) e **saídas** (elementos de interesse que serão produzidos pelo algoritmo). Só então será possível pensar no **processamento**, trecho do algoritmo que explica o que deve ser feito com as entradas para obter as saídas.

E quanto mais objetiva for a descrição de cada uma das instruções, sem que haja margem para interpretação ou dúvida, melhor será o algoritmo que resolve o problema.

Não escreva no livro

Pense nisto

Na analogia do bolo de laranja, o que seria considerado entrada e o que seria considerado saída? E a que corresponderia o processamento?

Pense nisto: As entradas seriam os ingredientes em suas respectivas quantidades; a saída seria o próprio bolo de laranja pronto. Já o processamento corresponderia às instruções do que fazer com os ingredientes para obter o bolo pronto.

Outros exemplos de situações cotidianas em que algoritmos estão presentes são as instruções para a realização de uma prova ou um concurso, ou para fazer um *origami*.

ATENÇÃO: transcreva no espaço apropriado do seu CARTÃO-RESPOSTA, com sua caligrafia usual, considerando as letras maiúsculas e minúsculas, a seguinte frase:

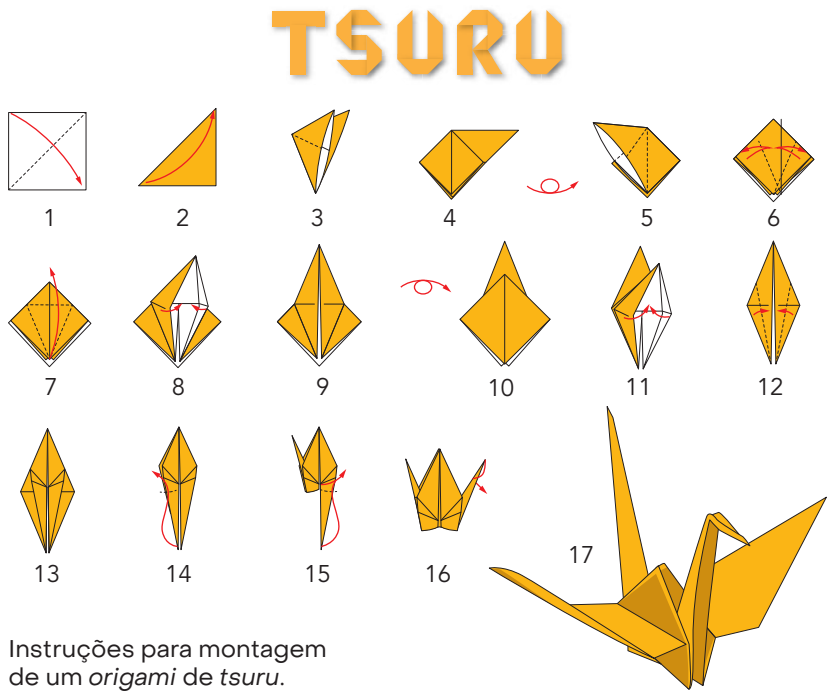
É só questão de tempo, o fim do sofrimento

LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES SEGUINTES:

1. Este CADERNO DE QUESTÕES contém 90 questões numeradas de 91 a 180 e uma FOLHA DE RASCUNHO, dispostas da seguinte maneira:
   a) questões de número 91 a 135, relativas à área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias;
   b) questões de número 136 a 180, relativas à área de Matemática e suas Tecnologias;
   c) FOLHA DE RASCUNHO.
2. Confira se a quantidade e a ordem das questões do seu CADERNO DE QUESTÕES estão de acordo com as instruções anteriores. Caso o caderno esteja incompleto, tenha defeito ou apresente qualquer divergência, comunique ao aplicador da sala para que ele tome as providências cabíveis.
3. Para cada uma das questões objetivas, são apresentadas 5 opções. Apenas uma responde corretamente à questão.
4. O tempo disponível para estas provas é de **cinco horas**.
5. Reserve tempo suficiente para preencher o CARTÃO-RESPOSTA.
6. Os rascunhos e as marcações assinaladas no CADERNO DE QUESTÕES e na FOLHA DE RASCUNHO não serão considerados na avaliação.
7. Quando terminar as provas, acene para chamar o aplicador e entregue este CADERNO DE QUESTÕES, o CARTÃO-RESPOSTA e a FOLHA DE RASCUNHO.
8. Você poderá deixar o local de prova somente após decorridas duas horas do início da aplicação e poderá levar seu CADERNO DE QUESTÕES ao deixar em definitivo a sala de prova nos **30 minutos** que antecedem o término das provas.

Reprodução/Enem, 2023.

Instruções para a realização da prova do Enem de 2023.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Instruções para montagem de um *origami* de *tsuru*.

Os algoritmos também são muito usados no ensino da Matemática, por exemplo, ao fornecer as instruções para armar e efetuar diferentes operações entre 2 números ou para decompor um número inteiro em fatores primos.

Não escreva no livro

Pense nisto

Em duplas, tentem descrever cada um dos passos para ensinar uma criança a adicionar números naturais entre 0 e 999, explicando como armar e efetuar o algoritmo usual da adição até chegar ao resultado. Quando terminarem, troquem com outra dupla e testem o algoritmo que os colegas elaboraram com 2 adições distintas para analisar se o algoritmo está claro e se está funcionando, ou seja, se com ele o objetivo é alcançado. Se necessário, apontem melhorias que poderiam ser realizadas no algoritmo criado.

Resposta pessoal.

19. c) Porque, se o resultado em **VI** for maior do que 10, significa que o estudante precisa tirar mais que 10 na última prova, o que não costuma ser possível; portanto, mesmo se ele tirar a nota máxima 10, ficará em recuperação.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

17. No caderno, escreva 1 exemplo de tarefa diária que você realiza sempre da mesma maneira. Depois, escreva as instruções detalhadas para que outra pessoa possa realizá-la da mesma maneira que você. Resposta pessoal.

18. Realize no caderno as passagens propostas no algoritmo a seguir.

I. Escolha um número natural entre 1 e 10.

II. Multiplique o número por 2.

III. Multiplique o resultado por 5.

IV. Divida o resultado pelo primeiro número escolhido.

V. Subtraia 7.

Qual foi o último resultado obtido? 3

19. Um professor forneceu um algoritmo para que os estudantes pudessem calcular a nota mínima necessária na última prova do semestre a fim de evitar a recuperação.

I. A nota da prova **1** deve ser multiplicada por 0,2. Anote o resultado.

II. A nota do trabalho em grupo deve ser multiplicada por 0,1. Anote o resultado.

III. A nota da prova **2** deve ser multiplicada por 0,3. Anote o resultado.

IV. Adicione os resultados obtidos em **I**, **II** e **III**.

V. Calcule 6 menos o resultado obtido em **IV**.

VI. Divida o resultado obtido em **V** por 0,4.

VII. Se o resultado em **VI** for menor ou igual a 0, então você já está aprovado.

VIII. Senão, se o resultado em **VI** for menor ou igual a 10, então essa é a nota mínima que você precisa tirar na prova **3**.

IX. Senão, você está em recuperação.

a) Qual é a nota mínima na média semestral para uma pessoa ser aprovada nesse componente curricular? Nota 6.

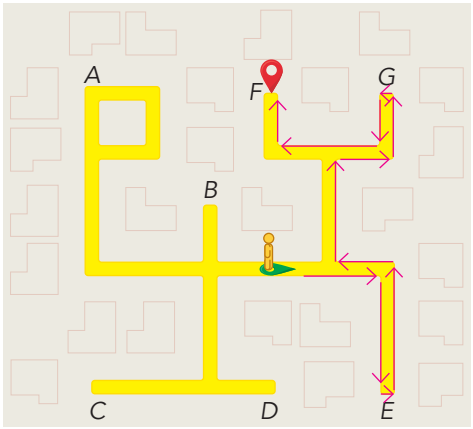
b) Qual foi o peso da última prova do semestre na média semestral dos estudantes? 40%

c) Por que existe a possibilidade de alguém já estar em recuperação mesmo sem ter feito a última prova?

d) Quanto um estudante precisa tirar na última prova se ele obteve notas 8, 9 e 7 na prova **1**, no trabalho em grupo e na prova **2**, respectivamente? 3,5

20. Dada a equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, escreva, no caderno, um algoritmo que tenha como saída as possíveis raízes reais da equação. Resposta pessoal.

21. A imagem a seguir mostra caminhos em amarelo em um mapa, conectando pontos de *A* a *F*. Para levar um boneco até o ponto *F*, 2 estudantes criaram 2 algoritmos.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Algoritmo **1**: Repita até chegar ao ponto *F*:

Se há caminho à direita, então vire 90° à direita.

Senão, se há caminho à frente, então ande 1 passo para a frente.

Senão, vire 90° à esquerda.

Algoritmo **2**: Repita até chegar ao ponto *F*:

Se há caminho à esquerda, então vire 90° à esquerda.

Senão, vire 90° à direita.

Se há caminho à frente, então ande um passo para a frente.

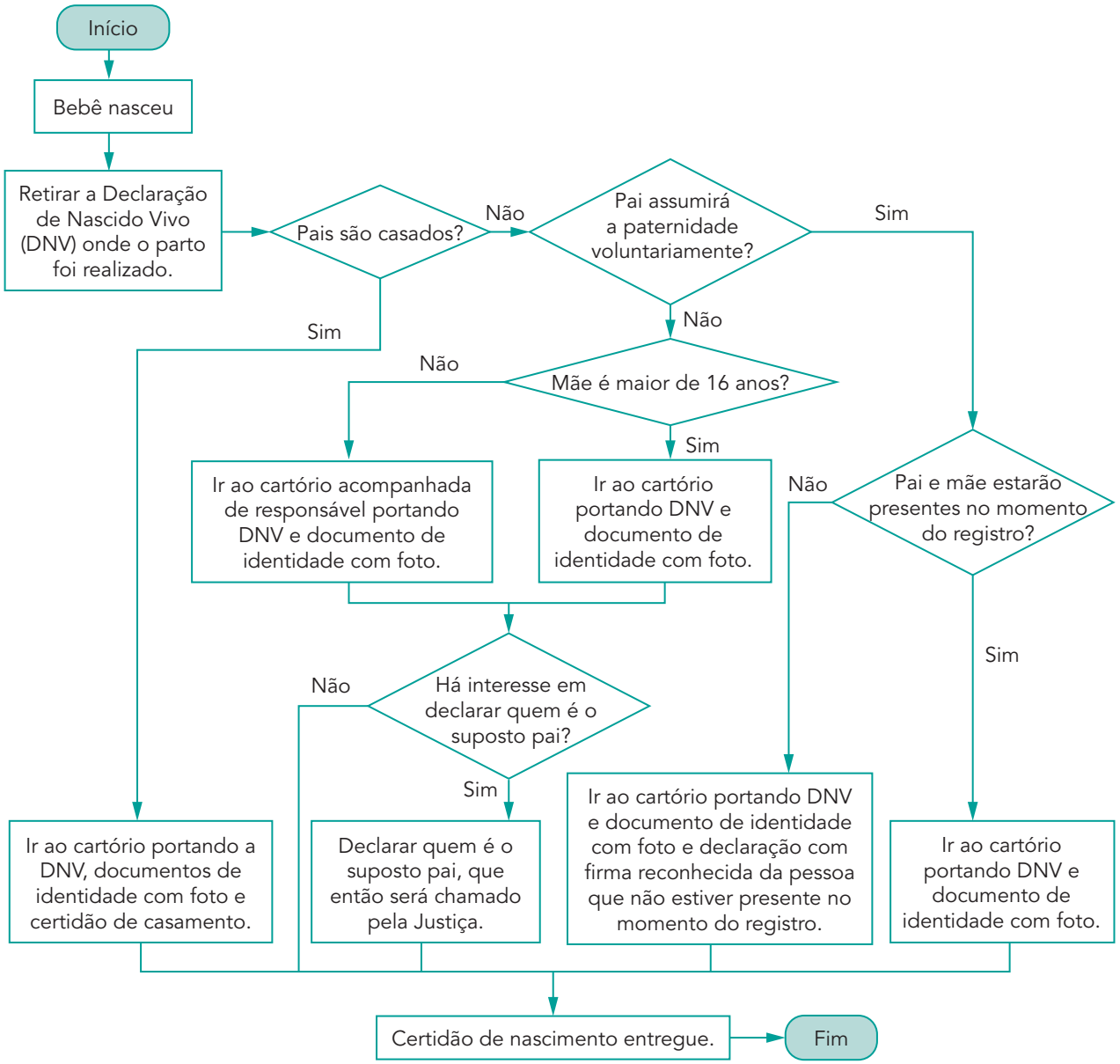
Senão, vire 90° à esquerda.

a) Apenas um desses algoritmos resolve o problema. Qual deles é e por quais pontos o boneco passará antes de atingir o ponto *F*? O algoritmo **1** funciona, e o boneco passará pelos pontos *E* e *G* antes de atingir *F*.

b) O que acontece com o boneco no algoritmo que não funciona? O boneco fica infinitamente virando 90° à direita e 90° à esquerda, sem sair do lugar.

Fluxogramas

O seguinte esquema explica o que deve ser feito para registrar uma criança brasileira que nasceu nos últimos 15 dias em uma maternidade que não conta com um representante do cartório.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

Nem todas as possibilidades de registro de um recém-nascido no Brasil foram explicitadas no esquema. Uma dessas possibilidades é o registro de multiparentalidade e paternidade socioafetiva, prevista no Provimento n. 63/2017 (disponível em: https://tedit.net/oi24hg; acesso em: 2 ago. 2024), que "autorizou o reconhecimento voluntário da paternidade ou da maternidade socioafetiva perante os oficiais de registro civil. Assim, não é mais necessária a decisão judicial para o cartório incluir um pai ou mãe socioafetivo no registro de nascimento. Desta maneira, também ficou reconhecida a possibilidade da multiparentalidade, limitada, no âmbito extrajudicial, a inclusão de dois pais e duas mães (demais acréscimos, apenas por processo judicial).".

Pense nisto

Não escreva no livro

Analise o esquema anterior e responda às perguntas a seguir.

a) Uma mãe com mais de 16 anos deseja registrar o bebê recém-nascido dela em uma maternidade do Brasil. Quais documentos devem ser apresentados no cartório se o pai assumiu a criança, mas não está disponível para ir ao cartório com a mãe para fazer o registro?

b) Uma mãe com mais de 16 anos deseja registrar o bebê recém-nascido dela e de seu esposo em uma maternidade do Brasil. Quais documentos devem ser apresentados no cartório se o pai não está disponível para ir ao cartório com a mãe para fazer o registro?

c) O esquema apresentado pode ser considerado um algoritmo?

d) Esse esquema é composto de 4 tipos de elemento gráfico. Quais são eles? E qual é a função de cada um?

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Há diversos modos de expressar um algoritmo. No começo do capítulo, trabalhamos principalmente com processos descritos por textos ou imagens. Já o esquema anterior apresenta um algoritmo em um formato gráfico chamado **fluxograma**.

Para ser considerado um fluxograma, um esquema precisa ter uma sequência de elementos encadeados que descrevem o que precisa ser feito para realizar um procedimento. Os elementos utilizados podem variar de acordo com a complexidade do processo a que o fluxograma se refere, mas, em geral, é comum aparecerem 4 elementos básicos.

Nome do elemento	Elemento gráfico	Descrição do elemento	Função
Ação/ Processo		Retângulo	Indica uma ação que deve ser realizada.
Decisão		Losango	Indica uma questão a ser respondida com sim/não (ou verdadeiro/falso).
Terminal		Retângulo arredondado ou oval	Indica o início e o fim do algoritmo.
Direção do fluxo		Seta	Indica o fluxo que deve ser seguido.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Algoritmos descritos na forma de fluxograma costumam facilitar a definição e a compreensão de um processo. Assim, essa ferramenta é bastante eficaz para ser um primeiro rascunho de um algoritmo ou a versão final se tiver como público-alvo seres humanos, e não máquinas. Caso a intenção seja transformar o algoritmo em um programa de computador, é interessante converter o fluxograma em outras linguagens de algoritmo.

Atividades resolvidas

2. Em 2024, um empregado no regime CLT (Consolidação das Leis do Trabalho, documento que regulamenta o trabalho formal no país) tinha o Imposto de Renda descontado mensalmente no pagamento (salário mensal) de acordo com a tabela a seguir.

Imposto de renda retido na fonte (2024)

Base de cálculo	Alíquota	Dedução
Até R$ 2.259,20	–	–
De R$ 2.259,21 até R$ 2.826,65	7,5%	R$ 169,44
De R$ 2.826,66 até R$ 3.751,05	15,0%	R$ 381,44
De R$ 3.751,06 até R$ 4.664,68	22,5%	R$ 662,77
Acima de R$ 4.664,68	27,5%	R$ 896,00

Fonte dos dados: BRASIL. Receita Federal. Tributação de 2024. Disponível em: https://tedit.net/2xe89h. Acesso em: 2 ago. 2024.

a) Construa uma sequência de instruções que determina o valor de imposto de renda que uma pessoa que tem um rendimento mensal x deve pagar caso se enquadre no regime CLT.

b) Represente a sequência de instruções em um fluxograma.

Solução:

a) Podemos resolver da seguinte maneira:

Verificar se $x \leqslant 2259{,}20$.

Se sim, responder que essa pessoa não deve pagar imposto de renda.

Senão, verificar se $x \leqslant 2826{,}65$.

Se sim, então calcular $y = x \cdot \frac{7{,}5}{100} - 169{,}44$ e responder que essa pessoa deve pagar y reais.

Senão, verificar se $x \leqslant 3751{,}05$.

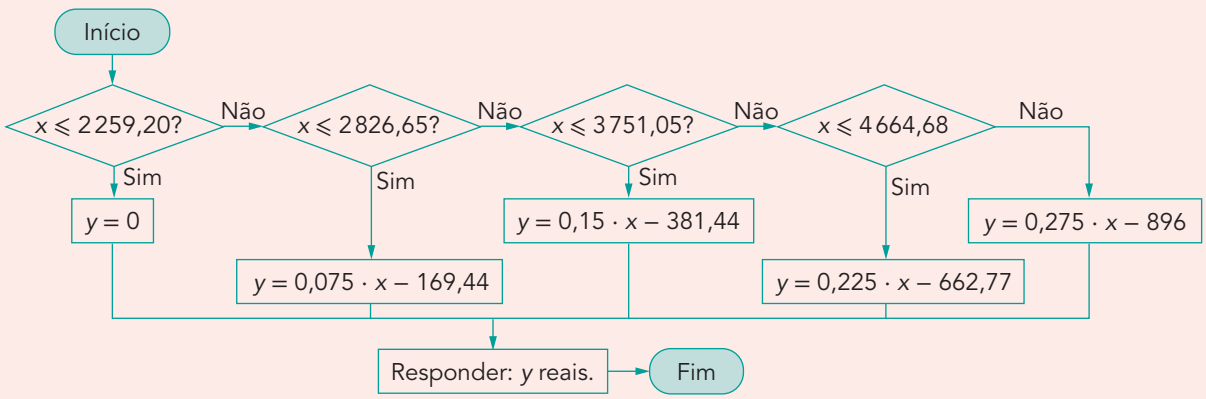
Se sim, então calcular $y = x \cdot \frac{15}{100} - 381{,}44$ e responder que essa pessoa deve pagar y reais.

Senão, verificar se $x \leqslant 4664{,}68$.

Se sim, então calcular $y = x \cdot \frac{22{,}5}{100} - 662{,}77$ e responder que essa pessoa deve pagar y reais.

Senão, calcular $y = x \cdot \frac{27{,}5}{100} - 896$ e responder que essa pessoa deve pagar y reais.

b) Um exemplo de fluxograma:



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

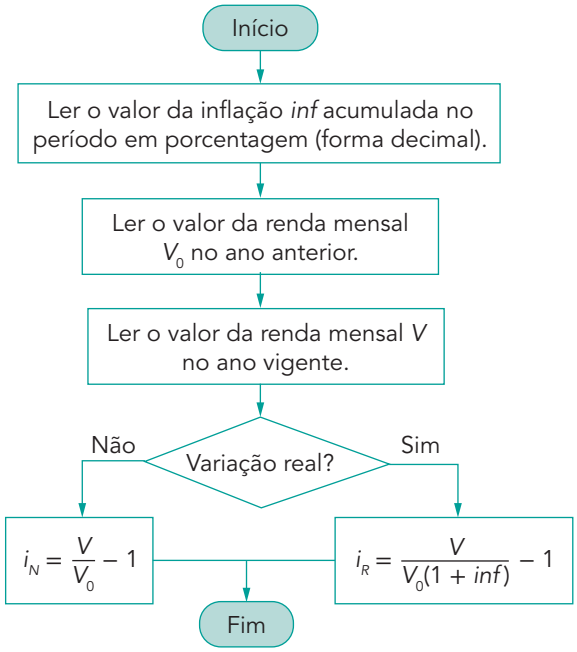
Na atividade **22**, se julgar oportuno, promova um conversa com os estudantes sobre os diferentes tipos de variação e a importância de cada uma delas. Discutir essas variações ajudará os estudantes a compreenderem melhor os impactos dos reajustes salariais no poder de compra e no planejamento financeiro.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

22. É comum existirem reajustes anuais nos salários de pessoas contratadas no regime CLT. Existem 2 maneiras de calcular a variação percentual da renda mensal de um ano para outro: a variação nominal e a variação real do salário. Não necessariamente nessa ordem, uma delas compara a renda do ano vigente com a renda do ano anterior reajustada pela inflação; a outra compara a renda do ano vigente com a renda do ano anterior.

No fluxograma apresentado, ao responder sim para a variação real, é feito o cálculo da variação real relativa do salário na forma decimal; e, ao responder não, é calculada a variação nominal relativa do salário na forma decimal.



Banco de imagens/Arquivo da editora

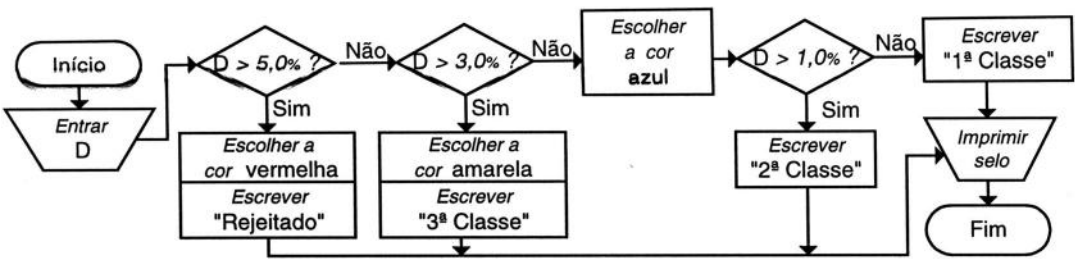
a) De acordo com o fluxograma, faça a associação entre variação nominal e variação real e os salários que cada uma delas compara.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Se a renda mensal de uma pessoa no ano anterior era de R$ 4.000,00 e passou a ser de R$ 4.840,00 no ano vigente, quais foram as variações nominal e real desse salário levando em consideração que a inflação acumulada no ano anterior foi de 10% (ou seja *inf* = 0,1)?

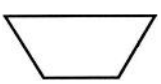
$i_N = 0{,}21$ ou 21%; $i_R = 0{,}1$ ou 10%.

23. **(Enem)** Em uma fábrica de equipamentos eletrônicos, cada componente, ao final da linha de montagem, é submetido a um rigoroso controle de qualidade, que mede o desvio percentual (D) de seu desempenho em relação a um padrão ideal. O fluxograma a seguir descreve, passo a passo, os procedimentos executados por um computador para imprimir um selo em cada componente testado, classificando-o de acordo com o resultado do teste:



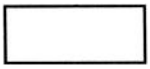
Ilustrações: Reprodução/Enem, 2004.

Os símbolos usados no fluxograma têm os seguintes significados:



Entrada e saída de dados.

Decisão (testa uma condição, executando operações diferentes caso essa condição seja verdadeira ou falsa).



Operação.

Segundo essa rotina, se $D = 1{,}2\%$ o componente receberá um selo com a classificação: Alternativa **d**.

a) "Rejeitado", impresso na cor vermelha.

b) "3ª Classe", impresso na cor amarela.

c) "3ª Classe", impresso na cor azul.

d) "2ª Classe", impresso na cor azul.

e) "1ª Classe", impresso na cor azul.

24. Um trabalhador em regime de CLT deve ter parte do salário retido para a contribuição com a previdência para garantir, no futuro, o direito à aposentadoria. No ano de 2024, as seguintes alíquotas eram aplicadas:

- renda mensal de até R$ 1.412,00: contribuição de 7,5%;
- de R$ 1.412,01 a R$ 2.666,68: contribuição de 9%;
- de R$ 2.666,69 a R$ 4.000,03: contribuição de 12%;
- de R$ 4.000,04 a R$ 7.786,02: contribuição de 14%;
- acima de R$ 7.786,03: contribuição máxima de R$ 908,86.

Fonte dos dados: BRASIL. Instituto Nacional do Seguro Social. Tabela de contribuição mensal. Disponível em: https://tedit.net/0jcu7p. Acesso em: 2 ago. 2024.

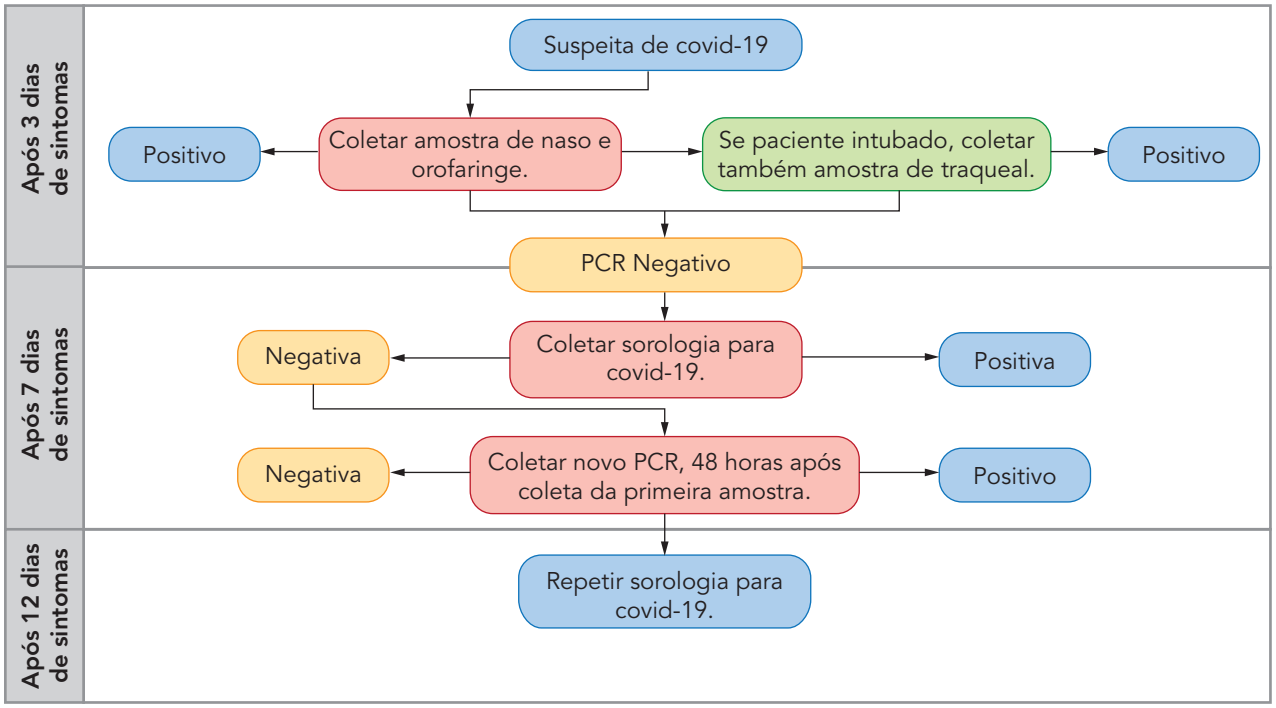
Uma pessoa que, nesse ano, tinha um salário de R$ 1.600,00 deveria pagar uma contribuição de R$ 115,47, calculados da seguinte maneira:

- 7,5% de R$ 1.412,00 = R$ 105,90;
- 9% sobre o que restou: R$ 1.600,00 − R$ 1.412,00 = R$ 188,00 e 9% de R$ 188,00 = R$ 16,92;
- total retido: R$ 105,9 + R$ 16,92 = R$ 122,82.

Após a escrita do fluxograma, oriente os estudantes a testarem o algoritmo com alguns valores de renda mensal, como de R$ 1.000,00 e R$ 1.600,00, para confirmar se chegaram aos valores corretos das contribuições que eram esperadas.

Seguindo a lógica apresentada para calcular a contribuição para a previdência de um assalariado no regime de trabalho CLT, construa um fluxograma que dê como resposta o valor da contribuição a partir da renda mensal do funcionário, considerando que a renda necessariamente é menor do que R$ 2.666,68. Um exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

25. O seguinte esquema de orientação de coleta de exames para diagnóstico da covid-19 foi definido pela CCIH (Comissão de Controle de Infecção Hospitalar) de um hospital, no início da pandemia.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Com base no esquema, construa um fluxograma no caderno, de acordo com os padrões trabalhados neste capítulo, que tenha a mesma finalidade de orientar a coleta de exames para diagnóstico da covid-19 para o caso de um paciente que teve o resultado do primeiro PCR negativo e já está com os sintomas há 7 dias. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

PROJETO

Não escreva no livro

Esta seção favorece o desenvolvimento da competência geral **7** da BNCC e da habilidade **EM13MAT315**.

Guia alimentar para a comunidade

Leia a reportagem a seguir, sobre alimentação saudável no Brasil.

Alimentação saudável está cada vez mais cara e distante da mesa dos brasileiros

Enquanto batemos recordes de exportação de alimentos, 33 milhões de brasileiros passam fome, 125 milhões de pessoas não se sentem seguras quanto à capacidade de se alimentar no futuro, 6 em cada 10 adultos e 1 a cada 3 crianças apresentam excesso de peso e 57 mil mortes prematuras foram atribuíveis ao consumo de produtos ultraprocessados, em 2019. [...]

Cacio Murilo/Shutterstock

A alimentação saudável no Brasil está cada vez mais cara.

Impacto na saúde

A alimentação não saudável causa grandes impactos na saúde pública [...]. Somente o consumo de bebidas açucaradas impactam o SUS em R$ 3 bilhões ao ano, com o cuidado e tratamento das doenças provocadas. [...]

ALIMENTAÇÃO saudável está cada vez mais cara e distante da mesa dos brasileiros. *BVS MS*, [2023?]. Disponível em: https://tedit.net/7i5m40. Acesso em: 2 ago. 2024.

Leia também o trecho de um texto do *Jornal da USP* sobre o *Guia Alimentar para a População Brasileira*.

A primeira edição do *Guia Alimentar para a População Brasileira* foi lançada em 2006, e teve grande importância para dar início às discussões sobre as iniciativas voltadas a alimentação e nutrição. [...]

Já a edição de 2014 do *Guia Alimentar* teve grande impacto internacional por ter impulsionado novos conceitos e por ter superado ideias antigas, vigentes até sua publicação. Além de considerar o processamento de alimentos, o guia reconhece que a alimentação envolve nutrientes, mas também envolve alimentos, refeições e modos de comer. Considera ainda os aspectos sociais e culturais das práticas alimentares. [...]

"Guia Alimentar para a População Brasileira" produzido na USP completa 10 anos. *Jornal da USP*. Disponível em: https://tedit.net/u063cq. Acesso em: 2 ago. 2024.

Pensando em um projeto

O *Guia Alimentar para População Brasileira* é um documento norteador que apresenta estratégias para uma alimentação adequada e equilibrada, porém não é tão acessível, já que o documento oficial tem mais de 150 páginas.

Professor, promova uma conversa com os estudantes sobre o texto. Questione-os sobre o que consideram ser uma alimentação saudável, como costumam se alimentar no dia a dia e se é possível realizar alguma mudança em hábitos que consideram menos adequados. Pergunte a eles se percebem diferenças entre os preços dos alimentos saudáveis e se identificam um motivo para que isso ocorra.

A intenção deste projeto é apresentar, de maneira acessível, algumas informações que se encontram nesse guia para alcançar as pessoas da comunidade escolar. Para isso, propõe a criação de fluxogramas com informações presentes no guia considerando a relevância para a comunidade.

khunkornStudio/Shutterstock

A construção de fluxogramas facilita a interpretação de informações.

Para começar

- Organizem-se em 4 grupos.

Plano de ação

Etapa 1

Em grupo, façam a leitura do capítulo **1** do *Guia Alimentar para a População Brasileira*, disponível em: https://tedit.net/m4qybw (acesso em: 2 ago. 2024). Entendendo a intenção do guia, cada grupo ficará responsável pela produção do material de divulgação de um dos capítulos a seguir.

Dividam-se por capítulos, cada grupo sendo responsável pela leitura de capítulo.

- Capítulo **2**: A escolha dos alimentos.
- Capítulo **3**: Dos alimentos à refeição.
- Capítulo **4**: O ato de comer e comensalidade.
- Capítulo **5**: A compreensão e superação de obstáculos.

Etapa 2

Professor, ao final de cada capítulo, o guia apresenta uma síntese de suas principais informações. Recomenda-se que os estudantes usem essa síntese para conferir se seu fluxograma compreende a maior parte do que é transmitido naquele capítulo.

Cada grupo agora sintetiza as informações do capítulo, e elabora um folheto de divulgação contendo um fluxograma para nortear as práticas alimentares estudadas.

Um folheto desse tipo se assemelha muito a um infográfico. Para criá-lo, consulte como fazer um infográfico na seção *Produções em foco*.

Etapa 3

Professor, a elaboração e a divulgação de um guia com orientações sobre alimentação para a comunidade contribuem para o ODS **3**, que diz respeito à saúde e ao bem-estar.

Produto final: distribuição dos folhetos informativos que compõem o guia alimentar para toda a comunidade escolar e/ou da região.

Os grupos devem se organizar para realizar a entrega dos folhetos e definir diferentes lugares da comunidade para isso.

Aproveitem para conversar com a comunidade, propondo dicas de hábitos alimentares saudáveis e, se possível, informando sobre alimentos típicos da região.

Deixem expostos cartazes e painéis com imagens e frases de incentivo para uma alimentação mais equilibrada.

Pseudocódigos

Apesar de existirem diversas linguagens de programação, a lógica de programação se aplica a todas elas. Assim, podemos utilizar a ideia de descrever os procedimentos que queremos que sejam realizados de acordo com a lógica utilizando uma linguagem similar à nossa língua nativa, para que, no futuro, ela seja traduzida para a linguagem de programação desejada. Essa escrita é chamada **pseudocódigo**.

Um pseudocódigo é composto por variáveis que mudam de valor de acordo com a sequência de instruções propostas nele por meio de estruturas e operadores.

A seguir, encontram-se algumas das estruturas e dos operadores usados nessa escrita.

- **Operadores matemáticos**: símbolos que indicam as operações aritméticas. Os principais são + para adição, – para subtração, * para multiplicação, **/** para divisão, **^** ou ** para potenciação e **mod** ou **%** para módulo do resto da divisão. Os parênteses são usados para indicar a ordem das operações, podendo haver diversos parênteses dentro de outros. Além disso, o símbolo = é utilizado como um operador especial, significando "faça a variável igual a", ou seja, escrever ***x* = 1** significa "faça o valor de *x* ser igual a 1".
- **Operadores de comparação**: usados para comparar dois números simultaneamente. Os símbolos são == para expressar "igual a", < para expressar "menor do que", <= para expressar "menor ou igual a", > para expressar "maior do que", >= para expressar "maior ou igual a" e <> ou **!=** para expressar "diferente de".
- **Operadores lógicos**: são usados para indicar os conectivos lógicos. Esses operadores eventualmente são expressos na própria linguagem nativa, como em português **e**, **ou** e **não**, ou pelos símbolos **&&** para expressar a operação de conjunção, **||** para a operação de disjunção e **!** para a operação de negação.
- **Estruturas de condição**: são blocos de instruções que só devem ser utilizados quando determinada condição é cumprida. Uma das maneiras de indicar essa estrutura é começar com a palavra "se", escrever a condição que se deseja verificar e terminar com "então". Opcionalmente, pode-se também usar a palavra "senão" para indicar outro bloco de instruções que só deve ser levado em conta se a condição estabelecida não for verdadeira. As condições, de maneira geral, são estabelecidas usando os operadores lógicos e os operadores de comparação.
- **Estruturas de repetição**: são blocos de instruções que devem ser repetidas até que uma condição deixe de ser verdadeira. O modo mais comum de anunciar um bloco desse tipo é usando a palavra "enquanto", seguida da condição que deve se manter verdadeira para que o bloco siga sendo executado. A condição aqui também é estabelecida com operadores lógicos e de comparação.
- **Comandos de entrada e saída de dados**: muitas vezes é necessário que o usuário forneça algum parâmetro ao programa para que o computador apresente um resultado. O fornecimento de um parâmetro é feito a partir de um comando de entrada de dados, que designaremos como "Ler", e a apresentação, por um comando de saída, que designaremos como "Escrever". Quando for preciso que o usuário responda a uma pergunta, você pode utilizar uma combinação desses dois: o "Escrever" para transmitir a pergunta ao usuário e, em seguida, o "Ler" para que o programa entenda a necessidade de esperar a leitura de uma informação fornecida pelo usuário que deve ser guardada em uma variável.

Caso julgue pertinente, apresente aos estudantes o primeiro *Doodle* programável da história que foi lançado em 2017 para celebrar os 50 anos da primeira linguagem de programação dedicada a ensinar as crianças a usarem os códigos: a Logo.
O jogo com foco em programação funciona por instruções e está disponível em: https://tedit.net/5k0tm7 (acesso em: 2 ago. 2024).

A seguir, apresentamos exemplos de como traduzir algoritmos e fluxogramas em pseudocódigo, usando alguns exemplos já apresentados neste capítulo.

Algoritmo da atividade **18**:

I. Escolha um número natural entre 1 e 10.

II. Multiplique o número por 2.

III. Multiplique o resultado por 5.

IV. Divida o resultado pelo primeiro número escolhido.

V. Subtraia 7.

```
1   Início
2
3   Escrever "Digite um número natural entre 1 e 10."
4   Ler num
5   res = 2 * num
6   res = 5 * res
7   res = res / num
8   res = res – 7
9
10  Escrever res
11
12  Fim
```

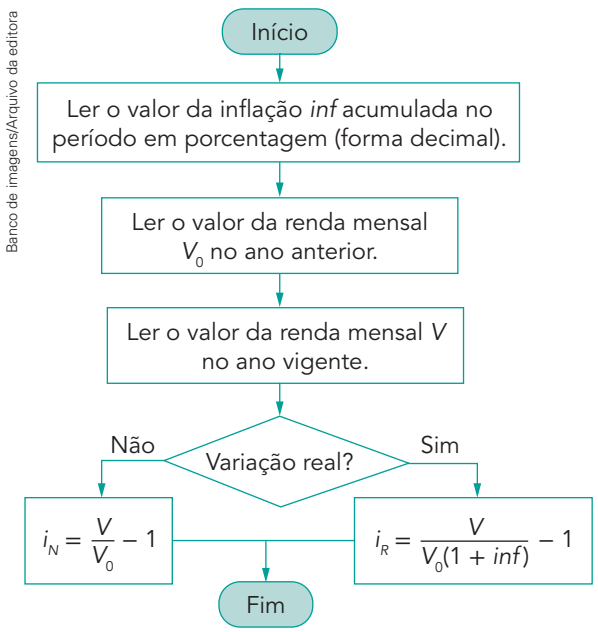
Observação

Para facilitar a compreensão dos pseudocódigos, será usado o seguinte jogo de cores:

- **Verde**: comandos de entrada ou saída.
- **Preto**: números e textos. Quando o texto estiver contido entre **/*** e ***/**, ele é referente a um comentário que auxilia na compreensão do pseudocódigo por um leitor humano, mas que será ignorado pela máquina.
- **Azul**: variáveis.
- **Laranja**: operadores matemáticos, lógicos e de comparação.
- **Roxo**: comandos de estruturas de condição ou repetição.

Para os pseudocódigos que devem ser construídos no caderno ao longo das atividades, não há a necessidade de realizar a diferenciação por cores.

Fluxograma da atividade **22**:



Banco de imagens/Arquivo da editora

```
1   Início
2
3   Escrever "Digite o valor da inflação acumulada no período em porcentagem, na forma decimal."
4   Ler inf
5   Escrever "Digite o valor da renda mensal no ano anterior."
6   Ler V0
7   Escrever "Digite o valor da renda mensal no ano vigente."
8   Ler V
9
10  Escrever "Se você quiser determinar a variação nominal, digite 0;
    se quiser a real, digite 1."
11  Ler variacao
12
13  Se variacao == 0, então
14      variacao = V / V0 – 1
15  Senão
16      variacao = V / (V0 * (1 + inf)) – 1
17
18  Escrever "A variação desejada, na forma decimal, foi de:" variacao
19
20  Fim
```

Note que, dentro de uma estrutura de repetição ou de condição, existe uma diferença no alinhamento do texto. Essa diferença é chamada **indentação**. Ela serve para identificar quais comandos dependem dessas estruturas e quais devem ser executados sempre.

História da Matemática

Carrossel de imagens

As imagens não estão representadas em proporção.

História da computação

A ideia de descrever uma sequência finita de passos para chegar a um resultado, executar um processo ou resolver um problema é tão antiga quanto a própria Matemática. Um dos exemplos mais notáveis é o Papiro de Rhind, um manuscrito egípcio datado de cerca de 1650 a.C. que descreve uma série de problemas matemáticos, incluindo o uso de frações e números inteiros para cálculos de medições e divisões.

Alamy/Fotoarena

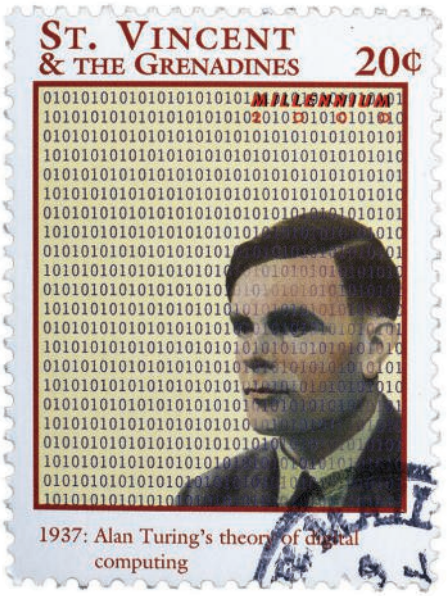
Papiro de Rhind, guardado no Museu Britânico de Londres, no Reino Unido.

Nesse documento, por exemplo, os egípcios descreveram como calcular a medida de volume de um reservatório de grãos cilíndricos expressando um método muito parecido com o utilizado até os dias de hoje.

Os avanços no campo do registro de procedimentos, combinados com outros diversos avanços da Matemática (como o desenvolvimento do sistema de números binários por matemáticos indianos e o desenvolvimento do primeiro algoritmo a ser processado por uma máquina de calcular), culminaram no surgimento da Ciência da Computação.

Alan Turing (1912–1954) costuma ser intitulado o pai da Ciência da Computação. Durante a Segunda Guerra Mundial, ele trabalhou na decodificação de mensagens criptografadas pelos alemães. Turing foi fundamental no desenvolvimento da bomba eletromecânica, uma máquina que permitiu a decodificação de mensagens Enigma (máquina de codificação das mensagens alemãs). Após a guerra, continuou o trabalho dele na área de inteligência artificial, desenvolvendo o conceito da máquina universal de Turing, que é considerada uma das primeiras teorias formais de um computador.

Os avanços e as conquistas de Turing não o impediram de ser vítima dos preconceitos vigentes em seu tempo de vida: foi amplamente perseguido por ser homossexual, o que causou sua prisão em 1952 e sua morte em 1954.



spatuletail/Shutterstock

Selo postal homenageando Alan Turing.

Fontes dos dados: GERONIMO, Rafael Rix; SAITO, Fumikazu. O papiro de Rhind: um estudo preliminar. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 123-132, 2012. Disponível em: https://tedit.net/uvu1k3. PETRAGLIA, Izabel Cristina; PALMISANO, Angelo; ROSINI, Alessandro Marco. Alan Turing: Cientista complexo e transdisciplinar. *Debates em Educação*, v. 12, n. 28, p. 596-609, 2020. Disponível em: https://tedit.net/rxl19v. Acesso em: 2 ago. 2024.

Dica

***O Jogo da Imitação*, filme baseado na história do matemático Alan Turing**

Durante a segunda Guerra mundial, o matemático Alan Turing recebeu a missão do governo britânico de conseguir descobrir como funcionava a máquina Enigma, equipamento utilizado pelos nazistas para codificar mensagens. Utilizando seus conhecimentos lógico-matemáticos, Turing, juntamente com sua equipe, trabalhou para desenvolver uma máquina capaz de decifrar as mensagens da Enigma.

Atividades resolvidas

3. Traduza o fluxograma desenvolvido na atividade resolvida **2** para um pseudocódigo.

Solução:

```
1   Início
2
3   Escrever "Digite sua renda mensal:"
4   Ler x
5
6   Se x <= 2259,20, então
7       y = 0
8   Senão
9     Se x <= 2826,65, então
10        y = 0,075 * x – 169,44
11    Senão
12      Se x <= 3751,05, então
13          y = 0,15 * x – 381,44
14      Senão
15        Se x <= 4664,68, então
16            y = 0,225 * x – 662,77
17        Senão
18            y = 0,275 * x – 896
19
20  Escrever y
21
22  Fim
```

Professor, se julgar oportuno, antes de iniciar as atividades a seguir, junto com os estudantes, desenvolva na lousa um pseudocódigo que indique se um número natural *num* inserido pelo usuário é par ou ímpar ou, ainda, que identifique se um número *num* é primo. Com os estudantes, teste os algoritmos desenvolvidos e proponham melhorias, conforme necessário. No caso de erros, solicite a eles que proponham correções.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

26. O algoritmo a seguir responde a uma pergunta de sim ou não sobre um número natural inserido pelo usuário. A variável *res* é igual a 1 se a resposta for "sim" e 0 se a resposta for "não". A variável *aux* é utilizada para auxiliar no processamento do algoritmo.

```
1   Início
2
3   /* entradas */
4   Ler num
5   res = 0
6   aux = 1
7
8   /* processamento */
9   Enquanto num >= aux^2 e res == 0
10    Se num / (aux^2) == 1 então
11      res = 1
12    Senão
13      aux = aux + 1
14
15  /* saídas */
16  Se res == 0 então
17    Escrever "A resposta é não."
18  Senão
19    Escrever "A resposta é sim."
20
21  Fim
```

a) Qual é a saída do algoritmo no caso do número *num* ser lido como 1 inicialmente?

A saída nesse caso será "A resposta é sim.".

b) Qual é a saída do algoritmo no caso do número *num* ser lido como 8 inicialmente?

A saída nesse caso será "A resposta é não.".

c) Qual é a saída do algoritmo no caso do número *num* ser lido como 9 inicialmente?

A saída nesse caso será "A resposta é sim.".

d) Qual é a pergunta que esse algoritmo responde? "O número natural *num* é um quadrado perfeito?"

27. O algoritmo a seguir ajuda estudantes a identificar o mínimo que precisam tirar nos instrumentos avaliativos que faltam para fechar o período escolar na média.

```
1  Início
2
3  /* entradas */
4  Escrever "Qual é a média mínima para ser aprovado na escola onde estuda?"
5  Ler media_min
6  Escrever "Quantas atividades avaliativas desse período você já sabe o resultado?"
7  Ler num
8  media = 0
9  sobra_peso = 100
10 aux_peso = 0
11 aux_nota = 0
12 nota_necessaria = 0
13
14 /* processamento */
15 Enquanto num > 0
16    Escrever "Digite a próxima nota"
17    Ler aux_nota
18    Escrever "Digite o peso dessa nota em porcentagem (entre 0 e 100), mas sem o sinal de porcentagem '%'"
19    Ler aux_peso
20    media = media + aux_nota * aux_peso / 100
21    sobra_peso = sobra_peso – aux_peso
22    num = num – 1
23
24 nota_necessaria = (media_min – media) / (sobra_peso / 100)
25
26 /* saídas */
27 Se nota_necessaria <= 0
28    Escrever "Você já está aprovado(a)."
29 Senão
30    Se nota_necessaria > 10
31       Escrever "Você já está reprovado(a)."
32    Senão
33       Escrever "Para ser aprovado(a), você precisa tirar em média nos instrumentos avaliativos que faltam um mínimo de: " nota_necessaria
34
35 Fim
```

27. a) A saída será "Para ser aprovado(a), você precisa tirar em média nos instrumentos avaliativos que faltam um mínimo de: 4,8"

a) Qual é a saída do algoritmo para o caso de uma estudante de uma escola cuja média mínima para aprovação é 5, tirou 7 em uma atividade avaliativa em grupo que valia 20% do período e 4 em uma prova parcial que valia 30% do período?

b) Use esse algoritmo para verificar a nota mínima necessária, em média, que você precisa tirar nos instrumentos avaliativos que faltam desse período em um componente curricular à sua escolha.

Resposta pessoal.

28. Um lojista quer montar um sistema que esteja programado para oferecer parcelamento sem juro no cartão de crédito desde que cada parcela não seja menor do que R$ 50,00.

Respostas pessoais.

a) Escreva em seu caderno um algoritmo que recebe como entrada o valor total da compra, em reais, e avisa ao lojista o número máximo de parcelas sem juros que pode ser oferecido ao cliente.

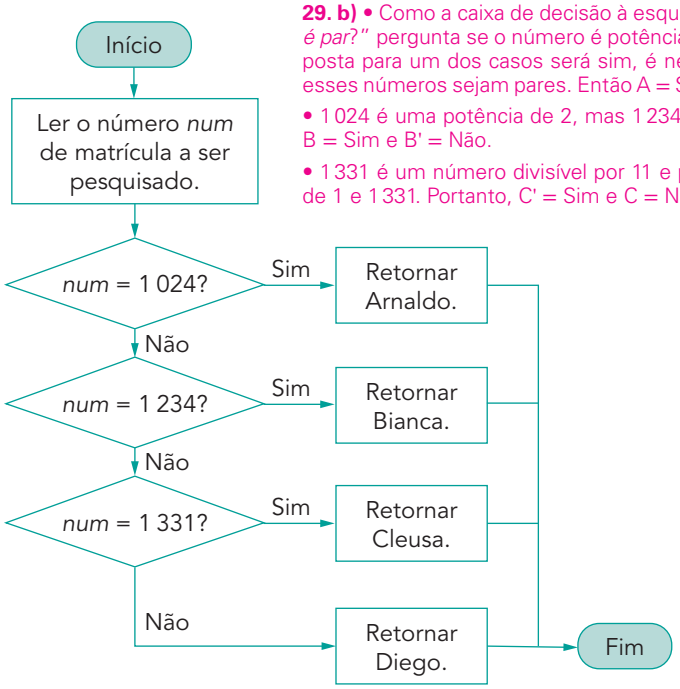
b) Complemente o algoritmo para que ele também dê como saída o valor de cada parcela caso o cliente opte pelo maior número de parcelas sem juros possível.

29. Um banco de dados armazena uma série de informações que precisam ser acessadas de tempos em tempos. Mesmo que seja realizado por um computador, o processo de busca de uma informação pode levar muito tempo se a quantidade de dados for muito grande e se o algoritmo de busca não for eficiente.

Suponha um banco de dados que tenha apenas os nomes e o número de matrícula de quatro estudantes:

- Arnaldo – 1024;
- Bianca – 1234;
- Cleusa – 1331;
- Diego – 1447.

Supondo que um usuário desse banco de dados queira descobrir o nome do estudante que tem número de matrícula 1447, se o algoritmo de busca é linear, precisariam ser feitas 3 verificações (perguntas de sim ou não) até retornar o nome Diego:



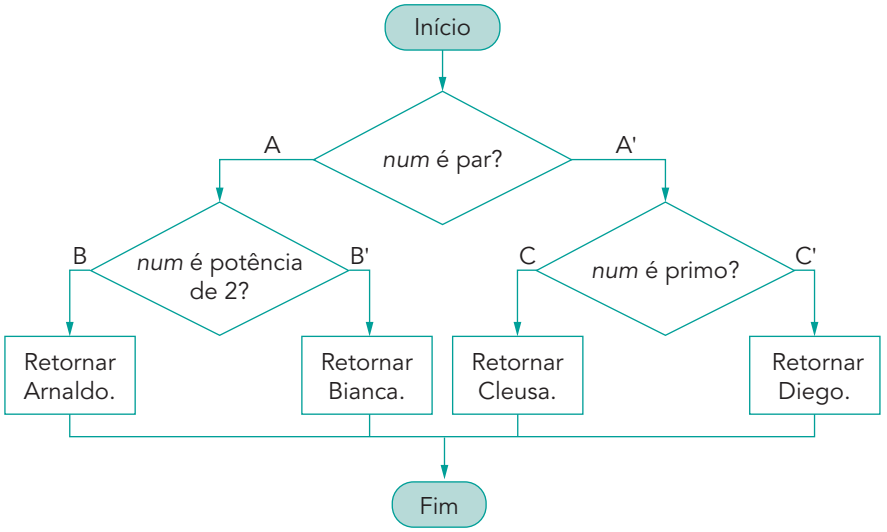
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

29. b) • Como a caixa de decisão à esquerda de "*num é par*?" pergunta se o número é potência de 2 e a resposta para um dos casos será sim, é necessário que esses números sejam pares. Então A = Sim, A' = Não.

• 1 024 é uma potência de 2, mas 1 234 não é. Então B = Sim e B' = Não.

• 1 331 é um número divisível por 11 e por 121, além de 1 e 1 331. Portanto, C' = Sim e C = Não.

A busca binária, por sua vez, reduziria o número de verificações máxima. Analise o fluxograma:



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

a) Qual seria o maior número de verificações seguindo esse novo algoritmo? Independentemente do número de matrícula a ser pesquisado, são necessárias duas verificações para obter o nome referente ao número.

b) As respostas de cada caixa de decisão foram trocadas por letras. Faça a correspondência entre cada uma das 6 respostas com Sim ou Não.

c) Se, em vez de 4 estudantes, tivéssemos um banco de dados com 8 estudantes, qual seria o número máximo de verificações usando a busca linear e qual seria o máximo de verificações usando uma busca binária? E se fossem 1024? Para a busca linear, seriam necessárias, no máximo, 7 verificações, enquanto na busca binária seriam necessárias apenas 3. No caso de 1 024 estudantes cadastrados, seriam necessárias, no máximo, 1 023 verificações na busca linear e 10 verificações no caso da binária, pois 2^{10} resulta em 1 024 possibilidades.

Chirm/Shutterstock

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Computação, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Educação Digital.
Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

Unidades de armazenamento e velocidade de transferência de dados

A menor unidade de medida de armazenamento de informação digital é chamada de *bit*. Ela pode armazenar ou 0, ou 1 (operando no sistema binário). Sozinho, o *bit* pode não parecer muito poderoso, mas uma sequência de 8 *bits*, chamado de *byte* (B), já tem capacidade de armazenar 256 informações ($2^8 = 256$).

Andrei Kuzmik/Shutterstock

Os disquetes plásticos são dispositivos portáteis de armazenamento de dados. Apesar disso, tornaram-se obsoletos durante a década de 2000, mas até hoje figuram como ícone da função "Salvar" em diversos *softwares*.

Mesmo dispondo dos prefixos do SI para isso, percebeu-se um problema prático na linguagem para expressar grandes quantidades de armazenamento de dados, relacionado à natureza binária do armazenamento de dados: um dispositivo nunca pode ter uma medida de capacidade de armazenamento de informações de 1000 *bytes* (valor referente ao prefixo "quilo"), pois 1000 não é potência de 2, mas ele pode ter 1024 B. Por isso, foram criados prefixos distintos para essa grandeza.

Entre eles, estão quibi (Ki), mebi (Mi) e gibi (Gi), que são potências de 1024 (2^{10}). Um quibi equivale a 2^{10}; um mebi, a 2^{20}; e um gibi, a 2^{30}. Entretanto, em contextos informais, é comum o uso impreciso dos prefixos quilo, mega e giga como se fossem iguais a quibi, mebi e gibi. Ou seja, na prática, ao informar que um celular tem medida de capacidade de armazenamento máxima de 128 GB, na verdade devemos entender que ele pode armazenar 128 GiB, ou 2^{37} *bytes*.

Mahmudul-Hassan/Shutterstock

Pen drives ainda são uma maneira conveniente de armazenar e levar dados de um computador a outro quando há algum empecilho para o uso da internet.

Com a possibilidade de armazenar dados, surge a necessidade de transferi-los. A popularização da internet a tornou o principal meio de transmissão de dados da atualidade. É comum associarmos a internet à grandeza de velocidade de transmissão de dados: a quantidade de dados transferidos por meio de uma conexão de rede em certo intervalo de tempo. Essa velocidade é medida, normalmente, em *bits* por segundo, cujo símbolo é bps.

Como o armazenamento é medido em *bytes*, e não em *bits*, é preciso ficar atento para não cometer equívocos. Imagine que uma operadora venda planos de banda larga anunciando velocidade de *download* com medida de 50 Mbps. Como 1 *byte* = 8 *bits*, dividimos 50 por 8 e obtemos 6,25. Isso significa que a medida de velocidade anunciada é de 6,25 *megabytes* por segundo.

Vídeo

As imagens não estão representadas em proporção.

1. Responda no caderno ao que se pede a seguir.

a) Como você faz para armazenar seus documentos/arquivos quando necessário? Resposta pessoal.

b) Um *smartphone* que tem 256 GiB de memória tem capacidade para quantos *bytes*?

$256 \text{ GiB} = 256 \cdot 2^{10} \text{ MiB} = 256 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \text{ KiB} = 256 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \text{ bytes} = 2^{38} \text{ bytes}$

2. Um grupo de cientistas e engenheiros do Brasil e dos Estados Unidos conseguiu transferir dados de São Paulo a Miami a uma taxa de 85 Gbps – transmissão 8 500 vezes maior do que a medida de velocidade de banda larga de internet de uso doméstico no Brasil. Expresse essa medida conseguida pelos cientistas em *gigabytes* por segundo.

85 Gbps : 8 = 10,625 *gigabytes* por segundo

capítulo

6 Noções de programação

Desenvolvimento da solução digital

Desde muito tempo os seres humanos buscam desenvolver estratégias para alcançar os mais variados objetivos. Uma delas se destacou ainda antes da Era Comum e foi resumida na seguinte frase: "Dividir para conquistar.". Apesar de ter sido, inicialmente, uma estratégia de cunho político-militar, ela foi utilizada em outras áreas do conhecimento, auxiliando-nos a construir sociedades e tecnologias tão complexas que são praticamente incompreensíveis em sua totalidade por um único ser humano.

Há diversas situações nas quais podemos aplicar essa lógica de "dividir para conquistar". A construção de um edifício, por exemplo, é complexa a ponto de, em geral, envolver pelo menos 3 partes: uma responsável por idealizar, regularizar e vender o projeto, chamada de incorporadora; uma responsável pela execução do projeto de construção civil, chamada de construtora; e outra responsável pelos serviços mais especializados, chamada de empreiteira.

Cada uma dessas partes tem, ainda, as próprias subdivisões. No caso da empreiteira, pode haver uma pessoa responsável pela concretagem, outra pela instalação hidráulica, outra pela instalação elétrica, e assim por diante. As entregas de cada uma dessas partes possibilitam que, ao final do processo, um projeto imobiliário de grandes proporções e complexidade seja entregue.

As imagens não estão representadas em proporção.

Dragon Images/Shutterstock

Fit Ztudio/Shutterstock

PeopleImages.com - Yuri A/Shutterstock

A colaboração entre diferentes especialidades garante o sucesso dos projetos, combinando criatividade e precisão para transformar ideias em realidade.

A estratégia de "dividir para conquistar" é também uma das bases do pensamento computacional, relevante para o desenvolvimento de soluções digitais cada vez mais elaboradas. Soluções digitais são ferramentas que usam a tecnologia digital para otimizar trabalhos que envolvem processos repetitivos ou tratamento de muitos dados. Como algoritmos e fluxogramas são linguagens desenvolvidas para expressar as etapas que devem ser realizadas para atingir determinado objetivo, eles são grandes aliados no processo de desenvolvimento dessas soluções.

O processo de desenvolvimento de uma solução já é uma atividade repetitiva; por isso, foram elaboradas diversas metodologias (ou algoritmos) que indicam o passo a passo a ser seguido para conceber uma solução digital, como o *Design Thinking*.

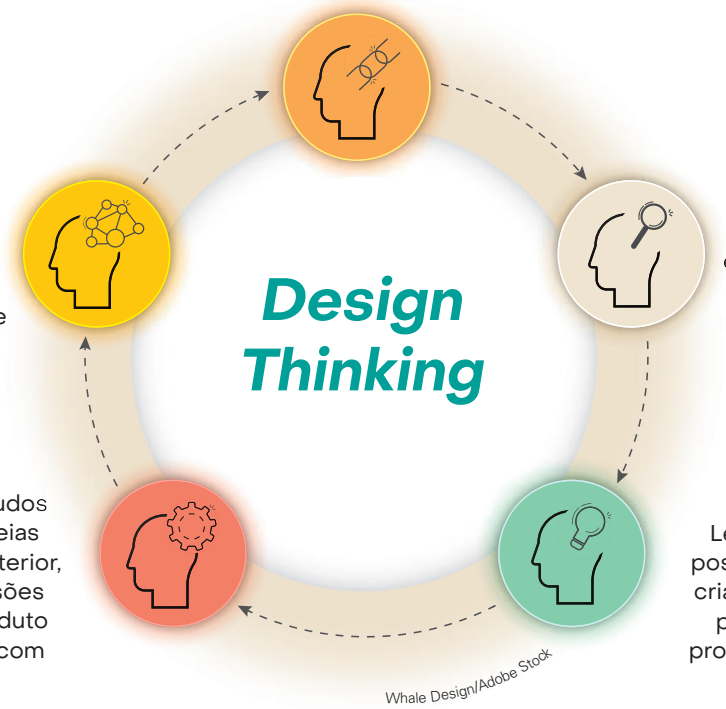
A metodologia de *Design Thinking*, formalmente desenvolvida no século XX, propõe que há 5 etapas que devem ser seguidas para o desenvolvimento de um produto (digital ou não), representadas no esquema a seguir.

Empatia

Reunir informações sobre o público-alvo, buscando compreender as necessidades e expectativas dos futuros usuários do produto, para ampliar a compreensão dos fatores que estão conectados ao problema a ser resolvido.

Teste

Testar soluções propostas com usuários para coletar opiniões (*feedbacks*) sobre como refiná-las e melhorá-las.



Whale Design/Adobe Stock

Definição

Considerando as informações obtidas na etapa anterior, define-se, com precisão, qual é o problema a ser resolvido pelo produto.

Prototipagem

Considerando os estudos de viabilidade das ideias levantadas na etapa anterior, desenvolvem-se versões experimentais do produto para serem testadas com usuários.

Ideação

Levantar o máximo possível de propostas criativas e inovadoras para dar conta do problema identificado.

Mesmo havendo uma sequência entre as etapas, é possível retornar a uma etapa anterior se necessário. Por exemplo, uma vez testado o primeiro protótipo, pode-se voltar à etapa de prototipagem para o desenvolvimento de um novo protótipo que dê conta das opiniões obtidas na primeira testagem. Ou, caso o primeiro teste não tenha atingido todas as expectativas, é possível retornar à etapa de ideação para buscar outros caminhos.

Estratégias como o *Design Thinking* foram importantes para a organização do processo de buscar uma solução, dividindo uma tarefa em partes menores que podem ser revisitadas a todo momento, e não apenas depois da entrega final do produto.

Quando o *Design Thinking* é utilizado para desenvolver um produto digital devem ser levantadas, na terceira etapa, as diferentes ferramentas digitais que poderiam ser usadas para codificar o produto (ou seja, escrever as instruções do programa usando certo tipo de codificação). Seguem alguns exemplos.

Codificação	Possíveis usos
Linguagens de programação (como *Python*, C++, Java, *Ruby*, etc.)	Gerar programas que realizem conjuntos de instruções a fim de desempenhar determinada função.
Planilhas digitais	Combinar diferentes comandos organizados em forma de tabela.
Low-code ou *no-code*	Construir soluções sem a necessidade de escrever códigos.
Marcadores de hipertexto como o HTML	Desenvolver, por exemplo, páginas da internet.
Linguagens de consulta a bancos de dados	Selecionar e relacionar informações organizadas em base de dados.

Também precisam ser levantadas as formas de disponibilizar a solução. Para a construção dos protótipos, deve-se eleger uma entre as incontáveis formas de codificar e disponibilizar o produto. A seguir, estão indicados alguns modos de disponibilização do produto, suas vantagens e possíveis exemplos.

Disponibilização do produto	Vantagem	Exemplo
Aplicativo móvel	Pode não exigir o uso de internet para funcionar; celular é um dispositivo que geralmente acompanha o usuário, facilitando o acesso.	Meu SUS Digital
Programa de computador	Melhor visualização de muitas informações simultaneamente.	Programa de edição de texto
Página *web*	Pode ser acessada de qualquer dispositivo com conexão à internet; não demanda espaço de armazenamento do dispositivo.	Página *web* de uma loja virtual
Sistema embarcado (solução dedicada exclusivamente a um dispositivo)	A solução fica conectada ao dispositivo para o qual ela foi desenvolvida.	Medidor de glicose no sangue
Rede social	Acessível por estar inserida em um ambiente de alto tráfego de usuários.	Assistente virtual para atender clientes de uma loja

Não escreva no livro

Pense nisto

Em trios, levantem pelo menos mais um exemplo de solução digital que vocês conheçam para cada um dos 4 primeiros meios de disponibilizá-la, apresentados no quadro.

Exemplo de resposta: Aplicativo móvel: e-Título (aplicativo que exibe o título de eleitor). Programa de computador: IRPF (programa para declaração do Imposto de Renda). Página *web*: Página *web* de uma escola para acesso ao boletim e histórico escolar. Sistema embarcado: Calculadora.

Scratch

Neste capítulo, abordaremos uma das ferramentas que possibilitam o desenvolvimento de soluções digitais sem a necessidade da escrita de códigos (*low-code* ou *no-code*): o *Scratch*.

O *Scratch* é uma linguagem de programação desenvolvida pelo Media Lab do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), nos Estados Unidos, e que possibilita a concepção de algumas soluções digitais simples utilizando blocos de programação. Com o uso dos blocos, é possível desenvolver um programa para determinado objetivo ou para a resolução de um problema, sem a necessidade de ter conhecimentos de uma linguagem de programação. Para isso, o usuário usa comandos pré-programados e estruturas lógicas, como as apresentadas no capítulo anterior.

Essa ferramenta pode ser usada para gerar animações e jogos eletrônicos ou implementar um algoritmo para que o computador possa realizar a rotina desejada. A página da internet do *Scratch* traz diversos exemplos do que já foi desenvolvido pela comunidade que o utiliza para implementar projetos. Alguns desses exemplos também incluem tutoriais que podem ser seguidos para replicar a construção de um projeto.

Ilustrações: Reprodução/Scratch

Exemplos de jogos que o *Scratch* possibilita construir.

Para começar a programar, é necessário acessar a página inicial do *Scratch*, disponível em https://tedit.net/jw1wzy (acesso em: 20 ago. 2024), e clicar em “Comece a Criar”.

Infográfico clicável

Observação

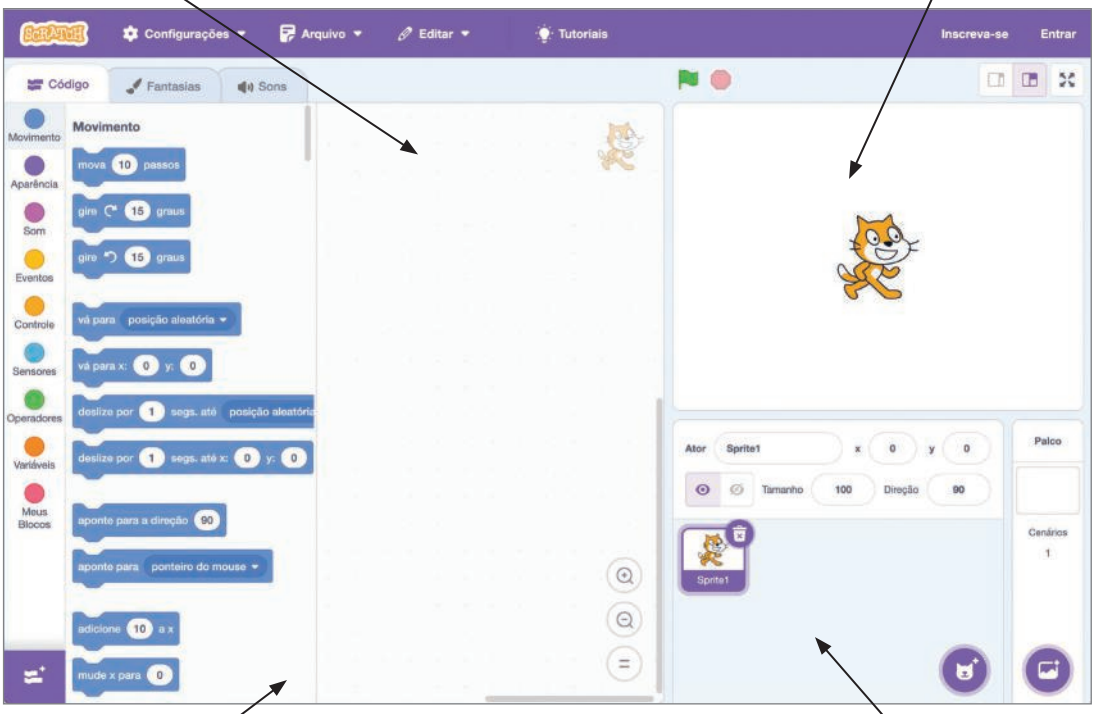
Não é necessário realizar um cadastro para criar projetos no *Scratch*. No entanto, ter uma conta permite salvar os próprios projetos e ter acesso a eles sempre que quiser retomá-los. Peça ajuda ao professor caso queira realizar o cadastro gratuito na plataforma.

O ambiente de desenvolvimento está disponível em diversos idiomas. Caso necessário, para trocar o idioma, clique no ícone de configurações (Settings) e depois selecione em linguagens (Language) a opção “Português Brasileiro”.

Ilustrações: Reprodução/Scratch

Neste campo você deve organizar seus blocos de programação para construir o programa.

Aqui você poderá visualizar os resultados gerados pelo programa por meio da interação com um ator (no caso da imagem, o ator é o gato).



Reprodução/Scratch

Neste setor você encontra os **blocos de programação** que desempenham determinada tarefa.

Nesta parte você pode selecionar o ator que será usado pelo programa e acrescentar cenários à área de visualização.

No setor de códigos, é possível encontrar os mais diversos blocos de programação para construir, por meio da combinação deles, o programa. Esse setor está dividido em categorias para facilitar a busca de blocos específicos quando necessários.

- **Movimento**: blocos de programação que efetuam algum tipo de movimento do ator pelo cenário.
- **Aparência**: blocos que alteram a aparência do ator e permitem a aparição de balões de conversa/pensamento.
- **Som**: inserção e ajustes de som.
- **Eventos**: blocos que servem para encabeçar um conjunto de blocos de programação que devem ser executados quando determinado evento acontecer.
- **Controle**: blocos de condição e de repetição.
- **Sensores**: blocos que permitem a interação entre o usuário e a máquina por meio, principalmente, do teclado ou *mouse*.
- **Operadores**: blocos que realizam cálculos algébricos e lógicos.
- **Variáveis**: criação e modificação de variáveis que podem ser usadas ao longo do programa.
- **Meus blocos**: espaço para desenvolver novos blocos a serem usados no programa.

Para montar um programa, é necessário arrastar diferentes blocos para a área de programação, conectando-os como se fossem peças de um quebra-cabeça. A primeira peça deve ser um evento do tipo "quando" para explicar ao computador quando se deseja que a rotina seja executada. Note que são blocos que não podem ser conectados abaixo de nenhum outro, pois não há espaço para encaixe na parte superior deles.

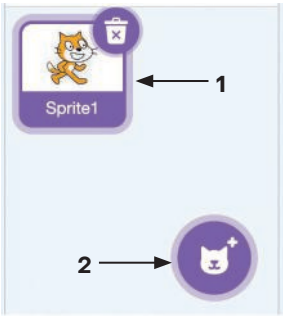
Vamos aprender a usar o *Scratch* construindo um programa que faz com que, toda vez que a bandeira verde for clicada, um desenho de pinguim caminhe até o centro da tela e se apresente dizendo o nome dele.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

O posicionamento do pinguim na janela depende de fatores como tamanho da tela em que se está usando o *Scratch* e o espaço que a janela ocupa. Para encontrá-lo com mais facilidade, procure-o por ordem alfabética. Mesmo com o *site* configurado para o idioma "Português Brasileiro", os nomes dos personagens disponíveis para o ator foram exibidos em inglês. Outros trechos do programa também aparecem em inglês em outros momentos; assim, auxilie os estudantes, se necessário.

1. O primeiro passo é excluir o ator criado automaticamente quando um novo arquivo é gerado.

2. Em seguida, é necessário adicionar o ator desejado (por exemplo, uma das opções de pinguim disponíveis).



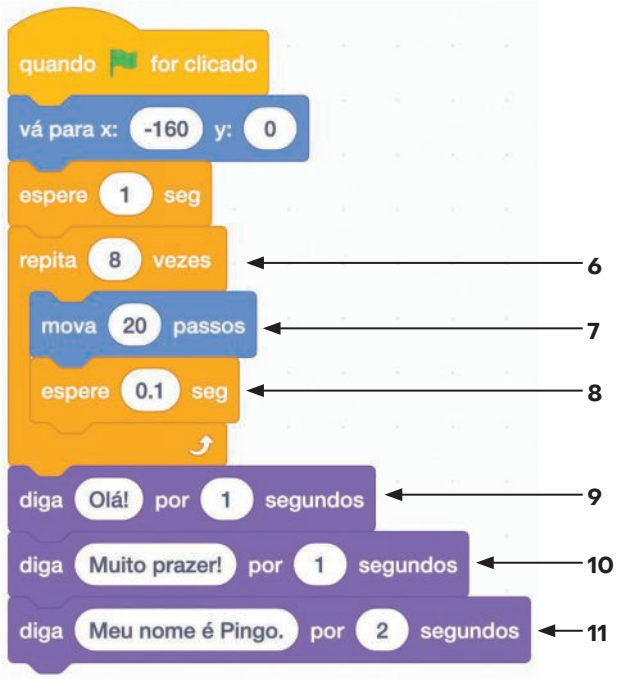
Ilustrações: Reprodução/Scratch

3. O próximo passo é arrastar, das opções de evento para a área destinada ao código, o bloco "quando for clicado", pois assim o programa saberá quando deve ser executado.

4. Para fornecer as coordenadas iniciais do pinguim, arrastar, das opções de movimento, o bloco "vá para *x*: ▨ *y*: ▨" e registrar nas lacunas **–160** e **0**, respectivamente. Para verificar a posição de início do ator, basta clicar na bandeira verde depois de adicionar esse bloco de movimento.

5. Das opções de controle, arrastar "espere ▨ seg" e registrar **1** para que seja possível processar a posição inicial do pinguim antes do início do movimento.

Ilustrações: Reprodução/Scratch



Reprodução/Scratch

6. Para acompanhar o movimento do ator, os comandos de mover e esperar devem ser repetidos uma série de vezes. Para isso, podemos usar um laço de repetição. Das opções de controle, é possível arrastar "repita ▨ vezes". Pode-se registrar **8**, pois a distância horizontal até o centro da tela é de 160 passos e, a cada interação, pediremos ao pinguim que se mova 20 passos.

7. Das opções de movimento, arrastar "mova ▨ passos", alocar dentro do laço de repetição e registrar **20**.

8. Das opções de controle, arrastar "espere ▨ seg", alocando-o abaixo do bloco "mova", e registrar **0.1** para que seja possível processar a mudança de posição do pinguim antes do próximo deslocamento.

9. Das opções de aparência, arrastar o bloco "diga ▨ por ▨ segundos" e registrar **Olá!** na primeira lacuna e **1** na segunda.

10. Das opções de aparência, arrastar o bloco "diga ▨ por ▨ segundos" e registrar **Muito prazer!** na primeira lacuna e **1** na segunda.

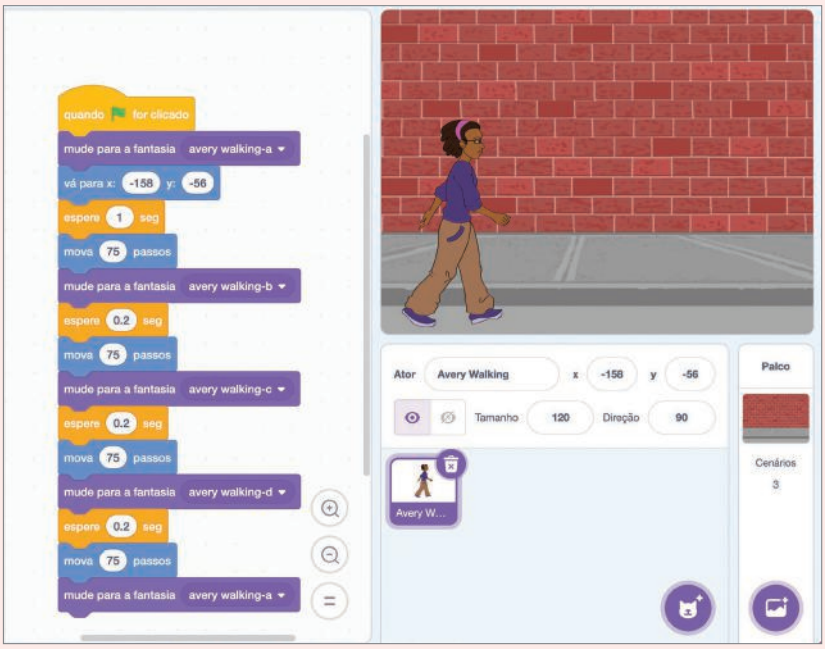
11. Das opções de aparência, arrastar o bloco "diga ▨ por ▨ segundos" e registrar **Meu nome é Pingo.** na primeira lacuna e **2** na segunda.

Observação

- Ao inserir um número decimal no *Scratch*, deve-se usar ponto em vez de vírgula para indicar as casas decimais.
- Há muitas maneiras distintas de desenvolver programas com a mesma finalidade da proposta apresentada. O programa indicado é apenas uma das possibilidades que podem atender aos requisitos básicos enunciados.

Atividades resolvidas

1. No programa desenvolvido no ambiente de programação do *Scratch*, uma personagem (ator) chamada Avery se desloca da extrema esquerda do cenário ($x = -158$ e $y = -56$) à extrema direita. Ao longo do trajeto, ela muda de "fantasia", o que significa que ela muda a expressão corporal para dar a sensação de que ela está caminhando. Sobre o programa desenvolvido, responda às perguntas a seguir.



Reprodução/Scratch

a) Quantas expressões corporais diferentes Avery assume entre o início e o fim do programa?

b) Quantos passos Avery dá para cruzar da extrema esquerda à extrema direita do cenário?

c) Qual é a posição em x e y que Avery atinge ao final da execução do programa? Considere que cada passo equivale a uma unidade de deslocamento no eixo x.

d) O que aconteceria ao executar o programa caso não houvesse nenhum dos blocos do tipo "espere ▨ seg"?

e) Se o programa fosse executado 2 vezes seguidas, Avery se deslocaria da extrema direita do cenário para fora dele, considerando que isso é possível? Justifique sua resposta com base em algum trecho do código do programa.

Solução:

a) 4 ("avery walking-a", "avery walking-b", "avery walking-c" e "avery walking-d").

b) Há 4 blocos que instruem Avery a se deslocar 75 passos para frente (direita da tela). Portanto, são 300 passos.

c) Avery começa na posição $x = -158$ e se desloca 300 unidades para a direita, terminando na posição $x = -158 + 300 = 142$. Como não há deslocamento no eixo y, a posição final será $x = 142$ e $y = -56$.

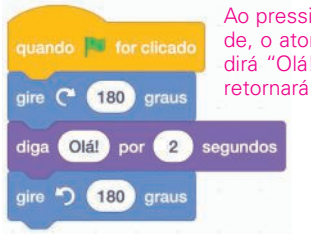
d) O programa seria executado muito rapidamente, fazendo com que Avery pulasse da posição inicial direto para a final, pois não seríamos capazes de processar os movimentos intermediários pela velocidade das mudanças.

e) Não é verdade, pois toda vez que o programa é iniciado, Avery deve voltar à posição $x = -158$ e $y = -56$, começando a trajetória sempre da extrema esquerda da tela.

1. Para cada um dos programas a seguir, descreva em seu caderno o que ocorrerá com o ator quando um usuário clicar na bandeira verde indicada.

Ilustrações: Reprodução/Scratch

a)

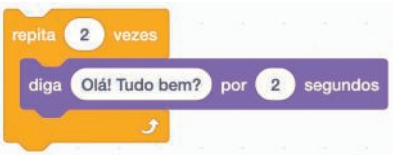


Ao pressionar o botão da bandeira verde, o ator virará de cabeça para baixo, dirá "Olá!" por 2 segundos, e, então, retornará à posição inicial.

b)

Ao pressionar o botão da bandeira verde, o ator se posicionará no centro da tela (0, 0) e, por 10 vezes seguidas, andará 10 passos para frente e aguardará 0,1 segundo antes do próximo movimento. Ao final da execução do programa, o ator estará posicionado no ponto de coordenadas (100, 0).

c)



Ao clicar no botão da bandeira verde, nada acontecerá com o ator, pois não há indicação de que o programa deve ser executado quando clicar na bandeira verde.

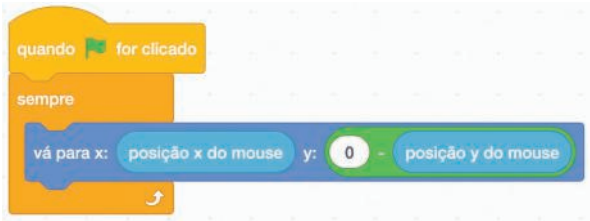
d)

Ao pressionar o botão da bandeira verde, o ator apenas se moverá para uma posição aleatória na tela, pois os 2 comandos intermediários se anulam e não é possível percebê-los porque são executados mais rapidamente do que nosso cérebro é capaz de processar.

2. Em um programa do *Scratch*, um ator deve ter seu movimento atrelado à posição do ponteiro do *mouse* na tela. Analise os programas e faça a correta associação entre os códigos **I**, **II**, **III** e **IV** e a explicação de como se dá a relação entre a posição do ator e a posição do cursor. Note que uma das explicações propostas sobrará, pois não há um código que pode ser associado a ela.

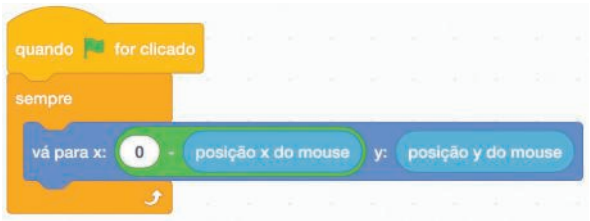
Ilustrações: Reprodução/Scratch

I.



II.

III.



IV.

2. d) Código **I**, pois a posição do ator sempre coincide com o valor de x e o oposto do valor de y do ponteiro do *mouse*, ou seja, está sempre na mesma posição horizontal do cursor, mas simétrico em relação ao eixo x.

e) Código **III**, pois a posição do ator sempre coincide com o oposto do valor de x e o valor de y do ponteiro do *mouse*, ou seja, está sempre na mesma posição vertical, mas simétrico em relação ao eixo y.

a) O ator acompanha a posição do ponteiro do *mouse*. Código **II**, pois a posição do ator sempre coincide com os mesmos valores de x e de y do ponteiro do *mouse*.

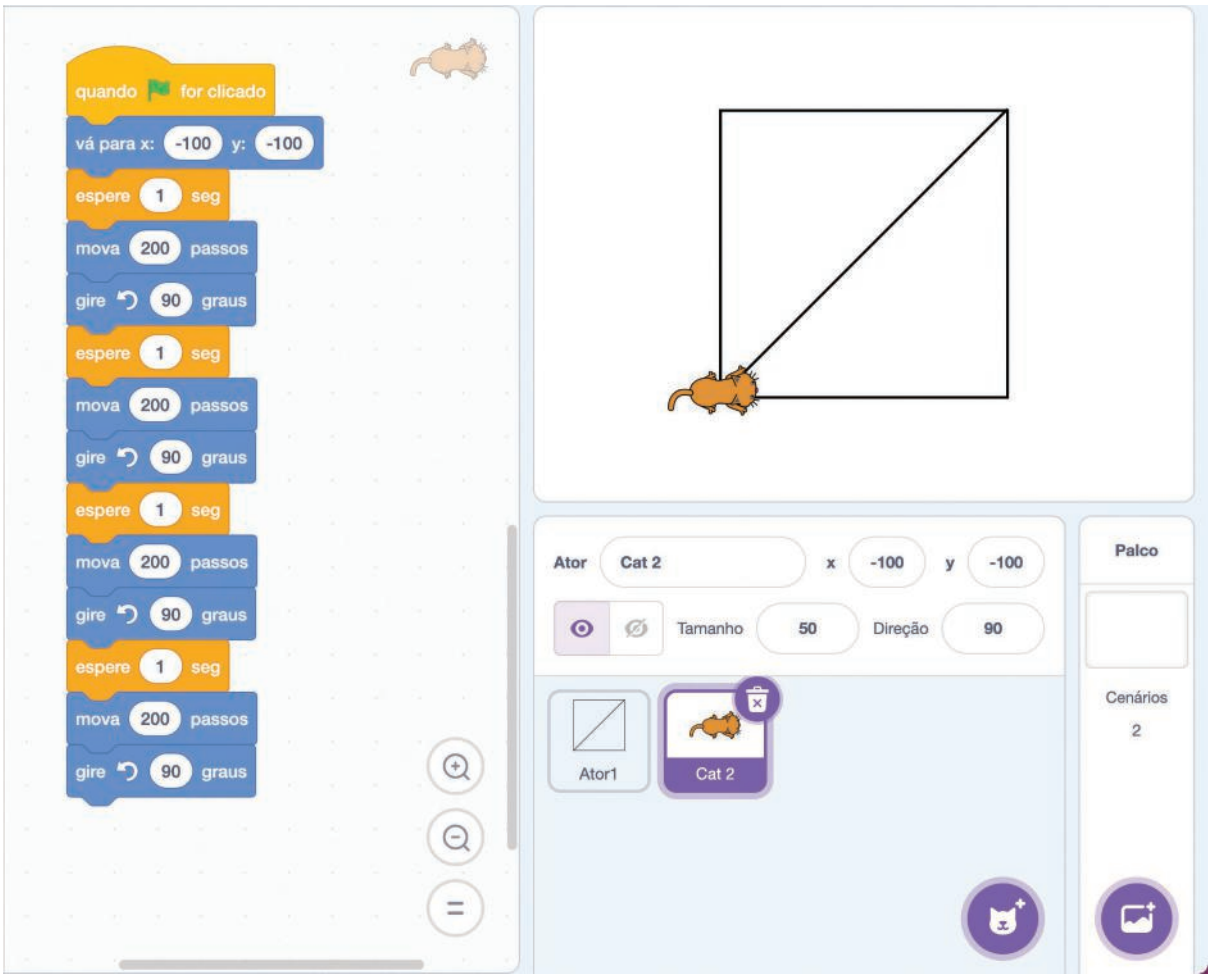
b) O ator estará sempre na posição simétrica ao ponteiro do *mouse* em relação à reta que representa a função de lei $f(x) = x$. Não há código que, ao ser executado, faz com que o ator realize esse tipo de movimento.

c) O ator estará sempre na posição simétrica ao ponteiro do *mouse* em relação à origem do plano (ponto de encontro entre os eixos x e y). Código **IV**, pois a posição do ator sempre coincide com o oposto do valor de x e o oposto do valor de y do ponteiro do *mouse*.

d) O ator estará sempre na posição simétrica ao ponteiro do *mouse* em relação ao eixo x.

e) O ator estará sempre na posição simétrica ao ponteiro do *mouse* em relação ao eixo y.

3. O programa a seguir faz com que um gato percorra o contorno do quadrado sobre o qual está localizado.



Reprodução/Scratch

a) Reescreva esse programa de modo que seja cumprida a mesma função, mas com a utilização de menos blocos de código. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Quantos passos o gato teria de dar, aproximadamente, para percorrer a diagonal destacada do quadrado? Para percorrer o lado do quadrado, o gato precisa dar 200 passos. Para a diagonal, portanto, o gato precisará dar $200\sqrt{2}$ passos, o que resulta em aproximadamente $200 \cdot 1{,}4$ passos = 280 passos.

c) Escreva um programa que faça com que o gato passe apenas uma vez pelos 4 lados do quadrado e pela diagonal desenhada. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

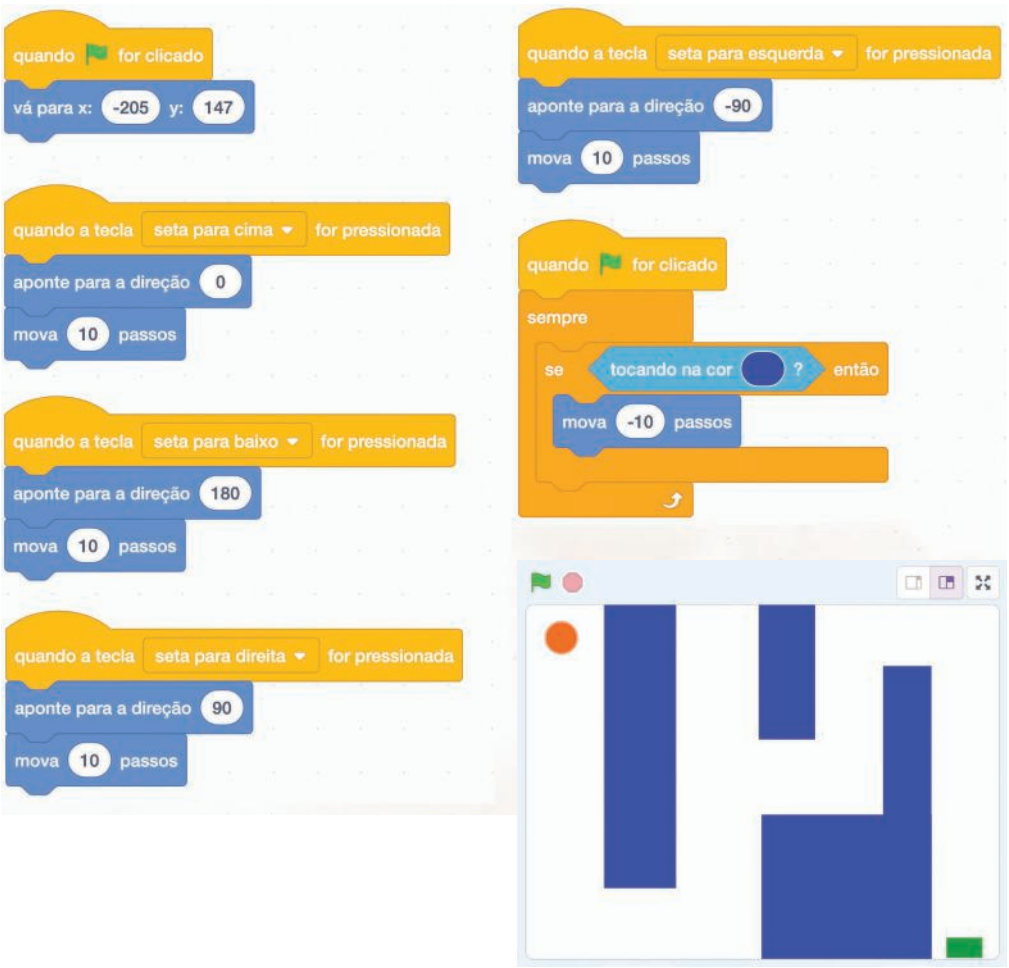
4. Ao final da coluna que apresenta as categorias de blocos de códigos, há um botão roxo que permite adicionar uma nova extensão. Clique nele e selecione a extensão "caneta", usada para o ator desenhar na tela. Os exemplos de respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Desenvolva um programa que faz com que o ator **use a caneta** enquanto se movimenta para desenhar na tela um quadrado cujo lado mede 80 passos.

b) Desenvolva um programa que faz com que o ator **use a caneta** enquanto se movimenta para desenhar na tela um pentágono regular cujo lado mede 80 passos.

c) Desenvolva um programa que faz com que o ator **use a caneta** enquanto se movimenta para desenhar na tela um decágono regular cujo lado mede 80 passos.

5. Uma versão traduzida de uma sugestão de jogo dada pela equipe do *Scratch* tem o seguinte código de comando da bola laranja:



Ilustrações: Reprodução/Scratch

Ao clicar na bandeira verde, o usuário pode comandar o movimento da bola usando as teclas direcionais do teclado.

a) Pela interpretação do código, qual é o comportamento da bola caso o usuário faça com que ela encoste na cor azul?

b) O código desenvolvido para o segundo ator, denominado gol, está descrito a seguir. A partir da análise desse código, responda: Qual é o objetivo do jogo proposto?

Reprodução/Scratch

a) O código indica que, a qualquer momento do jogo, se a bola laranja tocar na cor azul, ela deve andar –10 passos, ou seja, desfazer o movimento anterior, movendo-se 10 passos no sentido oposto dos últimos 10 passos dados.

b) De acordo com o código, o usuário vence quando o ator bola encosta no ator gol; ou seja, a bola laranja deve encostar na barra verde, sem poder passar através dos retângulos azuis.

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com os professores de Computação e de Língua Portuguesa, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Educação Digital e Linguagens e suas Tecnologias. Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

Criptografia

Ao longo da história, a humanidade se valeu da transmissão de mensagens secretas para que apenas remetente e destinatário pudessem acessar o conteúdo transmitido. Para isso, foram desenvolvidas diversas técnicas com o objetivo de transformar um texto na linguagem corrente, de conhecimento geral, em algo incompreensível a quase todos, exceto ao detentor da chave (conjunto de instruções para traduzir o texto de volta para a linguagem usual). Esse campo de estudo ficou conhecido como Criptografia, com primeiros registros de uso datando de 1900 a.C.

Lenscap Photography/Shutterstock

A máquina Enigma possibilitava a combinação de conexões elétricas e mecânicas para gerar a substituição de uma letra por outra de maneira que, a cada letra digitada, a substituição mude, só sendo possível decriptar a mensagem sabendo a configuração inicial da máquina.

Se havia pessoas tentando esconder informações, é porque havia outras tentando acessá-las. Isso é particularmente fato em situações de guerra, em que os comandos militares precisam ser transmitidos sem o conhecimento do inimigo. Como interceptar essas mensagens era algo relativamente comum, enviá-las criptografadas poderia ajudar a torná-las indecifráveis nas mãos erradas. A não ser que os criptoanalistas, pessoas responsáveis por tentar decifrar esses códigos, conseguissem atingir seus objetivos.

Na Segunda Guerra Mundial, o exército nazista e seus aliados usaram versões de uma máquina especializada em criar criptografias chamada Enigma. De tempos em tempos, as configurações da máquina eram trocadas, de modo que, mesmo se os criptoanalistas inimigos conseguissem desvendar o código, rapidamente a lógica se alteraria e seria necessário começar do zero a tentativa de tradução das mensagens seguintes.

Foi então que o matemático britânico Alan Turing (1912-1954) e sua equipe conseguiram construir uma versão mais robusta de uma máquina produzida alguns anos antes: a bomba eletromecânica. Essa versão possibilitou que as combinações usadas na Enigma fossem desvendadas, contribuindo para a derrota dos nazistas.

O desenvolvimento da computação foi importante para o avanço das técnicas de criptografia, a ponto de existirem estratégias que levariam diversos anos para serem quebradas mesmo por computadores com vasta capacidade de processamento de dados.

Isso possibilita que, nos dias de hoje, possamos enviar mensagens de texto criptografadas, criar e usar senhas de acesso pessoal a contas bancárias ou, até mesmo, realizar transações financeiras.

1. Durante a Segunda Guerra Mundial, os países que lutavam contra o exército nazista também precisavam criptografar suas mensagens. Pesquise sobre a criptografia Navajo e levante hipóteses sobre como computadores modernos poderiam ser usados para vencer essa criptografia.

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

2. Qual é a importância da criptografia para você na atualidade?

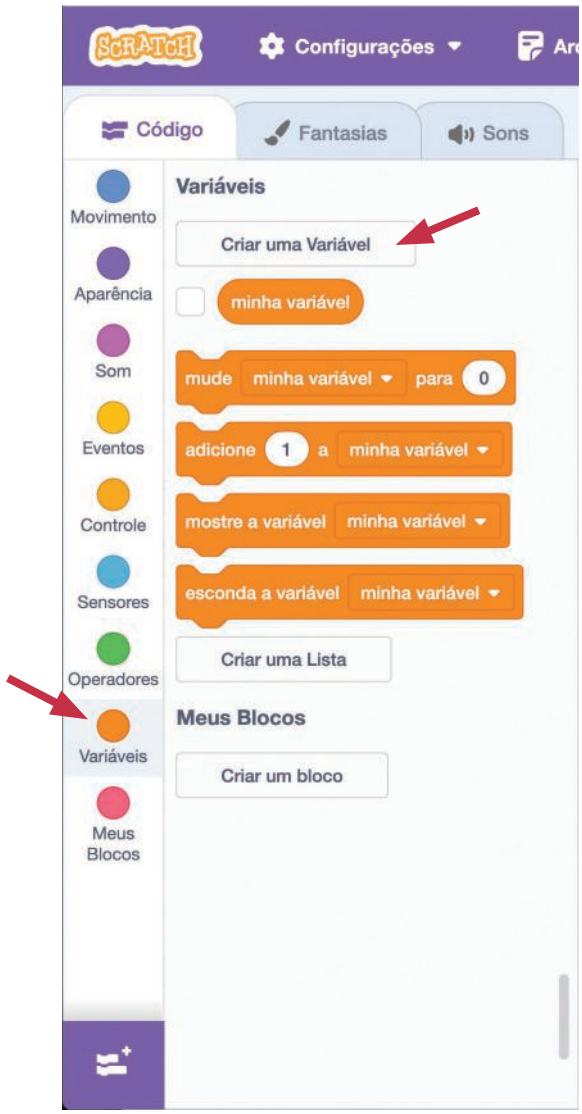
Exemplos de resposta: Proteção de senhas usadas na internet, privacidade na troca de mensagens, autenticação de documentos digitais, etc.

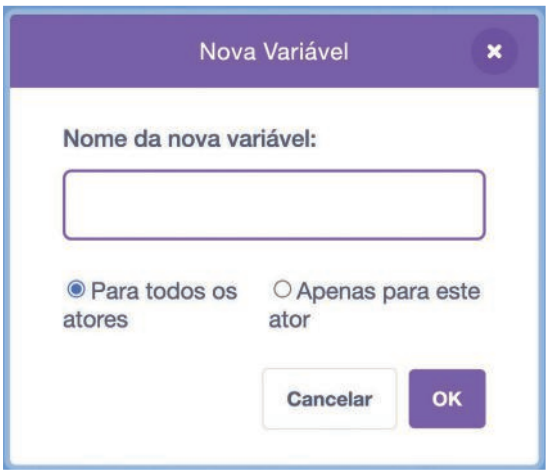
Implementando algoritmos interativos no *Scratch*

Além de oferecer programas que mudam a posição do ator, o *Scratch* possibilita o desenvolvimento de projetos que implementam um algoritmo que depende da inserção de algum dado por parte do usuário e que informa o resultado obtido após a execução da rotina.

Um exemplo é um programa que calcula o produto de 2 números inseridos pelo usuário. Considere a construção de uma solução para essa finalidade a seguir.

1. O primeiro passo é criar as variáveis utilizadas ao longo do programa. Para melhor organização do programa, podemos pensar em 3 variáveis: 2 que receberão os 2 números a serem multiplicados, e outra para armazenar o produto. Em variáveis, deve-se apertar o botão "Criar uma Variável", dar um nome de identificação e clicar em "OK". Repetir esse processo para as 3 variáveis a serem criadas: "num1", "num2" e "prod".





Ilustrações: Reprodução/Scratch

2. O próximo passo é inserir o bloco “quando for clicado”.

3. Das opções de sensores, arrastar o bloco “pergunte [Qual é o nome?] e espere” e registrar na lacuna “Qual é o primeiro fator da multiplicação?”. Esse bloco manterá o programa pausado até que o usuário insira o primeiro fator e pressione *Enter*.

4. Das opções de variáveis, arrastar o bloco “mude [minha variável] para [0]”, selecionar “num1” na lista de variáveis.

5. Das opções de sensores, arrastar “resposta” para a lacuna do bloco adicionado no passo anterior. Com esses 2 passos, o programa registrará a informação fornecida pelo usuário na variável “num1”.

6. Repetir os passos **3**, **4** e **5**, mas agora utilizando a variável “num2”.

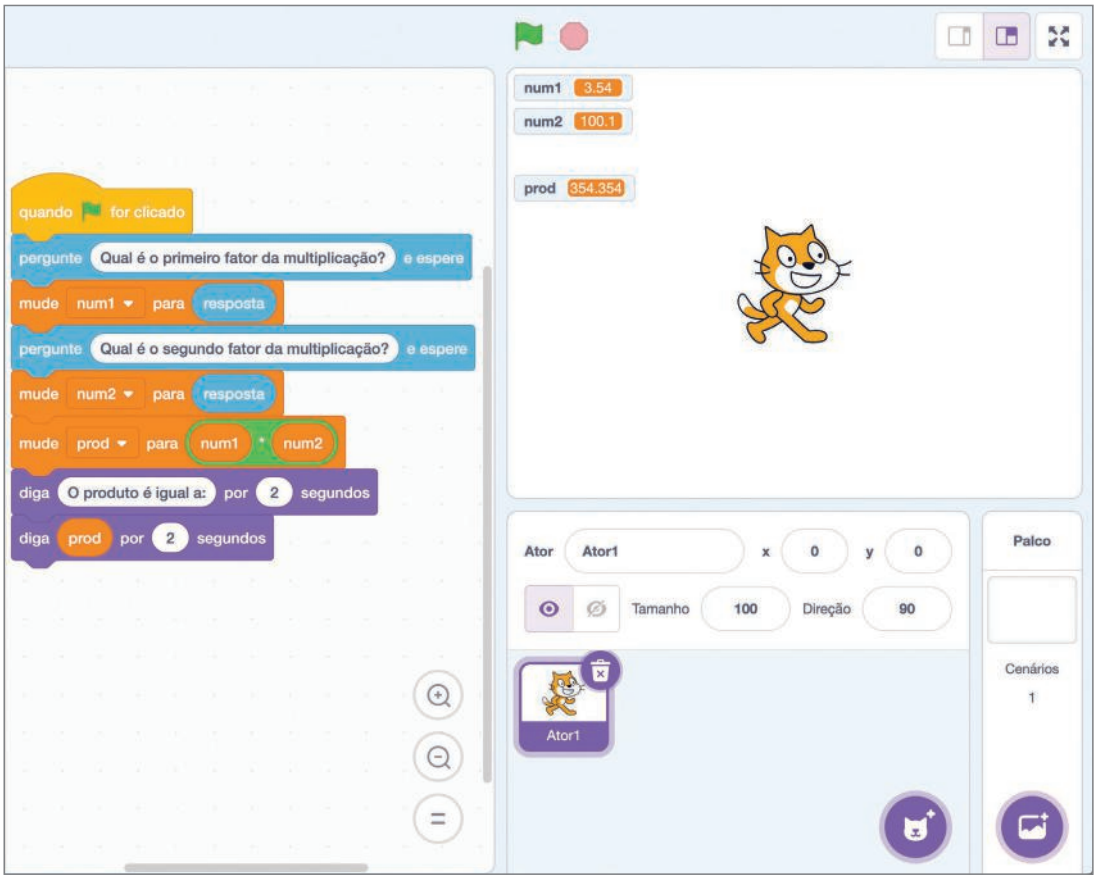
7. Das opções de variáveis, arrastar o bloco “mude [minha variável] para [0]”, selecionar “prod” na lista de variáveis.

8. Das opções de operadores, arrastar o bloco “ ▨ * ▨ ” para a lacuna do bloco adicionado no passo anterior.

9. Para as lacunas do bloco adicionado no passo anterior, arrastar as variáveis “num1” e “num2”.

10. Das opções de aparência, arrastar o bloco “diga ▨ por ▨ segundos” e registrar **O produto é igual a:** na primeira lacuna e **2** na segunda.

11. Arrastar mais um bloco “diga ▨ por ▨ segundos” e, então, arrastar o bloco “prod” para a primeira lacuna e registrar **2** na segunda.

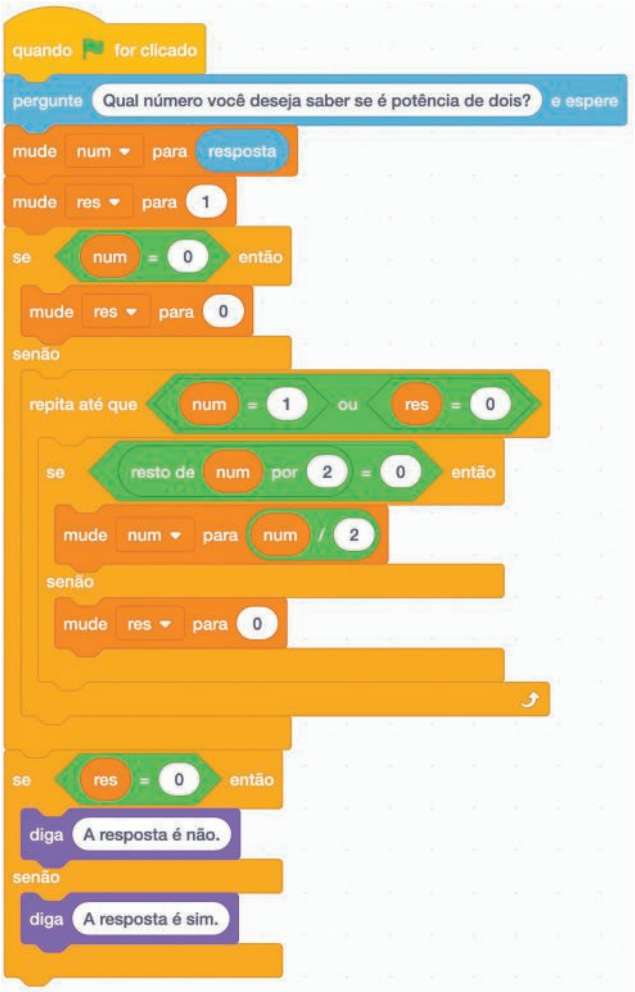


Ilustrações: Reprodução/Scratch

Podemos usar esses blocos e essas ferramentas para implementar em *Scratch* algoritmos apresentados em pseudocódigo. Tomando como exemplo o algoritmo que responde se um número é potência de 2.

```
1   Início
2
3   /* entradas */
4   Ler num
5   res = 1
6
7   /* processamento */
8   Se num = 0 então
9     res = 0
10  Senão
11    Enquanto num <> 1 e res = 1
12      Se num % 2 = 0 então
13        num = num / 2
14      Senão
15        res = 0
16  /* saídas */
17  Se res = 0 então
18    Escrever "A resposta é não."
19  Senão
20    Escrever "A resposta é sim."
21
22  Fim
```

Usando os blocos presentes nas opções já estudadas com o conhecimento de lógica formal, conseguimos traduzi-lo para a linguagem *Scratch*.



Reprodução/Scratch

Observação

Há uma série de outros blocos que podem ser utilizados no *Scratch* e que ainda não foram mencionados na teoria deste capítulo, mas alguns deles serão abordados nas próximas atividades. Se necessário, busque compreender a finalidade de cada tipo de bloco realizando testes dos programas propostos na própria ferramenta.

Atividades resolvidas

2. Desenvolva um programa que responde a uma pessoa, com menos de 50 anos de idade, quantos anos faltam para ela completar meio século de vida.

Solução:

Precisamos que o usuário insira a própria idade para, em seguida, calcularmos a diferença entre o número 50 e essa idade. Assim, precisamos de uma variável para armazenar a idade inserida pelo usuário, um comando de entrada que pergunte essa idade e um comando de saída para apresentar a diferença.

Um exemplo de código que atende a todos esses requisitos está indicado a seguir.

Reprodução/Scratch

ATIVIDADES

Não escreva no livro

6. Considerando o código desenvolvido para o ator padrão do *Scratch*, qual é a pergunta que esse programa responde?

O programa responde a uma pergunta relacionada à divisibilidade do número *num* por 10. Exemplos de respostas são: "O número *num* é divisível por 10?" ou "O número *num* é múltiplo de 10?".

Reprodução/Scratch

7. **Experimente** replicar no *Scratch* o código a seguir.

Reprodução/Scratch

a) Qual é a função do bloco "junte"?

Juntar em uma única fala do ator "A resposta é:" e o número do tamanho da palavra.

b) Qual é a resposta que esse programa fornece ao usuário?

Quantas letras tem a palavra que o usuário inseriu.

8. a) O programa repetiria a primeira letra do nome *x* vezes, sendo *x* a quantidade de caracteres do nome inserido pelo usuário.

b) O bloco "adicione 1 a *n*" precisaria estar logo abaixo de "diga letra n de nome por 1 segundos", pois assim, a cada repetição dentro do laço "repita", a letra seguinte seria anunciada.

8. O programa a seguir deveria fazer com que o ator soletrasse o nome inserido pelo usuário. No entanto, há um erro de construção.

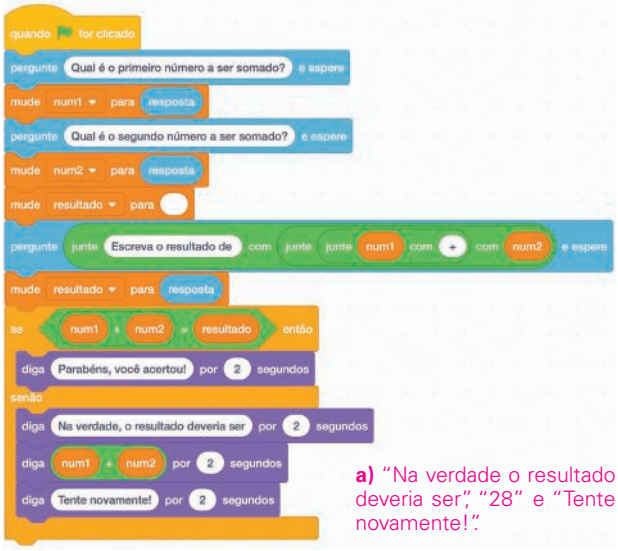
Reprodução/Scratch

a) Se você inserisse seu nome no programa do jeito que ele está codificado, quais seriam as falas do ator ao longo da execução?

b) O que pode ser alterado no código do programa para que ele cumpra a função como o esperado?

9. Uma irmã mais velha estava ajudando o irmão a aprender a realizar adição de 2 números e desenvolveu o seguinte programa:

Reprodução/Scratch



a) "Na verdade o resultado deveria ser", "28" e "Tente novamente!".

a) Quais são exatamente as falas do ator exibidas caso o irmão insira os números 19, 9 e 27 para responder, respectivamente, a cada uma das perguntas iniciais?

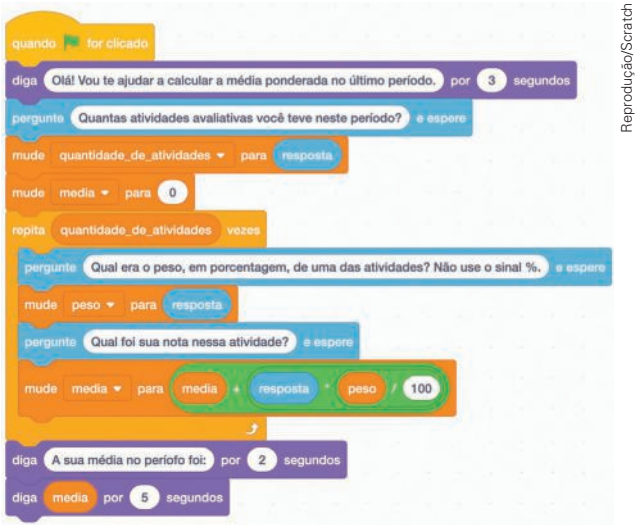
b) Quais são exatamente as falas do ator exibidas caso o irmão insira os números 9, –15 e –6 para responder, respectivamente, a cada uma das perguntas iniciais?

"Parabéns, você acertou!"

c) A irmã decidiu incrementar o programa para ele só finalizar caso a adição seja realizada corretamente. Proponha um modo de como ela poderia implementar essa nova funcionalidade. Resposta pessoal.

10. Uma organização estudantil desenvolveu o programa a seguir para que o corpo discente pudesse utilizá-lo.

Reprodução/Scratch



a) Para que serve o programa desenvolvido?
Calcular a média das notas de uma disciplina.

b) Para cada pergunta que o ator fez ao usuário, uma estudante respondeu nesta ordem: 3; 20; 8; 40; 6; 40; 7. Qual foi o resultado anunciado pelo ator?
"A sua média no período foi: 6,8"

c) Para cada pergunta que o ator fez ao usuário, um estudante respondeu nesta ordem: 2; 60; 7; 20; 8. Qual foi o resultado anunciado pelo ator e qual é o problema nesta situação? "A sua média no período foi: 5,8"; a soma do peso das atividades não deu 100%.

d) O que poderia ser ajustado no programa para evitar o tipo de erro cometido na última situação? O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

11. Um jogo de disputa é conhecido no Brasil como "Par ou ímpar". Para esse jogo, são necessárias 2 pessoas, sendo que uma escolherá par e, a outra, ímpar. Ao mesmo tempo, as 2 pessoas apresentarão ao adversário uma mão com 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos esticados. Adiciona-se o total de dedos esticados pelos 2 adversários e conclui-se se esse valor é par ou ímpar, de modo que o vencedor será aquele que escolheu a classificação correspondente ao resultado. Considerando esse jogo, resolva os itens a seguir.

11. Os exemplos de resposta encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

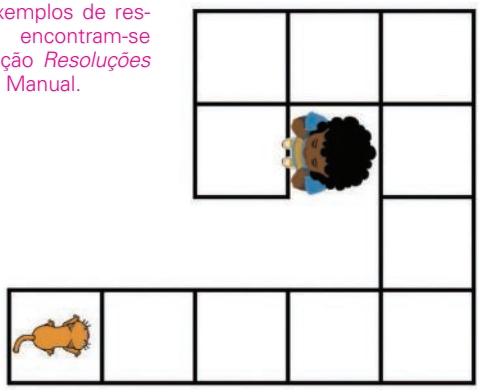
a) Desenvolva um fluxograma que represente o processo de verificação se um número natural inserido pelo usuário é par ou ímpar.

b) **Experimente** desenvolver um programa no *Scratch* que implemente a rotina proposta pelo fluxograma construído no item anterior.

c) **Experimente** desenvolver um programa no *Scratch* que simula um jogo de par ou ímpar entre um usuário, que escolhe sempre par, e o computador, que sempre escolhe ímpar. Pergunte o número que o usuário deseja escolher; para escolher o número do computador, use o bloco "número aleatório entre ▨ e ▨", da categoria "Operadores".

12. Em um jogo, o objetivo é desenvolver um código de programação que leve um gato a ficar de frente com a própria tutora, usando para isso os blocos de movimento "mova 50 passos" e "gire [no sentido anti-horário] 90 graus", além de eventualmente outros blocos das demais categorias. Sabendo que, a cada 50 passos, o gato se desloca para o quadrado seguinte, resolva os itens a seguir.

Os exemplos de resposta encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.



Reprodução/Scratch

a) Desenvolva um programa que leve o gato até a tutora dele utilizando apenas os 2 blocos de movimento citados no enunciado, além do bloco de inicialização da execução do programa.

b) Desenvolva um programa que leve o gato até a tutora dele utilizando apenas uma vez cada um dos 2 blocos de movimento referenciados no enunciado, além do bloco de inicialização da execução do programa e outros blocos de demais categorias que não movimento.

13. O algoritmo a seguir foi desenvolvido para responder à pergunta "O número natural diferente de zero *num* é uma potência de 3?".

```
1   Início
2
3   /* entradas */
4   Ler num
5   res = 1
6
7   /* processamento */
8   Enquanto num <> 1 e res == 1
9     Se num % 3 == 0 então
10      num = num / 3
11    Senão
12      res = 0
13
14  /* saídas */
15  Se res == 0 então
16    Escrever "A resposta é não."
17  Senão
18    Escrever "A resposta é sim."
19
20  Fim
```

a) Ao usar como laço de repetição o comando "enquanto", as ações desse laço serão executadas enquanto a condição estabelecida for verdadeira. No *Scratch*, o laço de repetição disponível é o "repita até que ▨" e ele tem funcionamento oposto ao "enquanto". Isso porque o código do laço será executado enquanto a condição estabelecida for falsa, interrompendo a execução apenas quando ela se tornar verdadeira. Qual, portanto, seria a condição do laço de repetição para usá-la na estrutura "repita até que ▨"?

b) **Experimente** desenvolver e testar o código de todo o programa no *Scratch*.

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

13 . a) A condição deve ser a negação da condição do laço "enquanto": "Repita até que *num* == 1 ou *res* <> 1".

VIRALIZE!

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

Bolhas digitais

Diversos estudos a respeito de bolhas digitais e dos possíveis impactos positivos e negativos à sociedade têm sido desenvolvidos. Leia o texto a seguir a respeito de uma pesquisa sobre esse tema. Comente com os estudantes que a pesquisa científica citada no texto foi elaborada com base em revisões bibliográficas de diferentes teóricos e apresenta variados argumentos a respeito do tema.

Você já teve contato com a expressão **bolhas digitais**, que dá nome a esta seção? Sabe o que ela significa?

Apesar de ser uma expressão relativamente nova e associada às interações *on-line*, sobretudo em redes sociais, o conceito de bolha está associado a quaisquer situações nas quais pessoas de determinado grupo são expostas apenas a conteúdos e opiniões que confirmam aquilo em que já acreditavam. Isso gera um ambiente que pode isolar as pessoas do contato com diferentes realidades, desfavorecer o exercício intelectual, colaborar para polarizações e até reforçar estigmas e preconceitos.

Para pesquisador, bolhas digitais interferem na comunicação democrática

[...]

As redes sociais e a comunicação na era digital apresentam impactos ambivalentes: enquanto pesquisadores apontam para seus desdobramentos negativos, outros reforçam suas qualidades. A fim de explorar quais são os seus efeitos, o pesquisador Emerson Palmieri, da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas (FFLCH) da USP, realizou um estudo sobre a comunicação no espaço digital, bolhas digitais e contingência. [...]

Neste sentido, as bolhas digitais se assemelham a uma câmara de eco: no ambiente digital, as ideias são difundidas apenas entre pessoas que detêm linhas de pensamento parecidas. "Elas são *loopings* comunicativos, que são criados pela repercussão de um mesmo tema ou conteúdo de um grupo", destaca Palmieri. Esse ambiente gera uma falsa ideia de debate multiplural, já que a diversidade de pensamentos é inexistente – os usuários apenas estão interagindo com ideologias alinhadas a suas visões. De acordo com ele, esse cenário contribui para o empobrecimento do ideal democrático.

A conversa sobre bolhas digitais favorece o trabalho com o conceito de pós-verdade, presente nas discussões da atualidade. Se houver interesse e disponibilidade, proponha aos estudantes que pesquisem casos em que uma informação falsa, porém muito presente em certas bolhas digitais, foi tomada como verdadeira, ocasionando um problema de ordem pública. Promova uma conversa sobre os perigos de não estar aberto a ouvir pessoas com posicionamentos diferentes.

[...]

Palmieri buscou investigar essas diferentes perspectivas sobre as redes sociais e seus algoritmos, observando o caráter ambivalente da comunicação digital. "Como ponto positivo, é possível produzir conteúdo direcionado para o usuário, como o algoritmo [de um aplicativo de *streaming*] te recomendando séries parecidas com as que você acabou de assistir. Por outro lado, temos [a possibilidade de] utilização de dados [indevidamente] para fazer publicidade direcionada", diz. [...]

O pesquisador conclui que não existem efeitos unilaterais da comunicação no ambiente digital. Ele destaca a complexidade do tema e reforça a necessidade de mais pesquisas que explorem o assunto. Sobre perspectivas futuras, o pesquisador almeja estudar duas hipóteses: a preexistência das bolhas antes do surgimento das redes sociais e a criação de bolhas baseada justamente no contato com ideias diferentes – a diversidade de conteúdo não seria necessariamente o que causa o isolamento digital. "Essa exposição de argumentos de cada um dos lados do debate é importante para mostrar como o tema está hoje. A principal contribuição de minha pesquisa é a interpretação teórica desses dados, que ainda é muito escassa nesse campo", finaliza.

ALMEIDA, Camilla. Para pesquisador, bolhas digitais interferem na comunicação democrática. *Jornal da USP*, São Paulo, 25 maio 2023. Disponível em: https://tedit.net/zrg4sq. Acesso em: 4 ago. 2024.

Troque ideias com os colegas sobre as questões a seguir.

1. Como você explicaria a alguém o que é um algoritmo que favorece a construção de bolhas digitais?

1. Exemplo de resposta: É um algoritmo projetado para mostrar ao usuário cada vez mais conteúdos e opiniões relacionados àqueles com os quais ele costuma interagir, mantendo-o em uma bolha de informações.

2. Explique uma possível vantagem e uma possível desvantagem para usuários que interagem em redes sociais que aplicam algoritmos desse tipo.

2. Exemplo de resposta: Uma possível vantagem é o usuário ter dicas personalizadas de outros conteúdos que provavelmente o interessariam; uma possível desvantagem é o usuário ter uma dificuldade maior para consumir conteúdos diferentes, obter informações de ideias e visões de mundo distintas das dele ou interagir com outras opiniões diferentes da própria.

3. Você tem acesso a mídias sociais ou aplicativos de *streaming*? Já teve a sensação de que sempre recebe conteúdos ou sugestões de uma mesma categoria? Com o apoio de um familiar ou responsável, acesse a uma dessas mídias sociais ou aplicativos de *streaming* que você ou ele costuma usar e tente anotar quais são os 5 temas ou categorias de filme/música que mais aparecem para vocês. Essas sugestões parecem refletir uma possível bolha considerando hábitos e gostos do usuário dessa conta? Respostas pessoais.

metamorworks/Shutterstock

PARA FUNDAMENTAR SABERES

1. **(Uesb-BA)** Com a chegada da Covid-19, muito se comentou nas redes sociais quanto ao combate a essa doença. No âmbito da Lógica Matemática, [indique no caderno] a alternativa que apresenta uma proposição lógica. Alternativa **c**.

a) Duas propostas: hidroxicloroquina ou vacina.

b) Por que tomar a vacina?

c) Não basta tomar somente a primeira dose, é preciso tomar as doses de reforço.

d) Vacina para todos!

e) Pais, vacinem seus filhos.

2. **(Unicamp-SP)** Todo final de semana, as amigas Ana, Bruna e Carol se encontram em um parque para andar de bicicleta ou de patins. Nesta brincadeira, a escolha entre patins e bicicleta é feita usando a seguinte regra:

Se Ana anda de patins, então Carol também anda de patins. Bruna anda de patins apenas quando Carol anda de bicicleta.

Sabendo que neste final de semana Carol andou de patins, então é necessariamente verdade que: Alternativa **d**.

a) Ana andou de patins.

b) Ana não andou de patins.

c) Bruna andou de patins.

d) Bruna não andou de patins.

3. **(Uneb-BA)** Considerando-se que os operadores lógicos podem ter diversos níveis de complexidade e também diversas tabelas-verdade, é correto afirmar: Alternativa **b**.

a) se os valores lógicos de A, B e C na expressão [A ou (B e C)] são, respectivamente, verdadeiro, falso e falso, então o valor lógico dessa expressão é falso.

b) se os valores lógicos de A, B e C na expressão (A e B e C) são, respectivamente, falso, falso e verdadeiro, então o valor lógico dessa expressão é falso.

c) se os valores lógicos de A, B e C na expressão [A ou (B ou C)] são, respectivamente, verdadeiro, falso e falso, então o valor lógico dessa expressão é falso.

d) se os valores lógicos de A, B e C na expressão (A ou B ou C) são, respectivamente, falso, falso e falso, então o valor lógico dessa expressão é verdadeiro.

e) se os valores lógicos de A, B e C na expressão (A e B e C) são, respectivamente, falso, verdadeiro e verdadeiro, então o valor lógico dessa expressão é verdadeiro.

4. **(Uneb-BA)** [Indique no caderno] a alternativa que apresenta uma proposição logicamente falsa. Alternativa **b**.

a) $3 > 1$ ou $3 = 1$.

b) Todo número elevado a zero é igual a 1 e $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$.

c) $x^2 > 0$, para todo x real $\Rightarrow (-2)^2 > 0$.

d) $|x| > 0$ para todo real x real $\Rightarrow |-4| = |4|$.

e) mdc(3, 6) = 1 $\Leftrightarrow$ 4 é um número primo.

5. **(Enem)** Cada número que identifica uma agência bancária tem 4 dígitos: N_1, N_2, N_3, N_4 mais um dígito verificador N_5.

N_1	N_2	N_3	N_4	-	N_5

Todos esses dígitos são números naturais pertencentes ao conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Para a determinação de N_5, primeiramente multiplica-se ordenadamente os 4 primeiros dígitos do número da agência por 5, 4, 3 e 2, respectivamente, somam-se os resultados e obtém-se $S = 5N_1 + 4N_2 + 3N_3 + 2N_4$. Posteriormente, encontra-se o resto da divisão de S por 11, denotando por R esse resto. Dessa forma, N_5 é a diferença $11 - R$. Considere o número de uma agência bancária cujos 4 primeiros dígitos são 0100. Qual é o dígito verificador N_5 dessa agência bancária?

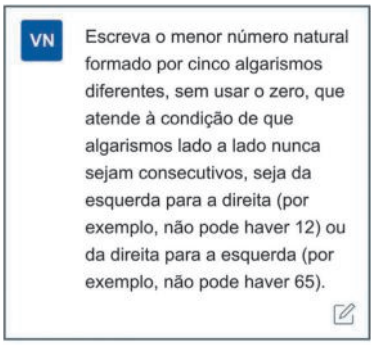
a) 0 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 9

Calculando S: $S = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 4$. O resto da divisão de 4 por 11 é 4, então $R = 4$. Assim: $N_5 = 11 - 4 = 7$. Alternativa **c**.

Não escreva no livro

6. De acordo com o pedido, não poderiam aparecer os algarismos consecutivos da direita para a esquerda, como em 32. Alternativa **d**.

6. (Unesp-SP) [Existem ferramentas computacionais] de inteligência artificial que, entre outras aplicações, [podem] tentar resolver alguns problemas matemáticos. O problema matemático a seguir foi submetido [a uma delas].



Reprodução/Unesp, 2024.

(https://chat.openai.com. Adaptado.)

A ferramenta apresentou como solução do problema o número 13246, o que não está correto. Considerando que essa solução incorreta tenha relação com uma leitura imprecisa do texto [pela ferramenta], tal imprecisão deve-se ao fato de a ferramenta ter ignorado:

a) a condição de que os algarismos sejam distintos.

b) a forma imperativa do verbo "escrever".

c) o trecho "sem usar o zero".

d) o trecho "da direita para a esquerda".

e) o trecho "da esquerda para a direita".

7. (FMJ-SP) Em muitas linguagens de programação, para se criar uma variável, basta digitar o nome da variável e atribuir um valor a ela usando o sinal de igual. Por exemplo, o comando $x = 2$ cria uma variável x cujo valor é 2. Para alterar o valor da variável, podemos atribuir um novo valor a ela, que pode ser o resultado de uma operação envolvendo a própria variável. Verifique o seguinte exemplo de código:

```
res = 0; // cria a variável res com o valor zero
res = 5; // altera o valor da variável res para 5
res = res + 2; // altera o valor de res para 5 + 2, ou seja, para 7
res = res * 2; // altera o valor de res para 7 * 2, ou seja, para 14
```

Considere agora o seguinte código escrito em linguagem natural, observando que o símbolo * significa multiplicação:

```
res = 1;
res = 3 * res;
execute todo o código entre chaves, repetidamente,
até que o valor da variável res seja maior do que 20
{
res = res + 1;
res = 2 * res;
}
res = res − 5;
```

Após a execução desse código, o valor da variável *res* é: Alternativa **b**.

a) 25. **c)** 15. **e)** 38.

b) 33. **d)** 16.

Nesta Unidade, estudamos conceitos básicos da lógica formal, retomamos e aprofundamos aplicações dos algoritmos e fluxogramas, além de aprendermos a projetar pequenos programas por meio do *Scratch*. Sobre esses temas, reflita considerando as questões a seguir. Respostas pessoais.

1. Consigo entender o que são proposições e avaliar se são verdadeiras ou falsas quando combinadas por meio de conectivos lógicos?
2. Sei construir e interpretar um fluxograma, usando corretamente os elementos gráficos?
3. Sei traduzir algoritmos e fluxogramas em pseudocódigos?
4. Consigo interpretar um programa construído no *Scratch*? Sei construir um programa nessa ferramenta por meio de um algoritmo ou fluxograma previamente construído?
5. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
6. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo contribuindo nos debates durante as aulas e exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

Unidade 4 COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Sugerimos que esta abertura de Unidade seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Placas veiculares padrão Mercosul: o que mudou?

Durante anos, as placas de identificação veicular no Brasil eram sequências compostas de 3 letras e 4 algarismos. Ainda há muitos veículos com esse formato de identificação, pois entrou em vigor somente em 2020 o novo padrão Mercosul de placas veiculares.

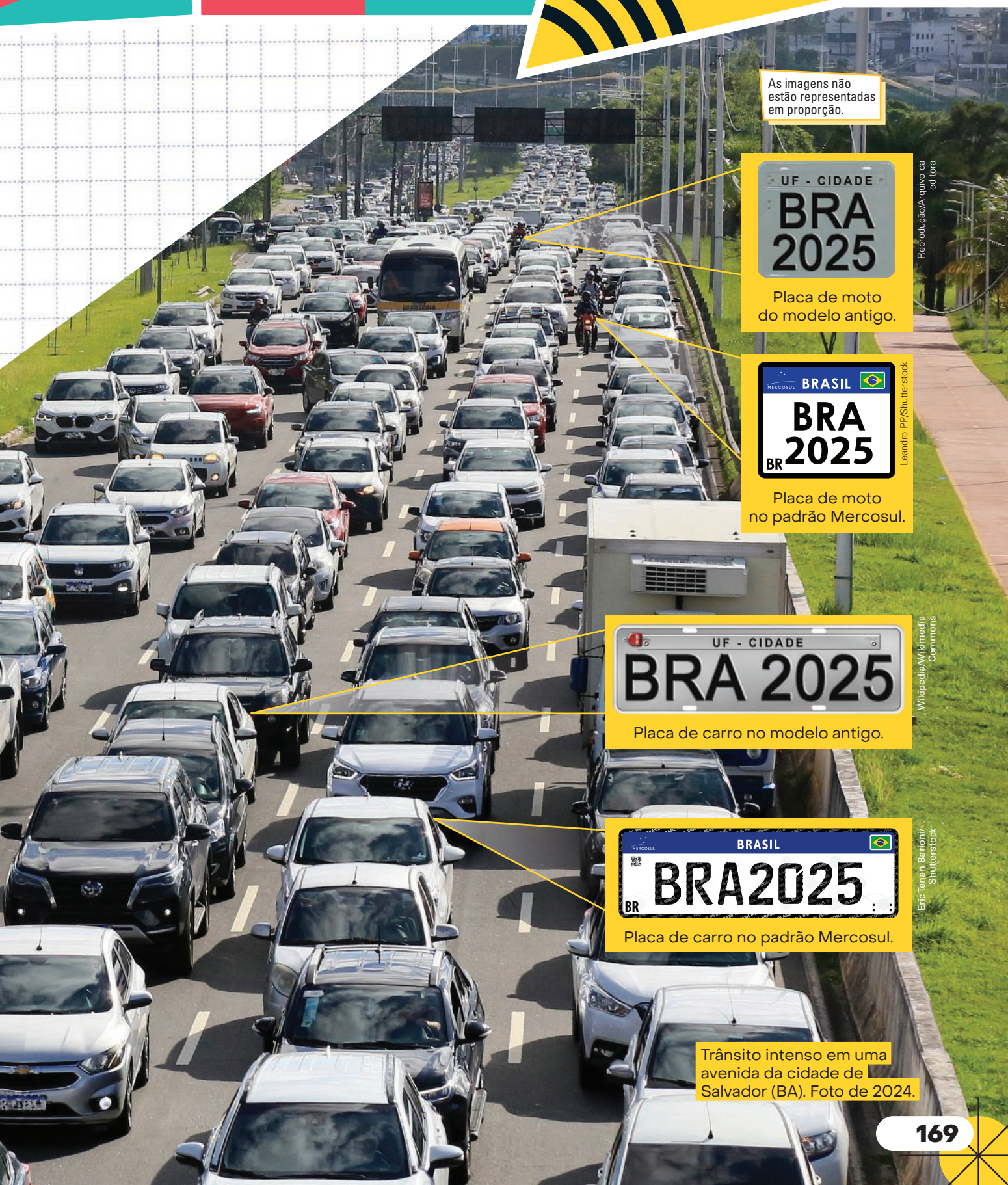
A nova placa padrão Mercosul apresenta o fundo branco e uma faixa azul na parte superior, com o nome Brasil ao centro e a bandeira do país à direita. A simbologia do Mercosul aparece na ponta esquerda da mesma faixa. Logo abaixo, vem o *QR Code* e, na área de fundo branco, a sequência de identificação com um novo padrão, na seguinte ordem: 3 letras, 1 número, 1 letra e 2 números.

OLIVEIRA, Joseane. Esclareça suas dúvidas sobre a placa padrão Mercosul. *Departamento de Trânsito do Governo do Estado do Ceará*, Fortaleza, 13 mar. 2020. Disponível em: https://tedit.net/n16kxc. Acesso em: 30 jul. 2024.

Não escreva no livro

1. O que é o Mercosul? As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
2. Qual seria uma possível função do *QR Code* na placa?
3. Considerando que existem 10 algarismos de 0 a 9 e 26 letras no alfabeto de A a Z), determine o número de placas distintas que podem ser formadas no padrão Mercosul. Em seguida, determine quantas delas são formadas por caracteres distintos, isto é, sem repetição de letras e algarismos.

Joa Souza/Shutterstock



As imagens não estão representadas em proporção.

Placa de moto do modelo antigo.

Reprodução/Arquivo da editora

Placa de moto no padrão Mercosul.

Leandro PP/Shutterstock

Placa de carro no modelo antigo.

Wikipedia/Wikimedia Commons

Placa de carro no padrão Mercosul.

Eric Tenen Barioni/Shutterstock

Trânsito intenso em uma avenida da cidade de Salvador (BA). Foto de 2024.

capítulo

7 Análise combinatória

Princípio fundamental da contagem

Considere as seguintes situações-problema.

- De quantos modos distintos 8 pessoas podem se sentar lado a lado em uma fila de cadeiras em um cinema?
- De quantas maneiras podemos combinar 5 blusas com 2 calças?
- Qual é o número de sequências possíveis para cara ou coroa quando uma moeda é lançada 3 vezes?
- De quantos modos distintos podemos formar uma comissão de 3 professores, escolhidos dentre os 20 que lecionam no Ensino Médio de uma escola?
- De quantas maneiras diferentes podemos comprar 4 latas de suco em um mercado que só vende 3 sabores de suco?

Todas as situações apresentadas referem-se a **problemas de contagem**.

A **Análise combinatória** é a área da Matemática que desenvolve técnicas e métodos de contagem que nos permitem resolver essas e outras questões.

Acompanhe a resolução de alguns problemas de contagem a seguir.

Problema 1: Em um quiosque de praia no Rio de Janeiro, o combinado de sanduíche natural e suco custa R$ 35,00.

Para esse combinado, há 4 opções de recheio para o sanduíche (frango, atum, peito de peru e queijo branco) e 3 opções de suco (laranja, uva e morango).

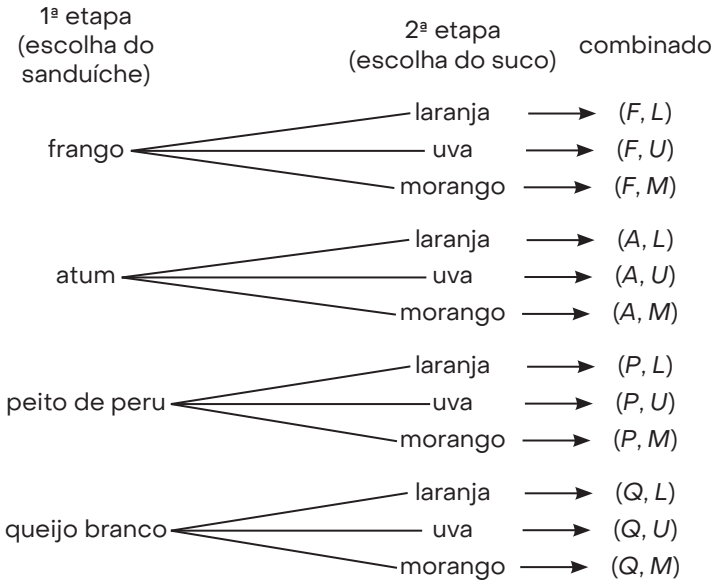
De quantas maneiras distintas uma pessoa pode escolher o combinado dela?

- Primeiro, a pessoa deverá optar pelo recheio do sanduíche. Há 4 opções: frango (*F*), atum (*A*), peito de peru (*P*) e queijo branco (*Q*).
- Para cada uma das possibilidades anteriores, a escolha do suco poderá ser feita de 3 maneiras: laranja (*L*), uva (*U*) ou morango (*M*).

A representação dessas possibilidades pode ser feita por meio de um diagrama sequencial conhecido como **diagrama de árvore de possibilidades** ou, simplesmente, **diagrama de árvore**.

Quiosque na praia de Ipanema, no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2022.

Ian Dagnall/Alamy/Fotoarena

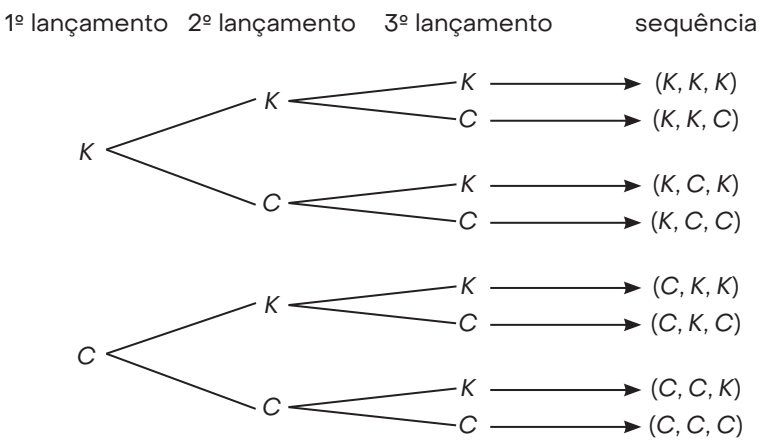


Note que cada combinado consta de um **par ordenado** (x, y), em que $x \in \{F, A, P, Q\}$ e $y \in \{L, U, M\}$. Assim, o número de possibilidades é $4 \cdot 3 = 12$.

Problema 2: Uma moeda será lançada 3 vezes sucessivamente. Quais são as sequências possíveis de faces obtidas nesses lançamentos? Vamos representar cara por K e coroa por C. Há 3 etapas (lançamentos) a serem analisadas:

- O 1º lançamento poderá resultar em cara ou coroa.
- Depois do resultado obtido na primeira vez que a moeda for lançada, o 2º lançamento poderá resultar em cara ou coroa.
- Depois de cada um dos resultados anteriores, o 3º lançamento poderá resultar em cara ou coroa.

Vamos representar essas possibilidades no diagrama a seguir.



Cada sequência obtida é uma **tripla ordenada** (ou terna) de faces (f_1, f_2, f_3), em que $f_1 \in \{K, C\}$, $f_2 \in \{K, C\}$ e $f_3 \in \{K, C\}$.

Logo, o número de sequências possíveis é $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Dica

O Jogo de dados de Mozart

O vídeo faz uma demonstração de um jogo que associa compassos musicais a resultados do lançamento de um dado e, assim, cria minuetos (tipo de música popular na época em que Mozart viveu).

Disponível em: https://tedit.net/pmdvyl (acesso em: 27 jul. 2024).

Lançamento de moeda.

cunaplus/ Shutterstock

Podcast

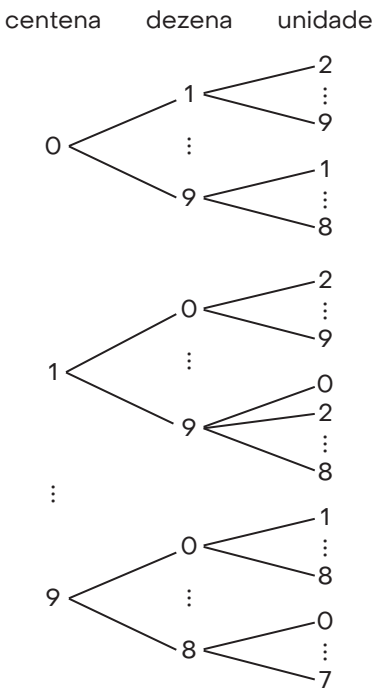
Transcrição de áudio

Giuliano Del Moretto/Shutterstock

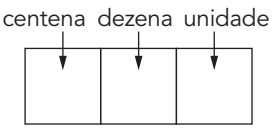
Cadeado de mala com código de 3 algarismos.

Problema 3: Leila se esqueceu da senha de 3 algarismos utilizada para abrir o cadeado da mala de viagem dela. Ela só lembra que escolhera algarismos distintos entre si. Na pior das hipóteses, quantas tentativas ela deverá fazer para abrir a mala?

Representar todas as possibilidades no diagrama de árvore é impensável, mas cabe um esboço para auxiliar na compreensão.



Assim, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Para a escolha do algarismo das centenas: 10 opções (qualquer algarismo de 0 a 9).
- Para a escolha do algarismo das dezenas, a partir de cada escolha anterior: 9 opções, uma vez que o algarismo já escolhido para a centena não pode se repetir.
- Feitas as 2 escolhas anteriores, há 8 opções distintas para a escolha do algarismo das unidades.

O diagrama representado anteriormente, ainda que parcial, permite visualizar a "estrutura" da multiplicação: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

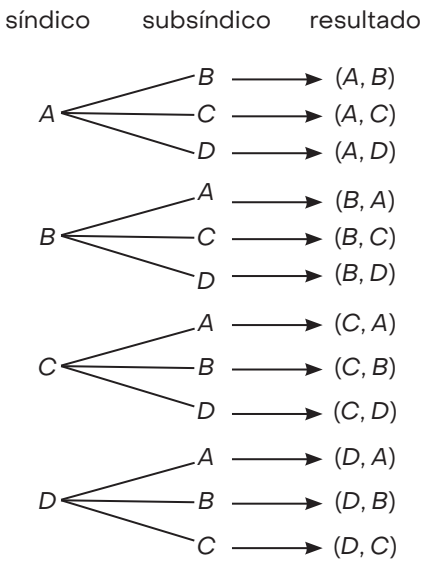
Assim, na pior das hipóteses Leila deverá fazer 720 tentativas para abrir a mala.

Problema 4: Em uma reunião de um condomínio residencial, foi realizada uma votação para definir os cargos de síndico e subsíndico do prédio. 4 moradores, representados por *A*, *B*, *C*, *D*, candidataram-se a ocupar esses cargos.

De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado dessa votação?

Vamos construir um diagrama de árvore para representar todas as possibilidades.

Buravleva stock/Shutterstock



Pense nisto: No caso apresentado, considerando os pares (A, B) e (B, A), verificamos que, na primeira situação, o síndico é A e o subsíndico é B e, na segunda situação, ocorre o contrário. Ou seja, considerando as pessoas representadas por A e B, por exemplo, existem 2 possibilidades distintas de elas ocuparem os cargos.

Note que cada possibilidade anteriormente representada corresponde a um **agrupamento ordenado** ou **arranjo** de 2 pessoas escolhidas dentre os 4 candidatos.

Cada resultado é uma sequência formada por 2 pessoas, escolhidas entre 4. Adiante neste capítulo, voltaremos a estudar os agrupamentos ordenados.

Assim, temos 12 modos distintos para escolher síndico e subsíndico.

Não escreva no livro

Pense nisto

Por que esse agrupamento é chamado de ordenado?

Suponha que uma sequência seja formada por k elementos, com $k \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$, em que:

- a_1 pode ser escolhido de n_1 maneiras diferentes;
- a_2 pode ser escolhido de n_2 maneiras diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;
- a_3 pode ser escolhido de n_3 maneiras diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;

⋮

- a_k pode ser escolhido de n_k maneiras diferentes, a partir das escolhas anteriores.

Então, o número de possibilidades para construir a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ é:

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$, em que $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ são números naturais não nulos

Esse resultado é conhecido como **princípio fundamental da contagem** (PFC) ou **princípio multiplicativo** e serve de suporte para a resolução de muitos problemas de contagem.

Atividades resolvidas

1. Considerando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, responda às questões a seguir.

a) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?

b) Quantos números ímpares de 3 algarismos distintos podemos formar?

Solução:

a) O número será formado por 3 algarismos, podendo ser distintos ou não entre eles. A única restrição é que a casa das centenas não poderá ser ocupada pelo algarismo 0, pois, por exemplo, $034 = 34$. Devemos construir uma tripla ordenada (x, y, z), considerando que a centena, a dezena e a unidade estejam representadas por x, y, z, respectivamente, de modo que:

- x possa ser escolhido de 6 modos distintos, pois o número que será formado não pode começar por 0. Lembre-se que a centena não pode ser 0;
- y possa ser escolhido de 7 maneiras diferentes, pois pode haver repetição de algarismos;
- z possa ser escolhido de 7 maneiras distintas, pois não há restrições.

Assim, pelo PFC, a quantidade de números é $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$; ou seja, 294 números.

b) Neste caso todos os algarismos deverão ser distintos e o número deverá ser ímpar. Do mesmo modo que no item anterior, devemos construir uma tripla ordenada (x, y, z), respeitadas as restrições. Já que um número é ímpar quando termina por algarismo ímpar, é mais prático iniciar a resolução do problema pela "última casa" (das unidades):

- z pode ser escolhido de 3 modos distintos (1, 3 ou 5);
- x pode ser escolhido de 5 maneiras diferentes, pois não podemos escolher o 0 nem o algarismo já escolhido para as unidades;

- De acordo com esse raciocínio, não seria possível saber se o algarismo usado para a centena é par ou ímpar, da mesma maneira que o algarismo da dezena. Desse modo, não pode ser determinado, de maneira única, o número de possibilidades de escolha do algarismo da unidade (o qual pode ser 3, 2 ou 1).
- Formar o número 326 é diferente de formar, por exemplo, o número 263. É importante lembrar que estamos construindo sequências.

- y pode ser escolhido de 5 maneiras distintas, pois devemos desconsiderar os 2 algarismos já escolhidos para x e para z.

Portanto, pelo PFC, o resultado é $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$; ou seja, 75 números ímpares.

Pense nisto

Não escreva no livro

Imagine que tenhamos iniciado a resolução do item **b** analisando as possibilidades de escolha para a centena, depois, para a dezena e, por fim, para a unidade, obtendo:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{diferente}\\ \text{de zero}}}{6} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{qualquer,}\\ \text{exceto o já}\\ \text{escolhido}}}{6} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ímpar}}}{3} = 96$$

- Qual teria sido o erro cometido?
- Por que importa a ordem de escolha dos algarismos neste problema?

2. Uma prova é composta de 8 questões do tipo verdadeiro (**V**) ou falso (**F**). De quantas maneiras distintas podem ser respondidas todas as questões dessa prova?

Solução:

Cada modo de responder às questões da prova consta de uma sequência de 8 elementos $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$, em que cada elemento a_i $(1 \leqslant i \leqslant 8)$ pode ser escolhido de 2 maneiras distintas: **V** ou **F**. Assim, pelo PFC, o número de respostas possíveis para essa prova é:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{8 \text{ fatores}} = 2^8 = 256$$

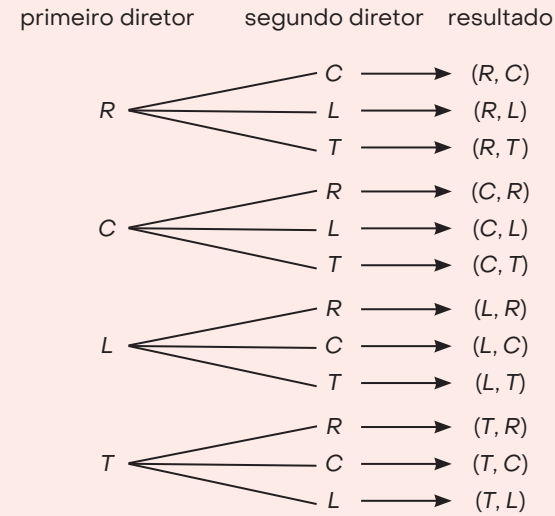
Pense nisto

Dessas 256 sequências, em quantas há pelo menos uma resposta verdadeira?

3. Rafael, Célia, Lídia e Túlio são diretores de uma empresa. De quantos modos distintos poderão ser escolhidos 2 diretores para participar de um congresso?

Solução:

De início, vamos construir um diagrama de árvore para representar as possibilidades de escolha do primeiro e do segundo diretores. Sendo Rafael, Célia, Lídia e Túlio representados, respectivamente, por R, C, L e T, as possibilidades de diretores, temos:



Note que escolher Rafael e Célia (R, C) é o mesmo que escolher Célia e Rafael (C, R); da mesma maneira que escolher Lídia e Célia (L, C) é o mesmo que escolher Célia e Lídia (C, L), e assim por diante.

Desse modo, é preciso eliminar as possibilidades repetidas do diagrama anterior. Obtemos, então, sem importar a ordem de escolha:

1) Rafael e Célia;
2) Rafael e Lídia;
3) Rafael e Túlio;
4) Célia e Lídia;
5) Célia e Túlio;
6) Lídia e Túlio.

Considerando o princípio multiplicativo, teríamos um total de $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades de pares ordenados.

No entanto, como nesse contexto não importa a ordem dos diretores, é preciso dividir 12 por 2 para chegar ao resultado procurado:

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Cada possibilidade de escolha dos diretores corresponde a um **agrupamento não ordenado** ou **combinação** de 2 diretores escolhidos dentre 4, isto é, um subconjunto formado por 2 pessoas.

Um pouco mais adiante vamos estudar com mais detalhes os agrupamentos não ordenados.

- Das 256 sequências possíveis de respostas, apenas uma apresenta todas as respostas falsas: (F, F, F, F, F, F, F, F). Nas outras 255 sequências, ao menos uma das respostas é verdadeira.

Princípio aditivo da contagem

Problema 1: Com os algarismos 1, 2, 3, …, 8 são formados números de 4 algarismos distintos. Quantos desses números começam por 8 ou por um algarismo que representa um número primo?

- Para os números começados por 8, temos:

$$1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210;\ \text{ou seja, } 210 \text{ números.}\ \text{I}$$

- Para os números começados por um algarismo que representa um número primo, temos:

$$\underbrace{4}_{\substack{\text{Podemos escolher os}\\ \text{algarismos 2, 3, 5 ou 7.}}} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840;\ \text{ou seja, } 840 \text{ números.}\ \text{II}$$

No diagrama a seguir podemos representar alguns elementos de I e de II.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que não há elementos comuns em I e II. Desse modo, o total de números procurado é dado pela adição de I e II, isto é: 210 + 840 = 1 050.

Problema 2: Com os algarismos 1, 2, 3, …, 8 são formados números de 4 algarismos distintos. Quantos começam por 8 ou terminam por 5?

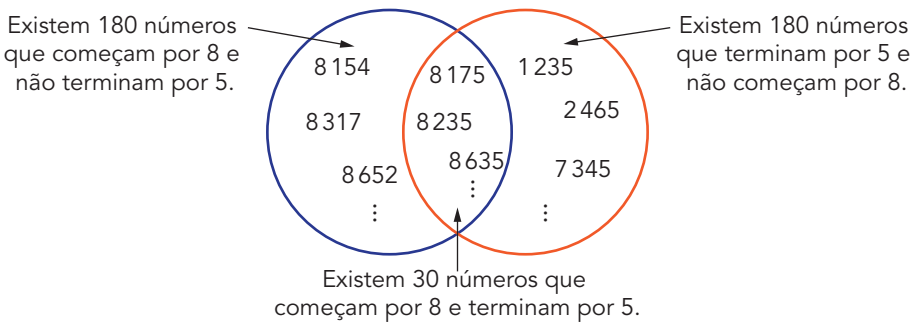
- Começando por 8, já calculamos que há 210 números I.
- Terminando por 5, temos: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 = 210$; ou seja, 210 números II.

Perceba que, em I, estão incluídos alguns números que terminam por 5, e, em II, alguns que começam por 8. Assim, os números que começam por 8 e terminam por 5 foram contados 2 vezes. Note que a quantidade de números que satisfazem essas 2 condições é:

$$\underbrace{1}_{\substack{\text{começa}\\ \text{por 8}}} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \underbrace{1}_{\substack{\text{termina}\\ \text{por 5}}} = 30$$

Portanto, o resultado procurado é: 210 + 210 − 30 = 390; ou seja, 390 números.

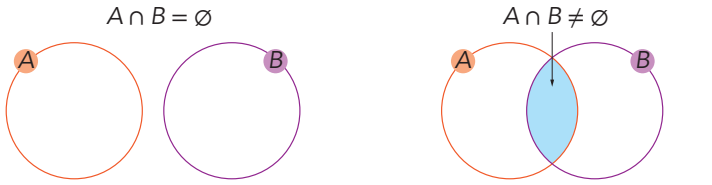
Confira, no diagrama a seguir, uma possível representação para esses dados.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Nos problemas **1** e **2**, o raciocínio usado refere-se à contagem do número de elementos da união (ou reunião) de 2 conjuntos, representada pelo símbolo ∪.

No diagrama a seguir, note que $n(X)$ é a notação usada para representar o número de elementos do conjunto X. O símbolo ∩ representa a interseção de 2 conjuntos.



$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Banco de imagens/Arquivo da editora

O **princípio aditivo da contagem** diz respeito à contagem do número de elementos da união de 2 conjuntos A e B ou, de maneira mais informal, à contagem do número de elementos que pertencem a A ou a B.

1. Como são 4 opções de entrada, 3 opções de prato principal e 2 opções de sobremesa, usamos o princípio fundamental da contagem: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Portanto, são 24 maneiras distintas.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

3. b) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 = 2048$; ou seja, 2048 números. (4 ← par)

3. c) Números com algarismos distintos: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$. Assim: $\frac{1680}{4096} \simeq 0{,}4102$; ou seja, aproximadamente 41,02%.

1. Em um restaurante, de quantas maneiras distintas um cliente pode fazer um pedido contendo uma entrada, um prato principal e uma sobremesa, sabendo que existem 4 opções de entrada, 3 de prato principal e 2 de sobremesa?

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

2. Para a eleição do corpo dirigente de uma empresa, 8 pessoas são pré-selecionadas. De quantas maneiras distintas poderão ser escolhidos o presidente, o vice-presidente e o diretor financeiro se apenas 2 deles têm conhecimento para assumir a diretoria financeira?

3. Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, responda no caderno:

a) Quantos números de 4 algarismos podemos formar? $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$; ou seja, 4 096 números.

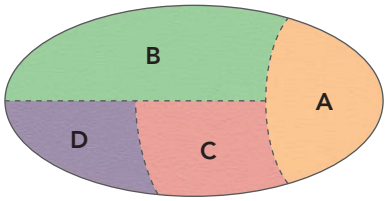
b) Quantos números pares de 4 algarismos podemos formar?

c) Em relação ao total obtido no item **a**, qual é, aproximadamente, a porcentagem correspondente aos números que têm todos os algarismos distintos?

4. Elabore e resolva no caderno um problema envolvendo um questionário de avaliação dos serviços de uma companhia aérea composto de 10 perguntas, cujas alternativas possíveis para as respostas a cada pergunta são: insatisfeito, parcialmente satisfeito, satisfeito e muito satisfeito. O exemplo de problema encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

5. A 1ª fase de um torneio de futebol é disputada por 15 equipes no sistema de turno e returno (a equipe **A**, por exemplo, joga com a equipe **B** 2 vezes: uma no próprio campo, e outra no campo adversário). Quantas partidas são disputadas ao todo se os 2 mais bem classificados da 1ª fase fazem a final no mesmo sistema? 212 jogos.

6. Um país é formado por 4 regiões **A**, **B**, **C** e **D**, como mostra o esquema a seguir.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

2. Como apenas 2 pessoas possuem conhecimento para assumir o setor financeiro, temos 2 opções para esse cargo. Sobram, então, 7 opções para presidente e 6 opções para a vice-presidência. Logo, o número de possibilidades é $2 \cdot 7 \cdot 6 = 84$; ou seja, 84 maneiras.

9. e) Começando por C, temos: $1 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000$; ou seja, 17 576 000 placas.
Terminando por 1, temos: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 1 = 45\,697\,600$; ou seja, 45 697 600 placas.
Começando por C e terminando por 1, temos: $1 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 1 = 1\,757\,600$; ou seja, 1 757 600 placas.
Pelo princípio aditivo da contagem, o resultado procurado é: $17\,576\,000 + 45\,697\,600 - 1\,757\,600 = 61\,516\,000$; ou seja, 61 516 000 placas.

Deseja-se colorir esse esquema de modo que regiões com uma fronteira comum tenham cores distintas.

Indique no caderno se as afirmações a seguir são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) e justifique as falsas.

a) É possível colorir o esquema usando apenas 2 cores. F

b) Usando exatamente 4 cores distintas, o número de maneiras de colorir o esquema é 24. V

c) Com 4 cores disponíveis, o número máximo de possibilidades para colorir o esquema é 60. F

d) Com 5 cores disponíveis, e colorindo **A** e **D** com a mesma cor, existem 60 maneiras distintas de colorir o esquema. V

e) O número mínimo de cores necessárias para colorir o esquema é 3. V

7. Uma empresa distribuiu aos funcionários um questionário constituído de 2 partes. Na 1ª parte, o funcionário deve colocar a ordem de preferência de turno de trabalho: matutino, vespertino ou noturno. Na 2ª parte, o funcionário deve escolher, em ordem de preferência, 2 dos 7 dias da semana para folgar.

a) De quantas maneiras distintas um funcionário poderá preencher esse questionário?
252 maneiras.

b) Qual seria a resposta se, na segunda parte do questionário, o funcionário devesse escolher 2 dos 7 dias da semana para folgar sem especificar a ordem de preferência?
126 maneiras.

8. Uma pulseira de tecido será bordada com 4 faixas retangulares, como mostra a ilustração a seguir.

Ericson Guilherme Luciano/ Arquivo da editora

Há 5 cores de bordado disponíveis. Represente a pulseira no caderno e determine de quantos modos distintos ela poderá ser feita:

a) caso não se pretenda repetir cor alguma?
120 maneiras.

b) caso retângulos "vizinhos" devam ser bordados com cores diferentes? 320 maneiras.

c) caso o primeiro e o último retângulos devam ser bordados com a mesma cor e, nos retângulos "do meio", devam ser usadas cores de bordado distintas entre si e também distintas da cor usada nas extremidades?
60 maneiras.

9. Considerando as placas de veículos no padrão Mercosul, apresentado na abertura de Unidade, responda no caderno os itens a seguir. Se julgar necessário, utilize uma calculadora.

a) Quantas placas distintas podem ser formadas por consoantes quaisquer e algarismos distintos?

b) Quantas placas distintas podem começar por C e ter no 5º caractere uma vogal?
$1 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 = 3\,380\,000$; ou seja, 3 380 000 placas.

c) Quantas placas distintas podem apresentar as 3 primeiras letras iguais?

d) Quantas placas distintas podem apresentar apenas algarismos menores do que 5?

e) Quantas placas distintas podem começar por C ou terminar por 1?

9. a) $21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 21 \cdot 9 \cdot 8 = 140\,026\,320$; ou seja, 140 026 320 placas.

10. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar usando:

a) apenas os algarismos 1, 2 e 3? 6 números.

b) apenas os algarismos ímpares? 60 números.

c) apenas os algarismos pares? 48 números.

d) algarismos pares e ímpares intercalados?
180 números.

11. Dispondo dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine no caderno:

a) a quantidade de números pares de 3 algarismos que podemos formar; 168 números.

b) a quantidade de números pares de 3 algarismos distintos que podemos formar;
105 números.

c) a quantidade de números divisíveis por 5, formados por 4 algarismos distintos.
220 números.

12. Um experimento consiste em 2 lançamentos sucessivos de uma moeda, seguidos de um lançamento único de um dado.

a) De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado desse experimento?
24 modos distintos.

b) Quantos resultados apresentam exatamente uma cara? 12 resultados.

c) Quantos resultados apresentam 2 caras ou 2 coroas? 12 resultados.

d) Quantos resultados apresentam 2 caras ou um número primo? 15 resultados.

e) Elabore e resolva no caderno um problema cuja resposta seja: $1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$
O exemplo de problema encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

9. c) $26 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 676\,000$ (note que não há restrições a partir do 4º caractere); ou seja, 676 000 placas.

9. d) $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 5 \cdot 26 \cdot 5 \cdot 5 = 57\,122\,000$ (note que não há restrições em relação às letras; e que há 5 algarismos menores do que 5, a saber: 0, 1, 2, 3 e 4); ou seja, 57 122 000 placas.

13. c) Começar pelo setor comercial: 6 opções (item **b**).
Finalizar pelo setor de *marketing*: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$.
Começar pelo setor comercial e terminar pelo de *marketing*: $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$.
Pelo princípio aditivo da contagem, há $6 + 6 - 2 = 10$; ou seja, 10 opções.

13. Em uma empresa, como parte do treinamento para o trabalho, os estagiários passam obrigatoriamente uma única vez pelos seguintes setores: de RH, financeiro, comercial e de *marketing*.

a) Quantas ordens distintas são possíveis para que os estagiários passem pelos 4 setores? $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; ou seja, 24 opções.

b) Se um estagiário iniciar o treinamento pelo setor comercial, de quantas maneiras distintas poderá completá-lo? $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; ou seja, 6 opções.

c) De quantas maneiras distintas os estagiários podem começar o treinamento pelo setor comercial ou finalizá-lo pelo setor de *marketing*?

14. Em uma pesquisa encomendada por uma operadora turística com o objetivo de descobrir os destinos nacionais mais cobiçados pelos brasileiros, o entrevistado deve escolher, em ordem de preferência, 3 dentre 10 destinos apresentados pelo entrevistador. Um dos destinos apresentados é a cidade de Natal (RN).

a) Quantas respostas diferentes podem ser obtidas? $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$; ou seja, 720 respostas.

b) Quantas respostas possíveis apresentam a cidade de Natal como destino preferido em 1º lugar? Natal como destino preferido: $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$; ou seja, 72 respostas.

c) Quantas respostas possíveis não contêm Natal entre os destinos mencionados? $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$; ou seja, 504 respostas.

15. **(Obmep)** Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

Reprodução/OBMEP, 2007.

a) 8 **c)** 18 **e)** 24
b) 16 **d)** 20

Alternativa **b**.

16. Um programador de computador criou um código especial que utiliza apenas os símbolos a seguir: ⊙ − ×
Os diferentes códigos são sequências formadas por esses símbolos. Quantos códigos:

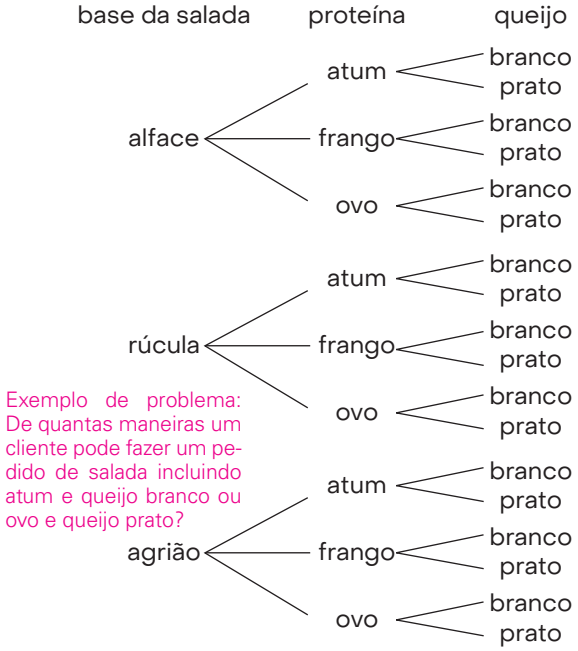
a) de 5 símbolos começam por "⊙"? 81 códigos.

b) contêm de 2 a 4 símbolos? 117 códigos.

c) são formados por 3 símbolos, sendo 1 de cada tipo? 6 códigos.

d) com 4 símbolos apresentam, pelo menos, 3 "⊙"? 9 códigos.

17. Na praça de alimentação de um *shopping*, o restaurante Rei das Saladas vende refeições sempre compostas de saladas. No diagrama a seguir, é possível conhecer parcialmente algumas opções de pedido, em que o cliente deve escolher a salada, a proteína e o tipo de queijo.



Exemplo de problema: De quantas maneiras um cliente pode fazer um pedido de salada incluindo atum e queijo branco ou ovo e queijo prato?

Além disso, ao final do pedido, o cliente deve optar por um dentre os 4 molhos a seguir: *rosé*, mostarda e mel, iogurte e balsâmico.

Elabore e resolva no caderno um problema considerando o enunciado apresentado.

18. Um restaurante oferece almoço apenas com pratos feitos. Todos os pratos contêm arroz e feijão acompanhados de salada ou legumes grelhados. O cliente deve escolher, ao final do pedido, entre a opção vegetariana e a opção com carne. Na opção vegetariana,

18. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

pode-se escolher omelete, quibe de abóbora ou lasanha de berinjela; na opção com carne, pode-se escolher frango (empanado ou grelhado) ou carne vermelha (linguiça, bife à milanesa, contrafilé ou picadinho).
Todo os pedidos podem ou não vir acompanhados de um *couvert* (pão com manteiga).

a) Faça no caderno um diagrama de árvore para representar todas as opções de pedidos vegetarianos desse restaurante. Quantas são as possibilidades?
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) De quantas maneiras distintas um cliente pode fazer um pedido de almoço nesse restaurante? 36 opções.

19. Uma companhia aérea oferece voos de São Paulo (SP) para São Luís (MA), diretos ou com conexão em Brasília (DF) ou Recife (PE). Para que a segunda opção seja possível, o *site* da companhia só disponibiliza voos que saiam de São Paulo para Brasília com no mínimo 3 horas de antecedência do voo de conexão e de São Paulo para Recife com no mínimo 4 horas de antecedência do voo de conexão. Analise a grade de voos da companhia:

São Paulo/São Luís	8 h 12 h 20 min 21 h 30 min
São Paulo/Brasília	6 h 10 h 12 h 20 min 16 h 20 h 30 min
São Paulo/Recife	6 h 30 min 7 h 30 min 11 h 17 h 30 min 19 h
Brasília/São Luís	15 h 23 h 50 min
Recife/São Luís	14h 20 h 30 min

a) Construa no caderno um diagrama de árvore para representar as possibilidades de voos com conexão de São Paulo a São Luís com parada em Brasília e outro diagrama com parada em Recife. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) De quantas maneiras distintas um passageiro pode comprar uma passagem de São Paulo a São Luís? 15 maneiras.

Fatorial de um número natural

Ao resolver problemas de contagem por meio do princípio multiplicativo, é comum aparecer multiplicações cujos fatores são números naturais consecutivos, por exemplo: $26 \cdot 25 \cdot 24$; $7 \cdot 6 \cdot 5$; etc. Muitas vezes é possível escrever multiplicações desse tipo de modo mais resumido.

Dado um número natural n, definimos o **fatorial de *n*** (indicado por ***n*!**) por meio das relações:

Se $n = 0$, então $0! = 1$.
Se $n = 1$, então $1! = 1$.
Se $n \geqslant 2$, então $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 1$.

Assim, temos, por exemplo:

- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

À medida que n aumenta, o cálculo de $n!$ torna-se mais trabalhoso. Para ajudar, podemos utilizar a propriedade:

$n! = n \cdot (n - 1)!$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Pense nisto: Sim, se $n \geqslant 2$, $n!$ contém como um dos fatores o número 2, que é par. Como o produto de um número par por outro inteiro qualquer é par, concluímos que $n!$ é par.

Não escreva no livro

Pense nisto

Se $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 2$, então o fatorial de n é um número par? Explique.

Confira estas simplificações:

- $6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} = 6 \cdot 5!$
- $7! = 7 \cdot \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{6!} = 7 \cdot 6!$, ou ainda:

$7! = 7 \cdot 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} = 7 \cdot 6 \cdot 5!$

Para calcular, por exemplo, o valor de $\frac{10!}{7!}$, podemos desenvolver o fatorial do número maior, 10, até chegar ao fatorial do menor, 7. Assim, temos:

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Atividades resolvidas

4. Resolva a equação:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 6$$

Solução:

Como $n + 1 > n - 1$, desenvolvemos o fatorial de $n + 1$ até chegar ao fatorial de $n - 1$:

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 2 \text{ ou } n = -3$$

Como só se define o fatorial de um número natural, concluímos que o único valor possível é $n = 2$; então: $S = \{2\}$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

20. c) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
$5040 - 120 = 4920$
d) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$5 \cdot 6 = 30$

20. Calcule, no caderno, o valor de:

a) $6!$ $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
b) $0! + 1!$ $1 + 1 = 2$
c) $7! - 5!$
d) $5 \cdot 3!$

21. Obtenha, no caderno, o valor de cada uma das expressões a seguir.

a) $\frac{8!}{6!}$ 56
b) $\frac{3!}{4!} + \frac{4!}{5!}$ $\frac{9}{20}$
c) $\frac{20!}{18! \cdot 2!}$ 190
d) $17! - 17 \cdot 16!$ 0
e) $\frac{40! - 39!}{41!}$ $\frac{39}{1640}$

22. Classifique no caderno como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as afirmações a seguir, considerando que a e b são números naturais quaisquer.

a) $(a - b)! = a! - b!$ **a)** Considerando $a = 3$ e $b = 2$:
$1! \neq 3! - 2! \Rightarrow 1 \neq 4$; F
b) $(a!)^2 = a! \cdot a!$
$(a!)^2 = a! \cdot a!$; V
c) $(a \cdot b)! = a! \cdot b!$
Considerando $a = 3$ e $b = 2$:
$6! \neq 3! \cdot 2! \Rightarrow 720 \neq 12$; F

23. Simplifique no caderno:

a) $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$ $n + 2$
b) $\frac{(n-3)!}{(n-2)!}$ $\frac{1}{n-2}$
c) $\frac{(n+1)! + n!}{n!}$ $n + 2$
d) $\frac{n! - (n-1)!}{(n-1)! + (n-2)!}$ $\frac{(n-1)^2}{n}$

24. Resolva, no caderno, as equações:

a) $n! = 120$ $S = \{5\}$
b) $\frac{n!}{(n-2)!} = 42$ $S = \{7\}$
c) $(n - 5)! = 1$ $S = \{5, 6\}$

25. **(Enem)** Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.
De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20 \times 8! + (3!)^2$
b) $8! \times 5! \times 3!$
c) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$
d) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$
e) $\frac{16!}{2^8}$

Alternativa **b**.

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

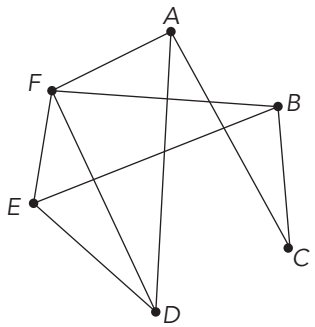
Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Computação, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Educação Digital.

Uma breve introdução à teoria dos grafos

Uma companhia regional de ônibus opera em 6 pequenas cidades de certa região: *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*. Alguns trajetos entre elas são diretos, isto é, sem paradas. No quadro estão listados os trajetos diretos realizados pela companhia.

Partida	Chegada
A	*C*, *D*, *F*
B	*C*, *E* , *F*
C	*A*, *B*
D	*A*, *E*, *F*
E	*B*, *D*, *F*
F	*A*, *B*, *D*, *E*

Uma maneira mais elucidativa de representar a situação descrita é fazer um esquema no qual as cidades são representadas por pontos e os trajetos são representados por linhas, como apresentamos a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Perceba que a ausência de linhas entre 2 pontos – por exemplo, *B* e *D* – significa que essa companhia não opera um trajeto direto entre as cidades *B* e *D*.

Uma estrutura formada apenas por pontos e linhas é conhecida como **grafo**. Em um grafo, os pontos são denominados vértices e as linhas recebem o nome de arestas. O grau de um vértice é igual ao número de arestas incidentes naquele vértice. No exemplo, temos que:

- o grau do vértice *C* é igual a 2;
- o grau dos vértices *A*, *B*, *D* e *E* é igual a 3;
- o grau do vértice *F* é igual a 4.

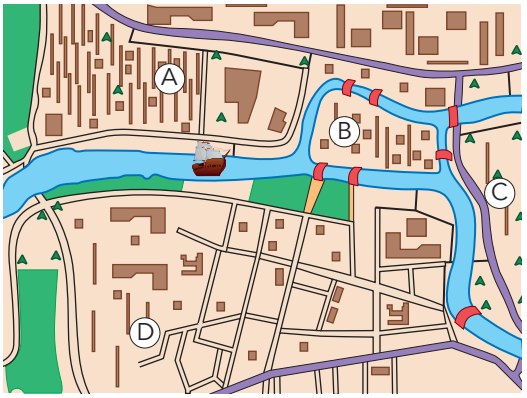
A teoria dos grafos tem como precursor o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), que resolveu o famoso problema das pontes de Konigsberg, o qual apresentaremos em seguida.

A representação por grafos pode ajudar a compreender e resolver problemas de diversas áreas, como a estrutura organizacional de uma empresa, circuitos elétricos, redes de rotas de transportes, logística de distribuição de serviços e produtos, elaboração de turnos de trabalho em uma empresa, entre outros.

As pontes de Konigsberg

A cidade de Konigsberg (atual Kaliningrado, na Rússia) era formada por 4 "regiões", denominadas aqui por *A*, *B*, *C* e *D*:

- *A* e *D* eram regiões localizadas em margens opostas do rio Pregel, e *C* e *B* eram 2 ilhas. Havia 7 pontes que faziam as ligações entre as regiões mencionadas, como mostra a ilustração a seguir:

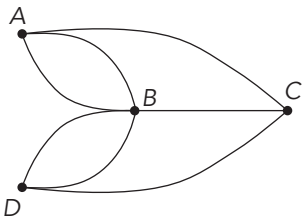


Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Conta-se que, entre os moradores dela, popularizou-se o seguinte problema: Seria possível fazer um passeio a pé pela cidade de maneira a se passar uma única vez por cada uma das 7 pontes e retornar ao ponto de partida?

Euler mostrou que o problema não tem solução através de um argumento relativamente simples.

Representando as regiões da cidade por pontos e as pontes por linhas, é possível construir o grafo a seguir.



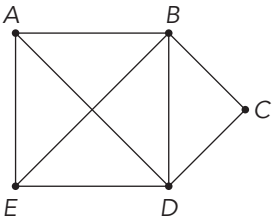
Banco de imagens/ Arquivo da editora

Note que, nesse grafo, todos os vértices têm grau ímpar: *A*, *C* e *D* têm grau 3 e *B* tem grau 5.

Para que fosse possível fazer um passeio fechado a pé que satisfizesse as condições do problema, teríamos de sair de um dos vértices (isto é, sair de uma das regiões) e passar por todas as arestas (pontes) exatamente uma única vez. Assim, para chegar em cada um dos vértices "intermediários" (excluindo o vértice de partida), seria necessário encontrarmos uma ponte para entrar na região e outra distinta para sair, isto é, o grau desses vértices deveria ser par. Mas, como vimos, todos os vértices têm grau ímpar, o que mostra a impossibilidade de satisfazer tais condições.

Fonte dos dados: JURKIEWICZ, Samuel. Grafos: uma introdução. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep)*, jun. 2009. Disponível em: https://tedit.net/pmadlx. Acesso em: 1º ago. 2024.

1. Represente o esquema a seguir no caderno e explique se é possível desenhá-lo sem tirar o lápis do papel e sem passar por uma linha mais de uma vez?



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Sim. Possíveis caminhos: *A* – *B* – *C* – *D* – *B* – *E* – *D* – *A* – *E* ou *A* – *B* – *C* – *D* – *A* – *E* – *B* – *D* – *E*, entre outros.

2. Imagine que as arestas do esquema da atividade **1** sejam ruas de uma cidade e o caminhão de lixo precisa passar, todo dia, por todas essas ruas uma única vez. Como a solução da atividade **1** poderia ser útil neste caso? Ao realizar o caminho passando apenas uma vez por cada rua, o caminhão economizaria tempo e combustível.

3. Pense em outra aplicação prática para a teoria dos grafos apresentada.
Exemplo de resposta: Mapa de metrô/trem de uma cidade.

Agrupamentos simples

O princípio fundamental da contagem é a principal técnica para a resolução de problemas de contagem.

Vamos estudar a seguir as diferentes maneiras de formar agrupamentos e, com o princípio multiplicativo, desenvolver métodos de contagem para cada tipo deles. Faremos, principalmente, o estudo dos **agrupamentos simples**, isto é, grupos de k elementos **distintos** escolhidos dentre os n elementos de um conjunto, sendo k e n números naturais não nulos e $k \leqslant n$.

Permutações

Aline, Bia, Carla e Diana vão fazer uma apresentação de dança na escola. De quantas maneiras distintas podemos colocar essas 4 jovens em uma fila ordenada?

Representando, respetivamente, Aline, Bia, Carla e Diana por A, B, C e D, vamos analisar algumas possibilidades de compor a fila ordenada com as 4 pessoas.

1ª pessoa da fila	A	C	D	A	B	...
2ª pessoa da fila	C	B	C	B	A	...
3ª pessoa da fila	B	D	A	C	C	...
4ª pessoa da fila	D	A	B	D	D	...

CarlosBarquero/Shutterstock

Grupo de jovens.

Note que uma disposição difere das demais apenas pela posição em que as 4 pessoas ocuparão na fila. Assim, cada maneira de arrumar as pessoas na fila corresponde a um **agrupamento ordenado** (sequência) formado por 4 elementos. Dizemos que cada disposição no quadro corresponde a uma **permutação** das 4 pessoas.

Vamos usar o princípio multiplicativo para contar o número de possibilidades.

- Para ocupar a 1ª posição da fila, há 4 opções.
- Definida a 1ª posição, há 3 opções de escolha para a pessoa que vai ocupar a 2ª posição.
- Definidas a 1ª e a 2ª posições, há 2 opções de escolha para a pessoa que vai ocupar a 3ª posição.
- Escolhidas a 1ª, a 2ª e a 3ª posições, a pessoa que vai ocupar a última posição fica determinada de maneira única.

Assim, há 24 possibilidades ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$).

Dados n elementos distintos (com $n \in \mathbb{N}^*$), chama-se **permutação simples** ou simplesmente **permutação** todo **agrupamento ordenado** formado por esses n elementos.

Cálculo do número de permutações

Sejam n elementos distintos e P_n o número de permutações possíveis desses n elementos.

Vamos contar o número de sequências formadas por n elementos.

- Para escolher o 1º elemento da sequência, temos n possibilidades.
- Para escolher o 2º elemento da sequência, uma vez definida a 1ª posição, há $(n - 1)$ possibilidades.

- Definidos os 2 primeiros elementos da sequência, podemos escolher o 3º elemento de $(n - 2)$ maneiras.

  ⋮

- Escolhidos os $(n - 1)$ primeiros elementos da sequência, o elemento que vai ocupar a última posição na sequência fica determinado de maneira única.

Assim, pelo princípio multiplicativo:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \text{ isto é:}$$

$$P_n = n!$$

Note que $P_n = n!$ representa o número de maneiras distintas de ordenar n elementos distintos.

Vamos analisar a seguir um caso de permutação correspondente aos anagramas formados com as letras de uma palavra.

Utilizando todas as letras da palavra PRATO e trocando-as de ordem, temos uma sequência de 5 letras que forma uma "palavra" com ou sem sentido. Cada "palavra" formada corresponde a um anagrama, como PROTA, ATORP, RAPTO, TROPA, etc.

O número de anagramas formados é o número de permutações possíveis das letras P, R, A, T, O, a saber:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Não escreva no livro

Pense nisto

Como seria um esboço da representação dessas possibilidades em um diagrama de árvore?

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Atividades resolvidas

5. Dos anagramas formados pelas letras G, R, A, N, I, Z, O, quantos começam e terminam por vogal?

Solução:

Para a primeira letra do anagrama, temos 3 possibilidades: A, I, O.

Definida a vogal do início, sobram 2 opções para a vogal que vai ocupar a última letra dos anagramas.

Definidas as 2 extremidades, as outras 5 letras (1 vogal e 4 consoantes) podem ocupar qualquer posição nos anagramas, o que corresponde a um total de 120 possibilidades ($P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$).

Portanto, o resultado procurado é:

$$3 \cdot 2 \cdot P_5 = 6 \cdot 120 = 720$$

6. Giba e Laís têm 3 filhos: Carla, Luís e Daniel. A família quer tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado.

Felix Reiners/ Arquivo da editora

a) De quantas maneiras distintas os membros da família podem se distribuir?

b) Em quantas possibilidades o casal aparece lado a lado?

Solução:

a) Cada maneira de dispor as 5 pessoas lado a lado corresponde a uma permutação dessas 5 pessoas, uma vez que a sequência é formada por todos os membros da família. O número de posições possíveis é, portanto, $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

b) Para que Giba e Laís apareçam juntos (lado a lado), podemos considerá-los como uma única pessoa que vai permutar com as outras 3, o que corresponde a um total de 24 possibilidades ($P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$).

Porém, para cada uma dessas 24 possibilidades, Giba e Laís podem trocar de lugar entre si, de 2 maneiras distintas ($P_2 = 2! = 2$).

Assim, o resultado procurado é:

$$P_4 \cdot P_2 = 24 \cdot 2 = 48$$

29. a) Exemplo de problema: Quantos anagramas começam e terminam por consoante?

b) Exemplo de problema: Quantos anagramas começam com a letra B e terminam com a letra N?

ATIVIDADES

Não escreva no livro

26. Determine no caderno o número de anagramas formados pelas letras:

a) G, A, T, O; $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) E, S, C, O, L, A; $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

c) R, E, P, Ú, B, L, I, C, A.
$P_9 = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$

27. Um dado foi lançado 4 vezes sucessivamente e as faces obtidas foram 2, 3, 5 e 6, não necessariamente nessa ordem. De quantas maneiras distintas pode ter ocorrido a sequência de resultados? $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ou, pelo PFC, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; ou seja, 24 maneiras.

28. Considere os anagramas formados pelas letras da palavra CONQUISTA.

a) Quantos são os anagramas possíveis? 362 880

b) Quantos deles começam por vogal? 161 280

c) Quantos deles começam e terminam por consoante? 100 800

d) Quantos deles têm as letras C, O, N, juntas e nessa ordem? 5 040

e) Quantos deles apresentam a letra C antes da letra A? 181 440

f) Quantos deles apresentam as letras C, O, N, juntas, mas não necessariamente nessa ordem e o mesmo ocorrendo com as letras Q, U, I, S e com as letras T, A? 1 728

29. Elabore no caderno um problema envolvendo os anagramas formados pelas letras da palavra BRANCO, cuja resposta seja:

a) $4 \cdot 3 \cdot 4!$; **b)** $4!$.

30. Em uma turma de um curso de idiomas, o professor escolherá, semanalmente, um estudante para comentar o filme visto em cada semana. Os estudantes dessa turma são 4 adolescentes de 15 anos e 3 adolescentes de 16 anos de idade, e cada um deles vai comentar apenas um filme.

a) Quantas semanas serão necessárias para que todos os estudantes da turma sejam chamados? 7 semanas.

b) De quantas maneiras distintas poderá ser estabelecida a ordem dos estudantes para comentar os filmes? 5 040 maneiras.

c) De quantas maneiras distintas poderá ser estabelecida a ordem dos estudantes se o professor escolher primeiro os adolescentes de 16 anos e, depois, os de 15 anos de idade? 144 maneiras.

d) De quantas maneiras distintas poderá ser estabelecida a ordem dos estudantes se o professor os escolher alternadamente entre adolescentes de 15 anos e de 16 anos de idade? 144 maneiras.

31. Em quantos anagramas formados pelas letras da palavra QUEIJO as vogais não aparecem todas juntas? 576 anagramas.

32. Permutando-se as letras T, R, A, P, O, S, são formados 720 anagramas. Esses anagramas são colocados em ordem alfabética.

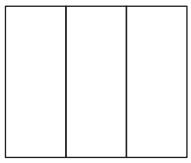
a) Determine a posição do primeiro anagrama que começa com a letra R. 361ª posição

b) Qual é a posição correspondente ao anagrama PRATOS? 293ª posição.

c) Que anagrama ocupa a 500ª posição? SATORP

Arranjos

Não escreva no livro

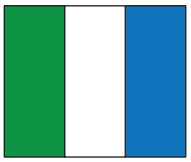


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Acompanhe a situação: Deseja-se pintar as listras da bandeira representada a seguir com cores distintas. Estão disponíveis as seguintes cores: preto, branco, vermelho, amarelo, azul e verde. Vamos determinar o número de maneiras distintas de colorir a bandeira.

Algumas maneiras de colorir a bandeira com as cores disponíveis:

I.

II. 

III.

IV.

Cada maneira de pintar a bandeira corresponde a um agrupamento ordenado de 3 cores, escolhidas dentre as 6 disponíveis. Dizemos que cada possibilidade corresponde a um **arranjo** de 6 cores tomadas 3 a 3 e o indicamos por $A_{6,3}$.

O número de arranjos possíveis é:

$$A_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

- 6: Existem 6 cores distintas para colorir a 1ª listra.
- 5: Existem 5 cores distintas para colorir a 2ª listra, uma vez colorida a 1ª.
- 4: Existem 4 cores distintas para colorir a 3ª listra, uma vez coloridas a 1ª e a 2ª.

Observação

Todo arranjo (agrupamento ordenado) formado exatamente por n elementos distintos, escolhidos dentre os n elementos disponíveis, corresponde a uma permutação desses elementos.

Note que um arranjo difere dos demais pela natureza dos elementos (cores) escolhidos, como em **I**, **II** e **III**, ou pela ordem dos elementos (cores) escolhidos, como em **I** e **IV**. Neste último caso, embora as cores escolhidas sejam as mesmas, a ordem em que elas são dispostas determina bandeiras diferentes.

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se **arranjo** desses n elementos, tomados k a k (sendo n e k números naturais não nulos e $k \leqslant n$), qualquer agrupamento ordenado de k elementos distintos escolhidos dentre os n existentes.

A contagem do número de arranjos pode ser feita diretamente usando-se o princípio multiplicativo.

Combinações

Quando termina o treino, Jaqueline costuma tomar um suco na lanchonete da academia. Numa tarde, a lanchonete dispunha das seguintes frutas: abacate, mamão, banana, maçã, morango e laranja. De quantas maneiras distintas Jaqueline pode fazer um pedido de suco misturando exatamente 2 dessas frutas?

PeopleImages.com - Yuri A/Shutterstock

O consumo equilibrado de frutas faz parte de uma dieta alimentar balanceada e saudável.

Acompanhe as possibilidades de mistura:

abacate e mamão	mamão e morango	banana e morango
abacate e banana	mamão e laranja	banana e laranja
abacate e maçã	mamão e banana	maçã e morango
abacate e morango	mamão e maçã	maçã e laranja
abacate e laranja	banana e maçã	morango e laranja

Note que escolher, por exemplo, mamão e laranja, nessa ordem, é o mesmo que escolher laranja e mamão, nessa ordem, pois, para determinar o sabor do suco, não importa a ordem em que as frutas sejam escolhidas.

Desse modo, cada escolha que Jaqueline poderá fazer consiste em um **agrupamento não ordenado** de 2 frutas escolhidas dentre as 6 disponíveis. Dizemos que cada uma das possibilidades anteriores é uma **combinação** das 6 frutas tomadas 2 a 2, isto é, um **subconjunto** formado por 2 elementos (frutas) escolhidos dentre 6 (frutas) disponíveis.

É usual representar as combinações entre chaves { }, assim como fazemos com conjuntos.

Como podemos contar o número de combinações dessas frutas? Inicialmente, podemos usar o princípio fundamental da contagem para contar o número de agrupamentos ordenados de 2 frutas:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ 1ª\ \text{fruta}}}{6} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ 2ª\ \text{fruta}}}{5} = 30$$

Esse cálculo inclui escolhas repetidas, pois sabemos que a ordem de escolha das frutas não importa.

O número de ordens possíveis em que 2 determinadas frutas podem ser escolhidas é:

$$2 \cdot 1 = 2 = P_2$$

Assim, como cada escolha foi contada 2 vezes, o número de combinações possíveis é $\frac{30}{2} = 15$.

Note que uma combinação difere das demais apenas pela natureza dos elementos escolhidos (frutas).

Suponha, agora, que Jaqueline quisesse fazer um pedido de suco misturando exatamente 3 frutas. Quantas possibilidades ela teria?

Inicialmente, notamos que cada escolha consiste em um agrupamento não ordenado (combinação) de 3 frutas escolhidas dentre 6 disponíveis.

Confira algumas possibilidades de escolha que Jaqueline tem: {banana, mamão, maçã}; {mamão, abacate, laranja}; {laranja, banana, mamão}; etc. Elas correspondem a subconjuntos de 3 frutas que podem ser formados com as 6 disponíveis.

Vamos fazer a contagem do número de combinações.

Primeiro, usamos o princípio fundamental da contagem para contar o número de agrupamentos ordenados de 3 frutas:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ 1ª\ \text{fruta}}}{6} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ 2ª\ \text{fruta}}}{5} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ 3ª\ \text{fruta}}}{4} = 120$$

Tatiana Bralnina/Shutterstock

O suco de mamão, banana e laranja, além de ser uma bebida nutritiva e saborosa, é rico em vitaminas, minerais e antioxidantes.

Como a ordem não importa, é preciso saber quantas vezes o mesmo suco foi contado nesse cálculo.

Imaginemos uma possível escolha: mamão (M), banana (B) e laranja (L).

O número de sequências formadas com essas 3 frutas é $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, que corresponde às **permutações** de M, B e L:

$$(M, B, L), (M, L, B), (L, B, M), (L, M, B),$$
$$(B, L, M) \text{ e } (B, M, L).$$

Como as 6 permutações desses elementos determinam o mesmo suco, concluímos que o número de combinações é $\frac{120}{6} = 20$.

Dados n elementos distintos, chama-se **combinação** desses n elementos tomados k a k (sendo n e k números naturais não nulos e $k \leqslant n$) qualquer **subconjunto** formado por k elementos distintos, escolhidos dentre os n.

Contagem do número de combinações

Sejam n elementos distintos.

Vamos encontrar um método para contar o número de combinações desses n elementos, tomados k a k (sendo n e k números naturais e $k \leqslant n$). Indicaremos esse número por $C_{n,k}$ ou por $\binom{n}{k}$.

- Usamos o princípio multiplicativo para contar o número de agrupamentos ordenados (arranjos) formado por k elementos distintos, escolhidos dentre os n elementos disponíveis:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)] = A_{n,k}$$

- Usamos o princípio multiplicativo para contar o número de sequências distintas que podem ser formadas com os k elementos escolhidos (permutações de k elementos):

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_k = k!$$

- Como qualquer permutação desses k elementos dá origem a uma única combinação, o número de combinações dos n elementos, tomados k a k, é:

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)]}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da expressão anterior por $(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, ou seja, por $(n-k)!$, temos:

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)] \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Portanto:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Observação

- Se $k = 1$, o número de combinações de n elementos distintos, tomados 1 a 1, é igual a n, pois corresponde ao número de subconjuntos que podem ser formados com exatamente um elemento escolhido dentre os n. De fato:

$$C_{n,1} = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{1! \cdot \cancel{(n-1)!}} = \frac{n}{1!} = n$$

- Se $k = n$, o número de combinações de n (com $n \geqslant 1$) elementos distintos, tomados n a n, é igual a 1. De fato:

$$C_{n,n} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!} \cdot 0!} = \frac{1}{0!} = 1$$

- Note que $C_{n,p} = C_{n,n-p}$ ou $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n!}{\underbrace{[n-(n-p)]!}_{p!} \cdot (n-p)!} = C_{n,n-p}$$

Assim, temos, por exemplo:

$$C_{6,4} = C_{6,2};\ C_{10,3} = C_{10,7};\ \binom{11}{5} = \binom{11}{6};\ \text{etc.}$$

Não escreva no livro

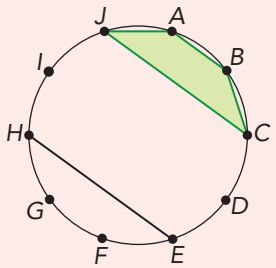
Pense nisto

Como você explica, por meio das noções de conjuntos, que $C_{n,n} = 1$?

O número de subconjuntos com n elementos que podem ser formados a partir de um conjunto que tem n elementos é igual a 1 (o próprio conjunto). Como o cálculo de $C_{n,n}$ resultou em $\frac{1}{0!}$, nota-se a "conveniência" da definição $0! = 1$ para que a conta resulte em 1.

Atividades resolvidas

7. Sobre uma circunferência, foram marcados 10 pontos distintos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Quantos segmentos de reta podem ser construídos com extremidades em 2 desses pontos?

b) Quantos quadriláteros convexos podem ser construídos com vértices em 4 desses pontos?

Solução:

a) Note que escolher os pontos H e E, nessa ordem, é o mesmo que escolher E e H, nessa ordem, pois o segmento de reta formado será o mesmo. Assim, devemos contar o número de agrupamentos não ordenados formados por 2 desses 10 pontos, a saber:

$$C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \text{ ou}$$

$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot \cancel{8!}} = 45$$

b) Note, por exemplo, que a ordem de escolha dos pontos A, B, C e J não importa, pois o quadrilátero convexo formado por esses pontos será sempre o mesmo. Assim, devemos escolher, sem importar a ordem, 4 dos 10 pontos:

$$C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ ou}$$

$$C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cancel{6!}} = 210$$

8. Em uma grande empresa 9 funcionários (5 fluentes em inglês e 4 fluentes em francês) foram participar das gravações para uma campanha publicitária. Chegando ao local da filmagem, foram informados de que, na cena que seria gravada, deveriam aparecer apenas 4 pessoas, sendo 2 fluentes em francês e 2 fluentes em inglês.

37. a) $C_{10,3} = \frac{10!}{(10! - 3!) \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$; ou seja, 120 triângulos.

b) $C_{10,5} = \frac{10!}{(10! - 5!) \cdot 5!} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 252$; ou seja, 252 pentágonos convexos.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

As imagens não estão representadas em proporção.

33. De quantos modos distintos Lucas pode escolher 4 dentre as 9 camisetas regata que possui para levar em uma viagem? $C_{9,4} = 126$; ou seja, 126 maneiras.

34. Suponha que Fábio tenha uma foto de cada uma de suas 3 irmãs, uma foto de seu irmão, uma foto de um amigo, uma foto de um ídolo do *rock* e uma foto de seu jogador de futebol favorito. De quantos modos distintos ele poderá escolher as fotos se dispõe de apenas 5 porta-retratos (3 sobre o aparador e 2 na parede) e pretende que as fotos das irmãs apareçam, obrigatoriamente, lado a lado sobre o aparador? 72 opções.

Felix Reiners/Arquivo da editora

35. Um curso de idiomas oferece turmas para iniciantes em inglês, espanhol, alemão, italiano e japonês.

a) De quantas maneiras distintas um estudante pode se matricular em 3 desses cursos?

b) De quantas maneiras distintas ele poderá se matricular em 3 desses cursos, incluindo obrigatoriamente o de inglês?

35. a) Trata-se de escolher, sem importar a ordem, 3 dentre os 5 cursos; $C_{5,3} = 10$.
Ou: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (60 escolhas ordenadas); $\frac{60}{P_3} = \frac{60}{3!} = 10$. Logo, são 10 maneiras distintas.

b) Trata-se de escolher 2 dentre os 4 cursos que restaram: $C_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ ou $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Logo, são 6 maneiras distintas.

36. Em um grupo de 6 pessoas, a quantidade de duplas que podem ser formadas é maior, menor ou igual à quantidade de quartetos que podem ser formados? Compare também a quantidade de duplas com a de trios.
O número de duplas (15) é igual ao número de quartetos; o número de duplas é menor do que o número de trios (20).

37. Sobre uma circunferência marcam-se 10 pontos.

a) Quantos triângulos podemos representar com vértices em 3 desses pontos?

b) Quantos pentágonos convexos podemos representar com vértices em 5 desses pontos?

38. Em uma sorveteria foi lançada a seguinte promoção: "Misture até 5 sabores em uma mesma taça por R$ 30,00. Temos 20 sabores".
Elabore e resolva no caderno 2 problemas considerando a situação descrita.

38. Exemplos de problema: De quantos modos distintos um cliente pode misturar 3 sabores?; De quantos modos distintos um cliente pode misturar 5 sabores?

39. Elabore e resolva no caderno 1 problema em que seja necessário utilizar o conceito de agrupamento não ordenado e os princípios multiplicativo e aditivo.

39. Exemplo de problema: Uma equipe de 10 pesquisadores é formada por 7 brasileiros e 3 estrangeiros. Para apresentar um projeto a uma empresa, será necessário escolher 5 pesquisadores, dos quais no mínimo 2 devem ser estrangeiros. De quantas maneiras distintas poderá ser feita essa escolha?

40. Uma junta médica deverá ser formada por 4 médicos e 2 enfermeiros. De quantas maneiras ela poderá ser formada se estão disponíveis 10 médicos e 6 enfermeiros?

41. 2 cartas são sorteadas, de uma só vez, de um baralho comum. Determine o número de maneiras possíveis de ocorrer um resultado formado por:

a) 1 rei e 1 rainha; 16 maneiras.

b) 2 cartas de copas; 78 maneiras.

c) 1 carta de copas e outra de ouros; 169 maneiras.

d) 2 ases; 6 maneiras.

e) cartas de naipes distintos. 1 014 maneiras.

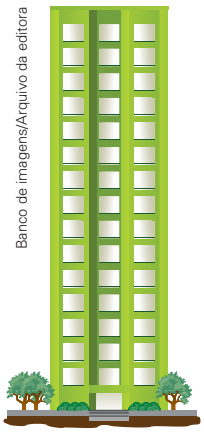
MyImages - Micha/Shutterstock

Seleção de uma carta do baralho.

40. Médicos: $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{5\,040}{24} = 210$. Para cada um dos 210 grupos de médicos, o número de equipes de enfermeiros que podem ser formadas é: $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$. Totalizam 3 150 maneiras diferentes (pois $210 \cdot 15 = 3\,150$).

As imagens não estão representadas em proporção.

42. Para montar um enxoval, Priscila foi a uma loja onde a vendedora lhe mostrou 7 jogos de cama, 8 jogos de banho e n jogos de mesa. Priscila achou que seria suficiente comprar 2 jogos de cama, 2 de mesa e 4 de banho. Nessas condições, Priscila escolheu uma dentre as 66 150 possibilidades de compra desse enxoval. Qual é o valor de n? $n = 10$



Banco de imagens/Arquivo da editora

43. A frente de um prédio comercial de 15 andares tem 45 janelas idênticas, cada uma correspondendo a uma sala comercial, como mostra a ilustração a seguir. De madrugada, o porteiro do prédio verificou, no painel de controle, que em 6 salas da frente as luzes haviam ficado acesas.

a) Determine o número de maneiras distintas de se ter 6 salas com as luzes acesas. 8 145 060

b) Determine o número de maneiras distintas de se ter 6 salas com as luzes acesas, sendo 3 em um andar e 3 em outro. 105

c) Determine o número de maneiras distintas de se ter 6 salas com as luzes acesas, sendo 2 em um andar, 2 em outro e 2 em um andar diferente dos anteriores. 12 285

44. Em uma final de uma prova de natação participam 5 atletas europeus, 2 estadunidenses e 1 brasileiro.

a) De quantos modos distintos poderão ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze? 336

b) Em quantas possibilidades de premiação aparecem apenas atletas europeus nas 3 primeiras posições? 60

c) Em quantas possibilidades de premiação o atleta brasileiro recebe medalha? 126

d) Supondo que o atleta brasileiro não receba medalha, determine o número de premiações em que pode haver mais atletas europeus do que estadunidenses no pódio. 180

46. O número de maneiras de premiar 2 entre os 5 é $C_{5, 2} = 10$, a saber: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{A, E\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, D\}$, $\{C, E\}$ e $\{D, E\}$. Cada medalha distribuída a cada um dos 2 premiados pode ser ouro, prata ou bronze, totalizando 9 possibilidades ($3 \cdot 3 = 9$), a saber: (ouro, ouro), (ouro, prata), (ouro, bronze), (prata, ouro), (prata, prata), (prata, bronze), (bronze, ouro), (bronze, prata) e (bronze, bronze).

Pelo PFC, o resultado é $10 \cdot 9 = 90$.

Alternativa **d**.

45. No grêmio de uma universidade serão realizadas eleições para os cargos de presidente, vice-presidente, tesoureiro e 4 conselheiros. Determine o número de maneiras distintas de ocorrer o resultado dessa eleição, sabendo que 14 estudantes se candidataram para ocupar qualquer um dos cargos e que todos os conselheiros eleitos terão a mesma função.

Reprodução/Obmep, 2015.

46. **(Obmep)** Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diego e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

a) 20 **b)** 30 **c)** 60 **d)** 90 **e)** 120

45. presidente ↓ 14 · vice ↓ 13 · tesoureiro ↓ 12 ($A_{14, 3}$) · conselheiros ↓ $C_{11, 4}$ $= 2\,184 \cdot 330 = 720\,720$

47. Um casal, procurando um nome para o filho que nasceria em 3 meses, selecionou 100 nomes de uma lista. Quantas são as possibilidades de nome para o filho, se o casal pode escolher entre 1 só nome ou nome composto (2 nomes distintos)? Com 1 nome apenas: 100 opções. Com nome composto: $100 \cdot 99 = 9\,900$; ou seja, 9 900 opções. Pelo princípio aditivo da contagem, temos $100 + 9\,900 = 10\,000$; ou seja, 10 000 possibilidades.

Permutações com elementos repetidos

Estudamos, até aqui, os agrupamentos simples, isto é, aqueles formados por elementos distintos. Vamos, agora, estudar as permutações com elementos repetidos, cujas técnicas de contagem estão baseadas em estratégias já estudadas na contagem dos agrupamentos simples.

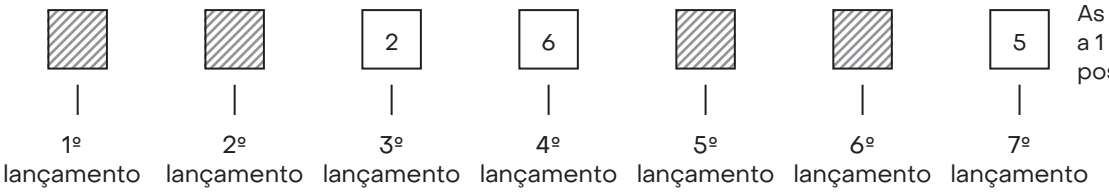
1º caso: apenas um elemento se repete

Um dado é lançado 7 vezes sucessivamente. De quantas maneiras distintas pode ser obtida uma sequência com 4 faces iguais a 1 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6?

audiznam260921/Shutterstock

Lançamento de dado.

- Vamos escolher, de início, as posições (correspondentes à ordem dos lançamentos) que as faces 2, 5 e 6 podem ocupar. Analise o esquema a seguir, em que está representada uma possível ocorrência de posições.



As 4 faces iguais a 1 entram nas posições vazias.

Note que, fixadas as posições das faces 2, 6 e 5, as posições das faces iguais a 1 ficam determinadas de maneira única, uma vez que qualquer permutação de faces 1 gera a mesma sequência. Trata-se, então, de escolher 3 dentre 7 posições. Isso pode ser feito de 35 maneiras distintas ($C_{7,3} = 35$).

- Para a escolha anterior (3º, 4º e 7º lançamentos), as faces 2, 5 e 6 podem trocar de lugar entre si, num total de 6 maneiras distintas ($P_3 = 3! = 6$). Os passos anteriores sugerem que o número de sequências possíveis seja dado por:

$$C_{7,3} \cdot P_3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 3! = \frac{7!}{4!}$$

← 7 é o número total de lançamentos
← 4 é o número de vezes que a face 1 ocorre

Assim, o resultado procurado é: $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Indicaremos esse número por $P_7^{(4)}$.

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos obter o número de anagramas formados com as letras da palavra CASAL.

Cada anagrama formado é uma sequência de 5 letras, das quais 2 são iguais a A.

O total de anagramas é: $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$.

Já em ACADEMIA, há 8 letras, das quais 3 são iguais a A. Então, o número de anagramas possíveis é:

$$P_8^{(3)} = \frac{8!}{3!} = 6\,720$$

Para determinar o número de anagramas formados pelas letras da palavra CACHORRO, notamos que há 8 letras, das quais 2 são iguais a C, 2 são iguais a O, 2 são iguais a R, além de 1 letra A e 1 letra H. Temos, então, o número de anagramas:

$$P_8^{(2,2,2,1,1)} = P_8^{(2,2,2)} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 5\,040$$

Acompanhe o exemplo:

Um festival gastronômico terá 5 edições, das quais 3 serão em cidades da região Norte (N) e 2 em cidades da região Nordeste (NE). De quantos modos distintos poderá ocorrer a sequência das edições, considerando a região sede?

Algumas possibilidades são: (N, NE, NE, N, N), (NE, N, N, N, NE), (N, N, N, NE, NE), ...

Para contar o número total de possibilidades, devemos permutar 5 símbolos, dos quais 3 são iguais a N e 2 são iguais a NE:

$$P_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

51. Total de letras: $n + 2$, com $n \in \mathbb{N}$.

$P_{n+2}^{(2,n)} = 21 \Rightarrow \frac{(n+2)!}{2! \cdot n!} = 21 \Rightarrow (n+2)(n+1) = 42 \Rightarrow n^2 + 3n - 40 = 0 \Rightarrow n = 5$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

48. Um dado é lançado 4 vezes sucessivamente. Determine no caderno o número de resultados possíveis em que:

a) as 4 faces são iguais a 5; 1 única possibilidade: (5, 5, 5, 5).

b) 3 faces são iguais a 2 e 1 face é igual a 4;

c) 2 faces são iguais a 3, 1 face é igual a 4 e a outra é igual a 5.

b) $P_4^{(3)} = \frac{4!}{3!} = 4$; ou seja, 4 resultados.
Sequências possíveis: (2, 2, 2, 4); (2, 2, 4, 2); (2, 4, 2, 2); (4, 2, 2, 2).

$P_4^{(2)} = \frac{4!}{2!} = 12$; ou seja, 12 resultados.

49. Permutando os algarismos 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3 e 4, quantos números de 10 algarismos podemos formar?

$P_{10}^{(3,2,4)} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = 12\,600$; ou seja, 12 600 números.

50. Considere os anagramas formados pelas letras da palavra PIRATARIA.

a) Quantos são? 15 120 anagramas.

b) Quantos começam pela letra A? 5 040 anagramas.

c) Quantos começam por vogal? 8 400 anagramas.

d) Quantos começam e terminam por vogal? 4 200 anagramas.

51. Permutando-se 2 letras iguais a A e n letras iguais a B, podem ser obtidos 21 anagramas. Qual é o valor de n?

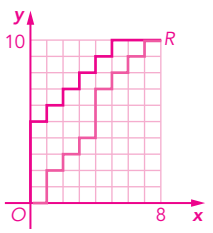
52. Um dado é lançado 3 vezes sucessivamente. Quantas sequências de resultados apresentam soma dos pontos:

a) menor do que 8? 35 sequências.

b) maior do que 13? 35 sequências.

53. Um robô se encontra no ponto $R(8, 10)$ de um sistema de eixos coordenados e quer chegar à origem (0, 0). Sabe-se que ele foi programado para dar um passo de uma unidade de medida de comprimento por vez, para a esquerda ou para baixo. Quantos caminhos distintos podem conduzi-lo à origem?

53. Considere E como para a esquerda e B como para baixo.
Analise alguns caminhos possíveis de R a O.



Banco de imagens/Arquivo da editora

(E, B, E, B, E, B, E, B, B, B, E, B, E, B, E, B, B, E)
(B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, E, E, E, E, E, E, E, E)
(E, E, E, B, E, B, E, B, E, B, E, B, E, B, B, B, B, B)
⋮
Cada caminho é uma sequência de 18 letras, das quais 10 são B e 8 são E. Um caminho difere dos demais pela ordem em que essas 18 letras aparecem.
O total de caminhos é:

$P_{18}^{(10,8)} = \frac{18!}{10! \cdot 8!} = 43\,758$

capítulo 8

Probabilidade

Fenômenos aleatórios e fenômenos determinísticos

Fenômenos aleatórios são aqueles que, mesmo com experimentações semelhantes, apresentam variações nos resultados. Por exemplo: a previsão do tempo envolve análise de dados atmosféricos como umidade relativa do ar, precipitação, ventos, etc. Esses dados são geralmente coletados em estações meteorológicas e processados por meio de modelos matemáticos, a fim de se fazer a previsão do tempo.

Entretanto, há um fator aleatório (casual), próprio dos fenômenos meteorológicos, que gera alguma incerteza na previsão, dificultando a obtenção de um prognóstico totalmente preciso.

Já os **fenômenos determinísticos** são aqueles cujo resultado pode ser totalmente previsto. Por exemplo: ao aquecermos uma chaleira com água à pressão de 1 atm, sabemos que, quando a medida de temperatura atinge 100 °C, ela entra em ebulição, ou seja, há mudança de estado físico da água. Repetida inúmeras vezes nas mesmas condições, essa experiência sempre apresentará tal resultado.

Além disso, em Matemática também encontramos os **experimentos aleatórios**, que são aqueles que, mesmo repetidos em condições idênticas, apresentam resultados diferentes devido ao acaso, não sendo possível prever com certeza qual será o resultado obtido.

A teoria da probabilidade permite fazer **previsões** sobre as chances de um acontecimento ocorrer em certo experimento aleatório. Essas previsões podem ser feitas analisando as características teóricas do experimento ou por meio da análise dos resultados obtidos quando o experimento é repetido um grande número de vezes.

A seguir estão alguns exemplos de experimentos aleatórios.

- No lançamento de um dado cúbico não viciado, determinar qual número será obtido na face superior.
- No lançamento de uma moeda não viciada, determinar qual a face superior obtida.
- Ao retirar, ao acaso, uma carta de um baralho comum, determinar o naipe da carta retirada.

Observação

Os termos **não viciado**, **honesto** e **não tendencioso** serão utilizados ao longo deste capítulo; eles dizem respeito a objetos "comuns", como uma moeda ou um dado, que não sofreram alterações para privilegiar algum resultado.

Não escreva no livro

Pense nisto

Você conhece algum outro fenômeno determinístico?

Resposta pessoal. Exemplos de resposta: Quando colocamos água no congelador, ao atingir a medida de temperatura igual a 0 °C, ela inicia o processo de mudança de estado, formando o gelo; quando abandonamos uma bolinha de tênis de mesa de certa medida da altura, ela cairá com certeza, atingindo o solo devido à ação da gravidade.

História da Matemática

A teoria da probabilidade

Os primeiros registros ligados à teoria da probabilidade aparecem na obra do italiano Girolamo Cardano (1501–1576) sobre jogos de azar. Cerca de 100 anos depois, Blaise Pascal (1623–1662) deu novo impulso ao desenvolvimento da teoria da probabilidade, por meio das cartas que trocou com Pierre de Fermat (1601–1665), em que debatiam problemas ligados a jogos. Na obra dele sobre o triângulo aritmético, datada de 1654, também há alguns tópicos sobre probabilidade.

No entanto, o primeiro artigo completo sobre o assunto só foi escrito em 1713, por Jacques Bernoulli, na obra *Ars conjectandi* ("Arte de conjecturar"), que continha, inclusive, uma detalhada exposição sobre permutações e combinações. A partir de então, outras matemáticas e matemáticos dariam valiosas contribuições para o desenvolvimento da teoria das probabilidades, cujas aplicações em áreas como Biologia, Economia, Saúde, etc., não tardariam a ser reconhecidas.

Fonte dos dados: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

akg-images/Album/Fotoarena

Retrato de Girolamo Cardano entalhado em cobre no século XVI. Colorido posteriormente. Autoria e dimensões desconhecidas.

North Wind Picture Archives/akg/Album/Fotoarena

Ilustração de Jacques Bernoulli feita a partir de uma gravura histórica. Data, autoria e dimensões desconhecidas.

Espaço amostral e evento

Espaço amostral

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado **espaço amostral** e é indicado pela letra grega Ω (lê-se "ômega").

- No lançamento de uma moeda não viciada, o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{K, C\}$, em que K representa a face cara e C representa a face coroa. Note que o número de elementos de Ω é 2. Representamos por: $n(\Omega) = 2$.

Observação

Neste capítulo, consideraremos todos os dados como dados cúbicos, exceto se dito explicitamente que têm outro formato.

- No lançamento de um dado cúbico não tendencioso, o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(\Omega) = 6$.
- Suponha que um dado seja lançado 2 vezes, sucessivamente, e seja anotada a sequência de números obtidos nas faces voltadas para cima. Usando o princípio fundamental da contagem (PFC), o número de resultados possíveis de ocorrer nesse experimento é 36 ($6 \cdot 6 = 36$). A seguir está uma maneira de representar os 36 pares ordenados:

lançamentos →

1º / 2º	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Assim, $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (2, 1), \ldots, (3, 1), \ldots, (4, 1), \ldots, (5, 1), \ldots, (6, 1), \ldots, (6, 6)\}$; e temos $n(\Omega) = 36$.

- Suponha que um professor irá sortear 2 exemplares de um livro entre seus 40 estudantes. É bem trabalhoso escrever, 1 a 1, todos os possíveis resultados do sorteio, pois teríamos que representar todos os possíveis subconjuntos de 2 estudantes que podem ser formados a partir dos 40 estudantes. Nessa situação, será necessário usar as técnicas de contagem estudadas no capítulo anterior, a saber:

$$C_{40, 2} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$$

Assim, o número de resultados possíveis de ocorrer nesse experimento é 780, ou seja, $n(\Omega) = 780$.

Em todos os exemplos anteriores, dizemos que o espaço amostral é **finito**.

Imagine agora um experimento que consiste nos lançamentos sucessivos de um dado cúbico não viciado até que seja obtido o número 6 na face voltada para cima; quando isso ocorre, o experimento é encerrado e registra-se a quantidade de lançamentos realizados, que pode ser um número natural não nulo qualquer, isto é, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

De maneira análoga, considere o experimento que consiste nos lançamentos sucessivos de uma moeda não tendenciosa, até que sejam obtidas 6 caras consecutivas; quando isso ocorre, o experimento é encerrado e registra-se a quantidade de lançamentos realizados, que pode ser um número natural qualquer maior ou igual a 6, isto é, $\Omega = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$.

Mega Pixel/Shutterstock

O dado cúbico é o mais comum dos dados. Ele tem 6 faces, numeradas de 1 a 6.

Em ambos os casos, temos espaços amostrais infinitos cujos elementos podem ser listados. Dizemos que esse espaço amostral é **infinito enumerável**.

Um espaço amostral é dito **discreto** se for finito ou infinito enumerável.

Imagine que um fabricante pretenda determinar o tempo de vida útil de uma lâmpada de LED a partir do momento em que a lâmpada selecionada para teste, ao acaso, é acesa (convencionaremos $t = 0$).

Dessa maneira temos que $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$.

Podemos representar Ω pelo intervalo $]0, +\infty[$.

De maneira análoga, imagine o experimento que consiste em medir a espessura (que pode variar de 15 a 20 milímetros) de uma peça automotiva, selecionada ao acaso pelo fabricante, em um teste de controle de qualidade. A medida da espessura (e) dessa peça é tal que $15 \leqslant e \leqslant 20$ e, nesse caso, o conjunto dos resultados possíveis (Ω) do experimento é o intervalo real $[15, 20]$.

Nos 2 exemplos anteriores, o conjunto de resultados possíveis é **infinito não enumerável**, pois é formado por um intervalo real, não sendo possível enumerar os elementos deles.

Quando o espaço amostral é infinito não enumerável, ele é chamado espaço amostral **contínuo**.

Evento

Uma caixa contém 20 bolas, de mesma medida de massa e mesmo tamanho, numeradas de 1 a 20. Uma pessoa, com os olhos vendados, retira uma bola dessa caixa. Trata-se de um experimento aleatório discreto, cujo espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, \ldots, 20\}$.

Vamos construir alguns subconjuntos de Ω.

- A: "a bola sorteada contém um múltiplo de 4"; $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$.
- B: "a bola sorteada contém um número formado por 2 algarismos"; $B = \{10, 11, 12, \ldots, 20\}$.
- C: "a bola sorteada contém um número maior do que 19"; $C = \{20\}$.
- D: "a bola sorteada contém um número natural não nulo menor ou igual a 20"; $D = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 20\}$.
- E: "a bola sorteada contém um número de 3 algarismos"; $E = \varnothing$.

Cada um desses subconjuntos de Ω recebe o nome de **evento**.

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral (Ω) de um experimento aleatório.
Quando o evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado **evento certo**.
Quando o evento é o conjunto vazio, ele é chamado **evento impossível**.

Não escreva no livro

Pense nisto

Elabore um fluxograma para classificar o espaço amostral de um experimento aleatório.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

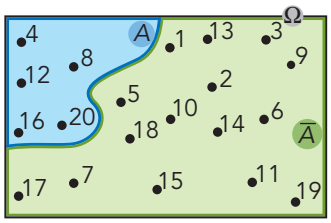
No exemplo anterior, o subconjunto D é um evento certo e o subconjunto E é um evento impossível.

Observação

O evento C é um conjunto unitário. Nesse caso, dizemos que esse evento é **elementar** ou **unitário**.

Evento complementar

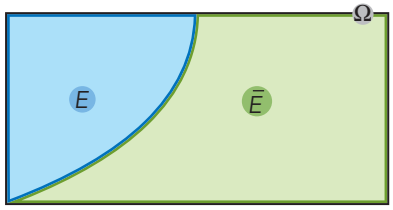
Considere novamente o experimento em que uma caixa contém 20 bolas, de mesma medida de massa e mesmo tamanho, numeradas de 1 a 20. Uma pessoa, com os olhos vendados, retira uma bola dessa caixa. Vamos representar a seguir o evento A: "a bola sorteada contém um múltiplo de 4".



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Os elementos de Ω que não pertencem a A correspondem aos números que não são múltiplos de 4. Eles formam o conjunto complementar de A (em relação a Ω), que pode ser representado por $\overline{A}$ ou $\complement_{\Omega}^{A}$.

Seja E um evento de um espaço amostral Ω. Chamamos **evento complementar de *E***, em relação a Ω (indica-se $\overline{E}$ ou $\complement_{\Omega}^{E}$), o evento que ocorre quando E não ocorre.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Note que: $\begin{cases} E \cup \overline{E} = \Omega \\ E \cap \overline{E} = \varnothing \end{cases}$

Não escreva no livro

Pense nisto

De acordo com o experimento descrito na atividade resolvida **1**, descreva no caderno um evento certo, um evento impossível e um evento formado por um único elemento.

Atividades resolvidas

1. Vamos considerar o experimento "lançamento de um dado honesto 2 vezes, sucessivamente". O espaço amostral é Ω = {(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)}. Quais são os elementos do evento E_1: "a soma dos pontos obtidos é maior do que 8"?

Solução:

Devemos analisar o quadro apresentado no tópico "Espaço amostral" e assinalar os pares de números cuja soma é 9, 10, 11 ou 12. Assim, temos:
E_1 = {(3, 6); (4, 5); (4, 6); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6)}.

Exemplo de resposta: Evento certo: a soma dos pontos obtidos é menor do que 40. Evento impossível: o produto dos números obtidos é 7. Evento com um único elemento: o produto dos números obtidos é 36.

3. c) Lembremos que um produto de 2 naturais é ímpar quando ambos forem ímpares: $3 \cdot 3 = 9$.
$E_2 = \{(1, 1); (1, 3); (1, 5); (3, 1); (3, 3); (3, 5); (5, 1); (5, 3); (5, 5)\}$; ou seja, $n(E_2) = 9$.

3. d) $E_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)\}$; ou seja, $n(E_3) = 15$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. Um dado honesto é lançado, e o número da face voltada para cima é anotado.

a) Descreva no caderno Ω.
Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

b) Quais são os elementos do evento E_1: "o número obtido é múltiplo de 3"? $E_1 = \{3, 6\}$

c) Quais são os elementos do evento E_2: "o número obtido não é primo"? $E_2 = \{1, 4, 6\}$

2. Uma moeda honesta é lançada 2 vezes sucessivamente, e anota-se a sequência de faces obtidas. Determine no caderno:

a) Ω; Sendo K cara e C coroa, temos: $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$

b) os elementos do evento E: "sair ao menos uma cara". $E = \{(K, K), (K, C), (C, K)\}$

3. Um dado não viciado é lançado 2 vezes sucessivamente, e é anotada a sequência de faces obtidas. Determine no caderno:

a) $n(\Omega)$; $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$

b) $n(E_1)$, sendo E_1 o evento "o primeiro número obtido nesses lançamentos é 3";
$E_1 = \{(3, 1), (3, 2), \ldots, (3, 6)\}$; ou seja, $n(E_1) = 6$.

c) $n(E_2)$, sendo E_2 o evento "o produto dos números obtidos é ímpar";

d) $n(E_3)$, sendo E_3 o evento "a soma dos pontos obtidos é menor do que 7".

4. A seguir são listados alguns experimentos aleatórios. Classifique no caderno os espaços amostrais correspondentes em discretos (finito ou infinito enumerável) ou contínuos.

a) Sorteio de um número inteiro entre 0 e 10 000. Discreto finito.

b) Retirar aleatoriamente uma bolinha de gude de uma caixa que contém 500 bolinhas verdes, 1000 bolinhas pretas e 1500 bolinhas azuis, todas com a mesma medida de massa, e verificar a cor dela. Discreto finito.

c) Sorteio de um relógio entre os 60 nomes listados em uma cartela de rifa beneficente, por meio de um sorteador aleatório *on-line*. Discreto finito.

d) Medição do diâmetro de uma bola de gude, retirada ao acaso de um lote fabricado por uma indústria de brinquedos, em um teste de controle de qualidade. Contínuo.

e) Contagem do número de lançamentos sucessivos de um dado honesto até que seja obtida a sequência de resultados: (1, 2, 3, 4, 5, 6). Discreto infinito enumerável.

f) Aferição da medida de massa de um lutador de judô da categoria leve (66 kg a 73 kg) em uma competição. Contínuo.

g) Sorteio dos 5 algarismos que formam o número premiado na Loteria Federal. Discreto finito.

h) Contagem do número de palavras que começam com a letra A na página de um livro que foi selecionada ao acaso. Discreto finito.

5. Um dado não viciado é lançado 2 vezes sucessivamente. Seja o evento E "a soma dos pontos obtidos é menor ou igual a 9". Determine os elementos de $\overline{E}$.

6. Um dado não tendencioso é lançado 3 vezes sucessivamente. Seja o evento E "pelo menos um dos números obtidos é diferente dos outros". Determine os elementos de $\overline{E}$.
$\overline{E} = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)\}$

O enunciado a seguir é válido para as atividades **7** e **8**.

7. b) $\binom{32}{2} = \frac{32!}{2! \cdot 30!} = 496$

Uma classe tem 17 estudantes com 16 anos, e 15, com 17 anos. Pretende-se formar comissões de n estudantes, escolhidos ao acaso, para representar a classe perante a diretoria do colégio.

7. Determine no caderno o número de elementos do espaço amostral correspondente se:

a) $n = 1$ 32 **b)** $n = 2$ **c)** $n = 3$ $\binom{32}{3} = \frac{32!}{3! \cdot 29!} = 4\,960$

8. Se a comissão for composta de 2 estudantes, considere o evento E "há um estudante com 16 anos e um estudante com 17 anos na comissão" e determine no caderno $n(E)$. 255

9. Um experimento aleatório é composto de 2 etapas: primeiro, uma moeda não viciada é lançada e, em seguida, um dado não viciado é lançado. Descreva no caderno o espaço amostral desse experimento utilizando a representação K (cara) e C (coroa).
$\Omega = \{(K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6), (C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6)\}$

5. $\overline{E} = \{\underbrace{(4, 6), (6, 4), (5, 5)}_{\text{soma 10}}, \underbrace{(5, 6), (6, 5)}_{\text{soma 11}}, \underbrace{(6, 6)}_{\text{soma 12}}\}$

Frequência relativa e probabilidade

Foram feitos 80 lançamentos sucessivos de uma moeda não tendenciosa, dos quais 37 resultaram em cara (K) e 43 resultaram em coroa (C).

A razão $\frac{37}{80} = 0{,}4625$ representa a **frequência relativa** correspondente ao evento $\{K\}$; a razão $\frac{43}{80} = 0{,}5375$ representa a frequência relativa correspondente ao evento $\{C\}$.

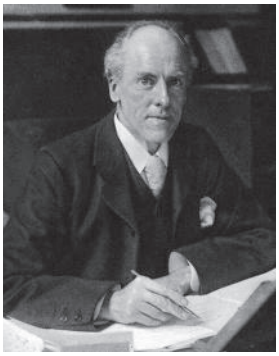
Imagine que tenham sido feitos mais 120 lançamentos dessa moeda gerando o seguinte resultado acumulado para os 200 lançamentos: 96 caras (K) e 104 coroas (C). Desse modo, a frequência relativa correspondente ao evento $\{K\}$ passou a ser $\frac{96}{200} = 0{,}48$ e a frequência relativa correspondente ao evento $\{C\}$ passou a ser $\frac{104}{200} = 0{,}52$.

À medida que se aumenta a quantidade de lançamentos, verifica-se, experimentalmente, que as frequências relativas correspondentes às ocorrências de cara e coroa ficam cada vez mais próximas entre si tendendo à igualdade, dada pelo valor 0,50. Quando isso ocorre, dizemos que o espaço amostral relativo ao lançamento da moeda é **equiprovável**.

No século XVIII, o francês Georges Louis Leclerc (1707-1788), conhecido como Conde de Buffon – naturalista com algumas incursões na teoria de probabilidades, no contexto de jogos – teria lançado uma moeda 4 040 vezes obtendo a face "cara" 2 048 vezes, de modo que a frequência relativa do evento $\{K\}$ é $\frac{2\,048}{4\,040} \simeq 0{,}5069$. Naturalmente, a frequência relativa do evento $\{C\}$ é $\frac{1992}{4\,040} \simeq 0{,}4931$ (note a proximidade dos valores).

Já o inglês Karl Pearson (1857-1936) – um dos responsáveis pelo desenvolvimento da Estatística – jogou uma moeda 24 000 vezes e obteve 12 012 caras, o que resulta em uma frequência relativa de $\frac{12\,012}{24\,000} = 0{,}5005$, ou seja, 50,05% de cara e $0{,}4995 = 49{,}95\%$ de coroa.

Fonte dos dados: CRATO, Nuno. *A Matemática das coisas*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática; Gradiva, 2009.



Wikipedia/Wikimedia Commons

Retrato de Karl Pearson. Autoria desconhecida. 1910.

Definição de probabilidade

Seja $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, com $k \in \mathbb{N}^*$, o espaço amostral finito de um experimento aleatório. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, consideremos o evento elementar ou unitário $\{a_i\}$. Vamos associar a cada um desses eventos um número real, indicado por $p(\{a_i\})$ ou simplesmente p_i, chamado **probabilidade** de ocorrência do evento $\{a_i\}$, tal que:

- $0 \leqslant p_i \leqslant 1, \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\}$;
- $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$.

Essa associação é feita de modo que p_i (com $i = 1, 2, \ldots, k$) seja suficientemente próximo da frequência relativa do evento $\{a_i\}$, quando o experimento é repetido um grande número de vezes. Por exemplo, no lançamento de uma moeda não tendenciosa, dizemos que a probabilidade de ocorrer cara é $\frac{1}{2}$, assim como a probabilidade de ocorrer coroa também é $\frac{1}{2}$, pois, lançando-se a moeda um grande número de vezes, espera-se que a frequência relativa do evento $\{K\}$ seja muito próxima de $\frac{1}{2}$, assim como a frequência relativa do evento $\{C\}$.

De maneira análoga à do exemplo anterior, se considerarmos o experimento que consiste em lançar um dado não viciado, é razoável supor que cada face tenha probabilidade $\frac{1}{6}$ de ocorrer, pois $\frac{1}{6}$ é o valor para o qual se aproxima a frequência relativa de cada um dos eventos $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}$, à medida que o experimento é repetido um grande número de vezes.

Note que o espaço amostral correspondente ao experimento "lançamento de um dado" também é **equiprovável**: todos os eventos unitários $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}$ têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Observação

Em jogos de azar, deve-se considerar, eventualmente, a existência de algum fator que influencie o resultado – por exemplo, os chamados dados viciados: em vez de serem cubos perfeitos, podem ter distribuição da medida de massa alterada, de modo que a frequência de ocorrência de uma face tenda a ser maior do que a das outras. Outros truques podem ser feitos também em moedas, roletas, etc.

Quando, no problema, não for feita qualquer menção, subentende-se que estamos diante de um jogo não viciado.

Acompanhe um exemplo em que uma moeda é viciada: imagine que uma moeda tenha sido lançada um número muito grande de vezes e tenha sido notado que a frequência da face cara (K) é o dobro da frequência da face coroa (C).

Nesse caso, podemos supor a seguinte distribuição de probabilidades para $\Omega = \{K, C\}$:

$$p(\{K\}) = \frac{2}{3} \text{ e } p(\{C\}) = \frac{1}{3}$$

Note, no entanto, que:

$$p(\{K\}) + p(\{C\}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Repare que a soma das probabilidades de todos os eventos unitários é sempre 1.

Nesse caso, diz-se que o espaço amostral relativo ao lançamento dessa moeda é **não equiprovável**.

mammothis/Shutterstock

Probabilidades em espaços amostrais equiprováveis

Seja Ω um espaço amostral finito:

$$\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, \text{ com } k \in \mathbb{N}^*.$$

Já estudamos que, quando o espaço é equiprovável, temos $p(\{a_1\}) = p(\{a_2\}) = \ldots = p(\{a_k\})$, ou, ainda, $p_1 = p_2 = \ldots = p_k$.

Como $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, tem-se: $p_i = \frac{1}{k}$.

Consideremos E um evento de Ω formado por r elementos (com $r \leqslant k$), isto é, $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$, com $r \in \mathbb{N}^*$. Temos:

$$p(E) = p_1 + p_2 + \ldots + p_r = \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{k}}_{r \text{ parcelas}} = \frac{r}{k}$$

Assim:

$$p(E) = \frac{r}{k} = \frac{\text{número de elementos de } E}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Informalmente, podemos interpretar essa razão como: "a probabilidade de ocorrer determinado evento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis (casos que nos interessam) e o número de casos possíveis (total de casos)".

Podcast

Transcrição de áudio

Observação

As propriedades citadas também são válidas para um espaço amostral finito não equiprovável.

Propriedades

Seja Ω um espaço amostral não vazio, finito e equiprovável, correspondente a um experimento aleatório. Valem as seguintes propriedades:

1ª) A probabilidade do evento certo é igual a 1.

Basta notar que, quando $E = \Omega$, $n(E) = n(\Omega)$ e, então, $p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = 1$.

2ª) A probabilidade do evento impossível é igual a 0.

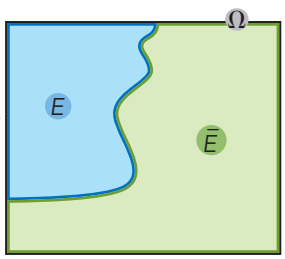
Se E é um evento impossível, $E = \varnothing$, $n(E) = 0$ e, portanto, $p(E) = 0$.

3ª) Se E é um evento de Ω, distinto do evento impossível e do evento certo, então $0 < p(E) < 1$.

Como $0 < n(E) < n(\Omega)$, dividimos todos os termos dessa desigualdade por $n(\Omega) > 0$:

$$\frac{0}{n(\Omega)} < \frac{n(E)}{n(\Omega)} < \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$$

Do que podemos concluir que $0 < p(E) < 1$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

4ª) Se E é um evento de Ω, então $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$.

Como $E \cup \overline{E} = \Omega$ e $E \cap \overline{E} = \varnothing$, podemos escrever:

$$n(E) + n(\overline{E}) = n(\Omega)$$

Dividindo os dois membros dessa igualdade por $n(\Omega) \neq 0$, temos:

$$\frac{n(E)}{n(\Omega)} + \frac{n(\overline{E})}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow p(E) + p(\overline{E}) = 1 \Rightarrow p(\overline{E}) = 1 - p(E)$$

Atividades resolvidas

2. Uma urna contém 15 bolas de mesmo tamanho e mesma medida de massa numeradas de 1 a 15. Uma bola é retirada ao acaso da urna. Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola com número maior ou igual a 11?

Solução:

Temos:

- $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$; perceba que esse espaço amostral é equiprovável.
- Seja o evento E: "o número da bola sorteada é maior ou igual a 11". Temos: $E = \{11, 12, 13, 14, 15\}$. Assim, temos:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \simeq 33{,}3\%$$

3. Um dado não viciado é lançado 2 vezes sucessivamente. Qual é a probabilidade de:

a) ocorrer 5 no primeiro lançamento e um número par no segundo?

b) o produto dos pontos obtidos ser maior do que 12?

Solução:

Como estudamos anteriormente, o conjunto dos resultados possíveis é formado por 36 pares ordenados (pois $6 \cdot 6 = 36$), como está apresentado no quadro no tópico "Espaço amostral". Todos os pares têm a mesma probabilidade de ocorrer.

a) O evento que nos interessa é $E = \{(5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$.

Assim, $p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

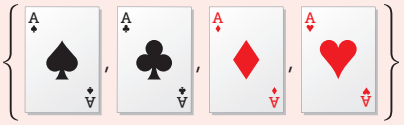
b) O evento que nos interessa é $E = \{(3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$.

Então, $p(E) = \frac{13}{36}$.

4. De um baralho comum, com 52 cartas, retiramos, ao acaso, uma carta. Qual é a probabilidade de não sair um ás?

Solução:

Podemos calcular, inicialmente, a probabilidade do evento E: "sair um ás", pois:

$E =$ 

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Temos $p(E) = \frac{4}{52}$, e, portanto, a probabilidade de não ocorrer um ás, evento complementar de E, é:

$$p(\overline{E}) = 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

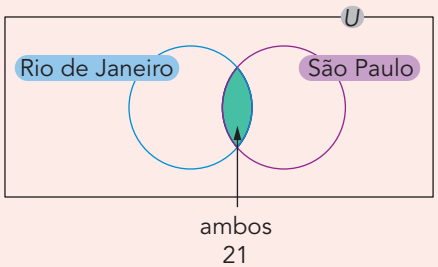
5. Em um grupo de 80 pessoas, todas de Minas Gerais, 53 conhecem o Rio de Janeiro, 38 conhecem São Paulo e 21 já estiveram nas duas cidades. Uma pessoa do grupo é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela tenha visitado apenas uma dessas cidades?

Caso julgue pertinente, reto-me com os estudantes o que são os diagramas de Venn.

Solução:

Para facilitar o entendimento, acompanhe os cálculos prestando atenção nos diagramas de Venn:

- Há 21 pessoas na intersecção de São Paulo e Rio de Janeiro.

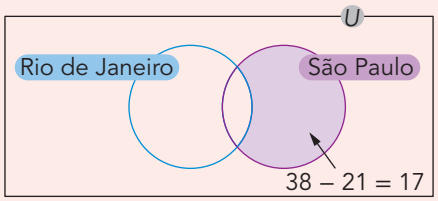


Banco de imagens/Arquivo da editora

Iurii Dzivinskyi/Shutterstock

O Rio de Janeiro (RJ) é uma das cidades turísticas mais famosas do mundo, e um dos pontos turísticos mais conhecidos da cidade é o Cristo Redentor. Foto de 2019.

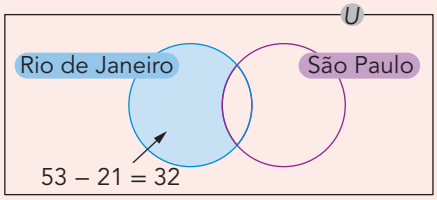
- O número de pessoas que conhecem exclusivamente São Paulo é $38 - 21 = 17$.



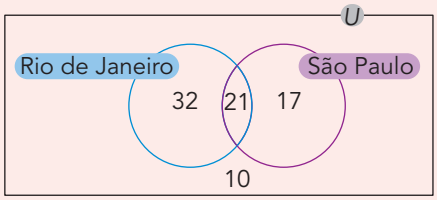
Banco de imagens/ Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- O número de pessoas que conhecem exclusivamente a cidade do Rio de Janeiro é 53 – 21 = 32.



Note que 21 + 17 + 32 = 70. Portanto, há 10 pessoas (80 – 70 = 10) que não conhecem qualquer uma das duas cidades.



- $n(\Omega) = 80$
- Considerando E o evento "a pessoa conhece apenas uma das duas cidades", temos $n(E) = 32 + 17 = 49$.
- A probabilidade pedida é: $\frac{49}{80} = 0{,}6125 = 61{,}25\%$.

6. Ao se cadastrar em um portal de compras na internet, o usuário deve criar uma senha formada por 4 algarismos quaisquer seguidos de 2 letras distintas e de 1 caractere especial, que pode ser: $, *, @ ou &. Um usuário criou uma senha completamente ao acaso nesse portal. Qual é a probabilidade de a senha criada pelo usuário ser formada por algarismos distintos, ter 2 vogais e não ter o caractere $? Considere o alfabeto com 26 letras.

Solução:

O número de senhas possíveis que podem ser cadastradas nesse portal é:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 4 = 26\,000\,000$$

Assim, $n(\Omega) = 26\,000\,000$ (número de casos possíveis).

Agora, precisamos determinar o número de elementos do evento "a senha tem algarismos distintos, 2 vogais e não tem o $".

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 302\,400$$

(número de casos favoráveis)

$$\underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}_{\substack{\text{escolha dos}\\ \text{algarismos}}} \cdot \underbrace{5 \cdot 4}_{\substack{\text{escolha}\\ \text{das vogais}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{escolha dos}\\ \text{caracteres}}}$$

Assim, a probabilidade pedida é:

$$\frac{302\,400}{26\,000\,000} \simeq 0{,}01163 = 1{,}163\%$$

7. Um ônibus de excursão com 20 brasileiros e 6 estrangeiros é parado em uma operação de vistoria de documentos. O funcionário escolhe, ao acaso, 3 passageiros para terem os documentos conferidos. Qual é a probabilidade de que todos sejam brasileiros?

Solução:

O espaço amostral é formado por todos os subconjuntos de 3 passageiros quaisquer que podemos formar com os 26 turistas. Temos, então:

$$n(\Omega) = C_{26,3} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3!} = 2600$$

O evento E que nos interessa é formado pelos subconjuntos de 3 turistas brasileiros que podemos formar. Temos:

$$n(E) = C_{20,3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140$$

Por fim, $p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{1140}{2600} \simeq 0{,}438 = 43{,}8\%$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

10. Uma urna contém 100 bolas de mesma medida de massa e mesmo tamanho numeradas de 1 a 100. Uma delas é retirada ao acaso. Qual é a probabilidade de o número da bola sorteada ser: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$

a) 18? $E = \{18\}$; ou seja, $p(E) = \frac{1}{100} = 1\%$.

b) 57? $E = \{57\}$; ou seja, $p(E) = \frac{1}{100} = 1\%$.

c) maior do que 63?

d) formado por 2 algarismos?

e) um quadrado perfeito?

10. c) $E = \{64, 65, 66, \ldots, 100\}$; ou seja, $n(E) = 37$; ou seja, $p(E) = \frac{37}{100} = 37\%$.

10. d) $E = \{10, 11, \ldots, 99\}$; $n(E) = 90$; ou seja, $p(E) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} = 90\%$.

$E = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$; ou seja, $p(E) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 10\%$.

15. a) Exemplo, de resposta: Lançando-se 2 vezes sucessivamente uma moeda honesta, qual é a probabilidade de ocorrerem 2 caras?
b) Não é possível, pois, como o número de casos possíveis de ocorrer o experimento é 6, considerando x o número de casos favoráveis, teríamos $\frac{x}{6} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 1{,}5$, o que não ocorre, pois x deve ser um número natural.

11. Uma carta é extraída ao acaso de um baralho de 52 cartas. Qual é a probabilidade de a carta sorteada:

a) ser 7 de copas? $\frac{1}{52}$

b) não ser o valete de espadas? $\frac{51}{52}$

12. Ao lançarmos um dado não tendencioso 2 vezes sucessivamente, qual é a probabilidade de que:

a) o número 1 ocorra em ao menos um lançamento? $\frac{11}{36}$

b) a soma dos pontos obtidos seja 7? $\frac{1}{6}$

c) os números obtidos sejam diferentes entre si? $\frac{5}{6}$

d) o módulo da diferença entre os pontos obtidos seja maior do que 2? $\frac{1}{3}$

13. Na tabela seguinte aparece o resultado parcial do levantamento sobre hábitos alimentares realizado em uma comunidade de 200 pessoas.

Levantamento sobre hábitos alimentares da comunidade

Indivíduo / Hábito alimentar	Jovem	Adulto	Total
Nunca come carne	17	*b*	***d***
Às vezes come carne	*a*	49	***e***
Frequentemente come carne	55	26	**81**
Total	**94**	***c***	**200**

Dados elaborados para fins didáticos.

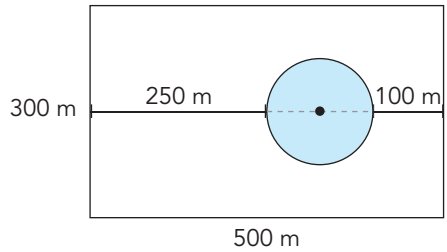
a) Determine no caderno os valores de a, b, c, d e e. $a = 22$; $b = 31$; $c = 106$; $d = 48$; $e = 71$.

b) Escolhendo ao acaso um indivíduo da comunidade, qual é a probabilidade de que seja adulto e não consuma carne? $\frac{31}{200}$

c) Escolhendo ao acaso um indivíduo da comunidade, qual é a probabilidade de que ele consuma carne frequentemente? $\frac{81}{200}$

14. Conta uma lenda que um tesouro foi escondido em algum lugar de um terreno, abaixo da superfície da terra. A imagem seguinte mostra a vista superior do terreno, em que o círculo mostrado é uma antiga arena usada para esportes e duelos. As dimensões desse terreno são indicadas a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Qual é a probabilidade de que o tesouro não tenha sido escondido abaixo da arena? Use $\pi \simeq 3$. 88,75%

15. Analise se é possível criar um problema cuja resposta seja "A probabilidade é igual a $\frac{1}{4}$" considerando cada um dos experimentos aleatórios a seguir. Caso seja, crie um no caderno e resolva-o.

a) Lançamentos sucessivos de uma moeda não tendenciosa 2 vezes.

b) Lançamento de um dado cúbico honesto.

c) Extração de uma carta de um baralho comum.

16. Considere a situação na qual o termo independente c da equação $x^2 - 3x + c = 0$ é escolhido aleatoriamente entre os elementos de $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Qual é a probabilidade de essa equação vir a ter raízes reais? 80%

17. Após um número suficientemente grande de lançamentos de uma moeda viciada, constatou-se que a frequência relativa do evento $\{C\}$ era o quádruplo da frequência relativa do evento $\{K\}$. Lançando-se a moeda uma única vez, qual é a probabilidade de sair coroa? 80%

18. Depois de um número suficientemente grande de lançamentos de um dado, constatou-se que, para cada 2 resultados com faces ímpares, ocorriam 3 resultados com faces pares. Se todas as faces pares do dado ocorrem com a mesma frequência, o que acontece também com todas as faces ímpares, determine no caderno a probabilidade de em um único lançamento obter:

a) face 1; $p(\text{ímpar}) = \frac{2}{5}$; $p(1) = p(3) = p(5) = \frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{15}$

b) face 6. $p(\text{par}) = \frac{3}{5}$; $p(2) = p(4) = p(6) = \frac{3}{5} : 3 = \frac{1}{5}$

15. c) Exemplo de resposta: Uma carta de um baralho comum é retirada ao acaso. Qual é a probabilidade de sair uma carta de paus?

22. Exemplo de resposta: Se Eliane escolher os caracteres de maneira aleatória, qual é a probabilidade de que a senha cadastrada seja **Kq53A3**?

27. a) Ω = {(pedra, pedra), (pedra, tesoura), (pedra, papel), (tesoura, pedra), (tesoura, tesoura), (tesoura, papel), (papel, tesoura), (papel, pedra), (papel, papel)}

Não escreva no livro

19. Uma caixa contém x bolas brancas, $3x$ bolas pretas e 3 bolas vermelhas, todas com as mesmas dimensões e mesma medida de massa. Uma bola é retirada ao acaso dessa caixa. Determine no caderno o menor valor possível de x, a fim de que a probabilidade de a bola sorteada ser preta seja maior do que 70%. 11

20. Um anagrama formado a partir das letras da palavra CARDUME é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ele começar e terminar por vogal? $\frac{1}{7}$

21. Palíndromos são números inteiros que não se alteram quando lidos da esquerda para a direita e vice-versa. Por exemplo, 7 227, 535, 10 301, etc.

a) Com 0, 1, ..., 9 formam-se números de 4 algarismos. Um deles é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele seja um palíndromo? 1%

b) Qual seria a resposta se o número fosse de cinco algarismos? 1%

22. Para cadastrar uma senha com 6 dígitos em um portal de comércio eletrônico, Eliane pretende usar letras (L) e algarismos (A) na ordem indicada:

$$L - L - A - A - L - A$$

Existe diferenciação entre letra minúscula e maiúscula, de modo que A e a são considerados caracteres distintos, por exemplo. Tendo o alfabeto 26 letras, elabore e resolva no caderno um problema envolvendo probabilidade e as informações dadas.

23. Uma pesquisa realizada com um grupo de clientes de um supermercado revelou que 63% consomem a marca **A** de óleo, 55% consomem a marca **B** e 32% consomem ambas as marcas. Uma pessoa do grupo é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela não consuma qualquer uma dessas marcas? 14%

24. Ao todo, 20 esfirras fechadas, todas com as mesmas medidas e o mesmo formato, são misturadas e colocadas em uma travessa; sendo 7 de queijo, 9 de carne e 4 de escarola. Alguém retira uma esfirra da travessa ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja retirada uma esfirra de carne?

$p(\text{carne}) = \frac{9}{20} = 0{,}45$; ou seja, $p(\text{carne}) = 45\%$.

25. Uma moeda é lançada 3 vezes sucessivamente. Qual é a probabilidade de sair cara mais de uma vez? 50%

26. Rita pretende colocar, no cadeado dela, uma senha de três algarismos que contenha, obrigatoriamente, em alguma posição, seu número favorito, que é o 78. Dentre todas as senhas possíveis que Rita pode formar, qual é a probabilidade de ela escolher a senha 178?

27. Você já jogou alguma vez o jogo "pedra-papel-tesoura"? Trata-se de um jogo de mãos, com 2 ou mais participantes. Os jogadores devem, simultaneamente, esticar a mão com um dos símbolos: pedra, papel e tesoura.

Sudowoodo/ Shutterstock

As regras do jogo são:

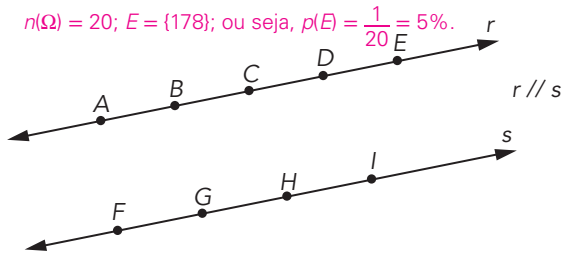
- pedra ganha da tesoura (a pedra quebra a tesoura);
- tesoura ganha do papel (a tesoura corta o papel);
- papel ganha da pedra (o papel embrulha a pedra);
- há empate se os participantes usarem o mesmo símbolo.

Sabendo que 2 pessoas estão jogando, responda no caderno os itens a seguir.

a) Escreva todos os possíveis resultados para os símbolos usados pelos jogadores em uma certa rodada.

b) Qual é a probabilidade de ocorrer empate em uma certa jogada?

A imagem a seguir será utilizada nas atividades **28** e **29**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

26. Podemos ter: 78 (↑ 10 opções) ou (↑ 10 opções) 78

$n(\Omega) = 20$; $E = \{178\}$; ou seja, $p(E) = \frac{1}{20} = 5\%$.

27. b) Note que, para haver empate em uma rodada, os 2 jogadores devem escolher o mesmo símbolo. Pelo item **a**, há 3 casos favoráveis e a probabilidade pedida é $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

28. O número total de escolhas possíveis é $C_{9,2} = 36$.

a) Para escolher 2 pontos entre os 5 de r, podemos proceder de 10 maneiras distintas ($C_{5,2} = 10$), e a probabilidade é, então, $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

28. Escolhem-se, ao acaso, 2 quaisquer dos 9 pontos dados. Qual a probabilidade de escolhermos:

a) 2 pontos de r?

b) 2 pontos de s?

c) um ponto de r e um ponto de s?

A probabilidade é $\frac{5 \cdot 4}{36} = \frac{5}{9}$.

29. Escolhem-se, ao acaso, 3 pontos quaisquer entre os 9 pontos dados. Unindo-se os pontos escolhidos, qual é a probabilidade de esses pontos serem vértices de um triângulo?

Aproximadamente 83,3%.

30. São sorteadas simultaneamente 3 cartas de um baralho. Qual é a probabilidade de que:

a) apareçam o 10 de ouros, o 7 de copas e o ás de paus? $\frac{1}{22\,100}$

b) apareça o 10 de ouros? $\frac{3}{52}$

c) todas as cartas sejam de espadas? $\frac{11}{850}$

31. No sistema de tipagem sanguínea ABO do ser humano, foram mapeados 4 possíveis fenótipos: sangue do tipo A, sangue do tipo B, sangue do tipo AB e sangue do tipo O. Os 3 alelos diferentes de um mesmo gene são os responsáveis por determinar essa variação, sendo eles conhecidos como: I^A, I^B e i.

Genótipo	Fenótipo
I^AI^A ou I^Ai	Sangue do tipo A
I^BI^B ou I^Bi	Sangue do tipo B
I^AI^B	Sangue do tipo AB
ii	Sangue do tipo O

Um recém-nascido terá sua tipagem sanguínea ABO definida a partir da combinação de um alelo proveniente do óvulo materno e um alelo proveniente do espermatozoide paterno. Vamos supor, por exemplo, que uma mãe tenha genótipo I^AI^B e o pai tenha genótipo I^Ai, a criança poderá ter genótipos I^AI^A, I^Ai, I^AI^B e I^Bi. Ou seja, ela tem 50% de probabilidade de ter sangue do tipo A, 25% de ter sangue do tipo AB e 25% de ter sangue do tipo B.

Uma pessoa com sangue do tipo A apresenta aglutinogênio A e aglutinina anti-B e, portanto, não pode receber transfusão sanguínea de pessoas de sangue do tipo B ou do tipo AB. Uma pessoa com sangue do tipo B apresenta aglutinogênio B e aglutinina anti-A e, portanto, não pode receber transfusão sanguínea de pessoas de sangue do tipo A ou do tipo AB. Já uma pessoa com sangue do tipo AB tem aglutinogênio A e aglutinogênio B, sem apresentar aglutininas, o que possibilita o recebimento de sangue de qualquer outra tipagem. Uma pessoa com sangue do tipo O, por outro lado, não tem aglutinogênios, mas apenas aglutininas anti-A e anti-B, o que faz com que ela só possa receber transfusão de sangue de uma outra pessoa que tenha sangue do tipo O.

Durante o trabalho de parto, frequentemente ocorre mistura de sangue do bebê e da mãe. O pediatra deve estar atento, pois, com a passagem de aglutininas presentes no sangue materno para o sangue do recém-nascido, pode ocorrer hemólise (alteração nos glóbulos vermelhos) e icterícia (condição em que o fígado não processa os glóbulos vermelhos corretamente), trazendo consequências graves para o bebê. Nessas circunstâncias, serão necessários cuidados médicos hospitalares, sendo inconveniente, por exemplo, a realização do parto em domicílio. Considere 3 casais atendidos por uma pediatra e seus respectivos genótipos para os itens a seguir.

Casal	Genótipo da mãe	Genótipo do pai
1	I^AI^B	I^Bi
2	ii	I^Ai
3	I^Ai	I^AI^B

a) Para cada um dos casais, determine no caderno a probabilidade do fenótipo do tipo de sangue do bebê.

b) Para cada caso, qual é a probabilidade de o bebê ter tipagem sanguínea que poderia ser afetada por aglutininas presentes no sangue materno?

c) Para quais casais a médica deve desaconselhar o parto em domicílio, caso fosse do interesse do casal? Justifique sua resposta com base nos itens anteriores.

d) Quais outras situações médicas você conhece nas quais análises de probabilidade podem ajudar na tomada de decisões?

Os exemplos de resposta encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

28. b) Podemos escolher 2 pontos entre os 4 de s de 6 maneiras distintas ($C_{4,2} = 6$). Logo, a probabilidade é $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Não escreva no livro

PROJETO

Reprodução/ONU

Relatório de catástrofes climáticas

Leia a reportagem a seguir, que cita brevemente alguns eventos climáticos que aconteceram no Brasil em 2023:

Relatório revela que Brasil teve 12 eventos climáticos extremos em 2023

[...]

No Brasil, foram registrados 12 eventos climáticos extremos, sendo nove deles considerados incomuns e dois sem precedentes. Cinco ondas de calor, três chuvas intensas, uma onda de frio, uma inundação, uma seca e um ciclone extratropical [...]. Muitas ondas de calor intensas afetaram a região central da América do Sul no final de agosto a dezembro, causando temperaturas escaldantes em pleno inverno. Durante a segunda quinzena de agosto, as temperaturas em partes do Brasil ultrapassaram os 41 °C. [...]

RELATÓRIO revela que Brasil teve 12 eventos climáticos extremos em 2023. *ONU News Perspectiva Global Reportagens Humanas*, Brasília, DF, 8 maio 2024. Disponível em: https://tedit.net/itzh0z. Acesso em: 8 ago. 2024.

Nelson ALMEIDA/AFP

Em maio de 2024, o Governo Federal declarou estado de calamidade pública devido a intensas chuvas que provocaram uma grande inundação no Rio Grande do Sul, estabelecendo recordes de precipitação em grande parte do estado. Porto Alegre (RS), foto de 2024.

Dica

Cidades e Mudanças Climáticas

Assista ao terceiro episódio da série "Mudanças Climáticas no Brasil" do programa de pesquisa sobre mudanças climáticas globais da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp), disponível em: https://tedit.net/0g6kao (acesso em: 8 ago. 2024).

Pensando em um projeto

Atualmente, a tendência de aquecimento global é real, com consequente aumento de catástrofes climáticas. A ocorrência desses desastres, especialmente quando se associam às condições de vulnerabilidade das ocupações urbanas, está associada à falta de gerenciamento das estatísticas e probabilidades de ocorrências dessas catástrofes.

Para a organização deste projeto final vamos refletir sobre episódios climáticos como: **enchentes, deslizamentos, secas e queimadas**. Para isso, a proposta envolve a organização de relatórios analíticos envolvendo a citação dos dados pesquisados e usando os conhecimentos de probabilidade e a elaboração de ações que ajudem a mitigar os efeitos de um episódio climático, nos seguintes temas:

- Tema **1**: enchentes, inundações, alagamentos;
- Tema **2**: deslizamentos e erosões;
- Tema **3**: vendavais, aumento do nível do mar e ciclone extratropical;
- Tema **4**: ondas extremas de calor e de frio;
- Tema **5**: seca e queimadas.

Para começar

- Organizem-se em 5 grupos. Cada grupo será responsável por uma das temáticas indicadas.

Plano de ação

Etapa 1

Em grupo, planejem a pesquisa utilizando citações externas. Para isso, é conveniente que conversem sobre os objetivos da pesquisa e elaborem possíveis argumentos sobre o tema. Escolham os recursos de coleta e organização dos dados mais adequados à pesquisa.

Etapa 2

Conversem com o professor sobre a proposta do projeto de relatório que será elaborado para realizar essa pesquisa. Em grupo, realizem a pesquisa utilizando fontes confiáveis, como *sites* governamentais, de instituições de ensino superior e de pesquisa; jornais ou revistas oficiais com datas de publicação ou de atualização mais recentes. Não se esqueçam de anotar a referência das fontes consultadas para citá-las.

Etapa 3

Com o professor e usando seus conhecimentos de probabilidade, proponha ações que ajudem a mitigar os efeitos de eventos climáticos intensos. Verifiquem quais são as informações necessárias para que seja possível calcular a probabilidade de ocorrência de algum evento climático indicado nos temas pesquisados.

Isso envolve saber o número total de casos possíveis (ou seja, o número de elementos do espaço amostral) e o número de elementos do evento cuja probabilidade se deseja calcular (ou seja, o número de casos favoráveis).

Se possível, utilizem os dados reais oriundos da pesquisa da etapa **2**, por exemplo:

São Paulo pode ter recorde de calor para o mês de junho de 2024, no dia 4. A probabilidade de ocorrer um calor recorde nesse dia é de 85%. Se a mesma previsão fosse dada para 20 dias, em cerca de quantos dias poderia haver recorde de calor? Considera-se a mesma probabilidade de 85% do dia 4/6/2024.

- Espaço amostral (Ω): 20 dias
- $n(E)$: x
- $p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \Rightarrow \frac{85}{100} = \frac{x}{20} \Rightarrow 100x = 1700 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = 17$

Logo, dos 20 dias, a probabilidade aponta que em 17 dias poderá ocorrer recorde de calor.

Com essas informações organizadas, o grupo deve elaborar reflexões sobre os dados propondo uma apresentação com foco em providências preventivas e/ou ações de redução dos impactos do evento climático.

Etapa 4

Com a conclusão das etapas **1**, **2** e **3**, organizem o que será considerado para o relatório analítico. Para isso, deve-se também refletir sobre os impactos dos eventos climáticos de cada tema e as possíveis ações que devem ser adotadas para enfrentar esses desafios no Brasil.

Etapa 5

Elaborem o relatório no formato escolhido. Nesse tipo de material, a citação é primordial. No final do seu relatório, cite todas as fontes de onde você retirou as informações para sua pesquisa. Para completar, consulte como fazer uma citação na seção *Produções em foco*.

Etapa 6

Produto final: apresentação dos relatórios analíticos climáticos com a probabilidade de ocorrência de algum evento climático.

Os grupos devem preparar uma roda de conversa para apresentar os resultados dos relatórios climáticos.

Caso considerem possível, organizem uma campanha de conscientização na comunidade escolar, para que haja uma reflexão sobre o tema e para que possam ser tomadas providências preventivas e/ou adotadas ações de redução dos impactos em cada tema explorado.

Probabilidade da união de dois eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω finito, não vazio e equiprovável. Vamos encontrar uma expressão para a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, isto é, a probabilidade da ocorrência da união dos eventos A e B, ou seja, $p(A \cup B)$. Consideremos 2 casos:

- $A \cap B = \varnothing$

Temos:

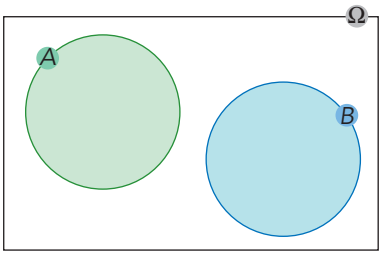
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Como $n(\Omega) \neq 0$, podemos escrever:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

Logo:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesse caso, A e B são chamados eventos **mutuamente exclusivos**.

- $A \cap B \neq \varnothing$

Das noções sobre conjuntos, temos:

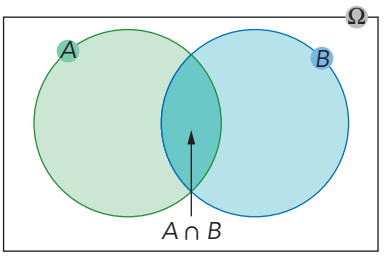
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo membro a membro por $n(\Omega) \neq \varnothing$, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

Daí:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

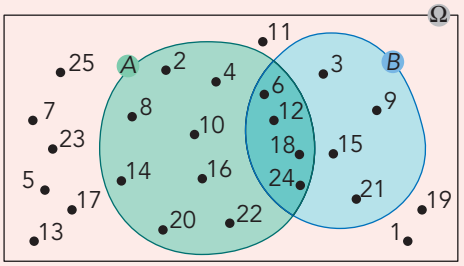


Banco de imagens/Arquivo da editora

O evento $A \cap B$ representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

Atividades resolvidas

8. Vamos imaginar que uma urna contenha 25 bolas de mesmo tamanho e mesma medida de massa, numeradas de 1 a 25, e que uma delas seja retirada ao acaso. Qual a probabilidade de o número da bola sorteada ser múltiplo de 2 ou de 3?



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

- $\Omega = \{1, 2, \ldots, 25\}$
- Evento A: "o número é múltiplo de 2"; $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$.
- Evento B: "o número é múltiplo de 3"; $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$.

Queremos determinar $p(A \cup B)$.

Note que os números 6, 12, 18 e 24 são elementos comuns ao evento A e ao evento B. Assim, $A \cap B = \{6, 12, 18, 24\}$ é o evento formado pelos múltiplos simultâneos de 2 e de 3, isto é, os elementos dele são os múltiplos de 6. Temos:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} - \frac{4}{25} = \frac{16}{25} = 0{,}64 = 64\%$$

34. a) $A \cap B = \varnothing$; $p(A \cap B) = 0$
Daí, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) \Rightarrow 0{,}75 = 0{,}35 + p(B) \Rightarrow p(B) = 0{,}4$.
b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow 0{,}75 = 0{,}29 + p(B) - 0{,}09 \Rightarrow p(B) = 0{,}55$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

32. Um dado não tendencioso é lançado 2 vezes sucessivamente. Sejam os eventos:

- A: "a soma dos pontos obtidos é 10";
- B: "os números obtidos são distintos".

Calcule $p(A \cup B)$. $\frac{31}{36}$

33. Para apresentar um trabalho, um professor sorteará ao acaso 1 estudante, dentre os 30 da turma. O sorteio será feito de acordo com o número da chamada. Qual é a probabilidade de o número do estudante sorteado ser:

a) primo ou maior do que 10? $\frac{4}{5}$

b) múltiplo de 7 ou de 5? $\frac{1}{3}$

c) quadrado perfeito ou divisor de 36? $\frac{1}{3}$

34. Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral finito e equiprovável, com $p(A \cup B) = 0{,}75$. Em cada caso, calcule no caderno $p(B)$ admitindo que:

a) $p(A) = 0{,}35$ e A e B são mutuamente exclusivos;

b) $p(A) = 0{,}29$ e $p(A \cap B) = 0{,}09$.

35. A análise da série histórica de pluviometria dos últimos 20 anos, em uma praia do litoral cearense, mostrou que a probabilidade de chover 5 ou mais dias no mês de outubro é de 33% e a probabilidade de chover 5 ou menos dias nesse mesmo mês é de 81%. Qual é a probabilidade de chover exatamente 5 dias, nessa praia, no próximo mês de outubro?

35. Evento A: "chove 5 dias ou mais"; $p(A) = 0{,}33$. Isto é, chove em 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 9, ..., ou 31 dias.
Evento B: "chove 5 dias ou menos"; $p(B) = 0{,}81$. Isto é, chove em 5, ou 4, ou 3, ou 2, ou 1, ou nenhum dia.
Evento $A \cap B$: "chove exatamente 5 dias"; $A \cap B = \{5\}$.
$A \cup B = \Omega = p(A \cup B) = 100\% = 1$ (evento certo).
Daí: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1{,}00 = 0{,}33 + 0{,}81 - p(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow p(A \cap B) = 1{,}14 - 1{,}00 \Rightarrow p(A \cap B) = 0{,}14 = 14\%$.

Probabilidade condicional

Um avião fretado por uma operadora turística de Minas Gerais partiu de Belo Horizonte com destino a Natal, no Rio Grande do Norte, com 140 passageiros. Durante o voo, cada turista respondeu a 2 perguntas:

- Já voou antes?
- Já esteve em Natal?

Os dados obtidos com base nas respostas dos passageiros encontram-se organizados na tabela seguinte.

Resposta dos passageiros ao questionário durante o voo para Natal (RN)

Pergunta 2 \ Pergunta 1	Voando pela primeira vez	Já havia voado	Total
Não conhecia Natal	83	22	**105**
Já conhecia Natal	23	12	**35**
Total	**106**	**34**	**140**

Dados elaborados para fins didáticos.

Um passageiro é selecionado ao acaso e verifica-se que ele nunca tinha viajado de avião. Qual é a probabilidade de ele já conhecer Natal?

Nesse caso, já temos um conhecimento parcial do resultado do experimento: "o passageiro estava voando pela primeira vez". Com isso, o número de casos possíveis se reduz a 106. Nesse novo universo, que é o espaço amostral reduzido, o número de passageiros que já conheciam Natal é 23.

Assim, a probabilidade pedida é $p = \frac{23}{106}$.

Esse número expressa a probabilidade de a pessoa escolhida conhecer Natal sabendo que era a primeira vez que viajava de avião. Vamos denominar tal número de **probabilidade condicional** e indicá-lo por:

$$p(\text{já conhecer Natal} \mid \text{primeira vez de avião})$$

(lê-se: "dado que" ou "sabendo que")

Do valor encontrado em $p = \frac{23}{106}$, podemos notar que:

- 23 corresponde ao número de passageiros que já estiveram em Natal e estavam voando pela primeira vez;
- 106 corresponde ao número de passageiros que voavam pela primeira vez.

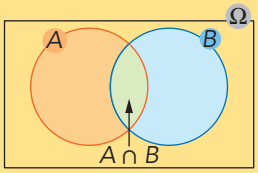
Temos, então:

$$p(\text{já conhece Natal} \mid \text{primeira vez de avião}) = \frac{\text{número de passageiros que já conheciam Natal e voavam pela primeira vez}}{\text{número de passageiros que voavam pela primeira vez}}$$

A probabilidade condicional pode ser definida do seguinte modo:

Sejam A e B eventos do espaço amostral finito (Ω), não vazio e equiprovável.
A probabilidade condicional do evento B acontecer sabendo que ocorreu o evento A é indicada por $p(B \mid A)$ e é dada por:

$$p(B \mid A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \quad \text{I}$$



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Podemos encontrar uma expressão equivalente a I dividindo o numerador e o denominador do 2º membro de I por $n(\Omega) \neq \emptyset$:

$$p(B \mid A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}} \Rightarrow p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad \text{II}$$

Atividades resolvidas

9. Um dado não tendencioso é lançado 2 vezes sucessivamente. Sabendo-se que a soma dos pontos obtidos é menor do que 6, qual é a probabilidade de que em ao menos um lançamento ocorra a face 2?

Solução:

Vamos reduzir o espaço amostral. Com a informação dada, o número de casos possíveis passa a ser 10:

$\Omega' = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

Dos elementos de Ω', é preciso selecionar os pares em que pelo menos um dos resultados é 2. Há 5 casos favoráveis: (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3) e (3, 2).

Assim, a probabilidade pedida é: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\%$.

Observação

Para resolver problemas de probabilidade condicional, em geral é mais prático seguir o raciocínio desenvolvido no problema dos turistas do voo fretado: reduz-se o espaço amostral e se calculam as probabilidades nesse novo espaço.

A fórmula II, obtida para o cálculo da probabilidade condicional, tem importância mais teórica do que prática, como estudaremos um pouco mais adiante.

36. Com a informação dada, $\Omega = \{\underset{\text{vogal}}{a}, b, c, d, \underset{\text{vogal}}{e}, f, g, h, \underset{\text{vogal}}{i}, j\}$, a probabilidade pedida é $\frac{3}{10} = 30\%$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

36. Uma das letras do alfabeto é escolhida ao acaso. Sabendo que ela é uma das 10 primeiras letras, qual é a probabilidade de que seja uma vogal?

37. Se um dado não viciado é lançado 2 vezes sucessivamente e os números obtidos são:

a) iguais, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos seja um número par? 100%

b) distintos, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos seja 8? $13,\overline{3}\%$

38. Um dado não tendencioso é lançado, e sabe-se que a face superior tem um número par.

a) Qual é a probabilidade de que o número obtido seja primo?

b) Qual é a probabilidade de que o número obtido seja um divisor de 5?

39. De um baralho comum, uma carta é retirada ao acaso. Se a carta escolhida:

a) não é valete nem dama, qual é a probabilidade de ser o rei de ouros? $\frac{1}{44}$

b) não é de ouros, qual é a probabilidade de não ser de copas? $\frac{2}{3}$

c) é de copas, qual é a probabilidade de ser um rei? $\frac{1}{13}$

d) não é de copas, qual é a probabilidade de ser o valete de espadas ou o valete de ouros? $\frac{2}{39}$

e) não é de copas, qual é a probabilidade de ser de ouros ou ser um rei? $\frac{5}{13}$

40. Um casal e outras 4 pessoas são colocados, ao acaso, em uma fila ordenada. Sabendo que o casal não ficou junto, qual é a probabilidade de que as extremidades da fila tenham sido ocupadas pelas pessoas que formam o casal? 10%

41. No cadastro de um cursinho pré-vestibular estão registrados 600 estudantes de 17 e 18 anos de idade assim distribuídos:

- 380 estudantes com 17 anos de idade;
- 105 estudantes com 18 anos de idade que já concluíram o Ensino Médio;
- 200 estudantes com 17 anos de idade que estão cursando o Ensino Médio.

Um nome do cadastro é selecionado ao acaso. Qual é a probabilidade de o nome escolhido ser de:

a) $\frac{12}{19}$

a) um estudante com 17 anos de idade sabendo-se que já concluiu o Ensino Médio?

b) alguém que esteja cursando o Ensino Médio, sabendo-se que é um estudante com 18 anos de idade? $\frac{23}{44}$

Probabilidade da intersecção de dois eventos

38. $\Omega' = \{2, 4, 6\}$

Teorema da multiplicação

a) $E = \{2\}$; ou seja, $p(E) = \frac{1}{3}$. **b)** $E = \varnothing$ (os únicos divisores de 5 são 1 e 5, que não pertencem a Ω'.) Assim, $p(E) = 0$.

Seja Ω um espaço amostral finito e não vazio. A e B são eventos de Ω. Quando estudamos probabilidade condicional, constatamos que, na expressão $p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$:

- $p(B \mid A)$ representa a probabilidade de ocorrer B dado que ocorreu o evento A;
- $p(A \cap B)$ representa a probabilidade de ocorrência simultânea (ou sucessiva) dos eventos A e B (ou a probabilidade da intersecção de A com B);
- $p(A)$ representa a probabilidade de ocorrer A.

De $p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ segue, imediatamente, a relação:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A)$$

Isso significa que, para se calcular a probabilidade de ocorrer a intersecção dos eventos A e B (ocorrência simultânea ou sucessiva de A e B), que é $p(A \cap B)$, é preciso **multiplicar** a probabilidade de ocorrer um deles, $p(A)$, pela probabilidade de ocorrer o outro sabendo que o primeiro (ou o anterior) já ocorreu ($p(B \mid A)$). Acompanhe o uso dessa relação na atividade resolvida a seguir.

As imagens não estão representadas em proporção.

Atividades resolvidas

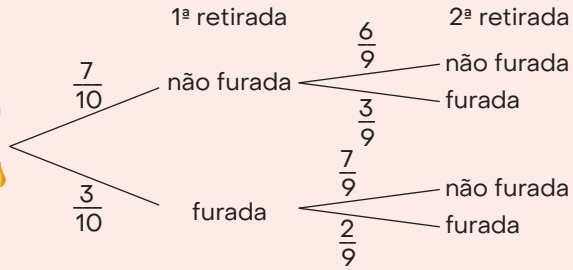
10. Em um cesto de roupas há 10 camisetas, das quais 3 estão furadas. Duas camisetas são retiradas ao acaso, sucessivamente e sem reposição do cesto.

Qual é a probabilidade de que as 2 camisetas retiradas não estejam furadas?

Solução:

Podemos construir um diagrama de árvore para representar os resultados possíveis desse experimento associando probabilidades a cada "galho". Perceba que as probabilidades referentes à 2ª retirada estão condicionadas ao resultado da 1ª.

Alex Argozino/ Arquivo da editora



Estamos interessados em calcular:

$$p\left(\begin{matrix}\text{não}\\ \text{furada}\end{matrix} \cap \begin{matrix}\text{não}\\ \text{furada}\end{matrix}\right) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$$

$\frac{7}{10}$: probabilidade de a 1ª camiseta não estar furada

$\frac{6}{9}$: probabilidade de a 2ª camiseta não estar furada sabendo que a 1ª também não estava (note o 1º galho)

Logo, a resposta é $p = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

Não escreva no livro

Pense nisto

Na atividade resolvida **10**, considerando o mesmo experimento, qual é a probabilidade de que sejam retiradas 2 camisetas do cesto, sendo 1 furada e a outra não?

Há 2 casos:

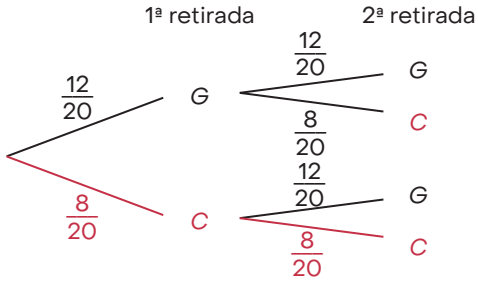
- a 1ª camiseta retirada do cesto é furada e a 2ª não: $p_1 = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{21}{90}$.
- a 1ª camiseta retirada do cesto não é furada e a 2ª sim: $p_2 = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{21}{90}$.

Reunindo os 2 casos, temos que a probabilidade pedida é $p = p_1 + p_2 = 2 \cdot \left(\frac{21}{90}\right) = \frac{7}{15}$. Note que o número 2 é a quantidade de ordens distintas de sair uma furada e a outra não.

Eventos independentes

Vamos considerar o seguinte problema: em uma caixa no depósito de um *pet shop*, estão guardados 12 sachês de ração úmida de gatos e 8 sachês de ração úmida de cães, todos com o mesmo formato. Um funcionário retira, ao acaso, sucessivamente e com reposição, 2 desses sachês. Qual é a probabilidade de que os 2 sachês retirados sejam de cães? Analise o diagrama de árvore:

studiogsto/Freepikck



Pense nisto: Acompanhe outras duas maneiras.

• Podem ocorrer três casos:

(X acerta e Y erra) ou (X erra e Y acerta) ou (X acerta e Y acerta)

$0{,}80 \cdot 0{,}10 = 0{,}08$; $0{,}20 \cdot 0{,}90 = 0{,}18$; $0{,}80 \cdot 0{,}90 = 0{,}72$

Assim, a probabilidade pedida é $0{,}08 + 0{,}18 + 0{,}72 = 0{,}98$.

• A probabilidade de que ambos os atiradores **não** atinjam o alvo é: $(1 - 0{,}80) \cdot (1 - 0{,}90) = 0{,}20 \cdot 0{,}10$. Assim, a probabilidade de que pelo menos um atinja o alvo é: $1 - 0{,}20 \cdot 0{,}10 = 0{,}98$, pois são eventos complementares.

12. Um dado não viciado é lançado, e é registrado o número obtido na face superior. Em seguida, uma moeda honesta é lançada e é registrada a face dela. Qual é a probabilidade de obtermos número 5 e coroa?

Solução:

Os eventos "sair número 5" e "sair coroa" são independentes, pois o fato de sair número 5 no lançamento do dado não muda a probabilidade de sair coroa no lançamento da moeda. Desse modo, a probabilidade pedida é:

$$p = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{sair número 5}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{sair coroa}} = \frac{1}{12}$$

13. A probabilidade de um atirador X acertar um alvo é de 80%, e a probabilidade de um atirador Y acertar o mesmo alvo é de 90%. Se os dois atirarem uma única vez, simultaneamente, qual é a probabilidade de que:

a) ambos atinjam o alvo?

b) pelo menos um atinja o alvo?

Solução:

Nesse problema é natural admitir independência entre os eventos.

a) $p(X \cap Y) = p(X) \cdot p(Y) = 0{,}80 \cdot 0{,}90 = 0{,}72 = 72\%$

b) Sabemos que $p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X \cap Y)$. Usando o item anterior, temos que:

$p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X) \cdot p(Y) = 0{,}80 + 0{,}90 - 0{,}72 = 0{,}98 = 98\%$

Pense nisto

Proponha outra maneira de resolver o item **b** da atividade resolvida **13**.

ATIVIDADES

42. **a)** $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$ **b)** $\left(\frac{13}{52}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

Não escreva no livro

42. Duas cartas, de um baralho de 52, são retiradas sucessivamente e ao acaso. Qual é a probabilidade de saírem 2 cartas de copas se a retirada é feita:

a) sem reposição? **b)** com reposição?

43. Uma moeda e um dado não viciados são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de ocorrer coroa e um número primo? $\frac{1}{4}$

44. Estão sobre uma mesa 2 estojos idênticos. Um deles tem 3 canetas pretas, 2 vermelhas e 3 azuis; o outro tem 2 canetas pretas, 4 azuis e 1 vermelha. Fabrício escolhe ao acaso um estojo e dele retira, aleatoriamente, 1 caneta. Qual é a probabilidade de Fabrício retirar uma caneta azul? $\frac{53}{112}$

45. Considere os seguintes experimentos aleatórios e resolva no caderno as questões propostas.

a) O lançamento de uma moeda não viciada seguida do sorteio de uma letra dentre as 10 primeiras do alfabeto. Qual é a probabilidade de ocorrer cara e a letra B ser sorteada? $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$

b) O lançamento sucessivo de uma moeda não viciada 2 vezes, seguido do sorteio de uma letra dentre as 10 primeiras do alfabeto. Qual é a probabilidade de ocorrerem 2 caras e a letra sorteada ser D? $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$

46. Dois dados não viciados, um cúbico (faces de 1 a 6) e um tetraédrico (vértices de 1 a 4), são lançados simultaneamente.

M.A. Kleen/Shutterstock

a) Qual é a probabilidade de sair o número 1 nos 2 dados? $\frac{1}{24}$

Comente com os estudantes que, ao lançar um dado tretraédrico, o resultado obtido será o número indicado no vértice superior do dado.

51. c) $\underbrace{0{,}70 \cdot 0{,}95}_{\substack{\text{probabilidade de chover e ocorrer congestionamento}}} + \underbrace{0{,}30 \cdot 0{,}60}_{\substack{\text{probabilidade de não chover e ocorrer congestionamento}}} = 0{,}665 + 0{,}18 = 0{,}845 = 84{,}5\%$

b) Qual é a probabilidade de sair nos 2 dados um número primo? $\frac{1}{4}$

c) Qual é a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja maior do que 6? $\frac{5}{12}$

47. Em uma bandeja há 10 pastéis, sendo 3 de palmito, 4 de carne e 3 de queijo, todos com o mesmo formato e aparência. Se Dudu retirar 3 deles ao acaso, sucessivamente e sem reposição, qual é a probabilidade de que:

a) todos sejam de carne? $\frac{1}{30}$

b) exatamente 2 deles sejam de palmito? $\frac{7}{40}$

c) seja retirado um de cada sabor? 0,30

48. De cada 15 camisas que um varejista põe à venda, 10 são fabricadas pela confecção C_1 e 5 são fabricadas pela confecção C_2. Os percentuais de camisas com defeito produzidas nas confecções C_1 e C_2 são, respectivamente, 4% e 1%. Uma camisa que está à venda no varejista é selecionada ao acaso.

a) Qual é a probabilidade de que ela não apresente defeitos e tenha sido produzida em C_1?

b) Qual é a probabilidade de a camisa apresentar defeito?

49. Elabore e resolva no caderno um problema envolvendo eventos independentes considerando uma caixa com 20 bolas de gude de mesmo tamanho, mesma medida de massa e pelo menos 2 cores diferentes.

50. Em uma cidade, 70% dos jovens de até 20 anos completaram o Ensino Médio. Nessa faixa etária, temos que 20% dos jovens que completaram o Ensino Médio estão desempregados e 50% dos jovens que não completaram o Ensino Médio estão desempregados.

Os exemplos de resposta encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Organize no caderno as informações dadas em uma tabela de dupla entrada supondo um universo de 2 000 jovens de até 20 anos.

b) Organize no caderno as informações dadas em um diagrama de árvore associando probabilidades a cada galho.

c) Escolhendo-se ao acaso um jovem de até 20 anos dessa cidade, qual é a probabilidade de ele estar empregado?

d) Escolhe-se ao acaso um jovem de até 20 anos dessa cidade e verifica-se que ele está empregado. Qual é a probabilidade de ele ter concluído o Ensino Médio?

51. A probabilidade de ocorrer congestionamento em uma via de acesso ao aeroporto de uma cidade, no período da manhã, é de 60% quando não chove; com chuva, essa probabilidade aumenta para 95%. Katia leu na previsão do tempo, no celular dela, na véspera da viagem, que a probabilidade de chover na manhã seguinte era de 70%.

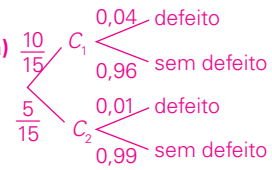
a) Organize no caderno as informações dadas em um diagrama de árvore. Não se esqueça de colocar as probabilidades associadas a cada galho do diagrama.

b) Qual é a probabilidade de Katia enfrentar congestionamento com chuva durante a ida ao aeroporto?

c) Qual é a probabilidade de Katia enfrentar congestionamento durante a ida ao aeroporto?

Jihan Nafiaa Zahri/Shutterstock

48. a)



$p(C_1 \cap \text{sem defeito}) =$

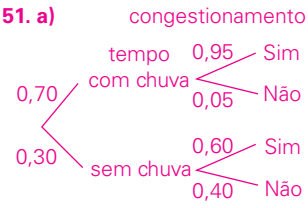
$= \frac{10}{15} \cdot 0{,}96 = 0{,}64 = 64\%$

b) $p = \frac{10}{15} \cdot 0{,}04 + \frac{5}{15} \cdot 0{,}01 =$

$= \frac{0{,}45}{15} = 0{,}03 = 3\%$

49. Exemplo de resposta: Uma caixa contém 20 bolas de gude, todas de mesmo tamanho, sendo 8 verdes e 12 pretas. Selecionando-se, ao acaso e com reposição, 3 bolas sucessivamente, qual é a probabilidade de que todas sejam verdes?

51. a)



b) $0{,}70 \cdot 0{,}95 = 0{,}665 = 66{,}5\%$

Antes de realizar uma viagem é importante se planejar, tanto para se organizar com relação ao meio de transporte utilizado para a viagem, quanto para se preparar para possíveis contratempos ocorridos durante a viagem, como mudança de clima ou trânsito para chegar até algum local, por exemplo.

INTERLIGANDO

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Saúde*.
Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Probabilidades e os métodos contraceptivos

A adolescência é um período de constante mudança biológica e social do ser humano, compreendendo a faixa etária dos 10 aos 19 anos. A primeira fase da adolescência abrange dos 10 aos 14 anos, enquanto a segunda fase se inicia aos 15 e termina aos 19 anos.

É geralmente durante a segunda fase que ocorre o primeiro contato sexual, e, com isso, surgem questões que necessitam ser trabalhadas, entre elas a gravidez na adolescência. Devido ao aumento considerável de mães menores de 20 anos entre 1991 e 2000, a gravidez na adolescência passou a ser entendida como uma questão de saúde pública a partir da década de 1990.

Tendo em vista a possibilidade de engravidar, muitas adolescentes optam por métodos contraceptivos. Os principais métodos contraceptivos reversíveis ou métodos anticoncepcionais (MAC) fornecidos pelo Sistema Único de Saúde (SUS) são:

- anticoncepcionais hormonais orais combinados ou apenas de progestagênio;
- anticoncepcionais hormonais injetáveis combinados ou apenas de progestagênio;
- dispositivo intrauterino (DIU) de cobre;
- preservativos (feminino e masculino).

O uso de diferentes métodos contraceptivos se dá desde a antiguidade, entretanto muitos dos anticoncepcionais que são utilizados atualmente só foram criados a partir do século XIX, como é o caso das pílulas anticoncepcionais, preservativo feito de látex e do DIU de cobre.

New Africa/Shutterstock

Não escreva no livro

Os anticoncepcionais hormonais orais (AHO), conhecidos como pílula anticoncepcional, são um método contraceptivo hormonal que pode ser combinado (progestagênio e estrogênio) ou conter apenas progestagênio. Eles têm a função de inibir a ovulação.

O AHO é um dos métodos mais utilizados no Brasil devido à sua alta taxa de eficácia quando é ministrado de modo correto, cerca de 99,7%, além de ser prático e de não interferir na vida sexual.

Assim como o AHO, o anticoncepcional hormonal injetável (AHI) é um MAC reversível que inibe a ovulação através da inibição do eixo hipotálamo-hipófise-ovariano. As doses dos AHI são ministradas mensalmente ou trimestralmente, sendo altamente eficazes, apresentando taxas de gravidez máximas de 0,0 a 0,7 por 100 mulheres por ano.

O dispositivo intrauterino (DIU) de cobre é um pequeno aparelho em formato de T inserido no útero, eficaz na contracepção por até 10 anos. Seu mecanismo de ação envolve íons de cobre que alteram o endométrio e o muco cervical, impedindo a ascensão dos espermatozoides. É uma opção não hormonal, reversível, duradoura e altamente eficaz, com uma taxa de eficácia semelhante à esterilização.

O preservativo é um método contraceptivo de barreira que impede o contato entre espermatozoide e óvulo e previne infecções sexualmente transmissíveis (ISTs). O preservativo masculino é uma capa de látex que cobre o pênis, com uma taxa de falha de 2% se usado corretamente. O preservativo feminino é inserido no canal vaginal, com eficácia entre 79% e 95%.

Fontes dos dados: ANJOS, Bárbara Gomes; ANDRADE, João Vitor Giorgete Braga. Revisão bibliográfica acerca de métodos anticoncepcionais disponibilizados pelo Sistema Único de Saúde (SUS) e criação de um guia informativo sobre contracepção. *In*: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNICAMP, 29, 2021, Campinas. *Resumos* [...]. Campinas: Unicamp, 2021. Disponível em: https://tedit.net/j9o7wp. PASSARINHO, Nathalia. Os contraceptivos que você tem direito de exigir pelo SUS – e o que fazer se não conseguir. *BBC News Brasil*, 29 jun. 2018. Disponível em: https://tedit.net/cezc6f. Acesso em: 8 ago. 2024.

1. De acordo com o texto, se considerar exclusivamente critérios probabilísticos, qual contraceptivo uma adolescente deveria escolher: o AHI ou o preservativo feminino? Explique no caderno.

Considerando o AHI, cuja taxa de gravidez teórica máxima é 0,7%, conclui-se que esse método tem 99,3% de eficácia mínima; já o preservativo feminino tem proteção máxima de 95%. Assim, deve-se optar pelo AHI.

2. Se uma adolescente pretende escolher entre um dos métodos, o AHI e o uso de preservativo masculino em todas as relações, qual contraceptivo ela deveria escolher, baseando-se exclusivamente em critérios probabilísticos?

2. O AHI, pois teria uma proteção mínima de 99,3% (100% – 0,7% = 99,3%, sendo 0,7% a taxa de gravidez), enquanto o preservativo masculino traria uma proteção de 98%.

3. Fabiana está em dúvida entre 2 opções:

I. AHI;

II. Dupla proteção: uso do preservativo masculino + AHO.

a) Do ponto de vista exclusivamente probabilístico, escreva no caderno a opção que Fabiana escolherá determinando a probabilidade de engravidar nos dois casos.

3. a) Na opção **I**, a probabilidade de engravidar é de 0,7%.
Na opção **II**, ela ficará grávida apenas no caso em que ocorrer falha em ambos os métodos. Essa probabilidade é:

$$\underbrace{\frac{2}{100}}_{\substack{\text{probabilidade de engravidar com} \\ \text{o uso do preservativo masculino.}}} \cdot \underbrace{\frac{0{,}3}{100}}_{\substack{\text{probabilidade de engravidar} \\ \text{com o uso não correto do AHO.}}} = 0{,}00006 = 0{,}006\%$$

Assim, ela deverá optar pela opção **II**.

b) Escreva algumas vantagens de utilizar o preservativo tanto masculino quanto feminino.

A principal vantagem é que o preservativo, por ser um método de barreira, protege também de infecções sexualmente transmissíveis, como a infecção por HIV, sífilis, hepatites, gonorreia e clamídia.

VIRALIZE!

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação em Direitos Humanos* e *Vida Familiar e Social*.

O sistema Braille

O Comitê Paralímpico Brasileiro (CPB) e [uma empresa multinacional de artigos desportivos] realizaram o lançamento dos primeiros uniformes para os Jogos Paralímpicos de Paris 2024 [...].

[...]

A coleção foi desenvolvida em colaboração com os atletas paralímpicos, desde a fase inicial de *design* até os testes. A coleção inclui jaqueta de pódio, moletom, camisetas, camisa polo, regata, bermuda, calça, *legging*, tênis, mochila, meia, manguito e boné. Pela primeira vez, os fãs do Movimento Paralímpico poderão comprar as peças iguais às utilizadas pelos esportistas. As informações sobre as vendas serão divulgadas em breve.

Todas as peças contam com detalhes de acessibilidade como: mochilas com alça nos puxadores; calças com zíperes na lateral da parte inferior próximo ao tornozelo para facilitar atletas com prótese; e todas as peças com etiquetas internas em Braille, destacando as cores correspondentes, auxiliando na seleção das roupas. [...]

CPB e Asics revelam uniformes dos Jogos Paralímpicos de Paris 2024; peças serão comercializadas. *Comitê Paralímpico Brasileiro*, São Paulo, 14 maio 2024. Disponível em: https://tedit.net/r9e56e. Acesso em: 7 ago. 2024.

Pessoa cega realizando leitura em braile.

Kesh Creation/Shutterstock

Não escreva no livro

13/12 – Dia do Cego

A deficiência visual é definida como a perda total ou parcial, congênita ou adquirida, da visão. O nível de acuidade visual pode variar, o que determina dois grupos de deficiência:

Cegueira – há perda total da visão ou pouquíssima capacidade de enxergar, o que leva a pessoa a necessitar do Sistema Braille como meio de leitura e escrita.

Baixa visão ou visão subnormal – caracteriza-se pelo comprometimento do funcionamento visual dos olhos, mesmo após tratamento ou correção. As pessoas com baixa visão podem ler textos impressos ampliados ou com uso de recursos óticos especiais.

Do total da população brasileira, 23,9% (45,6 milhões de pessoas) declararam ter algum tipo de deficiência. Entre as deficiências declaradas, a mais comum foi a visual, atingindo 3,5% da população. Segundo a Organização Mundial da Saúde, as principais causas de cegueira no Brasil são: catarata, glaucoma, retinopatia diabética, cegueira infantil e degeneração macular.

Para evitar a cegueira na infância, é importante, ainda, a vacinação de mulheres adultas, fundamental na prevenção de rubéola, sarampo e toxoplasmose, que podem levar doenças congênitas à criança durante a gravidez. Já o adulto deve fazer o acompanhamento regular de doenças metabólicas e preexistentes, como pressão alta e diabetes, que também podem causar cegueira.

[...]

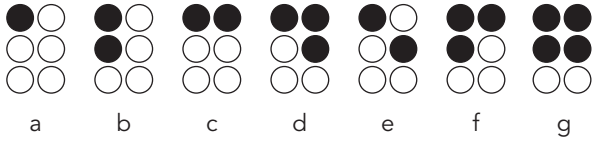
13/12 – Dia do Cego. *BVS MS*. Disponível em: https://tedit.net/3nsled. Acesso em: 7 ago. 2024.

1. Pesquise as ações tomadas pelo poder público e pelo privado que visam favorecer a inclusão social de pessoas com deficiência visual. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

2. Você conhece o sistema braile? O que sabe sobre ele? Se necessário, pesquise o assunto.
Resposta pessoal.

3. O sistema conta com um arranjo de 6 pontos, dos quais pelo menos um está em relevo, dispostos na vertical em 2 colunas de 3 pontos cada, no que se convencionou chamar de "cela braile".
A seguir estão representadas algumas letras na escrita braile. Cada ponto em preto corresponde a um ponto em relevo.

3. a) Sim. De fato, para cada ponto de um arranjo há duas possibilidades: estar em relevo ou não. Pelo princípio multiplicativo, teríamos $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$; ou seja, 64 caracteres. No entanto, devemos excluir o caso em que nenhum caractere está em relevo, totalizando 63.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Como podemos notar, as letras são representadas variando a posição e a quantidade de pontos em relevo. Use seus conhecimentos de Análise Combinatória para resolver as questões a seguir.

a) Todas as letras do alfabeto podem ser representadas nesse sistema?

b) Quanto "sobra" para outros caracteres? Que outros caracteres seriam esses?
Sobram 37 outros caracteres, que podem representar pontuação, como vírgula e ponto de interrogação, parênteses, arroba, asterisco, sinais de operações matemáticas, etc.

4. Faça uma pesquisa sobre a representação dos números naturais pelo sistema braile e escreva um texto no caderno explicando como essa representação é feita utilizando a cela braile.
A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

PARA FUNDAMENTAR SABERES

1. **(Enem)** Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas? Alternativa **b**.

a) $9 \times \frac{6!}{(6-2)!}$

b) $9 \times \frac{6!}{(6-2)! \times 2!}$

c) $9 \times \frac{4!}{(4-2)! \times 2!}$

d) $9 \times \frac{2!}{(2-2)! \times 2!}$

e) $9 \times \frac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1$

2. Uma caixa contém 2 bolas brancas, 3 bolas pretas e 4 bolas vermelhas, todas de mesmo tamanho.

a) Retirando ao acaso 1 bola da caixa, qual é a probabilidade de que ela seja vermelha? $\frac{4}{9}$

b) Retirando, ao acaso, sucessivamente e com reposição, 2 bolas da caixa, a probabilidade de que ambas sejam vermelhas é maior, menor ou igual à probabilidade encontrada no item **a**? Determine-a no caderno. Menor; $\frac{16}{81}$.

c) Retirando, ao acaso, sucessivamente e com reposição, 3 bolas da caixa, a probabilidade de que todas sejam vermelhas é maior, menor ou igual à probabilidade encontrada no item **b**? Determine-a no caderno.

d) Qual é o menor número de retiradas que devem ser feitas, com reposição, para que a probabilidade de que todas as bolas retiradas sejam vermelhas seja menor que 1%? 6

2. c) Menor; $\frac{64}{729}$.

3. Flávia e Gisele vão disputar um jogo de dados. Em cada rodada, apenas 1 das jogadoras lança 2 dados cúbicos não viciados simultaneamente. A vencedora é aquela que primeiro conseguir a soma dos pontos obtidos nas 2 faces igual a 9. Elas jogarão os dados alternadamente, começando por Flávia. Qual é a probabilidade de Flávia vencer o jogo na 3ª rodada? 0,08779

4. **(Uerj)** Um alvo de dardos é formado por três círculos concêntricos que definem as regiões **I**, **II** e **III**, conforme mostra a ilustração.

Reprodução da UERJ

Um atirador de dardos sempre acerta alguma região do alvo, sendo suas probabilidades de acertar as regiões **I**, **II** e **III** denominadas, respectivamente, P_I, P_{II} e P_{III}.

Para esse atirador, valem as seguintes relações:

- $P_{II} = 3P_I$
- $P_{III} = 2P_{II}$

Calcule [no caderno] a probabilidade de que esse atirador acerte a região **I** exatamente duas vezes ao fazer dois lançamentos. 1%

5. O setor de reservas de um hotel de praia fez um levantamento das reservas e eventuais cancelamentos nos últimos anos, chegando aos seguintes dados: 45% das reservas são feitas por meio de canais eletrônicos de grandes empresas mundiais de reserva de hotéis, 35% são feitas por meio de agentes

5. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

de viagens e o restante é feito diretamente pelo setor de reservas no *site* do hotel. Os percentuais de cancelamento são, respectivamente, iguais a 40%, 15% e 20%.

a) Organize no caderno as informações do enunciado usando um diagrama da árvore.

b) Uma reserva no hotel feita para o próximo feriado nacional é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela não seja cancelada?

6. **(UPE)** Uma urna contém 18 bolas vermelhas, 12 amarelas e 20 brancas, sendo todas idênticas. Quantas bolas brancas devem ser retiradas dessa urna, de modo que, ao sortear uma bola, a probabilidade de ela ser branca seja igual a $\frac{1}{6}$? Alternativa **c**.

a) 16 **b)** 15 **c)** 14 **d)** 13 **e)** 12

7. **(Enem)** Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

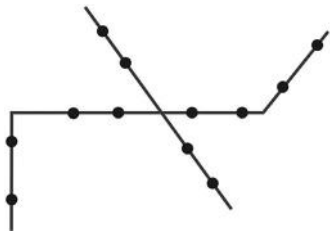
Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas? Alternativa **e**.

a) 64 **c)** 49 **e)** 28

b) 56 **d)** 36

8. **(Fuvest-SP)** Doze pontos são assinalados sobre quatro segmentos de reta de forma que três pontos sobre três segmentos distintos nunca são colineares, como na figura.



Reprodução/Fuvest-SP, 2018.

O número de triângulos distintos que podem ser desenhados com os vértices nos pontos assinalados é: Alternativa **d**.

a) 200. **c)** 208.

b) 204. **d)** 212. **e)** 220.

Nesta Unidade estudamos Análise combinatória e Probabilidade. Respostas pessoais.

1. Faço uso do princípio multiplicativo para resolver problemas gerais de contagem? Reconheço situações em que é necessário usar o princípio aditivo da contagem? Nesse caso, o que devo considerar para contar o número de elementos da união de 2 conjuntos?

2. Reconheço no diagrama da árvore a estrutura multiplicativa associada ao princípio fundamental da contagem e o uso como apoio para resolução de problemas? Resolvo problemas de contagem diferenciando agrupamentos ordenados e não ordenados?

3. Identifico espaços amostrais discretos e contínuos? Reconheço eventos em espaços amostrais equiprováveis ou não?

4. Resolvo problemas de probabilidade de ocorrência de um evento sem ou com auxílio de técnicas de contagem? Resolvo problemas de probabilidade envolvendo operações entre eventos (união e intersecção) e eventos sucessivos?

5. Reconheço eventos independentes e resolvo problemas envolvendo esse conceito?

6. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?

7. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas, exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

Renato Soares/Pulsar Imagens

Indígenas da etnia Kuikuro da Aldeia Ipatse fazendo pintura corporal para o Jawari, um ritual indígena marcado por pinturas corporais, momentos de canto e de demonstração de força. Parque Nacional do Xingu, Gaúcha do Norte (MT). Foto de 2023.

Dica

Reportagem "Pinturas indígenas apresentam a identidade de cada etnia nos JMPI"

Essa reportagem contém um vídeo explicando alguns significados da pintura corporal por meio de entrevistas com indígenas.

Disponível em: https://tedit.net/y7b57x. Acesso em: 9 ago. 2024.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Unidade 5

GEOMETRIA ANALÍTICA, TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E LADRILHAMENTO

Esta abertura favorece o desenvolvimento do TCT *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* e do TCT *Diversidade Cultural*.

Pinturas corporais indígenas

Por meio das pinturas corporais, os indígenas carregam no corpo e no rosto a identidade cultural de sua comunidade. As pinturas são as marcas de muitas populações e são diferentes para cada ocasião. Feitas normalmente de elementos naturais, como urucum e jenipapo, as tinturas podem se manter na pele por dias.

Cada traço possui um significado característico. O conceito depende de cada etnia, sendo que uma mesma pintura pode ter sentidos variados de acordo com a comunidade e circunstância. Existem desenhos que demonstram sentimentos, desde os mais felizes até os de revolta e indignação pelos problemas enfrentados nas aldeias. Muitas vezes significam também luto, tristeza e passagem.

Outra característica representada pela arte corporal indígena são as peles de animais como jabutis, cobras, entre outros. O ato de se pintar ritualmente é, ainda, uma forma de expressar os valores da cultura de uma etnia. Além da relevância estética, as pinturas traduzem usos, costumes, saberes e tradições ancestrais, obedecendo a preceitos simbólicos e ritualísticos passados de geração em geração.

[...]

ASSESSORIA DE COMUNICAÇÃO/FUNAI. Pinturas corporais indígenas carregam marcas de identidade cultural. Portal *gov.br*, Brasília, DF, 29 set. 2022. Disponível em: https://tedit.net/kdrubb. Acesso em: 9 ago. 2024.

Não escreva no livro

1. Você já tinha conhecimento dos possíveis significados das pinturas corporais indígenas? Consegue estabelecer alguma relação com sua própria cultura, a do ambiente em que você vive?

1. Exemplo de resposta: é possível que os estudantes relacionem as pinturas indígenas com as tatuagens que atualmente são feitas por muitas pessoas.

2. Você percebeu formas geométricas na imagem? Identificou algum elemento que já estudou em Matemática?

2. Exemplo de resposta: pode-se notar alguns elementos que se parecem com segmentos de reta e triângulos, além de padrões geométricos.

Imagem de fundo: meow_meow/Shutterstock

capítulo

9 Noções de Geometria analítica

Plano cartesiano

História da Matemática

Início da Geometria analítica

O segundo terço do século XVII foi um importante período da história da Matemática, com destaque para a grande intercomunicação de ideias entre os matemáticos franceses, dos quais destacamos René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). A eles usualmente atribui-se a invenção da Geometria analítica.

René Descartes recebeu, desde cedo, uma educação diferenciada e dedicou grande parte de sua vida à filosofia e à ciência. Sua obra mais importante, datada de 1637, é o *Discurso sobre o método*, em que apresenta as bases filosóficas do seu método para o estudo das ciências.

O método cartesiano baseava-se em trazer algumas regras das demonstrações algébricas para outros campos do conhecimento. Segundo Descartes, não se poderia aceitar nada como verdade se não fossem apresentadas provas com clareza e distinção. Esse método de organizar o pensamento científico, conhecido como racionalismo, rompia com o empirismo do passado.

Um dos três apêndices do *Discurso sobre o método* é nomeado como *A Geometria*. Nesse texto, Descartes afirma que seu método levaria a uma compreensão dos elementos e proposições geométricos usando apenas a Álgebra (os processos algébricos), sem necessitar do apoio da visão (das interpretações e argumentações feitas por meio dos gráficos e interpretações geométricas).

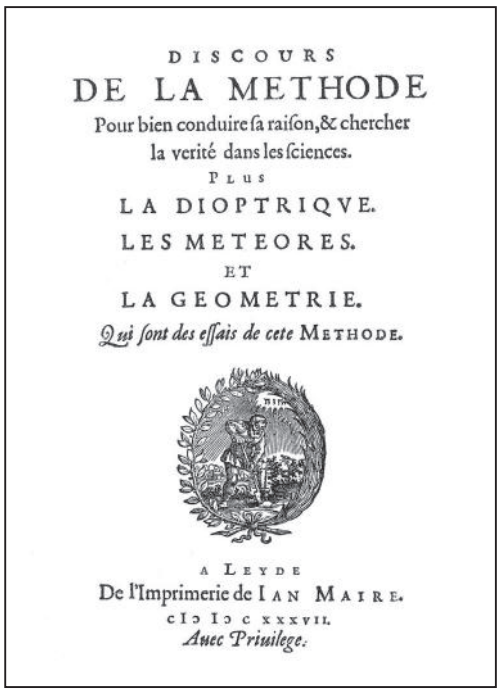
Tal texto foi fundamental para a origem da Geometria analítica que conhecemos hoje. Nela as figuras planas são representadas em um referencial formado por dois eixos perpendiculares, conhecido como **sistema de coordenadas cartesianas**, nome dado em homenagem a Descartes. Vale lembrar, no entanto, que, na obra, não havia nada muito sistemático sobre sistema de coordenadas, distâncias, inclinação de retas, ângulos, etc.

SHEILA TERRY/SPL/Fotoarena

René Descartes ensinando astronomia à rainha Cristina I da Suécia, por volta de 1649. Ilustração de D. Jaime Seix, 1876.

Pierre de Fermat, ao contrário de Descartes, dedicava-se à Ciência e à Matemática por prazer. Sua grande contribuição para a Geometria analítica foi a descoberta (um ano antes do aparecimento de *A Geometria*) do seguinte princípio: "Uma equação que apresenta duas quantidades incógnitas descreve uma linha, reta ou curva". Fermat estudou desde casos de equações lineares simples até equações quadráticas mais gerais. Sua obra, mais sistemática e didática que a de Descartes, não foi publicada em vida e, por esse motivo, a Geometria analítica era considerada, na época, invenção única de Descartes.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

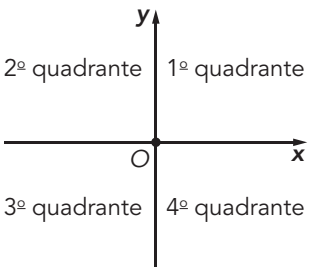

DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon,& chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ c xxxvii.
Auec Priuilege.

NYC./Alamy/Fotoarena

A Geometria foi publicado em 1637 como um apêndice do *Discurso sobre o método*.

Consideremos dois eixos orientados x e y, perpendiculares em O. O plano determinado por esses eixos é chamado **plano cartesiano**.

Cada uma das partes em que o plano fica dividido pelos eixos x e y recebe o nome de **quadrante**. Os quatro quadrantes são numerados no sentido anti-horário, como indicado na figura a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

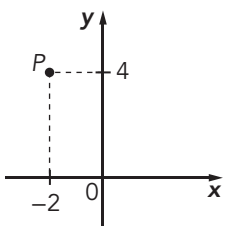
- O eixo x (ou eixo Ox) recebe o nome de **eixo das abscissas**.
- O eixo y (ou eixo Oy) recebe o nome de **eixo das ordenadas**.
- O ponto O é a **origem** do sistema de eixos cartesianos ortogonal ou retangular. Esse sistema é frequentemente indicado por xOy.

O ponto

Dado um ponto P qualquer do plano cartesiano, as coordenadas de P são os números reais x_P e y_P, indicados, em geral, como o par ordenado (x_P, y_P).

Assim, se um ponto P tem coordenadas dadas por $P(-2, 4)$, então a abscissa de P vale -2 e sua ordenada vale 4.

P encontra-se no 2º quadrante do plano cartesiano.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos destacar algumas características dos pontos no plano cartesiano.

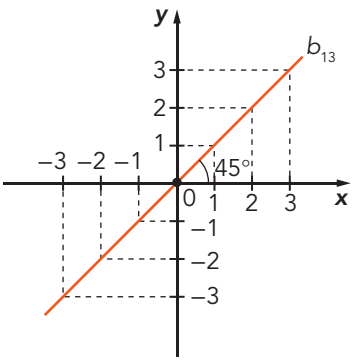
- Cada ponto P do plano cartesiano corresponde a um único par ordenado (x_P, y_P) de números reais e, inversamente, cada par ordenado (x_P, y_P) de números reais corresponde a um único ponto P do plano.
- Um ponto pertence ao eixo das abscissas se sua ordenada é nula. Desse modo, para todo $a \in \mathbb{R}$, o ponto $(a, 0)$ pertence ao eixo x.
- Um ponto pertence ao eixo das ordenadas se sua abscissa é nula. Assim, para todo $b \in \mathbb{R}$, o ponto $(0, b)$ pertence ao eixo y.
- Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares (b_{13}) se suas coordenadas são iguais. Assim, para todo $a \in \mathbb{R}$, o ponto (a, a) pertence à bissetriz b_{13}.
- Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes pares (b_{24}) se suas coordenadas são opostas. Para todo $a \in \mathbb{R}$, o ponto $(a, -a)$ pertence à bissetriz b_{24}.

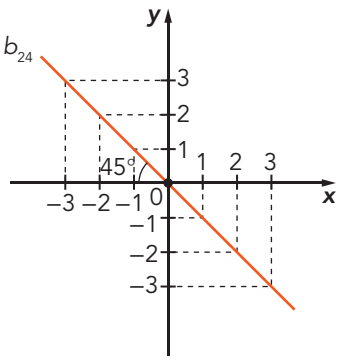
Nas figuras a seguir estão indicadas as bissetrizes dos quadrantes ímpares e dos quadrantes pares.

Não escreva no livro

Pense nisto

Por que os pontos de b_{13} têm coordenadas iguais?



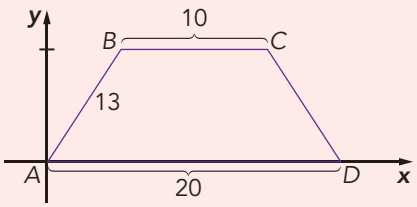


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto: Analisando qualquer triângulo retângulo de vértices na origem, em um ponto P qualquer da b_{13} e na projeção de P sobre o eixo x, verifica-se que ele é isósceles, por ter dois ângulos de medida 45°. Logo, seus catetos são congruentes e, portanto, $x_P = y_P$.

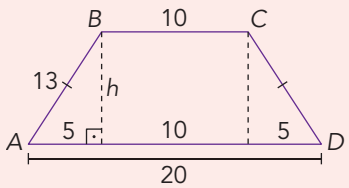
Atividades resolvidas

1. Determine as coordenadas dos vértices A, B, C e D do trapézio isósceles a seguir.



Solução:

Sabemos que as coordenadas de A são $(0, 0)$ por coincidir com a origem e as de D são $(20, 0)$. Precisamos analisar o trapézio para encontrar as coordenadas de B e C.



Assim, encontramos as abscissas de B e C (respectivamente 5 e 15).

Calculando a medida da altura do trapézio para determinar as ordenadas de B e C, temos:

$$13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12, \text{ pois } h > 0.$$

Assim:

$$A(0, 0), B(5, 12), C(15, 12), D(20, 0).$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

1. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

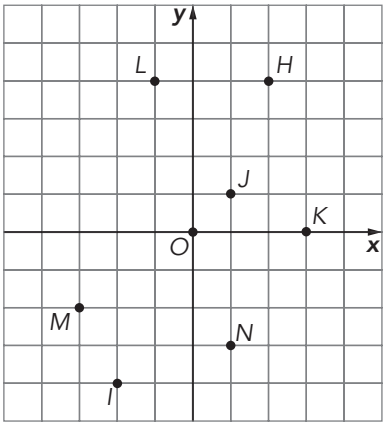
3. a) $\left.\begin{matrix} a > 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 4º quadrante **b)** $\left.\begin{matrix} -a < 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 3º quadrante **d)** $\left.\begin{matrix} -a < 0 \\ -b > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 2º quadrante

1. Represente no caderno, em um mesmo plano cartesiano os pontos:

$A(1, 3)$, $B(-2, 1)$, $C(0, -4)$, $D(-3, 0)$, $E(-2, -3)$, $F(2, -1)$, $G(3, -4)$ e $H\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. Escreva, no caderno, as coordenadas dos pontos dados no plano cartesiano a seguir. Considere que o lado de cada quadradinho mede 1 unidade de medida de comprimento.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$H(2, 4)$; $I(-2, -4)$; $J(1, 1)$; $K(3, 0)$; $L(-1, 4)$; $M(-3, -2)$; $N(1, -3)$; $O(0, 0)$.

3. Sendo a um número real positivo e b um número real negativo, determine no caderno em que quadrante se encontra cada um dos pontos a seguir.

a) $P(a, b)$

b) $Q(-a, b)$

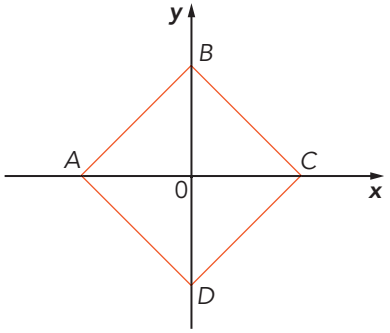
c) $\left.\begin{matrix} 2a > 0 \\ \frac{b}{3} < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 4º quadrante $R\left(2a, \frac{b}{3}\right)$

d) $S(-a, -b)$

4. Os pontos $A(3, 5)$, $B(2, m)$ e $C(-4, n)$ pertencem a uma reta paralela ao eixo das abscissas. Determine no caderno os valores de m e n.

As ordenadas de A, B e C devem ser as mesmas. Assim, $m = n = 5$.

5. Na figura, $ABCD$ é um quadrado cujo lado mede 6 unidades de medida de comprimento. Obtenha as coordenadas dos quatro vértices do quadrado.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$\triangle ABC$ é retângulo em B: $(AC)^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow AC = 6\sqrt{2} = BD$.

Assim, $AO = CO = 3\sqrt{2}$; $BO = DO = 3\sqrt{2}$.

As coordenadas pedidas são:

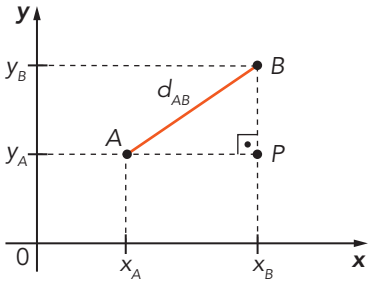
$A(-3\sqrt{2}, 0)$; $B(0, 3\sqrt{2})$; $C(3\sqrt{2}, 0)$; $D(0, -3\sqrt{2})$.

Distância entre 2 pontos

Dados 2 pontos distintos A e B do plano cartesiano, chama-se **distância** entre eles a medida de comprimento do segmento de reta com extremidades nesses pontos.

Indicaremos a medida de distância entre A e B por d_{AB}.

Sem perda de generalidade, vamos considerar o segmento de reta $\overline{AB}$ no primeiro quadrante.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que:

- $d_{AP} = |x_A - x_B|$
- $d_{BP} = |y_A - y_B|$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo APB, temos:

$$(d_{AB})^2 = (d_{AP})^2 + (d_{BP})^2$$
$$(d_{AB})^2 = (|x_A - x_B|)^2 + (|y_A - y_B|)^2$$

Como $(|x_A - x_B|)^2 = (x_A - x_B)^2$ e $(|y_A - y_B|)^2 = (y_A - y_B)^2$, temos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Podemos notar ainda que, como temos $(x_A - x_B)^2 = (x_B - x_A)^2$ e $(y_A - y_B)^2 = (y_B - y_A)^2$, a ordem das diferenças que aparecem no radicando não importa. Assim, pode-se escrever, também:

$$d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Em que Δx representa a diferença entre as abscissas, e Δy, a diferença entre as ordenadas dos pontos.

Observação

De agora em diante será omitida a expressão u.c. (unidade de medida de comprimento), quando se tratar de medida de distância entre dois pontos.

Assim, para calcular a medida de distância entre os pontos $A(2, 3)$ e $B(5, 1)$, basta fazer:

$$d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Assim, $d_{AB} = \sqrt{13}$ u.c. (unidades de medida de comprimento).

Da mesma maneira, a medida de distância entre os pontos $C(3, -2)$ e $D(-1, 4)$ é:

$$d_{CD} = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + [(-2) - 4]^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

Assim, $d_{CD} = 2\sqrt{13}$ u.c. (unidades de medida de comprimento).

Pense nisto

Não escreva no livro

A expressão $d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, usada para calcular a medida de distância entre dois pontos A e B quaisquer, pode ser aplicada no caso em que os pontos A e B pertençam a uma reta paralela ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas? Justifique sua resposta.

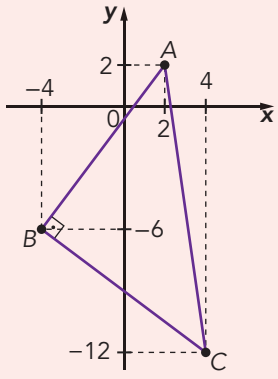
Pense nisto: Sim, se os pontos pertencem a uma reta paralela ao eixo das abscissas, então as ordenadas deles são iguais, isto é, $\Delta y = 0$ e daí $d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2} = |x_A - x_B|$. O módulo pode ser eliminado desde que a diferença seja feita entre a maior e a menor abscissa, nessa ordem.

Para o caso em que a reta é paralela ao eixo das ordenadas, analogamente, temos que $\Delta x = 0$ e $d_{AB} = |y_A - y_B|$, e o módulo pode ser eliminado desde que se faça a diferença entre a maior e a menor ordenada, nessa ordem.

Atividades resolvidas

2. Mostre que o triângulo de vértices $A(2, 2)$, $B(-4, -6)$ e $C(4, -12)$ é retângulo e isósceles. Em seguida, determine a medida de perímetro desse triângulo.

Solução:



Banco de imagens/Arquivo da editora

É preciso mostrar que as medidas de seus lados satisfazem a recíproca do teorema de Pitágoras.

Temos:

- AB: $d_{AB} = \sqrt{(-4 - 2)^2 + [2 - (-6)]^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$; ou seja, 10 u.c.
- AC: $d_{AC} = \sqrt{(2 - 4)^2 + [2 - (-12)]^2} = \sqrt{4 + 196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$; ou seja, $10\sqrt{2}$ u.c.
- BC: $d_{BC} = \sqrt{(-4 - 4)^2 + [-6 - (-12)]^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$; ou seja, 10 u.c.

Como $(d_{AC})^2 = (d_{AB})^2 + (d_{BC})^2$, pois $(10\sqrt{2})^2 = 10^2 + 10^2$, concluímos que o triângulo ABC é retângulo em B e os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ têm a mesma medida. Assim, o triângulo ABC é isósceles, e seu perímetro mede:

$$10 + 10 + 10\sqrt{2} = 10(\sqrt{2} + 2); \text{ ou seja, } 10(\sqrt{2} + 2) \text{ u.c.}$$

7. A medida de cada lado é dada pela medida de distância entre os pontos que são os vértices do triângulo. Calculando, temos:
$AB = d_{AB} = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$; $BC = d_{BC} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$; $AC = d_{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
A medida de perímetro é: $\left(5 + \sqrt{34} + \sqrt{53}\right)$ u.c.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

6. Determine a medida de distância entre os pontos dados.
Usando a fórmula para calcular a medida de distância para cada um dos itens, temos:

a) $A(5, 2)$ e $B(1, 3)$ $\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$; ou seja, $\sqrt{17}$ u.c.

b) $C(-1, 4)$ e $D(-2, -3)$ $\sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; ou seja, $5\sqrt{2}$ u.c.

c) $E(-4, -3)$ e $O(0, 0)$ $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; ou seja, 5 u.c.

d) $F(-5, 4)$ e $G(2, -5)$ $\sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130}$; ou seja, $\sqrt{130}$ u.c.

e) $H(-1, 5)$ e $I(-1, 12)$ $\sqrt{0^2 + 7^2} = 7$; ou seja, 7 u.c.

f) $N\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e $P\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

g) $Q(1, 3)$ e $R(-3, 3)$ $\sqrt{4^2 + 0^2} = 4$; ou seja, 4 u.c.

f) $\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8 + 8} = 4$; ou seja, 4 u.c.

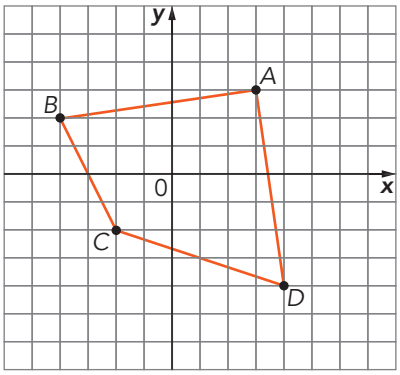
7. Calcule no caderno a medida de perímetro do triângulo ABC, sendo $A(1, 0)$, $B(3, 7)$ e $C(-2, 4)$.

8. O ponto B tem ordenada nula e dista 5 u.c. de A, que tem ambas as coordenadas iguais a 4. Determine no caderno a abscissa de B.

$A(4, 4)$, $B(x, 0)$; $d_{AB} = 5 \Rightarrow \sqrt{(4 - x)^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow (4 - x)^2 = 9 \Rightarrow 4 - x = \pm 3 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 7$.

9. Determine no caderno a medida de perímetro do quadrilátero $ABCD$, considerando que o lado de cada quadradinho mede 1 u.c.

Os pontos são: $A(3, 3)$; $B(-4, 2)$; $C(-2, -2)$; $D(4, -4)$.
Calculando as medidas de distâncias, temos:
$d_{AB} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$d_{BC} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$d_{CD} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
$d_{AD} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
Calculando a medida de perímetro, temos:
$5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 5\sqrt{2} =$
$= 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 10\sqrt{2}$; ou seja,
$2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 10\sqrt{2}$ u.c.



Banco de imagens/Arquivo da editora

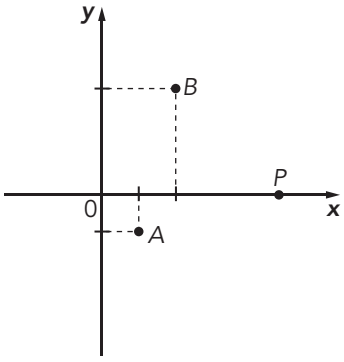
10. O centro de uma circunferência é o ponto $(-1, 3)$. Sabendo que o ponto $(2, 5)$ pertence à circunferência, determine no caderno a medida do diâmetro dessa circunferência.
A medida do raio corresponde à medida de distância entre os pontos de coordenadas $(-1, 3)$ e $(2, 5)$. Calculando essa medida de distância entre os pontos, temos: $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$; então, o diâmetro mede $2\sqrt{13}$ u.c.

11. O ponto Q pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares e equidista de $A(4, 2)$ e $B(6, 8)$. Quais são as coordenadas de Q? $Q(q, q)$; $AQ = BQ \Rightarrow \sqrt{(q - 4)^2 + (q - 2)^2} = \sqrt{(q - 6)^2 + (q - 8)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \cancel{q^2} - 8q + 16 + \cancel{q^2} - 4q + 4 = \cancel{q^2} - 12q + 36 + \cancel{q^2} - 16q + 64 \Rightarrow 16q = 80 \Rightarrow q = 5$. Assim, $Q(5, 5)$.

12. Na figura, P é equidistante de $A(1, -1)$ e $B(2, 3)$. Determine, no caderno, as coordenadas de P.

- P pertence ao eixo x: $P(x, 0)$
- $d_{PA} = d_{PB}$

$\sqrt{(x - 1)^2 + (0 + 1)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + 3^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \cancel{x^2} - 2x + 2 = \cancel{x^2} - 4x + 13 \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{11}{2}$; então, $P\left(\frac{11}{2}, 0\right)$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

13. Dados os pontos $M(2, 0)$ e $N(0, 2)$, determine no caderno as coordenadas do ponto P de modo que o triângulo MNP seja equilátero. $\left(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right)$ ou $\left(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}\right)$.

INTERLIGANDO

As imagens não estão representadas em proporção.

Coordenadas do GPS

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

Aris Suwanmalee/Adobe Stock

Aris Suwanmalee/Adobe Stock

Onde estou?

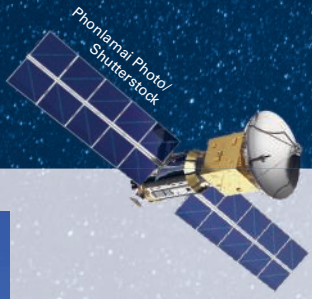
Uma necessidade do ser humano é saber sua localização e orientação no espaço.

A observação da posição do Sol é um importante referencial de posição. Porém, ao longo dos tempos, foram surgindo instrumentos para referenciar localizações, como **bússolas**, **astrolábio**, **sextante** e **satélites**.

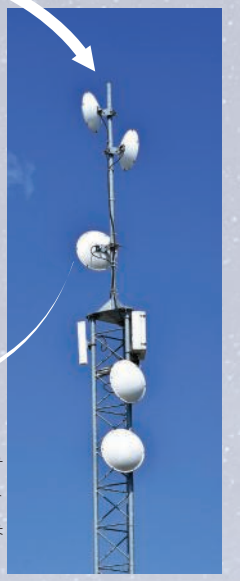
Phonlamai Photo/ Shutterstock

artpartner-images/Getty Images

vecstock/Freepik



Phonlamai Photo/ Shutterstock



montypeter/Freepik

wirestock/Freepik

A localização pelo GPS

Os satélites são monitorados pelas estações terrestres de gerenciamento espalhadas pelo planeta que processam as efemérides como um super cronômetro. Calculando a diferença entre os tempos de emissão e recebimento da localização que não deve ser maior que 0,1 de segundo, garantindo que a localização seja precisa.

Syda Productions/Adobe Stock

Navegações por satélites

O primeiro projeto de sistema de navegação por satélite, Navstar – GPS, foi projetado pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos para auxiliar as Forças Armadas Americanas. Além do GPS (estadunidense), existem outros sistemas de navegações por satélites: Galileo (europeu), o Compass (chinês) e o Glonass (russo).

Com uma precisão um pouco menor que a militar, o sistema de navegação GPS foi disponibilizado para a população e já faz parte do cotidiano da maioria das pessoas, principalmente para a utilização dos *smartphones* e acesso a aplicativos de mapas.

Imagem de fundo: Anton27/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

bioraven/ Shutterstock

Yuichiro Chino/Getty Images

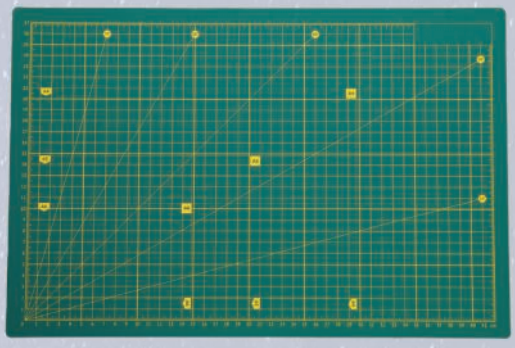
O GPS

O GPS (*Global Positioning System*) é uma constelação de 24 satélites artificiais ativos que trafegam em 6 órbitas, com 4 satélites em cada uma. A cada 24 horas, um satélite percorre duas vezes a órbita da Terra com um ângulo de 280° de visualização, garantindo que todo ponto terrestre seja visto por pelo menos três satélites simultaneamente.

Com a posição exata do satélite e o cálculo da diferença entre os tempos de emissão e recebimento da localização, é obtida a equação geral da imaginária superfície esférica.

Como cada ponto terrestre é visualizado por no mínimo três satélites, calcula-se a intersecção das superfícies esféricas. Porém, a localização não será em coordenadas cartesianas (x, y), pois, além das coordenadas geográficas (latitude e longitude), tem-se a altitude.

bioraven/ Shutterstock


Atlas/Adobe Stock

1. O GPS tem sido muito útil em diversas situações do cotidiano. Liste 5 situações em que eles podem salvar vidas. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. Utilize um aplicativo de mapas para conhecer três pontos turísticos a partir das coordenadas geográficas deles. Os pontos turísticos são Cristo Redentor – Rio de Janeiro (RJ), Parque Ibirapuera – São Paulo (SP) e Palácio do Planalto – Brasília (DF).

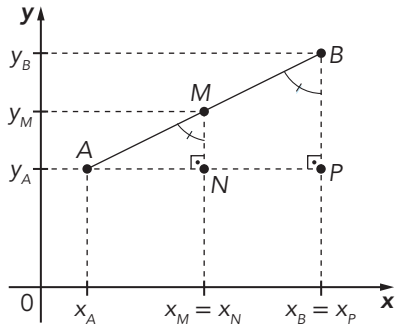
22° 57' 01.4" S 43° 12' 38.3" W 23° 35' 14.2" S 46° 39' 28.0" W 15° 47' 55.7" S 47° 51' 38.7" W

3. Pesquise no aplicativo de mapas as coordenadas geográficas da localização da sua escola. Resposta pessoal.

Ponto médio de um segmento de reta

Há situações em Geometria analítica que envolvem mediatrizes de segmentos de reta, medianas e mediatrizes de triângulos e outros assuntos relacionados ao ponto médio de um segmento de reta.

Seja $M(x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento de reta com extremidades $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Note, na figura, que os triângulos AMN e ABP são semelhantes, pois têm os três ângulos respectivamente congruentes.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, temos:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AP}$$

Mas $AB = 2 \cdot (AM)$, pois M é o ponto médio de $\overline{AB}$, logo:

$$\frac{AM}{2 \cdot (AM)} = \frac{AN}{AP} \Rightarrow \frac{AN}{AP} = \frac{1}{2} \Rightarrow AP = 2 \cdot (AN)$$

Assim, temos:

$$x_P - x_A = 2(x_N - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2(x_M - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2x_M - 2x_A \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Analogamente, prova-se que $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Portanto, sendo M o ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$, com $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, temos:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Atividades resolvidas

3. De um losango são conhecidos três vértices, não necessariamente consecutivos: $A(1, 3)$, $B(-3, 5)$ e $C(0, 6)$. Determine as coordenadas do quarto vértice desse losango.

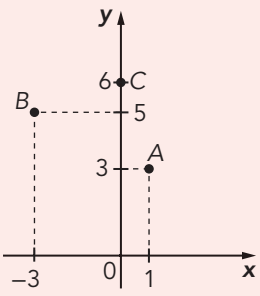
Solução:

Vamos, inicialmente, calcular as medidas de distância entre os pontos dados, a fim de descobrir quais são os vértices consecutivos desse losango:

$$d_{AB} = \sqrt{(1+3)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{20}$$

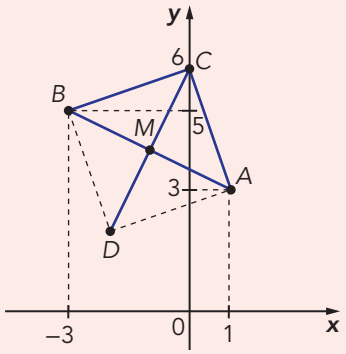
$$d_{AC} = \sqrt{(1-0)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{10}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-3-0)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{10}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como d_{AC} e d_{BC} são iguais, concluímos que $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são lados do losango e $\overline{AB}$ é uma diagonal. Lembrando que, em qualquer losango, as diagonais intersectam-se ao meio, podemos determinar o vértice D do losango:



Banco de imagens/Arquivo da editora

• M é o ponto médio de $\overline{AB}$:

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1 + (-3)}{2} = -1 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3 + 5}{2} = 4 \end{array}\right\} M(-1, 4)$$

• M também é ponto médio de $\overline{CD}$:

$$x_M = \frac{x_C + x_D}{2} \Rightarrow -1 = \frac{0 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = -2$$

$$y_M = \frac{y_C + y_D}{2} \Rightarrow 4 = \frac{6 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 2$$

Assim, o outro vértice é $D(-2, 2)$.

14. a) $x_M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$; $y_M = \frac{2+4}{2} = 3$; $M\left(\frac{3}{2}, 3\right)$. **c)** $\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right) = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

14. Determine no caderno as coordenadas do ponto médio do segmento de reta cujas extremidades são os pontos a seguir.

a) $A(1, 2)$ e $B(2, 4)$

b) $C(3, 5)$ e $D(2, -3)$ $\left(\frac{3+2}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$

c) $E\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ e $F\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

d) $L(3, -4)$ e $M(3, 2)$ $\left(\frac{3+3}{2}, \frac{-4+2}{2}\right) = (3, -1)$

15. Se $(2, 3)$ é ponto médio de $\overline{AB}$, com $A(n, 5)$ e $B(4, m)$, quanto vale $m + n$? 1

16. Os pontos $A(2, -4)$, $B(-2, 1)$ e $C(-4, 5)$ são vértices de um triângulo. Determine no caderno a medida da mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC.

Lembre-se de que a mediana de um triângulo é um segmento de reta cujas extremidades são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

17. O ponto $P(7, -3)$ pertence a uma circunferência de centro $(4, 2)$. Determine no caderno o ponto diametralmente oposto a P. $Q(1, 7)$

18. Mostre no caderno que o quadrilátero de vértices $(-8, -6)$, $(-2, 0)$, $(-2, -4)$ e $(4, 2)$ é um paralelogramo. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

19. Os pontos $M(1, 2)$, $N(5, -2)$ e $P(3, -4)$ são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC. Determine no caderno as coordenadas dos vértices desse triângulo. $A(-1, 0)$; $B(3, 4)$ e $C(7, -8)$.

20. Os pontos $(2, 3)$, $(5, -1)$ e $(1, -4)$ são vértices de um quadrado.

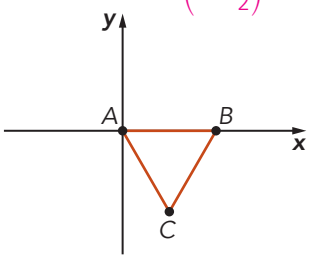
a) Quais são as coordenadas do quarto vértice? $(-2, 0)$

b) Qual é a medida do lado desse quadrado? 5

21. Dados $A(-13, -1)$ e $B(3, 5)$, determine no caderno as coordenadas dos pontos que dividem AB em quatro partes iguais.

22. Na figura, o triângulo ABC é equilátero, e seu lado mede 4 cm.

21. $\left(-9, \frac{1}{2}\right)$; $(-5, 2)$ e $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$



Banco de imagens/Arquivo da editora

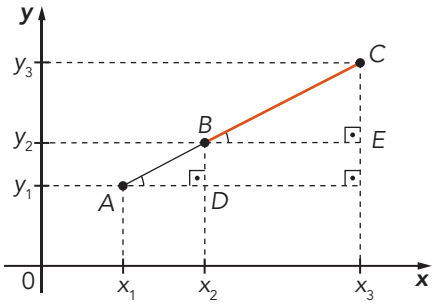
Determine no caderno:

a) as coordenadas de C; $(2, -2\sqrt{3})$

b) a medida de área do triângulo ABC. $4\sqrt{3}$ cm²

16. O ponto médio M de $\overline{BC}$ é $\left(\frac{-2+(-4)}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (-3, 3)$. Assim, temos que: $d_{AM} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$

Condição de alinhamento de 3 pontos



Banco de imagens/Arquivo da editora

Para que 3 pontos distintos estejam alinhados, suas coordenadas devem obedecer a uma condição que será deduzida com a utilização da representação gráfica, na qual $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão na mesma reta.

Os triângulos retângulos BCE e ABD são semelhantes.

Decorre a proporção $\frac{BE}{AD} = \frac{CE}{BD}$, que pode ser escrita como $\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}$. Desenvolvendo, obtemos $(x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_1) - (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_2) = 0$. Daí:

$$x_3y_2 - x_3y_1 - \cancel{x_2y_2} + x_2y_1 - x_2y_3 + \cancel{x_2y_2} + x_1y_3 - x_1y_2 = 0$$

ou, ainda:

$$x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 = 0$$

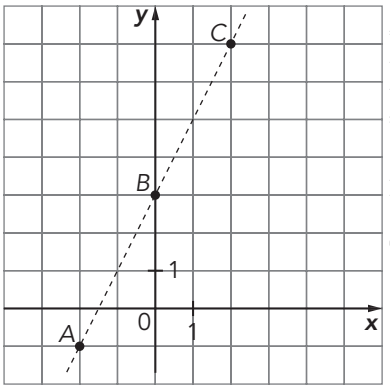
Professor, caso julgue necessário, retome o conceito de determinantes.

Essa última igualdade pode ser escrita sob a forma de um determinante: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Concluímos, então, que:

> Se 3 pontos distintos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são colineares, então:
>
> $$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

É possível demonstrar que a recíproca dessa propriedade também é verdadeira, isto é, se $D = 0$, então os pontos são colineares.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos verificar analiticamente que os pontos $A(-2, -1)$, $B(0, 3)$ e $C(2, 7)$ estão alinhados. De fato, o determinante $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ é nulo.

Note que:

$$-6 + 0 - 2 - 6 + 14 + 0 = 0$$

Atividades resolvidas

4. Determine o valor de m de modo que $(-2, 7)$, $(m, -11)$ e $(1, -2)$ estejam alinhados.

Solução:

Devemos impor a condição de alinhamento $D = 0$, ou seja:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 7 & 1 \\ m & -11 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Temos:

$$22 + 7 - 2m + 11 - 4 - 7m = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9m = 36 \Rightarrow m = 4$$

Assim, os pontos $(-2, 7)$, $(4, -11)$ e $(1, -2)$ pertencem a uma única reta.

24. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ m & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 - 2m + 6 - m = 0 \Rightarrow -3m + 12 = 0 \Rightarrow m = 4$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

25. Qualquer (x, y) que satisfaça a relação $2x - y - 1 = 0$; por exemplo: $(0, -1)$; $(1, 1)$; $(-1, -3)$; $(2, 3)$; etc.

23. Verifique no caderno se os pontos a seguir estão alinhados.

a) $(2, 1)$, $\left(7, -\frac{7}{3}\right)$ e $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ Sim.

b) $(0, 4)$, $(4, 0)$ e $(2, -2)$ Não.

c) $(1, 5)$, $(-3, 2)$ e $(-7, 1)$ Não.

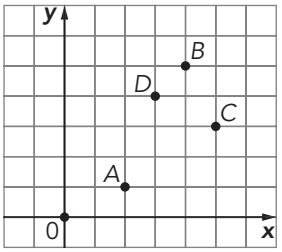
d) $(-2, 3)$, $(0, 0)$ e $(-3, 2)$ Não.

24. Para que valor de m os pontos $(3, 1)$, $(m, 2)$ e $(0, -2)$ são colineares?

25. Determine no caderno um ponto que esteja alinhado com $P(3, 5)$ e $Q(-1, -3)$.

26. Para que valores de k os pontos $(2, -3)$, $(4, 3)$ e $\left(5, \frac{k}{2}\right)$ são vértices de um triângulo?

27. Analise a figura a seguir, em que o lado de cada quadrado na malha quadriculada mede 1 u.c., e determine no caderno o ponto comum aos segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$\left(\frac{17}{5}, \frac{19}{5}\right)$

26. Os pontos não podem estar alinhados. Assim, $D \neq 0$:

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & \frac{k}{2} & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 6 - 15 + 2k - 15 - k + 12 \neq 0 \Rightarrow k \neq 12$

A reta

A reta r, representada no plano cartesiano, passa por vários pontos cujas coordenadas são conhecidas.

Um ponto $P(x, y)$ qualquer pertencerá a r se estiver alinhado a dois pontos quaisquer de r, por exemplo, $A(4, 7)$ e $B(3, 5)$. Nesse caso, como os 3 pontos são colineares, verificamos:

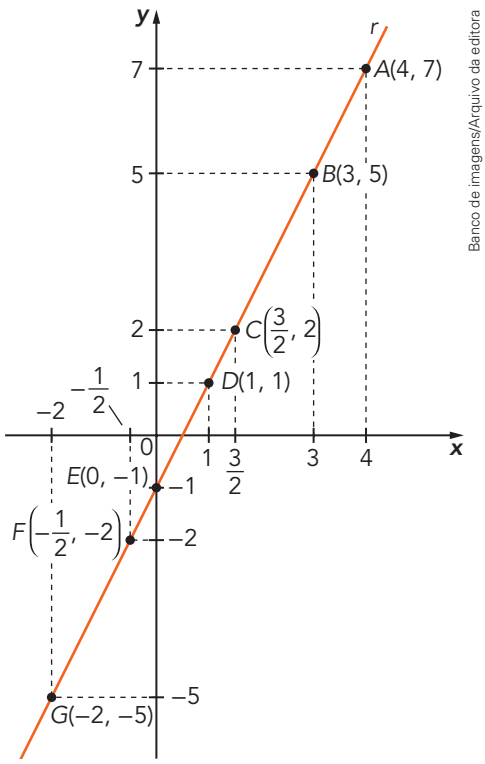
$$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 20 + 7x + 3y - 5x - 4y - 21 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - y - 1 = 0 \quad \textbf{1}$$

Se tivéssemos escolhido o ponto $E(0, -1)$ e o ponto $F\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$, teríamos E, F e P alinhados, daí:

$$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - \frac{1}{2}y + 2x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \quad \textbf{2}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

As equações obtidas em **1** e **2** são equivalentes (note que, se dividirmos por 2 os coeficientes de **1**, obteremos **2**) e nos mostram a relação que x e y devem satisfazer a fim de que um ponto $P(x, y)$ pertença a r.

A reta r pode ser analiticamente descrita por uma dessas equações ou por qualquer outra equivalente, dependendo dos pontos escolhidos. Cada uma delas é chamada **equação geral de r**.

Equação geral da reta

A toda reta r do plano cartesiano está associada uma equação do tipo $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são números reais, com a e b não nulos simultaneamente, e x e y são as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ genérico de r. Costuma-se escrever $r: ax + by + c = 0$.

Pense nisto: Se a e b fossem nulos, ao mesmo tempo, teríamos:

$a = 0,\ y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$

$b = 0,\ x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Daí Q e R seriam o mesmo ponto, o que contraria a hipótese de que Q e R são pontos distintos.

Não escreva no livro

Pense nisto

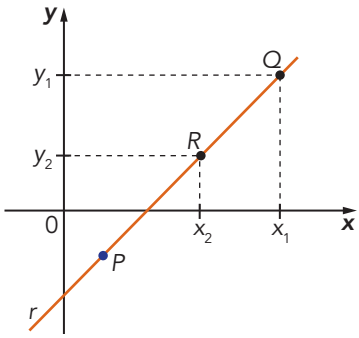
Por que, na demonstração da equação geral da reta, a e b devem ser não nulos simultaneamente?

Demonstração

Sejam $Q(x_1, y_1)$ e $R(x_2, y_2)$ dois pontos distintos do plano cartesiano, e $r = \overleftrightarrow{QR}$ é a reta determinada por Q e R.

Um ponto genérico de r é $P(x, y)$, isto é, P é um ponto que "percorre" r.

Como P, Q e R estão alinhados, devemos ter $D = 0$, isto é:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xy_1 + yx_2 + x_1y_2 - x_2y_1 - xy_2 - yx_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0 \ (*)$$

Como x_1, y_1, x_2 e y_2 são números reais conhecidos, podemos fazer: $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $x_1y_2 - x_2y_1 = c$. Assim, obtemos em $(*)$: $ax + by + c = 0$.

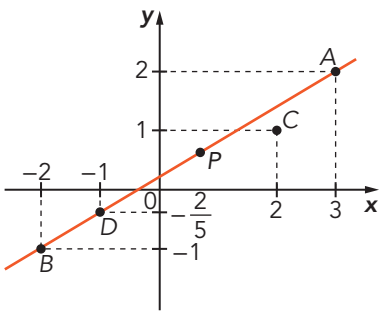
Professor, a demonstração da recíproca da propriedade encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Observação

A recíproca da propriedade apresentada também é válida, isto é:

A toda equação da forma $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são números reais tais que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, está associada uma única reta r do plano cartesiano, cujos pontos têm coordenadas (x, y) que satisfazem essa equação.

Para obter a equação geral da reta r que passa pelos pontos $A(3, 2)$ e $B(-2, -1)$, basta impor a condição de alinhamento para A, B e $P(x, y)$, ponto genérico de r:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Calculando o determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 + 2x - 2y + x - 3y + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 5y + 1 = 0$$

Assim, r é dada pela equação: $3x - 5y + 1 = 0$; e indica-se $r: 3x - 5y + 1 = 0$.

O ponto $C(2, 1)$ não pertence a r. De fato, suas coordenadas não satisfazem a equação de r:

$$3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow 2 = 0 \text{ (falso)}$$

Já o ponto $D\left(-1, -\frac{2}{5}\right)$ pertence a r:

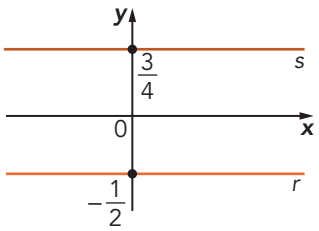
$$3 \cdot (-1) - 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 1 = -3 + 2 + 1 = 0$$

Casos particulares

Se um dos coeficientes da equação geral de uma reta ($ax + by + c = 0$) é igual a zero, a reta apresenta uma propriedade especial. Temos três casos:

- $a = 0 \Leftrightarrow y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$, isto é, dois pontos distintos dessa reta têm a mesma ordenada. Desse modo, se a equação não tem termo em x, a reta é paralela ao eixo x.

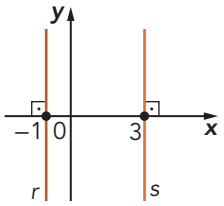
  Analise as retas r e s representadas na figura.

  - $y = \frac{3}{4}$ (ou $4y - 3 = 0$) é a equação da reta s;
  - $y = -\frac{1}{2}$ (ou $2y + 1 = 0$) é a equação da reta r.

- $b = 0 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, isto é, dois pontos distintos dessa reta têm a mesma abscissa. Assim, se a equação não tem termo em y, a reta é paralela ao eixo y.

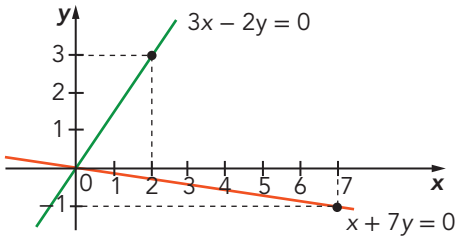
  Analise as retas r e s representadas na figura.

  - $x = -1$ (ou $x + 1 = 0$) é a equação da reta r;
  - $x = 3$ (ou $x - 3 = 0$) é a equação da reta s.

- $c = 0 \Leftrightarrow ax + by = 0$. Nesse caso, para todo $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}^*$, o par ordenado $(0, 0)$ satisfaz a equação, ou seja, $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$. Desse modo, se a equação geral não tem termo independente, a reta passa pela origem.

  As retas de equações $3x - 2y = 0$ e $x + 7y = 0$ passam pelo ponto $(0, 0)$.

Não escreva no livro

Pense nisto

Escreva, no caderno, a equação da reta que represente o eixo x.

Podemos usar duas propriedades do eixo x para pensar nessa reta: os pontos pertencentes ao eixo x são tais que suas ordenadas não variam e são iguais a zero. Assim, a equação que representa o eixo x é $y = 0$.

Pense nisto

Escreva, no caderno, a equação da reta que represente o eixo y.

Podemos usar duas propriedades do eixo y para pensar nessa reta: Os pontos pertencentes ao eixo y são tais que suas abscissas não variam e são iguais a zero. Assim, a equação que representa o eixo y é $x = 0$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

5. Seja r a reta que passa pelos pontos (1, 2) e (−2, 5). Determine a equação geral de r.

Solução:

Seja $P(x, y)$ um ponto genérico de r. Temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2y + 5 + 4 - 5x - y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x - 3y + 9 = 0$$

Dividindo por 3 os coeficientes dessa equação, temos r: $-x - y + 3 = 0$.

6. Determine as coordenadas do ponto A de intersecção das retas r: $2x - y - 1 = 0$ e s: $4x + 3y - 17 = 0$.

Solução:

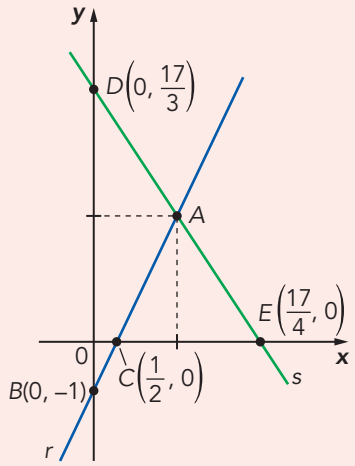
Vamos representar cada uma das retas no plano cartesiano. Para isso, é suficiente conhecer 2 pontos quaisquer de cada uma delas.

Para r: $2x - y - 1 = 0$:

- se $x = 0$, então $y = -1$; obtemos o ponto $B(0, -1)$;
- se $y = 0$, então $x = \frac{1}{2}$; obtemos o ponto $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Para s: $4x + 3y - 17 = 0$:

- se $x = 0$, então $y = \frac{17}{3}$; obtemos o ponto $D\left(0, \frac{17}{3}\right)$;
- se $y = 0$, então $x = \frac{17}{4}$; obtemos o ponto $E\left(\frac{17}{4}, 0\right)$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos determinar o ponto de intersecção de duas retas resolvendo o sistema formado pelas equações gerais delas. Assim, a solução do sistema corresponde às coordenadas do ponto A:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4x + 3y - 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 3 \Rightarrow A(2, 3)$$

30. A: $6 \cdot (-2) - 5 \cdot (-5) - 13 = -12 + 25 - 13 = 0$; então, A pertence à reta.
B: $6 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 - 13 = -6 - 20 - 13 \neq 0$; então, B não pertence à reta.
C: $6 \cdot 2 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 13 = 12 + 1 - 13 = 0$; então, C pertence à reta.
D: $6 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 13 = 18 - 18 = 0$; então, D pertence à reta.
E: $6 \cdot (-1) - 5 \cdot \frac{19}{5} - 13 = -6 - 19 - 13 \neq 0$; então, E não pertence à reta.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

28. Determine no caderno a equação geral da reta que passa pelos pontos a seguir.

a) (0, 2) e (2, 3)
$-x + 2y - 4 = 0$ (ou $x - 2y + 4 = 0$)

b) (−1, 2) e (−2, 5)
$-3x - y - 1 = 0$ (ou $3x + y + 1 = 0$)

c) (−1, −2) e $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$
$-5x + \frac{1}{2}y - 4 = 0$ (ou $10x - y + 8 = 0$)

29. Represente graficamente, no caderno, as retas de equação:

a) $x - y + 1 = 0$

b) $-3x - y + 2 = 0$

c) $3x - y = 0$

d) $x + 5 = 0$

e) $y + 4 = 0$

f) $200x - 500y + 300 = 0$

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

30. Verifique no caderno por quais dos pontos $A(-2, -5)$, $B(-1, 4)$, $C\left(2, -\frac{1}{5}\right)$, $D(3, 1)$ e $E\left(-1, \frac{19}{5}\right)$ passa a reta de equação $6x - 5y - 13 = 0$.

31. Obtenha no caderno o ponto de intersecção entre as retas de equações:

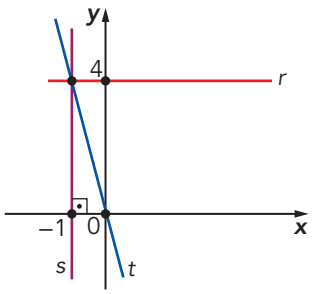
a) $2x - y + 6 = 0$ e $2x + 3y - 6 = 0$

b) $x - 2y = 0$ e $x + y - 1 = 0$

a) $\begin{cases} 2x - y + 6 = 0 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = 3$ e $x = -\frac{3}{2}$; então, $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$.

b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow 3y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$ e $x = \frac{2}{3}$; então, $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

32. Escreva, no caderno, a equação geral de cada uma das retas r, s e t representadas na figura a seguir.

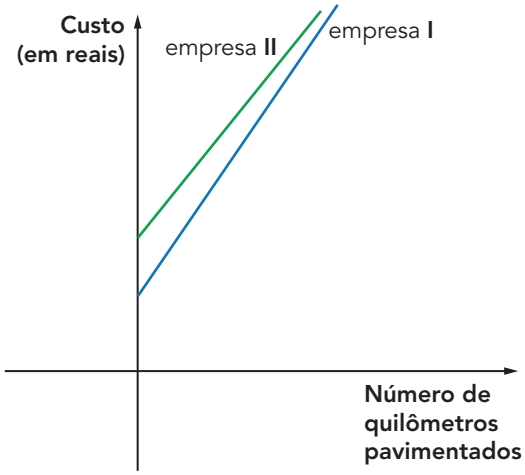


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- A reta r é horizontal e passa por $(-1, 4)$. Assim, temos r: $y - 4 = 0$.
- A reta s é vertical e passa por $(-1, 4)$. Assim, temos s: $x + 1 = 0$.
- A reta t passa por $(0, 0)$ e $(-1, 4)$. Assim, temos t: $4x + y = 0$.

33. Em uma licitação para pavimentação de uma estrada, duas empresas ofereceram condições similares. Cada uma delas cobrava um valor fixo e um adicional por quilômetro de estrada pavimentada. A relação entre o custo da obra e o número de quilômetros a serem pavimentados pode ser esboçada no plano cartesiano.

As retas suportes das semirretas mostradas no plano cartesiano têm por equações gerais:



- $5\,000x - y + 400\,000 = 0$;
- $6\,000x - y + 240\,000 = 0$.

a) Associe cada reta à empresa correspondente.

b) Qual é o valor fixo cobrado por cada uma das empresas?

c) Qual é o valor cobrado por quilômetro pavimentado por cada empresa?

d) Qual é o custo total da pavimentação de 100 km em cada uma das empresas?

e) Para quantos quilômetros de pavimentação é indiferente contratar qualquer uma das empresas?

Banco de imagens/Arquivo da editora

33. a) Se $x = 0$, obtemos em uma das equações $y = 400\,000$ e, na outra equação, obtemos $y = 240\,000$. O gráfico mostra que na empresa **II** o valor fixo (para $x = 0$) cobrado é mais alto. Assim, a reta de equação $6\,000x - y + 240\,000 = 0$ corresponde ao custo na empresa **I** e a reta de equação $5\,000x - y + 400\,000 = 0$ corresponde ao custo na empresa **II**.

b) Empresa **I**:
$y = 6\,000x + 240\,000$; ou seja, R$ 240.000,00.
Empresa **II**:
$y = 5\,000x + 400\,000$; ou seja, R$ 400.000,00.

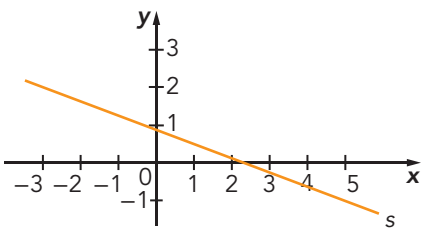
c) Pelo item anterior:
empresa **I**: R$ 6.000,00;
empresa **II**: R$ 5.000,00.

d) Empresa **I**: $x = 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 6\,000 \cdot 100 + 240\,000 =$
$= 840\,000$; ou seja,
R$ 840.000,00.
Empresa **II**: $x = 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 5\,000 \cdot 100 + 400\,000 =$
$= 900\,000$; ou seja,
R$ 900.000,00.

e) $6\,000x + 240\,000 =$
$= 5\,000x + 400\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1\,000x = 160\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 160$; ou seja, 160 km.

Retas e funções

Considere a reta s de equação geral $3x + 8y - 7 = 0$ e a representação gráfica dessa reta.



Isolando y em função de x nesta equação:

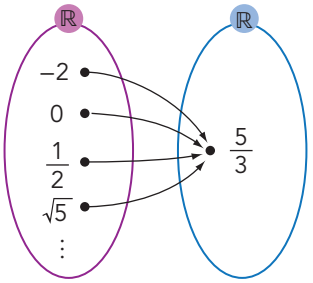
$$8y = -3x + 7 \Rightarrow y = -\frac{3}{8}x + \frac{7}{8}$$

Como vimos no estudo de funções, a lei $y = -\frac{3}{8}x + \frac{7}{8}$ representa uma função polinomial de 1º grau, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cujo gráfico é uma reta oblíqua ao eixo das abscissas.

Generalizando, podemos dizer que, se a equação geral de uma reta é $ax + by + c = 0$, com a, b e c números reais, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então ela representa a lei da função polinomial de 1º grau: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

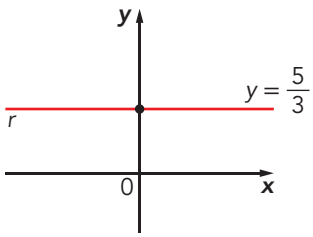
É importante analisarmos dois casos particulares:

- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, obtemos $by + c = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}$ e, nesse caso, temos a lei de uma função constante. Por exemplo, se a equação geral de uma reta r é $3y - 5 = 0$, então $y = \frac{5}{3}$ representa a lei da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a todo $x \in \mathbb{R}$ associa a imagem $\frac{5}{3}$. O gráfico dessa função é uma reta r paralela ao eixo das abscissas.



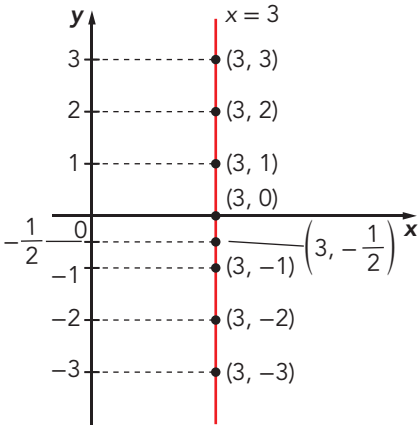
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{5}{3}$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

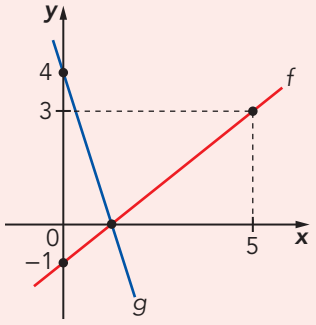
- Se $b = 0$ e $a \neq 0$, obtemos $ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$ e, nesse caso, a equação geral $ax + c = 0$ não define uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Por exemplo, a equação $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ é representada, graficamente, por uma reta paralela ao eixo das ordenadas em que todos os pontos dela têm abscissa igual a 3, o que contraria a definição de função.



Pense nisto:
Sabemos que toda função afim é representada por uma lei do tipo $y = ax + b$.
Como (5, 3) pertence a s, temos:
$3 = 5 \cdot a + b$ (I).
Como (0, −1) pertence a s, temos:
$-1 = a \cdot 0 + b$ (II).
De (I) e (II), vem: $b = -1$ e $a = \frac{4}{5}$.
A lei é: $y = \frac{4}{5}x - 1$ ou $4x - 5y - 5 = 0$.

Atividades resolvidas

7. Os gráficos de duas funções polinomiais de 1º grau f e g estão representados a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual é a lei que define a função g?

Solução:

A reta s correspondente a f passa pelos pontos de coordenadas (5, 3) e (0, −1). Assim, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 5 + x - 5y = 0 \Rightarrow 4x - 5y - 5 = 0$$

Assim, a reta s intersecta o eixo x no ponto $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ pois:

$$4 \cdot x - 5 \cdot 0 - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

O ponto $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ e o ponto (0, 4) pertencem a r, que corresponde à função g:

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5 - 4x - \frac{5y}{4} = 0 \Rightarrow y = -\frac{16}{5}x + 4 \text{ ou } g(x) = -\frac{16}{5}x + 4$$

Não escreva no livro

Pense nisto

Você conhece outra maneira de determinar a lei que define f?

34. a) A reta t correspondente à lei $y = -x + 5$ passa pelos pontos (4, 1), (5, 0), (1, 4), (0, 5), ...

b) A reta s correspondente à lei $y = -\frac{3}{2}x - 3$ passa pelos pontos (–2, 0), (–4, 3), (0, –3), ...

c) A reta r correspondente à lei $y = \frac{x-1}{2}$ passa pelos pontos (1, 0), (–3, –2), (–1, –1), ...

34. d) A reta u correspondente à lei $y = \frac{3x}{4} - 3$ passa pelos pontos (4, 0), (0, –3), ...

ATIVIDADES

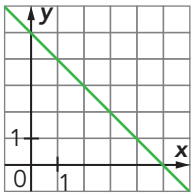
Não escreva no livro

34. Escreva, no caderno, a associação correta de cada reta à lei da função afim correspondente.

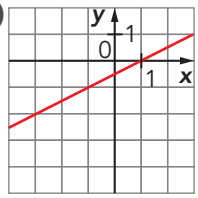
$r: y = \frac{x-1}{2}$ $\quad$ $t: y = -x + 5$

$s: y = -\frac{3}{2}x - 3$ $\quad$ $u: y = \frac{3x}{4} - 3$

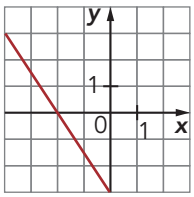
a)



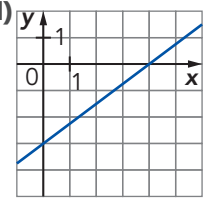
c)



b)



d)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

35. Considere f uma função afim cujo gráfico é uma reta que passa pela origem e por (1, 5).

a) Qual é a lei que define f?

b) Calcule em seu caderno o valor de $f(-2) + f(0{,}2)$.

c) Escreva, no caderno, a equação geral da reta que representa graficamente f.

36. Uma vela de 8 cm foi acesa às 17 horas. Sabe-se que às 19 horas a medida da altura da vela era 4,8 cm. Suponha linear a variação da medida da altura (h) da vela, em centímetros, em função da medida de tempo x, em horas, sendo $x = 0$ o instante em que ela foi acesa.

a) Obtenha no caderno a lei da função que relaciona h e x. $h = -1{,}6x + 8$

b) Determine no caderno em qual horário a vela foi inteiramente consumida. 22 h

c) Represente graficamente, no caderno, a função obtida no item **a**.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

d) Obtenha no caderno a equação geral da reta obtida no item **c**.
$1{,}6x + y - 8 = 0$, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

37. Em que condições as retas de equações $px - y + 3p = 0$ e $2x - y + 6 = 0$ têm mais de um ponto comum? $p = 2$

35. a) $y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a \cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow b = 0$ e $a = 5$; então, $y = 5x$.

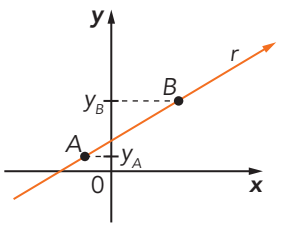
b) $f(-2) = 5 \cdot (-2) = -10$; $f(0{,}2) = 5 \cdot 0{,}2 = 1$; $f(-2) + f(0{,}2) = -9$

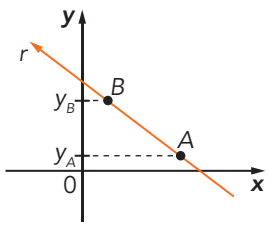
c) $y = ax + b \Rightarrow y = 5x + 0 \Rightarrow 5x - y = 0$

Inclinação de uma reta

Seja r uma reta do plano cartesiano, não paralela ao eixo x. Fixemos em r dois pontos distintos A e B.

Vamos convencionar que o **sentido positivo de r** é aquele em que "se parte do ponto de menor ordenada e se chega ao ponto de maior ordenada". O sentido positivo de r está indicado pela seta nas imagens.





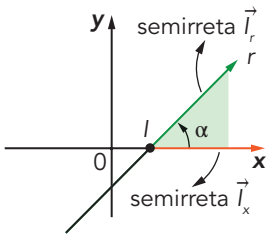
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

Quando a reta r for paralela ao eixo x, dados A e B distintos, temos que $y_A = y_B$. Nesse caso, o sentido positivo de r é o sentido positivo do eixo x.

Seja I o ponto de intersecção de r com o eixo x. O ângulo que a reta r forma com o eixo x é o menor ângulo formado pelas semirretas $\vec{I}_x$ e $\vec{I}_r$. A semirreta $\vec{I}_x$ tem origem em I e sentido coincidente com o do eixo das abscissas. A semirreta $\vec{I}_r$ tem origem em I e sentido coincidente com o sentido positivo de r.

Esse ângulo denomina-se **inclinação da reta**. Vamos indicar a medida desse ângulo por α.



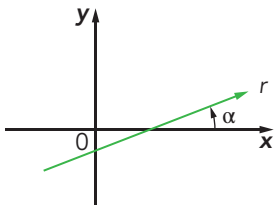
Banco de imagens/Arquivo da editora

Coeficiente angular

Coeficiente angular ou declividade de uma reta r é o número real m definido por:

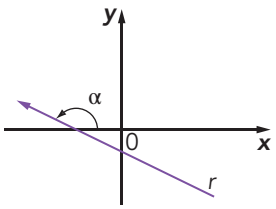
$$m = \tan \alpha$$

Sendo α a medida da inclinação de r, temos as seguintes possibilidades:



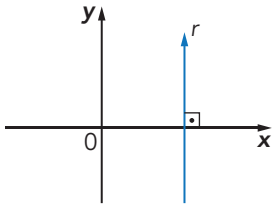
α é a medida de um ângulo agudo.

$m = \tan \alpha > 0$



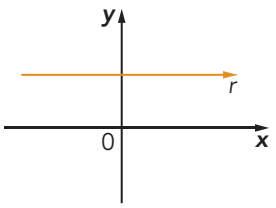
α é a medida de um ângulo obtuso.

$m = \tan \alpha < 0$



$\alpha = 90°$

Como não existe tan 90°, não é possível definir o coeficiente angular de r.



$\alpha = 0°$

$m = \tan 0° = 0$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

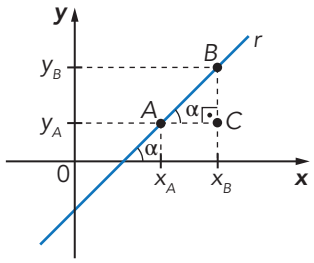
Cálculo do coeficiente angular de uma reta a partir de 2 de seus pontos

Seja r a reta determinada pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Vamos considerar 2 casos:

- $0 < \alpha < 90°$

  No triângulo ACB, temos:

$$m = \tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



- $90° < \alpha < 180°$

  No triângulo ACB, temos:

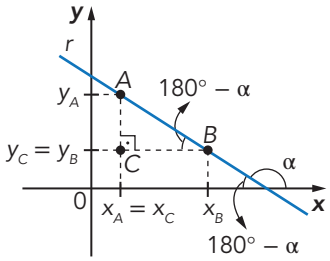
$$\tan (180° - \alpha) = \frac{AC}{BC} = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$$

Da Trigonometria, sabemos que $\tan (180° - \alpha) = -\tan \alpha$. Daí, temos:

$$-\tan \alpha = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Assim, o coeficiente angular de r é:

$$m = \tan \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



Em qualquer um dos casos, podemos calcular o coeficiente angular da reta que passa por $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ por meio da relação:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Como $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-(y_A - y_B)}{-(x_A - x_B)} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, podemos simplesmente escrever:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

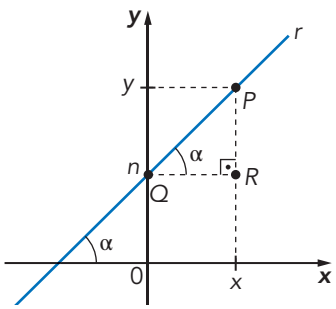
em que Δy é a diferença entre as ordenadas de A e B, e Δx, a diferença entre as abscissas de A e B, ambas calculadas no mesmo "sentido".

Para calcular o coeficiente angular da reta que passa por $A(-5, 4)$ e $B(3, 2)$, podemos fazer:

- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 2}{-5 - 3} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$ (Calculamos a diferença de "A para B".)
- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 4}{3 - (-5)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$ (Calculamos a diferença de "B para A".)

Equação reduzida de uma reta

Sejam r a reta cuja medida da inclinação mede α e $P(x, y)$ um ponto qualquer de r. A reta r intersecta o eixo das ordenadas em um ponto Q cuja abscissa é nula, isto é, $Q(0, n)$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como vimos, o coeficiente angular da reta r que passa por $Q(0, n)$ e $P(x, y)$ é dado por:

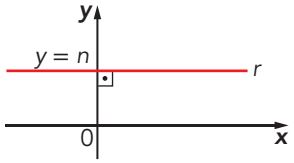
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - n}{x - 0}, \text{ isto é: } m = \frac{y - n}{x} \Rightarrow y = mx + n$$

Essa última expressão é chamada **forma reduzida da equação da reta *r***, ou simplesmente **equação reduzida da reta *r***, na qual $\{m, n\} \subset \mathbb{R}$ e:

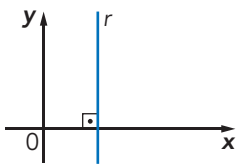
- m é o coeficiente angular de r;
- n é a ordenada do ponto em que r intersecta o eixo das ordenadas e é chamado coeficiente linear de r;
- x e y são as coordenadas de um ponto qualquer da reta r.

Observação

- Se a reta r é horizontal, ela forma ângulo nulo com o eixo das abscissas; assim, $m = \tan 0° = 0$ e a equação reduzida da reta torna-se simplesmente $y = n$.



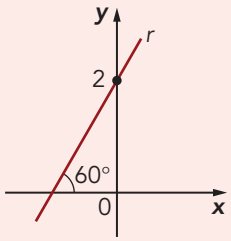
- Se a reta r é vertical, ela forma ângulo reto com o eixo das abscissas; como não existe tan 90°, não se define o coeficiente angular de r e, assim, é impossível escrever a forma reduzida da equação de qualquer reta vertical.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

8. Escreva a equação reduzida e a equação geral de r, representada graficamente a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

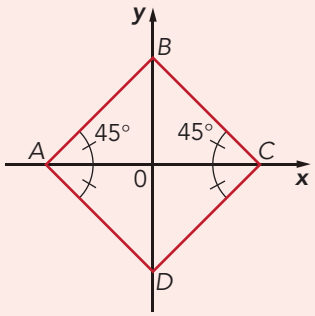
Na figura, a medida da inclinação de r é 60°, e r intersecta o eixo das ordenadas em (0, 2). Podemos concluir que $m = \tan 60° = \sqrt{3}$ e $n = 2$ (pois r intersecta o eixo das ordenadas em (0, 2). Assim, $r: y = \sqrt{3}x + 2$ é a forma reduzida da equação da reta r.

Para obter a equação geral de r, basta escrever todos os termos em um único lado da igualdade. Assim, obtemos:

$$r: \sqrt{3}x - y + 2 = 0$$

9. Na figura, $ABCD$ é um quadrado cujo lado mede 2 u.c. Escreva as equações reduzidas das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

Professor, se julgar necessário para o melhor entendimento da resolução do problema pela turma, retome o cálculo da medida da diagonal de um quadrado partindo do teorema de Pitágoras, antes de apresentá-la.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

Se o lado do quadrado mede 2 u.c., sua diagonal $\overline{AC}$ (ou $\overline{BD}$) mede $2\sqrt{2}$ u.c., e as coordenadas de seus vértices são: $A(-\sqrt{2}, 0)$, $C(\sqrt{2}, 0)$, $B(0, \sqrt{2})$ e $D(0, -\sqrt{2})$.

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ tem declividade dada por $m = \tan 45° = 1$, e seu coeficiente linear é $\sqrt{2}$; então a equação reduzida de $\overleftrightarrow{AB}$ é $y = x + \sqrt{2}$. A reta $\overleftrightarrow{BC}$ tem declividade $m = \tan 135° = -1$, e seu coeficiente linear também é 2; então, a equação reduzida de $\overleftrightarrow{BC}$ é: $y = -x + \sqrt{2}$.

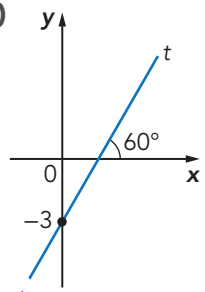
ATIVIDADES

Não escreva no livro

38. Escreva, no caderno, a equação reduzida de cada reta representada a seguir.

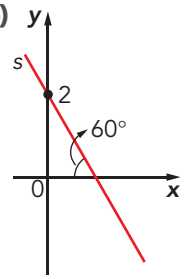
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a)



$\begin{cases} m_t = \tan 60° = \sqrt{3} \\ n_t = -3 \end{cases} \Rightarrow y = x \cdot \sqrt{3} - 3$

b)

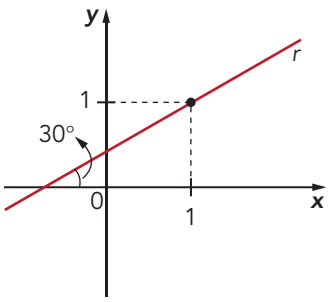


$\begin{cases} m_s = \tan 120° = -\tan 60° = -\sqrt{3} \\ n_s = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -x\sqrt{3} + 2$

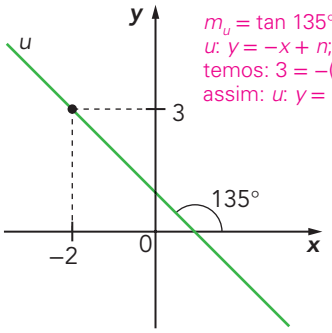
38. c) $m_r = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n$; como $(1, 1) \in r$, temos: $1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 + n \Rightarrow n = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c)



d)



$m_u = \tan 135° = -\tan 45° = -1$; u: $y = -x + n$; como $(-2, 3) \in u$, temos: $3 = -(-2) + n \Rightarrow n = 1$ e assim: u: $y = -x + 1$.

39. Escreva, no caderno, a equação reduzida da reta que passa pelos pontos a seguir.

a) (1, 2) e (2, 5) $y = 3x - 1$

b) (−1, 2) e (−2, 1) $y = x + 3$

c) (−3, −2) e (2, −3) $y = -\frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$

40. Em cada caso a seguir, determine no caderno, se existir, o coeficiente angular de r.

a) $r: x - 2y + 6 = 0$ $\frac{1}{2}$

b) $r: y = -\frac{x}{3} + 5$ $-\frac{1}{3}$

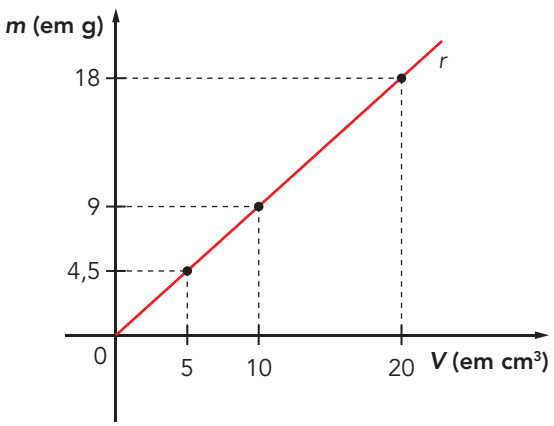
c) r passa por $A(-3, 0)$ e $B(-5, 4)$. -2

d) r passa por $C(1, 5)$ e $D(1, -4)$. Não existe.

e) r passa por $E(-2, 5)$ e $F(3, 5)$. 0

41. O gráfico a seguir mostra a relação entre a medida de massa (m) e a medida de volume (V) de certo óleo.

Banco de imagens/Arquivo da editora



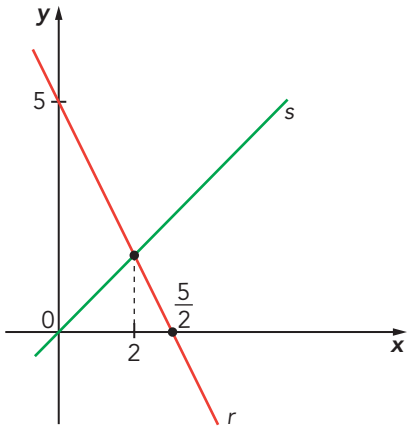
a) Qual é o coeficiente angular de r?

b) Qual é a lei da função que relaciona m e V?

c) Qual é a medida de densidade do óleo, em g/cm³? A medida de densidade d do óleo é: $\frac{m}{V} = 0{,}9$ g/cm³.

42. As retas r e s intersectam-se em um ponto de abscissa 2.

Banco de imagens/Arquivo da editora



b) $y = \frac{1}{2}x$ (reduzida) ou $x - 2y = 0$ (geral)

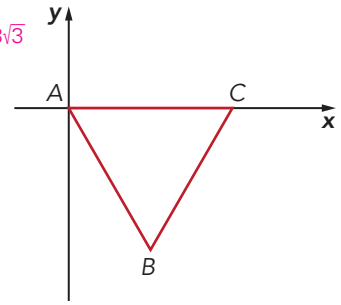
a) Determine no caderno o coeficiente angular de s. $\frac{1}{2}$

b) Escreva, no caderno, a equação de s em suas formas reduzida e geral.

43. Na figura, o triângulo ABC é equilátero e seu lado mede 3 u.c.. Determine no caderno as equações reduzidas das retas suportes $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$.

$\overleftrightarrow{AB}$: $y = -x\sqrt{3}$
$\overleftrightarrow{BC}$: $y = x\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$
$\overleftrightarrow{AC}$: $y = 0$

Banco de imagens/Arquivo da editora



44. Em cada caso a seguir, determine no caderno a equação reduzida da reta que passa por P e cuja inclinação em relação ao eixo das abscissas mede α.

a) $P(3, -1)$ e $\alpha = 45°$ $y = x - 4$

b) $P(-3, -2)$ e $\alpha = 135°$ $y = -x - 5$

c) $P(0, 3)$ e $\alpha = 60°$ $y = x\sqrt{3} + 3$

d) $P\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}\right)$ e $\alpha = 0°$ $y = -\frac{1}{3}$

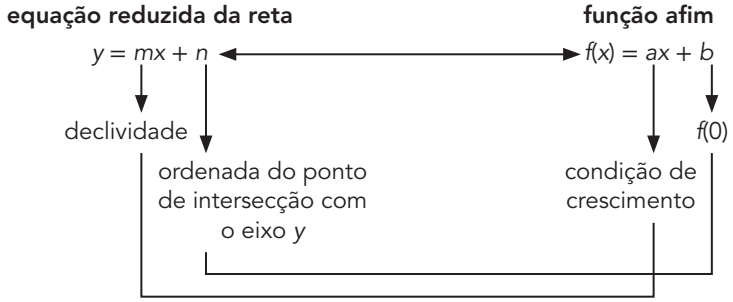
41. a) Considerando α a medida de inclinação de r, temos $\tan \alpha = \frac{4{,}5}{5} = \frac{9}{10} = \frac{18}{20} = 0{,}9$. Assim, $m_r = 0{,}9$.

b) Como r passa pela origem, temos $n_r = 0$. Assim, a equação reduzida de r é $y = 0{,}9x$ e a lei da função é: $m = 0{,}9 \cdot V$.

Função afim e a equação reduzida da reta

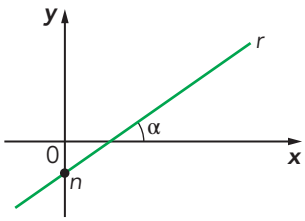
Já vimos que a equação de qualquer reta não vertical do plano cartesiano pode ser associada à lei de uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais.

Se a reta está escrita em sua forma reduzida, é possível fazer uma associação imediata de seus coeficientes aos coeficientes da lei da função:

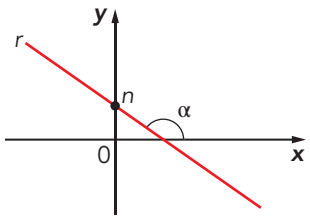


É possível também relacionar as representações gráficas de uma reta descrita por uma equação reduzida e o gráfico de uma função afim.

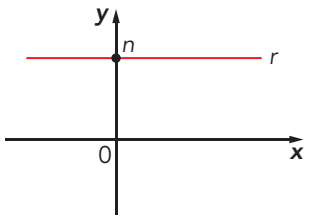
- Representação gráfica da equação da reta r:



$m = \tan \alpha$
$m > 0$

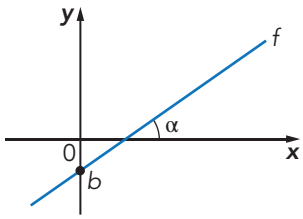


$m = \tan \alpha$
$m < 0$

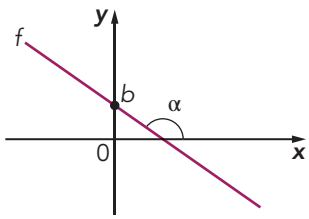


$m = \tan \alpha$
$m = 0$

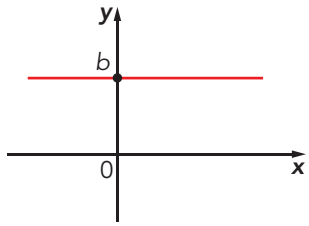
- Gráfico da função f:



$a > 0$
f é crescente



$a < 0$
f é decrescente

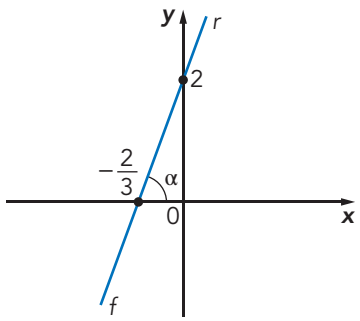


$a = 0$
f é constante

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A reta de equação reduzida r: $y = 3x + 2$, que corresponde à função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$ está representada a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora



x	y
0	2 (coeficiente linear)
$-\frac{2}{3}$ (zero da função)	0

Nesse caso, a declividade m da reta é positiva ($0 < \alpha < 90°$) e a função afim é crescente ($\alpha > 0$).

45. b) Coeficiente angular: -2
Coeficiente linear: -1

45. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim tal que $f(-2) = 3$ e $f(1) = -3$.

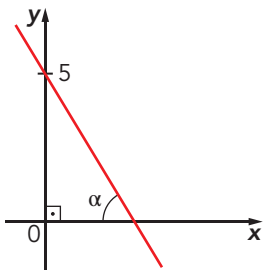
a) Represente graficamente, no caderno, essa função. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Determine no caderno o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta obtida.

c) Determine no caderno o zero da função f. $-\frac{1}{2}$

46. A equação reduzida de uma reta é $y = -3x + 7$. Essa reta é a representação gráfica de uma função afim f. Qual é o valor de $f(2)$ e de $f(-1)$?

47. No plano cartesiano está representado o gráfico de uma função afim f.



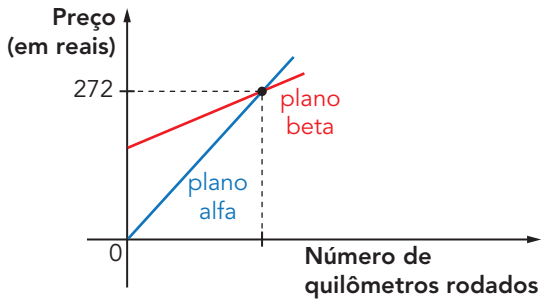
Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que $\tan \alpha = 3$, determine no caderno a lei que define f.

A equação reduzida da reta dada é $y = mx + n$, com $n = 5$ e $m = \tan(180° - \alpha) = -\tan \alpha = -3$. Então:
$y = -3x + 5 \therefore f(x) = -3x + 5$

46. $f(2)$ é obtido para $x = 2 \Rightarrow y = -3 \cdot 2 + 7 = 1$; $f(-1)$ é obtido para $x = -1 \Rightarrow y = -3 \cdot (-1) + 7 = 10$.

48. Uma locadora de automóveis oferece a seus clientes dois planos: o plano alfa não cobra diária e o valor do quilômetro rodado é R$ 3,20; o plano beta cobra diária de d reais e um adicional de R$ 1,40 por quilômetro rodado. No plano cartesiano a seguir, é possível comparar o preço dos dois planos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Determine no caderno:

a) o valor de d; R$ 153,00

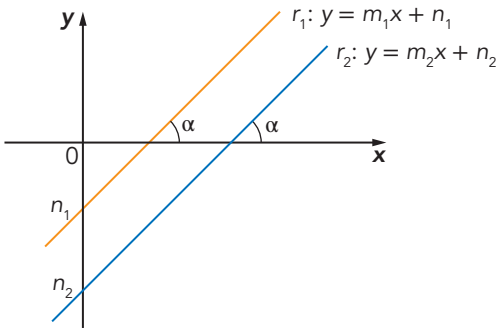
b) a abscissa do ponto de intersecção das retas; 85

c) as equações gerais das duas retas suportes que contêm as semirretas representadas; Azul: $3{,}2x - y = 0$
Vermelha: $1{,}4x - y + 153 = 0$

d) a declividade de cada uma das retas.
Vermelha: 1,4; azul: 3,2.

Paralelismo

Duas retas paralelas distintas formam com o eixo das abscissas ângulos congruentes; assim, se ambas não são verticais, seus coeficientes angulares são iguais. A figura mostra duas retas paralelas não verticais.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Temos:

$$r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

No caso de r_1 e r_2 serem verticais, evidentemente $r_1 \parallel r_2$, embora não existam m_1 e m_2.

Para verificar se as retas r e s são paralelas, sendo $r: y = 3x - 2$ e $s: 6x - 2y + 5 = 0$, precisamos comparar suas declividades. Vamos usar a equação reduzida de cada uma delas.

$$r: y = 3x - 2 \Rightarrow m_r = 3$$

$$s: 6x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y = 6x + 5 \Rightarrow y = 3x + \frac{5}{2} \Rightarrow m_s = 3$$

Pense nisto: Sabendo que duas retas em um mesmo plano são paralelas ou concorrentes e que a condição para o paralelismo é $m_r = m_s$ (ou que ambas sejam verticais), conclui-se que as retas r e s se intersectam em um único ponto, isto é, são retas concorrentes.

Como $m_r = m_s = 3$ e $n_r = -2 \neq n_s = \frac{5}{2}$, concluímos que r e s são paralelas distintas.

Pense nisto

Se r e s são duas retas de um plano tal que $m_r \neq m_s$, o que se pode afirmar sobre elas?

Analisemos as equações gerais das retas r e s:

$$r: 3x - y + 7 = 0$$

$$s: 6x - 2y + 14 = 0$$

A equação reduzida de r é: $y = 3x + 7$. Para obter a equação reduzida de s, fazemos:

$$2y = 6x + 14 \Rightarrow y = 3x + 7$$

Assim, podemos afirmar que r e s são paralelas coincidentes, ou, simplesmente, **coincidentes**.

Atividades resolvidas

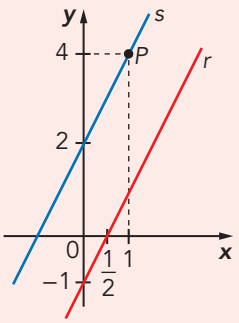
10. Seja a reta $r: y = 2x - 1$. Obtenha a equação de uma reta s paralela à reta r que passa pelo ponto $P(1, 4)$.

Solução:

Inicialmente, note que $P \notin r$, pois: $4 = 2 \cdot 1 - 1$ (falso)

Para que $s \parallel r$, é preciso que $m_s = m_r$. Como $m_r = 2$, devemos ter $m_s = 2$ e, provisoriamente, temos $s: y = 2x + n$.

Como $P \in s$, temos na equação de s: $4 = 2 \cdot 1 + n \Rightarrow n = 2$ e, finalmente, $s: y = 2x + 2$ é a equação da reta paralela a r traçada por P.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto Porque a equação $2x - y + k = 0$ representa uma reta com declividade $m = 2$ para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

Por que a equação de uma reta qualquer paralela a r é $2x - y + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$?

11. Para que valores reais de k as retas $r: 3x - 2y + 5 = 0$ e $s: kx - y + 1 = 0$ são concorrentes?

Solução:

A condição $m_r = m_s$ garante o paralelismo entre as retas r e s. Se $m_r \neq m_s$, as retas r e s são concorrentes.

$$r: 3x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow 3x + 5 = 2y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow m_r = \frac{3}{2}$$

$$s: kx - y + 1 = 0 \Rightarrow y = kx + 1 \Rightarrow m_s = k$$

Assim, para que r e s sejam concorrentes, devemos ter $k \neq \frac{3}{2}$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

49. Em cada item a seguir, classifique no caderno as retas r e s em paralelas distintas, concorrentes ou coincidentes.

a) $r: y = 4x - 1$ e $s: 8x - 2y + 1 = 0$
Paralelas distintas.

b) $r: 5x - y + 6 = 0$ e $s: 6x + y - 5 = 0$
Concorrentes.

c) $r: y = -\frac{3x}{2} + 2$ e $s: 6x + 4y - 8 = 0$
Coincidentes (ou paralelas coincidentes).

d) $r: y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$ e $s: 6x + 8y + 4 = 0$
Paralelas distintas.

50. Para que valores reais de k as retas de equações $3x + 2y - 1 = 0$ e $kx - 3y + 2 = 0$ são:

a) paralelas distintas? $k = -\frac{9}{2}$

b) concorrentes? $k \neq -\frac{9}{2}$

c) coincidentes? Não existe $k \in \mathbb{R}$.

51. Escreva, no caderno, a equação geral da reta s que é paralela a r e passa por P, sendo r em cada um dos casos a seguir.

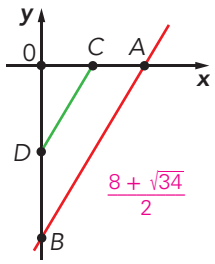
a) $r: y = 3x - 4$ e $P(0, 1)$

b) $r: 2x + 5y - 4 = 0$ e $P(-1, 2)$

c) $r: y - 3 = 0$ e $P(2, 5)$

52. Mostre no caderno que o quadrilátero de vértices $A\left(-\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $C(1, 2)$ e $D\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ é um trapézio. A demonstração encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

53. Na figura, a equação da reta que passa por A e B é $5x - 3y - 15 = 0$. Sabendo que C é ponto médio de $\overline{OA}$ e D é ponto médio de $\overline{OB}$, determine no caderno a medida de perímetro do triângulo COD.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto

O que se pode afirmar sobre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, quanto à posição e também à medida?

A resposta encontra-se na seção *Orientações específicas* deste Manual.

54. As retas suportes de três lados de um paralelogramo são $r: 3x + 2y - 12 = 0$, $s: y = \frac{x}{2} - 1$ e $t: x - 2y + 6 = 0$. Sendo o ponto $(2, 0)$ um dos vértices do paralelogramo, determine no caderno a equação da reta suporte do quarto lado. $3x + 2y - 6 = 0$

55. Represente graficamente, no caderno, o conjunto de pontos (x, y), com x e y reais que verificam a igualdade: $|x - y| = 2$.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

51. a) $m = 3$ e $n = 1$; $y = 3x + 1$ ou $3x - y + 1 = 0$

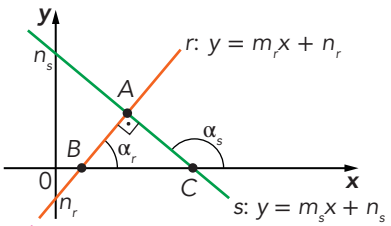
b) $m = -\frac{2}{5}$ e $y = -\frac{2}{5}x + n$; usando $P(-1, 2)$ vem:

$2 = -\frac{2}{5} \cdot (-1) + n \Rightarrow n = \frac{8}{5}$; logo $y = -\frac{2}{5}x + \frac{8}{5}$, isto é: $2x + 5y - 8 = 0$.

51. c) A reta r é horizontal; como a reta pedida deve passar por $(2, 5)$ e ser paralela à r, ela deve ser uma reta horizontal passando por $(2, 5)$, isto é, sua equação deve ser $y - 5 = 0$.

Perpendicularidade

Na figura, as retas r, de inclinação medindo α_r (então, $m_r = \tan \alpha_r$) e s, de inclinação medindo α_s (então, $m_s = \tan \alpha_s$), são perpendiculares.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos procurar uma relação entre seus coeficientes angulares. Sejam as equações $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$, e o ângulo de medida α_s externo ao triângulo ABC.

$$\alpha_s = \alpha_r + 90° \Rightarrow \tan \alpha_s = \tan (\alpha_r + 90°) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \alpha_s = \frac{\operatorname{sen} (\alpha_r + 90°)}{\cos (\alpha_r + 90°)} = \frac{\cos \alpha_r}{-\operatorname{sen} \alpha_r} = -\frac{1}{\tan \alpha_r}$$

Professor, as justificativas dessas propriedades encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Assim, temos:

$$\tan \alpha_s = -\frac{1}{\tan \alpha_r}, \text{ isto é: } m_s = -\frac{1}{m_r} \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Assim, verificamos que:

Se r e s são perpendiculares entre si, então $m_r \cdot m_s = -1$.

Observação

Essa relação só pode ser aplicada se r e s forem oblíquas ao eixo x, pois não é definida a declividade no caso de uma delas ser vertical. Assim, se uma das retas for vertical, uma perpendicular a ela é horizontal, mas a relação não se aplica.

Um procedimento análogo mostra a recíproca dessa propriedade, isto é, se r e s são duas retas tais que $m_r \cdot m_s = -1$, então r e s são perpendiculares entre si.

Note que as retas $r: 2x - 4y + 5 = 0$ e $s: y = -2x + 3$ são perpendiculares entre si, pois:

$$r: 4y = 2x + 5 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_r = \frac{1}{2} \\ m_s = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_r \cdot m_s = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$$

Pense nisto

Por que a bissetriz dos quadrantes pares e a bissetriz dos quadrantes ímpares são retas perpendiculares entre si?

Já as retas $r: y = 3x$ e $s: y = \frac{1}{3}x + 5$ não são perpendiculares entre si, pois $m_r = 3$, $m_s = \frac{1}{3}$ e $m_r \cdot m_s = 1 \neq -1$. Nesse caso, r e s concorrem, mas não perpendicularmente.

A equação da bissetriz dos quadrantes ímpares (b_{13}) é $y = x$ e a dos quadrantes pares (b_{24}) é $y = -x$. Seus coeficientes angulares são 1 e -1, o produto entre eles é -1.

Atividades resolvidas

12. Determine a equação geral da reta s, perpendicular a $r: y = 3x + 1$, traçada pelo ponto $P(4, 0)$.

Solução:

Como $r \perp s$, devemos ter $m_r \cdot m_s = -1$.

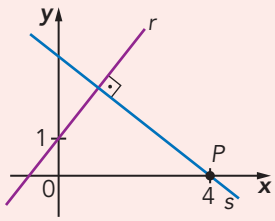
Como $m_r = 3$, então $m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{3}$. Assim, temos: $s: y = -\frac{1}{3}x + n$.

Como s passa por $P(4, 0)$, temos:

$$0 = -\frac{1}{3} \cdot 4 + n \Rightarrow n = \frac{4}{3}$$

Assim, a equação de s é:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow x + 3y - 4 = 0$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

13. Determine a equação da mediatriz do segmento de reta cujas extremidades são $A(0, 0)$ e $B(2, 3)$.

Solução:

Lembremos que a mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a ele, traçada pelo ponto médio dele.

O ponto médio M de $\overline{AB}$ é:

$$M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+3}{2}\right) \Rightarrow M\left(1, \frac{3}{2}\right)$$

O coeficiente angular da reta que passa por A e B é:

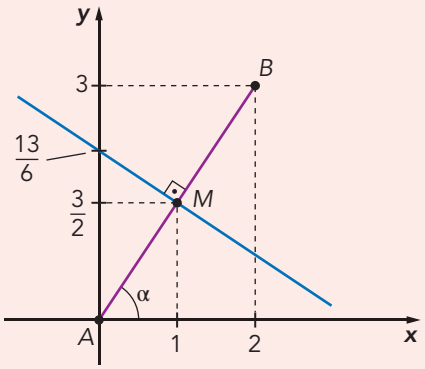
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}$$

A mediatriz é, portanto, uma reta com declividade $-\frac{2}{3}$ $\left(\text{pois } \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1\right)$, que passa pelo ponto $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Sua equação reduzida é $y = -\frac{2}{3}x + n$. Substituindo as coordenadas de M, temos:

$$\frac{3}{2} = -\frac{2}{3} \cdot 1 + n \Rightarrow n = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$$

Logo, a equação pedida é $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{6}$.

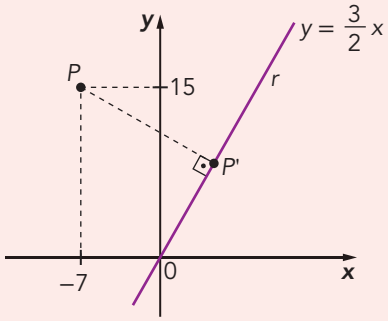


Banco de imagens/Arquivo da editora

14. Determine o ponto de intersecção entre a reta $r: y = \frac{3}{2}x$ e a reta perpendicular a r conduzida pelo ponto $P(-7, 15)$.

Solução:

O ponto de intersecção solicitado é a projeção ortogonal do ponto sobre a reta, como mostra a figura a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$P' = \text{proj}_r P$, ou seja, a intersecção de r com $\overline{PP'}$.

Usando os dados do problema, temos:

- O coeficiente angular m da reta $\overleftrightarrow{PP'}$ é tal que: $m \cdot m_r = -1 \Rightarrow m \cdot \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$.

- A equação de $\overleftrightarrow{PP'}$ é: $y = -\frac{2}{3}x + n$; usando P vem:

$$15 = -\frac{2}{3} \cdot (-7) + n \Rightarrow n = \frac{31}{3}$$

Portanto, a equação de $\overleftrightarrow{PP'}$ é:

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{31}{3}$, isto é, $2x + 3y - 31 = 0$.

- Determinando P', o ponto comum entre r e $\overleftrightarrow{PP'}$:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ 2x + 3y - 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + \frac{9x}{2} - 31 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{62}{13} \text{ e } y = \frac{93}{13}$$

Assim, as coordenadas de P' são $\left(\frac{62}{13}, \frac{93}{13}\right)$.

ATIVIDADES

61. $m_{BC} = \frac{1 - 0}{2 + 4} = \frac{1}{6}$

A reta suporte da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ tem coeficiente angular -6 e passa por $(0, -3)$, então: $y + 3 = -6 \cdot (x - 0) \Rightarrow 6x + y + 3 = 0$.

Não escreva no livro

56. Descreva, no caderno, quais das retas a seguir são perpendiculares entre si.

$r: y = 2x + 3$ $\quad m_r = 2;\ m_s = \frac{1}{4};\ m_t = -\frac{1}{2};\ m_u = -2$

$s: x - 4y + 4 = 0$ $\quad m_r \cdot m_t = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow r \perp t$

$t: x + 2y - 6 = 0$

$u: y = -2x - 1$

57. Dado o segmento de reta $\overline{AB}$, com $A(4, 5)$ e $B(-2, 1)$:

a) determine no caderno a equação da mediatriz de $\overline{AB}$; $3x + 2y - 9 = 0$

b) escolha um ponto qualquer dessa mediatriz e mostre no caderno que esse ponto equidista de A e B. Resposta pessoal.

58. Dados $P(2, -4)$ e $r: 2x - 3y + 6 = 0$:

a) obtenha no caderno as coordenadas do ponto Q, intersecção de r com a perpendicular a r por P; $\left(-\frac{18}{13}, \frac{14}{13}\right)$

b) determine no caderno o simétrico de P em relação à reta r. $\left(-\frac{62}{13}, \frac{80}{13}\right)$

59. No quadrado $ABCD$, $A(1, 2)$ e $B(3, 5)$ são vértices consecutivos. Determine no caderno as equações das retas suportes dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. $\overleftrightarrow{AD}: y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ $\quad \overleftrightarrow{BC}: y = -\frac{2x}{3} + 7$

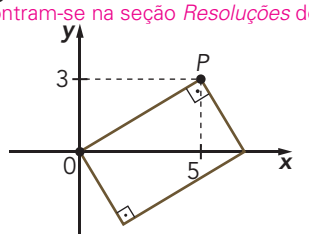
60. As retas r e s, de equações $r: 2x - y + 3 = 0$ e $s: y = mx + n$, intersectam-se, perpendicularmente, no ponto $(-2, -1)$. Quais são os valores de m e n? $m = -\frac{1}{2}$ e $n = -2$.

61. Seja ABC o triângulo de vértices $A(0, -3)$, $B(-4, 0)$ e $C(2, 1)$. Determine no caderno a equação da reta suporte da altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

62. Júlia e Jonas costumam se encontrar depois do trabalho em uma sorveteria localizada na esquina de uma praça retangular.

Representando a praça em um sistema de coordenadas retangulares, nota-se que Júlia trabalha em uma loja, representada pela origem do sistema, e Jonas trabalha em um café, representado pelo vértice do retângulo oposto à origem; a sorveteria encontra-se no ponto $P(5, 3)$. Ambos caminham, em linha reta, de seus locais de trabalho à sorveteria pontualmente às 18 h. Sabendo que a unidade de medida de comprimento utilizada é o metro e a escala é de 1 : 20, identifique, no caderno, como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações a seguir. Considere $\sqrt{34} \simeq 5{,}8$.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) A medida de distância entre a loja onde Júlia trabalha e o ponto de encontro é maior do que 100 metros. V

b) O café onde Jonas trabalha está representado por um ponto de abscissa $\frac{34}{5}$. V

c) Se Júlia caminha à medida de velocidade constante de 2 km/h, então ela chega à sorveteria antes das 18 h 03 min. F

d) Para dar uma volta completa ao redor da praça, um atleta, correndo à medida de velocidade constante de 5 km/h, leva menos de 4 minutos. F

58. Professor, se julgar pertinente, aprofunde o assunto com os estudantes. A ideia é lembrar uma propriedade importante da mediatriz: se um ponto pertence à mediatriz de um segmento de reta, então ele equidista das extremidades desse segmento de reta.

Não escreva no livro

PROJETO

Professor, este projeto favorece o trabalho com a competência geral **5**, as competências específicas **1** e **2** de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade **EM13LP18** da BNCC.

Reprodução/ ONU

Mapeamento de presença pública na região

Leia a reportagem a seguir, que explica sobre a região metropolitana.

O que é região metropolitana?

Região metropolitana é uma zona com alta densidade populacional, formada por municípios vizinhos que estão interligados por uma cidade maior, chamada metrópole. Por sua vez, essa metrópole influencia todas as cidades-satélites, de maneira social, política e econômica.

[...]

Características e organização de uma região metropolitana

Com o objetivo de cumprir funções específicas, a criação de uma região metropolitana está garantida na Constituição, no artigo 25. Nesse sentido, aos estados brasileiros cabe instituir regiões metropolitanas, aglomerações urbanas e microrregiões formadas por municípios limítrofes agrupados.

[...]

Professor, promova uma conversa com os estudantes sobre o texto. Identifique os conhecimentos deles acerca do assunto.

Todavia, em 2015, a presidente Dilma Roussef promulgou a lei conhecida como Estatuto das Metrópoles (Lei 13.089).

Esta lei estabelece diretrizes gerais que definem o planejamento, a gestão e a execução das funções públicas que são de interesse comum em regiões metropolitanas, além de estabelecer normas gerais sobre o plano de desenvolvimento urbano integrado.

[...]

Dessa maneira, questões de interesse público como saúde, educação, transporte e segurança podem ser assegurados por meio de ações conjuntas envolvendo os responsáveis legais por cada território.

[...]

BRAGA, Rafael. Região metropolitana, o que é? Definição, características e exemplos. *Conhecimento científico*, 20 jan. 2023. Disponível em: https://tedit.net/xjvrc2. Acesso em: 9 ago. 2024.

Pensando em um projeto

Este projeto visa à elaboração de um vídeo sobre os dados oriundos da organização de um mapeamento de presença pública na região em que vocês moram. Para isso, em grupos, vocês devem pesquisar uma imagem dessa região, construir um sistema de coordenadas cartesianas para a localização dela e analisá-la quanto à presença de prédios relevantes, preferencialmente relacionados ao poder público.

Para propiciar a reflexão crítica dos dados que serão gerados, façam uma pesquisa sobre macrocefalia urbana, tomem notas no caderno e reflitam sobre como ela se dá na região onde vocês moram ou no centro urbano mais próximo dela.

Dica

Vídeo Macrocefalia urbana e problemas sociais

Nesse vídeo, a professora de Geografia Luana Lessa explica de modo prático e com diversos exemplos o conceito de macrocefalia urbana e os impactos na sociedade.

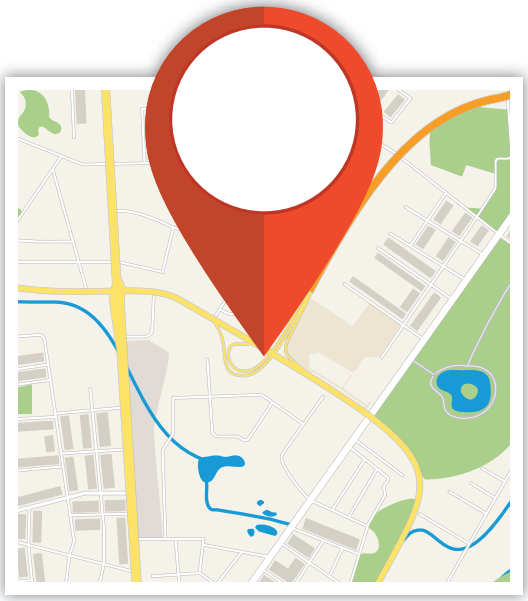
Disponível em: https://tedit.net/z14zq2. Acesso em: 12 ago. 2024.

Para começar

- Organizem-se em 7 grupos.

Plano de ação

Agora é hora de os grupos iniciarem a pesquisa, o mapeamento, as análises e a organização dos vídeos!


PxB/Shutterstock

Aplicativo gratuito de geolocalização.

Etapa 1

Escolham algum aplicativo ou ferramenta gratuita de geolocalização. Após a escolha, pesquisem uma imagem da localização da região em que vocês moram e organizem um plano cartesiano dela.

Etapa 2

Partindo da imagem gerada na etapa **1**, analisem a disposição de ruas, casas e prédios relevantes, preferencialmente relacionados ao poder público, como unidades de saúde, escolas, agências dos Correios, postos policiais e de bombeiros, etc. Nessa imagem, registrem em um sistema ortogonal as coordenadas de alguns pontos estratégicos da região que consideram importantes. Para isso, escolham uma origem e deem, em quilômetros, os valores da abscissa e da ordenada.

Apresentem as coordenadas de cada ponto estratégico inserido.

Etapa 3

Utilizando o conteúdo apresentado no vídeo *Macrocefalia urbana e problemas sociais*, avaliem e indiquem se há prédios públicos em quantidade adequada para as condições da região pesquisada, considerando o perímetro urbano.

Etapa 4

Consultando os passos para a produção de vídeos na seção *Produções em foco* deste livro, organizem o roteiro e a gravação dos vídeos.

Com os vídeos gravados, realizem a edição deles.

Etapa 5

Produto final: Vídeos com duração de 3 a 5 minutos com os resultados do mapeamento realizado focando a presença e/ou ausência do poder público na região onde vocês moram.

Preparem-se para as socializações dos vídeos com a turma e para debater sobre os resultados. Considerem postar os vídeos em uma plataforma *on-line*.

Com o professor, definam a data e o horário dessa socialização, considerando a disponibilidade das pessoas envolvidas (estudantes, professores, profissionais convidados e coordenadores da escola, entre outros).

Depois da divulgação dos vídeos, considerem a possibilidade de compartilhá-los com toda a comunidade escolar.

capítulo

10 Transformações geométricas no plano

Introdução

A busca por proporções perfeitas e harmoniosas acompanha a humanidade desde a Antiguidade. Diversas civilizações antigas deixaram como legado objetos, gravuras, pinturas e construções grandiosas que comprovam esse interesse.

A harmonia sempre esteve ligada a um conceito: a **simetria**. Uma figura plana é simétrica quando é possível, de algum modo, dividi-la em partes que coincidem perfeitamente quando sobrepostas.

A simetria está presente em fotos de objetos do cotidiano, da natureza, do corpo humano, de obras arquitetônicas e de outras manifestações artísticas.

Analise as imagens a seguir.

As imagens não estão representadas em proporção.

Mihail/Adobe Stock

Avião.

Chase D'animulls/Shutterstock

Borboleta-monarca.

79mtkl/Shutterstock

Tesoura de jardinagem.

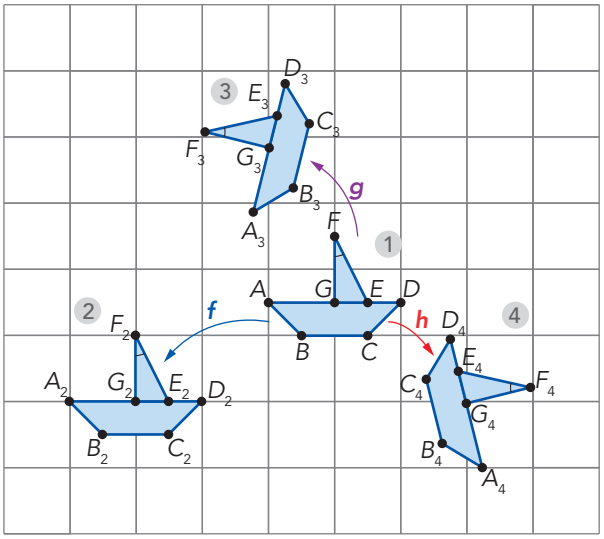
Alexander Lupin/Adobe Stock

Taj Mahal, em Agra, Índia. Foto de 2022.

Todas essas fotos apresentam repetição de elementos: se traçarmos uma linha imaginária vertical, por exemplo, dividindo a foto da borboleta ao meio, notaremos que ela é composta de 2 partes espelhadas.

Os processos geométricos que criam uma figura plana a partir da figura original são chamados de **transformações geométricas**. Neste capítulo, vamos estudar 2 das principais transformações geométricas no plano: as **isometrias** e as **homotetias**.

As isometrias preservam o formato e as medidas das dimensões da figura e produzem figuras simétricas à original. Analise, a seguir, as figuras **1**, **2**, **3** e **4**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- *f* é a função que transforma o barquinho **1** no barquinho **2**.
- *g* é a função que transforma o barquinho **1** no barquinho **3**.
- *h* é a função que transforma o barquinho **1** no barquinho **4**.

Repare, por exemplo, no segmento de reta $\overline{AB}$, em **1**, e nos segmentos de reta correspondentes $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$ e $\overline{A_4B_4}$, em **2**, **3** e **4**, respectivamente. Todos têm a mesma medida.

Analise agora o ângulo $E\hat{F}G$ e os ângulos correspondentes $E_2\hat{F}_2G_2$, $E_3\hat{F}_3G_3$ e $E_4\hat{F}_4G_4$, em **2**, **3** e **4**, respectivamente. Todos têm a mesma medida.

A isometria permite movimentar uma figura preservando as medidas originais, sem distorcer o formato dela, isto é, é possível mudar apenas a posição da figura na qual ela foi aplicada.

As homotetias preservam o formato, mas geralmente alteram o "tamanho" da figura plana, como é possível notar na imagem de uma matriosca.

Emilio Ereza/Alamy/Fotoarena

A matriosca é um tradicional brinquedo russo (conhecido também na Europa oriental) composto de uma sucessão de bonecas, geralmente com formatos idênticos, colocadas uma dentro da outra, da maior até a menor.

Não escreva no livro

Pense nisto

Você sabe qual é a origem da palavra **isometria**? Pesquise-a e compartilhe suas descobertas com os colegas.

Isometrias

Pense nisto: Isometria tem origem grega: *ísos* significa "igual" e *métron* significa "medida". Logo, **isometria** significa "medida igual".

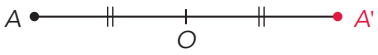
Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

Isometrias (ou **transformações isométricas**) são transformações que preservam a medida de qualquer segmento de reta que possa ser determinado pelos pontos de uma figura plana.

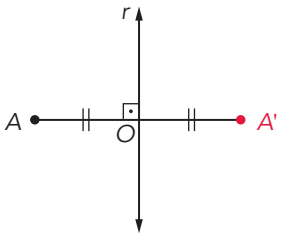
Consequentemente, as isometrias produzem uma figura plana congruente à figura inicial. São exemplos de isometria a **reflexão**, a **translação** e a **rotação**, que serão estudadas neste capítulo.

Reflexão

Dados 2 pontos A e O, chama-se simétrico de A em relação a O o ponto A' da reta $\overleftrightarrow{AO}$ tal que $AO = OA'$, ou seja, O é ponto médio do segmento de reta $\overline{AA'}$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

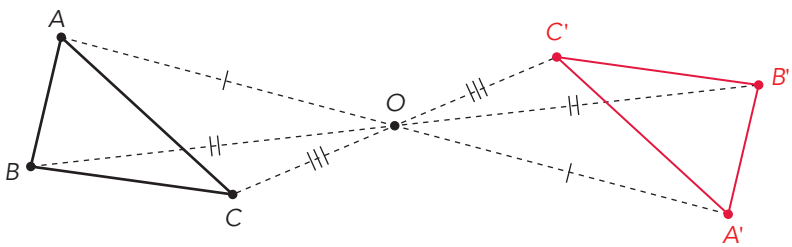


Banco de imagens/Arquivo da editora

E dados um ponto A e uma reta r, chama-se simétrico de A em relação a r o ponto A' tal que r é mediatriz de $\overline{AA'}$, ou seja, r é perpendicular a $\overline{AA'}$ e passa pelo ponto médio O de $\overline{AA'}$.

> Fazer a **reflexão** de uma figura geométrica plana F em relação a um ponto O dado é o mesmo que obter a figura F', determinada pelos pontos simétricos dos pontos de F em relação ao ponto O.

Vamos obter a reflexão do triângulo ABC em relação ao ponto O.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- A' é o ponto simétrico do ponto A em relação ao ponto O.
- B' é o ponto simétrico do ponto B em relação ao ponto O.
- C' é o ponto simétrico do ponto C em relação ao ponto O.

O triângulo $A'B'C'$ é obtido por meio da reflexão do triângulo ABC em relação ao ponto O.

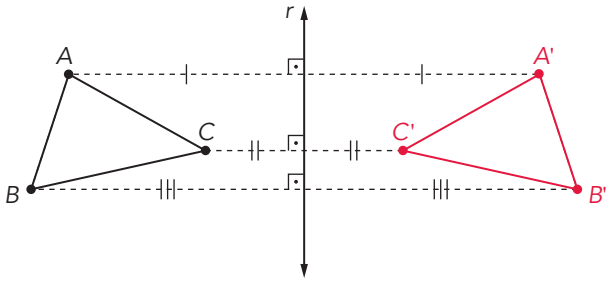
> Fazer a **reflexão** de uma figura geométrica plana F em relação a uma reta r dada equivale a obter a figura F', determinada pelos pontos simétricos dos pontos de F em relação à reta r.

Professor, a prova da congruência entre os 2 triângulos da figura encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Observação

O triângulo $A'B'C'$ é congruente ao triângulo ABC; portanto, as medidas de comprimento são preservadas e, assim, a reflexão em relação a um ponto é uma isometria.

Agora, vamos obter a reflexão do triângulo ABC em relação à reta r.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- A' é o ponto simétrico de A em relação à reta r.
- B' é o ponto simétrico de B em relação à reta r.
- C' é o ponto simétrico de C em relação à reta r.

O triângulo $A'B'C'$ é obtido por meio da reflexão do triângulo ABC em relação à reta r.

Observação

Note que o triângulo $A'B'C'$ é congruente ao triângulo ABC.

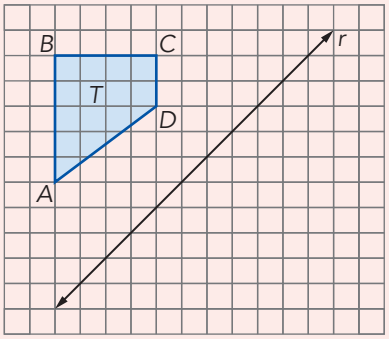
Perceba também que r é a mediatriz dos segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$.

Atividades resolvidas

1. Analise a região T, limitada pelo trapézio $ABCD$.

a) Represente, em uma malha quadriculada, T e a imagem T', obtida por uma reflexão em relação à r.

b) Determine a medida de cada lado da imagem T'. Para isso, considere que o lado de cada quadradinho da malha mede 1 u.c.



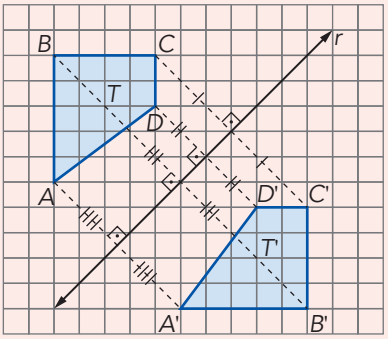
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

a) Considere os vértices A', B', C' e D' de T', que é a imagem de T obtida por meio da reflexão em relação à r, tal que:

- $\overline{AA'} \perp r$ e $d_{A,r} = d_{A',r}$
- $\overline{BB'} \perp r$ e $d_{B,r} = d_{B',r}$
- $\overline{CC'} \perp r$ e $d_{C,r} = d_{C',r}$
- $\overline{DD'} \perp r$ e $d_{D,r} = d_{D',r}$

Traçamos por A, B, C e D retas perpendiculares a r. Para determinar os pontos A', B', C' e D', basta contar os quadradinhos de cada ponto da imagem T até a reta r e reproduzir a mesma quantidade na reta perpendicular a r, até o respectivo vértice da imagem T', como mostra a figura.



b) Dado que o lado de cada quadradinho mede 1 u.c., temos que: $AB = A'B' = 5$ u.c.; $BC = B'C' = 4$ u.c.; $CD = C'D' = 2$ u.c.

Sendo K um ponto do lado $\overline{A'B'}$ de modo que $A'KD'$ seja um triângulo retângulo, tem-se:

$A'D' = 5$ u.c., pois $(A'D')^2 = (A'K)^2 + (D'K)^2 \Rightarrow (A'D')^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow A'D' = 5$ (teorema de Pitágoras).

Observação

- A medida de distância do ponto A à reta r (simbolizada por $d_{A,r}$) é a medida do menor segmento de reta com uma extremidade em A e outra em r.
- O símbolo $\perp$ indica que as retas (ou os segmentos de reta) são perpendiculares.

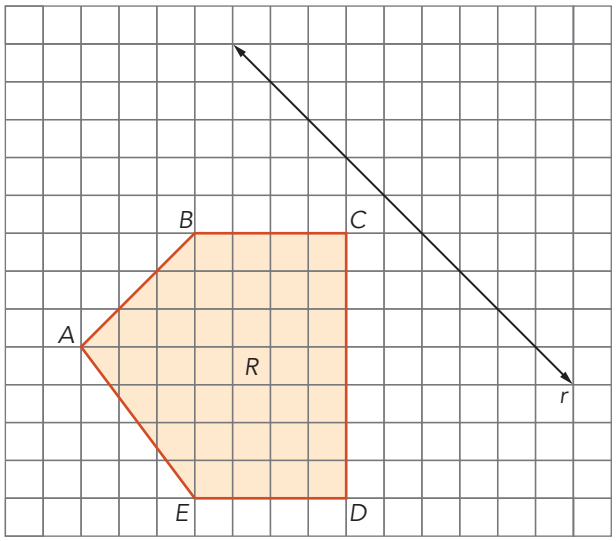
1. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.
Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

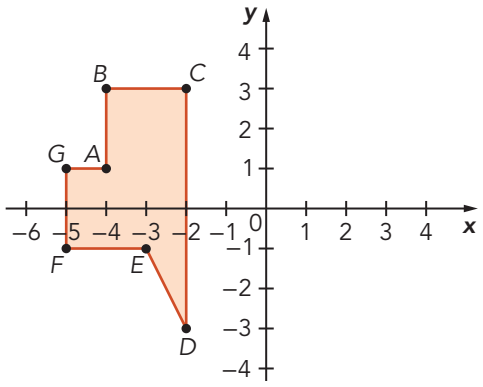
1. Seja R a região limitada pelo pentágono $ABCDE$. Represente, em uma malha quadriculada, R e R', sendo R' a região obtida pela reflexão de R em relação à r.

Banco de imagens/Arquivo da editora



2. Considere R a região limitada pelo polígono $ABCDEFG$, em que $A(-4, 1)$; $B(-4, 3)$; $C(-2, 3)$; $D(-2, -3)$; $E(-3, -1)$; $F(-5, -1)$ e $G(-5, 1)$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



a) Represente no caderno um sistema de coordenadas cartesianas e as regiões R e R', sendo a figura R' obtida por meio da reflexão da região R em relação ao eixo das ordenadas.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

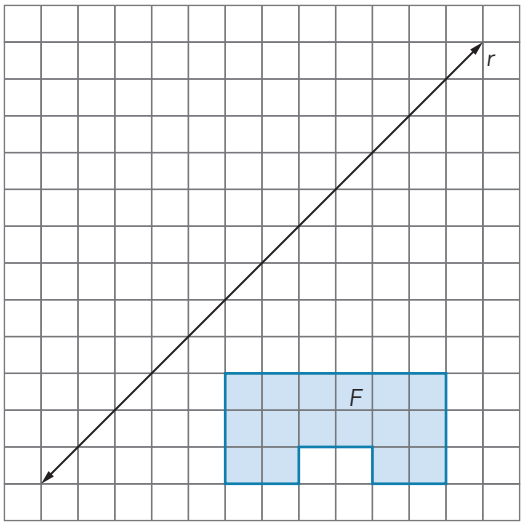
b) Determine, no caderno, os vértices do polígono que delimita a região R', obtida no item **a**.

$A'(4, 1)$; $B'(4, 3)$; $C'(2, 3)$; $D'(2, -3)$; $E'(3, -1)$; $F'(5, -1)$; e $G'(5, 1)$.

c) Determine, no caderno, a medida de perímetro e a medida de área de R e de R'.

Medida de perímetro de R e de R': $15 + \sqrt{5}$ u.c.; medida de área de R e de R': 11 u.a.

3. Represente, em uma malha quadriculada, F e F', sendo F' a imagem de F obtida por meio de uma reflexão em relação à r.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

4. Analise a fotografia a seguir.

Alempire/Dreamstime/Easy Mediabank

Paredão rochoso próximo à superfície de um lago.

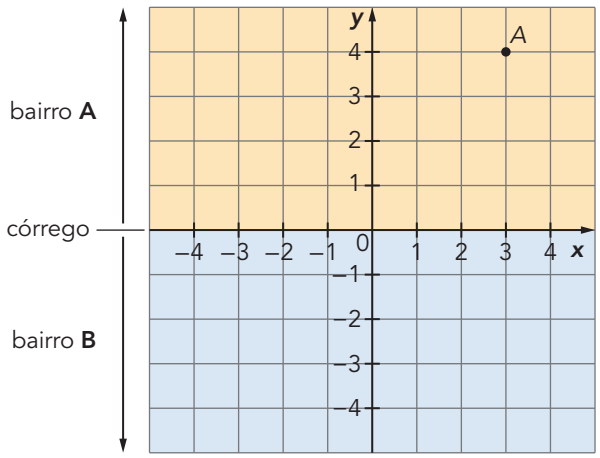
Se a análise não for feita com atenção, a imagem nos confunde. Note que na fotografia o paredão rochoso e o reflexo dele na superfície da água de um lago são simétricos em relação à reta imaginária formada pela interseção do paredão com a superfície da água. Podemos afirmar que o paredão rochoso e o reflexo são exemplos de elementos:

a) transladados.
b) equilibrados.
c) reflexivos.
d) simétricos.

Como são objetos refletidos, eles são simétricos em relação à reta imaginária, que é a interseção da superfície da água com o paredão. Alternativa **d**.

5. A malha quadriculada do plano cartesiano representa a vista aérea das ruas de 2 bairros vizinhos, que são divididos por um córrego retilíneo representado pelo eixo *x*. O bairro **A** está localizado acima do córrego, e o bairro **B**, abaixo dele. A medida do lado de cada quadradinho da malha equivale a 1 km.

Ana, Bruna e Célia são 3 amigas cujas residências foram representadas pelos pontos *A*, *B* e *C*, respectivamente, no plano cartesiano. Sabe-se que *A*(3, 4) e que *B* e *C* são respectivamente os pontos simétricos de *A* em relação ao eixo *x* e em relação ao ponto (1, 1).



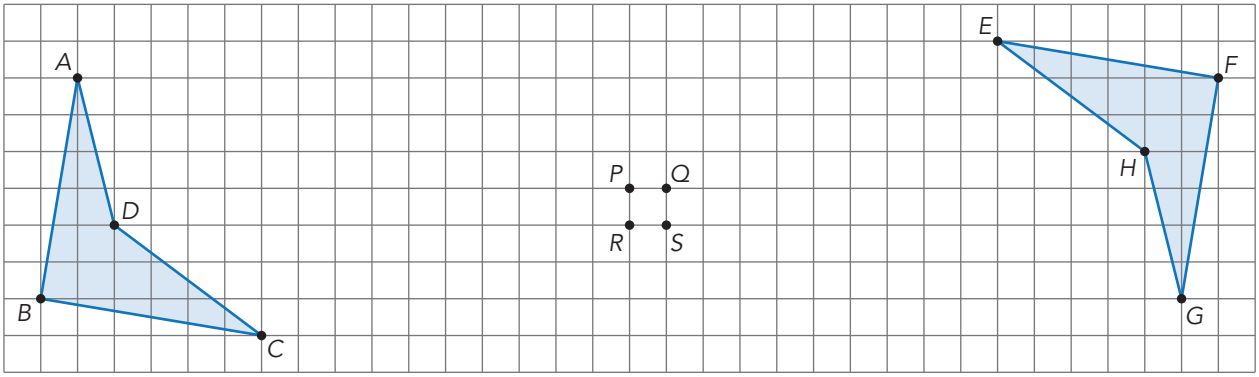
Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Escreva no caderno as coordenadas dos pontos em que Bruna e Célia moram. *B*(3, −4) e *C*(−1, −2).

b) Qual é a medida de distância entre as casas de Ana e Bruna? 8 km

c) Qual é a medida de distância entre as casas de Bruna e Célia? $2\sqrt{5}$ km

6. Uma arquiteta desenvolveu 3 luminárias que serão instaladas no teto de uma residência. Para indicar de que modo as luminárias seriam instaladas no teto, ela representou o teto em uma malha quadriculada e as luminárias com pontos e regiões do plano. Uma dessas luminárias é simples (composta somente de uma lâmpada), e as outras 2 têm formatos de regiões limitadas por quadriláteros congruentes. As luminárias quadrangulares são as regiões limitadas pelos quadriláteros *ABCD* e *EFGH*, conforme mostra a imagem. Por razões estruturais, a luminária simples deve ser posicionada em um dos pontos indicados por *P*, *Q*, *R* e *S*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

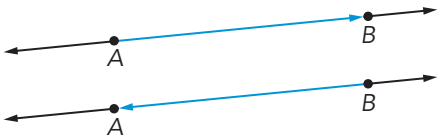
Para as instalações ficarem harmoniosas, a arquiteta planejou que a luminária mais simples fosse instalada de maneira que as regiões limitadas pelos quadriláteros fiquem simétricas em relação ao ponto da instalação.

Esboce, em uma malha quadriculada, a localização das regiões limitadas pelos quadriláteros que representam as luminárias e indique o ponto onde a luminária mais simples deve ser instalada.

Ponto *P*.

Translação

Para estudar a translação, vamos retomar o conceito de segmento de reta e utilizar setas para representar o sentido dos deslocamentos. Por meio desse recurso, é possível indicar 2 sentidos diferentes para o mesmo segmento de reta $\overline{AB}$:



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Note que esses 2 segmentos de reta têm a mesma direção que a reta $\overleftrightarrow{AB}$, porém, suas orientações são diferentes.

Eles são chamados de **segmentos orientados**, que são segmentos de reta com as seguintes características:

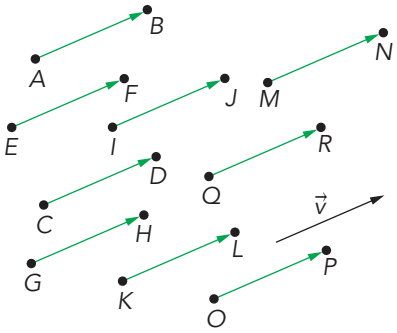
- **módulo**: é a medida do segmento de reta;
- **direção**: é a direção da reta $\overleftrightarrow{AB}$, na qual o segmento de reta está contido;
- **sentido**: é a orientação do segmento de reta, indicada na figura por uma seta.

Por exemplo, a seguir, está representado o segmento orientado $\overline{BA}$, cujo sentido de "percurso" é de B para A.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Em particular, se suas extremidades coincidissem, o segmento de reta seria considerado um segmento orientado **nulo**.

Considere agora a representação de vários segmentos orientados, com mesmo **módulo** (mesma medida de comprimento), mesma **direção** (todos são paralelos entre si) e mesmo **sentido** (todas as setas apontam para o mesmo sentido do "percurso").



Banco de imagens/Arquivo da editora

Segmentos orientados que apresentam essas três características iguais constituem segmentos equipolentes. Um conjunto de segmentos equipolentes é chamado **vetor**.

Para representar o vetor, que corresponde a todos esses segmentos equipolentes, além de outros, usaremos uma seta e a notação $\vec{v}$. Isto é, $\vec{v} = \overline{AB}$, $\vec{v} = \overline{CD}$, $\vec{v} = \overline{EF}$ ou $\vec{v} = \overline{GH}$, etc. Cada um desses segmentos orientados é um representante de $\vec{v}$.

Módulo

O módulo de um vetor $\vec{v}$ é igual à medida de qualquer um dos segmentos orientados que o representam. Indicamos o módulo de $\vec{v}$ por $|\vec{v}|$.

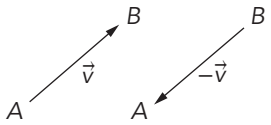
No caso do segmento orientado $\overline{AB}$, por exemplo, seu módulo é indicado por $|\overline{AB}|$ e corresponde à medida do segmento de reta $\overline{AB}$.

Vetor nulo

O vetor nulo, indicado por $\vec{0}$, é o vetor cujo representante pode ser qualquer segmento orientado nulo.

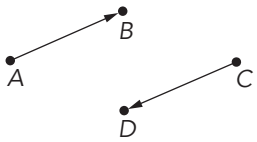
Vetor oposto

Dado um vetor $\vec{v} = \overline{AB}$ ("percurso" de A para B), o vetor oposto de $\vec{v}$ (indicado por $-\vec{v}$) é o vetor $-\vec{v} = \overline{BA}$ ("percurso" de B para A). Isto é, se $\overline{AB}$ é um representante de $\vec{v}$, então $\overline{BA}$ é um representante de $-\vec{v}$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

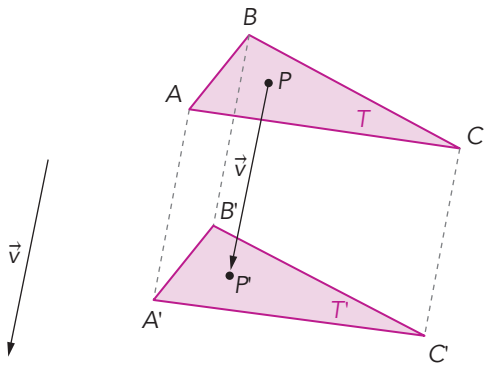
Na figura a seguir, temos $\vec{v} = \overline{AB}$ e $-\vec{v} = \overline{CD}$, já que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.



Considere as regiões T e T', limitadas pelos triângulos ABC e $A'B'C'$, respectivamente, e o vetor $\vec{v}$.

Para cada ponto $P \in T$ corresponde um ponto $P' \in T'$ tal que $\vec{v} = \overline{PP'}$, isto é, o segmento orientado $\overline{PP'}$ é um representante de $\vec{v}$.

Dizemos que T' é obtida de T por meio de uma **translação** segundo o vetor $\vec{v}$, ou, ainda, T' é obtida por meio da translação de T por $\vec{v}$.

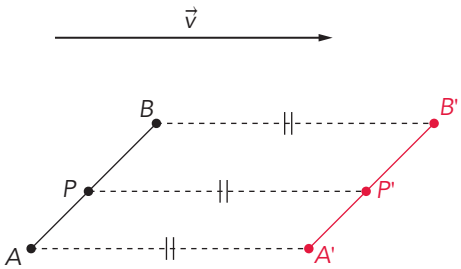


Note que:

- as regiões limitadas pelos triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes;
- qualquer segmento de reta em T é transformado em um segmento de reta paralelo e com a mesma medida de comprimento em T';
- os segmentos orientados $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{PP'}$ são representantes do vetor $\vec{v}$.

Dizemos, portanto, que a região limitada pelo triângulo $A'B'C'$ é simétrica à região limitada pelo triângulo ABC por **simetria translacional** na direção de $\vec{v}$.

A seguir, vamos fazer a translação de $\overline{AB}$ segundo o vetor $\vec{v}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- A' é obtido a partir da translação de A segundo $\vec{v}$, isto é, $\overline{AA'} = \vec{v}$.
- B' é obtido a partir da translação de B segundo $\vec{v}$, isto é, $\overline{BB'} = \vec{v}$.

Em geral, para cada ponto P pertencente a $\overline{AB}$ tem-se que $\overline{PP'} = \vec{v}$. $\overline{A'B'}$ é obtido a partir da translação de $\overline{AB}$ segundo $\vec{v}$.

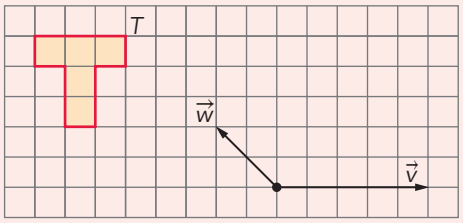
Observação

Note que as medidas dos segmentos de reta $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são iguais ao módulo do vetor $\vec{v}$ e que $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$.

Atividades resolvidas

2. Represente as regiões T e T', na malha quadriculada, sendo que T' foi obtida por meio da translação de T segundo o vetor dado:

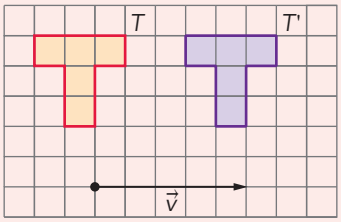
a) $\vec{v}$; **b)** $\vec{w}$.



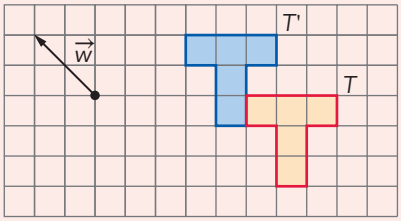
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

a)



b)

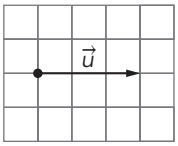


ATIVIDADES

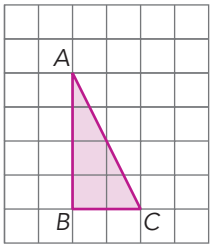
Não escreva no livro

7. Copie, em uma malha quadriculada, a região triangular ABC apresentada em cada item e represente a região triangular $A'B'C'$, obtida por meio da translação de ABC segundo o vetor $\vec{u}$.

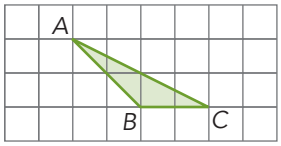
As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.



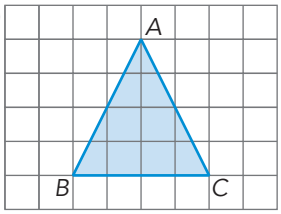
a)



b)



c)

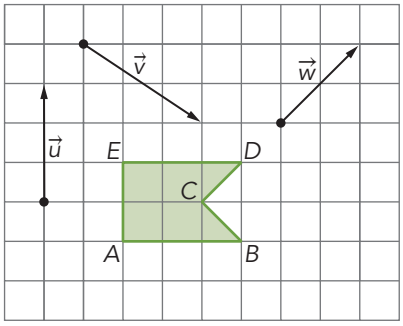


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

8. Considere a região poligonal $ABCDE$. Para cada item, copie-a em uma malha quadriculada e represente $A'B'C'D'E'$, região poligonal obtida por meio da translação de $ABCDE$ segundo o vetor:

a) $\vec{u}$; **b)** $\vec{v}$; **c)** $\vec{w}$.

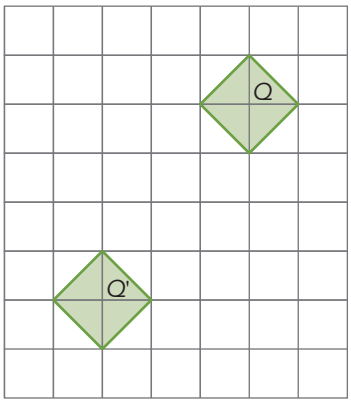
As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.



Banco de imagens/Arquivo da editora

9. Na malha quadriculada a seguir estão representadas as regiões Q e Q', ambas limitadas por quadrados. É possível obter a região Q' por meio de uma translação da região Q pelo vetor $\vec{v}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Copie as regiões Q e Q' em uma malha quadriculada e represente o vetor $\vec{v}$.

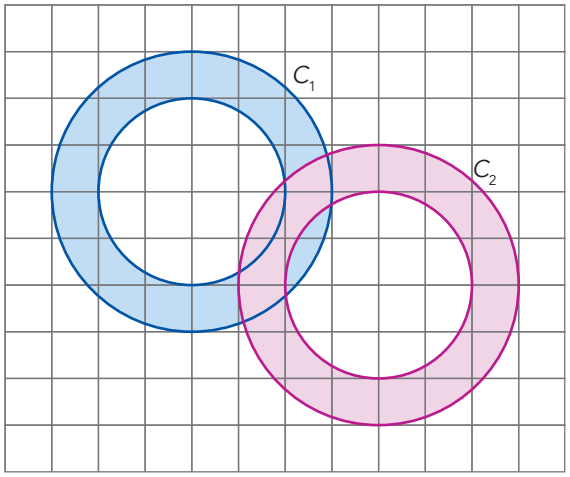
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

10. Na malha quadriculada a seguir, a região C_1, limitada por duas circunferências concêntricas, é transladada segundo o vetor $\vec{v}$, originando C_2.

Copie as regiões C_1 e C_2 em uma malha quadriculada e represente nela o vetor $\vec{v}$.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

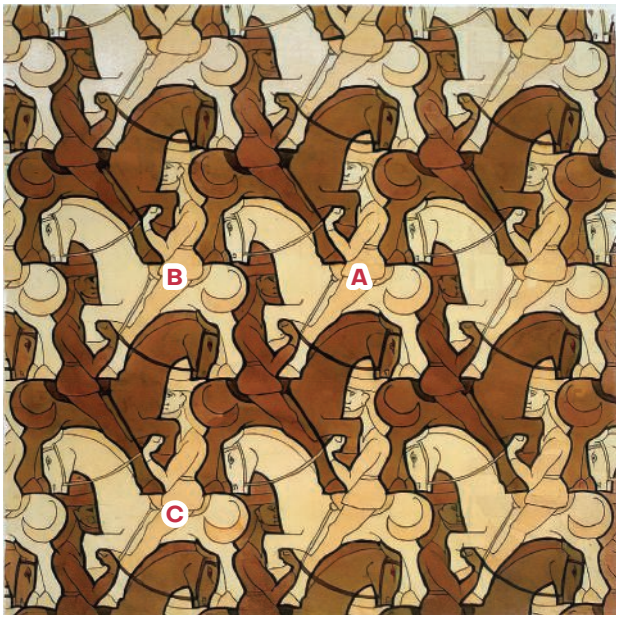
Banco de imagens/Arquivo da editora



11. Maurits Cornelis Escher, ou M. C. Escher (1898-1972), foi um artista gráfico holandês conhecido principalmente pela criação de xilogravuras e litografias. Muitas de suas obras apresentam construções impossíveis, ladrilhamento (preenchimento total do plano), explorações do infinito e metamorfoses (padrões geométricos entrecruzados que se transformam gradualmente em figuras completamente diferentes).

Entre matemáticos e simpatizantes, Escher também é conhecido por usar transformações geométricas (isometrias) nas obras.

A imagem a seguir mostra uma de suas obras, em que são usadas isometrias e 3 imagens idênticas, de um cavaleiro montado, identificadas pelas letras **A**, **B** e **C**.



M.C. Escher's "Relatividade" © 2024 The M.C. Escher Company - The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com

Obra de M. C. Escher feita por meio de translações de um cavaleiro.

Desconsiderando os módulos dos vetores representados nos itens, as imagens **B** e **C** são obtidas, respectivamente, por meio de translações da imagem **A** segundo vetores de direções e sentidos:

Alternativa **a**.

a) ← e ↙

b) ← e ↗

c) → e ↙

d) ↗ e →

Dica

Texto "A vida de M. C. Escher"

Esse pequeno artigo trata da vida e da obra de Escher e apresenta fotos e curiosidades. Disponível em: https://tedit.net/14zw0o. Acesso em: 13 ago. 2024.

Página *Transformation prints*

Na parte do acervo de Escher de que a página dispõe, é possível analisar interessantes imagens em que foram usadas diferentes transformações geométricas. Disponível em: https://tedit.net/wu8b16. Acesso em: 13 ago. 2024.

Sugerimos que a atividade **12** seja trabalhada em conjunto com o professor de Língua Portuguesa, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

Não escreva no livro

12. Augusto Luiz Browne de Campos, conhecido como Augusto de Campos, é um poeta brasileiro e um dos criadores do Concretismo, movimento literário no qual a poesia ganhou um novo formato, com a desintegração total do verso tradicional.

A imagem a seguir é um dos poemas desse artista.

Ilustrações: Augusto de Campos/Acervo do Poeta

Poema visual "Lixo Luxo", de Augusto de Campos.
Fonte: CAMPOS, Augusto de. Lixo Luxo.
In: CAMPOS, Augusto de. *Poesia concreta*.
São Paulo: Abril Educação, 1982.

As imagens não estão representadas em proporção.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Para compor qualquer uma das letras da palavra **LIXO**, o artista pode transformar o termo

LUXO

por meio de sucessivas: Alternativa **b**.

a) simetrias.

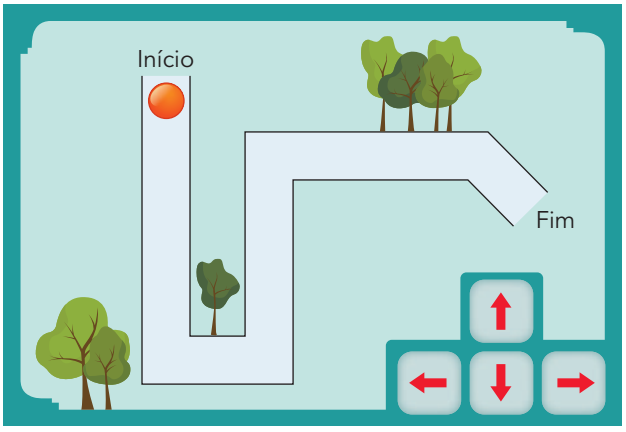
b) translações.

c) reflexões em relação a uma reta.

d) reflexões em relação a um ponto.

13. Em cada fase de um jogo de *videogame*, o jogador precisa usar translações no plano para levar um círculo do ponto de partida (início) à saída do labirinto (fim). A imagem apresenta uma fase desse jogo.

O círculo movimenta-se no labirinto por meio de translações, segundo os vetores selecionados. Além disso, quando entra em contato com uma parede, ele para de se movimentar. Nesse momento, o jogador precisa selecionar outro vetor para que o círculo continue se movimentando.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Desconsiderando os módulos dos vetores representados a seguir, as opções de vetores que definem as translações são:

Professor, comente com os estudantes que os vetores diagonais resultam da união entre duas teclas direcionais.

Direção e sentido do vetor	→	←	↑	↓	↘	↖	↗	↙
Identificação	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$	$\vec{e}$	$\vec{f}$	$\vec{g}$	$\vec{h}$

Para conseguir finalizar a fase, o jogador deve escolher, consecutivamente, os vetores: Alternativa **c**.

a) $\vec{d}, \vec{e}, \vec{c}, \vec{a}, \vec{e}$.

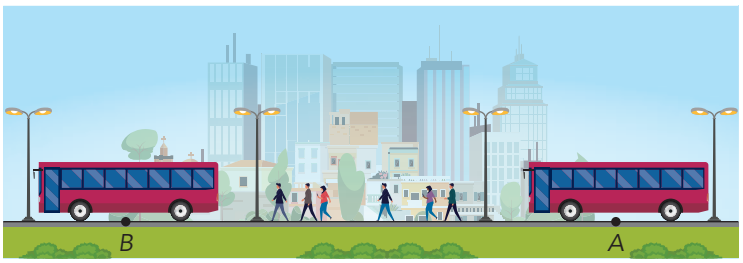
b) $\vec{d}, \vec{a}, \vec{d}, \vec{a}, \vec{e}$.

c) $\vec{d}, \vec{a}, \vec{c}, \vec{a}, \vec{e}$.

d) $\vec{d}, \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}, \vec{e}$.

14. Um ônibus movimenta-se numa avenida retilínea, sempre na mesma faixa. Uma pessoa que está na calçada dessa avenida, ao observar o ônibus partir de um ponto A e parar no ponto B, percebe que esse ônibus sofreu uma translação segundo o vetor $\overrightarrow{AB}$, cuja direção é dada pela reta $\overleftrightarrow{AB}$, no sentido de A para B, e cuja medida de comprimento é dada pela medida de distância entre A e B.

Exemplo de resposta: Um elevador subindo de um andar para o outro sofre uma translação de um vetor com direção vertical, no sentido de baixo para cima, com medida igual à medida de distância entre esses andares.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Cite outras situações do cotidiano em que um objeto sofre translação e descreva cada translação.

Rotação

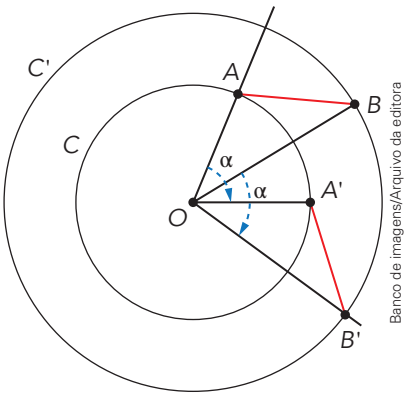
Analise a figura **1**.

Os pontos A e A' estão na mesma circunferência C, de centro O.

Os pontos B e B' estão na mesma circunferência C', de centro O.

Os ângulos $A\widehat{O}A'$ e $B\widehat{O}B'$ têm a mesma medida α.

Nessa situação, dizemos que o ponto A' foi obtido de A por meio de uma rotação de centro O e ângulo de medida α no sentido horário, e que o ponto B' foi obtido de B por meio de uma rotação de centro O e ângulo de medida α no sentido horário.



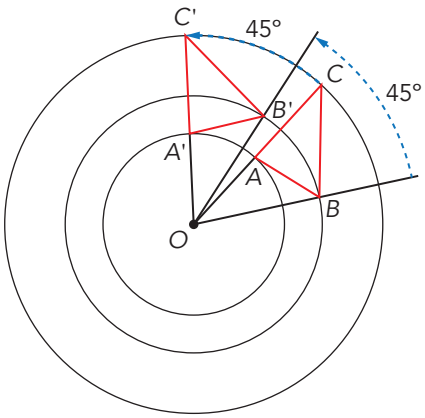
Banco de imagens/Arquivo da editora

Figura **1**.

Do mesmo modo, o segmento de reta $\overline{A'B'}$ foi obtido de $\overline{AB}$ por meio de uma rotação de centro O e ângulo de medida α no sentido horário.

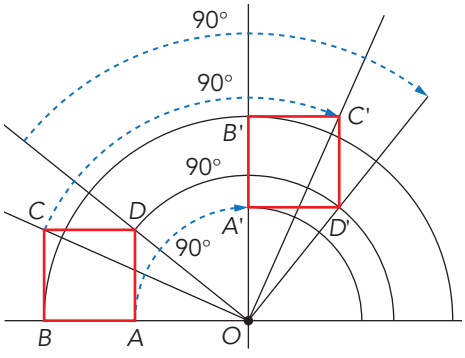
Acompanhe outros exemplos.

O triângulo $A'B'C'$ foi obtido do triângulo ABC por meio de uma rotação com centro O e ângulo medindo 45° no sentido anti-horário.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O quadrado $A'B'C'D'$ é a imagem de $ABCD$, criada ao fazer uma rotação com centro O e ângulo medindo 90° no sentido horário.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fazer uma **rotação** com centro O e ângulo de medida α de uma figura plana F, no sentido horário ou anti-horário, é o mesmo que obter a figura F', determinada pelos pontos P' resultantes da rotação dos pontos P da figura F.

Não escreva no livro

Pense nisto

Na figura **1** os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são congruentes?

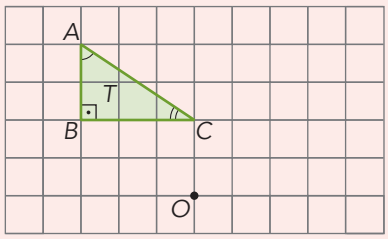
$\overline{OA} \cong \overline{OA'}$ (raio de C)
$\overline{OB} \cong \overline{OB'}$ (raio de C')
$A\widehat{O}B \cong A'\widehat{O}B'$, já que
$\text{med}(A\widehat{O}B) = \text{med}(A'\widehat{O}B') =$
$= \alpha - \text{med}(B\widehat{O}A')$.
Assim, pelo caso LAL de congruência, os triângulos AOB e $A'OB'$ são congruentes e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

Observação

Uma figura F', obtida por meio da rotação de F, com centro O e ângulo de medida α qualquer, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário, é uma figura congruente a F.

Atividades resolvidas

3. Seja T a região limitada pelo triângulo ABC da imagem a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

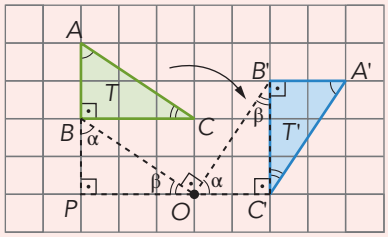
Represente, na malha quadriculada, T e T', sendo que T' é a imagem de T obtida por meio de uma rotação de 90°, com centro em O, no sentido horário.

Solução:

Temos:

- $\text{med}(C\hat{O}C') = 90°$, com $CO = C'O$;
- $\text{med}(B\hat{O}B') = 90°$, com $BO = B'O$;
- $\text{med}(A\hat{O}A') = 90°$, com $AO = A'O$.

Acompanhe, na imagem a seguir, por que $\text{med}(B\hat{O}B') = 90°$:



Banco de imagens/Arquivo da editora

No triângulo retângulo BPO, α e β são medidas de ângulos complementares, e os triângulos BPO e $OC'B'$ são congruentes.

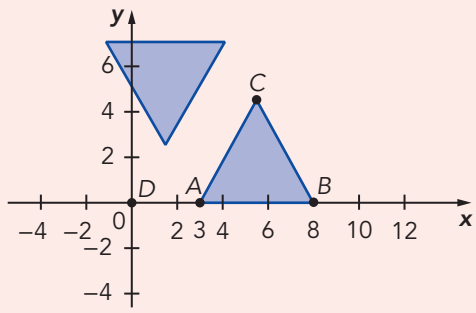
Daí segue que $\text{med}(B\hat{O}B') = 90°$ e $BO = B'O$.

Analogamente, tem-se que $\text{med}(A\hat{O}A') = \text{med}(C\hat{O}C') = 90°$.

Além disso, $AO = A'O$ e $CO = C'O$.

4. Da rotação da região limitada pelo triângulo ABC no sentido anti-horário, com centro em D e ângulo medindo 60°, obtém-se a região limitada pelo triângulo $A'B'C'$.

Associe os pontos A', B' e C' aos vértices do triângulo obtido.

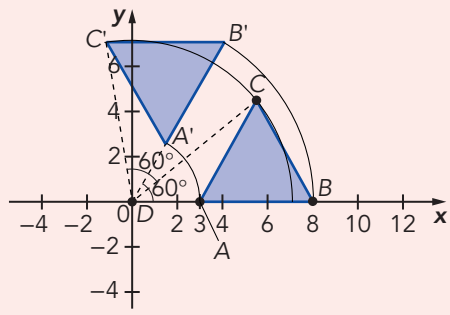


Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

É preciso considerar que:

- $\text{med}(A\hat{D}A') = 60°$; $\text{med}(B\hat{D}B') = 60°$ e $\text{med}(C\hat{D}C') = 60°$;
- A' pertence à circunferência com centro em D e raio de medida AD;
- B' pertence à circunferência com centro em D e raio de medida BD;
- C' pertence à circunferência com centro em D e raio de medida CD.

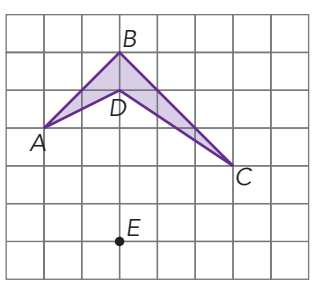


Banco de imagens/Arquivo da editora

ATIVIDADES

Não escreva no livro

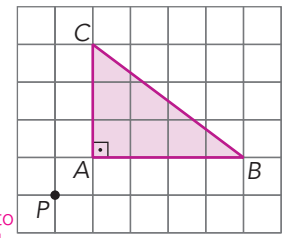
15. Considere a região limitada pelo quadrilátero não convexo $ABCD$ e o ponto E, representados na malha quadriculada. Reproduza-os, em uma malha quadriculada, junto com a região limitada pelo quadrilátero $A'B'C'D'$ obtida pela rotação de $ABCD$, com centro em E, de 90° e no sentido anti-horário. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.



Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

16. Considere a região triangular *ABC* e o ponto *P*, representados na malha quadriculada. Reproduza-os, em uma malha quadriculada, junto com a região triangular *A'B'C'*, obtida pela rotação de *ABC*, com centro em *P*, de 180° e no sentido:



Banco de imagens/ Arquivo da editora

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) horário;

b) anti-horário.

17. b) As duas regiões triangulares são simétricas em relação ao ponto *P*, o que significa que a rotação de 180° com centro em *P*, no sentido horário ou anti-horário, é equivalente à reflexão por meio do ponto *P*.

17. Considerando os resultados da atividade anterior, responda às perguntas a seguir.

a) O que podemos afirmar sobre os resultados dos 2 itens?

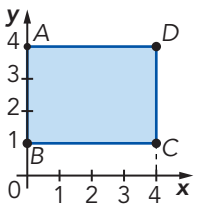
a) Quando realizamos uma rotação de 180°, obtemos o mesmo resultado independentemente do sentido.

b) O que podemos afirmar sobre as regiões triangulares *ABC* e *A'B'C'* e o ponto *P*?

18. Repita os itens da atividade **16** considerando um ângulo de rotação de medida 90°.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

19. Analise a região retangular *ABCD*. Represente, em uma malha quadriculada, essa região e a obtida por meio da rotação de *ABCD* no sentido anti-horário, com centro em *B*, e ângulo de rotação medindo:



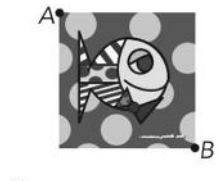
Banco de imagens/ Arquivo da editora

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) 90°;

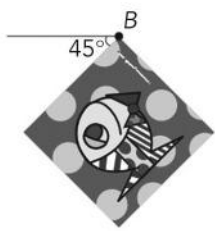
b) 180°.

20. (Enem) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos *A* e *B*. Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.



Fotos :Reprodução/Enem, 2017.

Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de: Alternativa **b**.



a) 90° no sentido horário.

b) 135° no sentido horário.

c) 180° no sentido anti-horário.

d) 270° no sentido anti-horário.

e) 315° no sentido horário.

21. (Enem) As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeça que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura **A** e 8 peças no tabuleiro da figura **B**. As peças são retiradas do tabuleiro da figura **B** e colocadas no tabuleiro da figura **A** na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.

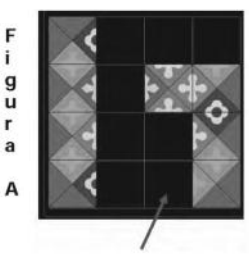


Figura A

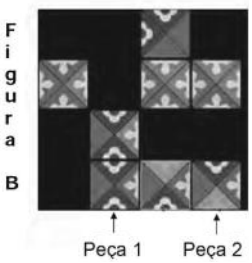


Figura B

Fotos: Reprodução/Enem, 2009.

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura **A** colocando a peça: Alternativa **c**.

a) 1 após girá-la 90° no sentido horário.

b) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.

c) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.

d) 2 após girá-la 180° no sentido horário.

e) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

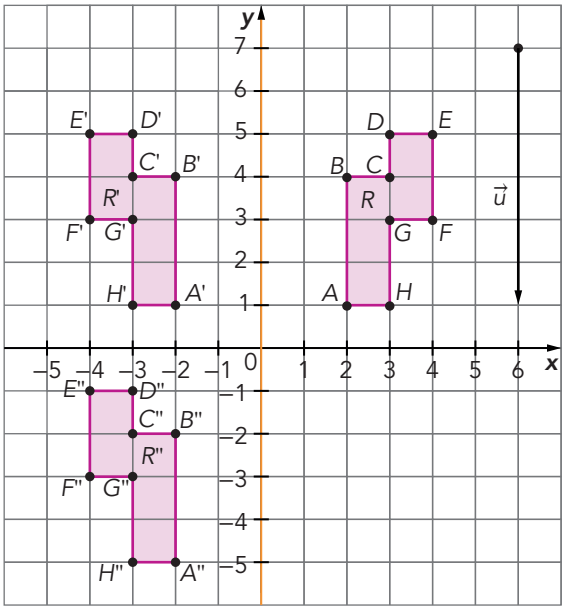
Composição de isometrias

Em uma figura plana obtida por meio de uma isometria, podemos aplicar outra isometria. Nesse caso, é feita uma composição de isometrias. Vamos analisar alguns exemplos de combinações de 2 transformações isométricas.

Reflexão deslizante

Nesta imagem, considere:

- a região limitada pelos polígonos $ABCDEFGH$, $A'B'C'D'E'F'G'H'$ e $A''B''C''D''E''F''G''H''$;
- o vetor $\vec{u}$;
- a reta destacada em laranja, cuja equação é $x = 0$, e que representa o eixo das ordenadas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

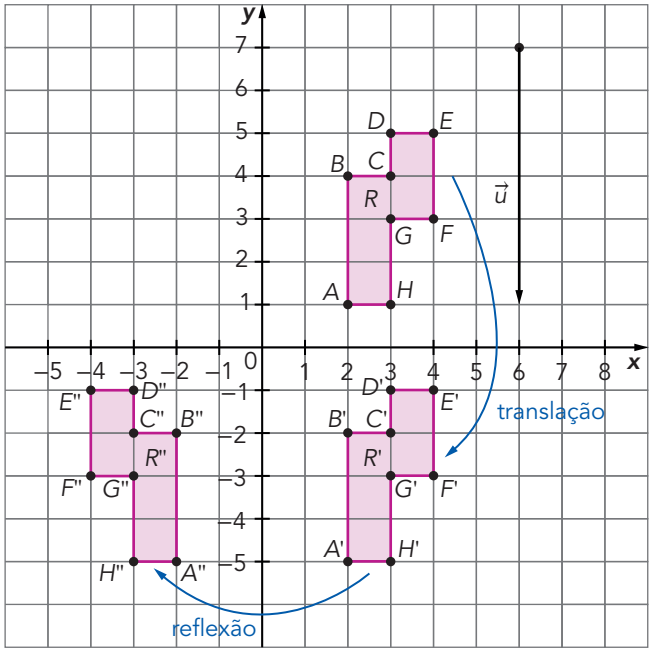
Temos que a região R'', limitada pelo polígono $A''B''C''D''E''F''G''H''$, foi obtida por meio da aplicação sucessiva de 2 isometrias.

1ª) A reflexão de R em relação à reta destacada (eixo y ou reta de equação $x = 0$) resultou em R', região limitada pelo polígono $A'B'C'D'E'F'G'H'$.

2ª) A translação de R', segundo o vetor $\vec{u}$, resultou em R''.

Essa combinação especial de 2 isometrias tem um nome: dizemos que R'' é a imagem de R obtida por meio de uma **reflexão deslizante** de R.

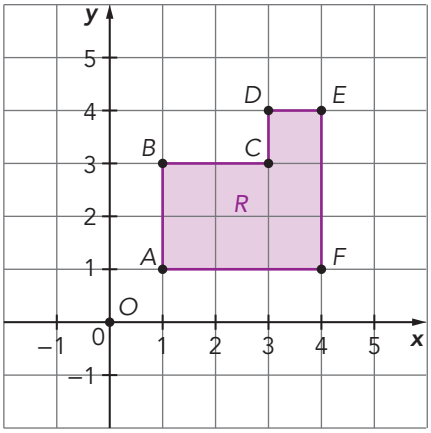
Note que, se tivéssemos, a princípio, aplicado a translação de R segundo o vetor $\vec{u}$ e, em seguida, a reflexão da imagem obtida em relação ao eixo y, teríamos obtido a mesma região R''.



Banco de imagens/Arquivo da editora

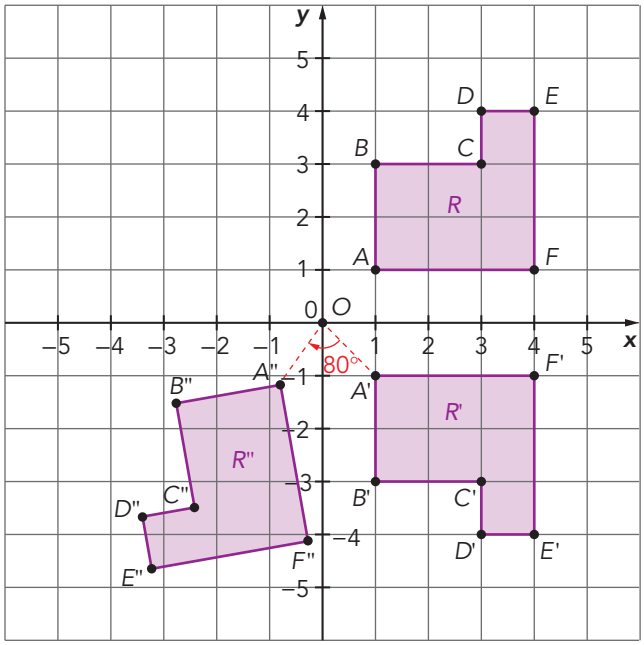
Reflexão e rotação

Na imagem a seguir, estão representados a região R, delimitada pelo polígono $ABCDEF$, e o ponto O, localizado na origem do sistema cartesiano.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Ao aplicar uma reflexão de R em relação ao eixo x, obtemos a região R', delimitada pelo polígono $A'B'C'D'E'F'$. Em seguida, partindo de R', fazemos uma rotação de 80° no sentido horário em torno da origem e obtemos a região R'', delimitada pelo polígono $A''B''C''D''E''F''$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro

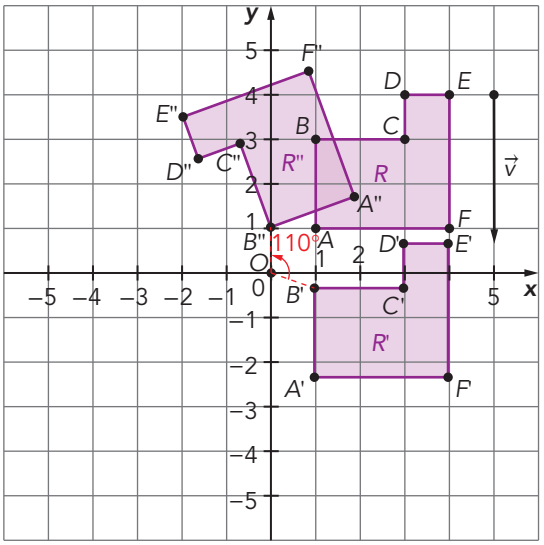
Pense nisto

Se aplicarmos primeiro uma rotação e, depois, a reflexão, nas mesmas condições, a região R'' se mantém?

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

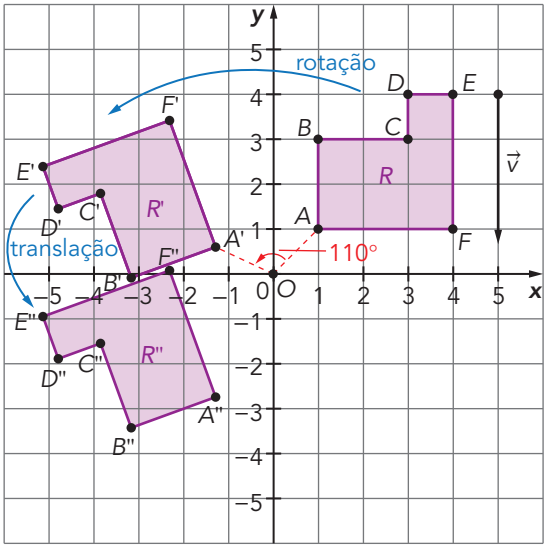
Translação e rotação

Agora, vamos aplicar uma translação, segundo um vetor $\vec{v}$, na mesma região R. Primeiro, obtemos a região R', delimitada por $A'B'C'D'E'F'$. Em seguida, aplicamos nessa nova região uma rotação, por exemplo, de 110° no sentido anti-horário em torno da origem.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note, no entanto, que, se invertermos a ordem das transformações, o resultado não será o mesmo. Acompanhe na imagem a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

ATIVIDADES

Não escreva no livro

22. Analise a imagem da *Heliconia rostrata*, erva conhecida como bananeira-do-brejo, helicônia ou caeté. Descreva no caderno uma composição de simetrias que pode ser realizada para, partindo da primeira folha, no topo, obter a segunda folha. Lembre-se de pensar apenas na imagem da planta como uma representação no plano.

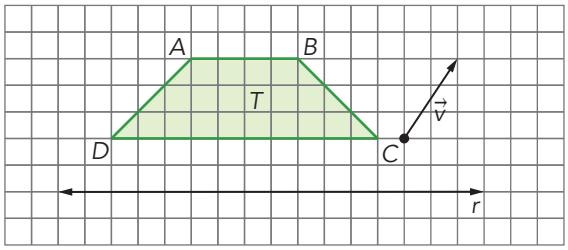
Heliconia rostrata.

Erlantz/Adobe Stock

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

23. Represente, em uma malha quadriculada, as regiões T e T', sendo T' a imagem de T construída por meio de uma reflexão deslizante. Considere a reta r e o vetor $\vec{v}$ indicados.

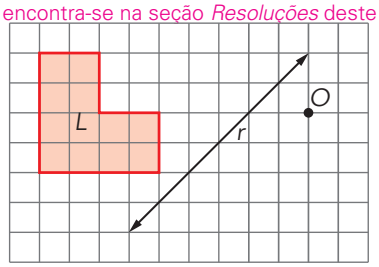
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.



Banco de imagens/Arquivo da editora

24. Represente, em uma malha quadriculada, as regiões L e L', sendo L' a imagem de L obtida por meio da reflexão em relação à reta r e da rotação de 90° no sentido anti-horário com centro em O.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

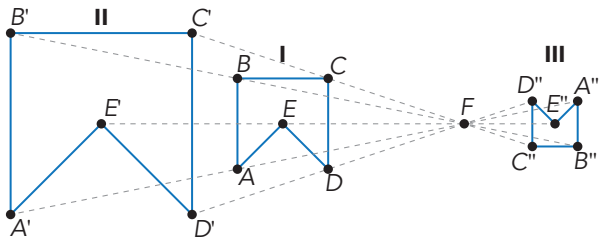


Banco de imagens/Arquivo da editora

Homotetias

Considere o ponto F e os pentágonos representados em **I**, **II** e **III**.

Os pentágonos representados em **II** e **III** foram obtidos do pentágono **I** por meio de uma transformação geométrica denominada **homotetia**, de centro em F e razões 2 e $-\frac{1}{2}$, respectivamente.



Banco de imagens/Arquivo da editora

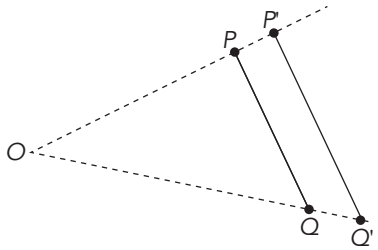
Uma homotetia de centro O e razão r (com $r \in \mathbb{R}^*$) é uma transformação geométrica que associa a cada ponto P de um plano α o ponto P' em α, tal que:

$$|\overline{OP'}| = |r| \cdot |\overline{OP}|$$

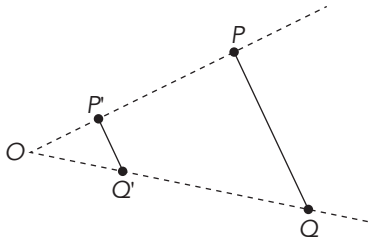
(Os pontos P, O e P' são colineares e $\overline{OP'}$ e $\overline{OP}$ são segmentos orientados.)

A homotetia é uma transformação que pode ampliar ou reduzir figuras planas, de acordo com a razão r.

I) Homotetia com razão $r > 0$.



$r > 1$



$0 < r < 1$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Quando $r > 0$, os segmentos orientados $\overline{OP'}$ e $\overline{OP}$ têm **mesma direção e mesmo sentido**, e isso também ocorre com $\overline{OQ'}$ e $\overline{OQ}$.

Nas figuras apresentadas, quando:

- $r > 1$, o segmento orientado $\overline{P'Q'}$ é uma ampliação do segmento orientado $\overline{PQ}$;
- $0 < r < 1$, o segmento orientado $\overline{P'Q'}$ é uma redução do segmento orientado $\overline{PQ}$.

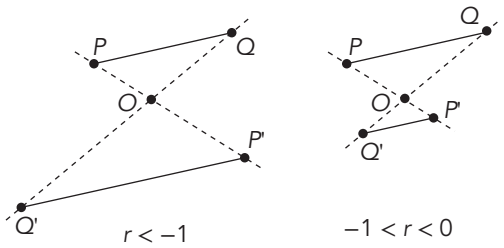
Não escreva no livro

Pense nisto

Em que condições uma homotetia preservaria medidas de distância?

Se $|r| = 1$, isto é, $r = 1$ ou $r = -1$, as medidas de distância não são alteradas pela multiplicação por r.

II) Homotetia com razão $r < 0$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Se $r < 0$, os segmentos orientados $\overline{OP'}$ e $\overline{OP}$ têm **mesma direção e sentidos opostos**, e isso também ocorre com $\overline{OQ'}$ e $\overline{OQ}$.

Nas figuras apresentadas, quando:

- $r < -1$, o segmento orientado $\overline{P'Q'}$ é uma ampliação do segmento orientado $\overline{PQ}$;
- $-1 < r < 0$, o segmento orientado $\overline{P'Q'}$ é uma redução do segmento orientado $\overline{PQ}$.

Considerando **I** e **II**, notamos que uma homotetia de razão $|r| \neq 1$ é uma transformação geométrica que **não** preserva as medidas de distância, pois um segmento de reta é transformado em um segmento de reta de medida proporcional à medida dele.

A constante de proporcionalidade é igual ao módulo de r:

$$\frac{|\overline{P'Q'}|}{|\overline{PQ}|} = |r|$$

Acompanhe, a seguir, algumas aplicações de homotetias.

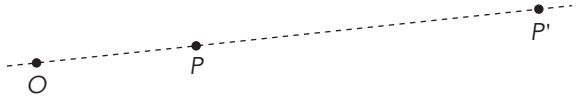
Pense nisto

Qual seria a imagem de P em uma homotetia de centro em O e razão 1?

Se $r = 1$, então $|\overline{OP'}| = |\overline{OP}|$; nesse caso, P' e P coincidem, isto é, $H(P) = P$.

Professor, comente com os estudantes que, nessa transformação, H é chamada identidade.

Seja H a homotetia de centro em O e razão 3.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Aplicando a homotetia H sobre P, obtemos P', isto é, H transforma P em P' e representamos isso por $H(P) = P'$.
- $|\overline{OP'}| = 3 \cdot |\overline{OP}|$
- $\overline{OP'}$ e $\overline{OP}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido, já que $r > 0$.

Assim, P' está na semirreta $\overrightarrow{OP}$.

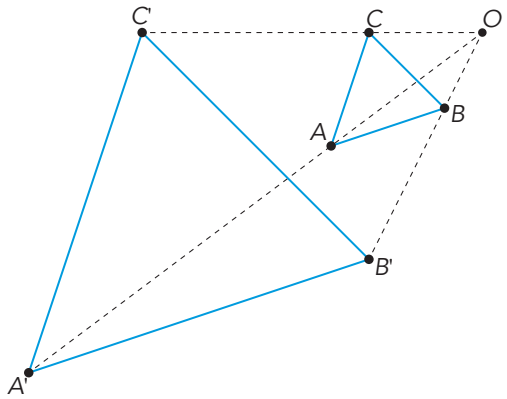
Seja H a homotetia de centro em O e razão -2.

Banco de imagens/Arquivo da editora

- $H(P) = P'$
- $|\overline{OP'}| = 2 \cdot |\overline{OP}|$
- $\overline{OP'}$ e $\overline{OP}$ têm mesma direção e sentidos opostos, já que $r < 0$.

Assim, P' **não** está na mesma semirreta $\overrightarrow{OP}$, mas está na semirreta $\overrightarrow{PO}$.

Na figura seguinte, a homotetia de centro O e razão $r > 0$ (com $r \neq 1$) transformou o triângulo ABC no triângulo $A'B'C'$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que:

- os pontos O, A e A' são colineares, assim como os pontos O, B e B' e O, C e C';
- os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, pois as medidas dos lados são proporcionais:

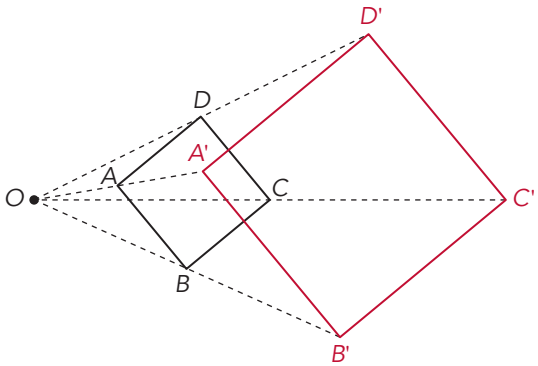
$$\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{B'C'}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{A'C'}|}{|\overline{AC}|} = r$$

Dessa semelhança, decorre que os triângulos ABC e $A'B'C'$ têm ângulos internos congruentes: $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$; $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$. Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são homotéticos, pois $\triangle A'B'C'$ é obtido de $\triangle ABC$ por meio de uma homotetia H, e representamos $H(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$.

Considere, agora, os pentágonos apresentados no início deste tópico.

- Os pentágonos representados em **I** e **II** são semelhantes; logo, dizemos que o pentágono em **II** é uma ampliação do pentágono em **I**. A razão de semelhança entre os pentágonos representados em **II** e **I** é $|2| = 2$.
- Os pentágonos representados em **I** e **III** são semelhantes; logo, dizemos que o pentágono em **III** é uma redução do pentágono em **I**. A razão de semelhança entre os pentágonos representados em **III** e **I** é $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

A homotetia de um quadrado $ABCD$ com centro O e razão 2 é o quadrado $A'B'C'D'$, conforme mostra a imagem a seguir.

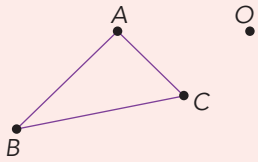


Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que $|\overline{OA'}| = 2 \cdot |\overline{OA}|$; $|\overline{OB'}| = 2 \cdot |\overline{OB}|$; $|\overline{OC'}| = 2 \cdot |\overline{OC}|$; e $|\overline{OD'}| = 2 \cdot |\overline{OD}|$.

Atividades resolvidas

5. Com a régua e o compasso, represente a figura homotética do triângulo ABC por meio de uma homotetia de centro O e razão 3.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Solução:

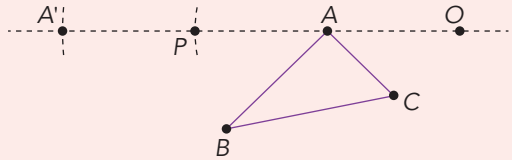
Seja $A'B'C'$ o triângulo homotético do triângulo ABC.

Etapa 1: Como o centro da homotetia é o ponto O e a razão é 3, temos:

$$\frac{|\overline{OA'}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|\overline{OB'}|}{|\overline{OB}|} = \frac{|\overline{OC'}|}{|\overline{OC}|} = 3 \Rightarrow \begin{cases} |\overline{OA'}| = 3 \cdot |\overline{OA}| \\ |\overline{OB'}| = 3 \cdot |\overline{OB}| \\ |\overline{OC'}| = 3 \cdot |\overline{OC}| \end{cases}$$

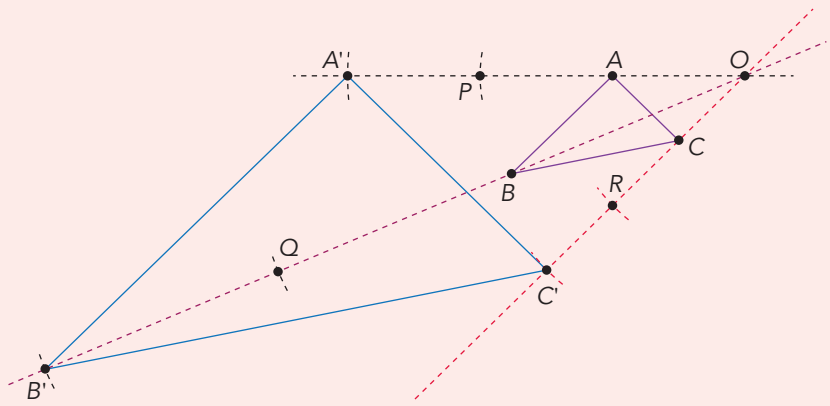
Além disso, como a razão da homotetia é maior do que zero, cada um dos pares de pontos A e A', B e B' e C e C' pertence às mesmas semirretas de origem O.

Etapa 2: Represente, com a régua, a reta $\overleftrightarrow{OA}$. Em seguida, abra com o compasso uma medida igual a AO (para isso, posicione a ponta seca em O e o grafite em A). Mantendo a abertura do compasso, coloque a ponta seca em A e trace um arco de circunferência que intersecte a semirreta $\overrightarrow{OA}$, determinando o ponto P. Ainda com a mesma abertura, coloque a ponta seca em P e trace outro arco de circunferência que intersecte a semirreta $\overrightarrow{OA}$, determinando o ponto A', distinto de A. Note que, como $AO = AP = PA'$, temos $|OA'| = 3 \cdot |OA|$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Etapa 3: De modo análogo à etapa **2**, determine os pontos B' e C' e, em seguida, represente o triângulo $A'B'C'$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes e que a razão de semelhança é 3.

29. a) Como $\overrightarrow{FC}$ e $\overrightarrow{FC'}$ têm a mesma direção e sentidos opostos, temos $r < 0$.

Como $\frac{|\overline{FC'}|}{|\overline{FC}|} = \frac{4}{2} = 2$, concluímos que a razão da homotetia é -2.

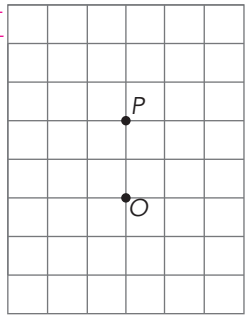
ATIVIDADES

Não escreva no livro

25. Sejam H_1, H_2 e H_3 homotetias de centro em O e razões 3, -2 e $\frac{1}{2}$, respectivamente. Represente, em uma malha quadriculada, $Q = H_1(P)$, $R = H_2(P)$ e $S = H_3(P)$, sendo P o ponto destacado a seguir.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

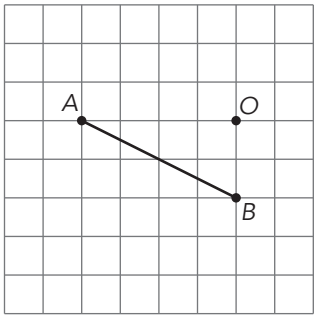
Banco de imagens/ Arquivo da editora



26. Represente, em uma malha quadriculada, o segmento de reta $\overline{AB}$ e as imagens $\overline{A'B'}$ e $\overline{A''B''}$, obtidas por meio das homotetias de centro O e razões 3 e $-1{,}5$, respectivamente.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

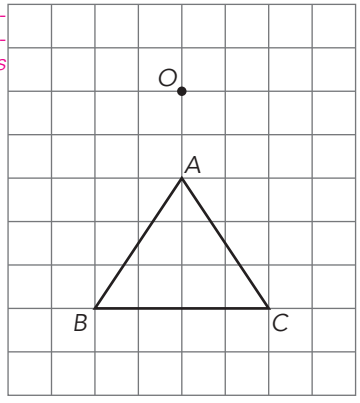
Banco de imagens/ Arquivo da editora



27. Considere o triângulo ABC e a homotetia H de centro O.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



Represente ABC, em uma malha quadriculada, bem como a imagem desse triângulo obtida por H, considerando:

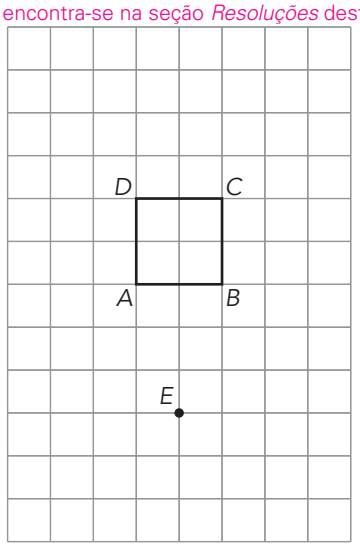
a) razão $k = -1$;

b) razão $k = 2$.

28. A homotetia de centro E e razão -2 transforma o quadrado $ABCD$ no quadrado $A'B'C'D'$. Represente os dois quadrados em uma malha quadriculada.

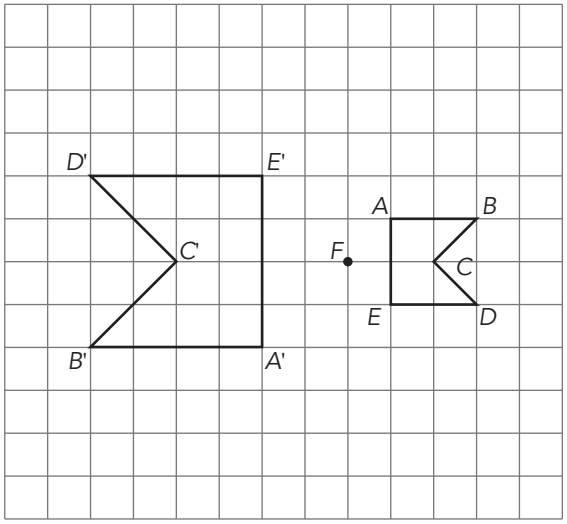
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



29. Na imagem, o pentágono $A'B'C'D'E'$ foi obtido do pentágono $ABCDE$ por meio da homotetia de centro F e razão r.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



a) Qual é o valor de r?

b) Qual é a razão entre as medidas de perímetro de $A'B'C'D'E'$ e de $ABCDE$?

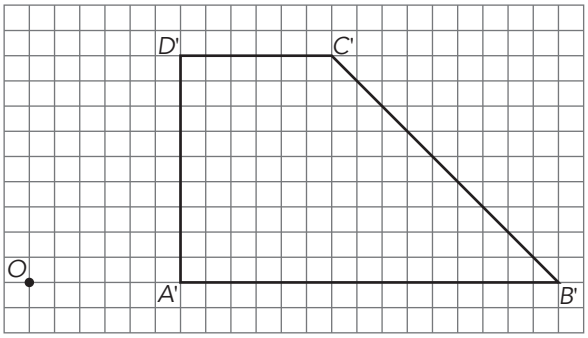
30. Represente, em uma malha quadriculada, um polígono e um ponto O.

Depois, peça a um colega para representar a imagem desse polígono utilizando a homotetia H de centro O e razão -2. Resposta pessoal.

29. b) A razão entre as medidas de perímetro dos polígonos semelhantes é a razão entre as medidas dos lados homólogos. Assim, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{2} = 2$. Note que o módulo da razão r da homotetia é igual à razão de semelhança dos polígonos.

31. A homotetia de centro O e razão 3 transformou o trapézio $ABCD$ no trapézio $A'B'C'D'$, mostrado a seguir. Represente, em uma malha quadriculada, $ABCD$ e $A'B'C'D'$.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

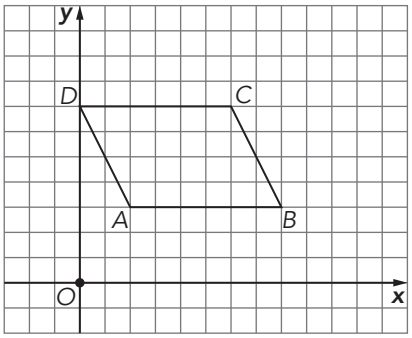


Banco de imagens/Arquivo da editora

32. Seja H a homotetia de centro O e razão 3 e P o paralelogramo $ABCD$, representado no plano cartesiano. Sabendo que o lado de cada quadradinho da malha mede 1 u.c. e que $A'B'C'D'$ é o paralelogramo obtido de P, por meio da homotetia H, faça o que se pede.

a) Como $A(2, 3)$ e a homotetia H tem origem O e razão 3, temos $A'(3 \cdot 2, 3 \cdot 3) = A'(6, 9)$. De modo análogo, obtemos os outros vértices: $B'(24, 9)$, $C'(18, 21)$ e $D'(0, 21)$.

b) A razão entre as medidas de perímetro é a razão de semelhança entre as figuras, que, por sua vez, é o módulo da razão da homotetia. Logo, é 3.



33. A resolução depende do *software* utilizado pelos estudantes.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Determine em seu caderno as coordenadas de $A' = H(A)$; $B' = H(B)$; $C' = H(C)$; e $D' = H(D)$.

b) Determine em seu caderno a razão entre as medidas de perímetro dos paralelogramos $A'B'C'D'$ e $ABCD$.

33. **Experimente** utilizar um *software* de Geometria dinâmica para resolver a atividade **32**, seguindo os passos descritos.

Insira o ponto (usando um campo de entrada ou ferramenta do *software*) $A(2, 3)$ na construção, que corresponderá ao vértice A. Repita esse processo para inserir os outros vértices de P e o centro da homotetia $O(0, 0)$.

Selecione uma ferramenta que crie um polígono para definir o paralelogramo $ABCD$.

Selecione uma ferramenta de homotetia, clique sobre o paralelogramo e digite "3" (razão da homotetia). Se necessário, reduza o tamanho do plano utilizando o *zoom*.

Por fim, para resolver o item **a**, você pode efetuar a leitura das coordenadas dos pontos no plano.

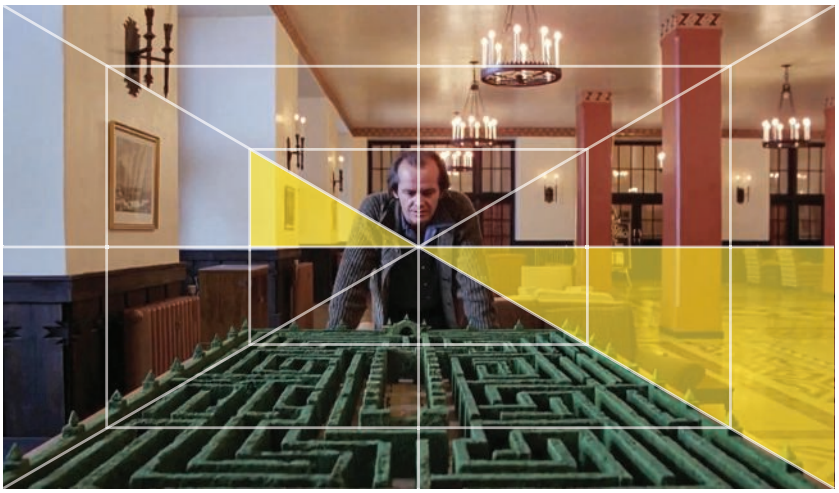
Para resolver o item **b**, selecione uma ferramenta que meça cada lado, tome nota e use uma calculadora para efetuar o cálculo. Contudo, caso o *software* também tenha uma janela de cálculos algébricos, é possível usá-la para realizar esse cálculo de maneira automatizada. Supondo que o *software* tenha rotulado os paralelogramos como $q1$ e $q1'$, após medir os lados, é possível solicitar que a medida de perímetro de $q1'$ seja dividida pela medida de perímetro de $q1$ por meio de um comando com uma sintaxe parecida com a informação "=perímetro(q1')/perímetro(q1)". Assim, o resultado será a razão entre as medidas de perímetro dos paralelogramos.

34. A afirmação "Se 2 figuras são homotéticas, então são semelhantes" é verdadeira. Entretanto, a recíproca "Se 2 figuras são semelhantes, então são homotéticas" não é verdadeira. Apresente uma situação que confirme que a recíproca não é verdadeira e explique o motivo.

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

35. Stanley Kubrick (1928–1999) foi um cineasta, roteirista, produtor e fotógrafo estadunidense. Em algumas cenas de filmes de Kubrick, destacam-se os enquadramentos, a perspectiva e os pontos de fuga. Analise duas imagens do filme *O iluminado* (1980) com alguns destaques.
Para esta atividade, vamos considerar essas imagens em um plano, como fotografias.

Reprodução/vimeo.com



As imagens não estão representadas em proporção.

Imagem **1**.

Reprodução/vimeo.com

Imagem **2**.

a) Na imagem **1**, as linhas que partem das extremidades da tela convergem num único ponto (ponto de fuga). Além disso, os triângulos destacados são semelhantes. Essa semelhança pode ser justificada por meio de uma transformação geométrica. Qual é o nome dessa transformação?

b) Na imagem **2**, usando uma régua e considerando que os dois quadriláteros destacados são homotéticos, podemos perceber que o centro dessa homotetia está num dos quadros da parede ao fundo. Identifique precisamente a localização do quadro por meio da aproximação seguinte e a indique no caderno.

a) Como figuras homotéticas são sempre semelhantes, a transformação é a homotetia com centro no ponto de fuga e razão menor do que 0. Podemos notar que o triângulo maior é o resultado de uma homotetia do triângulo menor.

b) O centro da homotetia está no ponto de fuga, ou seja, no quadro que está na coluna **E**, linha **3**.

Reprodução/vimeo.com

Destaque dos quadros na parede.

INTERLIGANDO

A Geometria fractal

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Para tentar descrever determinados formatos geométricos, como o de uma nuvem, o de uma couve-flor, o de uma folha de samambaia, o do contorno de um litoral e muitos outros que existem na natureza, nasceu a **Geometria fractal**.

Um dos criadores da Geometria fractal

Benoît Mandelbrot (1924-2010)

Benoît Mandelbrot nasceu na Polônia em 1924 e, em 1939, após o início da Segunda Guerra Mundial, se mudou com a família para a França e se naturalizou francês. Passou por várias instituições de ensino, incluindo a École Polytechnique e a Sorbonne, em Paris. Insatisfeito com a Geometria clássica, desenvolveu diversos estudos em diferentes áreas do saber para buscar novas respostas a problemas científicos e à compreensão da natureza. Com o apoio de recursos de computação de empresas privadas, onde passou a trabalhar a partir de 1958, desenvolveu a Geometria fractal. Publicou alguns livros, entre eles a clássica obra *The Fractal Geometry of Nature*, traduzida e publicada em língua portuguesa com o título *Objectos fractais*.

Davi Augusto/Arquivo da editora

"Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som de um latido não é contínuo, nem o raio viaja em linha reta."

O que é fractal?

Significado

O termo **fractal** se refere ao adjetivo *fractus*, cujo verbo correspondente, *frangere*, em latim, significa "quebrar".

Autossimilaridade

Quando ampliamos uma pequena parte de um fractal, ela se parece com o todo. Assim, os fractais têm cópias aproximadas de si em seu interior.

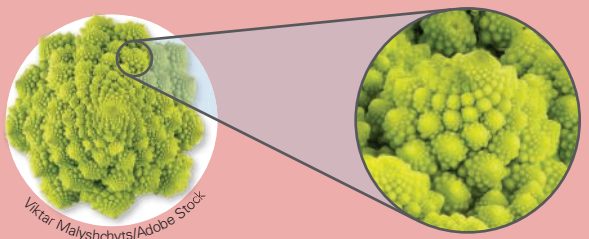
Complexidade infinita

Os fractais se caracterizam por repetir indefinidamente um padrão com ligeiras variações.

Fractais em fotos da natureza

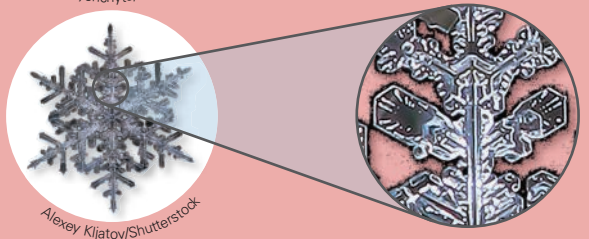
As imagens não estão representadas em proporção.

Detalhe de uma variedade de couve-flor.



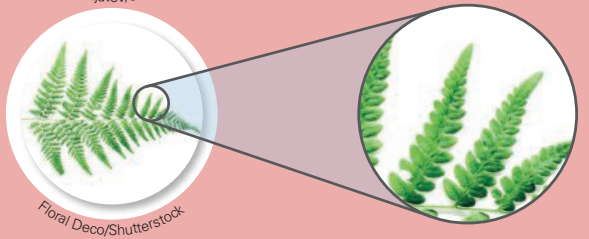
Viktar Malyshchyts/Adobe Stock

Floco de neve.



Alexey Kljatov/Shutterstock

Cada pequena parte da folha da samambaia se parece com a folha inteira.



Floral Deco/Shutterstock

Imagem de fundo: Nelson Charette Photo/Shutterstock

Não escreva no livro

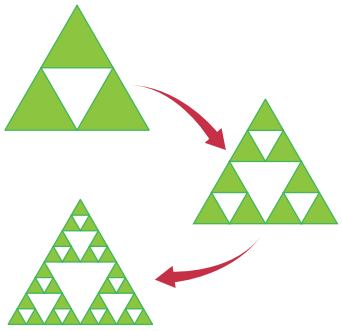
Fractais geométricos

Poeira de Cantor

Georg Cantor (1845-1918), matemático alemão nascido na Rússia, criou um tipo simples de fractal obtido pela divisão de um segmento em 3 partes de mesma medida e supressão da parte central. Repetindo o processo indefinidamente, chega-se a uma sucessão de pontos, conhecida como poeira de Cantor. A imagem mostra as 5 primeiras repetições desse processo.

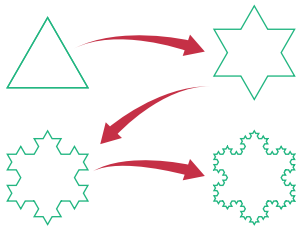
Triângulo de Sierpinski

Criado pelo polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), esse fractal é resultante de sucessivas remoções do triângulo equilátero central quando se divide a região delimitada por um triângulo equilátero em 4 triângulos congruentes.



Floco de neve de Koch

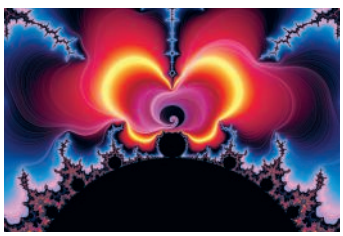
Proposto pelo sueco Helge von Koch (1870-1924), esse fractal é obtido de um triângulo equilátero: divide-se cada lado do triângulo em 3 partes iguais. Na parte do centro (meio), acrescenta-se um novo triângulo equilátero, cuja medida do lado é a terça parte da medida do lado do triângulo anterior, e assim sucessivamente.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

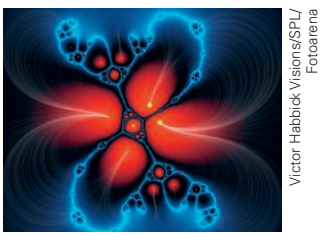
Fractais na Arte

A iteração é um conjunto de regras e algoritmos que são executados sucessivas vezes. Quando alimentados por **processos iterativos**, os computadores criam magníficos desenhos abstratos, permitindo a criação de belas imagens. Analise algumas imagens compostas por iteração.



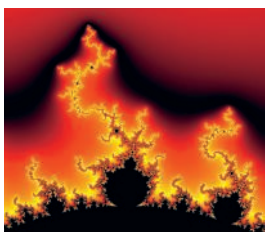
Steve Allen/SPL/Fotoarena

Fractal de Mandelbrot.



Victor Habbick Visions/SPL/Fotoarena

Fractal de Mandelbrot.

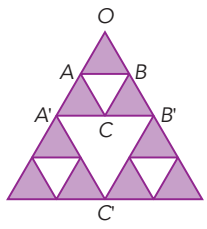


Alfred Pasieka/SPL/Fotoarena

Conjunto de Mandelbrot.

Fontes dos dados: SALLUM, E. M. Fractais no Ensino Médio. *Revista do Professor de Matemática*, n. 57, 2005; MURR, C. *et al.*; *Fractais*: propriedades e construção. Iniciação científica (Curso de Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005. Disponível em: https://tedit.net/ak0h1f. RODRIGUES, C. I; REZENDE, E. Q. F; QUEIROZ, M. L. B. de. O quadrado de Koch: números e funções. *Matemática Multimídia*. Disponível em: https://tedit.net/tt370g. Acesso em: 13 ago. 2024.

Vamos retomar as etapas de construção do triângulo de Sierpinski. Analise a figura e responda às questões no caderno.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) As regiões triangulares *OAB* e *OA'B'* são semelhantes? Qual é a razão de semelhança?

Sim. A razão de semelhança é 2.

b) Existe alguma homotetia que transforma a região triangular *OAB* na *OA'B'*? Se existir, identifique o centro e a razão. Sim. Centro *O* e razão 2.

c) As regiões triangulares *ABC* e *A'B'C'* são semelhantes? Qual é a razão de semelhança?

Sim. A razão de semelhança é 2.

d) Existe alguma homotetia que transforma a região triangular *ABC* na *A'B'C'*? Se existir, identifique o centro e a razão. Sim. Centro *O* e razão 2.

capítulo

11 Ladrilhamento do plano

Mosaicos

As imagens não estão representadas em proporção.

É muito comum notarmos, no piso de ruas e em paredes, o uso de blocos, pastilhas ou azulejos, cujas faces superiores têm formato de polígonos, para pavimentar ou cobrir regiões.

Yuriy Afonkin/Adobe Stock

Calçada com piso formado por peças cuja face superior é hexagonal.

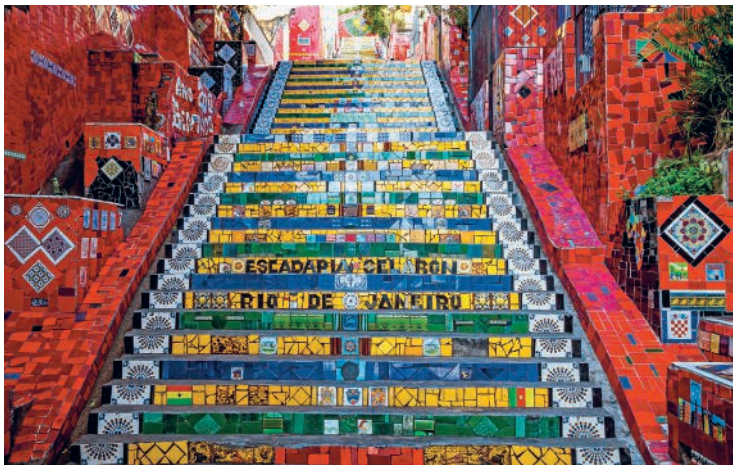
Gabrieuskal/Adobe Stock

Calçada com piso formado por peças cuja face superior é retangular.

apple2499/Adobe Stock

Mural de pastilhas cuja face superior é quadrada.

Também podemos verificar essa mesma técnica em construções arquitetônicas, como na escadaria de Selarón, feita pelo artista plástico chileno Jorge Selarón (1947-2013) e que liga a Lapa a uma parte do bairro de Santa Teresa, no Rio de Janeiro (RJ).



Mikolaj Niemczewski/Shutterstock

Escadaria de Selarón, no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2017.

Essa técnica é chamada de **ladrilhamento**, **pavimentação** ou **tesselação** (da palavra inglesa *tessellation*).

Ladrilhar consiste em revestir determinada região do plano com figuras de maneira que nenhuma delas se sobreponha a outra e que não haja espaço entre elas. Depois de revestida, essa região do plano passa a ser denominada **mosaico**.

Observação

Toda linha plana, fechada e simples delimita uma região. Para evitarmos repetições, neste capítulo, em vez de escrevermos, por exemplo, "cobrir uma região do plano com regiões delimitada por triângulos", escreveremos simplesmente cobrir uma região do plano com triângulo".

Ladrilhamentos regulares

O mosaico regular é o resultado de um ladrilhamento regular, técnica que consiste em cobrir determinada região do plano com polígonos regulares congruentes entre si. Nesse tipo de ladrilhamento, a intersecção de dois desses polígonos deve ser um lado, um vértice ou vazia.

Assim, para quaisquer polígonos regulares que concorrem em um vértice qualquer, a soma das medidas dos ângulos internos em torno desse vértice é 360°.

A partir disso, vamos demonstrar que apenas 3 polígonos regulares diferentes podem compor mosaicos regulares.

Professor, se julgar pertinente, retome com os estudantes a demonstração da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono e, consequentemente, como se calcula a medida do ângulo interno de um polígono regular.

Demonstração

Sendo n o número de lados de cada um dos p polígonos regulares que concorrem em um vértice qualquer e $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$ a medida de cada um dos ângulos internos deles, temos que:

$$p \cdot \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = 360^\circ \Rightarrow p \cdot (n-2) = 2n \Rightarrow p \cdot n - 2p - 2n = 0$$

Adicionando 4 em ambos os membros da equação, obtemos:

$$pn - 2p - 2n + 4 = 4 \Rightarrow (p-2)(n-2) = 4 \Rightarrow p - 2 = \frac{4}{(n-2)}$$

Como p é um número natural, $\frac{4}{(n-2)}$ também será um número natural; assim, $(n-2)$ deve ser divisor de 4. Com isso, temos três possibilidades.

1ª) $(n-2) = 1$, o que implica que $n = 3$.

2ª) $(n-2) = 2$, o que implica que $n = 4$.

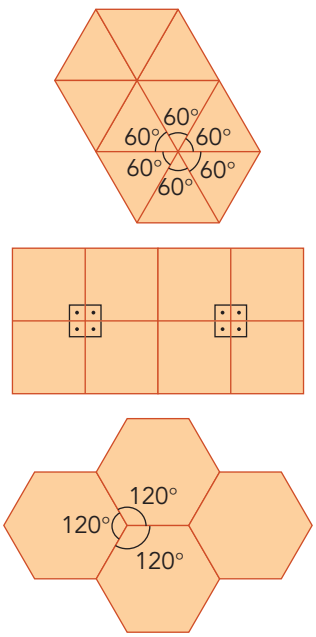
3ª) $(n-2) = 4$, o que implica que $n = 6$.

Portanto, existem apenas 3 tipos de mosaicos regulares: os que são compostos de triângulos equiláteros, os que são compostos de quadrados e os que são compostos de hexágonos regulares.

Ao analisar os 3 tipos de mosaicos regulares, repare que, ao redor de qualquer vértice, a quantidade de polígonos é sempre a mesma. Além disso, podemos representar a configuração de um desses ladrilhamentos usando a notação $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, em que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ indicam o número de lados dos polígonos ao redor do vértice.

No ladrilhamento regular formado por:

- triângulos equiláteros, ao redor de cada vértice, há 6 triângulos; assim, podemos indicar essa configuração como (3, 3, 3, 3, 3, 3);
- quadrados, ao redor de cada vértice, há 4 quadrados; assim, podemos indicar essa configuração como (4, 4, 4, 4);
- hexágonos regulares, ao redor de cada vértice, há 3 hexágonos; assim, podemos indicar essa configuração como (6, 6, 6).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto

Não escreva no livro

É sempre possível ladrilhar uma região do plano com losangos (não quadrados) congruentes?

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

INTERLIGANDO

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Arte, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

Ladrilhamentos de Escher

Maurits Cornelis Escher (1898-1972), conhecido como M. C. Escher ou apenas Escher, foi um artista gráfico neerlandês famoso por criar obras de arte que desafiam a percepção do observador e exploram conceitos matemáticos como proporção e transformações geométricas.

A pavimentação está presente em muitas das obras dele. Escher desenvolveu uma técnica única de ladrilhamento que transforma figuras geométricas simples em padrões complexos. Seus ladrilhos muitas vezes incluem figuras humanas, animais e objetos do cotidiano, resultando em surpreendentes mosaicos.

Os mosaicos de Escher são tão icônicos que continuam a inspirar aqueles que exploram os limites entre Arte, Matemática e Ciência. Para criá-los, o artista usava como base uma pavimentação do plano com polígonos subpostos nas imagens.

Fotos: M.C. Escher's "Lizard" © 2024 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com

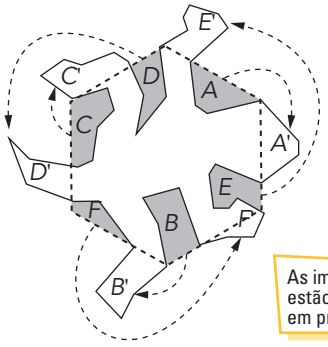
Lizard (*nº 25*), de M. C. Escher, 1939. M.C. Escher Foundation. Aquarela, lápis e nanquim.

Note, na obra *Lizard* (*nº 25*), a pavimentação usada. Nessa obra, o artista usou uma imagem-padrão para pavimentar o plano: o lagarto aplicado sobre uma pavimentação formada por hexágonos regulares.

M.C. Escher's "Lizard" © 2024 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com
Ilustração sobre a obra: Banco de imagens/Arquivo da editora

Padrão hexagonal da obra de arte *Lizard* (*nº 25*), de M. C. Escher.

Como o plano foi pavimentado com hexágonos regulares, toma-se um hexágono regular e aplicam-se as transformações geométricas representadas pelas setas na imagem a seguir.



As imagens não estão representadas em proporção.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Cada região destacada foi reposicionada. Por exemplo, a região indicada por *A* foi reposicionada na região indicada por *A*', que, por sua vez, sobrepõe a região *A* de um lagarto adjacente. O mesmo processo ocorrerá com cada uma das outras cinco regiões.

Usando o lagarto (imagem-padrão), é possível pavimentar o plano e compor um mosaico, conforme mostrado na imagem a seguir.

M.C. Escher's "Lizard" © 2024 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com
Ilustração sobre a obra: Banco de imagens/Arquivo da editora

Detalhe da obra *Lizard* (*nº 25*) com alguns lagartos destacados.

2. Oriente os estudantes a utilizar, se disponível, um papel de maior gramatura, como cartolina ou papel-cartão. Oriente-os também a ter cuidado ao usar tesouras de pontas arredondadas, para evitar acidentes. Esse trabalho pode ser realizado em parceria com o professor de Arte.

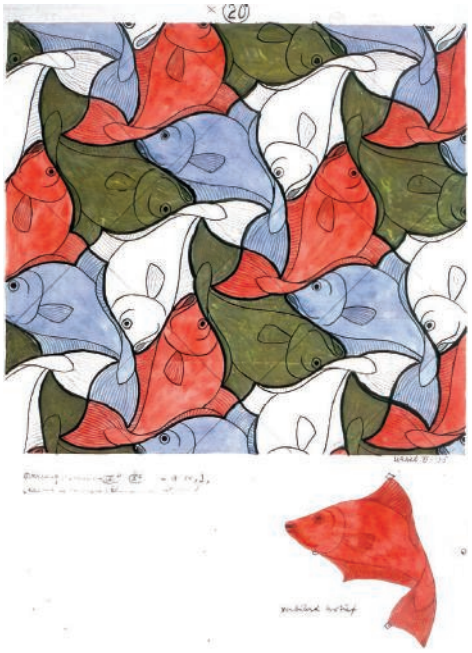
Não escreva no livro

1. Qual medida foi conservada na imagem padrão da obra *Lizard* (*nº 25*) quando comparada com o hexágono que a gerou?

A medida de área.

2. Podemos simular o processo criativo de uma obra de Escher seguindo as etapas de reprodução da obra *Fish* (*nº 20*), apresentada a seguir.

M.C. Escher's "Fish No. 20" © 2024 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com

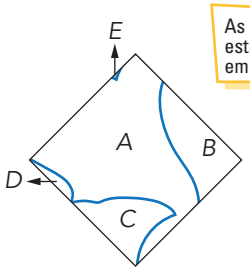


Fish (*nº 20*), de M. C. Escher, 1938. M.C. Escher Foundation. Aquarela, lápis e nanquim.

Note que, no canto inferior direito, há o planejamento da imagem-padrão usada para pavimentar o plano.

Copie, em uma folha de papel, o quadrado a seguir e as linhas no interior dele.

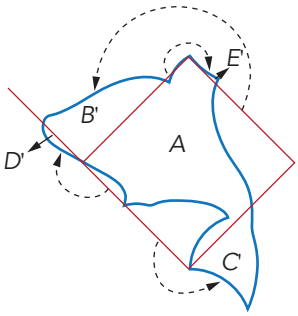
As imagens não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Figura **1**.

Com uma tesoura de pontas arredondadas, recorte as linhas azuis, dividindo o quadrado em 5 regiões, conforme a figura **1**. Em seguida, mantendo fixa a região *A*, reposicione as regiões *B*, *C*, *D* e *E*, respectivamente, conforme as indicações *B*', *C*', *D*' e *E*' na figura **2**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

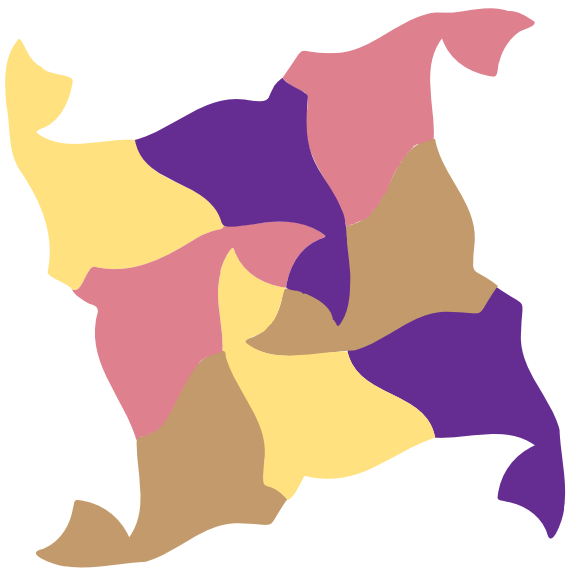
Figura **2**.

Depois dessa etapa, construa o contorno da imagem-padrão que vai pavimentar o plano, conforme indicado na figura **3**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Figura **3**.

Com um lápis, contorne essa figura usando-a como molde para pavimentar uma folha de papel. Se preferir, cole a figura em um papel mais rígido, contorne-a com um lápis e recorte-a, para então pavimentar o plano, conforme a figura **4**. Resposta pessoal.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Figura **4**.

3. Analisando a atividade **2**, responda à pergunta: Quais características da imagem-padrão permitem que ela seja usada para a pavimentação do plano?

3. A imagem-padrão (peixe) foi construída tendo como base um quadrado, que é um polígono que forma um mosaico regular. Na pavimentação, não há sobreposição das cópias da imagem padrão nem espaços vazios entre elas.

EXPERIMENTE

Não escreva no livro

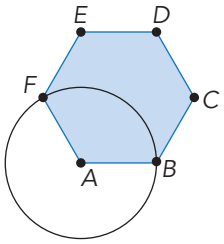
Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Compor um ladrilhamento usando um *software* de Geometria dinâmica

Podemos usar um *software* de Geometria dinâmica para testar figuras geométricas para compor um ladrilhamento.

No *software* escolhido, utilize a ferramenta própria para construir um círculo com raio medindo 3 unidades de medida de comprimento (u.c.) e com centro localizado em um ponto *A*.

Em seguida, selecione uma ferramenta para marcar um ponto (*B*) sobre a circunferência desenhada. Depois disso, selecione uma ferramenta para criar um polígono regular e desenhe um hexágono regular a partir dos pontos *A* e *B*, que serão vértices dessa figura.



Hexágono regular construído no *software* de Geometria dinâmica.

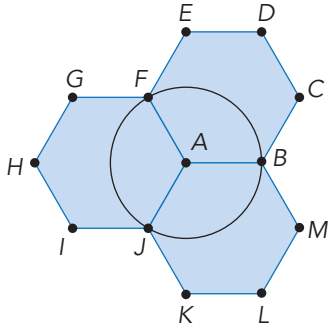
Banco de imagens/Arquivo da editora

Esse hexágono regular tem a medida dos lados fixa, uma vez que é determinada pela medida do raio da circunferência. No entanto, ele pode ser transladado ou rotacionado conforme necessário.

Para verificar a possibilidade de se compor um ladrilhamento com essa figura geométrica, reproduza o hexágono original e faça a composição desejada. Verifique se, em vez de seguir todos os passos novamente, é possível apenas selecionar toda a imagem com o botão direito do *mouse* e duplicar a figura ou usar os comandos do teclado **Ctrl + c** para copiar a imagem e **Ctrl + v** para colar cópias idênticas na tela.

Ao compor 3 hexágonos regulares iguais e fazer as transformações geométricas necessárias, você irá obter o seguinte resultado.

A nomenclatura dos pontos na construção depende do *software* utilizado. Pode ser que, ao realizar as construções sucessivas, o *software* as sobreponha, alterando o nome exibido para os pontos em questão.



Ladrilhamento composto de representações de hexágonos regulares.

Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Quando se utiliza um pentágono regular, não é possível formar o ladrilhamento, pois, ao juntar 3 pentágonos regulares ao redor de um vértice, sobra espaço; se for adicionado mais um pentágono regular a eles, partes desse pentágono são sobrepostas aos vizinhos dele.

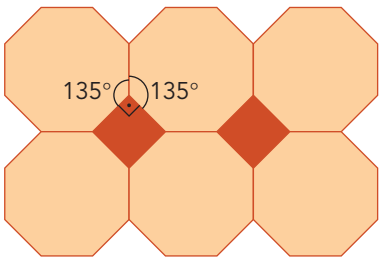
1. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, reproduza os passos apresentados para construir um ladrilhamento com triângulos equiláteros. A resposta depende do *software* utilizado pelo estudante.

2. O que acontece quando se usa, em vez de um hexágono regular, um pentágono regular? Faça o teste em um *software* de Geometria dinâmica e explique o que pode ser notado.

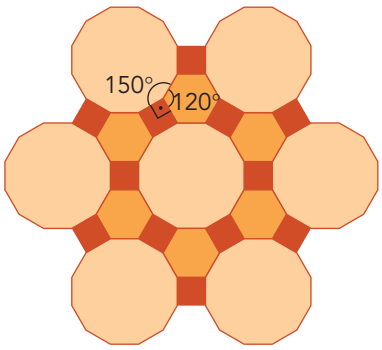
Ladrilhamentos semirregulares

O mosaico semirregular é o resultado de um ladrilhamento semirregular, técnica que consiste em cobrir uma região do plano com 2 ou mais tipos diferentes de polígonos regulares, todos com lados congruentes entre eles. Além disso, a intersecção de quaisquer 2 desses polígonos deve ser vazia, um lado ou um vértice e a distribuição de polígonos ao redor de cada vértice é a mesma. Analise alguns exemplos a seguir.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

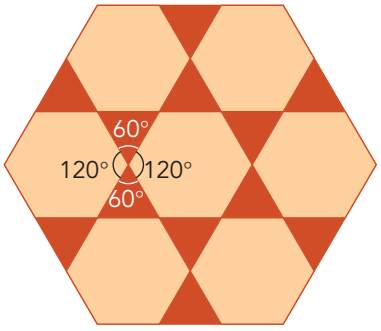


Mosaico formado por octógonos regulares e quadrados. Repare que a distribuição de polígonos ao redor de cada vértice é: quadrado – octógono – octógono, ou seja, a configuração é (4, 8, 8).



Mosaico formado por dodecágonos regulares, quadrados e hexágonos regulares. Repare que a distribuição de polígonos ao redor de cada vértice é: quadrado – dodecágono – hexágono, ou seja, a configuração é (4, 12, 6).

Banco de imagens/Arquivo da editora



Mosaico formado por hexágonos regulares e triângulos equiláteros. Repare que a distribuição de polígonos ao redor de cada vértice é: hexágono – triângulo – hexágono – triângulo, ou seja, a configuração é (6, 3, 6, 3).
Além disso, a intersecção entre os dois polígonos pode ser um vértice.

Dica

Vídeos sobre ladrilhamento

03 – Geometria nos mosaicos – UFJF. Canal Ciência de MG. Duração: 18 min 51 s. Disponível em: https://tedit.net/kijs1o. Acesso em: 14 ago. 2024.

Isto é Matemática T05E09 O estranho mundo de Escher. Canal sigma3web. Duração: 8 min 10 s. Disponível em: https://tedit.net/ojxhxj. Acesso em: 14 ago. 2024.

Atividades resolvidas

1. Responda sem tentar representar: o ladrilhamento semirregular (4, 9, 9) é possível? Justifique sua resposta.

Solução:

Sabemos que o ângulo interno do quadrado mede 90°. Calculamos a medida do ângulo interno do eneágono regular:

$$\frac{(9-2)\cdot 180^\circ}{9} = 140^\circ$$

Adicionando as medidas dos ângulos, da tentativa de ladrilhamento (4, 9, 9), temos:

$$90^\circ + 140^\circ + 140^\circ = 370^\circ$$

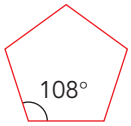
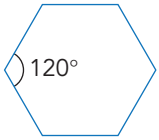
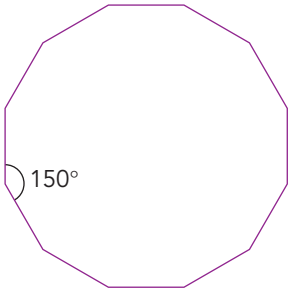
Assim, o ladrilhamento não é possível.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. **Troque ideias** com um colega para determinar outros tipos de ladrilhamento semirregular. Para começar, copiem cada polígono do quadro a seguir em uma folha de papel. No quadro está indicada a quantidade de cópias necessária para cada um deles.

Polígono	Quantidade de cópias
	4
	2
	2
	1
	2

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

Reparem que há polígonos regulares que não foram listados.

Isso porque, usando os polígonos regulares com 7, 9, 10, 11 ou um número maior do que 12 lados, não é possível justapor cada um deles com outros polígonos regulares, em torno de um vértice, de modo que a soma das medidas dos ângulos internos seja 360°.

O octógono regular, que também não foi listado, constitui um único tipo de ladrilhamento semirregular, que já foi apresentado como exemplo. A saber, é o de configuração (4, 8, 8).

Em seguida, usando uma tesoura de pontas arredondadas, recortem cada uma das cópias com cuidado.

Combinem as representações de polígonos que vocês recortaram para determinar a configuração dos outros ladrilhamentos semirregulares que ainda faltam e respondam às perguntas no caderno. Atenção às condições de um ladrilhamento do plano indicadas a seguir.

- A soma das medidas dos ângulos, que estão em torno de cada vértice de encontro dos polígonos, deve ser igual a 360°.
- Não pode haver sobreposição dos polígonos.
- Não pode haver "espaço" vazio entre os polígonos.

As respostas dos itens **a**, **d** e **e** encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Quais são as configurações de todos os ladrilhamentos semirregulares?

b) Quantos ladrilhamentos semirregulares existem? 8 ladrilhamentos.

c) Há alguma representação de polígono que foi recortado e que não compõe um ladrilhamento semirregular? Se sim, qual? Sim. O pentágono regular.

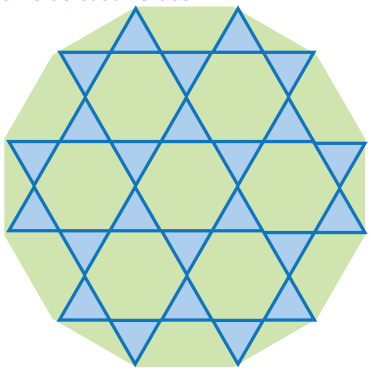
d) Você conseguiu encontrar a configuração (5, 6, 8)? Constitui um ladrilhamento semirregular? Justifique.

e) Sem precisar recortar a representação de um heptágono regular, por que a configuração (5, 6, 7) não constitui um ladrilhamento semirregular?

Oriente os estudantes a reproduzir as representações dos polígonos da atividade **1** em uma folha de papel utilizando uma régua e, se achar pertinente, a ampliar as representações proporcionalmente para que trabalhem com maior facilidade. Se houver disponibilidade, oriente os estudantes a utilizar folhas de papel com uma gramatura maior, como cartolina, por exemplo. Faça-os atentar para o cuidado com o uso adequado de tesouras de pontas arredondadas.

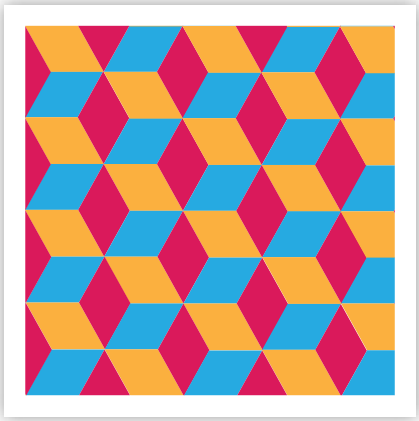
2. O ladrilhamento de superfícies planas pode ser verificado em revestimentos de piso com lajotas e de parede com azulejos e em algumas obras de arte. Em quais outros locais podemos notar o ladrilhamento de planos? Exemplos de resposta: Na técnica de marchetaria, em papéis de parede, em vitrais, etc.

3. Elabore no caderno uma questão envolvendo o ladrilhamento representado a seguir. Depois, troque de caderno com um colega para resolver a questão elaborada por ele enquanto ele resolve a que você elaborou. Exemplo de problema: Nesse ladrilhamento, qual é a configuração de polígonos em torno de cada vértice?



Banco de imagens/Arquivo da editora

4. A imagem a seguir representa a pavimentação de uma região de um plano com partes limitadas por losangos, congruentes entre eles. Quais são as medidas dos ângulos internos desses losangos? 60° e 120°.



Banco de imagens/Arquivo da editora

5. As fotografias do início deste capítulo mostram calçadas e um mosaico em um mural. Qual(is) dessas composições representa(m) um ladrilhamento regular? E um ladrilhamento semirregular?
Regular: calçada com piso formado por peças hexagonais e mural, com pastilhas quadradas; semirregular: nenhuma delas.

6. Pesquise, em fontes confiáveis, a vida de Marjorie Rice e a importância da divulgação científica para a sociedade. Não se esqueça de listar as fontes da pesquisa. Converse com os colegas e o professor sobre os temas pesquisados. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

Oriente os estudantes sobre as fontes confiáveis de pesquisa em livros, em revistas e na internet.

Reprodução/Arquivo pessoal

Marjorie Rice foi responsável por importantes descobertas no campo da Geometria.

VIRALIZE!

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Arte, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Diversidade Cultural*.

Sona, a arte de contar histórias por meio de desenhos

Em qualquer idioma, a escrita consiste em um conjunto de símbolos que, juntos, transmitem significado. Uma pessoa é capaz de ler um texto quando consegue decodificar o que esses símbolos representam.

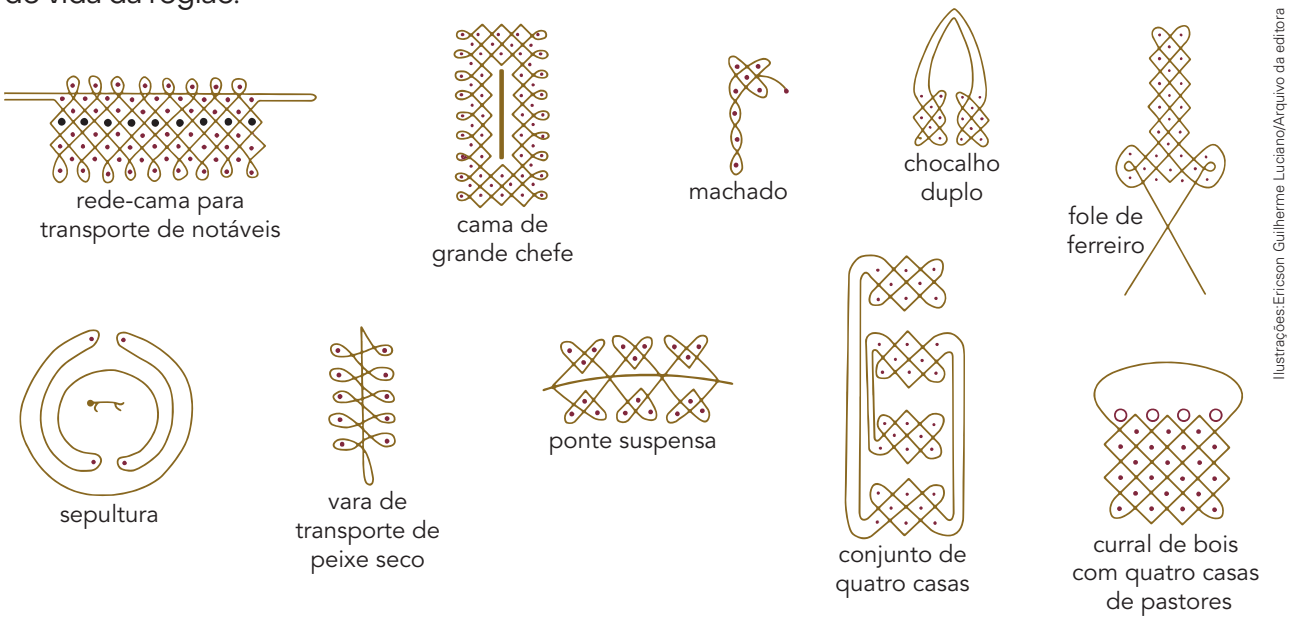
O lusona (ou Sona, no plural), uma arte tradicional do povo quioco de Angola, originalmente criada na areia, é uma combinação de traços e pontos. Em 2021, foi reconhecida como patrimônio cultural imaterial pelo governo angolano. Acompanhe um trecho da reportagem sobre o tema publicada em um jornal local.

> [...] "Os Sona é um conjunto de figuras geométricas que as populações, fundamentalmente da zona do leste de Angola, fazem recurso para as suas comunicações no âmbito cultural e social. Serve, no campo da matemática, para ajudar os estudantes a fazer cálculos a todos os níveis. No processo de aprendizagem são jogos matemáticos que os mais velhos utilizam na região para transmitir conhecimentos e experiência. Daí o seu impacto no processo da aprendizagem", explicou [Carlos Yoba, reitor da Universidade Lueji A'Nkonde].
>
> O estudo dos Sona, segundo Carlos Yoba, transcende as fronteiras nacionais [...].
>
> "Estamos de parabéns por conseguir elevar este material cultural tchokwe [quioco] a patrimônio cultural imaterial nacional. Isso resguarda e conserva a nossa originalidade", contou, acrescentando que "sempre houve muito interesse por parte dos estrangeiros em aprofundar os Sona. E nós estávamos um pouco adormecidos e quase perdíamos a originalidade".
>
> O reitor da Universidade Lueji A' Nkonde considera ser urgente a inserção dos Sona no currículo do ensino da Matemática em Angola, porque garante uma formação multicultural para todas as franjas*.
>
> [...]
>
> CALUETO, Fernando. "Sona", a arte etnomatemática, foi elevada a património cultural imaterial nacional – A conquista é da Universidade Lueji A'nkonde. *Novo Jornal*, Luanda (Angola), 27 abr. 2021. Disponível em: https://tedit.net/hvweb0. Acesso em: 14 ago. 2024.
>
> *Similar a "classes sociais".

O reconhecimento da escrita Sona como patrimônio imaterial nacional angolano visa valorizar os saberes e as culturas locais, destacando os conhecimentos matemáticos não relacionados ao estudo escolar, mas, sim, a situações diárias de determinada região.

Professor, a investigação sobre saberes e culturas é uma área de pesquisa específica da Matemática chamada **Etnomatemática**. Muitas pesquisas nessa área têm como objetivo encontrar novas maneiras de abordagem do ensino da Matemática na Educação Básica.

Na imagem a seguir, é possível analisar os símbolos importantes para a população local, os quais refletem diversos costumes e o modo de vida da região.



Ilustrações:Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplos de escritas Sona. As linhas eram representadas ao redor dos pontos, sem tirar o dedo da areia, enquanto se contavam histórias.

1. Na imagem com as escritas Sona, existem alguns símbolos que representam utensílios e instrumentos utilizados no dia a dia. Quais são eles?

1. Resposta esperada: machado, fole de ferro, chocalho duplo e vara de transporte de peixe seco.

2. De acordo com o *site* do Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional (Iphan):

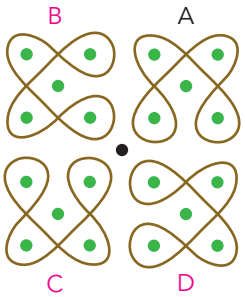
> o patrimônio imaterial é transmitido de geração a geração, constantemente recriado pelas comunidades e grupos em função de seu ambiente, de sua interação com a natureza e de sua história, gerando um sentimento de identidade e continuidade, contribuindo para promover o respeito à diversidade cultural e à criatividade humana.

BRASIL. Ministério da Cultura. Patrimônio imaterial. *Portal Iphan*, Brasília, DF, 2015. Disponível em: https://tedit.net/8upgen. Acesso em: 14 ago. 2024.

Você conhece algum patrimônio imaterial de sua região? E do Brasil? Caso não conheça, faça uma pesquisa para conhecer alguns deles.

2. Resposta pessoal. É possível encontrar os patrimônios imateriais do Brasil, organizados por estado, no *site*: https://tedit.net/hjtz6m; acesso em: 14 ago. 2024.

3. Analise a seguir o lusona cujo centro é marcado pelo ponto preto.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de resposta:

Figura **B**: rotação de 90° da figura **A**, em torno do centro, no sentido anti-horário.

Figura **C**: reflexão da figura **A** em relação ao ponto do centro.

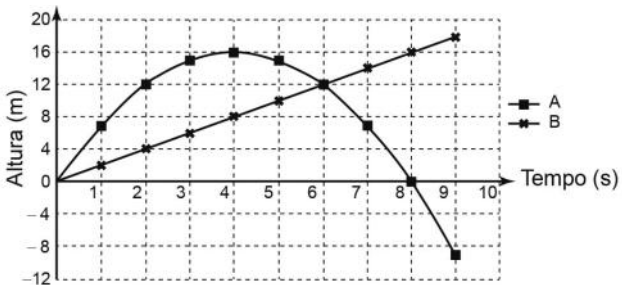
Figura **D**: rotação de 90° da figura **A**, em torno do centro, no sentido horário.

A figura-padrão, com a qual é possível construir o lusona, é a figura **A**. Quais transformações isométricas devem ser aplicadas à figura-padrão para construir o lusona?

PARA FUNDAMENTAR SABERES

1. **(Enem)** Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, **A** e **B**, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil **B** interceptar o **A** quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.

Reprodução/Enem, 2016.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil **B** deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de **B** deverá: Alternativa **c**.

a) diminuir em 2 unidades.

b) diminuir em 4 unidades.

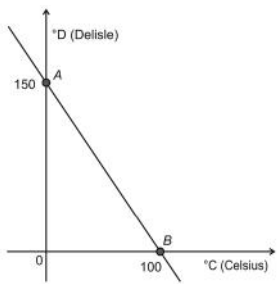
c) aumentar em 2 unidades.

d) aumentar em 4 unidades.

e) aumentar em 8 unidades.

2. **(Enem)** A escala de temperatura Delisle (°D), inventada no século XVIII pelo astrônomo francês Joseph-Nicholas Delisle, a partir da construção de um termômetro, foi utilizada na Rússia no século XIX. A relação entre as temperaturas na escala Celsius (°C) e na escala Delisle está representada no gráfico pela reta que passa pelos pontos *A* e *B*.

Reprodução/Enem, 2021.



Disponível em: www.profibus.br. Acesso em: 22 mar. 2013.

Qual é a relação algébrica entre as temperaturas nessas duas escalas? Alternativa **d**.

a) $2D + C = 100$

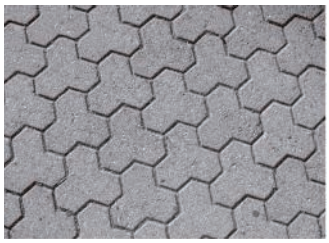
b) $2D + 3C = 150$

c) $3D + 2C = 300$

d) $2D + 3C = 300$

e) $3D + 2C = 450$

3. **(Enem)**



Reprodução/Enem, 2011.

Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br. Acesso em: 18 abr. 2010.

O polígono que dá forma a essa calçada é invariante por rotações, em torno de seu centro, de: Alternativa **d**.

a) 45°.

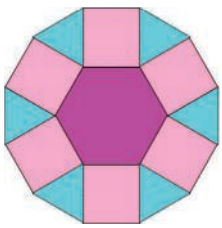
b) 60°.

c) 90°.

d) 120°.

e) 180°.

4. **(UPF-RS)** O mosaico a seguir é composto por um hexágono regular, quadrados e triângulos. Os lados do hexágono têm comprimento *a*.



Reprodução/UPF, 2021.

Se a área do hexágono é $192\sqrt{3}$ cm^2, a área de cada quadrado, em cm^2, é: Alternativa **c**.

a) 96.

b) $64\sqrt{3}$.

c) 128.

d) $14\sqrt{3}$.

e) $8\sqrt{2}$.

5. **(Fatec-SP)** Em um círculo recortado em papel-cartão foi feito o desenho de um homem estilizado. Esse círculo foi utilizado para

Ilustrações: Reprodução/Fatec, 2017.

montar uma roleta, conforme a figura **1**, fixada em uma parede. Quando a roleta é acionada, o círculo gira livremente em torno do seu centro, e o triângulo indicador permanece fixo na parede.

Figura **1**

Considerando, inicialmente, a imagem do homem na posição da figura **1**, obtém-se, após a roleta realizar uma rotação de três quartos de volta, no sentido horário, a figura representada em: Alternativa **e**.

a)

b)

c)

d)

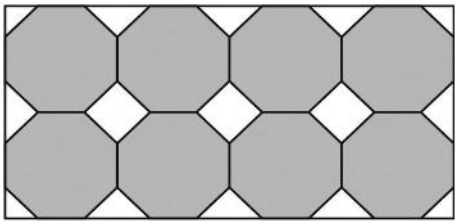
e)

Disponível em: www.profibus.br. Acesso em: 22 mar. 2013.

6. (Enem) Azulejo designa peça de cerâmica vitrificada e/ou esmaltada usada, sobretudo, no revestimento de paredes. A origem das técnicas de fabricação de azulejos é oriental, mas sua expansão pela Europa traz consigo uma diversificação de estilos, padrões e usos, que podem ser decorativos, utilitários e arquitetônicos.

Disponível em: www.itaucultural.org.br. Acesso em: 31 jul. 2021.

Azulejos no formato de octógonos regulares serão utilizados para cobrir um painel retangular, conforme ilustrado na figura.



Reprodução/Enem, 2020.

Entre os octógonos e na borda lateral dessa área, será necessária a colocação de 15 azulejos de outros formatos para preencher os 15 espaços em branco do painel. Uma loja oferece azulejos nos seguintes formatos:

- 1 – Triângulo retângulo isósceles;
- 2 – Triângulo equilátero;
- 3 – Quadrado.

Os azulejos necessários para o devido preenchimento das áreas em branco desse painel são os de formato: Alternativa **d**.

a) 1. **c)** 1 e 2. **e)** 2 e 3.
b) 3. **d)** 1 e 3.

Nesta Unidade, foram abordados os principais conceitos sobre o ponto e a reta na ótica da Geometria analítica, bem como as transformações isométricas e homotéticas, além do ladrilhamento de um plano com polígonos. Sobre os assuntos estudados, responda às perguntas. Respostas pessoais.

1. Resolvo problemas envolvendo a medida de distância entre dois pontos e as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta?
2. Relaciono a equação de uma reta à lei de uma função afim e consigo interpretar os coeficientes?
3. Identifico as transformações homotéticas? Identifico as transformações isométricas e as transformações compostas de mais de uma transformação?
4. Identifico os tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados para ladrilhamento de um plano?
5. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
6. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas, exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

RESPOSTAS

UNIDADE 1

Abertura de Unidade (p. 14)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

Capítulo 1

Atividades

1. a) 7 **b)** 17 **c)** 52

2. a) (6, 9, 12, 15, ...) **b)** (3, 4, 7, 12, ...)

3. a) 405

b) 71: sim, 18º termo; −345: sim, 122º; −195: não.

4. $a_6 = 486$

5. 3º termo: 37; 6º termo: 253.

6. a) 5ª imagem: 25 quadradinhos, sendo 5 coloridos e 20 em branco; 6ª imagem: 36 quadradinhos, sendo 6 coloridos e 30 em branco.

b) $a_n = n^2$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $a_n = n^2 - n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

d) 10ª posição.

7. Alternativas **b**, **c** e **e**.

8. a) 84

b) 172

c) 268

d) $a_n = 20 + 8n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

9. 1 600 m

10. a) Fevereiro de 2024.

b) Junho de 2024.

11. −20, −8, 4, 16 e 28.

12. $r = -8$

13. a) $x = 6$

b) $x = 4$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

14. 198 números.

15. a) 126 estudantes.

b) 36 estudantes.

16. (20, 24, 28, 32, 36) ou (28, 24, 20, 16, 12).

17. (15°, 60°, 105°)

18. 20 cm

19. $S_{15} = -255$

20. $S_{20} = 50{,}5$

21. a) Plano alfa. **b)** R$ 325,00

22. a) 145,5 **b)** −190,8

23. (2, 7, 12, 17, 22, ..., 147)

24. a) $a_1 = 15$ **c)** $a_{10} = -39$

b) $r = -6$

25. 12,8 m

26. Alternativas **a**, **b**, **d** e **e**.

27. a) 2 **c)** −3 **e)** $\frac{1}{2}$

b) 100 **d)** −1 **f)** $\frac{1}{10}$

28. 16 384

29. $a_1 = -320$

30. 54 visitas.

31. a) 2^{34} bactérias. **b)** 2^{43} bactérias.

32. a) PG de razão $q = 1{,}2$.

b) Em 6 anos: aproximadamente 520,2 mil unidades. Em 9 anos: aproximadamente 884,34 mil unidades.

33. a) $A = \frac{729}{4}$ cm² **b)** $P = \frac{19\,683}{32}$ cm

34. a) $x = -6$ ou $x = 6$.

b) $x = 10$

c) $x = 1$ ou $x = 5$.

35. Beatriz: 90 anos; filha: 60 anos; neta: 40 anos.

36. a) R$ 64,00 **b)** R$ 729,00

37. Sim; 16 cm.

38. $x = 4$ e $y = -4$ ou $y = 4$.

39. $q = 3$

40. $a = b = c$

41. $S_6 = 42$

42. $S_8 = 637{,}5$

43. Aproximadamente 1 312 500 livros.

44. a) 2,4 m **c)** 37 m

b) 1,5625 m

45. a) 40 **c)** $-\frac{125}{4}$ **e)** $4\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{900}$ **d)** $\frac{27}{4}$

46. $\frac{9}{16}$

47. Resposta pessoal.

48. a) $x = -\frac{2}{3}$ ou $x = \frac{1}{2}$.

b) $x = -\frac{1}{4}$

c) $x = 1$

d) $x = -3$

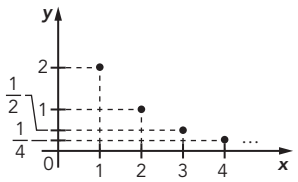
49. a) 72 cm **b)** $48\sqrt{3}$ cm²

50. 600 cm

51. a) $f(x) = -2x + 5$

b) $a_n = -2n + 5$, com $n \in \mathbb{R}^*$.

52.



Banco de imagens/Arquivo da editora

53. a) $k = -1$

b) $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{n-1}$, com $q = 3$.

54. a) A cada geração passada, o número de ascendentes dobra.

b) A sequência (2, 4, 8, 16, ...) é uma PG com termo inicial 2 e razão 2.

c) 32 trisavós.

d) $y = 2^x$

55. a) R$ 3.100,00; R$ 5.600,00.

b) PA de termo inicial 65 e razão −3; $a_n = 68 - 3n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c) R$ 38,00; R$ 9.500,00.

56. a) 11,4 cm

b) $y = 1{,}8 + 0{,}8x$, com $x \in \{1, 2, 3, ..., 12\}$.

c) O termo representa a medida da altura da planta no dia em que foi plantada pelo biólogo.

57. a) (212 000; 224 720; 238 203,20; 252 495,392; ...). PG de razão 1,06.

b) Aproximadamente 359 120. Esse é o valor do investimento após 10 anos.

58. a) $a_n = 3^{n+10}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $y = 3^{x+10}$

59. 75

60. 100

61. −49 152

62. 21 523 360

63. 2 178 308

Pense nisto (p. 18)

$a_n = 3n + 1$, sendo a_n a quantidade de palitos e $n \in \mathbb{N}^*$; $b_n = n$, sendo b_n a quantidade de quadrados e $n \in \mathbb{N}^*$.

Pense nisto (p. 19)

$a_7 + 3r = a_{10}$

Pense nisto (p. 20)

Não podemos dizer que (−1, 3, 7, ...) é uma PA sem que sejam dadas mais informações sobre essa sequência.

Pense nisto (p. 23)

a) 2, 6, 18, 54 e 162.

b) Cada termo, a partir do segundo, é igual ao triplo do anterior.

Pense nisto (p. 24)

$a_7 = a_4 \cdot q^3$

Pense nisto (p. 28)

Com a queda da Selic, fazer um empréstimo torna-se mais barato, por conta do juro menor, o que pode incentivar o consumo das pessoas físicas e novos investimentos por parte das empresas.

Pense nisto (p. 29)

Podemos perceber que, à medida que o valor do expoente n aumenta, o valor do termo a_n, b_n ou c_n fica cada vez mais próximo de 0.

Pense nisto (p. 30)

Se o domínio de f for $\mathbb{N}^*$, a imagem é um conjunto infinito de pontos, todos com ordenada 7 e abscissas números naturais não nulos. Se o domínio for $\mathbb{R}$, a representação gráfica de f é a reta $y = 7$.

Pense nisto (p. 39)

Resposta pessoal.

Educação financeira (p. 27)

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Respostas pessoais.

Interligando (p. 38)

1. a) 9 dias. **b)** 11 dias. **c)** 14 dias.
2. Resposta pessoal.

Capítulo 2

Atividades

1. R$ 57,80
2. a) R$ 44,80 **b)** R$ 168,00
3. a) 12,5% de aumento. **b)** R$ 432,00
4. a) 16% **b)** R$ 1.507,05
5. a) R$ 7,77 **b)** R$ 1.647,24 **c)** R$ 2.582,10
6. A variação do preço do produto **B** é menor do que as do produto **A** e do produto **C**, que são iguais.
7. a) R$ 3.500,00 **b)** R$ 134,40
8. a) R$ 1.250,00 **b)** R$ 1.100,00
9. a) 1250 m^3 **b)** Aproximadamente 6,98%.
10. a) 1,44p **b)** 0,64p **c)** 0,96p
11. a) Mercado **X**. **b)** Mercado **Y**.
12. 20%
13. 275%
14. a) 20,96% **b)** 9 600 reclamações.
15. a) Diminuiu; −5,5%. **b)** Aproximadamente 4,76%.
16. a) Resposta pessoal. **c)** Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal. **d)** Resposta pessoal.
17. a) R$ 26,40 **c)** R$ 76,80
b) R$ 324,00 **d)** R$ 235,20
18. 5% ao mês.
19. a) R$ 480,00 **b)** R$ 352,80 **c)** R$ 6.125,00
20. R$ 1,02; R$ 1,09.
21. 20 dias.
22. a) 20 meses. **c)** 180 meses.
b) 40 meses. **d)** 16 meses.
23. a) 25% a.m. **b)** 12,5% a.m.
24. Sim; taxa mensal de juro: 2% a.m.; valor emprestado: R$ 1.250,00.
25. R$ 30.000,00
26. Primeira operação: R$ 1.800,00; segunda operação: R$ 2.200,00.
27. a) R$ 24,73 e R$ 324,73. **c)** R$ 56,09 e R$ 156,09.
b) R$ 1.989,64 e R$ 4.489,64. **d)** R$ 114,25 e R$ 1.014,25.
28. O fundo de renda fixa é mais vantajoso.
29. a) Respectivamente: R$ 2.120,00; R$ 2.247,20; R$ 2.700,00; R$ 3.645,00.
b) 151 meses; 350 meses.
30. a) R$ 8.000,00 **b)** 60% **c)** 15 anos.
31. 20% a.m.
32. 7 anos.
33. a) 60% ao ano. **b)** R$ 2.531,65
34. 12 anos.
35. a) Aproximadamente R$ 27,37. **b)** 9,48% de valorização.
36. a) Lucro de R$ 30,00; 0,625%.
b) 15% de valorização.
37. a) 4 anos. **c)** 9 anos.
b) 6 anos. **d)** 12 anos.
38. Resposta pessoal.
39. a) 35% **b)** R$ 256,00
40. R$ 149.760,00
41. 20% ao ano.
42. a) $V(t) = (0{,}95)^t \cdot V_0$
b) 10 anos e 4 meses.
c) 100% de aumento.
43. a) R$ 2.400,00 **b)** Resposta pessoal.
44. Aproximadamente R$ 665,45.
45. 25% a.a.
46. R$ 3.301,88
47. a) Aproximadamente R$ 46.731,16.
b) R$ 385.268,84
48. a) R$ 2.000,00 **c)** R$ 92.000,00
b) R$ 2.768,00 **d)** R$ 2.752,00
49. a) Sistema Francês de Amortização, pois as prestações têm o mesmo valor.
b) Aproximadamente R$ 80.148,89.
c) Aproximadamente R$ 1.480,76.
50. R$ 30.000,00
51. a) Financiamento de um apartamento segundo o SFA

Mês	Prestação (em R$)	Juro (em R$)	Amortização (em R$)	Saldo devedor (em R$)
0	–	–	–	200.000,00
1	4.448,00	2.000,00	2.448,00	197.552,00
2	4.448,00	1.975,52	2.472,48	195.079,52
3	4.448,00	1.950,79	2.497,21	192.582,31

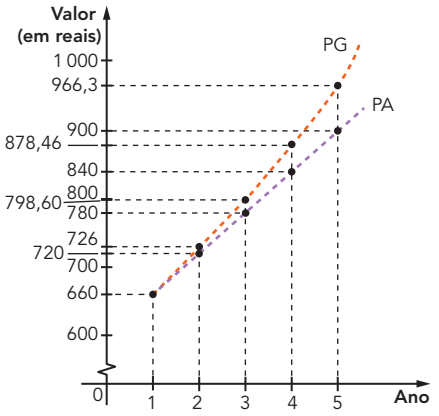
Dados elaborados para fins didáticos.

b) Financiamento de um apartamento segundo o SAC

Mês	Prestação (em R$)	Juro (em R$)	Amortização (em R$)	Saldo devedor (em R$)
0	–	–	–	200.000,00
1	5.333,00	2.000,00	3.333,00	196.667,00
2	5.299,67	1.966,67	3.333,00	193.334,00
3	5.266,34	1.933,34	3.333,00	190.001,00

Dados elaborados para fins didáticos.

52. Aproximadamente R$ 26,30.
53. 0,75% a.m.
54. a) Sim, R$ 1.500,00. **c)** R$ 35.000,00
b) 7,5
55. a) Juro simples: (660, 720, 780, 840, 900).
Juro composto: (660; 726; 798,60; 878,46; 966,306).
b) Juro simples: PA; $r = 60$.
Juro composto: PG; $q = 1{,}1$.
c)



Banco de imagens/Arquivo da editora

d) R$ 66,31

56. **a)** R$ 6.000,00
b) Juro composto; 20% a.a.
c) Sim.

57. **a)** V **b)** F **c)** V **d)** F **e)** V

58. Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 42)

A do mercado **A**.

Pense nisto (p. 43)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 44)

O preço original é multiplicado por 3,5.

Pense nisto (p. 51)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 64)

Calculamos 2% de juros sobre 91734,07 e obtemos: 0,02 · 91734,07 = 1834,68. Com o pagamento da prestação, o novo saldo devedor é:
91734,07 + 1834,68 − 10212,44 = 83356,31.
O valor da dívida amortizado no mês é 10212,44 − 1834,68 = 8377,76; ou seja, R$ 8.377,76.

Pense nisto (p. 65)

- Calculamos 2% de juros sobre 90000: 0,02 · 90000 = 1800; ou seja, R$ 1.800,00; e o valor da terceira parcela será 9000 + 1800 = 10800; ou seja, R$ 10.800,00. O saldo devedor é amortizado em R$ 9.000,00, reduzindo-se a 90000 − 9000 = 81000; ou seja, R$ 81.000,00.
- Saldo devedor: PA decrescente, em que $a_1 = 108000$ e $r = -9000$. Juro: PA decrescente em que $a_1 = 2160$ e $r = -180$.

Educação financeira (p. 47)

1. R$ 649,50

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

Experimente (p. 57)

Aproximadamente R$ 5.625,33.

Experimente (p. 60)

1. Resposta pessoal.

Interligando (p. 67)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

4. Resposta pessoal.

Viralize! (p. 72)

1. Resposta pessoal.

2. Do total de mulheres que fazem o primeiro investimento (em 2024), 50% investem R$ 167,00 ou menos, e as outras 50% investem R$ 167,00 ou mais.

3. A redução do saldo médio dos investidores deve-se à maior popularização de investimentos, em especial os de renda variável. Resposta pessoal.

4. Aproximadamente 1848%.

5. Resposta pessoal.

Para fundamentar saberes (p. 74)

1. **a)** $\frac{4}{5}$

b) (a, b, c) é PH $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ é PA.
Daí: $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Rightarrow$
$\Rightarrow b = \frac{2 \cdot ac}{a + c}$.

2. Alternativa **c**.

3. Alternativa **d**.

4. **a)** R$ 200.000,00
b) 11,2 meses.

5. R$ 1.800,00

6. **a)** Cafezinho: 50%; cafezinho com leite: 60%.
b) R$ 100,00

7. Alternativa **d**.

UNIDADE 2

Abertura de Unidade (p. 76)

1. Netuno. Por ser o planeta do Sistema Solar mais distante do Sol.

2. Aproximadamente 182 m.

Capítulo 3

Atividades

1. **a)** Um corpo não tem as mesmas dimensões que outro, tornando a unidade de medida imprecisa.
b) 230,56 m

2. **a)**

Conversão entre unidades de medidas

Sistema Imperial	Equivalência em pés (ft)	Equivalência em metros (m)
1 polegada (in)	$\frac{1}{12}$	0,0254
1 pé (ft)	1	0,3048
1 jarda (yd)	3	0,9144
1 milha (mi)	5280	1609,344

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Resposta pessoal.

3. **a)** Área de uma superfície.
b) Alqueire mineiro/goiano equivale a 48400 m²; alqueire paulista, a 24200 m²; e alqueire da região Norte, a 27225 m².
c) Um alqueire representa diferentes medidas de área a depender da região do Brasil. Usar a unidade do SI para área, metro quadrado, garante que não haja confusão ao comparar medidas de área de diferentes regiões.

4. **a)** Roupas de frio.
b) 68 °F
c) $T_K = (T_F - 32) \cdot \frac{5}{9} + 273{,}15$

5. **a)** $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ **b)** −1,25 m/s²

6. $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$

7. **a)** Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.

8. $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$

9. Resposta pessoal.

10.
- Aproximadamente 4319 km.
- 0,07 mm
- Resposta pessoal.

a) As três se referiam à mesma grandeza de base: comprimento.
b) Resposta pessoal.

11. 1000000 de caixinhas.

12. **a)** Frequência mínima: 3000 Hz; frequência máxima: 300000000000 Hz.
b) Frequência mínima: $3 \cdot 10^3$ Hz; frequência máxima: $3 \cdot 10^{11}$ Hz.
c) 100 milhões.

13. **a)** $4{,}0118 \cdot 10^{16}$ m
b) 10^{17} metros.

14. **a)** $1 \cdot 10^4$ m; $7{,}455 \cdot 10^3$ s.
b) Aproximadamente 1,34 metro por segundo.
c) Aproximadamente 12 min 25 s por quilômetro.
d) Resposta pessoal.

15. O campo de futebol tradicional é 53,69% maior.

16. 29,06 m/s²

17. **a)** É mais adequado usar unidade astronômica para medidas de distância dentro do Sistema Solar e anos-luz para medidas de distância que ultrapassam muito esse limite, como medidas de distância relacionadas ao tamanho de nossa galáxia.
b) $9{,}4608 \cdot 10^{15}$ m
c) $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

18. **a)** 0,7 m³
b) $3{,}5 \cdot 10^8$ m³
c) 140000 piscinas olímpicas.

Pense nisto (p. 79)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 80)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 83)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 87)

R$ 4,40 por quilograma.

Pense nisto (p. 88)

Respostas pessoais.

Pense nisto (p. 92)

O resultado precisaria ser multiplicado por 10^{-3} (ou dividido por 1000).

Interligando (p. 81)

1. A palavra "disseminar" indica o fluxo que deve ser seguido para a padronização dos instrumentos de medida.

2. Nada se pode afirmar. A margem de erro de leitura seria relevante para determinar o estado do bebê.

3. Resposta pessoal.

Educação financeira (p. 96)

1. 3600000 J

2. R$ 87,80

3. Resposta pessoal.

4. 10 meses.

5. Resposta pessoal.

Capítulo 4

Atividades

1. Resposta pessoal.

2. 180 mil pessoas.

3. Respostas pessoais.

4. R$ 976,00

5. a) 10 m^2

b) Dividir as imagens em mais regiões delimitadas por retângulos com medida da base menor, de modo que as medidas de área excedente na imagem **2** e faltante na imagem **3** sejam menores.

6. Resposta pessoal.

7. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

d) A recomendação das Agências de Vigilância Sanitária é que caixas-d'água de estabelecimentos de uso coletivo sejam higienizadas a cada 6 meses.

8. a) Balança **A**; erro de 0,5 miligrama.

b) Balança **C**; erro de 0,5 quilograma.

c) Balança **B**; erro de 0,5 grama.

9. a) Algarismos significativos exatos: 1, 0, 2, 3. Algarismo significativo duvidoso: 7. Total de algarismos significativos: 5; $1{,}0237 \cdot 10^0$ m.

b) Algarismos significativos exatos: 6, 2, 3. Algarismo significativo duvidoso: 5. Total de algarismos significativos: 4; $6{,}235 \cdot 10^{-6}$ kg.

c) Algarismos significativos exatos: 2, 0, 0. Algarismo significativo duvidoso: 2. Total de algarismos significativos: 4; $2{,}002 \cdot 10^2$ m.

d) Algarismos significativos exatos: 2, 2, 0, 0, 0. Algarismo significativo duvidoso: 4. Total de algarismos significativos: 6; $2{,}20004 \cdot 10^2$ J.

10. Exemplos de resposta:

a) $3{,}8 \cdot 10^2$ mL. Algarismo duvidoso: 8. $(3{,}8 \pm 0{,}25) \cdot 10^2$ mL.

b) 1,35 kg. Algarismo duvidoso: 5. $(1{,}35 \pm 0{,}05) \cdot 10^0$ kg ou $(1{,}35 \pm 0{,}05)$ kg.

c) 37,41 °C. Algarismo duvidoso: 1. $(3{,}741 \pm 0{,}005) \cdot 10^1$ °C.

d) 83,5 mL. Algarismo duvidoso: 5. $(8{,}35 \pm 0{,}05) \cdot 10^1$ mL.

11. a) 0,0027

b) 1,6

c) 7,8

d) 4,5

e) 9,8

f) 0,0050

12. a) 2,8

b) 0,400

c) 820,1

13. a) Aproximadamente 11 cm.

b) Resposta pessoal.

14. a) $7{,}88 \cdot 10^{-3}$ km^2

b) 200 000

c) Resposta pessoal.

d) Respostas pessoais.

e) Resposta pessoal.

15. Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 107)

Três algarismos exatos; imprecisão de até 0,005 mm; 4 algarismos; erro de 3,000 mm ± 0,005 mm ou $3{,}000 \cdot 10^{-3}$ m $\pm$ $5 \cdot 10^{-6}$ m.

Interligando (p. 102)

1. O protótipo do quilograma fabricado em 1889 foi considerado inadequado para medidas científicas precisas porque, apesar de ser guardado de forma protegida, sofria pequenas alterações ao perder átomos ou interagir com o ar. Essas variações são imperceptíveis para usos do dia a dia, mas, para pesquisas científicas em que são necessárias exatidão na unidade de medida, a diferença com o passar do tempo se torna significativa.

2. Na Conferência Geral sobre Pesos e Medidas de 2018, a definição do quilograma foi aprimorada, passando a ser baseada na constante de Planck, uma constante fundamental que relaciona a medida de massa e a medida da corrente elétrica necessária para equiparar energia mecânica com eletromagnética em uma balança, em vez de ser baseada em um protótipo arbitrário, como ocorria anteriormente.

Viralize! (p. 113)

1. 10 284 milhões de kg, ou aproximadamente 10,3 bilhões de kg.

2. Arroba é uma unidade de medida bastante utilizada na agropecuária brasileira e corresponde a 15 quilogramas, ou 0,25 saca de 60 kg.

3. Resposta pessoal.

4. Resposta pessoal.

Para fundamentar saberes (p. 114)

1. Alternativa **b**.

2. Alternativa **c**.

3. Alternativa **c**.

4. Alternativa **d**.

5. Alternativa **c**.

6. Alternativa **d**.

7. Alternativa **c**.

8. Alternativa **b**.

UNIDADE 3

Abertura de Unidade (p. 116)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

Capítulo 5

Atividades

1. a) Proposição.

b) Não é proposição.

c) Não é proposição.

d) Proposição.

e) Proposição.

f) Não é proposição.

g) Proposição.

2. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

4. a) A conclusão não é dedutível, pois não sabemos se ele entra nos casos de exceção.

b) A conclusão é dedutível.

c) A conclusão não é dedutível, pois não sabemos a idade de Dandara.

5. a) Verdadeira.

b) Falsa.

c) Falsa.

d) Verdadeira.

e) Falsa.

f) Verdadeira.

g) Verdadeira.

h) Falsa.

6. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

7. Resposta pessoal.

8. a) Verdadeira.

b) Falsa.

c) Falsa.

d) Verdadeira.

9. Alternativa **b**.

10. a)

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

b)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

11. Alternativa **a**.

12. Alternativa **b**.

13. As 4 situações são: Guilherme ajuda Felipe no dever de Matemática e Felipe ajuda Guilherme no dever de Inglês; Guilherme ajuda Felipe no dever de Matemática e Felipe não ajuda Guilherme no dever de Inglês; Guilherme não ajuda Felipe no dever de Matemática e Felipe ajuda Guilherme no dever de Inglês; Guilherme não ajuda Felipe no dever de Matemática e Felipe não ajuda Guilherme no dever de Inglês. Apenas na segunda situação descrita Felipe não honraria sua promessa.

14. a) Verdadeira.

b) Falsa. Exemplo de contraexemplo: 6 é divisível por 2, mas não por 4.

c) Falsa, pois todo número real elevado ao quadrado tem resultado positivo. Exemplo de contraexemplo: $2^2 = 4$.

d) Verdadeira.

15. a) A **II** é a única que não pode ocorrer, pois chegar atrasada era uma implicação obrigatória do perder a hora.

b)

P	Q	$P \Rightarrow Q$ (equivalente a $\neg P \vee Q$)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

16. Alternativa **e**.

17. Resposta pessoal.

18. 3

19. a) Nota 6.

b) 40%

c) Porque, se o resultado em **VI** for maior do que 10, significa que o estudante precisa tirar mais que 10 na última prova, o que não costuma ser possível; portanto, mesmo se ele tirar a nota máxima 10, ficará em recuperação.

d) 3,5

20. Resposta pessoal.

21. a) O algoritmo **1** funciona, e o boneco passará pelos pontos *E* e *G* antes de atingir *F*.

b) O boneco fica infinitamente virando 90° à direita e 90° à esquerda, sem sair do lugar.

22. a) No cálculo da variação real, é levada em conta a inflação, mas, no cálculo da variação nominal, não. Portanto, a variação nominal compara a renda do ano vigente com a renda do ano anterior, e a variação real compara a renda no ano vigente com a renda no ano anterior reajustada pela inflação.

b) $i_N = 0{,}21$ ou 21%; $i_R = 0{,}1$ ou 10%.

23. Alternativa **d**.

24. Resposta pessoal.

25. Resposta pessoal.

26. a) A saída nesse caso será "A resposta é sim.".

b) A saída nesse caso será "A resposta é não.".

c) A saída nesse caso será "A resposta é sim.".

d) "O número natural *num* é um quadrado perfeito?"

27. a) A saída será "Para ser aprovado(a), você precisa tirar em média nos instrumentos avaliativos que faltam um mínimo de: 4,8".

b) Resposta pessoal.

28. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

29. a) 2 verificações.

b) A = Sim, A' = Não; B = Sim e B' = Não; C = Não e C' = Sim.

c) 7 verificações; 3 verificações; 1023 verificações; 10 verificações.

Pense nisto (p. 119)

a) Proposição verdadeira.

b) Proposição falsa.

c) Proposição falsa.

d) Proposição falsa.

e) Proposição verdadeira.

f) Proposição falsa.

O conectivo **e** exige que as duas partes que compõem a proposição sejam verdadeiras para que a proposição também o seja, enquanto, no caso do conectivo **ou**, basta que uma das partes seja verdadeira para que a proposição também seja.

Pense nisto (p. 120)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 121)

Intervalo sempre verdadeiro para qualquer $x \in \mathbb{R}$: ($x > -2$ ou $x < 6$); intervalo sempre falso para qualquer $x \in \mathbb{R}$: ($x < -2$ e $x > 6$); sim, é possível.

Pense nisto (p. 122)

Os resultados das operações dos itens **b**, **c**, **g**, **h** e **i** são proposições verdadeiras e os dos itens **a**, **d**, **e**, **f** e **j** são proposições falsas.

Pense nisto (p. 122)

Quando *A*, ou seja, a proposição original, é verdadeira.

Pense nisto (p. 124)

1. Alternativa **a**.

2. Nenhuma das alternativas.

Pense nisto (p. 127)

1. Resposta pessoal.

2. Provavelmente instruções pouco precisas, que davam margem a diferentes interpretações do desenhista.

3. Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 128)

a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 129)

As entradas seriam os ingredientes em suas respectivas quantidades; a saída seria o próprio bolo de laranja pronto. Já o processamento corresponderia às instruções do que fazer com os ingredientes para obter o bolo pronto.

Pense nisto (p. 130)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 133)

a) DNV, documento de identidade da mãe e declaração do pai com firma reconhecida.

b) DNV, documentos de identidade com foto e certidão de casamento. Nesse caso, os documentos não dependem de o pai ir ou não junto ao cartório.

c) Sim.

d) Os elementos gráficos são: retângulo, losango, retângulo com cantos arredondados e seta. Dentro do retângulo sempre há a indicação de uma ação que deve ser feita. No losango, há sempre uma pergunta cuja resposta pode ser ou sim, ou não. Já no retângulo de cantos arredondados, há a indicação de início e fim do processo. A seta indica o caminho que deve ser seguido para identificar o próximo passo.

Interligando (p. 145)

1. a) Resposta pessoal.

b) 2^{38} *bytes*.

2. 10,625 *gigabytes* por segundo.

Capítulo 6

Atividades

1. a) Ao pressionar o botão da bandeira verde, o ator virará de cabeça para baixo, dirá "Olá!" por 2 segundos e, então, retornará à posição inicial.

b) Ao pressionar o botão da bandeira verde, o ator se posicionará no centro da tela – posição de coordenadas (0; 0) – e, por 10 vezes seguidas, andará 10 passos para a frente e aguardará 0,1 segundo antes do próximo movimento. Ao final da execução do programa, o ator estará posicionado no ponto de coordenadas (100; 0).

c) Ao clicar no botão da bandeira verde, nada acontecerá com o ator, pois não há indicação de que o programa deve ser executado quando clicar na bandeira verde.

d) Ao pressionar o botão da bandeira verde, o ator apenas se moverá para uma posição aleatória na tela, pois os 2 comandos intermediários se anulam e não é possível percebê-los porque são executados mais rapidamente do que nosso cérebro é capaz de processar.

2. a) Código **II**.

b) Não há código que, ao ser executado, faz com que o ator realize esse tipo de movimento.

c) Código **IV**.

d) Código **I**.

e) Código **III**.

3. a) Resposta pessoal.

b) Aproximadamente 280 passos.

c) Resposta pessoal.

4. a)

Reprodução/Scratch

Ilustrações: Reprodução/Scratch

b)

c)

5. a) O código indica que, a qualquer momento do jogo, se a bola laranja tocar na cor azul, ela deve andar –10 passos, ou seja, desfazer o movimento anterior, movendo-se 10 passos no sentido oposto dos últimos 10 passos dados.

b) O usuário vence quando o ator bola encosta no ator gol; ou seja, a bola laranja deve encostar na barra verde, sem poder passar através dos retângulos azuis.

6. Resposta pessoal.

7. a) Juntar em uma única fala do ator "A resposta é:" e o número do tamanho da palavra.

b) Quantas letras tem a palavra que o usuário inseriu.

8. a) O programa repetiria a primeira letra do nome *x* vezes, sendo *x* a quantidade de caracteres do nome inserido pelo usuário.

b) O bloco "adicione 1 a n" precisaria estar logo abaixo de "diga letra n de nome por 1 segundos".

9. a) "Na verdade, o resultado deveria ser", "28" e "Tente novamente!".

b) "Parabéns, você acertou!".

c) Resposta pessoal.

10. a) Calcular a média das notas de uma disciplina.

b) "A sua média no período foi: 6,8".

c) "A sua média no período foi: 5,8"; a soma do peso das atividades não deu 100%, como deveria.

d) Resposta pessoal.

11. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

12. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

13. a) A condição deve ser a negação da condição do laço "enquanto": "Repita até que *num* == 1 ou *res* <> 1".

b) Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 148)

Resposta pessoal.

Interligando (p. 157)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

Viralize! (p. 164)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Respostas pessoais.

Para fundamentar saberes (p. 166)

1. Alternativa **c**.

2. Alternativa **d**.

3. Alternativa **b**.

4. Alternativa **b**.

5. Alternativa **c**.

6. Alternativa **d**.

7. Alternativa **b**.

UNIDADE 4

Abertura de Unidade (p. 168)

1. É um bloco econômico, criado em 1991, formado por países da América do Sul. Os países-membros e fundadores são: Brasil, Argentina, Paraguai, Uruguai e Venezuela (suspensa em 2016). O objetivo principal é promover a integração econômica, política e social dos membros, além de garantir a democracia na região.

2. Com o *QR Code* é possível rastrear a placa, diminuindo as possibilidades de clonagem e falsificação.

3. 258 336 000

Capítulo 7

Atividades

1. 24 maneiras distintas.

2. 84 maneiras.

3. a) 4 096 números.

b) 2 048 números.

c) Aproximadamente 41,02%.

4. Respostas pessoais.

5. 212 jogos.

6. a) F **b)** V **c)** F **d)** V **e)** V

7. a) 252 maneiras. **b)** 126 maneiras.

8. a) 120 maneiras. **c)** 60 maneiras.

b) 320 maneiras.

9. a) 140 026 320 placas.

b) 3 380 000 placas.

c) 676 000 placas.

d) 57 122 000 placas.

e) 61 516 000 placas.

10. a) 6 números. **c)** 48 números.

b) 60 números. **d)** 180 números.

11. a) 168 números. **c)** 220 números.

b) 105 números.

12. a) 24 modos distintos.

b) 12 resultados.

c) 12 resultados.

d) 15 resultados.

e) Resposta pessoal.

13. a) 24 opções.

b) 6 opções.

c) 10 opções.

14. a) 720 respostas.

b) 72 respostas.

c) 504 respostas.

15. Alternativa **b**.

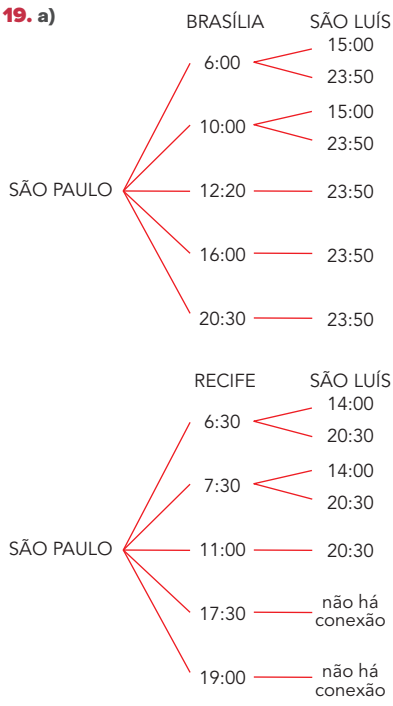
16. a) 81 códigos. **c)** 6 códigos.

b) 117 códigos. **d)** 9 códigos.

17. Resposta pessoal.

18. a) 12 opções. **b)** 36 opções.

19. a)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b) 15 maneiras.

20. a) 720 **c)** 4 920

b) 2 **d)** 30

21. a) 56 **d)** 0

b) $\frac{9}{20}$ **e)** $\frac{39}{1640}$

c) 190

22. a) F **b)** V **c)** F

23. a) $n + 2$ **c)** $n + 2$

b) $\frac{1}{n-2}$ **d)** $\frac{(n-1)^2}{n}$

24. a) $S = \{5\}$ **c)** $S = \{5, 6\}$

b) $S = \{7\}$

25. Alternativa **b**.

26. a) 24 **c)** 362 880

b) 720

27. 24 maneiras.

28. a) 362 880 **d)** 5 040

b) 161 280 **e)** 181 440

c) 100 800 **f)** 1728

29. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

30. **a)** 7 semanas.
b) 5 040 maneiras.
c) 144 maneiras.
d) 144 maneiras.

31. 576 anagramas.

32. **a)** 361ª posição.
b) 293ª posição.
c) SATORP

33. 126 maneiras.

34. 72 opções.

35. **a)** 10 maneiras distintas.
b) 6 maneiras distintas.

36. A quantidade de duplas é igual à de quartetos; a quantidade de duplas é menor do que a de trios.

37. **a)** 120 triângulos.
b) 252 pentágonos convexos.

38. Resposta pessoal.

39. Resposta pessoal.

40. 3 150 maneiras diferentes.

41. **a)** 16 maneiras.
b) 78 maneiras.
c) 169 maneiras.
d) 6 maneiras.
e) 1 014 maneiras.

42. $n = 10$

43. **a)** 8 145 060
b) 105
c) 12 285

44. **a)** 336
b) 60
c) 126
d) 180

45. 720 720 maneiras.

46. Alternativa **d**.

47. 10 000 possibilidades.

48. **a)** 1 única possibilidade.
b) 4 resultados.
c) 12 resultados.

49. 12 600 números.

50. **a)** 15 120 anagramas.
b) 5 040 anagramas.
c) 8 400 anagramas.
d) 4 200 anagramas.

51. $n = 5$

52. **a)** 35 sequências.
b) 35 sequências.

53. 43 758 caminhos.

Pense nisto (p. 173)

Porque pessoas diferentes ocuparão os cargos de síndico e subsíndico.

Pense nisto (p. 174)

- De acordo com esse raciocínio, não seria possível saber se o algarismo usado para a centena é par ou ímpar, da mesma maneira que o algarismo da dezena. Desse modo, não pode ser determinado, de maneira única, o número de possibilidades de escolha do algarismo da unidade (o qual pode ser 3, 2 ou 1).
- Formar o número 326 é diferente de formar, por exemplo, o número 263. É importante lembrar que estamos construindo sequências.

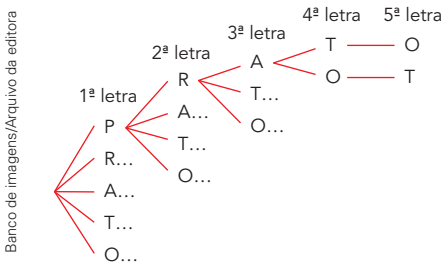
Pense nisto (p. 174)

255 sequências.

Pense nisto (p. 179)

Sim, se $n \geqslant 2$, então $n!$ contém como um dos fatores o número 2, que é par. Como o produto de um número par por outro inteiro qualquer é par, concluímos que $n!$ é par.

Pense nisto (p. 184)



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto (p. 189)

Resposta pessoal.

Interligando (p. 181)

1. Sim. Possíveis caminhos: A – B – C – D – B – E – D – A – E ou A – B – C – D – A – E – B – D – E, entre outros.

2. Ao realizar o caminho passando apenas uma vez por cada rua, o caminhão economizaria tempo e combustível.

3. Resposta pessoal.

Capítulo 8

Atividades

1. **a)** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **b)** $E_1 = \{3, 6\}$ **c)** $E_2 = \{1, 4, 6\}$

2. **a)** $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$
b) $E = \{(K, K), (K, C), (C, K)\}$

3. **a)** 36 **b)** 6 **c)** 9 **d)** 15

4. **a)** Discreto finito.
b) Discreto finito.
c) Discreto finito.
d) Contínuo.
e) Discreto infinito enumerável.
f) Contínuo.
g) Discreto finito.
h) Discreto finito.

5. $\bar{E} = \{\underbrace{(4, 6), (6, 4), (5, 5)}_{\text{soma 10}}, \underbrace{(5, 6), (6, 5)}_{\text{soma 11}}, \underbrace{(6, 6)}_{\text{soma 12}}\}$

6. $\bar{E} = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)\}$

7. **a)** 32 **b)** 496 **c)** 4 960

8. 255

9. $\Omega = \{(K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6), (C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6)\}$

10. **a)** 1% **b)** 1% **c)** 37% **d)** 90% **e)** 10%

11. **a)** $\frac{1}{52}$ **b)** $\frac{51}{52}$

12. **a)** $\frac{11}{36}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{5}{6}$ **d)** $\frac{1}{3}$

13. **a)** $a = 22$; $b = 31$; $c = 106$; $d = 48$; $e = 71$.
b) $\frac{31}{200}$
c) $\frac{81}{200}$

14. 88,75%

15. **a)** Resposta pessoal.
b) Não é possível.
c) Resposta pessoal.

16. 80%

17. 80%

18. **a)** $\frac{2}{15}$ **b)** $\frac{1}{5}$

19. 11

20. $\frac{1}{7}$

21. **a)** 1% **b)** 1%

22. Resposta pessoal.

23. 14%

24. 45%

25. 50%

26. 5%

27. **a)** $\Omega = \{$(pedra, pedra), (pedra, tesoura), (pedra, papel), (tesoura, pedra), (tesoura, tesoura), (tesoura, papel), (papel, tesoura), (papel, pedra), (papel, papel)$\}$
b) $\frac{1}{3}$

28. **a)** $\frac{5}{18}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{5}{9}$

29. Aproximadamente 83,3%.

30. a) $\frac{1}{22100}$ **b)** $\frac{3}{52}$ **c)** $\frac{11}{850}$

31. a) Casal **1**: 25% de ter sangue do tipo AB, 50% de ter sangue do tipo B e 25% de ter sangue do tipo A. Casal **2**: 50% de ter sangue do tipo A e 50% de ter sangue do tipo O. Casal **3**: 50% de ter sangue do tipo A, 25% de ter sangue do tipo B e 25% de ter sangue do tipo AB.

b) Casal **1**: 0%. Casal **2**: 50%. Casal **3**: 50%.

c) Os casais **2** e **3** devem ser desaconselhados para o parto domiciliar, pois há probabilidade de aglutininas presentes no sangue da mãe afetarem os aglutinogênios possivelmente presentes no sangue do recém-nascido.

d) Resposta pessoal.

32. $\frac{31}{36}$

33. a) $\frac{4}{5}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{3}$

34. a) 0,4 **b)** 0,55

35. 14%

36. 30%

37. a) 100% **b)** $13,\overline{3}\%$

38. a) $\frac{1}{3}$ **b)** 0

39. a) $\frac{1}{44}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{1}{13}$ **d)** $\frac{2}{39}$ **e)** $\frac{5}{13}$

40. 10%

41. a) $\frac{12}{19}$ **b)** $\frac{23}{44}$

42. a) $\frac{1}{17}$ **b)** $\frac{1}{16}$

43. $\frac{1}{4}$

44. $\frac{53}{112}$

45. a) $\frac{1}{20}$ **b)** $\frac{1}{40}$

46. a) $\frac{1}{24}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{5}{12}$

47. a) $\frac{1}{30}$ **b)** $\frac{7}{40}$ **c)** 0,30

48. a) 64% **b)** 3%

49. Resposta pessoal.

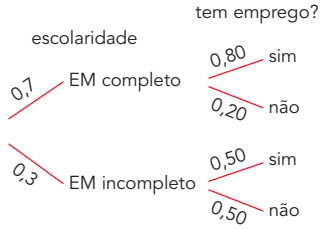
50. a) **Situação de ensino e emprego dos jovens da cidade**

Emprego / Ensino Médio	Empregado	Desempregado	Total
Ensino Médio completo	1120	280	**1400**
Ensino Médio incompleto	300	300	**600**
Total	**1420**	**580**	**2000**

Dados elaborados para fins didáticos.

Banco de imagens/Arquivo da editora

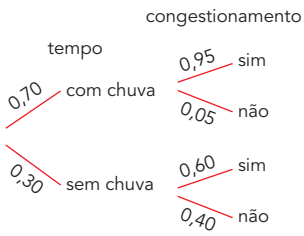
b)



c) 71%

d) Aproximadamente 0,79.

51. a)



b) 66,5% **c)** 84,5%

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto (p. 196)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 199)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 200)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 216)

$\frac{7}{15}$

Pense nisto (p. 218)

Resposta pessoal.

Interligando (p. 220)

1. Considerando o AHI, cuja taxa de gravidez teórica máxima é 0,7%, conclui-se que esse método tem 99,3% de eficácia mínima; já o preservativo feminino tem proteção máxima de 95%. Assim, deve-se optar pelo AHI.

2. O AHI.

3. a) Na opção **I**, a probabilidade de engravidar é de 0,7%. Na opção **II**, a probabilidade de engravidar é de 0,006%. Assim, ela deverá optar pela opção **II**.

b) A principal vantagem é que o preservativo, por ser um método de barreira, protege também de infecções sexualmente transmissíveis, como a infecção por HIV, sífilis, hepatites, gonorreia e clamídia.

Viralize! (p. 222)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. a) Sim.

b) Sobram 37 outros caracteres, que podem representar pontuação, como vírgula e ponto de interrogação, parênteses, arroba, asterisco, sinais de operações matemáticas, etc.

4. Resposta pessoal.

Para fundamentar saberes (p. 224)

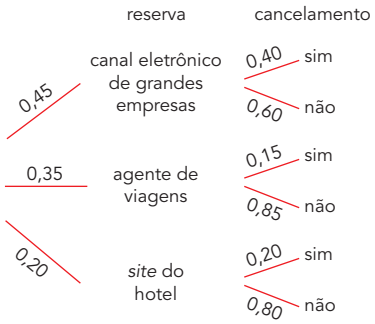
1. Alternativa **b**.

2. a) $\frac{4}{9}$ **b)** Menor; $\frac{16}{81}$. **c)** Menor; $\frac{64}{729}$. **d)** 6

3. 0,08779

4. 1%

5. a)



b) 72,75%

6. Alternativa **c**.

7. Alternativa **e**.

8. Alternativa **d**.

UNIDADE 5

Abertura de Unidade (p. 226)

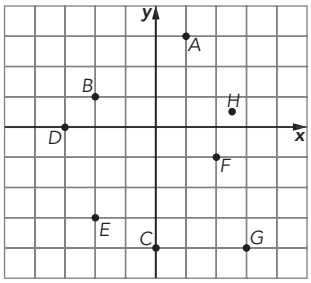
1. Respostas pessoais.

2. Respostas pessoais.

Capítulo 9

Atividades

1.



Banco de imagens/Arquivo da editora

2. $H(2, 4)$; $I(-2, -4)$; $J(1, 1)$; $K(3, 0)$; $L(-1, 4)$; $M(-3, -2)$; $N(1, -3)$; $O(0, 0)$.

3. **a)** 4º quadrante. **c)** 4º quadrante.
b) 3º quadrante. **d)** 2º quadrante.

4. $m = n = 5$

5. $A(-3\sqrt{2}, 0)$; $B(0, 3\sqrt{2})$; $C(3\sqrt{2}, 0)$; $D(0, -3\sqrt{2})$.

6. **a)** $\sqrt{17}$ u.c. **e)** 7 u.c.
b) $5\sqrt{2}$ u.c. **f)** 4 u.c.
c) 5 u.c. **g)** 4 u.c.
d) $\sqrt{130}$ u.c.

7. $(5 + \sqrt{34} + \sqrt{53})$ u.c.

8. $x = 1$ ou $x = 7$.

9. $2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 10\sqrt{2}$ u.c.

10. $2\sqrt{13}$ u.c.

11. $Q(5, 5)$

12. $P\left(\frac{11}{2}, 0\right)$

13. $(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ ou $(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$.

14. **a)** $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ **c)** $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$
b) $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ **d)** $(3, -1)$

15. 1

16. $\sqrt{74}$

17. $Q(1, 7)$

18. Resposta pessoal.

19. $A(-1, 0)$; $B(3, 4)$ e $C(7, -8)$.

20. **a)** $(-2, 0)$ **b)** 5

21. $\left(-9, \frac{1}{2}\right)$; $(-5, 2)$ e $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$.

22. **a)** $(2, -2\sqrt{3})$ **b)** $4\sqrt{3}$ cm²

23. **a)** Sim. **c)** Não.
b) Não. **d)** Não.

24. $m = 4$

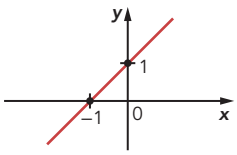
25. Qualquer (x, y) que satisfaça a relação $2x - y - 1 = 0$; por exemplo: $(0, -1)$.

26. $k \neq 12$

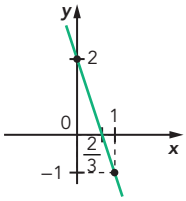
27. $\left(\frac{17}{5}, \frac{19}{5}\right)$

28. **a)** $-x + 2y - 4 = 0$ ou $x - 2y + 4 = 0$.
b) $-3x - y - 1 = 0$ ou $3x + y + 1 = 0$.
c) $-5x + \frac{1}{2}y - 4 = 0$ ou $10x - y + 8 = 0$.

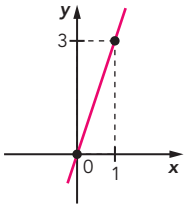
29. **a)**



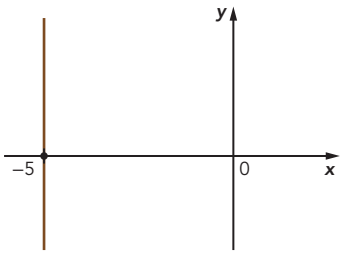
b)



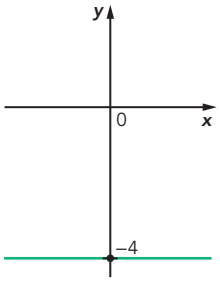
c)



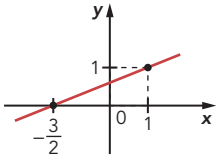
d)



e)



f)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

30. A, C e D.

31. **a)** $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$
b) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

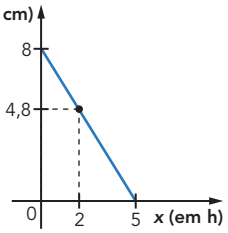
32. $r: y - 4 = 0$.
$s: x + 1 = 0$.
$t: 4x + y = 0$.

33. **a)** Empresa **I**: $6\,000x - y + 240\,000 = 0$.
Empresa **II**: $5\,000x - y + 400\,000 = 0$.
b) Empresa **I**: R$ 240.000,00.
Empresa **II**: R$ 400.000,00.
c) Empresa **I**: R$ 6.000,00.
Empresa **II**: R$ 5.000,00.
d) Empresa **I**: R$ 840.000,00.
Empresa **II**: R$ 900.000,00.
e) 160 km

34. **a)** t **b)** s **c)** r **d)** u

35. **a)** $y = 5x$ **c)** $5x - y = 0$
b) -9

36. **a)** $h = -1{,}6x + 8$
b) 22 h
c) **h (em cm)**



d) $1{,}6x + y - 8 = 0$, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

37. $p = 2$

38. **a)** $y = \sqrt{3}x - 3$
b) $y = -x\sqrt{3} + 2$
c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$
d) $y = -x + 1$

39. **a)** $y = 3x - 1$
b) $y = x + 3$
c) $y = -\frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$

40. **a)** $\frac{1}{2}$ **c)** -2
d) Não existe.
b) $-\frac{1}{3}$ **e)** 0

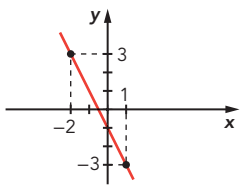
41. **a)** $m_r = 0{,}9$ **c)** 0,9 g/cm³
b) $m = 0{,}9 \cdot V$

42. **a)** $\frac{1}{2}$
b) $y = \frac{1}{2}x$ (reduzida) ou $x - 2y = 0$ (geral).

43. $\overleftrightarrow{AB}: y = -x\sqrt{3}$
$\overleftrightarrow{BC}: y = x\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$
$\overleftrightarrow{AC}: y = 0$

44. **a)** $y = x - 4$
b) $y = -x - 5$
c) $y = x\sqrt{3} + 3$
d) $y = -\frac{1}{3}$

45. **a)**



b) Coeficiente angular: -2.
Coeficiente linear: -1.
c) $-\frac{1}{2}$

46. $f(2) = 1$; $f(-1) = 10$.

47. $f(x) = -3x + 5$

48. **a)** R$ 153,00
b) 85
c) Azul: $3{,}2x - y = 0$;
Vermelha: $1{,}4x - y + 153 = 0$.
d) Vermelha: 1,4; azul: 3,2.

49. **a)** Paralelas distintas.
b) Concorrentes.
c) Coincidentes (ou paralelas coincidentes).
d) Paralelas distintas.

50. **a)** $k = -\frac{9}{2}$
b) $k \neq -\frac{9}{2}$
c) Não existe $k \in \mathbb{R}$.

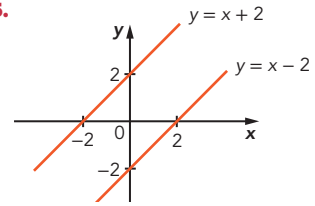
51. **a)** $3x - y + 1 = 0$ **c)** $y - 5 = 0$
b) $2x + 5y - 8 = 0$

52. Resposta pessoal.

53. $\frac{8 + \sqrt{34}}{2}$

54. $3x + 2y - 6 = 0$

55.
Banco de imagens/ Arquivo da editora



56. r e t.

57. **a)** $3x + 2y - 9 = 0$
b) Resposta pessoal.

58. **a)** $\left(-\frac{18}{13}, \frac{14}{13}\right)$ **b)** $\left(-\frac{62}{13}, \frac{80}{13}\right)$

59. $\overleftrightarrow{AD}: y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$; $\overleftrightarrow{BC}: y = -\frac{2x}{3} + 7$.

60. $m = -\frac{1}{2}$ e $n = -2$.

61. $6x + y + 3 = 0$

62. **a)** V **b)** V **c)** F **d)** F

Pense nisto (p. 230)

Analisando o plano cartesiano com a bissetriz dos quadrantes ímpares, é possível perceber que o triângulo retângulo formado é isósceles; logo, os catetos dele são congruentes. Assim, $x_P = y_P$.

Pense nisto (p. 232)

Sim, se os pontos pertencem a uma reta paralela ao eixo das abscissas, então as ordenadas deles são iguais, isto é, $\Delta y = 0$, e daí $d = \sqrt{(\Delta x)^2} = |x_1 - x_2|$. O módulo pode ser eliminado desde que a diferença seja feita entre a maior e a menor abscissa, nessa ordem. Para o caso em que a reta é paralela ao eixo das ordenadas, analogamente, temos que $\Delta x = 0$ e $d = |y_1 - y_2|$ e o módulo pode ser eliminado desde que se faça a diferença entre a maior e a menor ordenada, nessa ordem.

Pense nisto (p. 240)

Se a e b fossem nulos, ao mesmo tempo, teríamos: $a = 0$, $y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$ e $b = 0$, $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$. Daí Q e R seriam o mesmo ponto, o que contraria a hipótese de que Q e R são pontos distintos.

Pense nisto (p. 241)

$y = 0$

Pense nisto (p. 241)

$x = 0$

Pense nisto (p. 244)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 252)

As retas r e s são retas concorrentes.

Pense nisto (p. 252)

Porque a equação $2x - y + k = 0$ representa uma reta com declividade $m = 2$ para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

Pense nisto (p. 253)

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos e $CD = \frac{AB}{2}$.

Pense nisto (p. 254)

A equação da bissetriz dos quadrantes ímpares (b_{13}) é $y = x$ e a dos quadrantes pares (b_{24}) é $y = -x$. Seus coeficientes angulares são 1 e –1, e o produto entre eles é –1.

Interligando (p. 234)

1. Situações de salvamento cuja principal dificuldade seja encontrar a localização do indivíduo, como resgates por helicópteros em matas, enchentes, desastres ambientais, sequestros, desaparecimentos.

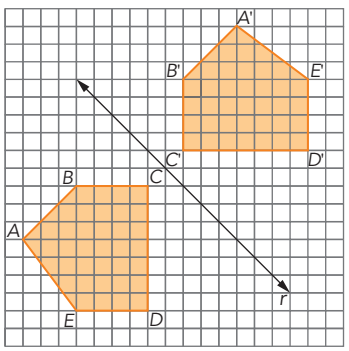
2. Os pontos turísticos são Cristo Redentor – Rio de Janeiro, Parque do Ibirapuera – São Paulo e Palácio do Planalto – Brasília-DF.

3. Resposta pessoal.

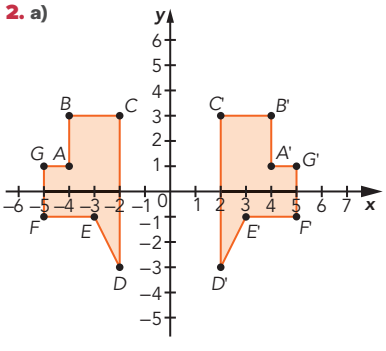
Capítulo 10

Atividades

1.
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



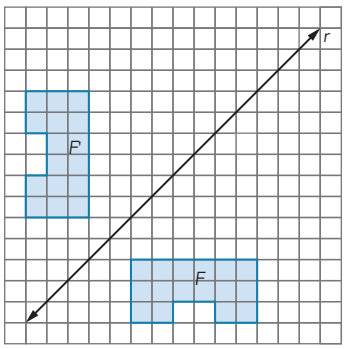
2. **a)**



b) $A'(4, 1)$; $B'(4, 3)$; $C'(2, 3)$; $D'(2, -3)$; $E'(3, -1)$; $F'(5, -1)$; $G'(5, 1)$.

c) Medida de perímetro de R e de R': $15 + \sqrt{5}$ u.c.; medida de área de R e de R': 11 u.a.

3.
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

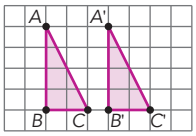


4. Alternativa **d**.

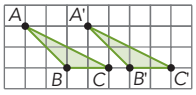
5. **a)** $B(3, -4)$ e $C(-1, -2)$.
b) 8 km
c) $2\sqrt{5}$ km

6. Ponto P.

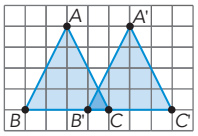
7. **a)**



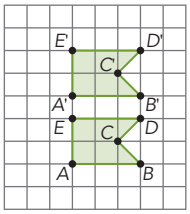
b)



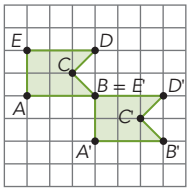
c)



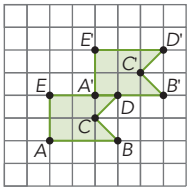
8. **a)**



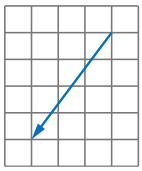
b)



c)

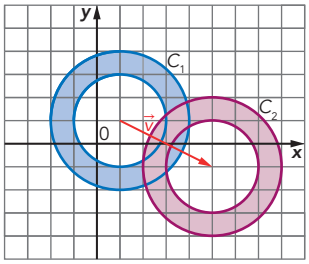


9.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

10.



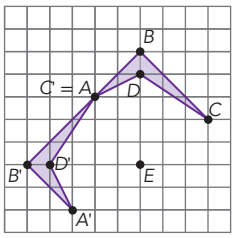
11. Alternativa **a**.

12. Alternativa **b**.

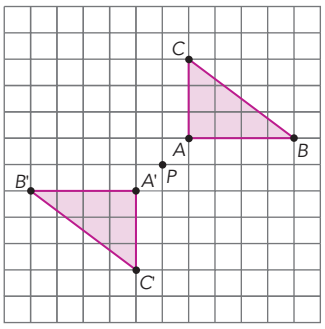
13. Alternativa **c**.

14. Resposta pessoal.

15.



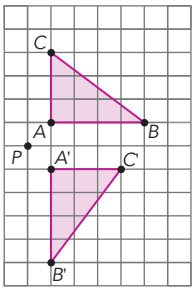
16. a) e **b)** A rotação de 180° com centro em *P* resulta na mesma região triangular *A'B'C'*, nos sentidos horário e anti-horário.



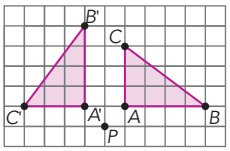
17. a) Quando realizamos uma rotação de 180°, obtemos o mesmo resultado independentemente do sentido.

b) As duas regiões triangulares são simétricas em relação ao ponto *P*, o que significa que a rotação de 180° com centro em *P*, no sentido horário ou anti-horário, é equivalente à reflexão por meio do ponto *P*.

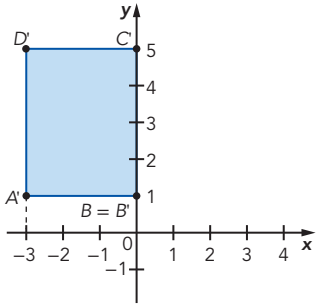
18. a)



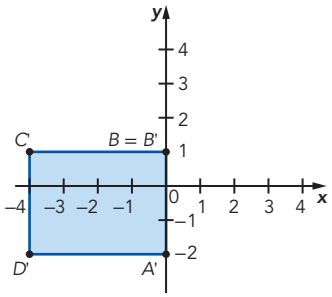
b)



19. a)



b)

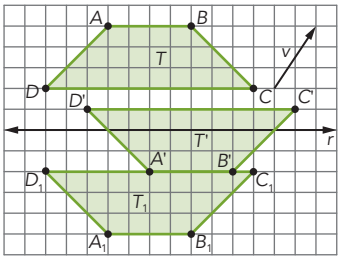


20. Alternativa **b**.

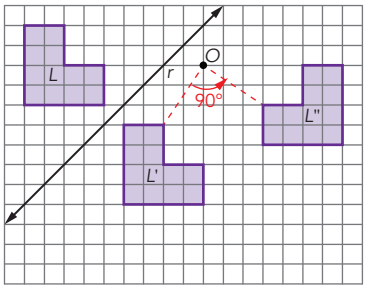
21. Alternativa **c**.

22. Resposta pessoal.

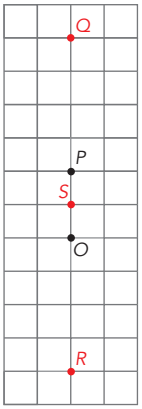
23.



24.

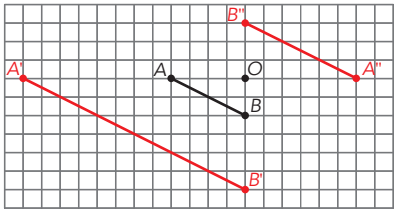


25.

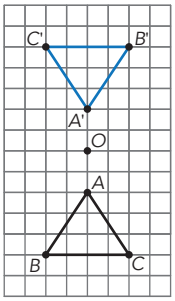


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

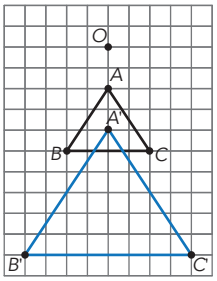
26.



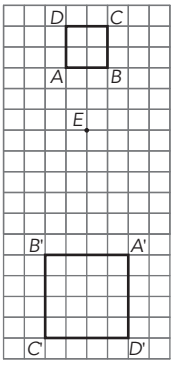
27. a)



b)



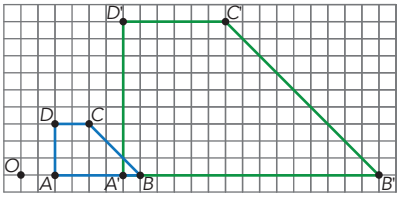
28.



29. a) −2 **b)** 2

30. Resposta pessoal.

31.



32. a) *A'*(6, 9), *B'*(24, 9), *C'*(18, 21) e *D'*(0, 21).

b) 3

33. Resposta pessoal.

34. Resposta pessoal.

35. a) Homotetia.

b) Na coluna **E**, linha **3**.

Pense nisto (p. 260)

Isometria tem origem grega: *ísos* significa "igual" e *métron* significa "medida". Logo, **isometria** significa "medida igual".

Pense nisto (p. 269)

Sim.

Pense nisto (p. 273)

Sim.

Pense nisto (p. 276)

Se $|r| = 1$, isto é, $r = 1$ ou $r = -1$, as medidas de distância não são alteradas pela multiplicação por r.

Pense nisto (p. 276)

Se $r = 1$, então $|\overline{OP'}| = |\overline{OP}|$; nesse caso, P' e P coincidem, isto é, $H(P) = P$.

Interligando (p. 282)

a) Sim; a razão de semelhança é 2.

b) Sim; centro O e razão 2.

c) Sim; a razão de semelhança é 2.

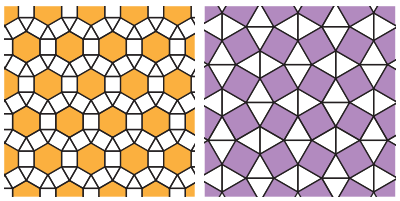
d) Sim; centro O e razão 2.

Capítulo 11

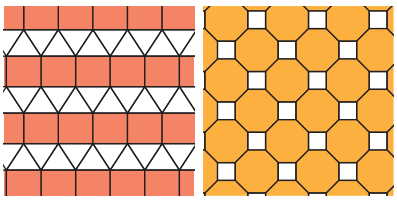
Atividades

1. a)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

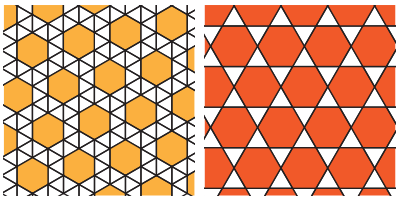


(3, 4, 6, 4) (3, 4, 3, 3, 4)

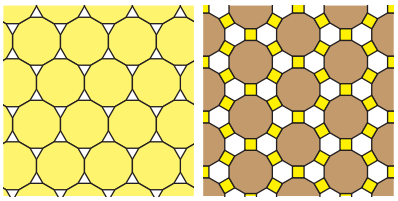


(3, 3, 3, 4, 4) (4, 8, 8)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



(3, 3, 3, 3, 6) (3, 6, 3, 6)



(3, 12, 12) (4, 6, 12)

b) 8 ladrilhamentos.

c) Sim. O pentágono regular.

d) Haverá sobreposição de polígonos.

e) Haverá "espaço" vazio entre dois polígonos.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

4. 60° e 120°.

5. Regular: calçada com piso formado por peças hexagonais e mural, com pastilhas quadradas; semirregular: nenhuma delas.

6. Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 285)

Sim.

Interligando (p. 286)

1. A medida de área.

2. Resposta pessoal.

3. A imagem-padrão (peixe) foi construída tendo como base um quadrado, que é um polígono que forma um mosaico regular. Na pavimentação, não há sobreposição das cópias da imagem-padrão nem espaços vazios entre elas.

Experimente (p. 288)

1. Resposta pessoal.

2. Não é possível formar o ladrilhamento.

Viralize! (p. 292)

1. Machado, fole de ferro, chocalho duplo e vara de transporte de peixe seco.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

Para fundamentar saberes (p. 294)

1. Alternativa **c**.

2. Alternativa **d**.

3. Alternativa **d**.

4. Alternativa **c**.

5. Alternativa **e**.

6. Alternativa **d**.

LISTA DE SIGLAS

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

Enem PPL: Exame Nacional do Ensino Médio – Pessoas Privadas de Liberdade

Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia (São Paulo)

FCMSCSP: Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo

FGV-RJ: Fundação Getúlio Vargas (Rio de Janeiro)

FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)

FMJ-SP: Faculdade de Medicina de Jundiaí (São Paulo)

Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)

Idam/IBFC: Instituto de Desenvolvimento Agropecuário e Florestal Sustentável do Estado do Amazonas/Instituto Brasileiro de Formação e Capacitação

Obmep: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Uece: Universidade Estadual do Ceará

Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Uesb-BA: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Uneb-BA: Universidade do Estado da Bahia

Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (São Paulo)

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)

UPE: Universidade de Pernambuco

UPF-RS: Universidade de Passo Fundo (Rio Grande do Sul)

Vunesp: Fundação para o Vestibular da Unesp

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

Para a concepção desta coleção, diversos livros, artigos científicos, documentos oficiais do governo, revistas científicas, dissertações e *sites* foram consultados de modo a trazer material atualizado e que visa dar suporte às aprendizagens previstas para o Ensino Médio. Conheça as principais referências bibliográficas deste Volume.

BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo padrões em mosaicos*. São Paulo: Atual, 1993.

Esse livro explora a arte de identificar e criar padrões geométricos, uma prática que fascina desde a Antiguidade. Além disso, foca nas pavimentações planas da Geometria euclidiana e oferece aplicações práticas para o ensino e a criação artística, que foram referência para a elaboração de atividades presentes neste Volume. Há também um capítulo dedicado aos estudos sobre mosaicos do artista holandês M. C. Escher.

BORBA, Marcelo de Carvalho *et al*. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Referência para o uso de tecnologias proposto nesta coleção, o livro apresenta uma visão da aplicação de tecnologias em Educação Matemática, exemplificando questões teóricas e propostas de atividades, bem como dissertando sobre o presente e o futuro da sala de aula de Matemática.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

Esse livro tornou-se referência de consulta sobre História da Matemática. Nele são apresentados e explicados aspectos da Matemática, considerando-se a ordem cronológica e o local dos acontecimentos, desde a origem do conceito de número até os desenvolvimentos matemáticos do século XX. No desenvolvimento dos capítulos, são apresentadas definições matemáticas importantes e as pessoas que trabalharam nelas. Esse livro também foi referência para a elaboração de textos e problemas históricos abordados nesta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://tedit.net/1qo53v. Acesso em: 4 set. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). A BNCC também estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam no decorrer de cada ano da escolaridade básica. Por isso, todos os volumes desta coleção foram desenvolvidos buscando atender a esses requisitos previstos na BNCC.

BRASIL. Ministério da Educação. *Computação*: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://tedit.net/93oura. Acesso em: 5 set. 2024.

Em 2022, a BNCC foi atualizada com diretrizes específicas para incorporar o ensino de computação no currículo escolar brasileiro. O objetivo com esse documento é promover o desenvolvimento de competências relacionadas à cultura digital e ao pensamento computacional entre os estudantes. As diretrizes estabelecidas foram fundamentais para a criação de seções e atividades incluídas nesta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica. Brasília*, DF: MEC, 2013. Disponível em: https://tedit.net/enrd4x. Acesso em: 5 set. 2024.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica (DCNs) constituem um conjunto de normas que estabelecem os princípios, fundamentos e procedimentos a serem seguidos na Educação Básica. O objetivo dessas diretrizes é orientar e apoiar escolas e redes de ensino na elaboração de seus projetos pedagógicos.

Além de servir de guia para o desenvolvimento pedagógico, as DCNs também fornecem importantes subsídios para a criação de material didático. Elas foram consultadas e consideradas durante a elaboração deste Volume, garantindo que o conteúdo esteja alinhado com as melhores práticas educacionais e as exigências curriculares nacionais.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a. Disponível em: https://tedit.net/zj1xba. Acesso em: 5 set. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019b. Disponível em: https://tedit.net/3pnyp2. Acesso em: 5 set. 2024.

Conforme a BNCC, os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) devem ser integrados aos currículos e às propostas pedagógicas de maneira transversal e integradora. Após a homologação da BNCC, o Ministério da Educação elaborou 2 documentos para esclarecer a inserção desses temas, que serviram de referência para a concepção desta coleção.

CLUBES de Matemática da Obmep. *Sala de estudo*: diagrama de Venn. Disponível em: https://tedit.net/gyp9xv. Acesso em: 1º set. 2024.

Nesse artigo há um pouco da bibliografia do matemático inglês John Venn (1834-1923), apresentação do diagrama de Venn com exemplos extraídos de concursos públicos e a importância do diagrama para visualizar e entender propriedades dos conjuntos, bem como atividades de raciocínio lógico.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

Além da narrativa histórica, que abarca a História da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos, o livro adota recursos pedagógicos, por exemplo, exercícios ao fim de cada capítulo. Alguns capítulos são introduzidos por panoramas culturais da época e, como um todo, o livro foi fonte de consulta para a elaboração de textos históricos para esta coleção.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de Física 1*: Mecânica. 9. ed. São Paulo: LTC, 2012. v. 1.
O capítulo sobre medição desse livro aborda os conceitos de grandeza, medida e unidade de medida, entre outros, cujas explicações serviram de referência para este Volume.

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. *Matemática financeira*. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.
Esse livro aborda os temas da Matemática financeira estudados neste Volume e traz uma metodologia inovadora de cálculo das cadernetas de poupança e do tesouro direto.

HOJI, Masakazu. *Matemática financeira*: didática, objetiva e prática. São Paulo: Atlas, 2016.
Com linguagem simples e objetiva, esse livro apresenta teoria e resolução de problemas envolvendo juro simples e juro composto, incluindo cálculos de amortização de financiamentos e o uso de planilhas eletrônicas. Temas e atividades deste Volume foram elaborados com referência a esse livro.

LIMA, Elon Lages. *Coordenadas no plano*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).
O livro apresenta uma introdução ao estudo da Geometria por meio de um sistema de coordenadas. Partindo de propriedades e fatos básicos da Geometria plana, interpreta-os algebricamente desenvolvendo tópicos da Geometria analítica. Também explica o uso de vetores no estudo das transformações isométricas e das transformações homotéticas no plano, que são conteúdos presentes neste Volume.

LIMA, Elon Lages. *Isometrias*. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática)
Com clareza e rigor, o autor explora nesse livro os conceitos fundamentais das transformações geométricas que preservam distâncias, isto é, das transformações isométricas. São abordadas as rotações, as translações e as reflexões no plano e no espaço, além da prova de que as isometrias mais gerais possíveis se reduzem essencialmente a essas.

MORGADO, Augusto Cesar; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 2020. (Coleção do Professor de Matemática).
Nesse livro, os autores propõem o desenvolvimento de problemas de contagem utilizando a criatividade e o raciocínio, sem recorrer, necessariamente, a fórmulas. O livro trata do princípio multiplicativo, das combinações e permutações, dos espaços amostrais e do cálculo da probabilidade condicional, entre outros assuntos.

MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. *Progressões e Matemática financeira*. Rio de Janeiro: SBM, 2022. (Coleção do Professor de Matemática).
Com diversos exemplos e atividades propostas, o livro aborda as progressões aritméticas e as progressões geométricas e relaciona a Matemática financeira às progressões geométricas enfatizando o conceito de taxa de crescimento. Também apresenta um estudo detalhado de diversos tipos de financiamento.

NOVAES, Regina. Os jovens de hoje: contextos, diferenças e trajetórias. *In*: ALMEIDA, Maria Isabel Mendes de; EUGENIO, Fernanda (org.). *Culturas jovens*: novos mapas do afeto. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2006.
Nessa obra, retrata-se a multiplicidade dos jovens sem nenhum viés preconceituoso, o que também é um preceito defendido por esta coleção. O livro reúne artigos de cientistas sociais que se dedicam a entender os problemas enfrentados atualmente pelas juventudes urbanas no Brasil.

PÓLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
Nesse livro, o autor analisa métodos criativos de resolução de problemas, revela as 4 etapas básicas da resolução de qualquer problema e sugere maneiras de trabalhar os problemas em sala de aula. Foi utilizado também como fonte de consulta para estabelecer as metodologias relacionadas à resolução de problemas nesta coleção.

RECURSOS educacionais multimídia para a matemática do Ensino Médio. Disponível em: https://tedit.net/57kjdf. Acesso em: 4 set. 2024.
Portal com diversos recursos educacionais de Matemática para o Ensino Médio, como programas audiovisuais, atividades práticas e *softwares* que abordam os conteúdos de Matemática do Ensino Básico. Os recursos audiovisuais apresentam os conceitos matemáticos em situações do cotidiano, fazendo com que o espectador conheça, de maneira simples, sua aplicação.

ROSA, Milton; OREY, Daniel C. *Influências etnomatemáticas em salas de aula*: caminhando para a ação pedagógica. 1. ed. Curitiba: Appris Editora, 2017.
O livro busca integrar os conteúdos matemáticos com as abordagens pedagógicas utilizadas no ensino e na aprendizagem da Matemática, ressaltando as influências e a presença da Etnomatemática em sala de aula, tal como apresentado em seções e atividades desta coleção. O livro reconhece que a aquisição do conhecimento matemático pode ser influenciada pelas considerações culturais dos indivíduos que fazem parte da comunidade escolar.

WING, Jeannette. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia (RBECT)*, Ponta Grossa (Paraná), v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://tedit.net/gzsm98. Acesso em: 5 set. 2024.
O pensamento computacional é uma habilidade fundamental para todos, pois envolve, com destaque, a resolução de problemas e a identificação de padrões, que são processos inerentes à atividade matemática e a situações cotidianas. Na publicação original, traduzida para o português e consultada para a elaboração desta coleção, a autora disserta sobre os estudos relacionados ao pensamento computacional.

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIOS

Podcast 1 – O número de Euler

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre o número de Euler.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Esse nome é familiar para você?

Talvez não, mas, como você verá adiante, ele tem uma grande importância no desenvolvimento da Matemática e da Engenharia, além de ser essencial para diversos contextos econômicos, entre outras áreas da sociedade.

Fique atento que logo, logo você entenderá o porquê.

Você já estudou o conceito de juros simples e de juros compostos, lembra? [vírgula sonora]

Portanto, deve saber que os juros compostos crescem muito mais rapidamente do que os juros simples e que, por isso, precisamos ficar atentos a cobranças que envolvam juros compostos, como as de cartões de crédito, por exemplo. Sendo assim, é evidente que os bancos e outras instituições financeiras preferem cobrar juros compostos a juros simples, uma vez que isso aumenta o lucro deles.

Mas será que existe um modo de essas instituições aumentarem ainda mais os rendimentos com os empréstimos? É o que veremos a seguir.

[vinheta de transição]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

Imagine, inicialmente, que um banco ofereceu um empréstimo de mil reais a um cliente que só poderia pagar por esse empréstimo após um ano e cobrou desse cliente cem por cento de juros ao ano. Ou seja, ao final de um ano, o cliente pagaria a esse banco o dobro do que pegou emprestado, que seriam dois mil reais.

O banco, então, oferece outra proposta a esse cliente: em vez de cem por cento ao ano, incide no empréstimo a taxa de cinquenta por cento de juros compostos a cada semestre, durante o período de um ano do empréstimo. Pode parecer que essa proposta seja análoga à inicial, não é? Já que cinquenta por cento é metade de cem por cento. Mas, na prática, como o cliente só poderia pagar após um ano, essa taxa de juros semestrais incidiria sobre o empréstimo dele duas vezes, ao término do primeiro semestre e ao término do segundo, quando ele pagaria o montante. Ou seja, ao final, o valor desse montante seria de dois mil, duzentos e cinquenta reais após um ano.

Interessante para o banco, claro. [alerta de vitória] Já para o cliente, não muito. [alerta de derrota]

Agora, considere o cenário no qual o banco resolve explorar ainda mais essa característica dos juros compostos, diminuindo o período em que os juros são aplicados a todo o montante, reduzindo também proporcionalmente a taxa de juros, como ele fez na segunda proposta. Digamos então que o banco sugira vinte e cinco por cento de juros cobrados quatro vezes ao ano, a cada três meses.

Nesse caso, ao final de um ano, o cliente precisaria pagar quase dois mil, quatrocentos e cinquenta reais.

Caso o banco continuasse dividindo essa taxa de juros e o período de cálculo infinitas vezes, será que o valor devido também cresceria até valores astronômicos?

Apesar de parecer que sim, a resposta é não! [vírgula sonora]

Quanto mais o banco continuasse com esse procedimento, mais cresceria o valor devido ao final de um ano, porém ele nunca passaria de dois mil, setecentos e vinte reais.

Talvez você esteja se perguntando: como assim?

Isso acontece porque a taxa de juros que multiplicaria o capital inicial invariavelmente acabaria convergindo para um número irracional cujo valor é aproximadamente dois vírgula setecentos e dezoito. E esse número é que ficou conhecido como número de Euler, [vírgula sonora] conforme comentamos no início deste *podcast*.

O número de Euler é uma homenagem ao matemático que o descobriu, o suíço Leonhard Euler, que, desde essa descoberta, no século dezoito, ficou muito famoso por demonstrar diversas propriedades que facilitam a realização de cálculos variados.

O número de Euler é amplamente utilizado não apenas na área de Finanças e Economia, mas também na Física, na Engenharia, na Astronomia e na Biologia. Suas aplicações são utilizadas, inclusive, para validar teorias que buscam comprovar a existência de uma harmonia entre a Matemática e a natureza.

Interessante, não é?

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

O número de Euler pode até não ser tão conhecido como o número pi, por exemplo, mas também é extremamente importante. [vírgula sonora]

Gostou de aprender mais esta curiosidade matemática?

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Podcast 2 – Análise combinatória

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre Análise Combinatória.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Vivemos num mundo repleto de senhas.

Senhas de *login* para redes sociais, senhas de acesso a aparelhos e programas, senhas de bancos, e daí em diante.

Como sempre, o conhecimento matemático pode ter grande importância para entendermos esse contexto social e, então, lidarmos com ele.

Ao longo de anos de estudo, você já conheceu vários tópicos relacionados a Estatística e a Probabilidade. Também já estudou o princípio multiplicativo para calcular o número de possibilidades de diversos eventos. Mas será que você sabe aplicar esses conceitos, por exemplo, em segurança digital para proteger suas contas e senhas?

[vinheta de transição]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

A cada dia, as técnicas para forçar a quebra de senhas se tornam eficazes, e isso deixa nossas informações vulneráveis a ações mal-intencionadas. Pensando nisso, a geração de senhas e a gestão de acesso de usuários a serviços digitais estão cada vez mais exigentes, sendo sempre recomendada a criação de senhas fortes. Mas o que define uma senha forte?

Cada caractere [digitação de teclado] é representado por uma sequência de impulsos elétricos entendida apenas pelo computador. Ao todo, são 26 caracteres maiúsculos para as letras de A a Z, [efeito sonoro digital] 26 caracteres minúsculos, [efeito sonoro digital] 10 caracteres para os algarismos de 0 a 9, [efeito sonoro digital] além de mais 33 caracteres especiais, que incluem sinais gráficos, parênteses, pontuações, entre outros. [efeito sonoro digital]

Vamos supor que, para acessar determinada rede social, você utilize uma combinação de 4 caracteres numéricos de 0 a 9. Se aplicarmos o princípio multiplicativo, chegaremos a 10 mil possibilidades de senhas. Em um ataque de força bruta, um potencial invasor levaria poucas horas para descobrir sua senha. Agora, se você utilizasse caracteres alfanuméricos, letras maiúsculas e letras minúsculas, em conjunto com caracteres especiais, em vez de usar apenas os caracteres numéricos, as possibilidades de senhas saltariam para aproximadamente 82 milhões, o que tornaria uma invasão à conta 8 mil vezes mais difícil.

Ou seja, quanto maior e mais forte for sua senha, mais seguras estarão as suas informações.

A utilização de senhas fracas pode levar a várias consequências graves: um invasor pode usar suas informações pessoais para cometer fraudes ou roubar sua identidade. Contas bancárias e cartões de crédito podem ser acessados, resultando em perdas financeiras significativas. Informações pessoais ou profissionais podem ser expostas, causando danos à sua reputação. Informações confidenciais, como dados de saúde ou informações sigilosas de empresas, podem ser comprometidas.

Para garantir a segurança das suas informações, é essencial seguir algumas boas práticas ao criar senhas: utilize senhas com no mínimo 12 caracteres, [vírgula sonora] não use informações facilmente associáveis a você, como datas de nascimento, nomes de familiares ou sequências numéricas óbvias. [vírgula sonora]

Nunca utilize a mesma senha em diferentes contas, pois, se a senha de uma conta for descoberta, todas as contas que utilizam a mesma senha estarão em risco. [vírgula sonora] Altere suas senhas periodicamente. Isso reduz a chance de um invasor ter acesso prolongado a uma conta, caso consiga descobrir a senha. [vírgula sonora]

Para facilitar o gerenciamento de senhas complexas, considere utilizar ferramentas e técnicas específicas, como gerar e armazenar senhas complexas em determinados aplicativos seguros e específicos para esse propósito. Também é recomendável adicionar uma camada extra de segurança, utilizando a autenticação de dois fatores. Utilize a autenticação biométrica sempre que possível, como a impressão digital ou o reconhecimento facial. Esses métodos são mais difíceis de ser comprometidos em comparação com senhas tradicionais.

Senhas fortes são a primeira linha de defesa contra invasões e roubos de dados e, com certeza, o esforço de memorizar uma senha mais complexa será muito menor do que o de arcar com o prejuízo se algo der errado. Pense nisso e adote práticas seguras para a criação e o gerenciamento de senhas. A segurança das suas informações depende de você.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Você percebeu como conceitos matemáticos relacionados à Análise Combinatória são interessantíssimos, além de muito úteis na busca de soluções para diversas situações do nosso dia a dia?

Quanto mais você dominar esses conhecimentos, mais fácil vai reconhecer formas de colocá-los em prática corretamente.

Portanto, aproveite para levar esse estudo adiante.

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*!

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Podcast 3 – Probabilidade: testes de múltipla escolha

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre o conceito de probabilidade aplicado em testes de múltipla escolha.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Quais são as chances de se atingir a nota máxima "chutando" todas as questões numa prova de múltipla escolha?

Em algum momento da sua vida, você já pensou em recorrer a esse tipo de técnica? Se é que podemos chamar isso de técnica, claro.

Eu espero que não, até porque, como veremos adiante, é sempre melhor estudar do que contar com a sorte.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

O estudo sobre a medida de chance de um evento ocorrer é chamado de Teoria das Probabilidades. Ao realizarmos um experimento sobre eventos aleatórios, como o lançamento de uma moeda em um desafio de "cara" ou "coroa", [moeda batendo no chão] calculamos a razão entre a quantidade de resultados favoráveis e a quantidade de resultados possíveis. No caso da moeda, se quisermos saber quais são as chances de tirarmos "cara" ao lançarmos uma moeda não viciada, a quantidade de resultados favoráveis para nosso experimento será um, pois apenas um resultado satisfaz nossa análise, e a quantidade de resultados possíveis será dois, já que a moeda tem duas faces: "cara" e "coroa". Essa razão, ou seja, a probabilidade de se obter o resultado "cara", no desafio, equivale a cinquenta por cento.

[vinheta de transição]

Esse conceito pode ser aplicado para calcular a probabilidade de se acertar uma questão de múltipla escolha no "chute". Para uma questão que apresente cinco alternativas – A, B, C, D e E – as chances de acertar a resposta correta, selecionando uma das alternativas aleatoriamente, se dá pelo resultado da razão de um resultado favorável sobre cinco resultados possíveis, ou seja, um sobre cinco ou vinte por cento. [vírgula sonora]

Agora, vamos supor que a prova tenha dez questões e, para cada questão, existam cinco alternativas de resposta, das quais apenas uma seja correta. Já sabemos que a chance de acertar cada questão individualmente é de um sobre cinco, o que corresponde a vinte por cento. Mas, para tirar a nota máxima da prova, você precisa ter acertado todas as dez questões. Isso quer dizer: vinte por cento vezes vinte por cento vezes vinte por cento, e esse cálculo repetido dez vezes, ou seja, vinte por cento elevado à décima potência. Sendo assim, a resposta para a pergunta é um número muito pequeno: aproximadamente zero vírgula zero zero zero zero um por cento. [vírgula sonora]

Nessa lógica, é esperado que a pessoa consiga essa proeza apenas uma vez a cada dez milhões de vezes!

Dito isso, acho que já deu para entender que, nos estudos, não vale muito a pena contar com a sorte, não é mesmo?

Mas a Teoria das Probabilidades vai muito além de jogos e provas. Ela é uma ferramenta poderosa usada em diversas áreas do conhecimento e da vida cotidiana. Vamos explorar algumas dessas aplicações?

Os cassinos e loterias são exemplos clássicos de aplicação da Teoria das Probabilidades. Os jogos de azar são projetados com base em cálculos probabilísticos para garantir que a casa tenha uma vantagem a longo prazo.

Na Medicina, a probabilidade é usada para avaliar riscos e tomar decisões informadas. Por exemplo, ao realizar exames de diagnóstico, os médicos utilizam probabilidades para interpretar os resultados. Se um teste de detecção de uma doença tem 95% de precisão, isso significa que há uma alta probabilidade de o teste identificar corretamente a presença ou ausência da doença.

No mundo das finanças, a probabilidade é essencial para a análise de riscos e investimentos. Os analistas financeiros utilizam modelos probabilísticos para prever o comportamento do mercado de ações, avaliar a viabilidade de investimentos e gerenciar carteiras de ativos. Isso ajuda a minimizar riscos e maximizar retornos.

A previsão do tempo é outro campo em que a probabilidade desempenha um papel crucial. Os meteorologistas usam modelos matemáticos baseados em dados históricos e condições atmosféricas atuais para calcular a probabilidade de eventos climáticos, como chuva, tempestades e nevascas. Isso ajuda a preparar a população e a tomar medidas preventivas.

[vinheta de transição]

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

E, para que sua probabilidade de acertos em provas matemáticas seja sempre a mais alta possível, continue estudando.

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final desse *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Manual do Professor

Matemática
e suas Tecnologias

Matemática

Apresentação

Caro professor,

Pautado no desenvolvimento de habilidades e competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e na organização dos componentes curriculares em quatro áreas do conhecimento, o Novo Ensino Médio propõe a redistribuição da carga horária do segmento e pretende flexibilizar a oferta de ensino, com a possibilidade de aprofundamento em itinerários formativos, incentivando o protagonismo e a autonomia dos estudantes.

Esta coleção tem o objetivo de servir de suporte para suas aulas de Matemática. Neste Manual do Professor, você encontra informações que o auxiliam no trabalho com as propostas didáticas da coleção durante o ano letivo.

Acreditamos que o ensino de Matemática é fundamental para a formação de cidadãos críticos e conscientes de seu papel na sociedade, uma vez que possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia e das habilidades de interpretação, argumentação e análise em diversas situações cotidianas. Além disso, propicia aos estudantes fazer conjecturas, tomar decisões e compreender melhor a realidade na qual estão inseridos, tornando-os aptos a nela intervir quando necessário.

Neste cenário, concebemos esta coleção contemplando os requisitos da BNCC em situações contextualizadas e que consideram a interação da Matemática com outras áreas do conhecimento e com os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs).

Além dos pressupostos metodológicos da coleção, apresentamos neste Manual orientações específicas que potencializarão o desempenho docente em sala de aula.

Esperamos que todos esses elementos contribuam com sua prática docente e sejam o ponto de partida para a construção de um processo de ensino e aprendizagem significativo.

Os autores

Sumário

Orientações gerais 316

1. O Novo Ensino Médio 316
1.1 O contexto legislativo 316
1.2 As principais mudanças 317

2. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) 317
2.1 As competências e as habilidades da BNCC de Ensino Médio 318
2.2 As interdisciplinaridades, os Temas Contemporâneos Transversais e os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável 319

3. A educação integral e a sociedade contemporânea 320
3.1 O estudante protagonista da aprendizagem 321
3.2 Algumas reflexões sobre a prática docente 321
3.2.1 O trabalho individual e em grupos e possíveis formas de organização das turmas 322
3.3 A educação digital 322
3.3.1 O pensamento computacional 323
3.4 As culturas juvenis e os diferentes perfis de estudantes 323
3.5 A Cultura de Paz em sala de aula 324
3.6 As capacidades de argumentação e de leitura 324
3.7 O pluralismo de ideias e a produção de análises críticas, criativas e propositivas 325
3.8 A resolução e a elaboração de problemas 325
3.9 A investigação científica e os raciocínios lógico-matemáticos 325
3.10 A História da Matemática e a Etnomatemática 326
3.11 Recursos apoiados nas tecnologias digitais 327

4. Por uma educação inclusiva 328

5. As avaliações 328
5.1 O planejamento das avaliações e os tipos de avaliação 329
5.1.1 Avaliação diagnóstica 329
5.1.2 Avaliação formativa 329
5.1.3 Avaliação comparativa 329
5.1.4 Avaliação ipsativa 329
5.1.5 Avaliação somativa 329
5.2 Trabalhando o Enem em sala de aula: estratégias para melhorar o desempenho dos estudantes 330

6. A coleção 330
6.1 A abordagem teórico-metodológica e os pressupostos da coleção 330
6.2 A estrutura da coleção 330
6.3 Sugestões de cronogramas para a coleção 331
6.4 Os Objetos Educacionais Digitais da coleção 335

7. Referências complementares para aprofundamento 335
7.1 Livros para aprofundamento e formação continuada 335
7.2 História da Matemática 336
7.3 Ensino e aprendizagem em Matemática e Educação Matemática 336
7.4 Avaliação 337
7.5 Recursos educacionais digitais 337
7.6 Sugestões de revistas 338
7.7 Sugestões de *sites* 338
7.8 Questões curiosas de Matemática, jogos e desafios de raciocínio quantitativo 338
7.9 Filmes sobre Matemática e personalidades da área 338

Orientações específicas 339

Introdução ao Volume 3 339
Unidade 1 339
Unidade 2 344
Unidade 3 347
Unidade 4 351
Unidade 5 355
Resoluções 359

Referências bibliográficas comentadas 398

ORIENTAÇÕES GERAIS

1. O novo Ensino Médio

As discussões sobre um novo molde para esse segmento, mais atrativo e adequado à realidade, são antigas. O Novo Ensino Médio foi estabelecido pela Lei n. 13.415/2017, entretanto, sua origem remonta ao Projeto de Lei n. 6.840, de 2013, em paralelo a um movimento não governamental (Movimento pela Base) voltado para a criação e implementação de uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A demanda por um novo modelo vinha, portanto, de variados segmentos ligados à educação, da sociedade e do governo, principalmente buscando adequar o ensino às diversas mudanças (principalmente sociais e tecnológicas) ocorridas no século XXI.

Moehlecke (2012) discorre sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), aprovadas em 2011, dizendo que elas já apontavam para um modelo com uma grade curricular mais atrativa e flexível, capaz de atrair os estudantes e combater a repetência e a evasão. Para isso, a ideia é uma estrutura curricular articulada a uma base conceitual unificada, acrescida de uma parte diversificada, capaz de atender à multiplicidade de interesses dos jovens. Essas discussões envolvem uma série de fatores e desafios, que buscam conciliar a Lei de Diretrizes com as Bases da Educação Nacional (LDB, Lei n. 9.394/1996), a criação e implantação da Base Nacional Comum Curricular, as matrizes do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), a atualização da matriz de avaliação do Novo Exame Nacional do Ensino Médio (novo Enem), as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e as diversas realidades regionais do país.

1.1 O contexto legislativo

A primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, aprovada no Brasil em 1961, regularizou os Conselhos Estaduais e o Conselho Federal de Educação, deu autonomia aos estados e descentralizou a educação, introduzindo o ensino obrigatório e sem menção direta ao que atualmente entendemos como Ensino Médio. Em 1971, na segunda LDB, houve a definição de ensino obrigatório dos 7 aos 14 anos, com um núcleo comum a ser partilhado pelos 1º e 2º graus de ensino.

A Constituição de 1988 trouxe uma série de princípios fundamentais para guiar a educação no Brasil, tendo o Estado a obrigação de garanti-los, e, após sua promulgação, a LDB de 1971 foi considerada ultrapassada. Entretanto, apenas em 1996 foi publicada uma nova LDB, tornando-se um marco histórico e legislativo, pois com ela uma série de questões curriculares foram estabelecidas tanto para a Educação Básica – como o próprio Ensino Médio – quanto para o Ensino Superior.

Depois, em 2001, a promulgação do Plano Nacional de Educação (Lei n. 10.172/2001) estabeleceu metas para um período de 10 anos. Uma dessas metas é a garantia de acesso ao Ensino Médio a todos os estudantes que concluam o Ensino Fundamental em idade regular. Posteriormente, em 2007, foi iniciado o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação (Fundeb), sendo também um importante marco no desenvolvimento do Ensino Básico no país.

Além disso, a LDB proporcionou a criação das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), que servem como orientação para a elaboração de currículos com uma série de princípios para guiar e definir as finalidades do Ensino Médio.

Em 2017, estabeleceu-se e publicou-se a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento norteador dos currículos na Educação Básica e fornece subsídios para que os sistemas educacionais públicos e particulares estejam alinhados às diretrizes curriculares no que se refere a conhecimentos essenciais e competências e habilidades a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica. Esse documento indica:

- as **competências gerais** que os estudantes devem desenvolver em todas as áreas do conhecimento;
- as **competências específicas** de cada área de conhecimento e dos respectivos componentes curriculares (as disciplinas);
- os conteúdos mínimos que os estudantes devem aprender estabelecidos por **objetos de conhecimento** e **habilidades** a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica.

Assim, a BNCC passa a estabelecer a progressão e o sequenciamento dos conteúdos e habilidades mínimos de cada área do conhecimento e componente curricular para todos os anos da Educação Básica.

Vale destacar que a BNCC não define um currículo fechado: ela estabelece conteúdos mínimos que devem ser abordados, cabendo às Secretarias de Educação e às escolas a responsabilidade de elaborar currículos e projetos pedagógicos que atendam às necessidades locais e regionais, utilizando a BNCC como referência.

Também em 2017, foi instituído pela Lei n. 13.415/2017 o modelo do Novo Ensino Médio, que seria implementado de maneira escalonada entre 2022 e 2024. Esse modelo propôs uma reformulação da etapa final da Educação Básica, com maior flexibilidade e personalização da aprendizagem por meio de itinerários formativos específicos. A lei previa que as aprendizagens definidas na BNCC do Ensino Médio seriam organizadas por áreas do conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas), tendo uma complementação a partir de 5 itinerários formativos, que possibilitariam aprimoramento dentro de uma das áreas do conhecimento ou do ensino técnico profissionalizante.

De acordo com a própria BNCC:

> a dinâmica social contemporânea nacional e internacional, marcada especialmente pelas rápidas transformações decorrentes do desenvolvimento tecnológico, impõe desafios ao Ensino Médio. Para atender às necessidades de formação geral, indispensáveis ao exercício da cidadania e à inserção no mundo do trabalho, e responder à diversidade de expectativas dos jovens quanto à sua formação, a escola que acolhe as juventudes tem de estar comprometida com a educação integral dos estudantes e com a construção de seu projeto de vida (Brasil, 2018, p. 464).

Essa mudança estrutural foi motivada por uma modernização no currículo, resultante do entendimento de que a sociedade passou por diversas mudanças estruturais nos últimos anos, principalmente no que diz respeito ao uso cada vez maior das tecnologias, de modo que é fundamental um currículo que dialogue com os interesses e as necessidades dos estudantes, proporcionando-lhes maior poder de escolha e motivação. Assim,

é possível conectá-los mais facilmente ao mercado de trabalho e à vida acadêmica, possibilitando também o desenvolvimento de habilidades socioemocionais e reflexões sobre seu futuro ao construírem seus projetos de vida.

O modelo de Ensino Médio iniciado em 2022 sofreu diversas críticas de vários setores ligados à educação. Debates envolvendo infraestrutura de escolas públicas, oferecimento de itinerários formativos, capacitação docente, diminuição da carga horária de disciplinas básicas, entre outros, fizeram com que o Governo Federal lançasse, em 2023, o Projeto de Lei n. 5.230 para reestruturação do Novo Ensino Médio, que foi aprovado em agosto de 2024 como a Lei n. 14.945/2024, a ser implementada a partir de 2025. As principais mudanças estão na distribuição da carga horária e na ampliação dos conteúdos da formação básica curricular.

1.2 As principais mudanças

A seguir, apresentamos as principais mudanças do Novo Ensino Médio entre as propostas de 2017 e 2024.

- **Carga horária ampliada**: Na Lei n. 13.415/2017, a proposta era de uma carga de 3 000 horas, considerando os 3 anos da etapa do Ensino Médio, com 1800 horas de formação básica e 1200 horas de itinerários formativos. Na Lei n. 14.945/2024, as 3 000 horas foram mantidas, mas foi estabelecida a carga horária de 2 400 horas para componentes curriculares obrigatórios e 600 horas para itinerários formativos em áreas do conhecimento optativas. Essa é uma das principais mudanças e visa atender à necessidade de maior carga horária para o desenvolvimento de projetos em escolas de tempo integral e à criação de espaço para o desenvolvimento dos itinerários formativos.
- **Componentes curriculares obrigatórios**: Em todos os anos, os estudantes cursarão os seguintes componentes curriculares: Língua Portuguesa, Matemática, Biologia, Física e Química, História, Geografia, Filosofia e Sociologia, Língua Inglesa, Arte e Educação Física, sendo Língua Espanhola facultativa.
- **Itinerários formativos**: Segundo o Ministério da Educação:

  > os itinerários formativos são o conjunto de disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo, entre outras situações de trabalho, que os estudantes poderão escolher no Ensino Médio. Os itinerários formativos podem se aprofundar nos conhecimentos de uma área do conhecimento (Matemática e suas Tecnologias, Linguagens e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e da formação técnica e profissional (FTP) ou mesmo nos conhecimentos de duas ou mais áreas e da FTP. As redes de ensino terão autonomia para definir quais itinerários formativos irão ofertar, considerando um processo que envolva a participação de toda a comunidade escolar.
  >
  > BRASIL. Ministério da Educação. *Novo Ensino Médio*: perguntas e respostas. Disponível em: https://tedit.net/82fe92. Acesso em: 4 set. 2024.

  As escolas devem oferecer diferentes possibilidades de itinerários e dialogar abertamente com os estudantes para que eles possam escolher, de modo consciente, os itinerários que mais lhes interessam.
- **Ensino Técnico**: Uma opção de escolha do estudante, com previsão de 2100 horas para formação básica e 900 horas relacionadas ao ensino profissionalizante, sendo no máximo 1200 horas para cursos técnicos que exigem mais carga horária, ocupando parte das horas de formação geral básica.
- **Ensino a distância e noturno**: A Lei estabelece que a carga horária da formação geral dos estudantes deve ser oferecida presencialmente. O texto obriga os estados a manterem, em todas as cidades, ao menos uma escola da rede pública com Ensino Médio no período noturno, se houver demanda comprovada nesse turno.
- **Escola de tempo integral**: Uma das bandeiras do Novo Ensino Médio é a Política de Escolas de Tempo Integral. Embora nem todas as escolas tenham que, obrigatoriamente, passar para a modalidade de tempo integral, a lei do Novo Ensino Médio incentiva que o número de escolas nessa modalidade seja progressivamente ampliado. Isso já vinha sendo proposto pelo Plano Nacional de Educação (PNE), estabelecido em 2014. O PNE tem como meta "6: oferecer educação em tempo integral em, no mínimo, 50% (cinquenta por cento) das escolas públicas, de forma a atender, pelo menos, 25% (vinte e cinco por cento) dos(as) alunos(as) da educação básica" (disponível em: https://tedit.net/6q40wv; acesso em: 17 set. 2024).

2. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC definiu um conjunto de conhecimentos e competências que devem ser oferecidos aos estudantes, estabelecendo diretrizes para uniformizar os conteúdos essenciais a serem ensinados em todas as escolas do país. Seu objetivo é garantir uma formação de qualidade para todos os estudantes, independentemente de sua localização geográfica.

Ela valoriza o desenvolvimento de competências e habilidades que permitam aos estudantes resolver problemas, tomar decisões, trabalhar em equipe e se adaptar às constantes mudanças do mundo, definindo os conteúdos mínimos que eles devem aprender e os objetos de conhecimento e as habilidades a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica.

A organização por áreas do conhecimento permite aos docentes trabalharem de maneira integrada, articulando os diferentes conhecimentos e promovendo a interdisciplinaridade, além de auxiliar no desenvolvimento de competências específicas de cada área do conhecimento e dos respectivos componentes curriculares.

O trabalho pedagógico envolve um planejamento que articula teoria e prática, permitindo aos estudantes não apenas adquirir conhecimentos, mas também saber aplicá-los em diferentes contextos. As competências gerais estabelecem diretrizes amplas, como o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo, enquanto as habilidades indicam ações mais concretas, como a resolução de problemas ou a análise de fenômenos, incentivando o uso de diversas metodologias de ensino, como projetos, trabalho em grupo e utilização de tecnologias. É fundamental que os professores conheçam os objetivos e os princípios da BNCC para planejar as aulas de maneira eficiente, aplicando diferentes metodologias.

Vale reforçar que a BNCC serve como referência para a construção dos currículos estaduais, que são elaborados considerando as demandas e os contextos regionais específicos de cada localidade. Esses currículos, ao refletir as particularidades culturais, sociais e econômicas de suas regiões, permitem uma maior proximidade entre a prática pedagógica e a realidade dos estudantes, incluindo a criação, remodelação ou adaptação de

habilidades e competências. Além disso, o docente tem autonomia para adaptar os materiais didáticos e as metodologias propostas, alinhando-os tanto ao Projeto Político-Pedagógico (PPP) da escola quanto aos currículos estaduais, garantindo, assim, que o processo de ensino-aprendizagem seja relevante e significativo para os estudantes em seus variados contextos.

Dica

- MILANI, N. O. O Projeto Político Pedagógico – PPP como instrumento de comunicação e interação entre a comunidade escolar e a mediação do pedagogo. *In*: *Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE*. Governo do Estado: Secretaria de Educação do Paraná, 2014. Disponível em: https://tedit.net/m6wqh9. Acesso em: 17 set. 2024.

  O documento discute a importância do Projeto Político Pedagógico (PPP) como uma ferramenta essencial para promover a comunicação e a interação na comunidade escolar, destacando o papel do professor como mediador. A leitura dele promove a melhor compreensão de como o PPP pode contribuir para um ambiente educacional mais colaborativo e eficaz.

2.1 As competências e as habilidades da BNCC de Ensino Médio

De acordo com a BNCC, competência é a mobilização e a articulação de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para a resolução de problemas de situações cotidianas relacionados ao meio ambiente, aos princípios éticos, à cidadania, ao mundo do trabalho, entre outras questões de urgência social. Por meio da indicação clara do que os estudantes devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC.

O desenvolvimento de habilidades e competências reforça a necessidade de um conjunto mínimo de aprendizagens essenciais. Desse modo, na BNCC são estabelecidas 10 competências gerais para a Educação Básica, que perpassam todas as áreas de conhecimento, articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, conforme disposto na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. As competências gerais visam ao desenvolvimento integral do estudante, preparando-o para a vida em sociedade, o trabalho e a continuidade dos estudos.

A descrição das 10 competências gerais, assim como todo o texto da BNCC, pode ser encontrada no *site* do Ministério da Educação (disponível em: https://tedit.net/q0hay4; acesso em: 4 set. 2024).

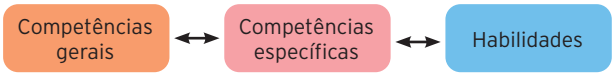
A BNCC estabelece, também, as competências específicas. No Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias têm 5 competências específicas que são desenvolvidas ao longo dos 3 anos. Além disso, a BNCC organiza o ensino da Matemática no Ensino Médio em 3 Unidades temáticas:

- *Números* e *Álgebra*;
- *Geometria* e *Medidas*;
- *Probabilidade* e *Estatística*.

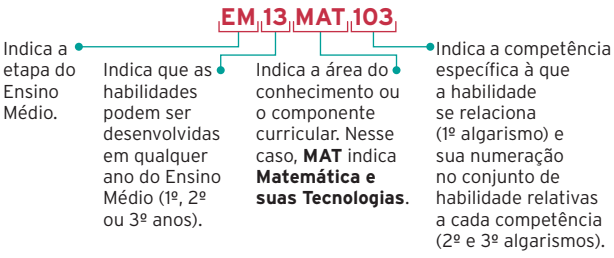
As Unidades temáticas agrupam conteúdos correlatos e facilitam o trabalho pedagógico, dividindo-se em habilidades específicas que detalham as expectativas de aprendizado em cada etapa. Essas habilidades são organizadas para permitir que o estudante desenvolva competências progressivamente, consolidando o aprendizado por meio de atividades que integram teoria e prática, sempre com uma abordagem contextualizada e conectada à realidade dos estudantes.

> Diante dessas considerações, a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (Brasil, 2018, p. 528-529).

No desenvolvimento das competências gerais, é essencial que os estudantes também trabalhem os princípios das competências específicas de cada área do conhecimento, o que se concretiza por meio do trabalho com as habilidades de cada componente curricular.



As competências e habilidades tanto se diferenciam quanto se encadeiam em diferentes graus de complexidade e amplitude no decorrer do Ensino Médio, sendo necessárias a análise e a compreensão de como isso ocorre na prática. Nesta coleção, utilizaremos a sigla **CG** para nos referirmos às competências gerais da BNCC para a Educação Básica. Para isso, nomeamos a primeira competência como **CG01**, a segunda como **CG02**, e assim sucessivamente. Além disso, usaremos a sigla **CEMAT01** para nos referirmos à competência específica **1** de Matemática e suas tecnologias, **CEMAT02** para a competência específica **2** de Matemática e suas tecnologias, e assim em diante. Também utilizaremos os códigos de cada habilidade presentes no documento da BNCC, cujo detalhamento está apresentado no exemplo a seguir.



A seguir, exemplificaremos o trabalho com as competências gerais, as competências específicas e as habilidades nesta coleção.

A competência geral **CG01** (texto a seguir), por exemplo, é favorecida no estudo da Unidade **3** do Volume **1** nos momentos em que se propõe ao estudante que reconheça e coloque em prática conhecimentos historicamente construídos, como nas seções que apresentam um apanhado histórico do desenvolvimento de conceitos matemáticos e da aplicabilidade deles na atualidade e na resolução de problemas.

Ao analisarmos, por exemplo, o capítulo **6** dessa Unidade **3**, a **CG01** é abordada em situações em que os estudantes refletem sobre os problemas que lhes são apresentados – tanto relacionados a semelhança de triângulos quanto a triângulos retângulos – e mobilizam conhecimentos matemáticos para investigar e desenvolver soluções criativas para solucionar os problemas.

Ainda nesse capítulo, os estudantes utilizam conceitos e definições para compreender características dos triângulos e aplicam conceitos e procedimentos para medir segmentos de reta ou medir ângulos. Com isso, é favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**. Isso ocorre porque, no capítulo, os estudantes exploram relações de congruência, relações de semelhança e relações trigonométricas envolvendo triângulos e aplicam esses conhecimentos em contextos diversos, incluindo a acessibilidade.

Para acompanhar o desenvolvimento das habilidades e das competências previstas, consulte a lista indicada no início das *Orientações específicas* de cada Unidade. A completude do trabalho com todas as respectivas habilidades e competências específicas de Matemática e suas Tecnologias, bem como das competências gerais da BNCC, é obtida ao longo dos Volumes desta coleção, tanto no Livro do Estudante quanto nas orientações apresentadas neste Manual.

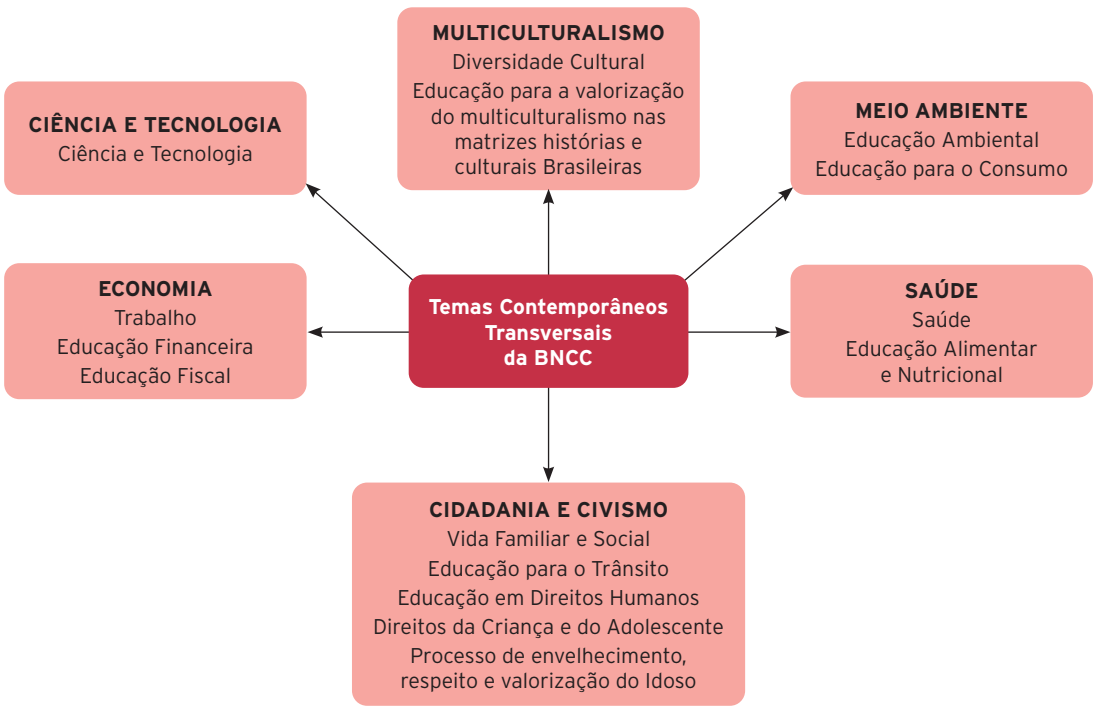
2.2 As interdisciplinaridades, os Temas Contemporâneos Transversais e os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

A interdisciplinaridade refere-se à abordagem educacional na qual diferentes áreas do conhecimento se conectam, rompendo as barreiras tradicionais individualizadas dos componentes curriculares (das disciplinas). Por meio da interdisciplinaridade, os estudantes exploram conceitos e questões a partir de múltiplas perspectivas, integrando conhecimentos e habilidades de diversas áreas do conhecimento.

Nessa perspectiva, os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) estabelecidos pela BNCC são assuntos de relevância atual que perpassam diferentes áreas do conhecimento e são considerados essenciais para a formação integral dos estudantes. Eles são chamados de "transversais" porque não pertencem a um único componente curricular, em vez disso, são abordados de maneira integrada em diversas áreas do conhecimento, promovendo uma visão ampla da educação.

> Os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) buscam uma contextualização do que é ensinado, trazendo temas que sejam de interesse dos estudantes e de relevância para seu desenvolvimento como cidadão. O grande objetivo é que o estudante não termine sua educação formal tendo visto apenas conteúdos abstratos e descontextualizados, mas que também reconheça e aprenda sobre os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade (Brasil, 2019a, p. 7).

A BNCC propõe, atualmente, os seguintes TCTs organizados em 6 macroáreas:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019. p. 8. Disponível em: https://tedit.net/3acdu3. Acesso em: 4 set. 2024.

Nesta coleção, diversos aspectos são contemplados a partir dos TCTs e exploram, sobretudo, questões da realidade social brasileira e do mundo, integrando-as às demais áreas do conhecimento.

A integração dos TCTs por meio da interdisciplinaridade auxilia os estudantes a desenvolverem competências gerais, como o pensamento crítico, a resolução de problemas complexos, a comunicação eficaz e a colaboração. Essas competências são essenciais para que eles se tornem cidadãos conscientes e atuantes. De fato, a interdisciplinaridade facilita a contextualização do aprendizado, mostrando como os conhecimentos adquiridos em diferentes disciplinas são aplicáveis na vida real. Ao estudar, por exemplo, o Tema Contemporâneo Transversal *Diversidade Cultural*, os estudantes podem entender a importância do respeito às diferenças tanto no campo social (Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) quanto no artístico (Linguagens e suas Tecnologias) e até na análise de dados estatísticos (Matemática e suas Tecnologias).

No contexto educacional, os TCTs são frequentemente incorporados ao currículo por meio de projetos interdisciplinares, debates, atividades práticas e reflexões que incentivam os estudantes a pensar criticamente e agir de maneira responsável em relação ao mundo ao seu redor.

Além dos TCTs, nesta coleção abordamos os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) da Agenda 2030 da ONU, que são compostos de 17 metas globais para a promoção de um desenvolvimento mais inclusivo, sustentável e justo em todo o mundo. Esses objetivos envolvem diversos desafios contemporâneos, como a erradicação da pobreza, a igualdade de gênero, a garantia de educação de qualidade e a ação contra as mudanças climáticas.

Reprodução/ONU

Fonte dos dados: NAÇÕES UNIDAS BRASIL. *Objetivos de desenvolvimento sustentável*. Disponível em: https://tedit.net/dgwz7m. Acesso em: 4 set. 2024.

A abordagem dos ODS, bem como dos TCTs, também permite um trabalho interdisciplinar que integra conhecimentos de diversas áreas às questões de urgência global que interferem diretamente na vida dos estudantes. Dessa maneira, contribui-se para a formação de cidadãos envolvidos com o bem comum.

Ao integrar ODS e TCTs, contribui-se para o incentivo dos estudantes à percepção de como as questões globais se conectam com a realidade local e como podem colaborar para um mundo mais justo e sustentável.

Uma sugestão de trabalho interdisciplinar envolvendo TCTs, ODS e Matemática presente na coleção envolve a sustentabilidade e o consumo consciente, trabalhando o TCT *Educação Ambiental* e o ODS **12** (Consumo e produção responsáveis): os estudantes podem investigar o consumo de água, de energia elétrica ou de outros recursos em seus domicílios ou na escola. Com os dados coletados, eles podem usar conhecimentos e ferramentas matemáticos para calcular médias, criar gráficos e projetar possíveis economias. O projeto pode incluir também a criação de uma campanha de conscientização com base nos resultados. Assim, abordam-se conhecimentos de Física (Energia), Biologia (Meio Ambiente), Geografia (Recursos Hídricos) e Matemática (Estatística).

Projetos como esses não só integram o aprendizado matemático com questões relevantes da atualidade, mas também incentivam os estudantes a desenvolverem uma compreensão crítica e analítica do mundo ao seu redor. De qualquer maneira, ao desenvolvê-los é importante o professor promover adaptações de acordo com a realidade local da comunidade e o contexto em que os estudantes estão inseridos. Para isso, é preciso investigar e identificar situações que possam ser trabalhadas de maneira interdisciplinar. Inclusive, os próprios estudantes podem sugerir temas ou problemas que eles identificam na região onde moram, sejam sociais, sejam econômicos ou desafios ambientais, por exemplo.

Essas adaptações também podem ser realizadas em conjunto com professores de outras áreas do conhecimento. Para isso, vocês podem organizar um momento semanal para fazer e compartilhar planejamentos em relação a temas, recursos didáticos, estratégias e ideias de atividades para implementar. Essa prática contribui para a troca de experiências e para o ajuste da proposta às necessidades e à realidade dos estudantes.

3. A educação integral e a sociedade contemporânea

A educação integral é definida na BNCC como uma proposta de formação ampla e visa promover o desenvolvimento cognitivo, físico, social, emocional e cultural dos estudantes. Desse modo, as diretrizes estão respaldadas no compromisso com a compreensão das singularidades e diversidades dos sujeitos, pois entende-se que a juventude não é simplesmente um período entre a infância e a fase adulta, mas uma etapa do desenvolvimento humano com características biológicas, psicológicas, sociais e culturais próprias.

Vivemos uma era de transformações rápidas e profundas, marcadas por avanços tecnológicos, mudanças sociais e ambientais, e uma crescente interconexão global, afetando diretamente a educação e o mundo do trabalho. O avanço das tecnologias digitais, a inteligência artificial e a automação estão transformando o mercado de trabalho e as relações humanas. Nesse contexto, a educação precisa ir além da mera transmissão de conhecimento técnico; deve capacitar os estudantes a serem pensadores críticos, solucionadores de problemas e cidadãos conscientes, capazes de se adaptar e inovar em um ambiente incerto e em evolução.

É essencial que a educação se preocupe com o desenvolvimento integral dos estudantes, considerando tanto o aspecto cognitivo quanto as dimensões emocional, social e ética. A formação de cidadãos responsáveis, solidários e empáticos é indispensável para a construção de uma sociedade mais justa e sustentável.

A proposta da BNCC e desta coleção é promover uma educação voltada ao desenvolvimento pleno e plural de ideias, ao convívio social republicano, à cultura de paz, à saúde mental dos estudantes e ao respeito às questões climáticas e ambientais, preparando-os para o exercício da empatia, da cooperação, da argumentação construtiva e do respeito ao meio ambiente, entendendo que eles são seres atuantes e protagonistas.

3.1 O estudante protagonista da aprendizagem

A BNCC traz em seus textos o desenvolvimento da autonomia, que corresponde a uma parte importante no processo de formação dos cidadãos. Esta coleção compreende que a autonomia estudantil vai além do simples ato de estudar de modo independente; ela envolve a capacidade de tomar decisões informadas, gerir o tempo, estabelecer metas e refletir sobre o próprio aprendizado. A partir do momento em que os estudantes desenvolvem a própria autonomia, deixam de ser meros ouvintes recebedores de informação, assumindo um papel de protagonismo na própria aprendizagem.

O desenvolvimento da autonomia nos estudantes é um processo gradual que requer suporte e orientação dos educadores. Professores desempenham um papel crucial ao criar ambientes de aprendizagem que incentivam a experimentação, a tomada de riscos e a reflexão crítica.

Para alcançar esse objetivo, uma das tendências pedagógicas em voga atualmente é conhecida como metodologias ativas. Nesse tipo de metodologia, o conhecimento não se origina exclusivamente da escola e do professor. Ele é proveniente também do que cada estudante sabe sobre determinado assunto. Segundo o professor José Morán (2015), as metodologias ativas podem ser um ponto de partida de avanço para processos mais profundos de reflexão, integração cognitiva, generalização e reelaboração de novas práticas. Ele afirma que estudantes se tornam mais proativos quando se envolvem em atividades que mobilizam ações desafiadoras e quando podem argumentar, testar hipóteses e experimentar novas situações.

No artigo "Mudando a educação com metodologias ativas", Morán traz apontamentos importantes que ajudam a compreender o que são as metodologias ativas e quais são os impactos do uso delas na aprendizagem dos estudantes. Sintetizamos a seguir os principais itens abordados no artigo.

1 As relações de ensino e aprendizagem são processos interligados que constituem relação simbiótica, profunda, constante entre o que chamamos mundo físico e mundo digital. Não são 2 mundos ou espaços, mas um espaço estendido, uma sala de aula ampliada, que se mescla. Nesse sentido, a educação formal é cada vez mais *blended*, ou seja, misturada ou híbrida, porque não acontece só no espaço físico da sala de aula, mas nos múltiplos espaços do cotidiano, que incluem os digitais.

2 O professor deve compreender que as tecnologias também são modos de comunicação com os estudantes, sujeitos nascidos em uma era de pleno desenvolvimento tecnológico. A interligação entre sala de aula e ambientes virtuais é fundamental para abrir a escola para o mundo e trazer o mundo para dentro da escola.

3 Desafios são importantes, por isso, junto com outras atividades, quando bem planejados, acompanhados e mediados, podem mobilizar as competências e habilidades desejadas, sejam intelectuais, sejam emocionais, pessoais ou comunicacionais. Exigem pesquisar, avaliar situações, observar pontos de vista diferentes, assumir alguns riscos, aprender pela descoberta e caminhar do simples para o complexo. Nas etapas de formação na Educação Básica, os estudantes precisam de acompanhamento de profissionais mais experientes para ajudá-los a conscientizar-se de alguns processos, estabelecer conexões não percebidas, superar etapas mais rapidamente e ser confrontados com novas possibilidades.

4 Uma proposta interessante é a prática de jogos colaborativos, visto que a geração atual é acostumada a jogar e a se comunicar, muitas vezes, na linguagem própria dos *games*. Assim, ao utilizá-los é possível gerar, além de um ambiente de competição, um ambiente colaborativo, de estratégia, com etapas, objetivos e habilidades bem definidas.

5 O professor tem papel importante no trabalho com as metodologias ativas, pois é o articulador de etapas, processos, resultados, lacunas e necessidades, seguindo percursos dos estudantes individualmente ou em grupos e conduzindo o desenvolvimento da aula ou de um projeto.

6 O trabalho com projetos é uma boa oportunidade de inserir metodologias ativas de aprendizagem na escola, sempre atentando ao fato de que o aprendizado ocorre com base em problemas e situações reais. Nesse sentido, trabalhar com projetos de vida pode ser um bom início para conquistar e aproximar os estudantes, além de fazê-los sentir-se responsáveis pela própria aprendizagem.

Como exemplos pedagógicos que reforçam a autonomia dos estudantes, podemos citar a sala de aula invertida, a gamificação, a aprendizagem baseada em projetos, o uso de portfólios e a autoavaliação. Além disso, é importante que os educadores forneçam *feedback* construtivo e oportunidades para que os estudantes ajustem as estratégias de aprendizagem com base nas reflexões sobre o desempenho.

3.2 Algumas reflexões sobre a prática docente

Como comentamos, o papel do professor não é ser transmissor ou detentor dos conteúdos. Ao contrário, o professor deve ser um facilitador, um guia que orienta os estudantes na jornada de aprendizagem, incentivando a curiosidade, a criatividade e o pensamento crítico.

E, nesse sentido, a formação continuada dos professores, bem como a incorporação de novas tecnologias e metodologias ativas, são fundamentais para que a educação acompanhe as demandas da sociedade contemporânea. Assim como os estudantes têm novas competências a desenvolver, os professores têm competências a exercitar: facilitar o aprendizado, mediar conflitos e avaliar conscientemente são apenas algumas de suas atribuições. Em um cenário educacional que valoriza cada vez

mais a autonomia, o pensamento crítico e o protagonismo dos estudantes, o professor assume uma função central na formação de cidadãos capazes de atuar de maneira ética e responsável na sociedade contemporânea.

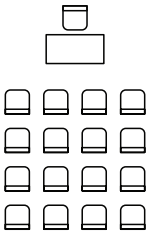
3.2.1 O trabalho individual e em grupos e possíveis formas de organização das turmas

Desenvolver trabalhos em sala de aula de maneira individual e em grupo tem papel essencial no desenvolvimento das habilidades e competências dos estudantes. A organização em grupo, além de ser um momento que propicia a expressão de ideias e o diálogo, permite a promoção do respeito mútuo, da empatia, da cooperação e do senso crítico. Ao interagir durante as atividades desenvolvidas, os estudantes desenvolvem a comunicação, a reflexão e a argumentação, que são fundamentais em um processo de aprendizagem colaborativa.

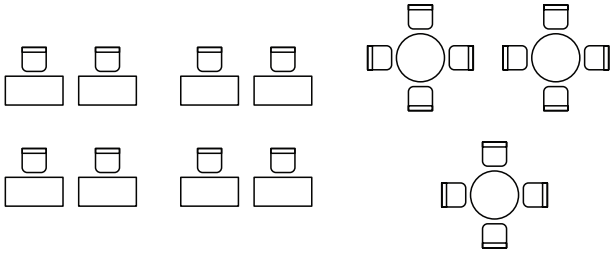
Os trabalhos em grupo permitem a troca de ideias e discussões sobre as diferentes estratégias em que estudantes pensaram, pois todos eles podem participar de maneira ativa. Porém, o professor sempre deve estar atento para realizar ajustes conforme a necessidade, como estabelecer regras para que toda a turma possa opinar, além de respeitar e acolher a opinião dos colegas.

Nesse sentido, é necessário considerar outras maneiras de organização da sala de aula, evitando disposições sempre enfileiradas e explorando organizações em formatos circulares, mesas-redondas e estações de trabalho. Assim, os estudantes têm mais oportunidades de colaborar entre si, ouvir e compartilhar ideias.

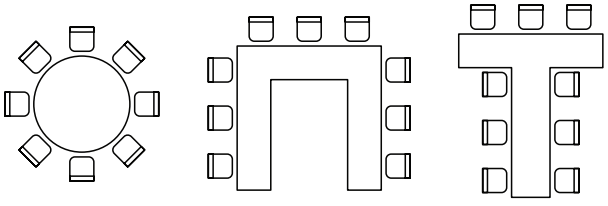
Ilustrações: Fagreia/Shutterstock



A disposição dos estudantes no modelo tradicional é oportuna nos momentos de trabalho individual.



A disposição em duplas ou em pequenos grupos promove a troca de saberes e um diálogo maior e inclusivo entre os estudantes.



A disposição de todos os estudantes no modelo circular, em U ou em T, por exemplo, favorece o debate coletivo e a troca de ideias e opiniões.

Além disso, durante o planejamento de aulas em grupo, o professor precisa considerar a heterogeneidade dos estudantes, variando os integrantes e garantindo que as atividades estejam de acordo com o nível de conhecimento e com a faixa etária da turma.

3.3 A educação digital

Um aspecto a ser considerado no trabalho com os estudantes é o uso de tecnologias da informação e comunicação, incluindo aquelas voltadas ao entretenimento.

> O grande desafio de educadores, pesquisadores, é compreender de que forma as tecnologias da informação e comunicação podem funcionar como meio de auxílio para o desenvolvimento do ensino. Sabendo que os jovens são produtores de informação e não simplesmente passivos consumidores, é preciso criar estratégias de uso das redes sociais que servem como interatividade e aprendizagem de grupos, pois os relacionamentos e as trocas de experiência acontecem através destas redes.
>
> [...]
>
> O processo de aprendizado com a utilização das tecnologias da informação e comunicação é de colaboração, onde é possível o que temos de conhecimento contribuir com o aprendizado do outro. Aprender colaborativamente significa desenvolver habilidades como: analisar, refletir, selecionar, atribuir significado, devolver a informação de acordo com a sua interpretação e contribuir numa discussão para o aprendizado do outro.
>
> Essa característica de sociabilidade deve ser aproveitada para a estimulação dos novos conhecimentos. Diante das tecnologias da informação e comunicação é possível escortinar-se um mundo ainda mais ávido em busca da construção de conhecimentos que não somente serão escolares, mas também outros tipos de conhecimento.
>
> [...]
>
> Os meios de comunicação e informação são imprescindíveis para ocorrer [a] interação e se articulam para contribuir cada vez mais com as possibilidades de acesso, convergência de meios tecnológicos e de mídias, que permitem o acesso ao conhecimento de qualquer lugar e parte do mundo modificando substancialmente as várias formas de pensar, comunicar e educar (Milani, 2012, p. 165 e 168).

A escola não pode ignorar o espaço que a comunicação e as tecnologias ocupam na vida dos jovens na atualidade. No entanto, é preciso orientá-los no uso desses novos conteúdos e oferecer diferentes tipos de letramento para que eles possam elaborar com a escola e além da escola. Utilizamos aqui o conceito de letramento como prática social e leitura do mundo, mais do que como alfabetização.

Na abordagem da utilização de tecnologias da informação e comunicação, é preciso considerar as diretrizes da Norma sobre Computação na Educação, aprovada em 2022, pois ela estabelece a importância da integração do ensino de computação de modo transversal no currículo escolar durante toda a Educação Básica, o que permite preparar os estudantes não somente para usar tecnologias, mas também para compreender os fundamentos da computação, incluindo desde o pensamento computacional até a linguagem básica de programação. Assim, os estudantes se desenvolvem criticamente para o mundo digital, passando

de usuários passivos a criadores ativos, o que fomenta a inovação e a resolução de problemas.

Ademais, a Política Nacional de Educação Digital (Pned) ressalta a necessidade de preparar a sociedade para os desafios impostos pela transformação digital, destacando a relevância da formação de pessoas capazes de usar tecnologias de maneira crítica e ética, o que promove o letramento digital em todos os níveis da Educação Básica.

A Pned sugere ações desde capacitar professores até ampliar o acesso à internet e aos dispositivos eletrônicos em todas as escolas do país. Essas iniciativas visam contribuir para a redução das desigualdades educacionais e a garantia de que todos os estudantes tenham oportunidades de desenvolver habilidades digitais.

3.3.1 O pensamento computacional

Podemos compreender o pensamento computacional como uma competência associada à resolução de problemas, apoiando-se ou não, para tanto, nas tecnologias e na computação. Utilizar recursos do pensamento computacional em sala de aula não significa necessariamente fazer programas de computador ou outro tipo de *software*. Esse conceito diz respeito ao desenvolvimento de uma representação de raciocínio lógico e por etapas, compreendendo a presença de padrões, a elaboração de passos e testes, a validação de resultados, além da generalização pela abstração. Portanto, algoritmos, fluxogramas, esquemas ou mesmo roteiros com etapas passo a passo a serem cumpridas, usados no processo de aprendizagem, podem ser compreendidos como recursos para o desenvolvimento do pensamento computacional. E esses são importantes recursos que podem auxiliar os estudantes a identificarem relações entre os objetos representados, como na organização das etapas de uma tarefa, na representação de árvore de possibilidades, entre outras situações.

O complemento da BNCC para Computação lista 7 competências gerais a serem desenvolvidas no Ensino Médio. Para acessar esse documento, visite: https://tedit.net/0ppe9e (acesso em: 3 set. 2024).

É importante destacar que pesquisas, estudos e aplicações envolvendo o pensamento computacional na educação já existem há quase 20 anos e, de acordo com a BNCC, esse tipo de raciocínio pode ser mobilizado em todas as etapas da Educação Básica, em diversos componentes curriculares, além de Matemática. Por isso, o pensamento computacional também pode ser entendido como um tema contemporâneo que é transversal ao currículo escolar. Caratti e Vasconcelos (2023) recuperam o trabalho de Brackmann sobre as bases, ou os pilares, do pensamento computacional (PC) e sua aplicabilidade.

> [...] Brackmann (2017) discorre sobre quatro pilares do PC: a) decomposição, na qual um problema considerado complexo pode ser dividido em problemas menores e mais fáceis de serem resolvidos; b) reconhecimento de padrões, em que cada problema menor pode ser analisado em profundidade e comparado com outros problemas já solucionados anteriormente; c) abstração, em que somente os detalhes relevantes para a solução do problema são considerados, sendo descartados os outros que não contribuem para esta; e d) algoritmo, que constitui a criação ou definição dos passos necessários para a solução dos problemas encontrados.
>
> É importante destacar que os pilares do PC supracitados podem ser integrados em diversas disciplinas escolares. Por exemplo, em Ciências, a decomposição pode ser utilizada para estudar sistemas do corpo humano ou ecossistemas, dividindo-os em sistemas menores ou componentes para entender melhor o conjunto; o reconhecimento de padrões pode ser aplicado em História para identificar tendências em eventos históricos, como causas e consequências, com o objetivo de prever possíveis resultados de conflitos atuais; a abstração pode ser empregada em Línguas para analisar textos literários, concentrando-se em elementos essenciais, contextos, temas e símbolos abstratos para interpretar significados mais profundos; e o uso de algoritmos pode ser explorado em Música para compreender a estrutura de partituras (Caratti; Vasconcelos, 2023, p. 3).

Desse modo, é importante perceber que as técnicas do pensamento computacional se consolidam como uma abordagem sistemática de resolução de problemas, envolvendo o uso de conceitos e métodos próprios da Ciência da Computação. Ele não se limita ao uso de computadores nem à Matemática, mas abrange um conjunto de habilidades cognitivas e atitudes que permitem abordar e solucionar problemas complexos de maneira eficiente.

3.4 As culturas juvenis e os diferentes perfis de estudantes

A escola deve ser um espaço que acolhe e valoriza a diversidade dos jovens, reconhecendo suas múltiplas dimensões de desenvolvimento – intelectual, físico, afetivo, social e cultural. A BNCC reforça que a educação deve partir da realidade que os estudantes vivenciam, e não de uma seleção prévia de conteúdos descontextualizados. Nesse sentido, compreender e integrar as culturas juvenis, com toda a sua pluralidade, é essencial para construir uma educação significativa e transformadora.

Para melhor entender o conceito de culturas juvenis, é preciso assimilar que as maneiras de ser jovem são inúmeras e dependem de gênero, raça, cor, etnia, classe social, território, religião, geração, entre outros; de acordo com as mesmas variáveis, há diferentes maneiras de ser estudante. Diante desse contexto, cabe à escola proporcionar aos jovens a possibilidade de experimentar diferentes modos de vivenciar a juventude considerando, para tanto, as chamadas culturas juvenis. Entendemos como culturas juvenis as articulações que os jovens estabelecem com base na produção cultural de massa, no estilo de vida e nas práticas sociais em grupo ou em rede e que se expandem pelo espaço urbano.

Um exemplo é a exploração de atividades culturais envolvendo *rap*, grafite ou o próprio *funk*, que, muitas vezes, são subvalorizadas por fazerem parte da cultura dos jovens das camadas populares, que já são marginalizados por sua origem socioeconômica. Ao permitir que os jovens se expressem por meio dessas manifestações artísticas, se assim desejarem, a escola oportuniza a expressão de sentimentos e que eles sejam reconhecidos, ganhem visibilidade e se autoafirmem.

As culturas juvenis são diversas, refletindo a variedade de experiências, interesses e contextos dos jovens brasileiros. Essa diversidade abrange uma ampla gama de realidades socioeconômicas, personalidades, diferenças de aprendizagem, e perfis psicológicos e cognitivos, além de incluir diferenças entre áreas urbanas e áreas rurais. Cada estudante traz consigo uma bagagem única de vivências que deve ser reconhecida e valorizada dentro da sala de aula.

O contexto pós-pandêmico ampliou ainda mais esses desafios, revelando desigualdades preexistentes e criando novas barreiras para muitos jovens, ressaltadas pelo resultado do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) de 2022. Nesse cenário, trabalhar com diferentes perfis de estudantes requer uma abordagem que considere a pluralidade uma característica inerente da sociedade, sem adotar posturas capacitistas ou juízos de valor. A escola deve ser um lugar onde todos os estudantes se sintam respeitados e reconhecidos, independentemente das diferenças.

Ao considerar as culturas juvenis na construção do currículo, a escola deve propiciar que os próprios estudantes levem suas experiências e vivências para o ambiente de aprendizagem. Isso não apenas enriquece o processo educativo, mas também fortalece o vínculo entre o estudante e o conteúdo, tornando o aprendizado mais relevante e conectado à própria realidade.

Por fim, o projeto de vida, enquanto ferramenta pedagógica, também deve ser abordado nesse momento de compreensão das aflições e expectativas dos jovens do Ensino Médio, pois ajuda os estudantes a refletirem sobre seus objetivos e aspirações, integrando suas vivências pessoais e culturais com suas expectativas para o futuro. No entanto, é crucial que essa reflexão seja ancorada em uma visão realista das possibilidades e limitações que o mundo do trabalho impõe, especialmente para a população mais vulnerável, pois um dos objetivos da educação é que os jovens compreendam a sua realidade e passem a transformá-la, percebendo, e isso é fundamental, porque as transformações no mundo do trabalho, impulsionadas pelas tecnologias, criam novas oportunidades, mas também desafios significativos.

3.5 A Cultura de Paz em sala de aula

O trabalho com a BNCC pressupõe articulações entre os envolvidos no processo educativo – estudantes, professores e equipe gestora –, de modo a garantir as condições básicas de vida e a criação de mecanismos que favoreçam a atuação e o protagonismo da comunidade escolar na construção da democracia e na garantia e efetivação de direitos e justiça social. Nesse sentido, para assegurar a boa convivência no ambiente escolar e a Cultura de Paz, é preciso adotar uma postura na qual a educação seja um fator essencial e contribua para o combate à violência, à intimidação sistemática (*bullying*) e às ações excludentes e preconceituosas.

O texto a seguir reflete o que se espera ao propor um ambiente escolar para promoção da Cultura de Paz.

> [...] A educação se dá para além do ambiente escolar, sendo composta pelo tempo e contexto em que as aprendizagens acontecem, em espaços formais e não formais de educação e a partir da interação de diferentes sujeitos sociais. Dessa forma, é preciso respeitar, ouvir e valorizar a diversidade de participantes que constroem esse espaço, na perspectiva de atuação conjunta dos agentes da rede de proteção na intenção de restabelecer "os valores e a segurança necessários para um ambiente educacional saudável, no qual a justiça, a igualdade, o respeito, a solidariedade e a consideração entre as pessoas prevalecem" [...].
>
> Ao se propor um ambiente escolar para a promoção da Cultura de Paz e de convivências respeitosas, possibilita-se que a escola cumpra a sua função fundamental: promover aprendizagens as quais devem estar em consonância com as demandas pessoais e coletivas, de forma a fortalecer os/as estudantes como sujeitos de direitos que pensam, criticam, refletem, agem coletivamente, para entender, compreender e experimentar o mundo, desenvolver-se [...].
>
> Assim, a educação para a Cultura da Paz propõe mudanças inspiradas em valores como justiça social, diversidade, respeito e solidariedade, aliadas às ações fundamentadas na educação, saúde, cultura, esporte, participação cidadã e melhoria da qualidade de vida no território de responsabilidade compartilhada entre educação e diversos setores da sociedade [...].
>
> [...]
>
> Assim, as orientações e ações voltadas para a promoção da cidadania e garantia dos Direitos Humanos e Cultura de Paz pautam-se na compreensão das diversas formas de violências, violações de Direitos Humanos e suas ocorrências no campo dos direitos civis, políticos, econômicos, sociais, culturais e ambientais (Distrito Federal, 2020, p. 11-13).

A perspectiva de enfrentamento e prevenção à violência contra os jovens do Ensino Médio é um dos grandes desafios da escola, dos familiares e responsáveis e de toda sociedade. Nesta coleção, oportunizamos aos estudantes o uso das tecnologias como meio de disseminação e produção de conhecimento, auxiliando-os a desenvolver boas práticas e consciência crítica em relação a elas, mobilizando com mais ênfase a **CG05**.

3.6 As capacidades de argumentação e de leitura

O processo de leitura inferencial favorece a organização das relações de significado dentro do texto e determina os significados que o leitor é capaz de estabelecer considerando todas as possibilidades de interpretação que um texto pode oferecer. A produção de sentidos de um texto está conectada ao contexto e à interação entre o autor e o leitor.

Ao oferecer aos estudantes atividades de leitura orientada, favorecemos o desenvolvimento de estratégias cognitivas e metacognitivas. No trabalho em sala de aula, é possível ver quão desafiadores são o ensino-aprendizagem e a produção de textos argumentativos, e, para que os estudantes construam o próprio conhecimento, cabe propor atividades contextualizadas e que favoreçam o desenvolvimento da criticidade e do protagonismo cidadão.

Ao produzir um texto argumentativo, os estudantes podem utilizar alguns tipos de raciocínio lógico: o indutivo (parte de fatos particulares para uma conclusão geral), o dedutivo (parte do enunciado geral para provar um fato particular), a analogia (provas de acordo com semelhanças entre os casos), a dedução

(parte de uma regra para obter a conclusão) e a abdução (conclusões com base em premissas).

Nas aulas de Matemática, ao incentivar o trabalho com orientações e roteiros de estudo e pesquisa, mobilizamos as habilidades de leitura, escrita, oralidade e escuta reflexiva dos estudantes, ampliando as estruturas que compõem o letramento matemático nos sujeitos e permitindo, também, o desenvolvimento desses tipos de raciocínio lógico. Os estudantes, ao falarem e ouvirem os pares em sala de aula, aprendem e ressignificam saberes. Comunicar-se durante as aulas de Matemática é um processo complexo, pois o indivíduo precisa se apoiar em duas linguagens para tanto: a materna, para comunicação universal, e a linguagem matemática, com símbolos e características próprias.

Nesta coleção, incentivamos o processo de leitura inferencial e o desenvolvimento do raciocínio argumentativo em diversas oportunidades, sobretudo nas aberturas de Unidades e nas seções – nas quais os estudantes devem ler um texto, interpretá-lo e tirar as próprias conclusões –, nas atividades envolvendo a elaboração e a resolução de problemas, nas propostas de debate com os colegas, e ao serem solicitados a argumentar sobre a maneira como chegaram às respostas encontradas.

3.7 O pluralismo de ideias e a produção de análises críticas, criativas e propositivas

Produzir análises críticas, criativas e propositivas nas aulas de Matemática é de grande importância para a formação dos estudantes, pois os auxilia a ser capazes de compreender e entender o que precisa ser modificado na realidade que vivem. Durante as aulas, o professor pode promover um ambiente de pluralismo de ideias, ou seja, em que concepções diferentes sejam debatidas e confrontadas de maneira sistêmica. Assim, contribui-se para que os estudantes argumentem, reflitam criticamente e proponham possibilidades de soluções para problemas que precisam ser resolvidos.

Um exemplo de análise crítica em Matemática ocorre quando os estudantes são incentivados a interpretar tabelas e gráficos estatísticos, questionando os dados e analisando situações econômicas e sociais. Já a criatividade, pode aparecer quando os estudantes procuram soluções alternativas para problemas complexos.

Debates atuais, como a uberização da economia, exemplificam a integração dessas habilidades com a Matemática, que pode ser usada na análise do impacto financeiro desse modelo de negócio. Pode-se, por exemplo, desafiar os estudantes a calcular a renda média de motoristas de aplicativos considerando, para isso, as variáveis necessárias, como o custo de manutenção do veículo, a quantidade de horas trabalhadas e as tarifas e taxas cobradas. Desse modo, contribui-se para a promoção de debates sobre a sustentabilidade financeira desse tipo de trabalho, analisando-se, também, as implicações sociais.

Além disso, ao fazer o confronto das diferentes concepções sobre uberização ou outros temas atuais da sociedade, o professor precisa incentivar os estudantes a respeitar as diversas experiências que vivem ou viveram e os diferentes modos de pensar sobre isso. Nesse sentido, a Matemática não fica limitada a propor somente respostas objetivas, ela também propõe reflexões sobre a multiplicidade de perspectivas que existem em uma sociedade plural. Realizar o confronto de ideias de maneira respeitosa e colaborativa contribui para que os estudantes valorizem e respeitem diferentes pontos de vistas.

3.8 A resolução e a elaboração de problemas

Na área de Matemática, a BNCC ressalta que os professores devem incentivar os estudantes apresentando problemas da vida real que sejam usados como ponto de partida para situações didáticas em que se desenvolvam a criatividade, o pensamento crítico e a colaboração.

Elaborar e resolver problemas exigem um ambiente de comunicação e escuta, além de cooperação e argumentação. É importante que os estudantes percebam que a habilidade de resolver problemas não está relacionada somente com as aulas de Matemática, pois ela será mobilizada ao longo de toda a vida, em diversas situações do cotidiano.

O precursor das ideias acerca da resolução de problemas foi o matemático e professor húngaro George Pólya (1887-1985), que estabeleceu passos a serem seguidos na resolução de um problema, descritos a seguir, sinteticamente, de acordo com Pólya (2006).

- Compreender o problema: o que se pede; quais são os dados.
- Elaborar um plano: estratégias para resolver o problema; como organizar os dados.
- Executar o plano: executar as estratégias; fazer os cálculos.
- Fazer a verificação ou o retrospecto: verificar se a solução está correta; se há outras maneiras de resolver o problema.

Além disso, a resolução e a elaboração de problemas contribuem para investigação, levantamento e teste de hipóteses, elaboração de argumentos e de ideias matemáticas e para o compartilhamento de diferentes saberes.

Nesse contexto, ao avaliar a elaboração de problemas dos estudantes, o professor precisa analisar aspectos relacionados a clareza da formulação, relação do problema com o conteúdo trabalhado e se a produção é inédita. Por fim, para tornar a elaboração de problemas uma prática enriquecedora, é fundamental que os estudantes compartilhem entre si os problemas criados, não somente para resolver, mas também para discutir se a produção está clara e completa.

Ao longo desta coleção, há diversas e variadas possibilidades de trabalhar com resolução de problemas em temas da realidade ou em contextos didáticos. Aproveite a oportunidade e crie um ambiente de investigação e construção de saberes com os estudantes.

3.9 A investigação científica e os raciocínios lógico-matemáticos

O ato de investigar é praticado pelos jovens desde a infância. Todo jovem é curioso e tende a explorar e buscar mais informações sobre algo que lhe chama a atenção. Nessa perspectiva, é importante o ensino de Matemática também buscar possibilidades de despertar o interesse dos indivíduos.

A prática de pesquisa também serve de aporte interessante por envolver saberes prévios, questionamentos, levantamento e

teste de hipóteses, verificações de resultados, elaboração de modelos matemáticos, entre outros. Pesquisar significa informar-se sobre algo, investigar, examinar minuciosamente determinado tema ou problema. É uma ação em busca de conhecimento.

Deve ficar claro para os estudantes que a pesquisa não significa apenas a busca de algum tema na internet, como muitos deles podem pensar. É importante que eles compreendam que a pesquisa resulta de uma ação iniciada pela curiosidade ou inquietação de uma ou mais pessoas sobre determinado assunto ou problema. Uma pesquisa é uma investigação.

Nesta coleção, um tipo de pesquisa proposto é o que chamamos de pesquisa bibliográfica, que consiste na coleta de informações sobre o tema em textos, livros, artigos, *sites*, ou seja, as fontes de informação. Sempre que explorar o trabalho com as fontes de informação, retome com os estudantes a necessidade de avaliá-las.

Além disso, saber pensar matematicamente é relacionar situações de contextos diferentes para descobrir novas estratégias e soluções e interpretá-las utilizando, para tanto, diversos tipos de raciocínios argumentativos como ferramenta.

A investigação em Matemática apresenta-se como uma metodologia que:

> tem por objetivo oferecer oportunidade para os estudantes vivenciarem uma experiência semelhante ao do investigador matemático e, assim, motivá-los a estudarem Matemática, por meio do desafio de descobrir relações matemáticas apresentadas em situações matemáticas específicas. Desta forma, levar o estudante a ter uma visão do que é fazer Matemática, bem como sentir prazer no fazer Matemática (Varizo; Magalhães, 2016, p. 2).

Nesta coleção, apresentamos algumas possibilidades para a introdução de atividades que potencializem o desenvolvimento desses modos de raciocinar, sobretudo a dedução, a indução, a abdução e o raciocínio por analogia, como dito anteriormente.

A dedução é o modo de inferência mais simples e se caracteriza pela inferência que mostra de que maneira, seguindo determinada regra geral, se estabelece um caso particular.

> No método dedutivo consideramos a forma mais certa para nós, ou seja, caminhos verdadeiros, concluintes e resultados. Exemplo: "Hoje está calor e o asfalto está quente". Esse método é comum para testar hipóteses já existentes, dadas por *axiomas*, para comprovar teorias, nomeadas de *teoremas* (Lascane; Homsy; Monteiro, 2020, p. 122).

Na indução, ao contrário da dedução, parte-se da premissa menor e busca-se a generalização. A verificação da teoria é feita por experimentação. Enquanto processo lógico-analítico, a indução é passível de ser experimentada e, consequentemente, comprovada. Por trás do raciocínio indutivo está um passo essencial: a atitude indutiva à qual é submetido o pesquisador. Ter uma atitude indutiva requer saber observar detalhes em sua experiência e formular hipóteses que podem ou não ser verdadeiras.

Na abdução se dá o processo de formação de hipóteses explicativas que ajudam na compreensão de certos fenômenos, e a consideramos ponto de partida do raciocínio indutivo. Na Matemática, assim como em outras ciências, a abdução envolve a busca por explicações ou hipóteses. Diferentemente da dedução, que começa com hipóteses e verifica se as conclusões são verdadeiras, a abdução parte de uma verdade presumida para identificar possíveis hipóteses que a expliquem.

No raciocínio por analogia, a inferência se dá pela identificação de semelhanças entre diferentes situações ou objetos. Assim, transferem-se conhecimentos ou conclusões de um contexto familiar para outro menos conhecido sob a premissa de que, se os casos são similares em alguns aspectos, podem ser similares em outros também. Apesar de não ser conclusivo como a dedução ou a indução, o raciocínio por analogia é muito usado na formulação de hipóteses e no desenvolvimento de novas ideias.

3.10 A História da Matemática e a Etnomatemática

A BNCC ressalta a importância do trabalho com os diferentes saberes e culturas e com o conhecimento produzido pela humanidade ao longo do tempo e do espaço. Para tanto, há 2 tendências metodológicas, também destacadas nesse documento oficial, que podem servir de aporte para esse trabalho: a História da Matemática e a Etnomatemática.

Em relação à História da Matemática, a BNCC traz vários destaques. Reproduzimos a seguir um exemplo.

> [...] A Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau (Brasil, 2018, p. 463).

O livro *História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores*, escrito pelos professores brasileiros Iran Abreu Mendes (Universidade Federal da Paraíba) e Miguel Chaquiam (Universidade Federal do Rio Grande do Norte), traz um panorama explicitador e incentivador da abordagem de conteúdos a partir da História da Matemática. A seguir, alguns pontos essenciais abordados por eles (Mendes; Chaquiam, 2016).

1. Ao explorar a História da Matemática, é necessário compreender que, na verdade, trata-se de histórias no plural, pois estão conectadas, integradas ou mesmo tecidas em meio a outras histórias das mais diversas qualidades.

   São histórias e descobertas frutos de diferentes pessoas sobre a produção de ideias matemáticas e as materializações em múltiplas linguagens representativas, e talvez seja também dessa multiplicidade que surge a característica plural de tais histórias. Esquecer ou desprezar essa pluralidade é empobrecer qualquer abordagem dita ou concebida como transversal, integrada ou até mesmo contextualizada para a Matemática que se ensina.
2. As histórias consideradas importantes para o desenvolvimento da aprendizagem matemática dos estudantes em sala de aula são aquelas que têm a vocação de explicar a organização conceitual das matemáticas produzidas no tempo e no espaço.

3. Uma das justificativas mais comuns sobre a indicação do uso didático ou pedagógico das informações históricas nas atividades de ensino de Matemática é que ela amplia a compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais dessa área, representando uma contribuição didática para o trabalho do professor e fortalecendo as competências formativas para o exercício de ensino.
4. O uso da história nas aulas de Matemática amplia a visão sobre os aspectos formativos, informativos e utilitários, conduzindo os estudantes ao acervo cultural dessa ciência com a finalidade de desenvolver o interesse pelo assunto e estimular a preservação da memória intelectual humana.
5. É necessário que o professor redirecione o uso das histórias e promova um exercício de investigação mais ampliado, propiciando a criação de um cenário no qual as histórias do desenvolvimento conceitual sejam agregadas às informações existentes. É preciso explicar que o conhecimento a ser aprendido contribuirá para a ampliação das estratégias de pensamento e, consequentemente, ajudará os estudantes na produção de conhecimento.
6. Podem ser desenvolvidos alguns projetos de investigação sobre as histórias dos seguintes tópicos matemáticos: números de Fibonacci; problema das quatro cores; fractais; razão áurea; retângulo de ouro; números imaginários; números complexos; números irracionais; fórmula de Euler; Matemática e arquitetura; Matemática e arte islâmica; Matemática e música; barras de Napier; triângulo de Pascal; Trigonometria e polígonos regulares; sólidos de Platão; simetria em diversas culturas; transformações geométricas no plano; desenvolvimento das ideias sobre funções; entre outros.

Ao se apoiar nas concepções do uso da História da Matemática em sala de aula, o professor deve adotar uma postura de escuta reflexiva e conduzir as discussões a partir dos questionamentos que os estudantes farão sobre as informações e histórias às quais terão acesso. É importante fomentar discussões sobre os diferentes contextos em que os conceitos surgiram e levantar os possíveis saberes que os estudantes trazem sobre eles. O uso de literatura pode ser um caminho bastante interessante para isso.

Nesta coleção, destacamos diversos momentos para a apresentação da História da Matemática ao longo do desenvolvimento dos capítulos.

Há mais de duas décadas, o termo Etnomatemática saiu dos meios acadêmicos e adentrou os documentos oficiais, currículos, programas de ensino e materiais didáticos das escolas. O professor Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021) foi o precursor e principal cientista brasileiro a se dedicar ao tema. Em razão de suas ideias e produções acadêmicas, que contemplam todos os níveis de ensino da Matemática, ele se tornou um profissional reconhecido, respeitado e referenciado mundialmente.

Na obra *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, D'Ambrosio esclarece que a palavra Etnomatemática nasceu das raízes *tica*, *matema* e *etno* para significar que há várias maneiras, técnicas e habilidades (*ticas*) de explicar, de entender, de lidar e de conviver (*matema*) com distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (*etnos*).

Nessa mesma obra, ele define o conceito: Etnomatemática é a Matemática praticada por grupos culturais, como comunidades urbanas e comunidades rurais, trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma faixa etária específica, sociedades indígenas e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns.

A Etnomatemática tem o objetivo de preservar e estudar as particularidades de cada indivíduo, as culturas e os conhecimentos matemáticos adquiridos, pois compreende que o ser humano se desenvolve continuamente e, por isso, ressignifica as técnicas e adota novas, compondo a própria maneira de explicar a realidade. Tais conhecimentos são transmitidos pela interação e a comunicação em ambientes distintos nos quais os sujeitos circulam, incluindo a escola, o trabalho, a comunidade ou o bairro em que residem, entre outros.

Apoiar-se nos pressupostos da Etnomatemática é um caminho promissor para trabalhar com o contexto dos estudantes, pois considera e valoriza os saberes que trazem, constituídos pelas vivências deles e pela localização temporal e espacial na qual circulam. Há várias possibilidades de mobilizar tais saberes ao longo das aulas de Matemática, por exemplo: ao discutir o orçamento doméstico de uma família, é possível identificar práticas culturais para lidar com o consumo e com o alimento.

Fernandes da Costa (2021) traz um trabalho interessante relacionando Etnomatemática e decolonialidade. Ambas as abordagens incentivam a descolonização do currículo educacional, promovendo a inclusão de conhecimentos e práticas matemáticas de diferentes culturas no ensino formal. Isso contribui para uma educação mais inclusiva e representativa, desafiando a hegemonia do pensamento eurocêntrico, que historicamente impôs uma visão única de conhecimento. Ao destacar a diversidade das práticas matemáticas, a Etnomatemática apoia o movimento decolonial ao mostrar que há múltiplas formas legítimas de compreender e trabalhar a Matemática.

3.11 Recursos apoiados nas tecnologias digitais

Em um mundo globalizado e em constante desenvolvimento científico e tecnológico, é importante a escola se integrar a práticas que propiciem aos estudantes vivenciar essa realidade com aplicação ao ensino. Nesta coleção, sugerimos explorar com os estudantes recursos tecnológicos em diversas oportunidades, como ao propor a utilização de *softwares* de Geometria dinâmica, de planilhas eletrônicas, de calculadoras, entre outros.

Há diversos *sites* e aplicativos para desenvolver atividades de Geometria dinâmica (como o GeoGebra, o Graphmática, o Winplot) e dinamizar e diversificar as estratégias em sala de aula. Também há diversos aplicativos de planilhas eletrônicas para computador e *smartphone* ou *on-line*. O uso e as funcionalidades dessas planilhas são similares e muitas estão disponíveis em português.

Na escolha do *software* ou aplicativo a ser trabalhado, é preciso atentar para que o programa apresente todas as funcionalidades necessárias ao desenvolvimento das atividades propostas em sala de aula. Previamente, é importante explorar o programa e, no começo da aula, auxiliar os estudantes nas explorações iniciais e na identificação das ferramentas, dos códigos e das configurações disponíveis, além da maneira de acessá-las, de modo que o desenvolvimento das atividades seja possível, proveitoso e promova o desenvolvimento das habilidades esperadas.

A calculadora também é um recurso bastante utilizado em situações cotidianas por boa parte das pessoas e pode ser uma

ferramenta eficiente para correção de erros, averiguação de respostas e teste de hipóteses, sendo possível utilizá-la como instrumento de autoavaliação ou investigação.

Diversos outros recursos podem ser adaptados para ampliar o engajamento dos estudantes e favorecer a aprendizagem: *blogs* ou *fotologs* para armazenamento de projetos ou pesquisas realizadas pelos estudantes; aplicação de *quizzes* interativos, desenvolvimento de vídeos, animações interativas e *podcasts*, por exemplo.

O uso das ferramentas também deve ser feito com responsabilidade. Em uma época em que se discute a veracidade das informações, compreender e utilizar corretamente ferramentas digitais de pesquisa é fundamental para evitar *fake news*. Assim, a prática de pesquisa pode ser incentivada e adotada na abordagem de todos os conteúdos matemáticos.

4. Por uma educação inclusiva

Para incluir estudantes com deficiência, o professor deve favorecer a interação e o respeito à diversidade em sala de aula. A seguir, apresentamos algumas orientações para contribuir em sua prática pedagógica.

- Conheça os estudantes, para que eles sejam assistidos de modo adequado. Sugerimos uma conversa com os estudantes e os familiares e/ou responsáveis para compreender o contexto deles e entender as potencialidades e dificuldades.
- Pergunte a cada estudante com deficiência qual é a melhor maneira de auxiliá-lo ao perceber uma dificuldade.
- Caso os familiares ou responsáveis façam a entrega de algum documento ou relatório de profissionais de saúde externos, é importante analisar com cautela quais são as orientações desses profissionais sobre as adaptações necessárias para o estudante na escola e em sala de aula.
- Valorize as potencialidades dos estudantes e incentive sua participação de maneira ativa durante as aulas.
- Sempre que possível, planeje as aulas e atividades com acessibilidade, favorecendo a inclusão de todos os estudantes. Além disso, capacite-se de variados formatos sobre inclusão e educação especial e atualize-se para explorar novas metodologias e tecnologias assistivas.
- Atente a possíveis preconceitos ou *bullying* em sala de aula e na escola e não permita qualquer ação capacitista ou prática que diminua as potencialidades do estudante com deficiência. Sugerimos o estudo e o aprofundamento sobre os vieses inconscientes do capacitismo.

Para aprimorar ainda mais a prática pedagógica, seguem dicas para o dia a dia em sala de aula.

- Se houver estudantes surdos ou com deficiência auditiva, ao passar um vídeo em sala, verifique se a resolução está boa, se o áudio está bom. Em alguns casos, é necessário ativar a legenda dos vídeos ou apresentá-lo com Libras.
- Se houver estudantes com deficiência física ou mobilidade reduzida, faça adaptação na organização do espaço da sala de aula para garantir a acessibilidade. Outra possibilidade é ajustar materiais e equipamentos didáticos, como usar pranchetas ou suportes de escrita para estudantes com dificuldade em usar a mesa convencional.
- Se houver estudantes com deficiência intelectual, seja objetivo ao falar e certifique-se de que ele compreendeu a informação. Estimule o estudante a participar ativamente do processo de ensino e aprendizagem, perguntando sobre suas dificuldades e quais recursos podem ajudá-lo.
- Se houver estudantes com cegueira, baixa visão e/ou visão monocular, entregue a ele atividades com uma fonte maior ou diferente do padrão.
- Se houver estudantes com o Transtorno do Espectro Autista, sempre verifique com ele qual recurso atende melhor a suas necessidades, considerando sua condição.
- Se houver estudantes com altas habilidades/superdotação, avalie a necessidade de oferecer conteúdo ou material diferenciado para incentivar seu desenvolvimento contínuo.

Sua dedicação em criar um ambiente inclusivo fará uma grande diferença na trajetória educacional dos estudantes com deficiência.

Dica

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. *Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva*. Brasília, DF: MEC, 2008.

  Essa política, em conformidade com o documento disponível no portal do Ministério da Educação e Cultura (MEC), estabelece as diretrizes fundamentais para a inclusão de estudantes com necessidades educacionais especiais no sistema regular de ensino. Também enfatiza a importância de garantir o acesso, a participação e a aprendizagem de todos os estudantes, independentemente das condições físicas, sensoriais, intelectuais ou múltiplas.

- GUIMARÃES, M. C. A.; BORGES, A. A. P.; VAN PETTEN, A. M. V. N. Trajetórias de alunos com deficiência e as políticas de educação inclusiva: da Educação Básica ao Ensino Superior. *Revista Brasileira de educação especial*, n. 27, 2021. Disponível em: https://tedit.net/b7t7jm. Acesso em: 18 set. 2024.

  No texto, os autores analisam as experiências e os desafios enfrentados por estudantes com deficiência ao longo de sua jornada educacional, desde a Educação Básica até o Ensino Superior, à luz das políticas de inclusão. Esse artigo oferece *insights* interessantes sobre como apoiar efetivamente esses estudantes e implementar práticas inclusivas que promovam a equidade e a continuidade educacional.

5. As avaliações

Conceituamos avaliação não como uma etapa isolada, mas como parte do processo educativo, no qual o professor, os estudantes, outros profissionais da escola e os familiares ou responsáveis legais dos estudantes participam ativamente.

Os vários tipos de avaliação fornecem dados sobre o desempenho dos estudantes. Cada um deles tem características e objetivos pedagógicos distintos, por isso é importante conhecer e aplicar o tipo adequado de avaliação em cada momento do processo educacional. Citaremos alguns exemplos de avaliação para que você os utilize em momento oportuno: diagnóstica, formativa, comparativa, ipsativa e somativa.

A escolha de um instrumento avaliativo deve sempre partir do objetivo do educador em relação ao que se pretende avaliar e sobretudo ao uso que dará aos resultados, pois eles podem servir a mais de um tipo de avaliação.

5.1 O planejamento das avaliações e os tipos de avaliação

Toda avaliação parte de um planejamento prévio, quando são definidos, pelo educador, os critérios avaliativos, geralmente considerando os objetivos de sua avaliação e o conteúdo ou conjunto de competências e habilidades que se pretende avaliar e que estejam em consonância com o currículo.

Portanto, o planejamento da avaliação deve especificar quais critérios/habilidades pretende-se avaliar e pode fazer parte do planejamento anual ou de cada etapa letiva.

5.1.1 Avaliação diagnóstica

Esse tipo de avaliação é realizado no início de um semestre ou ano letivo, ou de uma Unidade ou capítulo do material didático, com o objetivo de identificar o nível de conhecimento e as necessidades de aprendizagem dos estudantes. Tem como principal função mapear conhecimentos prévios, habilidades, dificuldades e interesses pelos temas propostos aos estudantes. Permite que o professor planeje e adapte as próprias estratégias de ensino de acordo com as necessidades específicas de cada turma e de cada estudante, promovendo uma aprendizagem mais personalizada e eficaz. Além disso, a avaliação diagnóstica ajuda a detectar possíveis lacunas no conhecimento dos estudantes, possibilitando intervenções pedagógicas precoces que visam corrigir essas deficiências antes que se tornem obstáculos maiores ao aprendizado. Para que isso ocorra, é necessário haver por parte da escola e, principalmente, dos educadores correções de rumo e criações de estratégias pedagógicas eficazes.

A seguir, citamos 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Testes diagnósticos: testes que avaliam conhecimentos específicos e habilidades dos estudantes em uma variedade de formatos, como perguntas objetivas, questões abertas e problemas de resolução.
- Questionários de autoavaliação: instrumentos com os quais os estudantes refletem sobre as próprias habilidades e conhecimentos. Esses questionários podem incluir perguntas sobre as percepções de pontos fortes e áreas de dificuldade em diversos componentes curriculares.

5.1.2 Avaliação formativa

A avaliação formativa tem como objetivo principal fornecer *feedback* contínuo a cada estudante, possibilitando ajustes imediatos no processo de ensino e aprendizagem. Esse tipo de avaliação tem por objetivo monitorar o progresso dos estudantes ao longo do processo educativo, identificar dificuldades, esclarecer dúvidas e reforçar a compreensão dos conteúdos antes que as dificuldades de aprendizagem se tornem maiores.

A seguir, citamos 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Observações em sala de aula: a observação sistemática das interações e do comportamento dos estudantes durante as atividades de ensino pode fornecer informações valiosas sobre suas habilidades sociais, motivação e compreensão dos conteúdos.
- Diários de reflexão ou de aprendizagem: ferramentas com as quais os estudantes registram as próprias experiências de aprendizagem, reflexões, dúvidas e progressos diários ou semanais.

5.1.3 Avaliação comparativa

A avaliação comparativa envolve a comparação do desempenho de um estudante com o de outros estudantes a partir de critérios preestabelecidos. Tem por objetivo situar o desempenho individual dentro de um contexto maior, identificando tanto quem se destaca quanto aqueles que precisam de apoio adicional. Esse modo de avaliação ajuda a identificar padrões de desempenho e diferenças significativas entre grupos de estudantes, fornecendo dados importantes para a tomada de decisões pedagógicas e políticas educacionais. É comum no Ensino Médio, especialmente em contextos competitivos de vestibulares e avaliações nacionais padronizadas, como o Enem.

Citamos a seguir 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Simulados: testes como o Enem, que avaliam os estudantes em uma variedade de componentes curriculares, fornecendo um panorama do desempenho educacional em nível nacional. Os simulados podem ser organizados com questões de provas aplicadas em anos anteriores.
- *Rankings* de desempenho: listagens que ordenam os estudantes com base nos resultados deles em avaliações específicas. Essa técnica é comum em concursos e vestibulares, que utilizam, por exemplo, escalas de avaliação.

5.1.4 Avaliação ipsativa

A avaliação ipsativa, no contexto educacional, foca o progresso pessoal dos estudantes ao longo do tempo. Além disso, permite a eles perceber melhorias, identificar áreas de crescimento e estabelecer metas pessoais, podendo também ser associada ao desenvolvimento do projeto de vida. Essa abordagem contrasta com as demais avaliações citadas.

A avaliação ipsativa é particularmente motivadora, pois destaca as conquistas individuais e incentiva a autoeficácia e a autoestima, e também detecta lacunas para melhorias.

A seguir, citamos 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Portfólios: coleta de trabalhos anteriores dos estudantes que possam evidenciar suas habilidades e conhecimentos prévios.
- Autoavaliações e avaliações por pares: questionários ou reflexões escritos pelos próprios estudantes avaliando seu progresso em relação a metas estabelecidas, que podem também compor o portfólio do estudante como registro do seu desenvolvimento anual no processo de ensino e aprendizagem.

5.1.5 Avaliação somativa

A avaliação somativa é uma abordagem que visa avaliar a aprendizagem dos estudantes ao final de um período instrucional, como um semestre ou ano letivo. O principal objetivo é determinar se os estudantes alcançaram as metas de aprendizagem estabelecidas e qual nível de competência demonstram em relação aos conteúdos curriculares. Essa avaliação é frequentemente utilizada para atribuir notas, promover ou reter estudantes, fornecendo informações sobre a eficácia do ensino, e tem função regulatória, subsidiando decisões de recuperação, conselhos de classe, reprovações.

São citados, a seguir, 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Provas escritas: são uma maneira tradicional de avaliação, com as quais os estudantes respondem a perguntas ou realizam tarefas em um período determinado.
- Trabalhos escritos: podem incluir ensaios, relatórios de laboratório, resenhas de livros, pesquisas, entre outros.

5.2 Trabalhando o Enem em sala de aula: estratégias para melhorar o desempenho dos estudantes

O Enem é uma das principais portas de entrada para o Ensino Superior no Brasil. Criado em 1998 pelo Ministério da Educação (MEC), avalia a qualidade do Ensino Médio e oferece acesso a programas de ingresso no Ensino Superior, tanto governamentais como de redes privadas. A seguir, apresentamos estratégias específicas para trabalhar o Enem nas aulas de Matemática.

1. Revisão dos conceitos fundamentais: priorizar a revisão de tópicos essenciais que são frequentemente abordados no Enem.

2. Resolução de problemas contextualizados: utilizar problemas que envolvam situações cotidianas para demonstrar a aplicação prática da Matemática.

3. Simulados e exercícios práticos: familiarizar os estudantes com o formato do exame e melhorar as habilidades de gerenciamento de tempo.

4. Uso de tecnologia educacional: incorporar ferramentas tecnológicas para diversificar os métodos de ensino e engajar os estudantes.

6. A coleção

6.1 A abordagem teórico-metodológica e os pressupostos da coleção

A BNCC preconiza que o ensino de Matemática deve se pautar nos contextos integrados pelos estudantes e, sobretudo, no protagonismo de cada um deles no processo de ensino e aprendizagem. Para isso realmente ocorrer em sala de aula, é essencial que as práticas pedagógicas possibilitem a participação e a ação dos estudantes.

É importante ressaltar que a aula tradicional não deve ser descartada, pois também possibilita um tipo de aprendizagem que contempla especificidades de determinados conteúdos e para certos públicos. Entretanto, outras práticas pedagógicas podem e devem ser utilizadas trazendo diferentes tipos de significação para os estudantes.

A BNCC sugere que sejam exploradas a resolução de problemas, o raciocínio lógico-matemático, a modelagem matemática, o pensamento computacional e as investigações em sala de aula. Essas práticas, bem como todo o conteúdo que compõe a BNCC e que é fundamento para a abordagem teórico-metodológica desta coleção, são resultado de pesquisas em educação, Educação matemática e letramento matemático, em estudos sobre culturas, mercado de trabalho e desenvolvimento tecnológico, entre outros temas.

6.2 A estrutura da coleção

Esta coleção é composta de 3 Volumes para os Ensino Médio, organizados em Unidades e capítulos. Os conteúdos são introduzidos tomando como base situações-problema ou textos contextualizados, seguidos pela formalização dos conceitos e boxes e/ou seções que complementam a teoria apresentada e têm como objetivos:

- contribuir para a inserção dos estudantes na sociedade em que vivem, proporcionando a eles conhecimentos básicos de teoria e prática de Matemática;
- incentivar a curiosidade, o interesse e a criatividade dos estudantes para que explorem novas ideias e descubram caminhos para a aplicação dos conceitos adquiridos, auxiliando-os na resolução de problemas;
- desenvolver o senso crítico por meio da leitura e da interpretação matemática de fatos e dados publicados;
- desenvolver hábitos de estudo, rigor, precisão, ordem, clareza, concisão, iniciativa, raciocínio, perseverança, responsabilidade, cooperação, crítica, debate e uso correto da linguagem;
- desenvolver a capacidade de classificar, seriar, relacionar, reunir, representar, analisar, sintetizar, conceituar, deduzir, provar e julgar;
- possibilitar o reconhecimento da inter-relação entre os vários campos da Matemática e desta com outras áreas do conhecimento;
- desenvolver o uso do pensamento e a capacidade de elaborar hipóteses, descobrir soluções, estabelecer relações e tirar conclusões;
- proporcionar atividades lúdicas e desafiadoras, incentivando o gosto pela Matemática e o desenvolvimento do raciocínio.

O texto da obra foi elaborado em linguagem acessível, que "conversa" com o leitor, em interação contínua, para possibilitar aos estudantes que compreendam as definições e as propriedades centrais da Matemática em nível elementar.

Indicamos, a seguir, como as Unidades do Livro do Estudante estão organizadas e detalhamos as funções das seções e dos boxes que compõem os Volumes desta coleção.

As respostas das atividades estão no final do Livro do Estudante. Neste Manual, as respostas também aparecem próximas às atividades, em outra cor, junto de algumas resoluções. As demais resoluções completas e comentadas das atividades propostas estão disponíveis nas *Orientações específicas* deste Manual.

Produções em foco

Essa seção, apresentada no início de cada Volume, tem como objetivo ensinar os estudantes a criar diferentes tipos de mídia. Para desenvolver habilidades práticas e tecnológicas, são apresentados minitutoriais que combinam imagens e textos para orientar na produção de mídias como *podcasts*, vídeos, infográficos, mapas conceituais, entre outros.

Unidade e capítulo

Cada Volume do Livro do Estudante está organizado em 5 Unidades e cada uma delas apresenta-se subdividida em capítulos visando facilitar a aprendizagem. Se considerar oportuno, você pode inverter a ordem das Unidades ou de conteúdos específicos, desde que a reorganização tenha sequência lógica e considere o nível de complexidade de cada um deles. Você pode, por exemplo, solicitar aos estudantes que façam uma atividade

proposta em um boxe ou uma seção para avaliação de conhecimentos prévios ou como incentivo para estudos posteriores.

Cada Unidade é iniciada com uma abertura, em uma dupla de páginas, com uma ou mais imagens e textos relacionados aos conteúdos que serão abordados. Na maioria das vezes, a abertura remete aos TCTs e aos temas interdisciplinares que despertam a curiosidade dos estudantes, apresentando assuntos para debates e atividades que contribuem para a formação integral deles por promover o desenvolvimento das habilidades de interpretação e argumentação.

Nas *Orientações específicas* deste Manual há indicações de como conduzir o trabalho com as aberturas; no entanto, os temas propostos possibilitam diversas abordagens envolvendo professores de outros componentes curriculares, os familiares ou responsáveis e a comunidade escolar. Explore as aberturas de acordo com as características da turma.

Atividades resolvidas e Atividades

As atividades presentes nesta coleção são variadas e apresentadas sequencialmente em cada capítulo, em gradação de dificuldade, para que os estudantes apliquem os conteúdos estudados. As atividades e os problemas propostos visam conduzir os estudantes à compreensão de conceitos e propriedades, sem, contudo, negligenciar o desenvolvimento das técnicas de cálculo. Estas, à medida que são abordadas, são aplicadas na resolução de problemas.

Também são propostas atividades mais desafiadoras, bem como para resolução e elaboração de problemas, uso de tecnologias digitais e troca de ideias, opiniões e argumentações entre os estudantes. Muitas atividades são contextualizadas e exploram situações do cotidiano dos estudantes. Elas os incentivam a utilizar diferentes estratégias de resolução e registro e, também, diversos materiais, como instrumentos de medição, instrumentos de construção geométrica, calculadora e outros recursos tecnológicos que os auxiliam a compreender conceitos e adquirir novos conhecimentos.

Experimente

Seção dedicada a atividades práticas que envolvem o uso de tecnologias digitais. Por meio de tutoriais passo a passo, os estudantes são orientados a utilizar ferramentas tecnológicas específicas para desenvolver habilidades importantes.

Cada atividade é apresentada de forma objetiva e clara, visando não só a familiarização dos estudantes com as tecnologias, mas também a aplicação desses recursos no estudo da Matemática.

Interligando

Essa seção visa promover a interdisciplinaridade, conectando a Matemática com outras áreas do conhecimento ou com diferentes temas dentro da própria Matemática. Para isso, apresenta textos, imagens e atividades que exploram essas conexões, permitindo aos estudantes verem a Matemática em contextos variados, alguns dos quais se relacionam aos TCTs e a questões relevantes e atuais.

Educação financeira

A Educação financeira é trabalhada nessa seção de modo contextualizado, com temas de interesse dos estudantes conectados a situações reais e relevantes do dia a dia. Para isso, a seção utiliza uma combinação de textos, imagens, gráficos e tabelas para explicar conceitos financeiros, além de propor atividades que estimulam a aplicação prática do que foi aprendido. Os TCTs *Educação Fiscal*, *Trabalho* e *Educação para o Consumo* são explorados para fornecer uma visão ampla e crítica da gestão financeira pessoal e suas implicações sociais.

Projeto

Essa seção, que ocorre uma vez em cada Unidade, propõe projetos que incentivam os estudantes a participarem de ações na comunidade, conectando o trabalho pedagógico aos TCTs e aos ODS.

Cada projeto é apresentado por meio de situações-problema que desafiam os estudantes a aplicar seus conhecimentos e habilidades de maneira prática. Além disso, a seção frequentemente sugere ou utiliza uma das mídias apresentadas na seção *Produções em foco*, promovendo o uso criativo e eficiente da tecnologia.

Boxes

Os boxes desta coleção são organizados para complementar e enriquecer o conteúdo principal com diferentes objetivos.

- ***Observação***: apresenta informações acessórias e complementares ao texto principal.
- ***Pense nisto***: desperta a curiosidade dos estudantes ou aprofunda conteúdos específicos com questionamentos que possam ser discutidos em dupla ou grupos, incentivando a troca de ideias entre os estudantes.
- ***Dica***: apresenta sugestões complementares ao conteúdo, podendo incluir indicações de *sites*, textos, *podcasts*, entre outros recursos.
- ***História da Matemática***: tem o objetivo de apresentar textos e informações relacionados a esse tema, ilustrando a construção do conhecimento com exemplos de problemas históricos ou curiosidades.

Viralize!

Seção encontrada ao final de cada Unidade com textos de diferentes mídias que abordam TCTs, além de questões relacionadas a ética e cidadania. A intenção é incentivar os estudantes a refletirem criticamente sobre temas atuais e de grande relevância social. Há também questões de interpretação, opinião pessoal com argumentação e proposta de pesquisa.

Para fundamentar saberes

Seção que está presente ao final de cada Unidade e é dedicada ao aprofundamento e à consolidação dos conteúdos trabalhados, por meio de questões autorais e de provas oficiais que estimulam o raciocínio crítico e a capacidade de análise dos estudantes.

Perguntas para autoavaliação fazem parte dessa seção com o objetivo de promover a reflexão dos estudantes sobre o processo de aprendizagem, englobando tanto os conhecimentos adquiridos quanto aspectos atitudinais e socioemocionais.

6.3 Sugestões de cronogramas para a coleção

Sugerimos que o professor que vai conduzir as aulas com esta coleção tenha, prioritariamente, formação disciplinar em Matemática. Em composição com esse professor, outros podem e devem ser convidados a trabalhar coletivamente nas aulas interdisciplinares.

Para um bom planejamento e execução desse trabalho coletivo, é importante que os professores envolvidos planejem juntos, em cada oportunidade, o cronograma de atuação e como será o papel de cada um deles no decorrer das aulas.

Para colaborar com o planejamento de seu trabalho ao utilizar cada Volume desta coleção, apresentamos uma sugestão de distribuição dos conteúdos a ser organizada em cronogramas bimestrais, trimestrais e semestrais. No entanto, você pode organizar os capítulos e as Unidades seguindo critérios de seleção dos temas de acordo com as necessidades da turma e levando em conta a carga horária semanal do componente curricular, as propostas curriculares do estado onde se situa a escola e o projeto pedagógico desta instituição.

Ao longo do ano letivo, também é importante considerar a possibilidade e a necessidade de replanejamento, tendo em conta tanto o desenvolvimento individual e coletivo dos estudantes quanto os resultados das avaliações aplicadas. Desse modo, torna-se mais factível o planejamento das aulas considerando a realidade dos estudantes, os conhecimentos prévios deles e as eventuais necessidades de recuperação de aprendizagens antes de seguir com determinado estudo.

Para a elaboração da sugestão de cronograma a seguir, foram consideradas 40 semanas letivas, conforme previsto pela Lei Federal n. 13.415 de 2017.

Volume 1

<table>
<tr><th colspan="2">Unidade e capítulo</th><th colspan="4">Sugestão de cronograma</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 1: Conjuntos e conjuntos numéricos</td><td>Capítulo 1: Conjuntos</td><td>Semanas 1 e 2</td><td rowspan="2">1º bimestre</td><td rowspan="3">1º trimestre</td><td rowspan="6">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Conjuntos numéricos</td><td>Semanas 3 a 6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidade 2: Funções de 1º grau e de 2º grau</td><td>Capítulo 3: Funções</td><td>Semanas 7 a 9</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Função afim</td><td>Semanas 10 a 13</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 5: Função quadrática</td><td>Semanas 14 a 18</td><td rowspan="4">2º trimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidade 3: Semelhança e trigonometria no triângulo retângulo</td><td>Capítulo 6: Semelhança e congruência de figuras planas</td><td>Semanas 19 a 22</td></tr>
<tr><td>Capítulo 7: Trigonometria no triângulo retângulo</td><td>Semanas 23 e 24</td><td rowspan="3">3º bimestre</td><td rowspan="6">2º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 8: Área de figuras planas</td><td>Semanas 25 a 29</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 4: Circunferência trigonométrica e leis dos senos e dos cossenos</td><td>Capítulo 9: Circunferência trigonométrica</td><td>Semanas 30 a 33</td><td rowspan="3">3º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 10: Trigonometria em triângulos quaisquer</td><td>Semanas 34 e 35</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 5: Estatística básica</td><td>Capítulo 11: Noções básicas de Estatística</td><td>Semanas 36 e 37</td></tr>
<tr><td>Capítulo 12: Representações gráficas</td><td>Semanas 38 a 40</td></tr>
</table>

Volume 2

<table>
<tr><th colspan="2">Unidade e capítulo</th><th colspan="4">Sugestão de cronograma</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 1: Funções exponenciais e funções logarítmicas</td><td>Capítulo 1: Função exponencial</td><td>Semanas 1 a 4</td><td rowspan="3">1º bimestre</td><td rowspan="3">1º trimestre</td><td rowspan="5">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Função logarítmica</td><td>Semanas 5 a 8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 2: Matrizes e sistemas lineares</td><td>Capítulo 3: Matrizes</td><td>Semanas 9 e 10</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Sistemas lineares</td><td>Semanas 11 a 15</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidade 3: Geometria espacial</td><td>Capítulo 5: Noções de Geometria espacial de posição</td><td>Semanas 16 a 18</td><td rowspan="2">2º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 6: Prismas e pirâmides</td><td>Semanas 19 a 23</td></tr>
<tr><td>Capítulo 7: Cilindros, cones e esferas</td><td>Semanas 24 a 30</td><td rowspan="2">3º bimestre</td><td rowspan="4">2º semestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 4: Análise de medidas e representações gráficas</td><td>Capítulo 8: Medidas em Estatística</td><td>Semanas 31 a 33</td><td rowspan="3">3º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 9: Quartis, percentis e box-plot</td><td>Semanas 34 e 35</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 5: Funções trigonométricas</td><td>Capítulo 10: Fenômenos periódicos e função seno</td><td>Semanas 36 a 38</td></tr>
<tr><td>Capítulo 11: Função cosseno</td><td>Semanas 39 e 40</td></tr>
</table>

Volume 3

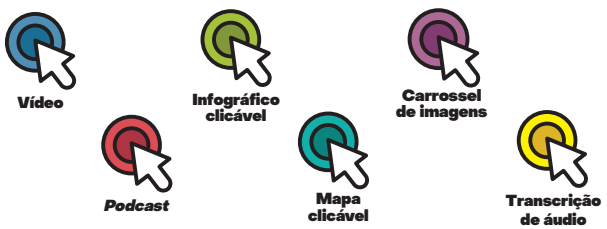
<table>
<tr><th colspan="2">Unidade e capítulo</th><th colspan="4">Sugestão de cronograma</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 1: Sequências e Matemática financeira</td><td>Capítulo 1: Sequências e progressões</td><td>Semanas 1 a 4</td><td rowspan="2">1º bimestre</td><td rowspan="3">1º trimestre</td><td rowspan="5">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Matemática comercial e financeira</td><td>Semanas 5 a 9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 2: Grandezas e medidas</td><td>Capítulo 3: Sistema Internacional de Unidades</td><td>Semanas 10 a 12</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Outras unidades de medida</td><td>Semanas 13 a 15</td><td rowspan="3">2º trimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 3: Pensamento computacional</td><td>Capítulo 5: Algoritmos e fluxogramas</td><td>Semanas 16 a 19</td></tr>
<tr><td>Capítulo 6: Noções de programação</td><td>Semanas 20 a 22</td><td rowspan="2">3º bimestre</td><td rowspan="4">2º semestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 4: Combinatória e probabilidade</td><td>Capítulo 7: Análise combinatória</td><td>Semanas 23 a 26</td></tr>
<tr><td>Capítulo 8: Probabilidade</td><td>Semanas 27 a 30</td><td rowspan="3">3º trimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidade 5: Geometria analítica, transformações geométricas e ladrilhamento</td><td>Capítulo 9: Noções de Geometria analítica</td><td>Semanas 31 a 34</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 10: Transformações geométricas no plano</td><td>Semanas 35 a 38</td></tr>
<tr><td>Capítulo 11: Ladrilhamento do plano</td><td>Semanas 39 e 40</td></tr>
</table>

6.4 Os Objetos Educacionais Digitais da coleção

Utilizar linguagens e tipos de mídia é fundamental para alcançar diversos públicos, pois cada estudante tem particularidades e maneiras de aprender melhor. Enquanto alguns assimilam informações de maneira mais produtiva por meio de vídeos, outros podem tirar melhor proveito de infográficos ou mapas interativos. Essa variedade também pode contribuir para sanar lacunas de conhecimentos prévios e apoiar diferentes modos de aprendizagem, ajudando a tornar o aprendizado mais acessível e significativo.

Nesse sentido, os Objetos Educacionais Digitais (OEDs) desta coleção podem ser utilizados com a finalidade de retomar, aprofundar, complementar ou apresentar novos conteúdos e temas, promovendo a compreensão e oferecendo várias maneiras de interagir com o livro. Além disso, alguns exemplos apresentados de modo mais simples também podem auxiliar na aprendizagem e respeitar as diversas trajetórias e perfis de cada estudante.

Nesta coleção constam vídeos, *podcasts*, infográficos clicáveis, mapas clicáveis e carrossel de imagens. Esses OEDs são indicados no sumário do Livro do Estudante e também nas páginas sugeridas para o trabalho, permitindo sua utilização de maneira integrada ao conteúdo.



7. Referências complementares para aprofundamento

Todos os *sites* foram acessados em 9 de setembro de 2024.

7.1 Livros para aprofundamento e formação continuada

- *A Matemática no Ensino Médio*, de Elon Lages Lima, Paulo César Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César de Oliveira Morgado. v. 1-4. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

  Nos Volumes de 1 a 3, são apresentados, de modo aprofundado, os principais conteúdos estudados em Matemática no Ensino Médio; no Volume 4 são apresentadas as soluções de todos os exercícios propostos nos Volumes anteriores.

- *Análise combinatória e probabilidade*, de Paulo Cezar Pinto Carvalho, Augusto César de Oliveira Morgado, Pedro Fernandez e João Bosco Pitombeira. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

  O livro aborda os princípios fundamentais da análise combinatória e da Probabilidade, oferecendo uma base sólida para o ensino desses tópicos no Ensino Médio.

- Coleção do Professor de Matemática IMPA/VITAE, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

  A coleção oferece um excelente material de consulta, aprofundamento e pesquisa para o professor de Matemática do Ensino Médio.

- *Como educar crianças anticapacitistas*, de Mariana Rosa e Karla Garcia Luiz. 1. ed. Florianópolis: Ed. das autoras, 2023.

  O livro oferece orientações práticas e teóricas para educar crianças e jovens de maneira inclusiva e anticapacitista, promover a igualdade e o respeito às diferenças e criar um ambiente de aprendizado mais justo e acolhedor para todos os estudantes.

- *Construções geométricas*, de Eduardo Wagner. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

  Métodos clássicos e modernos de construções geométricas são apresentados no livro proporcionando ferramentas práticas para ensinar Geometria de maneira visual e interativa.

- *Coordenadas no espaço*, de Elon Lages Lima. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

  O livro apresenta uma introdução detalhada ao sistema de coordenadas no espaço, facilitando a compreensão de conceitos tridimensionais essenciais para o Ensino Médio.

- *Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios*, de Elon Lages Lima. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

  O livro oferece uma abordagem completa sobre coordenadas no plano, incluindo a resolução detalhada de exercícios, ideal para professores que buscam aprofundar o conhecimento dos estudantes.

- *Dificuldades específicas de aprendizagem*: ideias para trabalhar com dislexia, discalculia, disgrafia, TDAH, TEA, síndrome de Asperger e TOC, de Diana Hudson. Tradução de Guilherme Suma. Petrópolis, RJ: Vozes, 2019.

  O livro traz a descrição e análise de diversos tipos de dificuldades de aprendizagem, auxiliando na conscientização e formação de educadores a respeito desse tema e oferecendo uma série de atividades que podem ser trabalhadas com os estudantes.

- *Introdução à Geometria espacial*, de Paulo Cezar Pinto Carvalho. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

  O livro apresenta uma introdução abrangente à Geometria espacial, cobrindo conceitos fundamentais e aplicações práticas.

- *Introdução à lógica*, de Cezar A. Mortari. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

  O livro aborda inferência, dedução, indução e outras conceituações e mostra a diferença entre a lógica clássica e a não clássica.

- *Introdução às técnicas de demonstração na Matemática*, de John A. Fossa. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O autor convida o leitor a "mergulhar" no caminho das argumentações em Matemática.

- *Logaritmos*, de Elon Lages Lima. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

  Nesse livro, o autor oferece uma explicação clara e concisa sobre logaritmos, facilitando o ensino desse conteúdo no Ensino Médio.

- *Medida e forma em Geometria*, de Elon Lages Lima. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

  A relação entre medida e forma na Geometria é abordada nesse livro, fornecendo uma base teórica e prática para professores.

- *Meu professor de Matemática e outras histórias*, de Elon Lages Lima. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

  Histórias e experiências do autor com a Matemática são relatadas no livro, oferecendo uma perspectiva inspiradora e motivadora.

- *Os Elementos de Euclides*, traduzido por Irineu Bicudo. 1. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

  Trata-se da primeira tradução completa do texto grego para a Língua Portuguesa. A obra da Antiguidade clássica contém definições, postulados, demonstrações de 465 proposições em forte sequência lógico-dedutiva, referentes à Geometria plana e à Geometria espacial. Há também capítulos destinados à teoria dos números.

- *Progressões e Matemática financeira*, de Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado e Sheila Zani. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

  O livro aborda progressões aritméticas e progressões geométricas, além de conceitos de Matemática financeira, proporcionando uma aplicação prática dos conteúdos matemáticos no Ensino Médio.

- *Trigonometria e números complexos*, de Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado e Manfredo Perdigão do Carmo. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

  O livro oferece uma abordagem detalhada sobre Trigonometria e números complexos com foco em aplicações práticas e teóricas.

7.2 História da Matemática

- *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática, de Gilberto G. Garbi. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

  A obra faz um relato da construção do conhecimento matemático em 4 milênios, destacando a vida e as contribuições de grandes matemáticos, a Matemática contemporânea e as mulheres da Matemática.

- *Cinema e História da Matemática*: entrelaços possíveis, de Romélia Mara Alves Souto. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

  A autora discute relações possíveis entre o cinema e a História da Matemática, considerando que tais relações podem construir um ambiente favorável à aprendizagem.

- Coleção História da Matemática para professores.

  Com os dois primeiros livros lançados em 2009, a coleção visa à divulgação e ao uso das produções acadêmicas provenientes de estudos e pesquisa na História da Matemática.

  Em particular, destacamos: o livro *A descoberta do teorema de Pitágoras*, de Sofia Cardoso Marques (1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011), no qual a autora descreve o resultado e as aplicações desse teorema em algumas civilizações antigas, contextualizando-o na cultura e nos conhecimentos dessas civilizações; e o livro *Matemática e medida*: três momentos históricos, de John A. Fossa (org.) (1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009), que apresenta aspectos histórico-epistemológicos importantes para o desenvolvimento de alguns conceitos em Matemática, como medidas.

- Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.

  Essa coleção procura dar ao leitor uma visão abrangente da história da descoberta da Matemática. Está dividida em 6 Volumes, estruturados em tópicos curtos, denominados cápsulas, nos quais é abordado algum assunto ligado à história da criação e do desenvolvimento de um grande tema matemático.

  Entre os Volumes, destacamos: *Números e numerais*, de Bernard H. Gundlach (1. ed. São Paulo: Atual, 1992); *Geometria*, de Howard Eves (1. ed. São Paulo: Atual, 1992); e *Trigonometria*, de Edward S. Kennedy (1. ed. São Paulo: Atual, 1992).

- *História da Matemática*, de Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

  Nessa edição, destacamos os capítulos "Legados do século vinte" e "Tendências recentes", que discorrem, entre outros assuntos, sobre o último teorema de Fermat.

- *História da Matemática*, de Howard Eves. 1. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

  Na introdução de alguns capítulos, encontramos um relato do panorama cultural e histórico da época em questão.

- *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, de Tatiana Roque. 1. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

  O livro aborda diferentes sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Antiguidade até o século XIX, mostrando que práticas diversas sempre coexistiram na busca por soluções diferentes para problemas semelhantes.

- *O último teorema de Fermat*, de Simon Singh. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

  O livro conta a história da busca épica para resolver um dos maiores enigmas da Matemática de todos os tempos.

7.3 Ensino e aprendizagem em Matemática e Educação Matemática

- *A arte de resolver problemas*, de George Pólya. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

  O autor analisa nesse livro métodos criativos de resolução de problemas, revela as 4 etapas básicas de uma resolução e sugere estratégias a serem desenvolvidas.

- Coleção Tendências em Educação matemática.

  A coleção é voltada para profissionais da área que buscam refletir sobre Educação matemática, a qual está embasada no princípio de que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões. A coleção conta com diversas obras, entre as quais destacamos: *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos estudantes, de Helena Noronha Cury (2. ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2007), em que a autora defende a ideia de que a análise de erros é uma abordagem de pesquisa e também uma possibilidade metodológica se os estudantes forem levados a questionar e refletir sobre as próprias soluções; *Informática e Educação matemática*, de Marcelo de Carvalho Borba e Miriam Godoy Penteado (5. ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2007), com apresentação de exemplos de uso da informática com estudantes e professores em que se debatem temas ligados às políticas governamentais para a informática educativa e

outras questões epistemológicas e pedagógicas; *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*, de Vanessa Sena Tomaz e Maria Manuela Martins Soares David (1. ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2008), no qual, pensando em uma formação integral dos estudantes, os autores ressaltam a importância de tratar o ensino da Matemática levando em conta contextos sociais e a visão interdisciplinar da relação ensino-aprendizagem.

- *Educação Matemática*: da teoria à prática, de Ubiratan D'Ambrosio. 23. ed. Campinas: Papirus, 2014.

  O autor discute inovações na prática docente, propondo reflexões sobre o ensino de Matemática.

- *Educação Matemática*: pesquisa em movimento, de Maria Aparecida Viggiani Bicudo e Marcelo de Carvalho Borba (org.). 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

  Esse livro é fruto dos trabalhos de investigação na área da Educação matemática desenvolvidos por professores pesquisadores do programa de pós-graduação em Educação Matemática da Unesp, do *campus* de Rio Claro (SP). Divide-se em 16 capítulos, escritos por vários professores, que expõem ideias, dúvidas, questionamentos e relatos de experiências na área.

- *Educar por competências*: o que há de novo?, de José Gimeno Sacristán e outros. 1. ed. Porto Alegre: Artmed, 2011.

  A obra apresenta discussões sobre a educação por competências, incluindo um capítulo destinado à avaliação de aprendizagens.

- *Ensinando Matemática para adolescentes*, de Paul Chambers e Robert Timlin. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

  A obra traz sugestões de uso de recursos, planos de aula e discute como avaliar o progresso do estudante de maneira efetiva.

- *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade, de Ubiratan D'Ambrosio. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

  Essa obra apresenta e discute a Etnomatemática levando em conta a realidade sociocultural do estudante, o ambiente em que vive e o conhecimento que traz de casa.

- *Investigações matemáticas na sala de aula*, de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

  Nessa obra, os autores portugueses propõem uma reflexão sobre atividades de investigação em Matemática, suas vantagens e dificuldades.

- *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio, de Estela Kaufman Fainguelernt e Katia Regina Ashton Nunes. 1. ed. Porto Alegre: Penso, 2012.

  Os autores buscam incentivar o professor a procurar novas ideias para uso em sala de aula que o incentivem e também motivem os estudantes para a aprendizagem em Matemática no Ensino Médio.

- *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador, de Jo Boaler. Porto Alegre: Penso, 2018.

  A autora é precursora de uma abordagem que busca incentivar o potencial dos estudantes mediante metodologias ativas de aprendizagem e criatividade.

- *Modelagem em Educação matemática*, de João Frederico da Costa de Azevedo Meyer, Ademir Donizeti Caldeira e Ana Paula dos Santos Malheiros. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

  Os autores desse livro levam o leitor a refletir sobre aspectos da modelagem e suas relações com a Educação matemática.

- *Práticas de modelagem matemática na Educação matemática*, de Lourdes Maria Werle de Almeida, Jussara de Loiola Araújo e Eleni Bisognin. 1. ed. Londrina: Eduel, 2011.

  As autoras descrevem experiências em sala de aula e resultados de pesquisas com modelagem matemática.

- *Tecnologias digitais e Educação matemática*, de Marcelo C. Borba e Aparecida Chiari (org.). 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

  Os autores exploram a importância e o potencial das tecnologias digitais para educação e aprendizagens em Matemática.

7.4 Avaliação

- *A avaliação da aprendizagem escolar*, de Celso Antunes. 10. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012. (Coleção Na sala de aula).

  A obra apresenta sugestões de práticas, expõe princípios e debate estratégias e modelos avaliativos.

- *As competências para ensinar no século XXI*: a formação de professores e o desafio da avaliação, de Philippe Perrenoud e Monica Gather Thurler. 1. ed. São Paulo: Penso, 2002.

  O livro traz para o leitor os textos nos quais os autores suíços apoiaram suas falas na vinda ao Brasil, em 2001, em conferências que contavam com a participação dos educadores brasileiros Lino de Macedo, Nilson José Machado e Cristina D. Allessandrini.

- *Avaliação de aprendizagem na escola*: estudos e proposições, de Cipriano Carlos Luckesi. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

  A obra é constituída por alguns artigos escritos pelo autor que posicionam a avaliação como um ato seletivo e inclusivo.

- *Avaliação em Matemática*: pontos de vista dos sujeitos envolvidos na Educação Básica, de César Augusto do Prado Moraes. 1. ed. Jundiaí: Paco, 2012.

  O livro investiga as concepções de avaliação em Matemática na Educação Básica, analisando também os processos avaliativos usados pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e pelo Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp).

- *Avaliação escolar*: vários enfoques e uma só finalidade, melhorar a aprendizagem, de Adriana Patrício Delgado *et al*. 1. ed. Jundiaí: Paco, 2015.

  A obra traz parte da produção acadêmica sobre avaliação, contribuindo para a formação docente.

- *Educação*: competência e qualidade, de Nilson José Machado. 2. ed. São Paulo: Escrituras, 2010. (Coleção Ensaios transversais).

  Nesse livro, o autor convida a uma reflexão sobre a formação na Educação Básica, o significado da qualidade no terreno educacional e as competências a serem desenvolvidas.

7.5 Recursos educacionais digitais

O portal principal da coleção *M3 Matemática Multimídia* contém recursos educacionais em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp-SP. Os recursos podem ser buscados pelas mídias (experimentos, vídeos, *softwares* ou áudios) ou pelos temas centrais (análise de dados e Probabilidade, Geometria e medidas ou números e funções). Disponível em: https://tedit.net/jb7qn1.

7.6 Sugestões de revistas

- *Educação Matemática em Revista*

  É uma publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) que aborda assuntos de interesse para o professor e pesquisador de Matemática. Para os interessados, é possível conseguir mais informações no *site* disponível em: https://tedit.net/6uycfr.

- *Revista do Professor de Matemática* (RPM)

  Publicação destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Disponível em: https://tedit.net/rvit8y.

- *Nova Escola*

  A revista auxilia o educador na complexa tarefa de ensinar. Há reflexões e artigos sobre temas atuais de educação, bem como propostas e relatos de atividades em sala de aula. Disponível em: https://tedit.net/tbxqam.

7.7 Sugestões de *sites*

- Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática João Affonso Pascarelli. Disponível em: https://tedit.net/frda0y.

  Nesse *site*, é possível participar de cursos para professores destinados a atualização profissional, oficinas, palestras e seminários.

- Laboratório de Ensino de Matemática (Unicamp). Disponível em: https://tedit.net/wl8lkg.

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática da Unicamp-SP (IMECC – Unicamp) com indicações de cursos, seminários, eventos e publicações que incentivam o aperfeiçoamento de professores da Educação Básica.

- Laboratório de Matemática – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (Unesp). Disponível em: https://tedit.net/rqasoz.

  No *site*, é possível encontrar ideias de jogos para o ensino da Matemática desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

- Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: https://tedit.net/r0gova.

  É o *site* oficial da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), sob responsabilidade do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa), situado no Rio de Janeiro. Estão disponíveis para *download* as provas com gabaritos de vários anos da OBM, nos diversos níveis.

- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Disponível em: https://tedit.net/rvlj0j.

  Nesse *site* é possível obter as provas resolvidas das edições anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Além disso, há um banco de questões separadas por níveis.

  O *site* também conduz a um canal chamado Portal de Matemática OBMEP, no qual são disponibilizadas videoaulas com professores selecionados, voltadas para estudantes e professores, além de conteúdos interativos, vídeos e materiais que podem ser baixados.

- Mathema. Disponível em: https://tedit.net/6uno05.

  Nesse *site*, o professor encontra informações sobre o Ensino Médio, cursos de aperfeiçoamento profissional, sugestões de livros, revistas, *sites*, *softwares* e vídeos que visam melhorar a prática docente, bem como reflexões sobre temas relacionados à Educação matemática.

- Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponível em: https://tedit.net/0sb2ne.

  No *site* há indicação de eventos regionais, nacionais e até internacionais. Também estão listados grupos de pesquisa de universidades em todo o Brasil e laboratórios de Educação matemática de todas as regiões.

7.8 Questões curiosas de Matemática, jogos e desafios de raciocínio quantitativo

- *Conexões matemáticas educacionais*: aprendendo novas e explorando antigas, de Ruy Madsen Barbosa. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

  O livro explora brincadeiras com retângulos mágicos, quadrados "bem comportados", cubos, policubos e dominós, estabelecendo conexões com teoria dos números, análise combinatória, etc.

- *Matemática e Arte*, de Dirceu Zaleski Filho. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

  O autor propõe aproximar a Matemática e a Arte no ensino, analisando e integrando a História da Matemática e a História da Arte e sugerindo novas possibilidades de trabalho em sala de aula.

- *Revisitando conexões matemáticas com brincadeiras, explorações e materiais pedagógicos*, de Ruy Madsen Barbosa. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

  O autor elege objetos geométricos como pontos de partida para atividades e reflexões.

7.9 Filmes sobre Matemática e personalidades da área

- *O homem que viu o infinito* (2015)

  O filme conta a história de Snirivasa Ramanujan, matemático indiano de origem simples, mas considerado um dos maiores matemáticos do século XX.

- *O jogo da imitação* (2015)

  Nesse filme, ambientado durante a Segunda Guerra Mundial, Alan Turing e equipe auxiliam o governo britânico a desvendar um código secreto nazista, mostrando a origem dos computadores e a aplicação da Matemática na criptografia.

- *Uma mente brilhante* (2001)

  O filme conta a história de John Nash, famoso matemático americano que sofria de esquizofrenia. Nash é responsável por diversas descobertas com aplicações na Economia, que lhe renderam um prêmio Nobel.

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS

Introdução ao Volume 3

Este volume é composto de 11 capítulos, organizados em 5 Unidades, abordando diversas habilidades e competências específicas da Matemática e suas Tecnologias previstas para o Ensino Médio na BNCC, bem como competências gerais da Educação Básica e Temas Contemporâneos Transversais.

Na Unidade **1** – "Sequências e Matemática financeira", são abordadas as sequências numéricas, a identificação das progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG), assim como os processos de construção do termo geral e do cálculo da soma de seus termos. Além disso, será desenvolvido o assunto Matemática financeira, com ênfase no cálculo de aumentos e descontos, juro simples, juro composto e tipos de amortização, na interpretação de situações cotidianas nas quais a Matemática financeira se faz necessária.

Na Unidade **2** – "Grandezas e medidas", são apresentadas diferentes unidades de medidas usadas no Sistema Internacional de Unidades, diferentes instrumentos de medida, conversões entre unidades de medidas, técnicas de arredondamento de números decimais e notação científica. Também são abordados o conceito de acurácia, estimativa e algarismos significativos, para enfatizar a precisão de medidas.

Na Unidade **3** – "Pensamento computacional", são abordados conceitos relacionados ao raciocínio lógico-matemático e suas aplicações, como na construção de algoritmos para resolver problemas, utilizando fluxogramas ou conceitos iniciais de linguagem de programação.

Na Unidade **4** – "Combinatória e Probabilidade", são apresentados conceitos básicos de Análise combinatória, como o princípio multiplicativo e aditivo da contagem e o diagrama de árvore. Na sequência são estudados os principais agrupamentos (permutações, arranjos, combinações) cujas técnicas de contagem são feitas a partir do princípio multiplicativo da contagem. Há também um tópico com uma breve apresentação da teoria dos grafos, um ramo da Matemática relacionado à Combinatória. Também serão estudados os fenômenos aleatórios e determinísticos e, na sequência, o conceito de espaço amostral e de evento, que são essenciais para compreender probabilidade. Após o estudo de probabilidade frequentista e clássica, define-se um espaço equiprovável. Por fim, abordam-se os conceitos de probabilidade da união de 2 eventos, de probabilidade condicional e da interseção de 2 eventos e de eventos independentes, os quais são utilizados para resolver diversas situações-problema, inclusive em contextos do dia a dia.

Na Unidade **5** – "Geometria analítica, transformações geométricas e ladrilhamento", inicia-se o estudo de Geometria analítica com o plano cartesiano, para tratar dos conceitos de ponto, reta e posições relativas entre 2 retas com artifícios da Álgebra. Além disso, trata-se também das transformações geométricas isométricas (reflexão, rotação e translação) e homotéticas. Por fim, finaliza-se com o trabalho de ladrilhamento no plano.

O estudo de diferentes conteúdos, objetos do conhecimento, habilidades e competências permite o desenvolvimento de distintas abordagens nas aulas e, de maneira análoga, exige uma gama diversificada de conhecimentos prévios dos estudantes. Assim, apresentamos a seguir orientações didáticas e abordagens específicas para o Volume, de modo a nortear seu trabalho nas aulas.

Para além dessas sugestões, conforme exposto nas *Orientações gerais* deste Manual, é importante organizar previamente os diferentes modelos avaliativos – no início de cada bloco pedagógico (Unidade ou capítulo, por exemplo), durante o desenvolvimento dos blocos e ao término dos estudos – e fazer uso dos resultados para o planejamento e replanejamento das aulas e das metodologias de ensino.

Por exemplo, para diagnosticar tanto as aprendizagens já efetivadas quanto aquelas que precisam ser retomadas e/ou recuperadas, mobilize os conhecimentos prévios dos estudantes no início de um bloco pedagógico. Após o estudo de um tópico, seção ou capítulo, cada estudante, individual ou coletivamente, e mediado por você, pode mensurar as aprendizagens e verificar como está desenvolvendo as habilidades relacionadas aos conteúdos e objetos do conhecimento mobilizados. Além disso, ao término da Unidade ou no decorrer do estudo dela, sugira as atividades autorais e as questões de exames de larga escala apresentadas na seção "Para fundamentar saberes" para mobilizar e avaliar os diversos conteúdos e replanejar as aulas e as metodologias de ensino.

Unidade 1: Sequências e Matemática financeira

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG01, CG04 e CG10.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03 e CEMAT05.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT301, EM13MAT302, EM13MAT303, EM13MAT304, EM13MAT507 e EM13MAT508.

Habilidade de outras áreas do conhecimento:
EM13CNT206.

Temas Contemporâneos Transversais: *Educação Ambiental*; *Educação Financeira*; *Educação Fiscal*; *Educação para o Consumo*; *Saúde*; *Trabalho*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Identificar regularidades em padrões geométricos e numéricos e escrever leis de formação de sequências numéricas.
- Determinar a razão, o termo geral e a soma dos *n* primeiros termos de uma PA e de uma PG.
- Calcular a soma dos infinitos termos de uma PG.
- Associar a progressão aritmética e a geométrica, respectivamente, a função polinomial de 1º grau e a função exponencial.

- Representar graficamente PA e PG, reconhecendo que tais representações são casos particulares de função polinomial de 1º grau e de função exponencial, respectivamente.
- Resolver problemas envolvendo termo geral e soma dos termos de sequências fazendo uso de planilhas eletrônicas.
- Calcular aumentos e descontos de preços de produtos e serviços em situações cotidianas, bem como variações percentuais (simples ou sucessivas).
- Identificar e calcular juro simples e composto em transações financeiras diversas.
- Aplicar conceitos que envolvam juro simples e composto na resolução de problemas para a tomada de decisões.
- Aplicar o conceito de valor presente (ou atual) de um conjunto de pagamentos em situações de compras parceladas e financiamentos.
- Modelar problemas de juro simples usando uma PA e juro composto usando uma PG.
- Reconhecer os mecanismos dos principais sistemas de amortização: SAC e SFA.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

A abertura da Unidade propõe uma investigação acerca do tema Economia e Sustentabilidade, cujo objetivo é, de maneira crítica, propor o debate e a reflexão sobre práticas no dia a dia que visam promover a sustentabilidade e a economia de dinheiro. Debata com os estudantes as propostas apresentadas na abertura e, em conjunto, busquem colocar em prática na escola e em casa aquelas que considerarem viáveis.

O trabalho com essa abertura favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Ambiental* e *Educação Financeira* e da habilidade EM13CNT206 de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, ao abordar políticas ambientais para garantir a sustentabilidade.

Capítulo 1

O início do capítulo apresenta uma situação investigativa sobre o conceito de sequência numérica finita – número de gols das rodadas de 1 a 12 de um campeonato de futebol feminino – e como tal sequência pode estar associada à ideia de função. A partir disso, são apresentados os conceitos de termo geral de uma sequência, bem como o conceito de sequências determinadas por uma lei de recorrência.

Chame a atenção dos estudantes para o fato do termo geral de uma sequência ser parecido com a lei de uma função, ou seja, uma fórmula que permite descobrir qualquer termo, conhecendo-se a posição desse termo na sequência.

A seção "Atividades" da página 18 traz uma série de atividades que promovem a aplicação dos conceitos estudados até o momento, como a determinação de elementos em sequências definidas pelo seu termo geral ou por uma relação de recorrência.

Destaque que uma progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante real. Mostre aos estudantes como classificar progressões aritméticas a partir de suas razões (r). Chame a atenção para o fato de uma PA poder ser associada a uma função polinomial de 1º grau, alertando que, nesse caso, o domínio da função é $\mathbb{N}^*$.

A seção "Atividades" da página 20 traz atividades que promovem a habilidade EM13MAT507. O trabalho com a atividade **7** é importante para verificar se o estudante consegue diferenciar uma sequência numérica qualquer de uma PA.

As atividades **9** e **10** procuram desenvolver a habilidade de identificar progressões aritméticas para resolver problemas. Em ambas, é importante que os estudantes encontrem as variáveis associadas e utilizem a fórmula do termo geral da PA.

Na atividade **16**, é importante mostrar aos estudantes que não existe uma única maneira de representar 3 termos consecutivos em uma PA, embora a notação $(x - r, x, x + r)$ seja usual, podemos também usar a notação $(x, x + r, x + 2r)$, por exemplo.

As atividades **17** e **18** permitem que os estudantes associem a relação entre as medidas dos ângulos internos e as medidas dos lados de um triângulo a uma PA. Na atividade **17**, relembre que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º e, na atividade **18**, relembre com os estudantes o teorema de Pitágoras. A utilização de diferentes estratégias na resolução desses problemas promove a competência específica CEMAT01.

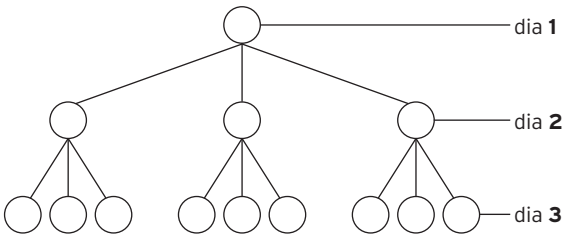
Trabalhe o tópico "Soma dos n primeiros termos de uma PA" utilizando o método proposto por Gauss. Solicite aos estudantes que tentem adicionar os 10 primeiros números da sequência de números naturais, uma tarefa simples, em que eles podem conferir o resultado. Escreva os números de 1 a 10 e mostre que, adicionando os números que estão à mesma medida de distância das extremidades, o resultado é constante ($1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6 = 11$). Mostre que a soma total da PA é 55 ($S_{10} = 55$), que é 5 vezes o 11. O número 5, não por acaso, é metade de 10, que é a quantidade de números que foram somados. Conclua com isso, que, em qualquer PA finita, a soma de 2 dos termos equidistantes dos extremos sempre será constante e que, dessa maneira, é possível deduzir a expressão da soma dos termos da PA finita, promovendo a competência específica CEMAT05.

Se julgar pertinente, apresente alguns casos recentes de estudantes da Educação Básica que deduziram, por conta própria, alguma propriedade ou fórmula matemática. Mesmo que muitas vezes essas fórmulas ou propriedades já sejam conhecidas, compartilhar esses exemplos pode despertar o interesse pela investigação matemática, possibilitando o desenvolvimento da competência geral CG01 da BNCC. Um exemplo que pode ser apresentado é o da estudante Júlia Pimenta Ferreira, de 11 anos, que desenvolveu o próprio método de calcular raízes quadradas, disponível em: https://tedit.net/5e4jnz (acesso em: 11 set. 2024).

As atividades **21**, **23** e **25**, da seção "Atividades" da página 22, trabalham a habilidade de resolver problemas com a utilização de fórmulas deduzidas pelos estudantes, de acordo com a habilidade EM13MAT507.

No tópico "Progressões geométricas", desenvolva o conceito de uma PG ser uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante real. Mostre que a classificação de uma PG pode ser feita a partir da sua razão (q) e que, diferentemente da PA, pode ser classificada como crescente, decrescente, alternada (ou oscilante), constante e estacionária.

Na resolução do item **a** do boxe "Pense nisto" da página 23, destaque que o uso de esquemas, como o mostrado a seguir, pode ser interessante para ilustrar a quantidade diária de convites feita por cada um dos criadores do perfil.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Na seção "Atividades" da página 24, as atividades **26** a **29** podem ser usadas para fixação. No item **f** da atividade **27**, relembre com eles a propriedade de divisão de potência de mesma base. As atividades **30** a **33**, **35** e **36** permitem que os estudantes trabalhem a habilidade de resolver problemas envolvendo progressões geométricas, promovendo a habilidade EM13MAT508.

Na atividade **36**, se achar pertinente, promova uma conversa com os estudantes sobre o planejamento de pagamentos de dívidas e, se possível, comente sobre a diferença de amortização de prazo e amortização de prestação. É importante destacar o "perigo" das dívidas contraídas pelos consumidores, especialmente no cartão de crédito e no uso do cheque especial. Esse tipo de trabalho favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira*.

Na seção "Atividades" da página 26, as atividades **41** a **44** permitem que os estudantes desenvolvam a habilidade de resolver problemas relacionados a soma dos termos de uma PG finita, promovendo assim a habilidade EM13MAT508.

Ao trabalhar com o tópico "Soma dos termos de uma PG infinita", destaque aos estudantes que, se a PG tiver infinitos termos, a princípio pode parecer impossível calcular sua soma, afinal, são infinitos números. Mas, se as parcelas forem ficando cada vez menores, é possível encontrar um valor para o qual a soma converge. Por fim, destaque para os estudantes que, se a PG tiver razão igual ou maior do que 1 ou então igual ou menor do que –1, não é possível calcular a soma dos infintos termos. Para isso, considere analisar sequências do tipo $a_n = 2^n$ ou $b_n = -3^n$.

Na atividade **47** da seção "Atividades" da página 30, os estudantes devem propor um problema com base nos dados indicados. Proponha que trabalhem em duplas e troquem os enunciados com outra dupla para a resolução.

O tópico "Progressões e funções" permite aos estudantes explorarem problemas relacionados a PA e PG como sendo casos particulares (com domínio discreto) de uma função polinomial de 1º grau e de uma função exponencial respectivamente, desenvolvendo, assim, aspectos da habilidade EM13MAT302 e da competência específica CEMAT03 da BNCC.

A atividade **56**, sobre o crescimento da planta, possibilita o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental*, enquanto as atividades **55** e **57** permitem desenvolver com os estudantes o TCT *Educação Financeira*.

No boxe "História da Matemática" da página 34, é importante promover uma conversa com os estudantes sobre o pioneirismo de Ada Lovelace na programação de computadores no início do século XIX. Durante essa época, e por muitos anos, o acesso das mulheres à educação era bastante restrito. Ada Lovelace, no entanto, conseguiu se destacar significativamente, sendo frequentemente reconhecida como a primeira pessoa programadora de computadores.

Aproveite o tema para perguntar aos estudantes se conhecem cientistas mulheres contemporâneas e como percebem a participação feminina nas áreas de Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM – acrônimo em inglês para *Science*, *Technology*, *Engineering and Maths* – Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática) nos dias de hoje. A conversa a respeito da participação de mulheres em diversas áreas profissionais possibilita o desenvolvimento do TCT *Trabalho*.

Para trabalhar a seção "Planilhas eletrônicas", recomendamos levar os estudantes a um laboratório de informática, para que, de forma prática, sejam trabalhados a construção e o funcionamento das planilhas. Proponha aos estudantes que construam diversas planilhas para organizar financeiramente os ganhos e gastos de suas famílias, por exemplo. Caso não haja um laboratório de informática na sua escola, é possível adaptar as atividades para celulares e *tablets*.

Proponha aos estudantes que usem planilhas eletrônicas para realizar as atividades da seção "Atividades" da página 37.

Destaque aos estudantes que a atividade **63** apresenta a famosa sequência de Fibonacci e proponha que eles calculem a soma pedida e determinem alguns de seus termos. Depois, proponha o trabalho com o boxe "História da Matemática", no qual a história por trás dessa sequência é apresentada.

Educação financeira

Essa seção permite o desenvolvimento do TCTs *Educação Financeira* e *Educação Fiscal* e da habilidade EM13MAT104 da BNCC. Embora a resposta da atividade **3** seja pessoal, é importante destacar alguns pontos sobre a importância de investir.

- Proteger-se da inflação: A inflação corrói o poder de compra do cidadão, por exemplo, R$ 100,00 ao final do ano não têm o mesmo poder de compra que R$ 100,00 no início do ano. Investir em ativos que superam a inflação é uma maneira de preservar o valor do dinheiro.
- Ter uma reserva financeira para lidar com imprevistos como perda de emprego, problemas de saúde, etc.
- Aumentar o patrimônio.
- Possibilitar fazer um planejamento financeiro para a realização de sonhos, como comprar um carro, comprar um imóvel, fazer uma viagem, abrir o próprio negócio, entre outros.

Interligando

Essa seção pode ser trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo o desenvolvimento do TCT *Saúde*.

Proposta para o professor

Aproveite para conversar com os estudantes sobre a importância de manter a carteirinha de vacinação sempre atualizada. As recomendações da Sociedade Brasileira de Imunização (SBIm) para o calendário de vacinação das diferentes faixas etárias podem ser encontradas em: https://tedit.net/i05fj0 (acesso em: 11 set. 2024).

No boxe "Pense nisto" da página 39, comente com os estudantes que a disseminação de informações falsas pode levar as pessoas a subestimar a gravidade de doenças epidemiológicas ou a eficácia das medidas de controle, como uso de máscaras, vacinação e distanciamento social, o que pode levar as pessoas a aderir menos a elas, aumentando a propagação dessas

doenças. Além disso, pode aumentar o número de contatos entre indivíduos suscetíveis e infectados, elevando o valor do número básico de reprodução R_0, o que indica uma disseminação maior da infecção.

Proposta para o professor

Para saber mais sobre pós-verdade, leia a matéria "A arte de manipular multidões", publicada pelo jornal espanhol *El País*, em 28 ago. 2017, disponível em: https://tedit.net/495dtc (acesso em: 25 set. 2024).

Projeto

O objetivo desse projeto é levar os estudantes a refletir sobre a prática do empreendedorismo, estimulando a criatividade, a busca por inovação e solução de problemas, a autonomia, o trabalho em equipe e a responsabilidade social. Espera-se que eles compreendam que empreender pode ser uma alternativa para se tornarem protagonistas de suas vidas profissionais.

Durante o projeto, os estudantes vão realizar pesquisas de mercado, elaborar produtos funcionais e sustentáveis e organizar um evento para vendê-los na escola, destinando o lucro arrecadado para alguma melhoria da comunidade escolar ou local. Assim, os estudantes terão a oportunidade de elaborar planilhas para auxiliar no controle financeiro das vendas. Nesses momentos, eles podem aplicar conhecimentos de Matemática financeira para realizar os cálculos necessários, analisar as informações registradas e tomar decisões, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT203 e da competência geral CG04 da BNCC.

Todas as etapas do projeto deverão contar com a participação de todos os integrantes de cada grupo. Em vários momentos eles podem recorrer à utilização de diferentes linguagens e recursos para divulgar informações referentes ao produto elaborado por eles, propiciando o desenvolvimento das competências gerais CG04 e CG10.

Na "Etapa 5", comente com os estudantes que, ao trabalhar com empreendedorismo, é fundamental considerar o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, como as florestas. Incorporar a sustentabilidade nos negócios não só contribui para a conservação ambiental, mas também fortalece a responsabilidade social e a longevidade das empresas e promove o ODS **15**, que visa proteger, restaurar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres.

Proposta para o professor

Se achar oportuno, proponha aos estudantes que assistam ao vídeo a respeito da metodologia *Design Thinking*.

- PROCESSO criativo – *Design Thinking*. Sebrae. Vídeo (6 min 47 s). Disponível em: https://tedit.net/kjb389 (acesso em: 11 set. 2024).

Após a realização do evento, faça com os estudantes o levantamento dos pontos positivos e negativos que identificaram no planejamento e na execução do projeto. Pergunte a eles: "Como vocês fizeram a escolha do produto a ser vendido?", "A comunidade aceitou e se beneficiou com o evento que vocês organizaram?", "Quais etapas do projeto foram mais difíceis de desenvolver?", "O que deu certo?", "O que deu errado?" e "O que poderia ter sido feito de maneira diferente?".

Capítulo 2

Este capítulo explora a Matemática comercial e financeira, área que está atrelada ao cotidiano da vida em sociedade, focando na relação do cidadão com o dinheiro e com o mundo financeiro. Esse momento é interessante para levantar discussões a respeito do conhecimento sobre finanças que os estudantes possuem e como eles e suas famílias se organizam (ou não) quando o assunto é dinheiro, com isso, desenvolve-se a competência específica CEMAT02 nesse início de capítulo.

No boxe "Pense nisto" da página 42, comente com os estudantes que a publicidade de promoções muitas vezes incentiva o consumo exagerado de produtos não necessários, o que pode comprometer as finanças do consumidor. Além disso, deve-se ter em mente que, quando compramos uma quantidade maior de produtos iguais, devemos ficar atentos à data de validade deles, a fim de evitar perdas. Ao abordar tal temática, promove-se a prática dos TCTs *Educação Financeira* e *Educação para o Consumo*.

Aproveitando o tema *Black Friday*, converse com os estudantes sobre propagandas enganosas feitas durante esse tipo de evento. Ressalte a importância de analisar os textos das propagandas, identificando generalizações indevidas e falta de dados, prática conhecida como propaganda enganosa omissiva. Se possível, apresente alguns exemplos para que os estudantes façam análises.

Durante o trabalho com os tópicos "Aumentos e descontos" e "Variação percentual", destaque a importância de saber realizar os cálculos apresentados para tomar decisões financeiras mais acertadas, tanto no contexto pessoal quanto no profissional. Por exemplo, para avaliar se uma promoção realmente vale a pena.

A situação-problema apresentada na atividade **11** mostra como a Matemática financeira pode auxiliar em um processo de tomada de decisão no cotidiano. Peça aos estudantes que compartilhem experiências relacionadas a diferentes tipos de promoções que são ofertadas no varejo, inclusive de ofertas que podem iludir o comprador.

O trabalho com os tópicos "Juro" e "Juro simples" permite aos estudantes compreenderem esses regimes de juro em que um percentual é cobrado de maneira fixa sobre certo valor inicial ou sobre um saldo restante. Certifique-se, antes de conversar a respeito dos tipos de juro, que os estudantes tenham clareza sobre os conceitos relacionados a capital, taxa de juro, juro e montante. O trabalho com esses conceitos propicia o desenvolvimento da habilidade EM13MAT303.

No trabalho com o boxe "Atividades resolvidas" da página 51, caso julgue pertinente, apresente outros modos de calcular o juro na atividade resolvida **3**.

1º modo

- Em 1 mês, o juro será igual a $0{,}01 \cdot 1200 = 12$, ou seja, R$ 12,00.
- Em 3 anos (36 meses), o total do juro será igual a $36 \cdot 12 = 432$, ou seja, R$ 432,00.

2º modo

Podemos calcular diretamente 36% de 1200, pois a taxa de 1% incide sempre sobre o capital e o juro; em qualquer mês, é de 1% de 1200. Assim, para um período de 36 meses, temos:

$$36 \cdot (1\% \cdot 1200) = 36 \cdot 0{,}01 \cdot 1200 = 0{,}36 \cdot 1200 = 36\% \cdot 1200 = 432$$

O total do juro é R$ 432,00.

Na seção "Atividades" da página 52, as atividades **17** a **19** podem ser utilizadas para a fixação dos conteúdos, nas quais os estudantes poderão usar ou não a expressão do juro e do montante de uma transação a juro simples. Nas atividades **20**, **21** e **23**, os estudantes se depararão com situações-problema cotidianas em que o conceito de juro simples pode ser aplicado.

No tópico "Juro composto", a aplicação em uma caderneta de poupança é usada para apresentar esse conceito de juro, verifique se os estudantes sabem como funciona esse tipo de investimento.

Caso julgue pertinente, proponha aos estudantes que calculem o lucro de Miguel após 4 anos de investimento, nas condições descritas no Livro do Estudante, na página 53. Para isso, eles podem usar um aplicativo de calculadora de juro, disponível em: https://tedit.net/0nkrnt, ou uma calculadora de juro simples e composto, disponível em: https://tedit.net/5uzay6 (acesso em: 12 ago. 2024).

Em seguida, proponha aos estudantes que analisem se, após 8 anos (quando Miguel completa 18 anos), o lucro a juro composto corresponderá exatamente ao dobro do lucro em 4 anos. Espera-se que os estudantes percebam que o lucro após 8 anos será de aproximadamente R$ 307,07, e que essa quantia corresponde a mais que o dobro do lucro em 4 anos, de aproximadamente R$ 135,24.

As seções "Experimente" das páginas 57 e 60 propiciam o desenvolvimento da habilidade EM13MAT203 ao aplicar conceitos matemáticos no levantamento, planejamento e na análise de investimentos por meio da criação de planilhas para auxiliar na tomada de decisões.

Destaque para os estudantes que, embora haja algumas variações, os rendimentos das aplicações financeiras de renda fixa estão relacionados com a taxa Selic. Quando a Selic sobe, os rendimentos desses investimentos tendem a aumentar, pois o juro pago aos investidores é maior. Por outro lado, quando a Selic cai, os rendimentos também tendem a diminuir.

Na seção "Atividades" da página 57, nas atividades **29**, **30**, **34**, **37** e **38**, será necessária a utilização do logaritmo na resolução das atividades. Esse pode ser um bom momento para realizar uma revisão sobre a definição de logaritmo e suas propriedades.

Ao trabalhar com a atividade **42**, destaque aos estudantes o que é a Bolsa de Valores e como funcionam as ações de uma empresa dentro dela. Explique que a Bolsa de Valores é um mercado organizado onde se negociam ações de empresas, e que essas ações representam pequenas parcelas do capital social dessas empresas, permitindo que investidores se tornem sócios e participem dos lucros e prejuízos. Além disso, apresente o Ibovespa (Índice Bovespa) como o principal índice de ações da Bolsa de Valores do Brasil. Explique que o Ibovespa é um indicador de desempenho do mercado de ações brasileiro, refletindo a variação média dos preços das ações das empresas mais negociadas e mais representativas da bolsa. Isso significa que o Ibovespa serve como um termômetro do mercado, mostrando se, em média, as ações estão subindo ou caindo, e ajudando investidores a tomar decisões informadas.

Ao trabalhar com o tópico "Valor atual de um conjunto de pagamentos", destaque aos estudantes que compreender os cálculos apresentados é fundamental para obter o valor de prestações em compras a prazo feitas por meio de financiamentos.

Aproveite as atividades propostas na seção "Atividades" da página 62 para promover o trabalho com o TCT *Educação Financeira*.

O tópico "Amortização de financiamentos" é um complemento ao tópico anterior, "Valor atual de um conjunto de pagamentos". Nele, são abordados os sistemas de amortização SFA e SAC. Entender os sistemas de amortização pode contribuir para o gerenciamento de dívidas de maneira eficaz, permitindo que os estudantes compreendam como cada pagamento é dividido entre o pagamento do principal (o valor emprestado) e dos juros. Esse conhecimento é essencial para planejar a antecipação do pagamento de empréstimos e, assim, reduzir o impacto dos juros ao longo do tempo. Ao conhecer diferentes métodos de amortização, o estudante poderá escolher, quando necessário, a opção de financiamento que melhor se adequa às suas necessidades e à sua capacidade de pagamento.

Na seção "Atividades" da página 66 é promovido o TCT *Educação Financeira*. Aproveite esse momento para incentivar o uso de planilhas eletrônicas para o cálculo de juro, promovendo o trabalho com a habilidade EM13MAT203.

Ao trabalhar com o tópico "Juro e funções", os estudantes devem compreender que um problema de juro composto pode ser tratado sob a ótica da função exponencial (restrita a um domínio discreto) ou, ainda, como uma progressão geométrica; já um problema de juro simples pode ser analisado como um caso de função polinomial de 1º grau (com domínio discreto) ou ainda, como um exemplo de progressão aritmética.

A atividade **55** da seção "Atividades" da página 71 propõe 2 situações: uma envolvendo juro simples, que pode ser modelada por meio de uma progressão aritmética (PA) e, graficamente, associada a uma função polinomial de 1º grau; e outra envolvendo juro composto, que pode ser modelada por meio de uma progressão geométrica (PG) e, graficamente, é associada a uma função exponencial.

Já atividade **58** se propõe a comparar, usando uma planilha eletrônica, os montantes de 2 aplicações de mesmo capital e taxa, porém em regimes de capitalização distintos: o simples e o composto, possibilitando o desenvolvimento da habilidade EM13MAT304.

Educação financeira

Essa seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Financeira* e *Educação Fiscal*. Converse com os estudantes sobre o destino dos impostos e sobre as alíquotas progressivas (quem recebe mais, paga mais), desenvolvendo assim a competência geral CG01. Proponha a eles que pesquisem sobre os diferentes regimes de trabalho, permitindo que conheçam os diferentes aspectos do mundo do trabalho e incentivando o contato com perspectivas e indicadores estatísticos e teóricos atualizados. Comente, por exemplo, que, quando o trabalho autônomo realizado por meio de plataformas digitais surgiu, não havia regulamentação específica sobre esse modelo de trabalho. Esse fenômeno, conhecido como plataformização, trouxe novos desafios e oportunidades para o mercado de trabalho. Com o passar do tempo, os debates e as regulamentações sobre os direitos e deveres tanto das empresas proprietárias dos aplicativos quanto dos trabalhadores desse modelo avançaram no Brasil e no resto do mundo.

Interligando

Essa seção pode ser trabalhada em duplas e favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira*. Nessa seção, é apresentada uma proposta de criação de uma planilha para controle e planejamento do orçamento familiar.

Destaque para os estudantes a importância desse exercício, enfatizando como ele pode contribuir para uma gestão financeira mais eficiente e consciente. Incentive-os a adotar esse tipo de controle em suas vidas, mostrando que, ao monitorar receitas e despesas, é possível tomar decisões mais informadas, evitar endividamentos desnecessários e alcançar objetivos financeiros com maior facilidade.

Viralize!

Essa seção promove o trabalho com o TCT *Educação Fiscal* e destaca o aumento da participação das mulheres no mercado de investimentos.

Após a leitura do texto proposto, promova uma conversa com os estudantes sobre o crescente aumento da participação das mulheres no mercado de investimentos. Encoraje-os a refletir sobre os motivos que, anteriormente, resultavam na menor participação feminina e sobre os fatores que estão impulsionando esse aumento atualmente.

Promova o debate a respeito de questões históricas, culturais e sociais que podem ter contribuído para a sub-representação das mulheres nesse setor. Incentive os estudantes a refletir sobre a importância dessa transformação e como ela pode beneficiar o mercado de investimentos como um todo.

Para fundamentar saberes

Nas atividades **1** e **2**, os estudantes são desafiados a identificar o padrão das sequências apresentadas a partir do problema exposto. A atividade **2**, em particular, aborda um problema relacionado a uma progressão aritmética (PA), no qual a razão representa o aumento na medida de distância que o ciclista consegue pedalar a cada novo dia. Essa atividade pode ser usada para avaliar o desenvolvimento da habilidade EM13MAT507 ao propor a determinação da soma dos termos de uma PA, permitindo que os estudantes apliquem conceitos matemáticos para resolver problemas práticos e compreendam a importância das progressões aritméticas no contexto de situações reais.

Ao avaliar investimentos, as atividades **4** e **5** propiciam o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira*. Já a atividade **6** ilustra um problema cotidiano ligado à variação percentual.

A atividade **7** propõe a resolução de um problema que envolve juro composto e, por isso, pode ser usada para avaliar o desenvolvimento da habilidade EM13MAT303.

Proposta para o estudante

(Uerj) Os clientes de um banco podem realizar apenas duas operações financeiras:

- fazer investimentos que rendem juros compostos a uma taxa mensal de 1%; ou
- pegar empréstimos com juros compostos a uma taxa mensal de 5%.

O banco usa o dinheiro dos investimentos para conceder os empréstimos, obtendo lucro nessas transações.

Considere que um cliente **X** investiu R$ 1.000,00 e que o banco emprestou esse valor a um cliente **Y**. Após 12 meses, o cliente **X** recebeu o montante pela aplicação nesse período e **Y** quitou o empréstimo.

Admitindo $(1{,}01)^{12} = 1{,}13$ e $(1{,}05)^{12} = 1{,}80$, o lucro, em reais, obtido pelo banco com essas duas operações financeiras é igual a:

a) 470. **b)** 520. **c)** 670. **d)** 820.

Resolução:

O montante que o cliente **Y** deverá pagar é:
$M = 1000 \cdot (1{,}05)^{12} = 1000 \cdot 1{,}80 = 1800$; ou seja, R$ 1.880,00.

O cliente **X** receberá, pela aplicação dos recursos, o montante:
$M = 1000 \cdot (1{,}01)^{12} = 1000 \cdot 1{,}13 = 1130$; ou seja, R$ 1.130,00.

O lucro obtido pelo banco é, em reais: $1800 - 1130 = 670$.

Alternativa **c**.

Unidade 2: Grandezas e medidas

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG01, CG02, CG05, CG07, CG09 e CG10.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT01, CEMAT02 e CEMAT03.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT103, EM13MAT201, EM13MAT313 e EM13MAT314.

Temas Contemporâneos Transversais: *Educação Alimentar e Nutricional*; *Educação Ambiental*; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação Financeira*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Vida Familiar e Social*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Resolver e elaborar problemas com diferentes unidades de medidas.
- Reconhecer as unidades de medida do Sistema Internacional de Unidades (SI).
- Estabelecer relações entre diferentes unidades de medidas.
- Resolver e elaborar problemas que envolvem notação científica.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

A abertura da Unidade apresenta um texto sobre representações do Sistema Solar, destacando aspectos das medidas envolvidas no comprimento do raio dos planetas e na distância deles em relação ao Sol.

Promova com os estudantes uma conversa sobre questões relacionadas à escala real dos planetas do Sistema Solar e suas representações. Essa conversa deve incentivar a compreensão e a aplicação de conceitos matemáticos e científicos nesse contexto.

O trabalho com a abertura favorece o desenvolvimento das competências gerais CG01 e CG02. Ao explorar essas competências, os estudantes serão capazes de apreciar a importância do conhecimento científico e matemático na interpretação e

representação do Sistema Solar, além de desenvolver habilidades críticas e investigativas.

Capítulo 3

O tópico "Grandezas de base e unidades de medida" explora a importância das unidades de medida e a evolução histórica que resultou na criação do Sistema Internacional de Unidades (SI). Destaque aos estudantes que a padronização das unidades de medida é fundamental para a ciência, a tecnologia e o comércio, pois garante consistência, facilita a comunicação precisa de informações quantitativas e ajuda na padronização de processos e produtos.

No trabalho com o boxe "Atividades resolvidas" da página 84, comente com os estudantes que outro exemplo de grandeza adimensional é o índice de refração absoluto, utilizado na área da Física conhecida como Óptica. Essa grandeza é calculada a partir da razão entre a medida de velocidade da luz no vácuo e a medida de velocidade da luz no meio estudado. Por ser uma razão entre grandezas de mesma unidade de medida, o índice de refração acaba não tendo uma unidade de medida derivada própria.

Outros exemplos de grandezas adimensionais aparecem na tabela "Outras grandezas derivadas do SI" da página 83, como o ângulo plano e o ângulo sólido. Ambas as grandezas são derivadas de uma razão entre 2 grandezas de mesma unidade de medida.

O boxe "História da Matemática" da página 93 desenvolve a habilidade EM13MAT103 da BNCC ao apresentar a origem histórica e cultural das unidades de medida do tempo. Utilizando conceitos de Astronomia e Matemática, o texto destaca a relevância dessas unidades no contexto científico e cultural.

O estudo da História da Matemática é essencial para mostrar que o desenvolvimento científico é resultado de um esforço conjunto. Ao explorar as contribuições de diferentes pessoas ao longo do tempo, como dos egípcios e dos sumérios, para a definição das unidades de medida de tempo, os estudantes podem entender que o avanço do conhecimento não é obra de um único indivíduo, mas sim de uma comunidade diversificada de pensadores e inovadores.

No que se refere às competências gerais, o texto promove as competências gerais CG01 e CG02, pois valoriza o conhecimento histórico ao mostrar como diferentes culturas, como os egípcios e sumérios, contribuíram para a divisão do tempo. Além disso, estimula a curiosidade intelectual ao explicar de maneira investigativa a escolha da base 60 pelos sumérios.

Na atividade **14** da seção "Atividades" da página 94, espera-se que os estudantes notem que, no item **b**, deve ser feito o cálculo da medida de velocidade média da atleta. No item **c**, peça aos estudantes que, depois de realizado o cálculo exato, arredondem os valores considerando que, em aproximadamente 2 horas (120 minutos) de prova, foram percorridos 10 quilômetros, ou seja, foram gastos aproximadamente 12 minutos por quilômetro (120 : 10 = 12). Destaque que, muitas vezes, em situações similares, esse tipo de arredondamento é utilizado.

Interligando

Na atividade **2** dessa seção, questione os estudantes sobre o que poderia ocorrer caso fosse usado um termômetro certificado pelo Inmetro e ele acusasse uma medida de temperatura de 39 °C. Espera-se que os estudantes percebam que essa leitura indicaria que o bebê está com febre e necessita de atendimento médico. Ressalte a importância de se trabalhar com dados completos e confiáveis para resolver situações-problema.

Projeto

O projeto de horta comunitária abrange aspectos que se alinham com a habilidade EM13MAT201. Além disso, está em consonância com as competências gerais CG01, CG02, CG05 e CG07, e favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Alimentar e Nutricional*, *Educação Ambiental*, *Educação em Direitos Humanos* e *Vida Familiar e Social*.

O trabalho com essas habilidades, competências e temas contribui para uma compreensão abrangente do projeto de horta comunitária, proporcionando análise crítica, planejamento e execução de ações concretas e decisões informadas. O projeto também promove a valorização do trabalho comunitário, a cooperação e a promoção de uma alimentação saudável.

A proposta de horta comunitária está alinhada com o ODS **2**, que busca erradicar a fome, alcançar segurança alimentar, melhorar a nutrição e promover a agricultura sustentável, uma vez que os estudantes devem pensar nos membros da comunidade para incentivar uma produção inclusiva e que use princípios da Agroecologia. Também está alinhada com o ODS **12**, que busca o consumo e a produção sustentáveis, ao ajudar a comunidade a consumir e compartilhar alimentos cultivados em uma produção livre de defensivos agrícolas.

Aproveite o tema e a proposta da horta comunitária para destacar aos estudantes a importância dos povos do campo e da agricultura familiar para a produção de alimentos e soberania alimentar no Brasil. Comente que a agricultura familiar produz 70% dos alimentos consumidos no país. Se julgar oportuno, proponha o trabalho com os textos "Agricultura familiar produz 70% dos alimentos consumidos no Brasil e melhora qualidade da comida servida em escolas de Castro; conheça", disponível em: https://tedit.net/j2the2 e "Moradores do campo também são afetados pela fome no Brasil", disponível em: https://tedit.net/wic4vm (acesso em: 24 set. 2024), que apresentam os povos do campo sob 2 diferentes olhares: grandes produtores de alimentos e vítimas da fome.

Para começar

Peça aos estudantes que leiam os textos. Em seguida, promova um debate, incentivando-os a falar sobre algumas questões, como:

- falta de acesso a alimento e as questões sociais e econômicas envolvidas;
- impactos ambientais da produção de alimentos;
- desertos alimentares;
- alimentação saudável.

Depois, organize os estudantes em 7 grupos.

Na "Etapa 1", caso não haja diretrizes municipais específicas, oriente os estudantes a buscar por programas de apoio à criação de hortas comunitárias que possam ajudar a guiar o trabalho.

Na "Etapa 2", incentive os estudantes a desenvolver um algoritmo para a criação da horta, ou seja, um conjunto de instruções passo a passo que servirá como base para a construção. Além disso, comente que o fluxograma é uma ferramenta usada para representar esse algoritmo, facilitando a visualização e compreensão do processo.

Na "Etapa 3", auxilie os estudantes a encontrar espaços disponíveis para a horta comunitária. Eles devem estar de acordo com as

diretrizes do município e devem ser grandes para atender a várias famílias. Uma ferramenta que pode ajudar é o serviço de mapas digitais *on-line* do município, que facilita a busca por grandes áreas livres. O cálculo da medida de área pode ser aproximado. Caso o terreno seja irregular, oriente os estudantes a realizar o cálculo da medida de área utilizando o método de aproximação por cortes e incentive o uso de tecnologias digitais para otimizar a aplicação das expressões de cálculo de medida de área disponibilizada para a horta. Aproveite o momento para definir a melhor unidade de medida para a área escolhida (metros ou quilômetros quadrados).

Na "Etapa 4", oriente os estudantes a avaliar os alimentos disponíveis nos mercados e nas feiras-livres. Eles podem guiar a determinação de quais alimentos serão utilizados na horta comunitária. O ideal é que haja variedade de legumes e verduras, e é preciso avaliar o espaço disponível, para a plantação e o tempo de colheita.

Considere que é possível que nem toda a comunidade tenha acesso ao vídeo criado na "Etapa 7"; se esse for o caso, é possível organizar uma sessão, divulgada pela escola, para a exibição dos vídeos.

Produto final

Após a entrega do produto final, converse com os estudantes sobre como as unidades de medida foram utilizadas na elaboração do projeto.

Avaliação do projeto

Avalie com os estudantes os pontos positivos e negativos do projeto. Questione sobre a participação da comunidade, dificuldades, acertos, erros e melhorias possíveis. Analise as respostas coletivamente, documente os pontos debatidos e desenvolva um plano de ação para melhorias.

Proposta para o professor

Se considerar oportuno, leia o *Manual prático para a instalação de hortas pedagógicas*, da Embrapa, disponível em: https://tedit.net/05y18d (acesso em: 26 set. 2024).

Educação financeira

Essa seção desenvolve as habilidades EM13MAT103 e EM13MAT314 ao abordar unidades de medida relacionadas ao cálculo do consumo de energia elétrica. Além disso, promove o trabalho com os TCTs *Educação Financeira* e *Educação para o Consumo*.

Capítulo 4

Neste capítulo, explora-se a importância de compreender as limitações associadas à capacidade de medir e à necessidade de escolher o instrumento e a técnica de medida adequados para cada situação. Além disso, enfatiza-se a importância de comunicar as medidas de maneira clara e precisa, considerando os conceitos de acurácia e algarismos significativos.

Na atividade **6** da seção "Atividades" da página 100, os estudantes podem optar por encher a garrafa térmica com água e utilizar uma jarra graduada para medir a quantidade de água que a garrafa térmica comporta. Um outro método pode ser realizado por meio das medidas do raio r da base e da altura h da garrafa, lembrando que a medida de volume de um cilindro pode ser obtida pela fórmula $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

É importante ressaltar que os valores encontrados pelos 2 métodos devem resultar em estimativas diferentes, pois um está estimando medida de capacidade interna da garrafa e o outro está estimando a medida de volume total da garrafa, que inclui a medida de volume das paredes e da base. Se julgar oportuno, oriente os estudantes a comparar esses 2 métodos de medição na prática, ao exercitar a curiosidade e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo investigação e análise crítica para formular e testar hipóteses, favorecendo a competência geral CG02 da BNCC e a competência específica CEMAT03.

No item **a** da atividade **7**, oriente os estudantes a considerar toda a água utilizada: para consumo, para dar descarga, lavar as mãos, entre outras atividades. No item **b**, caso a escola não possua uma caixa-d'água, peça aos estudantes que pesquisem a medida de capacidade de uma caixa-d'água de um prédio comercial de tamanho compatível com o da escola. No item **c**, oriente os estudantes a dividir o valor da medida de capacidade da caixa-d'água pela quantidade de pessoas presentes na escola durante o dia letivo. No item **d**, mais informações sobre como o procedimento deve ser realizado podem ser encontradas em https://tedit.net/hclugm, e outras informações sobre diretrizes da periodicidade do processo em edifícios de uso comum podem ser encontradas em https://tedit.net/iixqtd (acesso em: 12 set. 2024).

Oriente os estudantes sobre a melhor maneira de produzir e distribuir os panfletos propostos no item **d**, considerando cópias físicas ou digitais.

Para resolver o item **d** da atividade **14** da seção "Atividades" da página 111, oriente os estudantes a, se possível, conversar com pessoas de diferentes idades para obter um panorama mais geral da situação do município em diferentes décadas do passado. Durante a conversa, ressalte a importância da escuta ativa enquanto um dos colegas estiver falando e incentive a participação dos estudantes mais tímidos. Caso haja divergência entre as informações coletadas, reforce a necessidade de respeito pelas colocações de cada um, ressaltando que esses não são dados oficiais, mas sim impressões pessoais que podem ser imprecisas e influenciadas por diferentes fatores.

No item **e**, a estimativa da medida de área restaurada ou desmatada é mais precisa se focada em um local específico, como uma praça, parque ou reserva ambiental que passou a existir ou existia no passado. Para isso, podem ser utilizadas ferramentas como mapas digitais *on-line* ou mapas físicos disponíveis na biblioteca municipal ou prefeitura. A proposta de arborização pode ser realizada no terreno da própria escola ou em algum terreno, parque ou praça próxima. Oriente os estudantes a pesquisar os preços dos materiais, bem como da mão de obra, *on-line* ou em lojas da região.

Essa atividade, ao promover a consciência socioambiental, exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, além de propor ações socialmente responsáveis voltadas para a sustentabilidade, favorece as habilidades EM13MAT201 e EM13MAT313, as competências gerais CG07 e CG09, bem como a competência específica CEMAT02. Além disso, a atividade também desenvolve o TCT *Educação Ambiental*.

Interligando

Ao trabalhar com essa seção, se julgar oportuno, assista com os estudantes ao vídeo "De onde veio 'um quilo'?" do *Nexo Jornal*, disponível em: https://tedit.net/1gxmts (acesso em: 26 set. 2024).

Viralize!

O trabalho com essa seção permite o desenvolvimento do TCT *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*.

A proposta da atividade **4**, que envolve a pesquisa sobre a influência do multiculturalismo nas práticas agrícolas e na produção de café no Brasil, oferece uma excelente oportunidade para ressaltar positivamente a imagem dos indígenas e dos povos do campo. Ao explorar as diversas origens étnicas e culturais dos trabalhadores da cafeicultura brasileira, é possível destacar a riqueza e a diversidade que esses grupos trazem para o setor.

Ao abordar, também, a influência dos europeus e asiáticos, é possível mostrar como a integração de diferentes técnicas e culturas agrícolas resultou em uma produção de café diversificada e de alta qualidade. Esse multiculturalismo não só enriquece as práticas agrícolas, mas também fortalece a identidade e a coesão social no campo.

No boxe "Dica", presente nessa seção, recomendamos a visita ao Museu do Café, localizado na cidade de Santos (SP). O *tour* virtual permite aos estudantes aprenderem mais sobre a história da produção do grão de café no Brasil, especialmente na região Sudeste.

Para fundamentar saberes

Aproveite as atividades propostas nessa seção para avaliar o aprendizado dos estudantes. As atividades **3**, **4** e **5**, por exemplo, podem ser usadas para a avaliar o domínio dos estudantes da habilidade EM13MAT313 da BNCC.

Proposta para o estudante

(UFRGS-RS) Considerando o próton como um cubo de aresta 10^{-11} m e massa 10^{-21} kg, qual a sua densidade?

[A unidade de medida de densidade, no SI, é kg/m³.]

Resolução:

Como o próton é considerado um cubo, então a medida de volume V é dada pela fórmula:

$$V = a^3 \Rightarrow V = (10^{-11})^3 \Rightarrow V = 10^{-33}$$

A medida de densidade é dada pela relação entre a medida de massa (m) e a medida de volume (V):

$$d = \frac{m}{V} = \frac{10^{-21}}{10^{-33}} = 10^{-21+33} = 10^{12}$$

A medida de densidade é de 10^{12} kg/m³.

Unidade 3: Pensamento computacional

A BNCC nesta Unidade

Competência geral da Educação Básica:
CG07.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03 e CEMAT04.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT103, EM13MAT202, EM13MAT313, EM13MAT315, EM13MAT316 e EM13MAT405.

Habilidade de outras áreas do conhecimento:
EM13CNT202.

Temas Contemporâneos Transversais:

Ciência e Tecnologia; *Educação Alimentar e Nutricional*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Compreender os aspectos da Lógica formal.
- Analisar proposições lógicas com ou sem o uso da tabela-verdade.
- Compreender um algoritmo como um conjunto finito de passos que devem ser executados.
- Investigar e registrar por meio de um fluxograma um algoritmo que resolva um problema.
- Utilizar conceitos iniciais de linguagem de programação na implementação de algoritmos.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

A abertura propõe uma investigação acerca da importância do pensamento computacional e de como essa habilidade é essencial no mundo contemporâneo na resolução de problemas de maneira sistemática e lógica.

Debata com os estudantes o papel da inteligência artificial (IA) e como ela está transformando rapidamente diversos aspectos da sociedade, impactando áreas como economia, saúde, educação, segurança e até mesmo a vida cotidiana, e que, embora ofereça muitas oportunidades e benefícios, ela também apresenta desafios e riscos que precisam ser considerados.

Na atividade **2** da abertura, é proposta a análise de um texto gerado por IA com o objetivo de identificar a falta de coesão entre os parágrafos. Ressalte aos estudantes a importância de analisar diferentes tipos de texto, atentando-se a incoerências e informações não confiáveis. Destaque que os textos gerados por IA não são considerados uma fonte de pesquisa confiável e que é necessário validar todas as informações fornecidas.

Capítulo 5

Este capítulo inicia-se apresentando uma introdução histórica a respeito da lógica formal proposta por Aristóteles no século IV a.C. As proposições lógicas são uma sistematização da maneira de pensar e organizar ideias, a partir de princípios estabelecidos (princípio da não-contradição e princípio do terceiro excluído).

Na seção "Atividades" da página 119, complemente a introdução deste capítulo propondo que os estudantes realizem as atividades de **1** a **4**, de modo que eles desenvolvam o raciocínio lógico-matemático ao analisar as proposições em cada atividade.

Trabalhe o tópico "Conectivos lógicos" abordando a importância da utilização deles como ferramenta de ampliação da lógica aristotélica, podendo por meio dos conectivos **não**, **e** e **ou** abordar situações de maior complexidade.

Apresentamos a seguir as respostas das atividades propostas no boxe "Pense nisto" da página 119.

a) Proposição verdadeira.

b) Proposição falsa, pois é verdade que Angola é um país que fica no continente africano.

c) Proposição falsa, pois Angola não está em ambos os continentes, apenas no africano.

d) Proposição falsa, pois Angola não está em nenhum dos 2 continentes.

e) Proposição verdadeira, pois Angola está no continente africano, apesar de não estar no americano.

f) Proposição falsa, pois Angola não está em nenhum dos 2 continentes.

Exemplo de resposta: Uma das diferenças entre os conectivos **e** e **ou** é que o conectivo **e** exige que as 2 partes que compõem a proposição sejam verdadeiras para que a proposição também o seja, enquanto, no caso do conectivo **ou**, basta que uma das partes seja verdadeira para que a proposição também seja.

No boxe "Pense nisto" da página 120, espera-se que os estudantes identifiquem que os 2 fatores podem ser a causa da garganta seca de maneira independente e, portanto, optem pelo uso do conectivo **ou**. Se algum dos estudantes optar pelo conectivo **e**, peça para que justifique seu raciocínio. Embora a resposta possa parecer incorreta à primeira vista, o raciocínio pode estar correto se o estudante considerar que a garganta seca pode ser causada apenas pela combinação da falta de umidade e da falta de hidratação.

A atividade **6** da seção "Atividades" da página 121 permite desenvolver uma abordagem em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, ao trabalhar de maneira interdisciplinar as proposições acerca das classificações biológicas dos animais quanto às suas classes, promovendo assim a habilidade EM13CNT202.

Apresentamos a seguir a resposta da atividade proposta no boxe "Pense nisto" da página 121.

O intervalo é sempre verdadeiro para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > -2$ ou $x < 6$; intervalo sempre falso para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < -2$ e $x > 6$; é possível que o conjunto solução seja verdadeiro se for usada a operação de disjunção com outro intervalo que seja verdadeiro para pelo menos algum valor de $x \in \mathbb{R}$.

Na seção "Atividades" da página 124, o trabalho com a atividade **10** é importante para que o estudante possa compreender o processo de construção de uma tabela-verdade, utilizando-se de diferentes proposições e avaliando se cada uma é verdadeira ou falsa.

No tópico "Proposição condicional", é importante que o estudante compreenda a relação de dependência entre as proposições para que determinado evento ocorra, já que um evento depende diretamente de outro ter acontecido ou não. Explore a tabela-verdade, demonstrando que, caso as 2 proposições sejam falsas, a proposição como um todo se torna verdadeira.

Na seção "Atividades" da página 126, aplique e construa a tabela-verdade nas atividades **13** e **15**, utilizando as proposições condicionais apresentadas no enunciado, deduzindo assim de maneira lógico-matemática as consequências em cada situação.

No tópico "Algoritmos", explore com os estudantes a ideia de algoritmo, apresentando-o como conjunto finito e exato de passos que indica o que deve ser executado para realizar um processo e mostrando sua importância na Matemática e na Ciência da Computação, no processo de criação e construção de programas que necessitam dessa linguagem lógica.

Converse com os estudantes a respeito da ideia de que uma receita, como a do bolo de laranja, pode ser vista como uma espécie de algoritmo que pode ser representado de diferentes maneiras, por exemplo, utilizando um fluxograma. Essa abordagem favorece o desenvolvimento da habilidade EM13MAT315. Além disso, tais assuntos abordados promovem a competência específica CEMAT02, ao articular conhecimentos matemáticos na proposição de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo.

As possíveis soluções para as atividades proposta no boxe "Pense nisto" da página 128 são:

a) Exemplo de resposta: "Bata sobre a pia para retirar o excesso.". Essa frase se refere a bater na assadeira virada com a boca para baixo para tirar o excesso de farinha que foi usada para untar. Como temos capacidade de interpretação, não era necessário explicitar que a assadeira deveria estar com a boca virada para baixo, mas haveria margem para que alguém simplesmente batesse na assadeira, sem que a farinha caísse sobre a pia, mas apenas se acumulando no fundo da assadeira.

b) Exemplo de resposta: "Transfira a massa do bolo para a forma e leve ao forno para assar por cerca de 50 minutos.". O conectivo **e** foi escolhido por serem 2 instruções que precisam ser seguidas; se tivesse sido utilizado o conectivo **ou**, estaria correta a compreensão de que pelo menos uma das instruções deveria ser seguida, mas não necessariamente as 2, o que não faria sentido para esse caso.

c) Exemplo de resposta: "... se um estiver estragado você não perde a receita.". Os 3 cenários verdadeiros seriam: um ovo estava estragado e a receita não foi perdida; um ovo não estava estragado e a receita não foi perdida; um ovo não estava estragado e a receita foi perdida (por algum outro motivo não relacionado ao ovo). O cenário falso seria: um ovo estava estragado e a receita foi perdida (que só é possível se o leitor não seguiu a indicação de abrir cada ovo separadamente em uma tigela).

No boxe "Pense nisto" da página 130, espera-se que os estudantes tentem descrever a possível sequência de passos. Analise o exemplo a seguir.

1. Escreva o maior número: Comece escrevendo o maior dos 2 números a serem adicionados.

2. Alinhe o segundo número: Escreva o segundo número de modo que:

- o algarismo da unidade fique abaixo do algarismo da unidade do primeiro número;
- o algarismo da dezena fique abaixo do algarismo da dezena do primeiro número;
- o algarismo da centena fique abaixo do algarismo da centena do primeiro número.

3. Inclua o sinal de mais: Coloque o sinal de mais (+) à esquerda do segundo número e trace um segmento de reta abaixo do segundo número.

4. Adicione as unidades: Adicione os algarismos das unidades dos 2 números.

5. Anote o resultado das unidades:

- Se o resultado for menor do que 10, anote-o abaixo do segmento de reta, na coluna das unidades.

- Caso contrário, anote o algarismo da unidade do resultado abaixo do segmento de reta e escreva 1 acima do algarismo das dezenas do primeiro número.

6. Adicione as dezenas: Adicione os algarismos das dezenas dos 2 números, incluindo o 1 anotado acima, se houver.
7. Anote o resultado das dezenas:
   - Se o resultado for menor do que 10, anote-o abaixo do segmento de reta, na coluna das dezenas.
   - Caso contrário, anote o algarismo da unidade do resultado abaixo do segmento de reta e escreva 1 acima do algarismo das centenas do primeiro número.
8. Adicione as centenas: Adicione os algarismos das centenas dos 2 números, incluindo o 1 anotado acima, se houver.
9. Anote o resultado das centenas:
   - Se o resultado for menor do que 10, anote-o abaixo do segmento de reta, na coluna das centenas.
   - Caso contrário, anote o algarismo da unidade do resultado abaixo do segmento de reta e escreva 1 à esquerda da centena do número abaixo do segmento de reta.
10. Resultado final: O número abaixo do segmento de reta é o resultado da adição dos 2 números naturais entre 0 e 999.

Apresente o tópico "Fluxogramas" com uma representação gráfica que ilustre a sequência de etapas, decisões ou processos de um sistema ou atividade. Utilize os símbolos apropriados para mostrar o fluxo de informações, ações ou materiais. Explique que os fluxogramas são amplamente utilizados para planejar, documentar, analisar e melhorar processos em diversas áreas, como: engenharia, administração, informática, educação, entre outras. O trabalho com esse tópico promove o desenvolvimento da habilidade EM13MAT315.

Acompanhe as possíveis respostas para as perguntas propostas no boxe "Pense nisto" da página 133.

a) Como as respostas para "Pais são casados?" é não, para "Pai assumirá a paternidade voluntariamente?" é sim e para "Pai e mãe estarão presentes no momento do registro?" é não. Assim, os documentos que devem ser levados são: DNV, documento de identidade da mãe e declaração do pai com firma reconhecida.

b) Como a resposta para "Pais são casados?" é sim, os documentos que devem ser levados são: DNV, documentos de identidade com foto e certidão de casamento. Nesse caso, os documentos não dependem de o pai ir ou não junto ao cartório.

c) Sim, pois descreve o passo a passo para realizar o processo "registrar uma criança brasileira que nasceu nos últimos 15 dias em uma maternidade que não conta com um representante de um cartório".

d) Os elementos gráficos são: retângulo, losango, retângulo arredondado e seta. Dentro do retângulo sempre há a indicação de uma ação que deve ser feita. No losango, há sempre uma pergunta cuja resposta pode ser ou sim ou não. Já no retângulo arredondado, há a indicação de início e fim do processo. A seta indica o caminho que deve ser seguido para identificar o próximo passo.

A partir do boxe "História da Matemática" na página 141, apresente a vida e obra de Alan Turing. Aproveite esse momento para levantar um debate sobre preconceitos envolvendo orientação sexual e identidade de gênero. Certifique-se de que os estudantes se expressem sempre de maneira respeitosa.

Se houver interesse e disponibilidade, levante questionamentos sobre como essas questões ainda estão presentes na atualidade. Exemplos de perguntas motivadoras para o debate são "Vocês conhecem o termo homofobia? E transfobia? Sabem a que se referem?".

Converse com os estudantes sobre atitudes que podem ser adotadas para combater preconceitos. Em seguida, proponha um momento de reflexão sobre possíveis atitudes homofóbicas e transfóbicas que cada um pode ter no dia a dia e proponha que eles apresentem maneiras de evitá-las. Esse exercício visa promover o desenvolvimento da empatia e da cooperação.

Na seção "Atividades" da página 142, a atividade **29** promove o desenvolvimento da habilidade EM13MAT315 ao investigar por meio de um fluxograma um algoritmo que resolve um problema. Trabalhe com os estudantes a leitura e a interpretação do fluxo de informações apresentado.

Projeto

O desenvolvimento do projeto proposto tem o objetivo de fornecer informações que auxiliem os estudantes e a comunidade na escolha de uma alimentação mais saudável.

Durante o projeto, os estudantes devem fazer a leitura do *Guia Alimentar para a População Brasileira* para extrair informações que contribuam para a produção de um fluxograma que irá compor um folheto que será divulgado para a comunidade. A realização do estudo sobre o guia e a divulgação desse assunto na comunidade contribuem para o desenvolvimento do TCT *Educação Alimentar e Nutricional* e da competência geral CG07 da BNCC, que consiste, entre outros, na construção de argumentos com base em dados e informações confiáveis para a defesa de ideias que promovam consumo responsável em âmbito local. Além disso, ao participarem desse projeto, os estudantes desenvolvem habilidades como liberdade, autonomia, cooperação, consciência crítica e responsabilidade, contribuindo para a construção de um estilo de vida mais saudável.

A realização do estudo do *Guia Alimentar para a População Brasileira* e a divulgação deste para a comunidade também estão alinhadas com o ODS **3**, que tem como foco a saúde da população apresentando metas para a redução da mortalidade.

Para começar

Peça aos estudantes que leiam os textos. Em seguida, promova um debate, incentivando-os a falar sobre algumas questões, como:

- alimentos presentes em uma alimentação saudável;
- hábitos alimentares no dia a dia;
- possíveis mudanças alimentares;
- diferença entre as categorias dos alimentos;
- alimentos típicos da região.

Desenvolvimento do projeto

Organize os estudantes em 4 grupos.

Na "Etapa 1", após a leitura do capítulo 1, pode-se propor a realização de um debate para verificar se todos entenderam os pressupostos do documento que leram.

Auxilie os estudantes na "Etapa 2" usando como base as informações apresentadas na seção *Produções em foco*. Incentive todos os membros a participar ativamente da produção do folheto.

Produto final

Oriente os estudantes a deixarem os folhetos à disposição em locais de grande circulação ou em mídias digitais.

Avaliação do projeto

Após a realização do projeto, faça com os estudantes um levantamento dos pontos positivos e dos pontos negativos identificados durante o planejamento e a execução do projeto. Entre outras perguntas, converse com eles sobre: "A comunidade pode se beneficiar com o guia alimentar proposto?", "Quais etapas do projeto foram as mais difíceis de desenvolver?", "O que deu certo?", "O que deu errado?" e "O que poderia ter sido feito de maneira diferente?". Essas reflexões ajudarão a identificar áreas de melhoria e a consolidar o aprendizado adquirido ao longo do projeto.

Interligando

Essa seção pode ser trabalhada em conjunto com o professor de Computação, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Educação Digital. Ao trazer fatos históricos sobre o armazenamento e compartilhamento de dados digitais, essa seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*. A competência específica CEMAT01 é trabalhada ao usar estratégias para interpretar situações que envolvem tecnologia. Além disso, o trabalho com essa seção promove o desenvolvimento das habilidades EM13MAT103 e EM13MAT313.

Aproveite esse momento para destacar a evolução dos dispositivos de armazenamento e da otimização da velocidade de transmissão de dados. Promova uma conversa sobre o tema.

Capítulo 6

O início do capítulo aborda o desenvolvimento da solução digital, que envolve uma série de etapas estruturadas, desde a concepção da ideia até a implementação e a manutenção de um produto ou serviço digital. Como exemplo, é apresentada a metodologia *Design Thinking*, uma abordagem centrada no ser humano que busca solucionar problemas de maneira criativa e inovadora. Essa metodologia combina empatia, criatividade e raciocínio analítico para criar soluções que atendam às necessidades reais das pessoas. A abordagem *Design Thinking* é amplamente utilizada no desenvolvimento de produtos, serviços, processos e até estratégias de negócios, destacando-se por sua capacidade de integrar múltiplas perspectivas e disciplinas, promovendo a colaboração e a inovação contínua.

No boxe "Pense nisto" da página 148, uma possível resposta é:

Meios de disponibilização	Exemplo
Aplicativo móvel	e-Título (aplicativo que exibe o título de eleitor)
Programa de computador	IRPF (programa para declaração do Imposto de Renda)
Página *web*	Página *web* de uma escola para acesso ao boletim e histórico escolar
Sistema embarcado	Calculadora

No tópico "*Scratch*", trabalhe com os estudantes a linguagem de programação visual associada a esta plataforma *on-line* que permite, de maneira simples, a criação de histórias interativas, jogos, animações e outros projetos criativos de maneira intuitiva. É possível desenvolver este tópico em parceria com um professor de Computação da área de Educação Digital, explorando de maneira interdisciplinar essa ferramenta interativa, promovendo assim o TCT *Ciência e Tecnologia*.

As atividades **1** a **5** da seção "Atividades" da página 154 utilizam o *Scratch* e promovem a habilidade EM13MAT315 ao investigarem e registrarem por meio de um fluxograma um algoritmo que resolve um problema e a habilidade EM13MAT405 ao utilizarem conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos. Além disso, as competências específicas CEMAT03 e CEMAT04 são desenvolvidas ao resolver problemas em contextos diversos e utilizar diferentes registros de representação matemáticos na busca de solução de problemas.

A atividade **11** da seção "Atividades" da página 161 permite o desenvolvimento da habilidade EM13MAT315 ao propor a construção de um fluxograma para resolver um problema. Na atividade **13**, os estudantes devem utilizar conceitos iniciais de linguagem de programação na implementação de algoritmos, conforme a habilidade EM13MAT405. Além disso, essas atividades contemplam a competência específica CEMAT03 ao utilizar diferentes estratégias na resolução de problemas.

Interligando

Essa seção pode ser trabalhada em conjunto com o professor de Educação Digital, favorecendo a interdisciplinaridade e desenvolvendo o TCT *Ciência e Tecnologia*.

Após o trabalho com a atividade **2** dessa seção, destaque aos estudantes que a criptografia é muito usada em diversos dispositivos cotidianos, talvez eles já tenham reparado que as redes de Wi-Fi usam protocolos de criptografia como o WPA2 ou WPA3. Reforce que os protocolos de criptografia são muito usados para garantir comunicações e transações financeiras seguras.

Viralize!

A conversa sobre bolhas digitais favorece o trabalho com o conceito de pós-verdade, muito presente em grandes debates da atualidade. Se achar oportuno, proponha que os estudantes pesquisem sobre casos em que uma informação falsa, porém muito presente em certas bolhas digitais foi tomada como verdadeira e ocasionou um problema de ordem pública. Promova uma roda de conversa sobre os perigos de não se estar aberto a debater com pessoas que tenham um posicionamento com embasamento científico e teórico, porém diferente do seu. Tais conversas sobre as bolhas digitais promovem o TCT *Ciência e Tecnologia*.

Para fundamentar saberes

Na atividade **2**, o estudante se depara com um caso de proposição condicional. Nesse caso, a atividade deve ser resolvida analisando-se todas as proposições e suas relações de condição. Na atividade **4**, os estudantes devem analisar cada uma das desigualdades e analisar logicamente qual a proposição falsa, promovendo assim o raciocínio lógico-matemático.

Na atividade **7**, será necessária a utilização de conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente, de acordo com a habilidade EM13MAT405.

Proposta para o estudante

Um estudante desenvolveu o seguinte algoritmo para identificar se um número natural *num* é primo.

```
1  Início
2
3  /* entradas */
4  Ler num
5  res = 1
6  aux = num − 1
7
8  /* processamento */
9  Se num == 0 ou num == 1
10   res = 0
11 Enquanto aux > 0 e res == 1
12   Se num % (aux) == 0, então
13     res = 0
14   Senão
15     aux = aux − 1
16
17 /* saídas */
18 Se res == 0, então
19   Escrever "Não é primo."
20 Senão
21   Escrever "É primo."
22
23 Fim
```

a) Quando uma colega testou o algoritmo com o número 3, ela notou que a resposta seria "Não é primo.", o que está errado. Ao analisar com atenção, percebeu que o problema poderia ser corrigido fazendo um simples ajuste na linha **11**. Que ajuste seria esse?

b) Além de corrigir o erro, a colega propôs uma alteração na linha **6** de modo a tornar o algoritmo mais eficiente, ou seja, sendo necessários menos testes para chegar à resposta desejada. Qual poderia ser essa sugestão?

Resolução:

a) O algoritmo considera como não primo mesmo quando o número *num* é divisível apenas por 1 nos testes que realiza. Uma solução, então, seria excluir esse teste, trocando a linha **11** por "Enquanto *aux* > 1 e *res* == 1". Assim, não são testadas a divisão do número por ele próprio, nem dele por 1. Se outra divisão tiver resto zero, aí de fato não se tratará de um número primo.

b) Existe mais de uma possibilidade, mas uma delas seria, na linha **6**, considerar inicialmente *aux* como o resultado inteiro da divisão $\frac{num}{2}$, pois o maior divisor possível de qualquer número é a metade dele e, assim, evita-se metade dos testes.

Unidade 4: Combinatória e Probabilidade

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG07 e CG10.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT01, CEMAT03 e CEMAT05.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT102, EM13MAT106, EM13MAT310, EM13MAT311, EM13MAT312, EM13MAT511.

Temas Contemporâneos Transversais:
Ciência e Tecnologia; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação para o Trânsito*; *Vida Familiar e Social*; *Saúde*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Resolver e elaborar problemas de contagem por meio dos princípios fundamentais da contagem (aditivo e multiplicativo) e o diagrama de árvores.
- Reconhecer e diferenciar os principais agrupamentos simples: permutação, arranjo e combinação.
- Calcular as quantidades de permutações, arranjos e combinações na resolução de problemas.
- Resolver problemas envolvendo permutações com elementos repetidos.
- Identificar e descrever o espaço amostral de um experimento aleatório.
- Classificar espaços amostrais em discretos ou contínuos.
- Reconhecer eventos em espaços amostrais equiprováveis ou não.
- Utilizar a frequência relativa para definir a probabilidade de ocorrência de um evento.
- Resolver problemas envolvendo o cálculo de probabilidades em espaços amostrais finitos equiprováveis.
- Reconhecer situações em que o espaço amostral não é equiprovável.
- Calcular a probabilidade da união e interseção de 2 eventos.
- Resolver problemas de probabilidade condicional com a redução do espaço amostral.
- Reconhecer e resolver problemas envolvendo eventos independentes.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

A abertura da Unidade traz informações sobre a organização das placas de identificação veicular no Brasil e o novo formato de identificação no Mercosul que entrou em vigor em 2020, favorecendo o desenvolvimento das habilidades EM13MAT106 e EM13MAT312 da BNCC, bem como do TCT *Educação para o Trânsito*.

A questão **2** oportuniza o trabalho com o TCT *Ciência e Tecnologia*, mostrando que o *QR Code* e suas funcionalidades são amplamente utilizados no cotidiano.

Proposta para o professor

Sugerimos a leitura do artigo "A Matemática do *QR Code*", de Alberto Renan Dias da Silva e Silas Fantin, que mostra que conhecimentos matemáticos na organização de códigos podem ser utilizados nas aulas de Matemática, disponível em: https://tedit.net/5gyfi0 (acesso em: 28 jul. 2024).

Apresentamos a seguir as respostas para as questões propostas na abertura da Unidade.

1. É um bloco econômico, criado em 1991, formado por países da América do Sul: Brasil, Argentina, Paraguai e Uruguai. A Venezuela foi suspensa em 2016. O objetivo principal é promover a integração econômica, política e social dos membros, além de garantir a democracia na região.

2. Com o *QR Code* fica possível rastrear a placa, diminuindo as possibilidades de clonagem e falsificação.
Espera-se que o estudante, enquanto nativo digital, consiga formular uma resposta para a atividade **2**.
O objetivo da atividade **3** é sondar o levantamento prévio que os estudantes trazem do princípio multiplicativo (ou princípio fundamental da contagem), estudado em ciclos anteriores e que será aprofundado neste capítulo. Note que, para formar uma placa, é preciso fazer a escolha de 7 caracteres: letra – letra – letra – algarismo – letra – algarismo – algarismo.

3. Para a escolha do 1º caractere, que é uma letra, há 26 opções. Para o 2º caractere, há também 26 opções, o mesmo ocorrendo com as possibilidades de escolha do 3º caractere.
Para escolher o 4º caractere, que é um algarismo, há 10 possibilidades e, para o 5º caractere, que é uma letra, existem 26 possibilidades.
E, por fim, para escolher os 2 últimos caracteres, que são algarismos, temos 10 possibilidades para cada um deles.
Assim, o número de placas distintas é:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 26^4 \cdot 10^3 = 456\,976\,000$$

Considerando agora os caracteres distintos, o número de placas que podem ser formadas é:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 23 \cdot 9 \cdot 8 = 258\,336\,000$$

Capítulo 7

Neste capítulo, os estudantes vão resolver e elaborar problemas de contagem. Explique a eles que a Análise combinatória se destaca pela possibilidade de resolver problemas de diferentes maneiras. Portanto, essa é uma oportunidade para incentivar o estudante a explorar diferentes estratégias de resolução. Nesse sentido, é importante, inicialmente, que eles desenvolvam maneiras próprias de abordar um problema, para, em seguida, serem apresentados às técnicas já consagradas, como o princípio fundamental da contagem e o diagrama de árvore.

Na atividade resolvida **3** do boxe "Atividades resolvidas" da página 174, considere que, mesmo que o conceito de combinação seja formalizado posteriormente, é importante que os estudantes percebam que há situações em que o princípio multiplicativo deve ser usado sucessivamente para chegar à resposta correta.

Pergunte aos estudantes: "E se fossem 5 diretores dos quais se pretende escolher 3 para participar de um congresso?".

Em primeiro lugar, contamos a quantidade de triplas ordenadas de diretores, a saber: $5 \cdot 4 \cdot 3$. Porém a ordem dos diretores não importa. Então, é preciso saber quantas são as ordens possíveis para escolher 3 determinados diretores, a saber $3 \cdot 2 \cdot 1$. Assim, o resultado procurado é:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Se necessário, explicite as ordens, tomando por exemplo os diretores *R*, *C* e *T*. É importante que o estudante consiga chegar a essas possibilidades, mesmo antes da formalização do conceito de permutação. Temos, então: (*R*, *C*, *T*); (*R*, *T*, *C*); (*C*, *R*, *T*,); (*C*, *T*, *R*); (*T*, *C*, *R*); (*T*, *R*, *C*).

No tópico "Princípio aditivo da contagem" mostre aos estudantes que o princípio multiplicativo também está envolvido, porém ele não é suficiente para resolver os problemas.

As atividades **1** a **19** da seção "Atividades" da página 176 contribuem para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT310 ao contemplar problemas envolvendo os princípios aditivo e multiplicativo, bem como o diagrama de árvore.

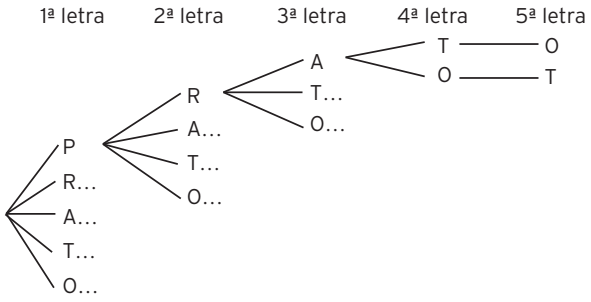
As atividades **5** e **18**, além disso, contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo matemático relacionado à competência específica CEMAT05.

Na atividade **17**, embora a resolução seja pessoal, é importante ficar atento a alguns pontos que o enunciado deve conter: "O cliente deve escolher o tipo de folha que será usada na salada entre alface, rúcula e agrião. Em seguida, é preciso escolher a proteína que acompanhará a salada entre as opções: atum, frango e ovo. O queijo pode ser branco ou prato. Por fim, deve-se escolher o molho que acompanha a salada, entre 4 opções: rosê, mostarda e mel, iogurte e balsâmico.".

No tópico "Fatorial de um número natural", explique aos estudantes que esse conceito é muito útil na realização de cálculos com números grandes.

Ao trabalhar o tópico "Agrupamentos simples", é importante enfatizar aos estudantes que o objetivo principal não é classificar os problemas, mas sim reconhecer as nuances de cada um. Questões como "a ordem importa?", "deseja-se formar subconjuntos ou sequências?" e "qual é o número de escolhas que devem ser feitas?" são mais relevantes do que simplesmente classificar um problema como permutação, arranjo ou combinação. Dessa maneira, o foco é retirado do uso de fórmulas específicas que não se aplicam a todos os problemas e direcionado para a compreensão das características de cada problema, com ênfase no princípio fundamental da contagem.

Para responder à questão proposta no boxe "Pense nisto" da página 184, é interessante iniciar a construção do diagrama para que os estudantes compreendam a estrutura da multiplicação: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Na atividade resolvida **10** do boxe "Atividades resolvidas" da página 189, é possível resolver o problema calculando o número de maneiras de escolher 3 carros quaisquer e descontar o número de casos em que os 3 carros escolhidos são importados:

$$C_{20,3} - C_{4,3} = 1140 - 4 = 1136$$

Ao finalizar o capítulo, proponha um debate com os estudantes sobre a importância da Análise combinatória no estudo da Probabilidade, que será o tema do próximo capítulo. Explique como a compreensão dos princípios combinatórios é fundamental para calcular as probabilidades de eventos e resolver problemas complexos de maneira eficaz.

Interligando

Nessa seção é apresentada uma introdução à teoria dos grafos. Se julgar oportuno, acesse com o estudante as videoaulas de introdução à teoria dos grafos, do Portal da Obmep, disponível em: https://tedit.net/4br81z (acesso em: 26 set. 2024).

A atividade **3** dessa seção tem como objetivo levar os estudantes a concluírem que muitos problemas da vida real podem ser associados à representação de grafos. Embora o problema inicialmente proposto seja criativo, ele pode não ter maior relevância prática. No entanto, é possível associá-lo a situações reais com contextos significativos. Outras aplicações incluem a distribuição de redes de energia e de abastecimento de água. Além disso, é possível relacionar sua aplicação ao uso das redes sociais, como as curtidas em páginas e as relações estabelecidas com base nas preferências de amigos e amigas nessas redes.

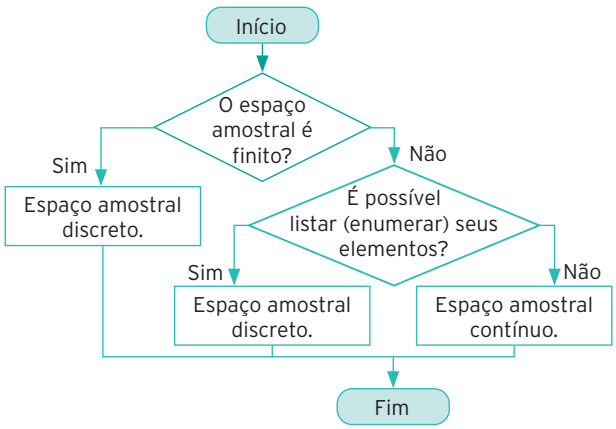
Capítulo 8

Antes de iniciar o trabalho com este capítulo, é importante comentar com os estudantes que a probabilidade é um tema com muitas aplicações práticas, como a construção de tábuas atuariais de seguradoras, em epidemiologia e outras áreas da saúde, econometria e também no contexto de jogos, como as loterias. Uma das funções principais da probabilidade é auxiliar as pessoas a tomarem decisões mais conscientes diante de situações em que o acaso desempenha um papel fundamental.

No trabalho com o tópico "Fenômenos aleatórios e fenômenos determinísticos", sugira aos estudantes que apresentem outros exemplos de experimentos ou fenômenos associados. Em seguida, enfatize que o cálculo da probabilidade envolve apenas os primeiros.

Para trabalho com o tópico "Espaço amostral e evento", se julgar conveniente, leve uma moeda, um dado não viciado e um baralho comum para a sala e realize alguns experimentos. Em seguida, descreva com a turma o espaço amostral desses experimentos. Depois, indique alguns eventos e em seguida, faça a sua descrição. Se julgar conveniente, aproveite esse momento para retomar algumas das estratégias de contagem estudadas no capítulo anterior.

Apresentamos a seguir um exemplo de fluxograma para o boxe "Pense nisto" da página 199.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Ao trabalhar com o tópico "Frequência relativa e probabilidade", explique aos estudantes que a frequência relativa é utilizada quando queremos obter o percentual de ocorrência de um evento em relação ao todo, com a particularidade de que esse valor é mutável, diferentemente da probabilidade clássica.

No tópico "Probabilidades em espaços amostrais equiprováveis", é importante que os estudantes compreendam que a probabilidade de um evento impossível é nula e que a probabilidade de um evento certo é 1. Logo, a probabilidade de qualquer outro evento desse espaço amostral é um número entre zero e 1. Ao tratar sobre eventos equiprováveis, esse tópico contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT511.

Na seção "Atividades" da página 206, na atividade **14**, revise, se necessário, a fórmula da área do círculo.

Na atividade **16**, relembre e converse com os estudantes o número de soluções reais de uma equação de 2º grau, bem como a resolução de inequações de 1º grau. Lembre, no entanto, que o problema pode ser resolvido testando cada um dos coeficientes possíveis para c. Já as atividades **17** e **18** envolvem espaços amostrais não equiprováveis.

A atividade **19** também pode ser resolvida com a resolução de uma inequação de 1º grau. Nas atividades **20**, **21**, **22**, **28**, **29** e **30** devem ser usadas técnicas de contagem baseadas no princípio multiplicativo.

A atividade **27** favorece a habilidade EM13MAT311, por meio da construção do espaço amostral do experimento e contagem de possibilidades.

Proposta para o professor

Se quiser conhecer mais sobre o jogo, leia o artigo "Jankenpon: Conheça a história do famoso jogo 'Pedra-Papel-Tesoura'", disponível em: https://tedit.net/7i8xkh (acesso em: 8 ago. 2024).

A atividade **31** promove o desenvolvimento da habilidade EM13MAT106. Caso ache interessante, proponha um momento de interdisciplinaridade com a participação de professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, especificamente do componente curricular Biologia.

A seção "Atividades" da página 213 favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo matemático relacionado à competência específica CEMAT05 e à habilidade EM13MAT311.

Na seção "Atividades" da página 215, as atividades **36** a **41** devem ser resolvidas sem o uso da fórmula de probabilidade condicional, por meio da construção do espaço amostral reduzido.

Nas atividades **44**, **48**, **49**, **50** e **51**, o uso do diagrama de árvore pode ser um importante apoio para resolução, para descrever eventos sucessivos.

Na atividade **49**, é importante que os estudantes se lembrem de que temos retiradas com reposição para garantir a independência entre elas.

Proposta para o professor

Avalie a possibilidade de propor para a turma a leitura do livro *Novas Aventuras Científicas de Sherlock Holmes - Casos De Lógica, Matemática e Probabilidade*, de Colin Bruce, Zahar Editora, 1ª ed., 2003. Nessa obra, há diversas situações contextualizadas envolvendo análise combinatória e probabilidades.

Projeto

O trabalho com esse projeto favorece o desenvolvimento das competências gerais CG07 e CG10 da BNCC.

Promova uma conversa com os estudantes sobre o que eles entendem por catástrofes climáticas e se já vivenciaram ocorrências de acidentes e/ou desastres naturais ou conhecem alguma história real relacionada aos resultados e impactos de eventos extremos do clima.

O objetivo do projeto envolve a organização e a análise a respeito de temáticas envolvendo eventos climáticos. A abordagem de cada tema depende das escolhas que cada grupo fizer. Além da seleção de uma amostra que possa ser modelada, converse com os estudantes sobre como fazer uma coleta de dados e quais serão as medidas probabilísticas relevantes.

A organização de uma pesquisa a partir de dados coletados em diferentes mídias e a elaboração de um relatório analítico climático proporciona aos estudantes a oportunidade de trabalhar com a coleta de dados e produzir e compartilhar informações que promovam o entendimento mútuo. Além disso, essa atividade incentiva a reflexão sobre as causas e consequências de desastres naturais, como as mudanças climáticas e seus impactos ambientais. Com essa ação, os estudantes também refletirão sobre a importância de políticas públicas e ambientais para a prevenção de catástrofes climáticas. Ao participarem desse projeto, os estudantes desenvolvem a habilidade EM13MAT102 da BNCC, que envolve a análise e interpretação de dados estatísticos e probabilísticos, a tomada de decisões informadas e a comunicação eficaz de informações.

Ao participar do projeto, os estudantes terão a possibilidade para praticar uma comunicação colaborativa ao acessar e produzir informações, além de desenvolver a autonomia ao exercerem protagonismos de autorias, tomadas de decisões e aprofundamento do conhecimento matemático.

O projeto promove o debate de alguns dos temas propostos nos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, alinhando-se com o ODS **11**, que visa tornar as cidades e os assentamentos humanos inclusivos, seguros, resilientes e sustentáveis, com o ODS **13**, ao propor medidas para combater a mudança do clima e seus impactos, e com o ODS **16**, ao promover reflexões sobre o desenvolvimento das cidades.

Para começar

Auxilie os estudantes na organização dos dados, especialmente quando se trata da modelagem de dados reais relacionados ao estudo de Probabilidade, que pode ser ampliado e aprofundado a partir desse projeto.

Desenvolvimento do projeto

Organize os estudantes em 5 grupos. Cada grupo será responsável por uma das temáticas indicadas:

- tema **1**: enchentes, inundações, alagamentos;
- tema **2**: deslizamentos e erosões;
- tema **3**: vendavais, aumento do nível do mar e ciclone extratropical;
- tema **4**: ondas extremas de calor e de frio;
- tema **5**: seca e queimadas.

Na "Etapa 1" e na "Etapa 2", os grupos se organizam para refletir sobre o planejamento da pesquisa, considerando os objetivos e a elaboração de argumentos sobre os temas propostos, além da maneira como os dados devem ser obtidos e organizados. Auxilie os estudantes nas propostas dos projetos, nos recursos a serem utilizados para a organização dos dados e na importância de incluir citações e fontes utilizadas ao final do relatório.

A "Etapa 3" envolve a organização de uma modelagem matemática para prever a probabilidade de algum episódio climático, e é essencial que você auxilie os estudantes nessa fase. Promova uma conversa com eles para identificar situações nas quais será necessária a tomada de decisões. Envolva-os também na escolha de informações de natureza probabilística, que requerem um conjunto de habilidades específicas para a comparação dos resultados obtidos na "Etapa 1" e na "Etapa 2". Noções básicas de Probabilidade estarão envolvidas no trabalho com dados reais e constituem ferramentas que favorecem a compreensão e organização das informações pelos estudantes, conforme o exemplo proposto. Nessa etapa, lembre os grupos da importância de apresentar os dados probabilísticos modelados e refletir sobre ações que visem a tomada de providências preventivas e/ou a redução dos impactos do evento climático.

A "Etapa 4" e a "Etapa 5" referem-se à organização do relatório analítico e a definição do que os grupos consideram primordial para estar no relatório, considerando os impactos levantados, oportunizando nesse momento a tomada de decisões.

Produto final

Os grupos devem apresentar seus relatórios analíticos. Os resultados podem ser debatidos em uma plenária com toda a turma.

Avaliação do projeto

Após a apresentação dos relatórios, oportunize 2 momentos de reflexão com os estudantes. O primeiro momento deve focar na reflexão sobre a demanda do grupo na organização de uma pesquisa envolvendo a modelagem de dados reais. O segundo momento deve propor uma reflexão sobre as catástrofes climáticas, que estão se tornando mais frequentes e com impactos cada vez mais intensos.

Interligando

Sugerimos que essa seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, para conversar e aprofundar o tema das opções disponíveis de anticoncepcionais. Essa abordagem também favorece o desenvolvimento do TCT *Saúde*.

As atividades dessa seção favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo matemático relacionado à competência específica CEMAT05 da BNCC, além de propiciar o desenvolvimento das habilidades EM13MAT106 e EM13MAT312.

Viralize!

Essa seção favorece o desenvolvimento dos TCTs Educação em *Direitos Humanos* e *Vida Familiar e Social*.

Ao abordar o tema proposto nessa seção, verifique a possibilidade de convidar uma pessoa cega para conversar com os estudantes sobre o sistema Braille. Outra possibilidade é organizar a turma em grupos e pedir que realizem uma pesquisa sobre esse sistema. Em seguida, cada grupo pode compartilhar seus achados com a turma.

Proponha uma conversa com a turma sobre a importância das ações que pesquisaram na atividade **1** dessa seção. Durante a conversa, certifique-se de que os estudantes se expressem com respeito e empatia.

Para fundamentar saberes

Ao trabalhar com as atividades dessa seção, enfatize que os temas abordados nessa Unidade são recorrentes no Enem e que, em muitas situações-problema, a contagem dos elementos do espaço amostral e do evento é facilitada pelo uso da análise combinatória.

Na atividade **5**, destaque o uso do diagrama de árvores em situações em que a probabilidade de um evento é influenciada por informações anteriores.

Aproveite o momento de autoavaliação para verificar se os estudantes compreenderam os conceitos estudados. Se necessário, retome alguns deles.

Proposta para o estudante

(Enem) Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é:

a) 8. **b)** 9. **c)** 11. **d)** 18. **e)** 24.

Resolução:

A montadora oferece x cores, 7 modelos de carro, 2 tipos de motor. Quanto aos opcionais, o cliente poderá escolher:

- 1 item: 3 opções;
- 2 itens: $C_{3,2} = 3$; ou seja, 3 opções;
- 3 itens: 1 opção;
- nenhum item: 1 opção.

Totalizando 8 opcionais.

Pelo princípio multiplicativo, devemos ter:

$$\underset{\text{cores}}{x} \cdot \underset{\text{modelos}}{7} \cdot \underset{\text{motores}}{2} \cdot \underset{\text{opcionais}}{8} > 1000$$

$$12x > 1000$$

$$x > 8{,}92$$

O número mínimo de cores que devem ser oferecidas é 9.

Alternativa **b**.

Unidade 5: Geometria analítica, transformações geométricas e ladrilhamento

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG01, CG02, CG03, CG04, CG05 e CG09.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT01, CEMAT03 e CEMAT05.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT105, EM13MAT307, EM13MAT308 e EM13MAT505.

Habilidade de outras áreas do conhecimento:
EM13LP18.

Temas Contemporâneos Transversais:

Ciência e Tecnologia; *Diversidade Cultural*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Localizar pontos no plano cartesiano, por meio de suas coordenadas e vice-versa.
- Reconhecer as vantagens do uso do plano cartesiano para localização de pontos e retas em situações-problema.
- Determinar a medida de distância entre 2 pontos e aplicá-la na resolução de problemas.
- Determinar o ponto médio de um segmento de reta.
- Verificar analiticamente a condição de alinhamento de 3 pontos.
- Reconhecer a forma reduzida e a forma geral da equação de uma reta, interpretando os seus coeficientes.
- Estabelecer a correspondência entre a equação de uma reta e a função afim.
- Determinar interseções entre retas.
- Reconhecer retas paralelas e perpendiculares a partir de suas equações.
- Resolver problemas envolvendo mediatriz de um segmento, projeção de um ponto sobre uma reta, altura do triângulo, entre outros.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

Ao propor a leitura de um texto sobre as pinturas corporais usadas por determinado povo indígena e ao sugerir o acesso a um vídeo que apresenta alguns significados dessas pinturas por meio de entrevistas com indígenas, pretende-se criar uma oportunidade para a valorização e o respeito à diversidade cultural, trabalhando os TCTs *Diversidade Cultural* e *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* e a competência geral CG03 (repertório cultural). Aproveite esse momento para ressaltar a importância de valorizar e respeitar as tradições e práticas culturais dos povos indígenas e incentive os estudantes a assistirem ao vídeo com uma atitude de empatia e respeito.

Capítulo 9

No início deste capítulo, apresentamos o contexto histórico do desenvolvimento da Geometria analítica por Descartes e Pascal no século XVII, promovendo a competência geral CG01.

Para o trabalho com as atividades **8**, **11**, **12** e **13** da seção "Atividades" da página 231, os estudantes terão que resolver algumas equações irracionais simples; se necessário, relembre com eles como resolvê-las.

Na seção "Atividades" da página 237, na atividade **16** será necessário rever o conceito de mediana de um triângulo; se julgar pertinente, relembre que o ponto de encontro das 3 medianas do triângulo é o baricentro e que ele divide cada mediana na razão de 2 : 1.

Na atividade **22**, relembre os estudantes que, no triângulo equilátero, a mediana coincide com a altura. Essa propriedade, bem como o teorema de Pitágoras, serão necessários para determinar as coordenadas de *C*. Se julgar oportuno, deduza com eles as fórmulas da medida da altura e da área do triângulo equilátero.

Nas atividades **18**, **20**, **52**, **54**, **59** e **62** é oportuno revisar com os estudantes a classificação e algumas propriedades dos principais quadriláteros.

Já as atividades **34**, **35**, **36**, **41**, **45**, **46**, **47** e **48** têm por objetivo relacionar o estudo da reta na Geometria analítica ao estudo das funções polinomiais de 1º grau. Na atividade **41** da seção "Atividades" da página 248, por exemplo, é possível retomar o conceito de grandezas diretamente proporcionais e função linear, por meio do conceito de densidade.

Relembre também o conceito de módulo de um número real na atividade **55** da seção "Atividades" da página 252.

A seguir, apresentamos a resolução da questão proposta no boxe "Pense nisto" da página 253. Relembre os estudantes do teorema da base média do triângulo.

Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos (basta calcular os coeficientes angulares das retas suportes de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$; além disso, $CD = \frac{AB}{2}$ (basta calcular as medidas de distância entre *A* e *B* e entre *C* e *D*).

Em relação ao tópico "Perpendicularidade", se achar pertinente, apresente aos estudantes a justificativa da propriedade: "sendo α a medida de um ângulo agudo, $\text{sen}(\alpha + 90°) = \cos\alpha$ e $\cos(\alpha + 90°) = -\text{sen}\,\alpha$."

P é imagem de α e *Q* é imagem de $(90° + \alpha)$

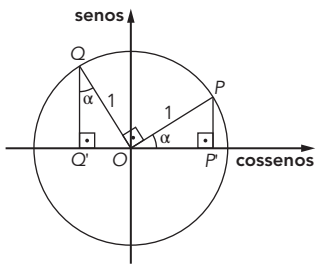
- Como $\text{med}(Q\hat{O}Q') = 180° - (90° + \alpha) = 90° - \alpha$, segue que $\text{med}(O\hat{Q}Q') = \alpha$

  Daí:

  $\triangle POP' \cong \triangle OQQ'$ (caso LAA_0) $\Rightarrow$

  $$\Rightarrow \begin{cases} \overline{PP'} \cong \overline{QQ'}, \text{ isto é, } \text{sen}\,\alpha = -\cos(\alpha + 90°) \\ \overline{OP'} \cong \overline{QQ'}, \text{ isto é, } \cos\alpha = \text{sen}(\alpha + 90°) \end{cases}$$

Banco de imagens/Arquivo da editora



Interligando

Essa seção promove o TCT *Ciência e Tecnologia* e as competências gerais CG01, CG02 e CG05 da BNCC, proporcionando uma oportunidade para o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar. Em colaboração com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, é possível abordar os conteúdos de coordenadas geográficas. Além disso, uma parceria com o professor de Física, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, permitirá conversar sobre o conceito de órbitas ao redor da Terra.

A seção apresenta aos estudantes o surgimento das navegações por satélite, destacando a existência de outros sistemas além do GPS estadunidense. Ela explora a composição dos satélites Navstar-GPS que orbitam a Terra, a visualização desses satélites e a medida de tempo entre o envio e recebimento das informações de cada satélite. Além disso, aborda as coordenadas geográficas (latitude e longitude) e a medida da altitude, essenciais para determinar as localizações.

Realize uma leitura colaborativa e levante os conhecimentos prévios dos estudantes. Investigue se eles conseguem identificar os pontos cardeais, reconhecendo o norte como a referência para a bússola, e o leste e oeste como as direções do nascer e pôr do Sol, respectivamente.

Durante a leitura do trecho que cita as coordenadas geográficas, associe-as ao conceito das coordenadas cartesianas e relembre que são medidas em graus, sendo que a latitude pode variar de 0° até 90° a partir da linha do Equador nas direções norte (N) ou sul (S), enquanto a longitude pode variar de 0° até 180° a partir do Meridiano de Greenwich nas direções leste (E) ou oeste (W). O conhecimento das abreviações em inglês é importante porque os aplicativos de mapa as utilizam como referência. Vale citar que cada grau tem 60 minutos, e cada minuto tem 60 segundos.

É possível realizar uma extrapolação das questões da seção ao apresentar aos estudantes pontos de referência da cidade em que vivem.

Projeto

O objetivo desse projeto é desenvolver a noção espacial e a representação cartográfica, comparando diferentes tipos de representação da superfície terrestre a partir de mapas, fotos de satélite e/ou imagens aéreas e tridimensionais.

A produção de um vídeo sobre mapeamento de presença pública na região/município/distrito oportuniza aos estudantes explorar, produzir e partilhar informações que levem ao entendimento mútuo. Ao participarem desse projeto, os estudantes desenvolvem a competência geral CG05, a competência específica CEMAT01, bem como a habilidade EM13LP18 da BNCC.

Participando do projeto, os estudantes promoverão uma comunicação colaborativa ao acessar e produzir informações e conhecimento, desenvolvendo habilidades que envolvem autonomia. Eles exercerão protagonismo ao assumirem autorias, tomarem decisões e aprofundarem seu conhecimento matemático. Além disso, o projeto contribui para o ODS **16** ao promover sociedades inclusivas para o desenvolvimento sustentável, proporcionar acesso à justiça para todos e construir instituições eficazes, responsáveis e inclusivas em todos os níveis.

Para começar

Auxilie os estudantes a realizarem buscas e pesquisas e a organizarem os dados, com ênfase na modelagem de dados reais para o registro e a organização das coordenadas em um sistema ortogonal. Além disso, oriente-os na escrita de textos, como resumos didáticos simples, sobre o conteúdo pesquisado.

Desenvolvimento do projeto

Organize os estudantes em 7 grupos. Cada grupo organizará uma pesquisa envolvendo a organização e análise de mapeamento sobre os dados da região/município/distrito em que moram, com a apresentação dos resultados por meio da produção de um vídeo. Para isso, os grupos precisam realizar uma pesquisa gerando uma imagem da região/município/distrito em que moram, indicando a localização em um plano cartesiano e observando a região de ruas, casas e prédios relevantes, preferencialmente relacionados ao poder público, como unidades de saúde, escolas, agência dos correios, postos policiais e de bombeiros, etc.

Na "Etapa 1", os grupos se organizam para gerar uma imagem com algum aplicativo ou ferramenta gratuita de geolocalização.

Na "Etapa 2", oriente os grupos quanto à importância de saber lidar com a modelagem de dados reais na organização de um plano cartesiano e na apresentação das coordenadas de cada ponto estratégico inserido.

Na "Etapa 3", o *link* para o vídeo "Macrocefalia urbana e problemas sociais" é apresentado no boxe "Dica" da seção. Incentive os grupos a procurar outras fontes sobre a temática proposta.

Na "Etapa 4", auxilie os grupos a escolher um aplicativo, de preferência gratuito, para a edição final dos vídeos. Leve em consideração as seguintes dicas:

- Inserir legendas da locução no vídeo para torná-lo mais acessível.
- Prestar atenção à qualidade do áudio, garantindo que esteja claro e audível.
- Incluir uma trilha sonora gratuita para enriquecer o vídeo.

Ressalte que cada vídeo não deve ultrapassar 5 minutos e que eles podem salvar e compartilhar as gravações em uma plataforma de vídeos *on-line*.

Produto final

É a etapa de apresentação dos vídeos. Sugerimos que os grupos possam debater sobre os resultados encontrados e divulgá-los para a comunidade escolar.

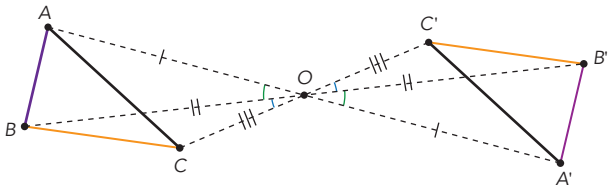
Avaliação do projeto

Após a socialização dos vídeos, promova 3 momentos de reflexão com os estudantes. Primeiro, um debate sobre a organização necessária para criar um roteiro e produzir um vídeo explicativo. Segundo, uma reflexão sobre a demanda do grupo na organização de uma pesquisa envolvendo a modelagem de dados reais. Terceiro, uma análise sobre os impactos de considerar problemas sociais e políticas públicas nas regiões, municípios ou distritos onde residem.

Capítulo 10

No início deste capítulo, são apresentadas algumas fotografias relacionadas ao conceito de simetria. Explique aos estudantes que é a fotografia que apresenta simetria, e não necessariamente o animal borboleta, o objeto avião ou o palácio em si. Afirmar que esses elementos são simétricos pode levar ao erro de considerar que o avião, por exemplo, é simétrico em todos os seus aspectos, incluindo seu interior, o que pode não ser verdade. Um exemplo claro dessa situação é o corpo humano: uma fotografia do corpo humano pode apresentar simetria, mas o corpo humano em si não é simétrico se considerarmos seus órgãos internos.

A demonstração do fato apresentado no boxe "Observação" da página 260 está apresentada a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$\overline{OA} \cong \overline{OA'}$ $\overline{OB} \cong \overline{OB'}$ $\overline{OC} \cong \overline{OC'}$

Como ângulos opostos pelo vértice são congruentes, tem-se: $A\hat{O}B \cong A'\hat{O}B'$, $B\hat{O}C \cong B'\hat{O}C'$ e $A\hat{O}C \cong A'\hat{O}C'$.

Considerando os critérios de congruência:

Pelo critério LAL, os triângulos OAB e $OA'B'$ são congruentes e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

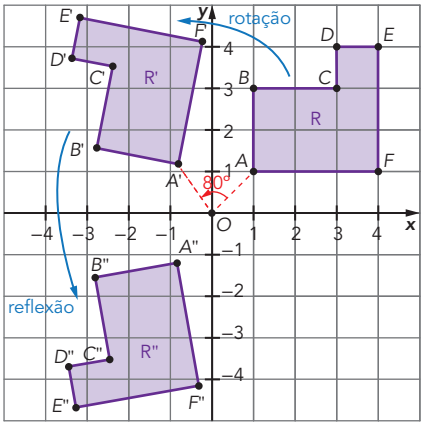
Pelo critério LAL, os triângulos BOC e $B'OC'$ são congruentes e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

Pelo critério LAL, os triângulos AOC e $A'OC'$ são congruentes e $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

Assim, pelo critério LLL, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes.

Apresentamos a seguir a resposta a questão proposta no boxe "Pense Nisto" da página 273.

Sim, porém a figura intermediária seria outra. Obtemos o mesmo resultado (a região R'') se invertermos a ordem das transformações, ou seja, se aplicarmos primeiro a rotação e, depois, a reflexão.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Na seção "Atividades" da página 279, a atividade **34** atende ao TCT *Diversidade Cultural* ao apresentar a fotografia do filme *O Iluminado* a partir de uma abordagem matemática. Destaque que, por conta do ponto de vista, a imagem **1** "tem trapézios" destacados na figura plana, mas, "ao vivo" (imagem não plana), seriam retângulos. Também é importante avisar que esse filme tem classificação indicativa 14 anos e é do gênero terror.

Interligando

Essa seção favorece o desenvolvimento da competência geral CG01 ao explorar a necessidade de entender os formatos da natureza que levaram à "descoberta" dos fractais. Além disso, valoriza o desenvolvimento da competência específica CEMAT01.

Se julgar oportuno, peça aos estudantes uma aplicação que permite que eles simulem seus próprios fractais, disponível em: https://tedit.net/2m6uk6 (acesso em: 26 set. 2024).

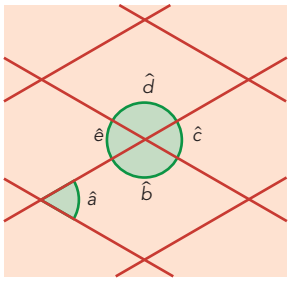
Capítulo 11

O capítulo sobre ladrilhamento permite um trabalho interdisciplinar com o professor de Arte e desenvolve a habilidade EM13MAT105 da BNCC. Há inúmeros artistas que trabalharam essa técnica em suas obras de arte – como Escher, cujo trabalho será discutido na seção "Interligando" – de modo que podem ser propostas pesquisas sobre eles, além de uma sugestão de atividades de criação de mosaicos pelos próprios estudantes que podem ser expostos para a escola. Esse trabalho conjunto colabora com o desenvolvimento do TCT *Diversidade Cultural*.

Apresentamos a seguir a resposta à questão proposta no boxe "Pense nisto" da página 285.

É sempre possível ladrilhar uma região do plano como losangos (não quadrados) congruentes, pois basta ladrilhar a região de modo que 2 losangos adjacentes fiquem justapostos por um dos lados.

Banco de imagens/Arquivo da editora



As medidas dos ângulos internos consecutivos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ de um losango somam 180°. Como os losangos são congruentes entre si, $\text{med}(\hat{a}) = \text{med}(\hat{c})$ e, desse modo, $\text{med}(\hat{b}) + \text{med}(\hat{c}) = 180°$. De modo análogo, $\text{med}(\hat{d}) + \text{med}(\hat{e}) = 180°$. Assim, a soma das medidas dos ângulos ao redor de um vértice será 360°.

A seção "Experimente" da página 288 propõe um trabalho de composição de ladrilhamento por meio do uso de um *software* de Geometria dinâmica e promove o desenvolvimento da habilidade EM13MAT505 da BNCC.

Após a realização da pesquisa proposta na atividade **6** da seção "Atividades" da página 290, organize uma roda de conversa com os estudantes para conversarem sobre as informações que encontraram. Durante essa conversa, é importante ressaltar a trajetória de Marjorie Rice, destacando os obstáculos que ela teve que superar para que seu trabalho fosse reconhecido.

Interligando

Nessa seção, apresentamos alguns dos trabalhos de Escher. Para enriquecer ainda mais essa experiência, sugerimos uma colaboração com o professor de Arte. Essa parceria pode proporcionar uma abordagem interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias, desafiando os estudantes a criarem seus próprios mosaicos.

Viralize!

Destaque aos estudantes o aspecto da Etnomatemática da arte Sona. Os sona são figuras geométricas e, além de serem usados na comunicação, são utilizados para realizar cálculos.

A seção apresenta para os estudantes um texto sobre a arte Sona, produzida pelo povo quioco de Angola, na África. Essa seção favorece o trabalho interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias – Arte, além de contribuir para o desenvolvimento do TCT *Diversidade Cultural*.

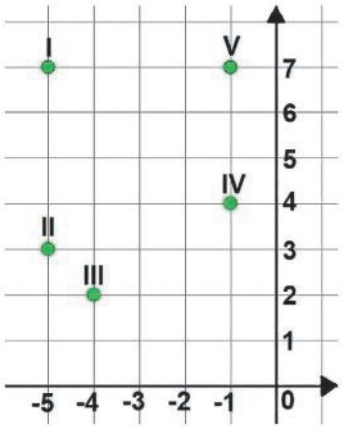
Para fundamentar saberes

Aproveite as atividades apresentadas nessa seção como uma oportunidade para avaliar o aprendizado dos estudantes em relação aos conceitos matemáticos explorados na Unidade 5. Essas atividades são projetadas para reforçar e aplicar os conhecimentos adquiridos, permitindo que você note como os estudantes estão compreendendo e utilizando esses conceitos.

Proposta para o estudante

(UPE) Um provedor de internet instalará um novo transmissor com um alcance máximo de 3 quilômetros. A fim de estudar com mais exatidão esse alcance, o técnico representou o bairro de interesse num plano cartesiano, onde cada unidade equivale a 1 km. O transmissor foi instalado no ponto (–3, 5). As residências **I**, **II**, **III**, **IV** e **V**, cujas posições estão indicadas na figura a seguir, assinaram um plano para receber o sinal de internet desse transmissor, mas uma delas ficou fora do seu alcance.

Reprodução/UPE, 2022.



Qual a residência ficou fora do alcance do transmissor?

a) **I**
b) **II**
c) **III**
d) **IV**
e) **V**

Resolução:

É preciso calcular a medida de distância de (–3, 5) a cada um dos pontos dados.

I. $d = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} < 3$

II. $d = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} < 3$

III. $d = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} > 3$

IV. $d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} < 3$

V. $d = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} < 3$

Portanto, a residência **III** ficou fora do alcance do transmissor.

Alternativa **c**.

Resoluções

Unidade 1

Capítulo 1

Atividades

1. **a)** $a_2 = -3 + 5 \cdot 2 = 7$

b) $a_4 = -3 + 5 \cdot 4 = 17$

c) $a_{11} = -3 + 5 \cdot 11 = 52$

2. **a)** $n = 1 \Rightarrow f(1) = 3 \cdot 2 = 6$; $n = 2 \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 3 = 9$; $n = 3 \Rightarrow f(3) = 3 \cdot 4 = 12$; $n = 4 \Rightarrow f(4) = 3 \cdot 5 = 15$; ...

A sequência associada a f é (6, 9, 12, 15, ...).

b) $g(1) = 1 - 2 + 4 = 3$; $g(2) = 4 - 4 + 4 = 4$; $g(3) = 9 - 6 + 4 = 7$; $g(4) = 16 - 8 + 4 = 12$; ...

A sequência associada a g é (3, 4, 7, 12, ...).

3. **a)** $a_1 = 143 - 4 = 139$; $a_2 = 143 - 8 = 135$; $a_3 = 143 - 12 = 131$. A soma é: $139 + 135 + 131 = 405$.

b) • $71 = 143 - 4n \Rightarrow n = 18$; então, 71 pertence à sequência e é o 18º termo.

• $-345 = 143 - 4n \Rightarrow n = 122$; então, -345 pertence à sequência e é o 122º termo.

• $-195 = 143 - 4n \Rightarrow n = 84{,}5 \notin \mathbb{N}^*$; então, -195 não pertence à sequência.

4. $a_1 = 2$; $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$; $a_3 = 3 \cdot 6 = 18$; $a_4 = 3 \cdot 18 = 54$; $a_5 = 3 \cdot 54 = 162$; $a_6 = 3 \cdot 162 = 486$.

5. O 3º termo da sequência é $f(3) = 3^3 + 3^2 + 1 = 37$.
O 6º termo da sequência é $f(6) = 6^3 + 6^2 + 1 = 253$.
Portanto, a sequência é (3, 13, 37, 81, 151, 253, ...).

6. **a)** Número total de quadradinhos:

(1, 4, 9, 16, 25, 36, ...) = (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, ...)

Número de quadradinhos coloridos:

(1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)

Número de quadradinhos em branco:

(0, 2, 6, 12, 20, 30, ...)

Assim, para a 5ª imagem, temos: 25 quadradinhos, sendo 5 coloridos e 20 em branco; e para a 6ª imagem: 36 quadradinhos, sendo 6 coloridos e 30 em branco.

b) $a_n = n^2$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $a_n = n^2 - n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

d) $n^2 - n = 90 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Rightarrow \Delta = 361 \Rightarrow n = 10$ ou $n = -9$ (não convém).

10ª posição da sequência.

7. **a)** A sequência (0, −7, 7, −14, 14, ...) não é uma PA, pois: $a_2 - a_1 = -7$; $a_3 - a_2 = 14$.

b) A sequência (−8, 0, 8, 16, 24, 32, ...) é uma PA de razão $r = 8$, pois: $-8 + 8 = 0$; $0 + 8 = 8$; $8 + 8 = 16$, ...

c) A sequência $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \ldots\right)$ é uma PA de razão $r = \frac{1}{3}$, pois: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$; $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; ...

d) A sequência (−30, −36, −41, −45, ...) não é uma PA, pois: $-36 - (-30) = -6$; $-41 - (-36) = -5$.

e) A sequência $\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots\right)$ é uma PA de razão $r = \sqrt{2}$, pois: $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$; $3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$; ...

Resposta: itens **b**, **c** e **e**.

8. **a)** $a_8 = 28 + 7 \cdot 8 = 84$

b) $a_{19} = 28 + 18 \cdot 8 = 172$

c) $a_{31} = 28 + 30 \cdot 8 = 268$

d) $a_n = 28 + 8n - 8 = 8n + 20$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

9. $a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow 3200 = a_1 + 5 \cdot 400 \Rightarrow a_1 = 1200$
$a_2 = 1200 + 400 = 1600$; ou seja, 1600 m.

10. **a)** $a_n = 5100 + (n - 1) \cdot (-300) = 5100 - 300n + 300$
$a_n = 1200 \Rightarrow 5400 - 300n = 1200 \Rightarrow n = 14$
No 14º mês (contado a partir de janeiro de 2023), o estoque foi de 1200 m. Esse mês corresponde a fevereiro de 2024.

b) $a_n = 0 \Rightarrow 5400 - 300n = 0 \Rightarrow n = 18$

No 18º mês (contado a partir de janeiro de 2023), o estoque zerou; portanto, o tecido acabou. Esse mês corresponde a junho de 2024.

11. $a_1 + a_3 + a_4 = a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 3r$

Assim, temos: $\begin{cases} 3a_1 + 5r = 0 \\ a_1 + 5r = 40 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -20$ e $r = 12$.

Logo, podemos escrever:

$a_2 = -20 + 12 \Rightarrow a_2 = -8$; $a_3 = -8 + 12 \Rightarrow a_3 = 4$; $a_4 = 4 + 12 \Rightarrow a_4 = 16$; $a_5 = 16 + 12 \Rightarrow a_5 = 28$.

Portanto, os 5 primeiros termos dessa PA são −20, −8, 4, 16 e 28.

12. $\begin{cases} a_1 = 310 - 8 = 302 \\ a_2 = 310 - 16 = 294 \end{cases} \Rightarrow r = a_2 - a_1 = 294 - 302 = -8$

13. **a)** $(3x + 1) - (3x - 5) = 25 - (3x + 1) \Rightarrow x = 6$;
PA: (13, 19, 25); $r = 6$.

b) $(6x + 1) - x^2 = x^2 - (x + 3) \Rightarrow x = 4$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Se $x = 4$, a PA é (7, 16, 25), com $r = 9$.

Se $x = -\frac{1}{2}$, a PA é $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$, com $r = -2{,}25$.

14. A sequência é (73, 75, 77, ..., 467).
$467 = 73 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 198$; ou seja, 198 números.

15. **a)** Devemos determinar o número de termos da sequência (3, 6, 9, ..., 378).

$378 - 3 = (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 126$; ou seja, 126 estudantes.

b) A sequência dos múltiplos de 7 é (7, 14, 21, 28, ..., 378).

Essa sequência tem 54 elementos, pois $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 378 = 7 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow n = 54$. No entanto, alguns elementos dessa sequência são também múltiplos de 3 – os múltiplos de 21 –, e os estudantes correspondentes a eles já haviam feito exame no primeiro dia.

Assim, é preciso descontar, desse total parcial (54), a quantidade de múltiplos de 21 (mínimo múltiplo comum entre 3 e 7), a saber: (21, 42, 63, ..., 378). Usando novamente o termo geral da PA, obtemos:

$378 = 21 + (n - 1) \cdot 21 \Rightarrow n = 18$

Assim, o número de estudantes que fizeram exames no segundo dia é $54 - 18 = 36$.

16. $(x - r, x, x + r)$

$x - r + x + x + r = 72 \Rightarrow 3x = 72 \Rightarrow x = 24$

$(x - r) \cdot (x + r) = 560 \Rightarrow x^2 - r^2 = 560 \Rightarrow r = \pm 4$

Se $r = 4$, os 3 termos consecutivos dessa PA são: $(24 - 4, 24, 24 + 4) = (20, 24, 28)$.

Se $r = -4$, os 3 termos consecutivos dessa PA são: $(28, 24, 20)$.

Logo, as possibilidades para os 5 primeiros termos dessa PA são (20, 24, 28, 32, 36) ou (28, 24, 20, 16, 12).

17. Medidas dos ângulos internos do triângulo: $(x - r, x, x + r)$.

$x + r = 105°$

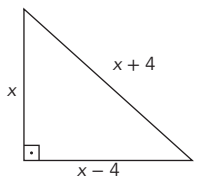
$x - r + x + x + r = 180° \Rightarrow x = 60°$

$x + r = 105° \Rightarrow r = 105° - 60° = 45°$

$x - r = 60° - 45° = 15°$

As medidas são (15°, 60°, 105°).

18.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

$(x + 4)^2 = x^2 + (x - 4)^2 \Rightarrow x = 16$, já que $x > 0$.

Logo, a hipotenusa mede 16 cm + 4 cm = 20 cm.

19. $a_{15} = -45 + 14 \cdot 4 = -45 + 56 = 11$

$S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \dfrac{(-45 + 11) \cdot 15}{2} = \dfrac{-510}{2} = -255$

20. $a_{20} = 0{,}15 + 19 \cdot 0{,}25 = 4{,}9$

$S_{20} = \dfrac{(0{,}15 + 4{,}9) \cdot 20}{2} = 50{,}5$

21. **a)** No plano alfa, o valor da 13ª prestação é:

$a_{13} = 35 + 12 \cdot 15 = 215$; ou seja, R$ 215,00.

O custo total é:

$\dfrac{(35 + 215) \cdot 13}{2} + 400 = 1\,625 + 400 = 2\,025$; ou seja, R$ 2.025,00.

No plano beta, o custo total é:

$15 \cdot 130 = 1950$; ou seja, R$ 1.950,00.

O custo total é maior no plano alfa.

b) $x + 1625 = 1950 \Rightarrow x = 325$; ou seja, R$ 325,00.

22. Em cada item, é preciso determinar inicialmente o número de parcelas da adição.

a) $9{,}2 = 0{,}5 + (n - 1) \cdot 0{,}3 \Rightarrow n = 30$

Daí, a soma é igual a $\dfrac{(0{,}5 + 9{,}2 \cdot 30)}{2} = 145{,}5$.

b) $-14 = 6{,}8 + (n - 1) \cdot (-0{,}4) \Rightarrow n = 53$

Logo, a soma é igual a $\dfrac{(6{,}8 - 14) \cdot 53}{2} =$

$= \dfrac{(-7{,}2) \cdot 53}{2} = -190{,}8$.

23. $S_{10} = 245 \Rightarrow \dfrac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 245 \Rightarrow 2a_1 + 9r = 49$

$S_{20} = 245 + 745 \Rightarrow \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = 990 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a_1 + 19r = 99$

$\begin{cases} 2a_1 + 9r = 49 \\ 2a_1 + 19r = 99 \end{cases}$

Do sistema anterior, obtemos $r = 5$ e $a_1 = 2$.

PA: (2, 7, 12, 17, 22, ..., 147).

24. **a)** $n = 1 \Rightarrow S_1 = 18 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 = 15$. Logo, $a_1 = 15$.

b) $n = 2 \Rightarrow S_2 = 18 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 24$. Assim, $a_1 + a_2 = 24$.

Como $a_1 = 15$, temos $15 + a_2 = 24 \Rightarrow a_2 = 9$.

PA: (15, 9, 3, ...); $r = -6$.

c) $a_{10} = 15 + 9 \cdot (-6) = -39$

25. A medida de perímetro do 7º quadrado é 68 cm, e a do lado é: $\ell_7 = \dfrac{68 \text{ cm}}{4} = 17$ cm.

Como $\ell_7 = \ell_1 + 6 \cdot 2$, temos: $17 = \ell_1 + 12 \Rightarrow \ell_1 = 5$.

Daí, $\ell_{16} = \ell_1 + 15 \cdot 2 = 5 + 30 = 35$.

$L = 4\ell_1 + 4\ell_2 + \ldots + 4\ell_{16} = 4(\ell_1 + \ldots + \ell_{16}) =$

$= 4 \cdot \left[\dfrac{(\ell_1 + \ell_{16}) \cdot 16}{2}\right] = 1280$

Portanto, $L = 1280$ cm = 12,8 m.

26. **a)** A sequência (3, 12, 48, 192, ...) é uma PG de razão $q = 4$, pois: $3 \cdot 4 = 12$; $12 \cdot 4 = 48$; $48 \cdot 4 = 192$, ...

b) A sequência (−3, 6, −12, 24, −48, ...) é uma PG de razão $q = -2$, pois: $-3 \cdot (-2) = 6$; $6 \cdot (-2) = -12$; $-12 \cdot (-2) = 24$; ...

c) A sequência (5, 15, 75, 375, ...) não é uma PG, pois $\dfrac{15}{5} = 3$; $\dfrac{75}{15} = 5$.

d) A sequência $\left(\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\right)$ é uma PG de razão $q = \sqrt{2}$, pois: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$; $2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$; ...

e) A sequência $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}, -\dfrac{1}{24}, \ldots\right)$ é uma PG de razão $q = \dfrac{1}{2}$, pois: $-\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{6}$; $-\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{12}$; $-\dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{24}$; ...

f) A sequência $\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \ldots\right)$ não é uma PG, pois $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$; $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2}$.

Resposta: itens **a**, **b**, **d** e **e**.

27. **a)** $q = \dfrac{8}{4} = 2$

b) $q = \dfrac{10^{42}}{10^{40}} = 100$

c) $q = \dfrac{6}{-2} = -3$

d) $q = \dfrac{-5}{5} = -1$

e) $q = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

f) $q = \dfrac{10^{-2}}{10^{-1}} = \dfrac{1}{10}$

28. $a_8 = a_1 \cdot q^7 = -1 \cdot (-4)^7 = (-1) \cdot (-16\,384) = 16\,384$

29. $\begin{cases} a_7 = a_1 \cdot q^6 \\ a_3 = a_1 \cdot q^2 \end{cases} \ominus$

$\frac{a_7}{a_3} = q^4 \Rightarrow \frac{-5}{-80} = q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Se $q = -\frac{1}{2}$, então a PG seria alterada. Como $a_3 = -80$, temos: $-80 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow a_1 = -320$.

30. $a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 1458 = a_1 \cdot 3^5 \Rightarrow a_1 = 6$; $a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_3 = 6 \cdot 3^2 = 54$; ou seja, 54 visitas.

31. **a)** $4^{19} = a_1 \cdot 2^4 \Rightarrow a_1 = 2^{34}$; ou seja, 2^{34} bactérias.

b) $a_{10} = 4^{17} \cdot 2^9 \Rightarrow a_{10} = 2^{43}$; ou seja, 2^{43} bactérias.

32. **a)** Daqui a 1 ano, a produção será (em mil unidades): $180 + 0{,}2 \cdot 180 = 1{,}2 \cdot 180 = 216$.

Daqui a 2 anos, a produção crescerá 20% em relação à do ano anterior, isto é: $216 + 0{,}2 \cdot 216 = 259{,}2$.

Daqui a 3 anos, a produção crescerá 20% em relação à do ano anterior, isto é: $259{,}2 + 0{,}2 \cdot 259{,}2 =$ $= 311{,}04$.

A sequência é uma PG de razão $q = 1{,}2$.

b) $a_6 = a_1 \cdot q^5 = (1{,}2 \cdot 180) \cdot (1{,}2)^5 = 180 \cdot (1{,}7)^2 = 520{,}2$; ou seja, 520,2 mil unidades.

$a_9 = a_1 \cdot q^8 = (1{,}2 \cdot 180) \cdot (1{,}2)^8 = 180 \cdot (1{,}7)^3 = 884{,}34$; ou seja, 884,34 mil unidades.

33. Q_2: $\ell_2 = \frac{24 \text{ cm}}{4} = 6$ cm.

Q_1: $\ell_1 = \frac{2}{3}\ell_2 = \frac{2}{3} \cdot (6 \text{ cm}) = 4$ cm.

Sequência das medidas dos lados: (4, 6, 9, ...); $q = 1{,}5$.

a) $\ell_4 = \ell_3 \cdot 1{,}5 = 9 \cdot 1{,}5 = 13{,}5$; ou seja, 13,5 cm.

Medida de área: $Q_4 = (13{,}5 \text{ cm})^2 = \frac{729}{4} \text{ cm}^2$.

b) $\ell_{10} = \ell_1 \cdot q^9 = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 = 4 \cdot \frac{3^9}{2^9} = \frac{3^9}{2^7}$; ou seja, $\frac{3^9}{2^7}$ cm.

Medida de perímetro: $Q_{10} = 4 \cdot \frac{3^9}{2^7} = \frac{3^9}{2^5}$ cm $=$

$= \frac{19\,683}{32}$ cm.

34. **a)** $\frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = \pm 6$

b) $(2x + 4)^2 = (x^2 - 4) \cdot 6 \Rightarrow x = 10$ ou $x = -2$

Para $x = 10$, temos (96, 24, 6). PG de razão $\frac{1}{4}$.

Para $x = -2$, temos (0, 0, 6). Não é PG.

Assim, $x = 10$.

c) $\frac{x+1}{-2} = \frac{-4x+2}{x+1} \Rightarrow x = 1$ ou $x = 5$

Se $x = 1$, temos $(-2, 2, -2)$. É PG com $q = -1$.

Se $x = 5$, temos $(-2, 6, -18)$. É PG com $q = -3$.

35. Sendo b a idade de Beatriz, temos: $\left(b, \frac{2}{3}b, \left(\frac{2}{3}\right)^2 b\right)$ é PG.

$b - \left(\frac{2}{3}\right)^2 b = 50 \Rightarrow \left(1 - \frac{4}{9}\right)b = 50 \Rightarrow b = 90$

Beatriz: 90 anos; filha: 60 anos; neta: 40 anos.

36. **a)** $a_3 = a_1 \cdot q^2 = 144$ I

$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 486$ II

Dividindo I por II, temos: $\frac{1}{q^3} = \frac{8}{27} \Rightarrow q = \frac{3}{2}$.

Substituindo o valor de q, em I:

$a_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 144 \Rightarrow a_1 = 64$; ou seja, R$ 64,00.

b) $a_7 = a_1 \cdot q^6 = 64 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 = 729$; ou seja, R$ 729,00.

37. Sendo ℓ a medida do lado do quadrado, temos: $(\ell, 4\ell, \ell^2)$ é PG.

$(4\ell)^2 = \ell \cdot \ell^2 \Rightarrow \ell = 16$; ou seja, 16 cm.

38. PA: $a_1 = 13$ e $a_3 = 21 \Rightarrow 21 - 13 = 2r \Rightarrow r = 4 \Rightarrow a_2 = 17$.

Logo, $4x + 1 = 17 \Rightarrow x = 4$.

PG: $\left(\frac{1}{2}, y, 32\right)$. Logo, $y^2 = \frac{1}{2} \cdot 32 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$.

39. PA: $a_2 = 2 + r$; $a_5 = 2 + 4r$ e $a_{14} = 2 + 13r$.

PG: $(2 + r, 2 + 4r, 2 + 13r)$. Logo, temos:

$(2 + 4r)^2 = (2 + r) \cdot (2 + 13r) \Rightarrow r \neq 0$ (PA crescente) ou $r = 4$.

A PG obtida é (6, 18, 54), cuja razão é $q = 3$.

40. (a, b, c) é PA, então: $b = \frac{a+c}{2}$ I

(a, b, c) é PG, então: $b^2 = a \cdot c$ II

Substituindo I em II:

$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = ac \Rightarrow a = c$

Substituindo em I, temos $b = a = c$.

41. $S_6 = \frac{a_1 \cdot (q^6 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{(-2) \cdot \left[(-2)^6 - 1\right]}{-2 - 1} = 42$

42. $S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{320 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = 637{,}5$

43. Note que $\frac{60\,000}{50\,000} = 1{,}2$; $\frac{72\,000}{60\,000} = 1{,}2$; etc.

Assim, devemos calcular a soma dos 10 primeiros termos da PG (50 000, 60 000, 72 000, ...).

$S_{10} = 50\,000 \cdot \frac{\left[(1{,}2)^{10} - 1\right]}{1{,}2 - 1}$

Como $(1{,}2)^{10} = ((1{,}2)^5)^2 \simeq (2{,}5)^2 = 6{,}25$, obtemos:

$S_{10} = 50\,000 \cdot \frac{5{,}25}{0{,}2} = 1\,312\,500$

O total será de aproximadamente 1 312 500 livros.

44. **a)** $\ell_2 = 1$; a medida de perímetro de T_2 é 3.

$\frac{5}{4} \cdot p(T_1) = p(T_2) \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot p(T_1) = 3 \Rightarrow p(T_1) = \frac{12}{5} = 2{,}4$; ou seja, 2,4 m.

(Note que a medida do lado ℓ_1 é 0,8 m.)

A sequência que representa as medidas dos lados dos triângulos é (0,8; 1; 1,25; ...).

PG com $q = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

b) $\ell_4 = \ell_1 \cdot q^3 = 0{,}8 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 = 1{,}5625$; ou seja, 1,5625 m.

c) $S_7 = \dfrac{a_1 \cdot (q^7 - 1)}{q - 1}$, sendo a_1 a medida de perímetro do 1º triângulo.

$S_7 = \dfrac{2{,}4 \cdot \left((1{,}25)^7 - 1\right)}{1{,}25 - 1} = 36{,}48$; ou seja, 36,48 m.

Então, o número inteiro mínimo pedido é 37 m.

45. **a)** $\dfrac{a_1}{1 - q} = \dfrac{20}{1 - 0{,}5} = 40$

b) $\dfrac{0{,}001}{1 - 0{,}1} = \dfrac{0{,}001}{0{,}9} = \dfrac{1}{900}$

c) $\left(-25, -5, -1, -\dfrac{1}{5}, \ldots\right)$ é uma PG com $q = \dfrac{1}{5}$.

$(-25) + (-5) + (-1) + \left(-\dfrac{1}{5}\right) + \ldots = \dfrac{-25}{\frac{4}{5}} = -\dfrac{125}{4}$

d) $\left(9, -3, 1, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \ldots\right)$ é uma PG alternada com $q = -\dfrac{1}{3}$.

$9 - 3 + 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \ldots = \dfrac{9}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{27}{4}$

e) $\left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \ldots\right)$ é uma PG com $q = \dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{2\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$

46. $a_2 = \dfrac{9}{2 \cdot 3^2} = \dfrac{1}{2}$; $a_4 = \dfrac{9}{2 \cdot 3^4} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3^2}$; $a_6 = \dfrac{9}{2 \cdot 3^6} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3^4}$; $a_8 = \dfrac{9}{2 \cdot 3^8} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3^6}$; ...

Devemos calcular a soma:

$S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3^6} + \ldots =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} = \dfrac{9}{16}$

47. Exemplo de problema: Uma gráfica quer montar um painel com alguns modelos de tamanho de pôsteres que imprime. Todos os pôsteres desse tipo têm formato quadrado, e os tamanhos padrão de impressão são indicados pelas medidas das diagonais desses quadrados. O maior pôster tem medida da diagonal de $2\sqrt{2}$ m, o próximo tamanho maior tem metade da medida da diagonal, e assim por diante. Dispondo de uma folha de papel de formato quadrado com medida de área igual a 6 m² de folha, é possível construir o modelo de quantos pôsteres desse tipo impressos por essa gráfica?

48. **a)** $\left(x^2, \dfrac{x^3}{2}, \dfrac{x^4}{4}, \ldots\right)$ é uma PG com $q = \dfrac{x}{2}$, sendo $-1 < q < 1$.

$\dfrac{x^2}{1 - \frac{x}{2}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 3x^2 = 1 - \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm 7}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ (convém, pois $q = -\dfrac{1}{3}$) ou $x = \dfrac{1}{2}$ (convém, pois $q = \dfrac{1}{4}$)

$S = \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}\right\}$

b) $((1 + x), (1 + x)^2, (1 + x)^3, \ldots)$ é uma PG com $q = 1 + x$, sendo $-1 < q < 1$.

$\dfrac{1 + x}{1 - (1 + x)} = 3 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{4}$

$S = \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$

c) $\left(x, \dfrac{x^2}{4}, \dfrac{x^3}{16}, \dfrac{x^4}{64}, \ldots\right)$ é uma PG com $q = \dfrac{x}{4}$, sendo $-1 < q < 1$.

$x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{16} + \dfrac{x^4}{64} + \ldots = \dfrac{a_1}{1 - q} = \dfrac{x}{1 - \frac{x}{4}}$

Daí: $\dfrac{x}{1 - \frac{x}{4}} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow x = 1$.

$S = \{1\}$

d) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = 0{,}25 \Rightarrow$

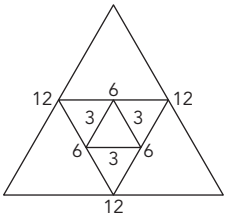
$\Rightarrow 2^x + \dfrac{2^x}{2^1} + \dfrac{2^x}{2^2} + \dfrac{2^x}{2^3} + \ldots = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x \cdot \underbrace{\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots\right)}_{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 2^x \cdot 2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -3$

$S = \{-3\}$

49. Pelo teorema da base média do triângulo, temos:

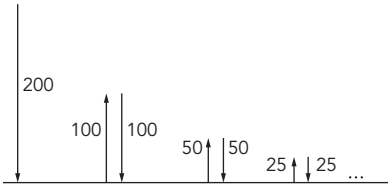


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) $36 + 18 + 9 + \ldots = \dfrac{36}{1 - \frac{1}{2}} = 72$; ou seja, 72 cm.

b) $\dfrac{12^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} + \ldots = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\dfrac{144}{1 - \frac{1}{4}}\right) = 48\sqrt{3}$; ou seja, $48\sqrt{3}$ cm².

50.



$200 + 200 + 100 + 50 + \ldots = 200 + \dfrac{200}{1 - 0{,}5} = 600$

A bola percorreria 600 cm ao todo.

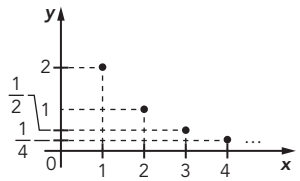
51. **a)** $f(x) = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{N}^*$.

$\begin{cases} x = 1, y = 3 \\ x = 3, y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1 + b = 3 \\ a \cdot 3 + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -2$ e $b = 5$; então, $f(x) = -2x + 5$.

b) $(3, 1, -1, -3, \ldots)$; $a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-2) \Rightarrow a_n = -2n + 5$, com $n \in \mathbb{R}^*$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

52.



53. **a)** $x = 3$, $y = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{6} \cdot 3^{3+k} \Rightarrow 9 = 3^{3+k} \Rightarrow k = -1$

b) A PG é $(f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots)$, isto é:

$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \ldots\right)$; $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{n-1}$, com $q = 3$.

54. **a)** A cada geração a quantidade de ascendentes dobra: 1ª geração (casal), 2; 2ª geração (pais), 4; 3ª geração (avós), 8; e assim por diante.

c) $a_5 = 2 \cdot 2^{5-1} = 32$; ou seja, 32 trisavós.

d) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow y = 2 \cdot 2^{x-1} \Rightarrow y = 2^x$

55. **a)** Ao comprar 2 caixas, o comerciante paga, de acordo com o gráfico, R$ 62,00 por quilograma. Como cada caixa contém 50 embalagens de 0,5 quilograma, isso equivale a $2 \cdot 50 \cdot 0{,}5$ kg = 50 kg, num total de R$ 3.100,00. Ao comprar 4 caixas, o preço por quilograma passa a ser R$ 56,00 e, analogamente, o valor gasto é R$ 5.600,00.

b) A sequência de valores (65, 62, 59, 56, 53, ...) é uma PA de termo inicial 65 e razão −3. O termo geral é $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 65 + (n - 1) \cdot (-3) \Rightarrow$ $\Rightarrow a_n = 68 - 3n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Como há um limite de 10 caixas na promoção, o preço mínimo é o 10º termo da PA: $a_{10} = 68 - 3 \cdot 10 = 38$. Portanto, o preço mínimo por quilograma é R$ 38,00, e o comerciante que optar por essa oferta gastará um total de $10 \cdot 50 \cdot 0{,}5 \cdot$ R$ 38,00 = = R$ 9.500,00.

56. **a)** A sequência que descreve a medida da altura da planta é (2,6; 3,4; 4,2; 5,0; 5,8; ...), ou seja, uma PA de termo inicial 2,6 e razão 0,8. Temos, então, $a_n = 2{,}6 + (n - 1) \cdot 0{,}8 \Rightarrow a_{12} = 2{,}6 + 11 \cdot 0{,}8 = 11{,}4$. A medida da altura é, portanto, 11,4 cm.

b) Como $a_n = 2{,}6 + (n - 1) \cdot 0{,}8 \Rightarrow a_n = 1{,}8 + 0{,}8n$, a lei de função que relaciona a medida da altura da planta com o dia de crescimento é $y = 1{,}8 + 0{,}8x$, com $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$.

57. **a)** $x = 1 \Rightarrow 200\,000 \cdot (1{,}06)^1 = 212\,000$; $x = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 200\,000 \cdot (1{,}06)^2 = 224\,720$;

$x = 3 \Rightarrow 200\,000 \cdot (1{,}06)^3 = 238\,203{,}20$; $x = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 200\,000 \cdot (1{,}06)^4 = 252\,495{,}392$

Assim, a sequência (212 000; 224 720; 238 203,20; 252 495,392; ...) é uma PG de razão 1,06.

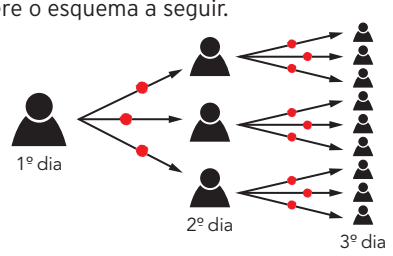
b) Substituindo $x = 10$ em $200\,000 \cdot (1{,}06)^x$, temos: $200\,000 \cdot (1{,}06)^{10} \simeq 359\,120$. Assim, após 10 anos, o valor total do investimento é de aproximadamente R$ 359.120,00.

58. **a)** A sequência forma uma PG de razão 3. Portanto, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3^{11} \cdot 3^{n-1} = 3^{n+10}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Como $a_n = 3^{n+10}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, a função é dada por $y = 3^{x+10}$.

Interligando

1. Considere o esquema a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que a sequência de infectados é (1, 3, 9, 27, ...).

a) A soma dos n primeiros termos dessa PG é:

$S_n = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{(3^n - 1)}{2}$

Como $3^8 = 6\,561$, temos que $S_8 = 3\,280$.

Como $3^9 = 19\,683$, temos que $S_9 = 9\,841$. Assim, o número de dias pedido é 9.

b) $S_{10} = \frac{(3^{10} - 1)}{3 - 1} = 29\,524$ e $S_{11} = \frac{(3^{11} - 1)}{3 - 1} = 88\,573$. Assim, o número de dias pedido é 11.

c) $3^{13} = 1\,594\,323$ e $3^{14} = 4\,782\,969$. Assim, $S_{13} = 797\,161$, $S_{14} = 2\,391\,484$ e o número de infectados terá ultrapassado 1 milhão no 14º dia.

2. Exemplo de problema: Em determinada semana, um município registrou 15 000 casos de H1N1 e 42 casos de sarampo. Sabendo que haverá uma campanha de vacinação para ambas as doenças com início em 3 semanas e que o período de transmissibilidade da H1N1 é de uma semana e o do sarampo de 10 dias, qual das doenças deve ser o foco principal da campanha, pensando no potencial número de infectados?

Capítulo 2

Atividades

4. **a)** O desconto, por diária, é de R$ 40,00 (pois 250 − 210 = 40). Percentualmente, tem-se um desconto de: $\frac{40}{250} = 0{,}16 = 16\%$.

b) Preço de 7 diárias: $7 \cdot 210 = 1470$; ou seja, R$ 1.470,00.

- 1,5% · 1470 = 22,05; ou seja, R$ 22,05.
- Valor total a ser pago, em reais: 1470 + 22,05 + 15,00 = = 1507,05; ou seja, R$ 1.507,05.

6. Produto **A**: $\frac{1{,}00}{4{,}00} = 25\%$.

Produto **B**: $\frac{3{,}00}{15{,}00} = \frac{1}{5} = 20\%$.

Produto **C**: $\frac{1{,}50}{6{,}00} = \frac{1}{4} = 25\%$.

A variação do preço do produto **B** é menor do que a do produto **A** e do produto **C**, que são iguais.

7. **a)** $\begin{matrix} 124\% & \text{——} & 4\,340 \\ 100\% & \text{——} & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{4\,340}{1{,}24} = 3\,500$; ou seja, R$ 3.500,00.

b) Antes do aumento, o imposto era de $0{,}16 \cdot 3\,500 = 560$, ou seja, R$ 560,00. Depois do aumento, o imposto passará a ser de $0{,}16 \cdot 4\,340 = 694{,}40$, ou seja, R$ 694,40.

$694{,}40 - 560{,}00 = 134{,}40$. Logo, Raul pagará, a mais, R$ 134,40.

9. **a)** $\begin{matrix} 1075\ m^3 & \text{——} & 86\% \\ x & \text{——} & 100\% \end{matrix} \Rightarrow x = 1075 : 0{,}86 \Rightarrow x = 1250$; ou seja, 1250 m^3.

b) A redução deverá ser de 75 m^3 (1075 − 1000). Percentualmente, temos:

$\begin{matrix} 1\,075\ m^3 & \text{——} & 100\% \\ 75\ m^3 & \text{——} & x \end{matrix} \Rightarrow x = 75 : 1\,075 \Rightarrow x \simeq 6{,}98$; ou seja, aproximadamente 6,98%.

10. **a)** Após o 1º aumento, o preço é de $p + 0{,}2p = 1{,}2p$. Com um novo aumento de 20%, esse último valor fica multiplicado por 1,2, isto é, $1{,}2 \cdot 1{,}2p = 1{,}44p$.

b) Após a 1ª redução, o preço é $p - 0{,}2p = 0{,}8p$. Com uma nova redução de 20%, esse último valor fica multiplicado por 0,8, isto é, $0{,}8 \cdot 0{,}8p = 0{,}64p$.

c) Após o 1º aumento, o preço é de $p + 0{,}2p = 1{,}2p$. Com uma redução de 20%, esse último valor fica multiplicado por 0,8, isto é, $0{,}8 \cdot 1{,}2p = 0{,}96p$.

11. **a)** **X**: Ao levar 12 sabonetes, na promoção, pagará por 9; então, $9 \cdot 2{,}40 = 21{,}60$; ou seja, R$ 21,60.

Y: $0{,}85 \cdot 2{,}40 = 2{,}04$ a unidade. Ao todo pagará $12 \cdot 2{,}04 = 24{,}48$; ou seja, R$ 24,48.

Z: Ao levar 12, na promoção, pagará por 10; então, $10 \cdot 2{,}40 = 24{,}00$; ou seja, R$ 24,00.

A opção mais econômica para o consumidor é comprar no mercado **X**.

b) **X**: 4 sabonetes serão adquiridos pelo preço de 3 na promoção, e os 3 demais não entram nela. O custo é $6 \cdot 2{,}40 = 14{,}40$; ou seja, R$ 14,40.

Y: $7 \cdot 2{,}04 = 14{,}28$; ou seja, R$ 14,28.

Z: 6 sabonetes serão adquiridos pelo preço de 5, e 1 não entra na promoção.

O custo é $6 \cdot 2{,}40 = 14{,}40$; ou seja, R$ 14,28.

A opção mais vantajosa é no mercado **Y**.

12. x: valor inicial do plano.

$1{,}32x$: valor do plano após o reajuste autorizado.

$1{,}10x$: valor do plano após o reajuste dado pela seguradora.

$1{,}32x - 1{,}10x = 0{,}22x$

$\frac{0{,}22x}{1{,}1x} = 0{,}20 = 20\%$

14. **a)** Número de reclamações em abril: x.

Número de reclamações em maio: $1{,}28 \cdot x$.

Número de reclamações em junho: $1{,}05 \cdot 1{,}28x = 1{,}344x$.

Número de reclamações em julho: $0{,}9 \cdot 1{,}344x = 1{,}2096x$.

O percentual geral de aumento é:
$1{,}2096 - 1 = 0{,}2096 = 20{,}96\%$.

b) $1{,}2096x = 9\,072 \Rightarrow x = 7\,500$

Número de reclamações em maio: $1{,}28 \cdot 7\,500 = 9\,600$.

15. **a)** Sejam p e n, respectivamente, o preço unitário do ingresso e o número de ingressos vendidos. Nessas condições, a receita obtida é $n \cdot p$ **I**.

Com o aumento, o ingresso passou a custar $1{,}05p$, e o número de ingressos vendidos passou a ser $0{,}9n$. Nessas condições, a receita obtida é: $(1{,}05p) \cdot (0{,}9n) = 0{,}945n \cdot p$ **II**

Comparando **I** e **II**, notamos que a receita diminuiu $n \cdot p - 0{,}945n \cdot p = 0{,}055np$. Percentualmente, em relação à receita original (np), temos uma variação de −5,5%.

b) $np = (1{,}05p) \cdot \left(n - \frac{x}{100}n\right) \Rightarrow n = 1{,}05n\left(1 - \frac{x}{100}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = 1{,}05 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) \Rightarrow x \simeq 4{,}76$; ou seja, aproximadamente 4,76%.

16. Resposta pessoal; no entanto, é preciso ficar atento às condições de cada item e ao contexto elaborado. Exemplos de problemas:

a) Em uma liquidação de final de ano, uma loja de móveis promoveu três liquidações semanais sucessivas de 10%. Se, ao final desse período, um cliente pagou R$ 2.916,00 em um conjunto de sofás, qual era o preço desse produto antes de entrar na promoção?

b) Em uma liquidação de final de ano, um lojista anunciou 15% de desconto em todos os artigos da loja. Como as vendas ainda estavam aquém do esperado, promoveu nova redução, de 20% sobre o preço vigente. Qual era o preço original de um vestido que, após as duas reduções, passou a custar R$ 142,80?

c) O aluguel de um apartamento sofreu dois aumentos sucessivos e semestrais de 5%. Qual era o valor do aluguel de um apartamento que, após os reajustes, passou a ser de R$ 4.410,00?

d) Um terreno comprado em 2024 valorizou-se 114% desde então. Sabendo que o preço atual dele é de R$ 181.900,00, por qual valor ele foi adquirido?

18. $240 = 200 \cdot (1 + i \cdot 4) \Rightarrow 1{,}2 = 1 + 4i \Rightarrow 0{,}2 = 4i \Rightarrow$
$\Rightarrow i = 0{,}05$; ou seja, 5% ao mês.

19. **a)** Em regime de juro simples, a taxa de 48% ao ano equivale a $\frac{48}{12} = 4$; ou seja, 4% ao mês.

$J = 5 \cdot 0{,}04 \cdot 400 = 80$; $M = 400 + 80 = 480$; ou seja, R$ 480,00.

b) Em regime de juro simples, a taxa de 72% ao semestre equivale a $\frac{72}{6} = 12$; ou seja, 12% ao mês.

$J = 8 \cdot 0{,}12 \cdot 180 = 172{,}80$; $M = 180 + 172{,}80 = 352{,}80$; ou seja, R$ 352,80.

c) $J = 90 \cdot 0{,}0025 \cdot 5\,000 = 1125$; 3 meses = 90 dias.

$M = 5\,000 + 1125 = 6\,125$; ou seja, R$ 6.125,00.

20. Multa: $0{,}02 \cdot 48 = 0{,}96$.

Juro: $\underbrace{4}_{4\text{ dias}} \cdot \frac{0{,}033}{100} \cdot 48 = 0{,}063$.

Total de acréscimos: R$ 1,02.

Na outra situação: $J = 8 \cdot 0{,}00033 \cdot 48 \simeq 0{,}13$;
R$ 0,96 + R$ 0,13 = R$ 1,09; ou seja, o total é aproximadamente R$ 1,09.

23. **a)** O capital do financiamento é 900 − 500 = 400; ou seja, R$ 400,00. O montante é de R$ 500,00. Portanto, são cobrados R$ 100,00 de juro.

Percentualmente, o juro mensal é de $\frac{100}{400} = 0{,}25$; ou seja, 25%.

b) A taxa mensal de juro simples seria $\frac{25}{2} = 12{,}5$; ou seja, 12,5% a.m.

24. Com as informações dadas, podemos escrever as seguintes equações:

$C \cdot (1 + 3i) = 1325$ I

$C \cdot (1 + 5i) = 1375$ II

$C \cdot (1 + 11i) = 1525$ III

Dividindo I por II, obtemos: $\frac{1 + 3i}{1 + 5i} = \frac{1325}{1375} \Rightarrow i = 0{,}02$; ou seja, 2% a.m.

Substituindo em I, vem: $C \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}02) = 1325 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = \frac{1325}{1{,}06} \Rightarrow C = 1250$; ou seja, R$ 1.250,00. Note que tais valores satisfazem III.

25. $J_1 = 18 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}7C = 0{,}252C$ e $J_2 = 4 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}3C = 0{,}216C$.
Como $J_1 + J_2 = 14\,040$, temos $0{,}252C + 0{,}216C = 14\,040 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = 30\,000$; ou seja, R$ 30.000,00.

26. Primeira parte: x.
Segunda parte: $4\,000 - x$.
Juro da dívida de primeira parte: $12 \cdot 0{,}015 \cdot x = 0{,}18x$.
Montante da primeira parte: $x + 0{,}18x = 1{,}18x$. I
Juro da segunda parte: $0{,}36 \cdot (4000 - x) = 1440 - 0{,}36x$.
Montante da segunda parte: $(4000 - x) + (1440 - 0{,}36x) =$
$= 5\,440 - 1{,}36x$. II
Adicionando I e II: $1{,}18x + 5\,440 - 1{,}36x = 5116 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 1800$. Assim: primeira parte: R$ 1.800,00; segunda parte: R$ 2.200,00.

29. **a)** 1 ano: $M = 2000 \cdot (1{,}005)^{12} = 2120$; ou seja, R$ 2.120,00.

2 anos: $M = 2000 \cdot (1{,}005)^{24} = 2247{,}20$; ou seja, R$ 2.247,20.

5 anos: $M = 2000 \cdot (1{,}005)^{60} = 2700$; ou seja, R$ 2.700,00.

10 anos: $M = 2000 \cdot (1{,}005)^{120} = 3645$; ou seja, R$ 3.645,00.

b) Para resgatar R$ 4.000,00:
$4\,000 = 2000 \cdot (1{,}005)^n \Rightarrow 2 = (1{,}005)^n \Rightarrow \log 2 =$
$= n \cdot \log 1{,}005 \Rightarrow n = \frac{0{,}301}{0{,}002} = 150{,}5$. O tempo mínimo pedido é 151 meses.

Para resgatar R$ 10.000,00:
$10\,000 = 2000 \cdot (1{,}005)^n \Rightarrow 5 = (1{,}005)^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 5 = n \cdot \log 1{,}005 \Rightarrow n = 349{,}5$. O tempo mínimo pedido é 350 meses.

30. **a)** $M_5 = 5000 \cdot (1{,}1)^5 = 8000$; ou seja, R$ 8.000,00.

b) $8000 - 5000 = 3000$
$\frac{3000}{5000} = 0{,}6$; ou seja, 60% no período de 5 anos.

c) $20\,000 = 5000 \cdot (1{,}1)^n \Rightarrow 4 = (1{,}1)^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 4 = \log (1{,}1)^n \Rightarrow n = 15$; ou seja, 15 anos.

31. $M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 10\,368 = 5000 \cdot (1 + i)^4 \Rightarrow i = -2{,}2$ [não convém $1 + i < 0$] ou $i = 0{,}2$; ou seja, 20% a.m.

32. $i = 100\% = 1$
$V = V_0 \cdot (1 + 1)^n = V_0 \cdot 2^n$
Devemos determinar $n \in \mathbb{N}$, tal que: $v_0 \cdot 2^n = 100 \cdot v_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^n = 100$.
Se $n = 6$, então $2^n = 64 < 100$.
Se $n = 7$, então $2^n = 128 > 100$. Assim, 7 é o menor inteiro procurado.

33. **a)** $5120 = 2000 \cdot (1 + i)^2 \Rightarrow i = \sqrt{2{,}56}$ (não convém $1 + i < 0$) ou $1 + i = 1{,}6 \Rightarrow i = 0{,}6$; ou seja, 60% ao ano.

b) $M = 2000 \cdot (1 + 0{,}6)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow M \simeq 2531{,}65$; ou seja, R$ 2.531,65.

34. $30\,000 = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^n \Rightarrow 3 = 1{,}08^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 3 = n \cdot \log 1{,}08 \Rightarrow n = 12$; ou seja, 12 anos.

36. **a)** 1º ano: $4\,800 \cdot 1{,}25 = 6000$.

2º ano: $6000 \cdot 0{,}7 = 4200$.

3º ano: As perdas do ano anterior para esse investidor foram iguais a R$ 1.800,00 (pois $6000 - 4200 = 1800$). O fundo recuperou $0{,}35 \cdot 1800 = 630$; ou seja, R$ 630,00.
Assim, ao final do 3º ano, o saldo era de R$ 4.830,00 (pois $4200 + 630 = 4830$).

O lucro auferido foi de R$ 30,00 (pois $4830 - 4800 = 30$).

Em termos percentuais, o lucro é $\frac{30}{4\,800} = 0{,}00625 =$
$= 0{,}625\%$.

b) Se, ao final do segundo ano, o saldo era R$ 4.200,00 e, ao final do terceiro, era R$ 4.830,00, a valorização foi de $\frac{4830 - 4200}{4200} = 0{,}15 = 15\%$.

37. **a)** $2C = C(1{,}2)^n \Rightarrow (1{,}2)^n = 2 \Rightarrow \log (1{,}2)^n = \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n \cdot \log 1{,}2 = \log 2 \Rightarrow n = 3{,}75$. Tempo mínimo: 4 anos.

b) $3 = (1{,}2)^n \Rightarrow \log 3 = n \cdot \log 1{,}2 \Rightarrow n = 6$. Tempo mínimo: 6 anos.

c) $5 = (1{,}2)^n \Rightarrow \log 5 = n \cdot \log 1{,}2 \Rightarrow n = 8{,}75$. Tempo mínimo: 9 anos.

d) $M = C + 8C = 9C$, daí: $9C = C(1{,}2)^n \Rightarrow (1{,}2)^n = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \frac{\log 9}{\log 1{,}2} \Rightarrow n = 12$. Tempo mínimo: 12 anos.

39. **a)** $200 \cdot 1{,}25 = 250$
$250 \cdot 1{,}08 = 270$

Rendimento bruto: $270 - 200 = 70$.

Rendimento percentual bruto: $\frac{70}{200} = 0{,}35$; ou seja, 35%.

b) Imposto: $0{,}2 \cdot 70 = 14$; ou seja, R$ 14,00.

Valor líquido: $270 - 14 = 256$; ou seja, R$ 256,00.

40. Após 10 anos, o montante da dívida da empresa, em reais, era: $80\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^{10} = 80\,000 \cdot (1{,}1)^5 \cdot (1{,}1)^5 =$
$= 204\,800$; ou seja, R$ 204.800,00.
Com o pagamento de R$ 80.000,00, a dívida passou a ser: $(204\,800 - 80\,000) = 124\,800$; ou seja, R$ 124.800,00.
Após 5 anos, o valor da dívida será: $124\,800 \cdot (1 + 0{,}04)^5 =$
$= 149\,760$; ou seja, R$ 149.760,00.

41. Capital: x; montante: $1{,}44x$; $n = 2$.
$1{,}44x = x \cdot (1 + i)^2 \Rightarrow i = 0{,}2$; ou seja, 20% ao ano.

42. **a)** Daqui a 1 ano: $V_0 - 0{,}05 \cdot V_0 = 0{,}95 \cdot V_0$.

Daqui a 2 anos: $0{,}95 \cdot V_0 - 0{,}05 \cdot 0{,}95 \cdot V_0 = 0{,}95 \cdot V_0 \cdot (1 - 0{,}05) = (0{,}95)^2 \cdot V_0$.

$\vdots$

Daqui a t anos: $V(t) = (0{,}95)^t \cdot V_0$.

b) $\frac{V_0}{2} = V_0 \cdot (0{,}95)^t \Rightarrow 0{,}5 = (0{,}95)^t \Rightarrow \log 0{,}5 = \log (0{,}95)^t \Rightarrow -\log 2 = t \cdot \log \left(\frac{95}{100}\right)$

$\log 2 = \log \left(\frac{10}{5}\right) = 1 - \log 5 = 0{,}31$

$\log \left(\frac{95}{100}\right) = \log 95 - \log 100 = \log (19 \cdot 5) - 2 = \log 19 + \log 5 - 2 \simeq -0{,}03$

Daí:

$-0{,}31 = t \cdot (-0{,}03) \Rightarrow t = 10{,}3333\ldots$

10 anos mais $\frac{1}{3}$ de ano equivalem a 10 anos e 4 meses.

c) Se i for a valorização no preço da ação, temos: $\frac{V_0}{2}(1 + i) = V_0$.

$1 + i = 2 \Rightarrow i = 1$; ou seja, 100% de aumento.

45. $504 = \frac{350}{1+i} + \frac{350}{(1+i)^2}$; $1 + i = t$.

$504 = 350 \cdot \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow 1{,}44 = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \xrightarrow{t > 0} t = \frac{1 + \sqrt{6{,}76}}{2{,}88} = 1{,}25$ [não convém $t = 1 + i < 0$]

Daí, $1 + i = 1{,}25 \Rightarrow i = 0{,}25$; ou seja, 25% a.a.

46. $35\,000 = p \cdot \frac{1 - (1{,}02)^{12}}{-0{,}02 \cdot (1{,}02)^{12}} \Rightarrow p = 3\,301{,}88$; ou seja, R$ 3.301,88.

47. **a)** $400\,000 = p \cdot \frac{1 - (1{,}08)^{15}}{-0{,}08 \cdot (1{,}08)^{15}} \Rightarrow 400\,000 \simeq p \cdot 8{,}5596 \Rightarrow p \simeq 46\,731{,}16$; ou seja, aproximadamente R$ 46.731,16.

b) O juro da primeira parcela são de 8% de 400 000: $0{,}08 \cdot 400\,000 = 32\,000$. O saldo devedor pedido é $400\,000 + 32\,000 - 46\,731{,}16 = 385\,268{,}84$; ou seja, R$ 385.268,84.

48. **a)** Amortização mensal: $\frac{96\,000}{48} = 2\,000$; ou seja, R$ 2.000,00.

b) O juro da primeira prestação é de 0,8% de 96 000: $0{,}008 \cdot 96\,000 = 768$. O valor da primeira prestação será de $2\,000 + 768 = 2\,768$; ou seja, R$ 2.768,00.

c) Após o pagamento da primeira prestação, o saldo devedor será de: $96\,000 - 2\,000 = 94\,000$. Como a amortização é constante por mês, o saldo devedor (mês 2) pedido é: $94\,000 - 2\,000 = 92\,000$; ou seja, R$ 92.000,00.

d) O juro da segunda prestação é de 0,8% de 94 000: $0{,}008 \cdot 94\,000 = 752$. O valor da segunda prestação será de: $2\,000 + 752 = 2\,752$; ou seja, R$ 2.752,00.

49. **b)** $V = 1\,881{,}50 \cdot \frac{1 - (1{,}005)^{48}}{-0{,}005 \cdot (1{,}005)^{48}} \Rightarrow V \simeq 80\,148{,}89$; ou seja, aproximadamente R$ 80.148,89.

c) O juro da primeira prestação é igual a 0,5% de 80 148,89: $0{,}005 \cdot 80\,148{,}89 = 400{,}74445$. Como o valor da parcela é de R$ 1.881,50, o valor amortizado na primeira prestação é: $1\,881{,}50 - 400{,}74445 \simeq 1\,480{,}76$; ou seja, aproximadamente R$ 1.480,76.

50. O valor anual amortizado é de $\frac{150\,000}{3} = 50\,000$. O juro da primeira prestação é de 10% de 150 000, ou seja, 15 000.

Após o pagamento da primeira prestação, o saldo devedor é $150\,000 - 50\,000 = 100\,000$.

Na segunda prestação, o juro é de 10% de 100 000, ou seja, 10 000. Após o pagamento da segunda prestação, o saldo devedor é $100\,000 - 50\,000 = 50\,000$.

Na última prestação, o juro é de 10% de 50 000, ou seja, 5 000, e a dívida é liquidada com o pagamento dessa prestação.

O valor total pago de juro, em reais, é $15\,000 + 10\,000 + 5\,000 = 30\,000$; ou seja, R$ 30.000,00.

51. **a)** Usando a fórmula da sequência de pagamentos uniformes, vem:

$200\,000 = p \cdot \frac{1 - (1{,}01)^{60}}{-0{,}01 \cdot (1{,}01)^{60}} \Rightarrow p \simeq 4\,447{,}98$; arredondamos para R$ 4.448,00.

Financiamento de um apartamento segundo o SFA

Mês	Prestação (em R$)	Juro (em R$)	Amortização (em R$)	Saldo devedor (em R$)
0	–	–	–	200.000,00
1	4.448,00	2.000,00	2.448,00	197.552,00
2	4.448,00	1.975,52	2.472,48	195.079,52
3	4.448,00	1.950,79	2.497,21	192.582,31

Dados elaborados para fins didáticos.

b) O valor mensal amortizado será de $\frac{200\,000}{60} = 3333{,}33$; arredondamos para R$ 3.333,00. O juro da primeira prestação será de 1% de 200 000, ou seja, $0{,}01 \cdot 200\,000 = 2\,000$, e o valor da primeira prestação será de $3\,333 + 2\,000 = 5\,333$. O saldo devedor será $200\,000 - 3\,333 = 196\,667$, e assim por diante.

Financiamento de um apartamento segundo o SAC

Mês	Prestação (em R$)	Juro (em R$)	Amortização (em R$)	Saldo devedor (em R$)
0	–	–	–	200.000,00
1	5.333,00	2.000,00	3.333,00	196.667,00
2	5.299,67	1.966,67	3.333,00	193.334,00
3	5.266,34	1.933,34	3.333,00	190.001,00

Dados elaborados para fins didáticos.

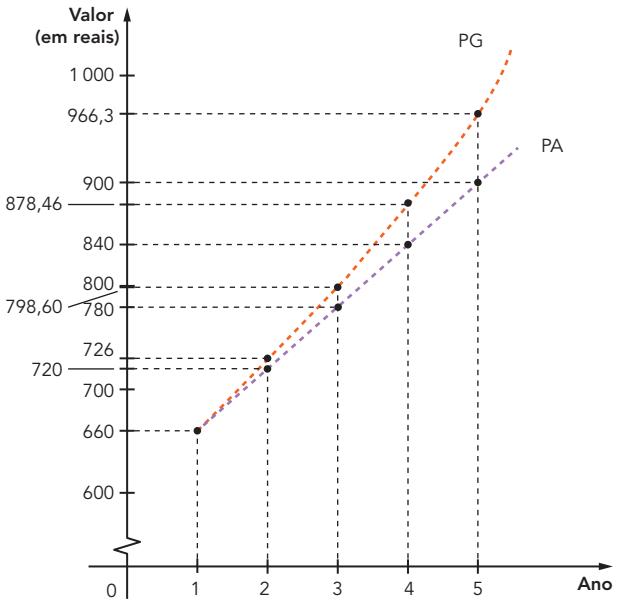
53. O valor mensal amortizado nesse financiamento é $\frac{1\,000\,000}{50} = 20\,000$; ou seja, R$ 20.000,00.

Como o valor da primeira prestação é R$ 27.500,00, o juro pago nessa prestação é de R$ 7.500,00, pois o restante (R$ 20.000,00) é amortização. Esse valor foi obtido aplicando uma taxa i ao saldo devedor, que é R$ 1.000.000,00.
$i \cdot 1\,000\,000 = 7\,500 \Rightarrow i = 0{,}0075$; ou seja, 0,75% a.m.

55. **a)** Juro simples: $0{,}1 \cdot 600 = 60$; ou seja, R$ 60,00 por ano.
(660, 720, 780, 840, 900)
Juro composto: $1{,}1 \cdot 600 = 660$; $1{,}1 \cdot 660 = 726$; $1{,}1 \cdot 726 = 798{,}60$; $1{,}1 \cdot 798{,}60 = 878{,}46$; $1{,}1 \cdot 878{,}46 = 966{,}306$.
(660; 726; 798,60; 878,46; 966,306)

b) Juro simples: PA; $r = 720 - 660 = 60$.
Juro composto: PG; $q = 726 : 660 = 1{,}1$.

c)



Banco de imagens/Arquivo da editora

d) $966{,}31 - 900 = 66{,}31$; ou seja, R$ 66,31.

56. **a)** $x = 0 \Rightarrow f(0) = 6\,000$; ou seja, R$ 6.000,00.

b) $f(1) = 6\,000 \cdot 1{,}2 = 7\,200$
$f(2) = 6\,000 \cdot (1{,}2)^2 = 8\,640$
$f(3) = 6\,000 \cdot (1{,}2)^3 = 10\,368$
(7200, 8640,10368, ...) é uma PG de razão $q = 1{,}2$.
Como $1{,}2 = 1 + 0{,}2$, concluímos que a taxa de juro composto anual é de 20%.

c) $f(4) = 6\,000 \cdot (1{,}2)^4 = 6\,000 \cdot 2{,}0736 = 12\,441{,}60$. Logo, ela já terá dobrado de valor.

57. **a)** A sequência, a partir do capital, é:
(600; 672; 752,64; 842,96; ...)
Trata-se de uma PG de razão $\frac{672}{600} = 1{,}12$.
A dívida em maio era de, aproximadamente, $842{,}96 \cdot 1{,}12 = 944{,}12$; ou seja, R$ 944,12. (V)

b) $q = \frac{672}{600} = \frac{752{,}64}{672} = \frac{842{,}96}{752{,}64} = 1{,}12$ (F)

c) Como $1{,}12 = 1 + 0{,}12$, concluímos que a taxa cobrada é de 12% ao mês. (V)

d) Em fevereiro: $600 \cdot 1{,}12$.
Em março: $600 \cdot (1{,}12)^2$.
Em abril: $600 \cdot (1{,}12)^3$.
⋮
Em julho: $600 \cdot (1{,}12)^6$. (F)

e) Em dezembro, o valor da dívida era de $600 \cdot (1{,}12)^{11} \simeq$
$\simeq 600 \cdot 3{,}478 = 2\,086{,}80$; ou seja, aproximadamente R$ 2.086,80. O juro total pago foi: $2\,086{,}80 - 600 =$
$= 1486{,}80$; ou seja, aproximadamente R$ 1.486,80.
Percentualmente, temos:
$\frac{1\,486{,}80}{600} = 2{,}478$; ou seja, 247,8%. (V)

Viralize

3. Como o próprio texto afirma, a redução do saldo médio dos investidores deve-se à maior popularização de investimentos, em especial os de renda variável. À medida que mais pessoas passam a conhecer mais sobre investimentos, o número de investidores aumenta, democratizando o acesso de todos ao mercado de renda variável. Normalmente, os primeiros investimentos feitos não são tão altos, como informa o texto. A redução é usualmente interpretada como positiva, pois a democratização de acesso à B3 ajuda a desmistificar a ideia de que os investimentos são exclusivos para a população de alta renda.

Para fundamentar saberes

1. **a)** $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$ é PH $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}, 2, \ldots\right)$ é PA.
A razão da PA é $\frac{9}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}$, e o 6º termo dela é $a_6 = \frac{5}{2} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$.
O 6º termo da PH será, então, o inverso de a_6: $\frac{4}{5}$.

b) (a, b, c) é PH $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ é PA. Daí:
$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot ac}{a + c}$

2. Precisamos determinar a medida de distância r que o ciclista deverá pedalar a mais a cada dia de treinamento. Do enunciado, sabemos que no 1º dia, o ciclista vai pedalar 60 km; no 2º, o ciclista vai pedalar 60 km mais r km; no 3º, o ciclista vai pedalar 60 km mais $2r$ km; e, assim, sucessivamente, determinando uma PA de razão r. Sabemos também que no último dia ele vai pedalar 180 km, percorrendo, assim, uma medida de distância total de 1560 km. Como as medidas de distância a pedalar nos percursos diários determinam uma PA, o total de 1560 km corresponde à soma dos termos da PA em questão. Sendo n o número de dias de treinamento, temos: $1\,560 = \left(\frac{60 + 180}{2}\right) \cdot n \Rightarrow n = 13$. Portanto, o treinamento será realizado durante 13 dias. Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$, $a_1 = 60$ e $a_{13} = 180$, temos: $180 =$
$= 60 + (13 - 1)r \Rightarrow r = 10$.
Alternativa **c**.

3. mmc(2, 3, 4) = 12
A cada 12 s, eles batem palmas simultaneamente a partir do instante 1 s.
(1, 13, 25, 37, 49, ...)
A única sequência que satisfaz é dada pelo termo geral.
$a_n = 12 \cdot (n - 1) + 1$, para $n \in \{1, 2, \ldots, 5\}$.
De fato, $a_1 = 1$, $a_2 = 13$, $a_3 = 25$, etc.
Alternativa **d**.

4. **a)** $M = C + 4\,020$
Daí:
$C + 4\,020 = C \cdot (1 + 0{,}01)^2 \Rightarrow C = 200\,000$; ou seja, R$ 200.000,00.

b) $4C = C(1 + 0{,}01)^n \Rightarrow 4 = (1{,}01)^n \Rightarrow \log 4 = n \cdot \log 1{,}01 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 150{,}5$; ou seja, 150,5 meses.
Daí: $E = 150{,}5 - 139{,}3 = 11{,}2$; ou seja, 11,2 meses.

5. Aplicação Alfa: o juro anual é igual a $0{,}12 \cdot 2\,000 = 240$, ou seja, 240 reais; como o regime é de juro simples, em 5 anos, o juro total é igual a $5 \cdot 240$ reais $= 1200$ reais, resultando num montante de 3200 reais.
Aplicação Beta: o capital aplicado foi, em reais, igual a $3200 + x$.
O montante da aplicação Beta após 2 anos é: $(3200 + x) \cdot (1{,}1)^2 = (3200 + x) \cdot 1{,}21$ e o juro é igual a: $1{,}21 \cdot (3200 + x) - (3200 + x) = 0{,}21 \cdot (3200 + x)$.
Devemos ter: $0{,}21 \cdot (3200 + x) = 1050 \Rightarrow x = 1800$; ou seja, R$ 1.800,00.

6. **a)** Cafezinho: aumento de 1 real.
Percentual de aumento: $\frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\%$.
Cafezinho com leite: aumento de R$ 1,50.
Percentual de aumento: $\frac{1{,}50}{2{,}50} = 0{,}60 = 60\%$.

b) No estabelecimento **B**, cobra-se R$ 3,00 por 60 mL de café (ou R$ 1,00 por 20 mL de café).
No cafezinho com leite servido em **B**, temos:
Leite, $\frac{1}{3} \cdot 60$ mL $= 20$ mL; e café, 40 mL.

Como se cobra R$ 1,00 por 20 mL de café, cobra-se R$ 2,00 por 40 mL de café. Daí, R$ 4,00 – R$ 2,00 = = R$ 2,00 por 20 mL de leite.

20 mL — R$ 2,00
1000 mL — x

x = R$ 100,00 por litro de leite.

7. Note que o financiamento utilizado é o SAC: $\frac{180\,000}{360} =$ $= 500$. Se não houvesse juro, o valor de cada parcela seria R$ 500,00. O valor amortizado mensalmente é constante e igual a R$ 500,00, e o saldo devedor varia segundo uma PA de razão –500.

Na 10ª prestação, o saldo devedor é: $180\,000 - 9 \cdot 500 =$ $= 175\,500$.

Com 1% de juro sobre o saldo devedor, temos: $0{,}01 \cdot 175\,500 = 1755$.

Assim, o valor da 10ª prestação é $500 + 1755 = 2\,255$.

Alternativa **d**.

Unidade 2

Capítulo 3

Abertura de Unidade

2. Medida do raio de Netuno: 24 764 km. Medida de distância média Netuno-Sol: 4 503 443 661 km. Se a medida do raio fosse representada por 1 mm, a medida de distância, em milímetros, seria $d = \frac{4\,503\,443\,661}{24\,764} \simeq$ $\simeq 181\,854$; ou seja, aproximadamente 182 m.

Atividades

4. **a)** É possível obter a medida de temperatura citada em graus Celsius: $T_C = (50 - 32) \times \frac{5}{9} = 18 \times \frac{5}{9} = 10 \Rightarrow$ $\Rightarrow T_C = 10$; ou seja, 10 °C. Assim, a família deve levar roupas de frio.

b) $T_C = (T_F - 32) \times \frac{5}{9} \Rightarrow 20 \times \frac{9}{5} = T_F - 32 \Rightarrow$ $\Rightarrow T_F = 4 \times 9 + 32 \Rightarrow T_F = 68$; ou seja, 68 °F.

c) $T_K = T_C + 273{,}15 = (T_F - 32) \times \frac{5}{9} + 273{,}15$

6. Por definição, temos: $\text{Pa} = \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$ e $\text{N} = \left[\text{kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$. Então:

$$\text{Pa} = \left[\text{kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] \times \left[\frac{1}{\text{m}^2}\right] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m} \times \text{s}^2}\right] = [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}]$$

8. F é medida em newton, ou, então, em quilogramas vezes metros por segundo ao quadrado. As massas são medidas em quilogramas e a distância é medida em metros.

$$\left[\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] = G\frac{[\text{kg}] \cdot [\text{kg}]}{[\text{m}^2]} \Rightarrow G = \left[\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] \cdot \frac{[\text{m}^2]}{[\text{kg}^2]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G = \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}}\right] \Rightarrow G = [\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}]$$

12. **a)** Frequência mínima: $3\ \text{kHz} = 3 \cdot (1000) \cdot \text{Hz} = 3\,000\ \text{Hz}$; frequência máxima: $300\ \text{GHz} =$ $= 300 \cdot (1\,000\,000\,000) \cdot \text{Hz} = 300\,000\,000\,000\ \text{Hz}$.

b) Frequência mínima: $3\,000\ \text{Hz} = 3 \cdot 10^3\ \text{Hz}$; frequência máxima: $300\,000\,000\,000 = 3 \cdot 10^{11}\ \text{Hz}$.

c) $\frac{3 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^3} = 10^{11-3} = 10^8$. Portanto, a frequência máxima é 100 milhões de vezes maior.

13. **a)** $d = 1{,}3 \cdot (30\,860\,000\,000\,000\ \text{km}) =$ $= 1{,}3 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{13}\ \text{km} = 4{,}0118 \cdot 10^{13}\ \text{km} = 4{,}0118 \cdot 10^{16}\ \text{m}$

b) Como $4{,}0118 > 3{,}16$, a ordem de grandeza será de $10^{16} + 10^1 = 10^{17}$; ou seja, 10^{17} metros.

15. $6\,420\ \text{yd}^2 = 6\,420 \cdot (0{,}9144\ \text{m})^2 \simeq 5\,367{,}94\ \text{m}^2$

O campo de futebol tradicional é maior do que o de futebol americano: $\frac{8\,250}{5\,367{,}94} \simeq 1{,}5369$. Portanto, o campo de futebol tradicional é aproximadamente 53,69% maior do que o de futebol americano.

Interligando

1. A palavra "disseminar" indica o fluxo que deve ser seguido para a padronização dos instrumentos de medida: o BIPM garante que os padrões nacionais de cada país estejam corretamente ajustados, para que eles garantam que os laboratórios de calibração e ensaio possam disseminar esses padrões para os laboratórios do chão de fábrica.

2. Nada se pode afirmar, pois não há garantias de que o termômetro fez a leitura correta, de acordo com os padrões nacionais e internacionais; não há dados suficientes para chegar a qualquer conclusão. A margem de erro de leitura seria relevante para determinar o estado do bebê. Se fosse de 1%, por exemplo, seria possível afirmar que a criança não tem febre. Se fosse de 10%, por outro lado, seria inviável, novamente, determinar se a criança tem febre ou não, pois sua medida de temperatura poderia estar entre 32,4 °C e 39,6 °C. Mas, novamente, deve-se levar em consideração que a margem de erro indicada poderia não ser confiável por não haver a certificação de um órgão competente.

3. Exemplo de resposta: um velocímetro de carro não certificado pode fazer com que um motorista seja multado sem perceber que estava dirigindo acima da medida de velocidade máxima permitida.

Capítulo 4

Atividades

7. **d)** A recomendação das Agências de Vigilância Sanitária é que caixas-d'água de estabelecimentos de uso coletivo sejam higienizadas a cada 6 meses. A higienização deve ser feita utilizando água sanitária, com a diluição de 1 litro de água sanitária para cada 1000 litros de água.

8. **a)** Balança **A**, pois é necessária uma precisão de

miligramas. Como a precisão da balança é de miligramas, o erro estimado do instrumento é metade dessa medida, ou seja, 0,5 miligrama.

b) Balança **C**, pois essa medição não necessita, em geral, de uma exatidão maior do que a unidade de quilograma. Como a precisão da balança é de quilogramas, o erro estimado do instrumento é metade dessa medida, ou seja, 0,5 quilograma.

c) Balança **B**, pois receitas de bolo, em geral, exigem a exatidão dos ingredientes em gramas. Como a precisão da balança é de gramas, o erro estimado do instrumento é metade dessa medida, ou seja, 0,5 grama.

9. **a)** Exemplo de resposta: Algarismos significativos exatos: 1, 0, 2, 3. Algarismo significativo duvidoso: 7. Total de algarismos significativos: 5; $1{,}0237 \cdot 10^0$ m.

b) Exemplo de resposta: Algarismos significativos exatos: 6, 2, 3. Algarismo significativo duvidoso: 5. Total de algarismos significativos: 4; $6{,}235 \cdot 10^{-6}$ kg.

c) Exemplo de resposta: Algarismos significativos exatos: 2, 0, 0. Algarismo significativo duvidoso: 2. Total de algarismos significativos: 4. $2{,}002 \cdot 10^2$ m.

d) Exemplo de resposta: Algarismos significativos exatos: 2, 2, 0, 0, 0. Algarismo significativo duvidoso: 4. Total de algarismos significativos: 6. $2{,}20004 \cdot 10^2$ J.

11. **a)** Último dígito a ser mantido: 6. Seguido pelo algarismo 8 (que é maior do que 5), então o número arredondado deve ser 0,0027.

b) Último dígito a ser mantido: 5 mais à esquerda. Seguido por 5 e pelo menos um algarismo diferente de zero, então o número arredondado deve ser 1,6.

c) Último dígito a ser mantido: 8. Seguido pelo algarismo 2 (que é menor do que 5), então o número arredondado deve ser 7,8.

d) Último dígito a ser mantido: 5. Seguido pelo algarismo 0 (que é menor do que 5), então o número arredondado deve ser 4,5.

e) Último dígito a ser mantido: 7. Seguido pelo algarismo 5 e nenhum algarismo diferente de zero, então como 7 é ímpar, o número arredondado deve ser 9,8.

f) Último dígito a ser mantido: 0. Seguido pelo algarismo 0 (que é menor do que 5), então o número arredondado deve ser 0,0050.

12. **a)** O resultado deve ser arredondado de modo a ter 2 algarismos significativos:

$1{,}1 \cdot 2{,}5 = 2{,}75 \xrightarrow{\text{arredondamento}} 2{,}8$

b) O resultado deve ser arredondado de modo a ter 3 algarismos significativos:

$\frac{1{,}024}{2{,}56} = 0{,}4000 \xrightarrow{\text{arredondamento}} 0{,}400$

c) O resultado deve ser arredondado de modo a ter 1 casa decimal:

$842{,}275 - 22{,}2 = 820{,}075 \xrightarrow{\text{arredondamento}} 820{,}1$

13. **a)** $\frac{x}{1\text{ mm}} = \frac{695\,500}{6\,371} \Rightarrow x \simeq 109\text{ mm} \Rightarrow x \simeq 11\text{ cm}$

b) Exemplo de resposta: Uma bola de vôlei.

14. **a)** Temos que $1\text{ m} = 10^{-3}$ km, portanto:

$7\,880\text{ m}^2 = 7\,880 \cdot (10^{-3}\text{ km})^2 = 7{,}88 \cdot 10^{-3}\text{ km}^2$

b) Número de campos de futebol:

$\frac{1576}{7{,}88 \cdot 10^{-3}} = \frac{1576 \cdot 10^3}{7{,}88} = 200\,000$; ou seja, 200 000 campos de futebol a mais por ano foram desmatados em média entre 2017 e 2022.

c) Exemplo de resposta: Mudar a unidade de tempo de ano para uma menor, como hora – seriam desmatados, aproximadamente, 23 campos de futebol a mais por hora ao longo desses 5 anos; em vez de comparar com campo de futebol, comparar com algo que tenha medida de área maior – seria, aproximadamente, a medida de área equivalente à medida de área do município de São Paulo a mais por ano.

15. Exemplo de resposta: Uma pessoa bebe, em média, 2 L de água por dia, então 15 500 L de água seriam suficientes para uma pessoa beber por pouco mais de 21 anos.

Viralize

3. Exemplo de resposta: O Sistema Internacional de Unidade (SI) é fundamental para garantir a padronização e a consistência nas medições globais, facilitando a comunicação científica e técnica. No entanto, existem outras unidades que são utilizadas em situações específicas devido a sua prática e tradições locais. Por exemplo, quem trabalha no campo pode usar unidades de medida mais adequadas para medir diferentes grandezas. Entender que, além do SI, há outras maneiras de medir o mundo ao nosso redor é importante, pois essas unidades de medida alternativas também atendem necessidades práticas e culturais específicas.

4. Exemplo de resposta: A cafeicultura brasileira exemplifica como o multiculturalismo enriqueceu as práticas agrícolas e a produção de café. Diversos grupos étnicos contribuíram com seus conhecimentos e tradições, criando uma agricultura diversificada e inovadora. Os povos indígenas, com seu conhecimento da flora nativa e de técnicas sustentáveis, ajudaram na adaptação das plantações de café. Os africanos, trazidos como escravizados, introduziram técnicas de cultivo e plantas alimentícias, além de práticas de trabalho essenciais para o desenvolvimento da cafeicultura. Os europeus, especialmente os portugueses, trouxeram novas tecnologias agrícolas e métodos de comercialização que integraram o café brasileiro ao mercado global. Os asiáticos, especialmente os japoneses, introduziram técnicas específicas de cultivo e contribuíram para a melhoria da qualidade do café.

Para fundamentar saberes

1. No novo sistema, a unidade de comprimento é 5 cm e a unidade de massa é 20 g. Convertendo a medida de volume e a medida de massa para as novas unidades, teremos:

Medida de massa: 8 g equivalerá a $\frac{8}{20} = 0{,}4$; ou seja, 0,4 unidade de medida de massa desse novo sistema.

Medida de volume: 1 cm^3 equivalerá a $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$; ou seja, $\frac{1}{125}$ unidade de medida de volume desse novo sistema.

A medida de densidade, portanto, será:

$\frac{0{,}4}{\frac{1}{125}} = 0{,}4 \cdot 125 = 50$; ou seja, 50 unidades de medida de densidade desse novo sistema.

Alternativa **b**.

2. Temos que: 3 min = 3 · 60 s = 180 s. Como velocidade e tempo de duração são grandezas inversamente proporcionais:

$1 \cdot 180 = 1{,}5 \cdot t \Rightarrow t = 120$; 120 s = 2 min.

Alternativa **c**.

3. Convertendo mg para kg, temos: $91 \text{ mg} = 91 \cdot 10^{-6}$ kg.

Convertendo dL para m^3, temos:

$1 \text{ dL} = 10^{-1} \text{ L} = 10^{-1} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 10^{-4} \text{ m}^3$

Fazendo a combinação de unidades, teremos:

$91 \text{ mg/dL} = \frac{91 \cdot 10^{-6} \text{ kg}}{10^{-1} \text{ L}} = \frac{91 \cdot 10^{-6} \text{ kg}}{10^{-4} \text{ m}^3}$

Simplificando, temos:

$\frac{91 \cdot 10^{-6} \text{ kg}}{10^{-4} \text{ m}^3} = 91 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3 = 9{,}1 \cdot 10^{-1} \text{ kg/m}^3$

Alternativa **c**.

4. Medida do diâmetro do foco da luz de um microscópio óptico usual: 1 micrômetro.

Medida do diâmetro da ponta da nanoantena utilizada no nanoscópio: 10 nanômetros.

Razão: $\frac{1 \text{ µm}}{10 \text{ nm}} = \frac{1 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{10 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 100$.

Alternativa **d**.

5. Para converter a medida de comprimento de uma miniatura de carro de Fórmula 1 de micrômetro para metro e expressá-la em notação científica, precisamos entender a relação entre micrômetro e metro.

$100 \text{ µm} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

Alternativa **c**.

6. Analisando a notação científica, temos: $6{,}7 \cdot 10^6$ km = 6 700 000 km. Portanto, são 7 centenas de milhar.

Alternativa **d**.

7. Vamos analisar o número em metro:

$2{,}954 \cdot 10^3 = 2\,954$ m

O último algarismo significativo exato da medição é o 5, indicando que a menor divisão do instrumento de medida representava dezenas de metros. Alternativa **c**.

8. Dentro de Júpiter cabem 23 Netunos, e dentro de Netuno cabem 58 Terras. Portanto, dentro de Júpiter cabem 1334 Terras (pois 23 · 58 = 1334). Alternativa **b**.

Unidade 3

Capítulo 5

Atividades

1. **a)** Proposição, pois é uma afirmação que pode ser valorada em verdadeira ou falsa.

b) Não é proposição, já que uma pergunta não pode ser valorada em verdadeira ou falsa.

c) Não é proposição, já que uma frase no imperativo não pode ser valorada em verdadeira ou falsa, sendo apenas um comando.

d) Proposição, pois é uma afirmação que pode ser valorada em verdadeira ou falsa.

e) Proposição, pois é uma afirmação que pode ser valorada em verdadeira ou falsa.

f) Não é proposição, pois sem informações sobre o valor de x é impossível valorá-la em verdadeira ou falsa. Além disso, caso a proposta seja encontrar um valor para x que faça essa igualdade verdadeira, é possível interpretar a sentença como uma pergunta que não pode ser valorada em verdadeira ou falsa.

g) Proposição, pois afirma que $x^2 - 4 = 0$ para qualquer x pertencente aos números reais, o que é falso.

8. **a)** Verdadeira, pois ambas as proposições simples são verdadeiras e conectadas pela operação de disjunção.

b) Falsa, pois é falso afirmar que "Não é verdade que Biologia é uma das ciências naturais". Como as proposições estão conectadas pela operação de conjunção, sendo uma delas falsa, a proposição composta também será.

c) Falsa, pois ambas as proposições simples são falsas e conectadas pela operação de disjunção.

d) Verdadeira, pois, apesar de não ser verdade que "Não é verdade que maio vem depois de abril.", maio tem de fato 31 dias. Como as proposições são conectadas por uma operação de disjunção, basta que uma delas seja verdadeira para que a proposição composta também seja.

9. O primeiro fator da inequação é positivo para $x < -2$ e negativo para $x > -2$. O segundo fator é positivo para $x > 6$ e negativo para $x < 6$. Para que ambos sejam positivos, x precisa ser menor do que -2 e maior do que 6, ou ser maior do que -2 e menor do que 6, ou seja, o conjunto solução da alternativa **b**.

Mas note que é sempre falsa a proposição composta $x < -2$ e $x > 6$, pois não há número real que simultaneamente seja menor do que -2 e maior do que 6. Como os intervalos estão conectados pela operação de disjunção, é necessário que a segunda condição seja verdadeira, uma vez que a outra é sempre falsa.

16. Podemos pensar na afirmação do enunciado como uma afirmação do tipo $A \Rightarrow B$, com A "Ser aluno de Fulano." e B "Ser aprovado no concurso.". Assim, não é possível afirmar nada sobre Fulano ou sobre pessoas que não são alunos de Fulano (lembrando que, em uma implicação, se temos A falsa, então a implicação é sempre verdadeira, não nos permitindo tirar alguma conclusão), excluindo as alternativas **a**, **b**, **c** e **d**. A alternativa **e** apresenta uma situação em que temos B falsa, o que significa que, para que a implicação original se mantenha verdadeira, A também precisa ser falsa, o que é apresentado na continuação da sentença. Assim, a alternativa **e** é a correta.

18. O resultado será sempre 3. Exemplo de resolução:

I. 7

II. $2 \cdot 7 = 14$

III. $5 \cdot 14 = 70$

IV. $70 : 7 = 10$

V. $10 - 7 = 3$

3 foi o último resultado obtido.

19. **a)** De acordo com o passo **V** do algoritmo, é possível determinar que a média mínima é 6.

b) De acordo com o passo **VI** do algoritmo, é possível determinar que o peso da última prova é de 40%.

d) **I.** $0{,}2 \cdot 8 = 1{,}6$

II. $0{,}1 \cdot 9 = 0{,}9$

III. $0{,}3 \cdot 7 = 2{,}1$

IV. $1{,}6 + 0{,}9 + 2{,}1 = 4{,}6$

V. $6 - 4{,}6 = 1{,}4$

VI. $1{,}4 : 0{,}4 = 3{,}5$

VII. Falso.

VIII. Verdadeiro.

O estudante precisa tirar pelo menos 3,5 na prova **3** para ser aprovado.

22. **a)** Considerando o fluxograma, é possível notar que, no cálculo da variação real, é levada em conta a inflação, mas, no cálculo da variação nominal, não. Portanto, a variação nominal compara a renda do ano vigente com a renda do ano anterior, e a variação real compara a renda no ano vigente com a renda no ano anterior reajustada pela inflação.

b) $i_N = \frac{4\,840}{4\,000} - 1 = 0{,}21 = 21\%$

$i_R = \frac{4\,840}{4\,000 \cdot (1 + 0{,}1)} - 1 = \frac{4\,840}{4\,400} - 1 = 0{,}10 = 10\%$

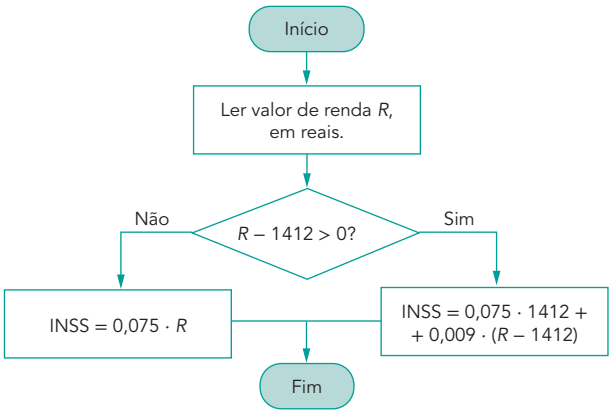
23. O fluxograma indica a seguinte sequência:

- Início
- $D = 1{,}2\%$

- *D* não é maior do que 5,0%.
- *D* não é maior do que 3,0%.
- Escolhe a cor azul.
- *D* é maior do que 1,0%.
- Escreve "2ª classe".
- Imprime selo.
- Fim

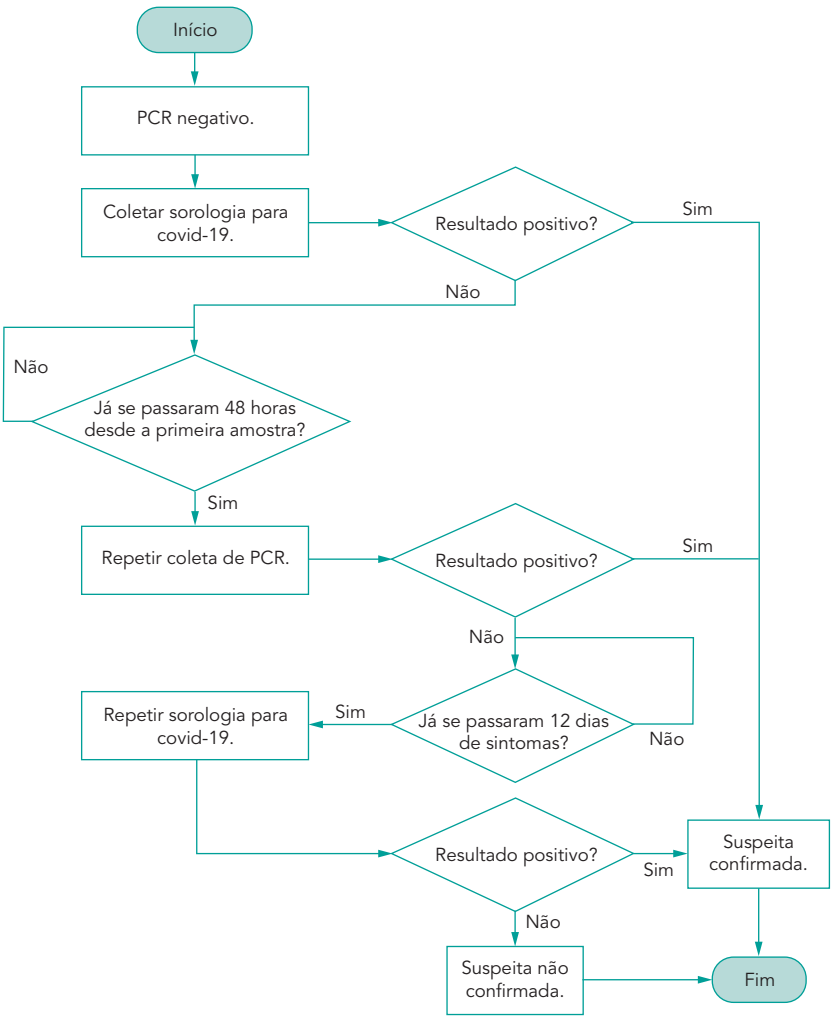
Alternativa **d**.

24.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

25.



26. **a)** O algoritmo será processado da seguinte maneira.

- Linha 4: *num* = 1.
- Linha 5: *res* = 0.
- Linha 6: *aux* = 1.
- Linha 9: 1 é maior ou igual a 1^2 e *res* é igual a 0.
- Linha 10: 1 dividido por 1^2 é 1.
- Linha 11: *res* = 1.
- Linha 9: *res* não é igual a zero, então pula para a linha 16.
- Linha 16: *res* não é igual a zero, então pula para linha 18.
- Linha 19: escreve "A resposta é sim.".

Portanto, a saída nesse caso será "A resposta é sim.".

b) O algoritmo será processado da seguinte maneira.

- Linha 4: *num* = 8.
- Linha 5: *res* = 0.
- Linha 6: *aux* = 1.
- Linha 9: 8 é maior ou igual a 1^2 e *res* é igual a 0.
- Linha 10: 8 dividido por 1^2 não é 1, então pula para linha 12.
- Linha 13: *aux* = 2.
- Linha 9: 8 é maior ou igual a 2^2 e *res* é igual a 0.
- Linha 10: 8 dividido por 2^2 não é 1, então pula para linha 12.
- Linha 13: *aux* = 3.
- Linha 9: 8 não é maior ou igual a 3^2, então pula para linha 16.
- Linha 16: *res* é igual a zero.
- Linha 17: escreve "A resposta é não.".

Portanto, a saída nesse caso será "A resposta é não.".

c) O algoritmo será processado da seguinte maneira.

- Linha 4: *num* = 9.
- Linha 5: *res* = 0.
- Linha 6: *aux* = 1.
- Linha 9: 9 é maior ou igual a 1^2 e *res* é igual a 0.
- Linha 10: 9 dividido por 1^2 não é 1, então pula para linha 12.
- Linha 13: *aux* = 2.
- Linha 9: 9 é maior ou igual a 2^2 e *res* é igual a 0.
- Linha 10: 9 dividido por 2^2 não é 1, então pula para linha 12.
- Linha 13: *aux* = 3.
- Linha 9: 9 é maior ou igual a 3^2 e *res* é igual a 0.
- Linha 10: 9 dividido por 3^2 é 1.
- Linha 11: *res* = 1.
- Linha 9: *res* não é igual a zero, então pula para linha 16.
- Linha 16: *res* não é igual a zero, então pula para linha 18.
- Linha 19: escreve "A resposta é sim.".

Portanto, a saída nesse caso será "A resposta é sim.".

d) "O número natural *num* é um quadrado perfeito?".

27. **a)**

- Linha 5: *media_min* = 5
- Linha 7: *num* = 2
- Linha 8: *media* = 0
- Linha 9: *sobra_peso* = 100
- Linha 10: *aux_peso* = 0
- Linha 11: *aux_nota* = 0
- Linha 12: *nota_necessaria* = 0
- Linha 15: *num* é maior do que 0.
- Linha 17: *aux_nota* = 7
- Linha 19: *aux_peso* = 20
- Linha 20: *media* = 0 + 7 · 20 / 100 = 1,4
- Linha 21: *sobra_peso* = 100 − 20 = 80
- Linha 22: *num* = 1
- Linha 15: *num* é maior do que 0.
- Linha 17: *aux_nota* = 4
- Linha 19: *aux_peso* = 30
- Linha 20: *media* = 1,4 + 4 · 30 / 100 = 1,4 + 1,2 = = 2,6
- Linha 21: *sobra_peso* = 80 − 30 = 50
- Linha 22: *num* = 0
- Linha 15: *num* não é maior do que 0, então pula para linha 24.
- Linha 24: *nota_necessaria* = (5 − 2,6) / (50 / 100) = = 2,4 / 0,5 = 4,8
- Linha 27: *nota_necessaria* não é menor ou igual a 0, então pula para linha 29.
- Linha 30: *nota_necessaria* não é maior do que 10, então pula para linha 32.
- Linha 33: Escrever "Para ser aprovado(a), você precisa tirar em média nos instrumentos avaliativos que faltam um mínimo de: 4,8".

Portanto, a saída será "Para ser aprovado(a), você precisa tirar em média nos instrumentos avaliativos que faltam um mínimo de: 4,8".

Capítulo 6

Atividades

3. **a)** Exemplo de resposta:

Reprodução/Scratch

Ilustrações: Reprodução/Scratch

c) Exemplo de resposta:

4. **a)** Um quadrado tem a mesma medida do lado e a mesma medida do ângulo externo. Como a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo é sempre igual a 360°, o ator precisa girar $\frac{360°}{4} = 90°$ em um dos sentidos, a cada uma das 4 iterações.

b) Um pentágono regular tem a mesma medida do lado e a mesma medida do ângulo externo. Como a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo é sempre igual a 360°, o ator precisa girar $\frac{360°}{5} = 72°$ em um dos sentidos, a cada uma das 5 iterações.

c) Um decágono regular tem a mesma medida do lado e a mesma medida do ângulo externo. Como a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo é igual a 360°, o ator precisa girar $\frac{360°}{10} = 36°$ em um dos sentidos, a cada uma das 10 iterações.

Reprodução/Scratch

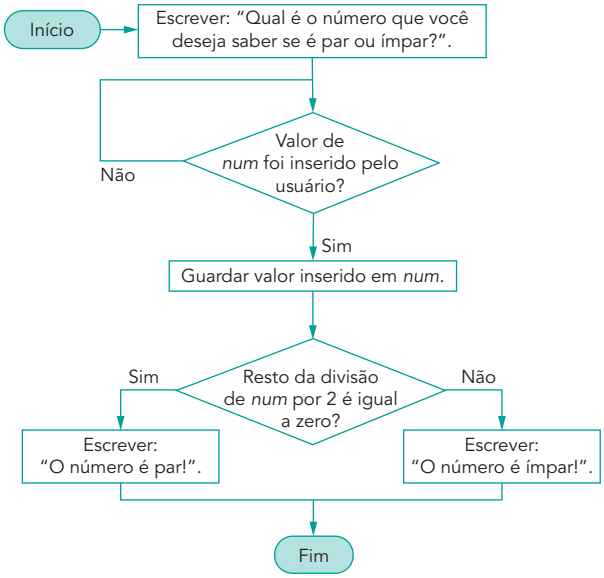
10. **a)** Como o próprio ator anuncia, o programa calcula a média das notas de um estudante em uma disciplina em determinado período considerando os pesos e as notas nas atividades avaliativas que compunham a média.

b) A estudante indicou que teve 3 atividades avaliativas no período. A que valia 20% tirou 8, então: média $= 0 + 8 \cdot \frac{20}{100} = 1{,}6$; a que valia 40% tirou 6, então: média $= 1{,}6 + 6 \cdot \frac{40}{100} = 4{,}0$; e a outra que valia 40% tirou 7, então: média $= 4 + 7 \cdot \frac{40}{100} = 6{,}8$.

c) O estudante indicou que teve 2 atividades avaliativas no período. A que valia 60% tirou 7, então: média $= 0 + 7 \cdot \frac{60}{100} = 4{,}2$; a que valia 20% tirou 8, então: média $= 4{,}2 + 8 \cdot \frac{20}{100} = 5{,}8$. O problema é que a soma do peso das atividades não deu 100% como deveria.

d) Exemplo de resposta: O programa poderia ter uma variável que guarda a soma dos pesos cadastrados para, antes de anunciar a média final, verificar se totalizaram os 100% esperados.

11. **a)** Exemplo de resposta:

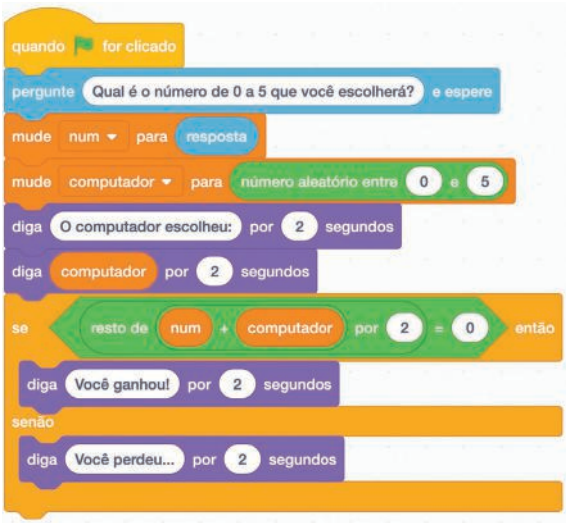


Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Reprodução/Scratch

b) Exemplo de resposta:

c) Exemplo de resposta:



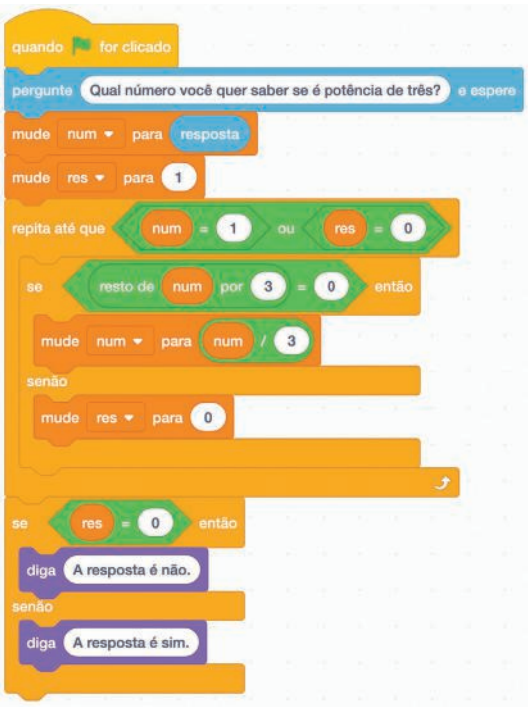
12. **a)** Exemplo de resposta:

b) Exemplo de resposta:

Ilustrações: Reprodução/Scratch

13. **a)** *num* == 1 ou *res* <> 1.

b) Exemplo de resposta (consideramos que *res* <> 1 representa o mesmo que *res* == 0 para essa situação em que *res* só pode ser 1 ou 0):



Para fundamentar saberes

2. Consideremos as proposições: *A*: Ana andou de patins; *B*: Bruna andou de patins; *C*: Carol andou de patins.

Note que, para essa situação, a negação de cada uma dessas proposições significa que a pessoa andou de bicicleta, uma vez que não andou de patins. Como no fim de semana temos que *C* é verdadeiro, então nada se pode afirmar sobre *A* (já que a primeira sentença $A \Rightarrow C$ necessariamente é verdadeira se *C* é verdadeira). Em relação à segunda sentença, sabemos que Carol não estava de bicicleta, então Bruna não poderia estar de patins.

Alternativa **d**.

3. **a)** [V ou (F e F)] = V ou F = V, portanto, alternativa incorreta.

b) (F e F e V) = F e V = F, portanto, alternativa correta.

c) [V ou (F ou F)] = V ou F = V, portanto, alternativa incorreta.

d) (F ou F ou F) = F ou F = F, portanto, alternativa incorreta

e) (F e V e V) = F e V = F, portanto, alternativa incorreta.

Alternativa **b**.

4. **a)** V ou F = V; portanto, alternativa incorreta.

b) F e V = F $\left(\text{o correto seria: todo número diferente de zero elevado a zero é igual a 1 e } \frac{1}{2} < \frac{3}{4}\right)$; portanto, alternativa correta.

c) F $\Rightarrow$ V = V; portanto, alternativa incorreta.

d) F $\Rightarrow$ V = V; portanto, alternativa incorreta.

e) F $\Leftrightarrow$ F = V; portanto, alternativa incorreta.

Alternativa **c**.

7. Executando os passos do algoritmo:

$res = 1$

$res = 3 \cdot 1 = 3$

$res = 3 + 1 = 4$

$res = 2 \cdot 4 = 8$

$res = 8 + 1 = 9$

$res = 2 \cdot 9 = 18$

$res = 18 + 1 = 19$

$res = 2 \cdot 19 = 38$

$res = 38 - 5 = 33$

Alternativa **b**.

Unidade 4

Capítulo 7

Abertura

1. É um bloco econômico, criado em 1991, formado por países da América do Sul. Os países-membros e fundadores são: Brasil, Argentina, Paraguai, Uruguai e Venezuela (suspensa em 2016). O objetivo principal é promover a integração econômica, política e social dos membros, além de garantir a democracia na região.

2. Com o *QR Code* é possível rastrear a placa, diminuindo as possibilidades de clonagem e falsificação.

3. Para a escolha dos caracteres que são letras – o 1º, o 2º, o 3º e o 5º caracteres – há 26 possibilidades para cada um.

Para a escolha dos caracteres que são algarismos – o 4º, o 6º e o 7º caracteres – existem 10 possibilidades para cada um.

Assim, temos ao todo: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 =$ $= 456\,976\,000$; ou seja, 456 976 000 placas distintas.

Considerando agora que todos os caracteres são distintos, o número de placas que podem ser formadas é: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 23 \cdot 9 \cdot 8 = 258\,336\,000$.

Atividades

4. Exemplo de problema: Sabendo que para cada pergunta só é possível assinalar uma alternativa, determine o número de maneiras distintas de responder ao questionário assinalando "insatisfeito" para as 2 primeiras perguntas.

5. **A** e **B** se enfrentam 2 vezes, isto é:

$$\underbrace{(A, B)}_{\substack{\text{campo} \\ \text{de } \mathbf{A}}} \neq \underbrace{(B, A)}_{\substack{\text{campo} \\ \text{de } \mathbf{B}}}$$

O numero total de jogos é: $15 \cdot 14 = 210$.

A final ocorrerá em 2 jogos, totalizando 212 jogos.

6. **a)** Falsa. Usando a cor 1 em **A**, em **B** devemos usar a cor 2 e em **C**, a cor 3; em **D**, podemos usar novamente a cor 1. Assim, o número mínimo de cores para colorir o esquema é 3.

b) Verdadeira. Iniciando com **A**: 4 opções; **B**: 3 opções; **C**: 2 opções; e **D**: 1 opção, temos, pelo PFC: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; ou seja, 24 possibilidades.

c) Falsa. Iniciando com **A**: 4 opções; **B**: 3 opções; **C**: 2 opções; e **D**: 2 opções (pode ser igual à cor usada em **A** ou pode ser a cor 4), temos: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$; ou seja, 48 possibilidades.

d) Verdadeira. Iniciando com **A**: 5 opções; **B**: 4 opções; **C**: 3 opções; e **D**: 1 opção, temos: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$; ou seja, 60 possibilidades.

e) Verdadeira. Conforme item **a**.

7. **a)** 1ª parte: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; ou seja, 6 maneiras distintas de preencher.

2ª parte: $7 \cdot 6 = 42$; ou seja, 42 maneiras distintas de preencher.

Pelo princípio multiplicativo, o resultado procurado é $6 \cdot 42 = 252$; ou seja, 252 maneiras.

b) $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 6 \cdot 21 = 126$; ou seja, 126 maneiras distintas de preencher.

Note, neste caso, que as escolhas para sábado/domingo e domingo/sábado, por exemplo, são iguais. Por isso, devemos dividir $7 \cdot 6$ por 2.

8. **a)** $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$; ou seja, 120 maneiras.

b) $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 320$; ou seja, 320 maneiras.

c) Vamos supor que em cada uma das "extremidades" seja usada a cor $\mathbf{C}_1$; para o 2º retângulo há 4 opções de escolha, e para o 3º retângulo há 3 opções de escolha.

Teremos 12 possibilidades (pois $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$).

Se a cor usada nas extremidades fosse $\mathbf{C}_2$, teríamos, pelo mesmo raciocínio, 12 possibilidades, e assim por diante. Como há 5 cores disponíveis, temos 60 possibilidades distintas (pois $5 \cdot 12 = 60$).

10. **a)** $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; ou seja, 6 números.

b) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; ou seja, 60 números.

c) $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$; ou seja, 48 números.

d) Há 2 casos para considerar.

1º) Números da forma (par, ímpar, par):

$4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$; ou seja, 80 possibilidades.
(4: sem zero)

2º) Números da forma (ímpar, par, ímpar):

$5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$; ou seja, 100 possibilidades.

Assim, ao todo, podem ser formados 180 números (pois $80 + 100 = 180$).

11. **a)** Números pares que terminam por 0: $6 \cdot 7 \cdot 1 = 42$.

Números pares que terminam por 2, 4 ou 6: $6 \cdot 7 \cdot \cdot 3 = 126$.

Ao todo, são 168 números ($42 + 126 = 168$).

b) Números pares que terminam por 0: $6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$.

Números pares que terminam por 2, 4 ou 6: $5 \cdot 5 \cdot 3 = = 75$.

Ao todo, há 105 números ($30 + 75 = 105$).

c) Números que terminam por 0: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 120$.

Números que terminam por 5: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 100$.

$$\underset{\substack{\neq 0\\ \neq 5}}{5} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \underset{\text{só pode ser 5}}{1} = 100$$

Temos, ao todo, 220 números ($120 + 100 = 220$).

12. **a)** $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$; ou seja, 24 modos distintos.

b) Para obter o resultado, fazemos: $1 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 6 = 12$.

$$\underset{K}{1} \cdot \underset{C}{1} \cdot \underbrace{6}_{\text{número qualquer}} + \underset{C}{1} \cdot \underset{K}{1} \cdot \underbrace{6}_{\text{número qualquer}} = 12$$

Portanto, são 12 resultados.

c) Considerando 2 caras, temos $1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$. Agora, sendo 2 coroas, fazemos $1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$. Logo, pelo princípio aditivo, serão 12 resultados.

d) Precisaremos considerar as seguintes situações:

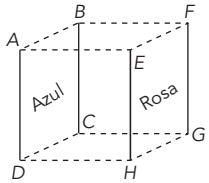
2 caras: $1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$; um número primo: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$; 2 caras e um número primo: $1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$.

Então, para obter o resultado para 2 caras ou um número primo, temos, pelo princípio aditivo da contagem: $6 + 12 - 3 = 15$. Logo, são 15 resultados.

e) Exemplo de problema: De quantos modos distintos podem ocorrer um resultado formado por 2 caras e um número maior do que 2?

15. Total de possibilidades para pintar as 4 paredes sem restrição: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Número de possibilidades com as paredes azul e rosa de frente uma para outra:



Banco de imagens/ Arquivo da editora

$$\underset{\substack{\text{face}\\ ABCD}}{2} \cdot \underset{\substack{\text{face}\\ EFGH}}{1} \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

$$\underset{\substack{\text{face}\\ ABCD}}{2} \cdot \underset{\substack{\text{face}\\ BCFG}}{1} \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

O resultado procurado é, portanto, $24 - 4 - 4 = 16$.

Alternativa **b**.

16. **a)** $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; ou seja, 81 códigos.

$$\underset{\substack{\text{só pode}\\ \text{ser ``}\cdot\text{''}}}{1} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

b) 2 símbolos: $3 \cdot 3 = 9$.

3 símbolos: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

4 símbolos: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Total: $9 + 27 + 82 = 117$; ou seja, 117 códigos.

2 símbolos: $3 \cdot 3 = 9$
4 símbolos: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
4 símbolos: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
} total: 117

c) $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; ou seja, 6 códigos.

d) Com exatamente 3 "$\cdot$":

$$\underset{\cdot}{1} \cdot \underset{\cdot}{1} \cdot \underset{\cdot}{1} \cdot \underset{-\text{ ou } \times}{2} \text{ ou}$$

$$\underset{-\text{ ou } \times}{2} \cdot \underset{\cdot}{1} \cdot \underset{\cdot}{1} \cdot \underset{\cdot}{1} \text{ ou}$$

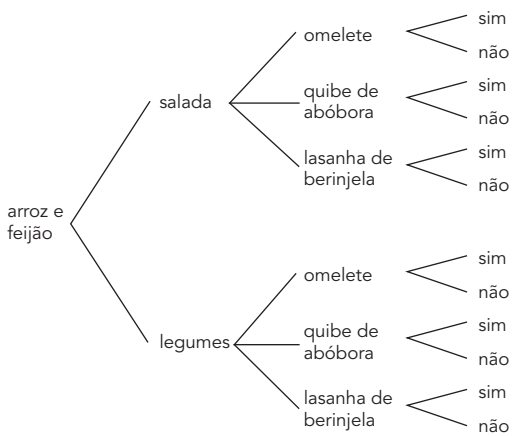
$$\underset{\cdot}{1} \cdot \underset{\cdot}{1} \cdot \underset{-\text{ ou } \times}{2} \cdot \underset{\cdot}{1} \text{ ou}$$

$$\underset{\cdot}{1} \cdot \underset{-\text{ ou } \times}{2} \cdot \underset{\cdot}{1} \cdot \underset{\cdot}{1}$$

8 possibilidades.

Como só há uma única sequência com os 4 "$\cdot$", são possíveis, no total, 9 códigos (pois $8 + 1 = 9$).

18. **a)** Pelo diagrama de árvore, temos 12 opções de pedidos vegetarianos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Temos 12 opções vegetarianas, conforme item **a**.

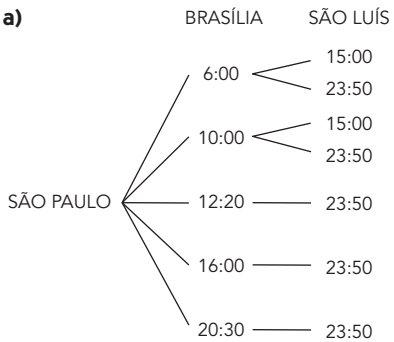
Para o pedido com frango, temos 2 opções de prato principal (salada ou legumes); 2 opções de frango (empanado ou grelhado); e 2 opções de *couvert* (sim ou não). Logo, temos: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; ou seja, opções.

Para o pedido com carne vermelha, temos 2 opções de prato principal (salada ou legumes); 4 opções de carne (linguiça, bife à milanesa, contrafilé ou picadinho); e 2 opções de *couvert* (sim ou não). Logo, temos: $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$; ou seja, 16 opções.

Assim, pelo princípio aditivo da contagem, o número de maneiras de se fazer um pedido para o almoço nesse restaurante é: $12 + 8 + 16 = 36$.

19. **a)**

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



b) De acordo com a tabela, existem 3 opções para o voo direto.

De acordo com os diagramas, para o voo com conexão em Brasília, há 7 opções; e para voos com conexão em Recife, há 5 opções.

Pelo princípio aditivo da contagem, o resultado procurado é: $3 + 7 + 5 = 15$.

21. **a)** $\dfrac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$

b) $\dfrac{\cancel{3!}}{4 \cdot \cancel{3!}} + \dfrac{\cancel{4!}}{5 \cdot \cancel{4!}} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{9}{20}$

c) $\dfrac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!} \cdot 2!} = 190$

d) $17 \cdot 16! - 17 \cdot 16! = 0$

e) $\dfrac{40 \cdot 39! - 39!}{41 \cdot 40 \cdot 39!} = \dfrac{\cancel{39!} \cdot (40 - 1)}{41 \cdot 40 \cdot \cancel{39!}} = \dfrac{39}{1640}$

23. **a)** $\dfrac{(n+2) \cdot \cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}} = n + 2$

b) $\dfrac{\cancel{(n-3)!}}{(n-2) \cdot \cancel{(n-3)!}} = \dfrac{1}{n-2}$

c) $\dfrac{(n+1) \cdot n! + n!}{n!} = \dfrac{\cancel{n!}(n+1+1)}{\cancel{n!}} = n + 2$

d) $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! - (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-1) \cdot (n-2)! + (n-2)!} = \dfrac{(n-1)^2}{n}$

24. **a)** $n! = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! \Rightarrow n = 5$; $S = \{5\}$.

b) $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 42 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - n - 42 = 0 \begin{cases} n = 7 \\ \text{ou} \\ n = -6 \text{ (não convém)} \end{cases}$; $S = \{7\}$.

c) Como $0! = 1$ e $1! = 1$, podemos ter: $(n - 5 = 0 \Rightarrow n = 5)$ ou $(n - 5 = 1 \Rightarrow n = 6)$; $S = \{5, 6\}$.

25. Considerando A filme de ação, C filme de comédia e D filme de drama, devemos ter:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A	C	A	C	A	C	A	C	A	C
8	5	7	4	6	3	5	2	4	1

(esgotam-se os filmes de comédia)

A	D	A	D	A	D
3	3	2	2	1	1

(esgotam-se todos os lançamentos)

O número de maneiras é:

$8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 8! \cdot 5! \cdot 3!$

Alternativa **b**.

28. **a)** $P_9 = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$

b) $\underset{\text{vogal}}{\underset{\uparrow}{4}} \underbrace{_\ _\ _\ _\ _\ _\ _\ _}_{P_8} = 4 \cdot 8! =$

$= 161\,280$

c) $\underset{\text{consoante}}{\underset{\uparrow}{5}} \underbrace{_\ _\ _\ _\ _\ _\ _}_{P_7} \underset{\text{consoante}}{\underset{\uparrow}{4}} =$

$= 5 \cdot 4 \cdot 7! = 20 \cdot 7! = 100\,800$

d) | CON | Q | U | I | S | T | A | → 7 blocos

$P_7 = 7! = 5\,040$

e) Do total de anagramas possíveis, metade tem a letra C antes da letra A e a outra metade tem o contrário.

A resposta é 181 440.

f) | CON | QUIS | TA |

3 blocos: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Dentro de cada bloco: $P_3 \cdot P_4 \cdot P_2 = 288$.

O total pedido é: $6 \cdot 288 = 1728$.

30. **a)** Temos 4 adolescentes de 15 anos de idade e 3 de 16 anos, logo serão necessárias 7 semanas.

b) Como são 7 pessoas, fazemos: $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$; ou seja, 5 040 maneiras distintas.

c)

adolescentes de 16 anos de idade	adolescentes de 15 anos de idade

Temos: $\underbrace{P_3 \cdot P_4}_{\text{"dentro" dos blocos}} = 6 \cdot 24 = 144$; ou seja, 144 maneiras distintas.

d) Devemos, obrigatoriamente, iniciar por um adolescente de 15 anos de idade. Representando os adolescentes de 15 anos por R e os adolescentes de 16 anos por M. Temos:

R - M - R - M - R - M - R
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$

Portanto, são 144 maneiras distintas.

31. Total de anagramas (sem restrições): $P_6 = 6! = 720$.

Número de anagramas em que as vogais estão todas juntas:

Q	vogais
J	

$\underbrace{P_3}_{\text{entre}} \cdot \underbrace{P_4}_{\text{dentro}} = 6 \cdot 24 = 144$

A diferença $720 - 144 = 576$ fornece o número de anagramas em que as vogais não aparecem todas juntas.

32. **a)** Começando por A, existem 120 anagramas (pois $5! = 120$).

Começando por O, existem 120 anagramas.

Começando por P, existem 120 anagramas.

Assim, o primeiro anagrama que começa por R é precedido de 360 anagramas (pois $120 + 120 + 120 = 360$) e sua posição é a 361ª.

b) Começando por A, há 120 anagramas (pois $P_5 = 5! = 120$).

Começando por O, há 120 anagramas (pois $P_5 = 5! = 120$).

Começando por PA, há 24 anagramas (pois $P_4 = 4! = 24$).

Começando por PO, há 24 anagramas (pois $P_4 = 4! = 24$).

Começando por PRAO, há 2 anagramas (pois $P_2 = 2$).

Começando por PRAS, há 2 anagramas (pois $P_2 = 2$).

Assim, o anagrama PRATOS é precedido de 292 anagramas (pois $120 + 120 + 24 + 24 + 2 + 2 = 292$) e sua posição é a 293ª.

c) Da 1ª à 120ª posição, temos os anagramas que começam por A.

Da 121ª à 240ª posição, temos os anagramas que começam por O.

Da 241ª à 360ª posição, temos os anagramas que começam por P.

Da 361ª à 480ª posição, temos os anagramas que começam por R.

Começando por SA, temos 24 anagramas (pois $P_4 = 4! = 24$), da 481ª a 504ª posição. As últimas posições (que começam por SAT) são:

504ª → SATRPO
503ª → SATROP
502ª → SATPRO
501ª → SATPOR
500ª → SATORP
499ª → SATOPR

Logo, o anagrama procurado é SATORP.

34. Para a resolução desta atividade, será necessária a aplicação dos conhecimentos de permutação e arranjo.

Fotos das irmãs no aparador: obrigatoriamente, as fotos das 3 irmãs ficarão no aparador, é preciso saber de quantas maneiras é possível ordená-las: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; ou seja, 6 opções.

Fotos do irmão, do ídolo, do amigo e do jogador de futebol na parede: Fábio precisa organizar 4 fotos em 2 porta-retratos. Nesse caso, utiliza-se o arranjo: $A_{4,3} = 4 \cdot 3 = 12$; ou seja, 12 opções.

Total de possibilidades: $T_p = P_3 \cdot A_{4,2} = 72$; ou seja, 72 modos diferentes.

36. Número de duplas: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (ou $C_{6,2}$).

Número de quartetos: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} = 15$ (ou $C_{6,4}$).

Comparando a quantidade de duplas e trios, temos:

- quantidade de duplas: 15;
- quantidade de trios: $C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3!) \cdot 3!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$.

Assim, a quantidade de duplas é menor do que a de trios.

41. **a)** Para escolher o rei, temos 4 possibilidades; para cada uma dessas opções, existem 4 maneiras de se escolher a rainha, totalizando 16 opções (pois $4 \cdot 4 = 16$).

b) $C_{13,2} = \frac{13!}{2! \cdot 11!} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78$

c) Para escolher a carta de copas, há 13 opções; para cada uma dessas possibilidades, existem 13 opções de escolha de carta de ouros, totalizando $13 \cdot 13 = 169$.

d) Há 4 ases no baralho, dos quais 2 devem ser escolhidos. O número de possibilidades é: $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (ou $C_{4,2} = 6$).

e) Vamos imaginar, para fixar ideias, que sejam escolhidas uma carta de ouros e outra de paus.

$\underset{\text{ouros}}{13} \cdot \underset{\text{paus}}{13}$

$13 \cdot 13 = 169$; ou seja, 169 pares de cartas.

Agora, é preciso saber de quantas maneiras os 2 naipes podem ser escolhidos. Há $C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$; ou seja, 6 opções (ouros e paus; ouros e espadas; ouros e copas; paus e espadas; paus e copas; copas e espadas).

Assim, o resultado pedido é: $169 \cdot 6 = 1014$.

42. Possibilidades para escolher os jogos de cama: $\binom{7}{2} = 21$; ou seja, 21 possibilidades.

Possibilidades para escolher os jogos de banho: $\binom{8}{4} = 70$; ou seja, 70 possibilidades.

Possibilidades para escolher os jogos de mesa: $\binom{n}{2}$ possibilidades.

Assim, $21 \cdot 70 \cdot \binom{n}{2} = 66150 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 10$.

43. **a)** Trata-se de saber a quantidade de "grupos" de 6 salas dentre as 45 existentes.

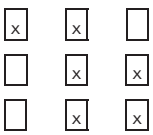
$C_{45, 6} = \frac{45!}{6! \cdot 39!} = 8145060$

b) Podemos ter: 1º e 2º andares; 1º e 3º andares; ...; 14º e 15º andares.

Trata-se de escolher, sem importar a ordem, 2 dos 15 andares: $C_{15, 2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$.

c) Análise de um certo andar com 2 salas acesas.

Há 3 opções:



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Vamos determinar, inicialmente, a quantidade de "grupos" formados por 3 dentre os 15 andares:

$C_{15, 3} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{6} = 455$; ou seja, 455 possibilidades.

Cada possibilidade é um subconjunto de 3 andares, por exemplo, 1º, 2º e 3º andares. Cada um desses andares apresenta 3 possibilidades de se ter 2 salas acesas.

Assim, o total procurado é: $455 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 12285$.

44. **a)** $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

b) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

c) Vamos supor que o nadador brasileiro receba medalha de ouro. Para distribuir as outras 2 medalhas, existem 42 opções (pois $A_{7, 2} = 7 \cdot 6 = 42$). Como o nadador brasileiro pode receber também a medalha de prata ou a de bronze, o resultado pedido é: $3 \cdot 42 = 126$.

d) Podemos ter:

- 1º e 2º colocados europeus e 3º colocado estadunidense:

$$\underset{1º}{5} \cdot \underset{2º}{4} \cdot \underset{3º}{2} = 40$$

ou

- 1º e 3º colocados europeus e 2º colocado estadunidense:

$$\underset{1º}{5} \cdot \underset{2º}{2} \cdot \underset{3º}{4} = 40$$

ou

- 1º colocado estadunidense e 2º e 3º colocados europeus:

$2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$

$$\underset{1º}{5} \cdot \underset{2º}{2} \cdot \underset{3º}{4} = 40$$

ou

- 3 primeiros colocados europeus:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

$$\underset{1º}{5} \cdot \underset{2º}{4} \cdot \underset{3º}{3} = 60$$

Ao todo, há 180 possibilidades (pois 40 + 40 + + 40 + 60 = 180).

50. **a)** $P_9^{(3, 2, 2)} = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 15120$; ou seja, 15120 anagramas.

b) $P_8^{(2, 2, 2)} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 5040$; ou seja, 5040 anagramas.

c) Número de anagramas que começam por I:

I _ _ _ _ _ _ _ _ ← em qualquer ordem

P R R A A A I T

$P_8^{(2, 3)} = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = 3360$

No item **b**, calculamos o número de anagramas que começam por A.

Juntando os 2 casos, temos: 8400 anagramas (pois 3360 + 5040 = 8400) que começam por vogal.

d) É preciso analisar 4 casos.

I _ _ _ _ _ _ _ I →

3A, 2R, 1P, 1T

A _ _ _ _ _ _ _ A →

1A, 2R, 1P, 1T, 2I

I _ _ _ _ _ _ _ A →

2A, 2R, 1P, 1T, 1I

A _ _ _ _ _ _ _ I →

2A, 2R, 1P, 1T, 1I

$P_7^{(2, 2)} = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$

O número de anagramas possíveis é:
$420 + 3 \cdot 1260 = 4200$.

52. **a)** Há 5 casos a considerar.

1º) Soma 7: 15 sequências $\begin{cases} (1, 2, 4) \Rightarrow P_3 = 6 \\ (1, 3, 3) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \\ (1, 5, 1) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \\ (2, 2, 3) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \end{cases}$

2º) Soma 6: 10 sequências $\begin{cases} (1, 1, 4) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \\ (1, 2, 3) \Rightarrow P_3 = 3! = 6 \\ (2, 2, 2) \Rightarrow 1 \end{cases}$

3º) Soma 5: 6 sequências $\begin{cases} (1, 1, 3) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \\ (1, 2, 2) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \end{cases}$

4º) Soma 4: 3 sequências $(1, 1, 2) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3$

5º) Soma 3: 1 sequência $(1, 1, 1) \Rightarrow 1$

O total é: $15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$.

b) Soma 14: $\begin{cases} (4, 4, 6) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \\ (4, 5, 5) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \\ (5, 6, 3) \Rightarrow P_3 = 3! = 6 \\ (6, 6, 2) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \end{cases}$ Soma 15: $\begin{cases} (5, 5, 5) \Rightarrow 1 \\ (5, 6, 4) \Rightarrow P_3 = 3! = 6 \\ (6, 6, 3) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \end{cases}$ Soma 16: $\begin{cases} (6, 6, 4) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \\ (5, 6, 5) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \end{cases}$

Soma 17: $(6, 6, 5) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3$

Soma 18: $(6, 6, 6) \Rightarrow 1$

Assim, temos $15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$; ou seja, 35 possibilidades.

Capítulo 8

Atividades

6. Os elementos de E são sequências de 3 números em que podem ocorrer: 2 números iguais e 1 diferente ou 3 números diferentes. Note que só não "interessam" sequências nas quais os 3 números são iguais. Assim, $\bar{E} = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)\}$.

8. Para escolher o estudante com 16 anos, há 17 opções; para cada estudante de 16 anos escolhido, um estudante de 17 anos poderá ser escolhido de 15 maneiras distintas, totalizando 255 possibilidades (pois $17 \cdot 15 = 255$); então, $n(E) = 255$.

11. $n(\Omega) = 52$

a) $E = \{7 \text{ copas}\}$; $p(E) = \frac{1}{52}$.

b) 51 cartas do baralho não são o "valete de espadas", e a probabilidade é $\frac{51}{52}$.

12. $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$

a) $E = \left\{ \underbrace{(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, 6)}_{\text{1 só no primeiro lançamento}} ; \underbrace{(2, 1), (3, 1), \ldots, (6, 1)}_{\text{1 só no segundo lançamento}} ; \underbrace{(1, 1)}_{\text{1 em ambos}} \right\}$; $p(E) = \frac{11}{36}$.

b) $E = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$; $p(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

c) $E = \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}$; $p(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \Rightarrow p(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

d) $E = \left\{ \underbrace{(1, 4), (2, 5), (4, 1), (5, 2), (3, 6), (6, 3)}_{\text{módulo da diferença igual a 3}}, \underbrace{(1, 5), (5, 1), (2, 6), (6, 2)}_{\text{módulo da diferença igual a 4}}, \underbrace{(1, 6), (6, 1)}_{\text{módulo da diferença igual a 5}} \right\}$

$n(E) = 12$; $p(E) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

13. **a)** $a = 94 - (55 + 17) = 22$
$e = a + 49 = 22 + 49 = 71$
$c = 200 - 94 = 106$
$b + 49 + 26 = 106 \Rightarrow b = 31$
$d = 17 + b = 17 + 31 = 48$

b) Há 31 adultos que não consomem carne; ou seja, $p(\text{adulto e não carne}) = \frac{31}{200}$.

c) $55 + 26 = 81$; 81 pessoas comem carne frequentemente, $p(\text{carne}) = \frac{81}{200}$.

14. A medida de área do terreno é $(500 \text{ m}) \cdot (300 \text{ m}) = 150\,000 \text{ m}^2$; o diâmetro da base da arena mede $500 \text{ m} - (250 \text{ m} + 100 \text{ m}) = 150 \text{ m}$; a medida de área da base da arena é $\pi \cdot (75 \text{ m})^2 \simeq 3 \cdot 5\,625 \text{ m}^2 = 16\,875 \text{ m}^2$. Assim, a probabilidade de o tesouro ter sido escondido abaixo da região limitada pela arena é $\frac{16\,875}{150\,000} = \frac{9}{80}$, e a probabilidade de o tesouro não ter sido escondido abaixo da arena é $1 - \frac{9}{80} = 0{,}8875$; ou seja, 88,75%.

16. Devemos ter $\Delta \geqslant 0$, ou seja:

$9 - 4 \cdot 1 \cdot c \geqslant 0 \Rightarrow -4c \geqslant -9 \Rightarrow c \leqslant \frac{9}{4} \Rightarrow c \leqslant 2{,}25$

As possibilidades são -1, 0, 1 ou 2, então: $p(\text{raízes reais}) = \frac{4}{5} = 80\%$.

17. $p(C) = 4 \cdot p(k)$

Como $p(C) + p(k) = 1$, temos: $4p(k) + p(k) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p(k) = \frac{1}{5} = 20\%$ e $p(C) = \frac{4}{5} = 80\%$.

19. O número total de bolas é: $x + 3x + 3 = 4x + 3$, das quais $3x$ são pretas.

Devemos ter: $\frac{3x}{4x+3} > 0{,}7$.

Como $4x + 3 > 0$, pois x é inteiro positivo, podemos multiplicar os 2 membros por $4x + 3$:

$(4x + 3) \cdot \frac{3x}{4x+3} > (4x + 3) \cdot 0{,}7 \Rightarrow 3x > 2{,}8x + 2{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}2x > 2{,}1 \Rightarrow x > 10{,}5$

O menor valor inteiro de x que serve é $x = 11$.

20. $n(\Omega) = P_7 = 7! = 5\,040$

Começando e terminando por vogal:

$\underline{3} \cdot \underbrace{_ \cdot _ \cdot _ \cdot _ \cdot _}_{P_5} \cdot \underline{2} = 6 \cdot 5!$

$p = \frac{6 \cdot 5!}{7!} = \frac{1}{7}$

21. **a)** Número total de palíndromos de 4 algarismos:

$\underset{\neq 0}{\underline{9}} \cdot \underline{10} \cdot \underset{\text{igual ao } 2^{\text{o}}}{\underline{1}} \cdot \underset{\text{igual ao } 1^{\text{o}}}{\underline{1}} = 90$

Total de números de 4 algarismos:

$\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 9\,000$

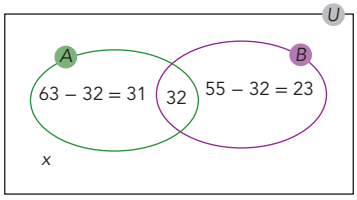
$p(\text{palíndromo}) = \frac{90}{9\,000} = \frac{1}{100} = 1\%$

b) Total de números de 5 algarismos: $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}$

Total de palíndromos de 5 algarismos: $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1}$

$p(\text{palíndromo}) = \frac{9 \cdot 10^2}{9 \cdot 10^4} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 1\%$

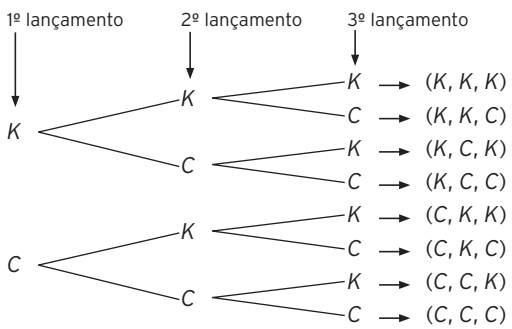
23. Imaginando um universo com 100 pessoas, temos:



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

$x = 100 - (31 + 32 + 23) \Rightarrow x = 14$; então, $\frac{14}{100} = 14\%$.

25.



$n(\Omega) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$E = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C)\}$

$p(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 50\%$

29. Podemos escolher 3 pontos quaisquer entre os 9 fornecidos de 84 maneiras distintas ($C_{9,3} = 84$); $n(\Omega) = 84$. Será formado um triângulo, se escolhermos:

$$\underbrace{(2 \text{ pontos de } r \text{ e } 1 \text{ ponto de } s)}_{C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 40}$$

ou

$$\underbrace{(1 \text{ ponto de } r \text{ e } 2 \text{ pontos de } s)}_{C_{5,1} \cdot C_{4,2} = 30}$$

Logo, existem 70 maneiras distintas ($40 + 30 = 70$) de formarmos triângulo. A probabilidade em questão é $\frac{70}{84} = \frac{5}{6} \simeq 83{,}3\%$.

30. O sorteio simultâneo garante que as cartas sejam distintas, de modo a formar agrupamentos não ordenados.

a) $n(\Omega) = \binom{52}{3} = \frac{52!}{3! \cdot 49!} = 22\,100$; existem 22 100 "subconjuntos" de 3 cartas, entre os quais apenas 1 é formado pelo dez de ouros, sete de copas e ás de paus. Assim, a probabilidade é $\frac{1}{22\,100}$.

b) Número de casos favoráveis: $\binom{51}{2} = 1275$, pois, se uma das cartas já está definida, resta escolher duas entre as outras 51.

$p(\text{10 ouros}) = \frac{1275}{22\,100} = \frac{3}{52}$

c) O número de possibilidades de sortearmos 3 cartas de espadas é $\binom{13}{3} = 286$, e a probabilidade pedida é: $\frac{286}{22\,100} = \frac{11}{850}$.

31. **a)** Casal **1**: possíveis genótipos do bebê: I^AI^B, I^BI^B, I^Ai e I^Bi. Portanto: 25% de probabilidade de ter sangue do tipo AB, 50% de ter sangue do tipo B e 25% de ter sangue do tipo A. Casal **2**: possíveis genótipos do bebê: I^Ai, I^Ai, ii e ii. Portanto: 50% de probabilidade de ter sangue do tipo A e 50% de ter sangue do tipo O. Casal **3**: possíveis genótipos do bebê: I^AI^A, I^AI^B, I^Ai e I^Bi. Portanto: 50% de probabilidade de ter sangue do tipo A, 25% de probabilidade de ter sangue do tipo B e 25% de probabilidade de ter sangue do tipo AB.

b) Casal **1**: a mãe não tem aglutininas presentes no sangue, então há 0% de probabilidade de o sangue do bebê ser afetado pelo sistema ABO. Casal **2**: a mãe tem aglutininas anti-A e anti-B presentes no sangue, então há 50% de probabilidade de o sangue do bebê ser afetado, uma vez que há 50% de probabilidade de a criança ter sangue do tipo A. Casal **3**: a mãe tem aglutininas anti-B presentes no sangue, então há 50% de probabilidade de o sangue do bebê ser afetado, uma vez que há 25% de probabilidade de a criança ter sangue do tipo B e 25% de probabilidade de ter sangue do tipo AB.

c) Em função do sistema ABO, os casais **2** e **3** devem ser desaconselhados para o parto domiciliar, pois há probabilidade de aglutininas presentes no sangue da mãe afetarem os aglutinogênios possivelmente presentes no sangue do recém-nascido; o casal **1** não apresenta essa possibilidade, então não precisa ser desaconselhado por essa razão (mas lembre-se de que é necessário analisar outros fatores de risco que poderiam levar a pediatra a não recomendar o parto domiciliar).

d) Exemplos de resposta: Para calcular riscos de incidência de doenças genéticas causadas por alterações cromossômicas; calcular probabilidades de bons ou maus resultados terapêuticos, entre outros.

32. $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\}$

$A = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\}$; $p(A) = \frac{3}{36}$.

$B = \Omega - \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}$; $p(B) = \frac{30}{36}$.

$A \cap B = \{(4, 6), (6, 4)\}$; $p(A \cap B) = \frac{2}{36}$.

Daí, $p(A \cup B) = \frac{3}{36} + \frac{30}{36} - \frac{2}{36} = \frac{31}{36}$.

33. $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$

a) A: primo: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

B: maior do que 10: $\{11, 12, \ldots, 30\}$.

$A \cap B = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

$p(A \cup B) = \frac{10}{30} + \frac{20}{30} - \frac{6}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

b) A: múltiplo de 7; $A = \{7, 14, 21, 28\}$.

B: múltiplo de 5; $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$.

$A \cap B = \varnothing \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{4}{30} + \frac{6}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

c) A: quadrado perfeito; $A = \{1, 4, 9, 16, 25\}$.

B: divisor de 36 e menor do que 30; $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$.

$A \cap B = \{1, 4, 9\}$

$p(A \cup B) = \frac{5}{30} + \frac{8}{30} - \frac{3}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

37. **a)** $\Omega' = \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}$

$E = \Omega'$ e $p(E) = 1 = 100\%$ (lembre-se de que a soma de 2 números inteiros iguais é sempre par: $x + x = 2x$, que é par).

b) $\Omega' = \Omega - \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}$; $n(\Omega') = 36 - 6 = 30$.

E: soma dos pontos é 8;

$E = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3)\} \subset \Omega'$.

$p(E) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} = 0{,}1333\ldots = 13{,}\overline{3}\%$

39. **a)** Devemos excluir 4 valetes e 4 damas para obter espaço amostral reduzido Ω'.

$n(\Omega') = 52 - 8 = 44$

Daí, uma dessas 44 cartas é o rei de ouros, e a probabilidade pedida é $\frac{1}{44}$.

b) Excluímos as 13 cartas de ouros para a construção de Ω' e $n(\Omega') = 52 - 13 = 39$.

Dentre essas 39 cartas, há $39 - 13 = 26$, que não são de copas, e a probabilidade é $\frac{26}{39} = \frac{2}{3}$.

c) $n(\Omega') = 13$; ou seja, 13 cartas de copas.

Dentre essas 13 cartas de copas, apenas uma é um rei, e a probabilidade é $\frac{1}{13}$.

d) $n(\Omega') = 52 - 13 = 39$; dessas 39 cartas, uma é o valete de espadas e outra é o valete de ouros (2 casos favoráveis). A probabilidade é $\frac{2}{39}$.

e) $n(\Omega') = 39$

Dessas 39 cartas, há 13 de ouros e 3 reis (já excluímos o rei de copas). Mas não podemos esquecer que o rei de ouros foi contado duas vezes:

$p = \frac{13 + 3 - 1}{39} = \frac{5}{13}$.

40. $n(\Omega')$: número de filas em que o casal não está em sequência:

$$n(\Omega') = \underbrace{P_6}_{\text{total}} - \underbrace{P_2 \cdot P_5}_{\text{casal junto}} = 720 - 240 = 480$$

$n(E)$: número de filas em que as extremidades são ocupadas pelo casal:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{início}}}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{final}}}{1} = 2 \cdot P_4 = 48$$

$p(E) = \frac{48}{480} = 0{,}10 = 10\%$

41.
- Número de estudantes com 18 anos de idade: $600 - 380 = 220$.
- Número de estudantes com 18 anos de idade que estão cursando o Ensino Médio: $220 - 105 = 115$.
- Número de estudantes com 17 anos de idade que já concluíram o Ensino Médio: $380 - 200 = 180$.

Reunindo as informações em uma tabela, obtemos:

Cadastro dos estudantes do cursinho pré-vestibular

Ensino \ Idade	17 anos	18 anos	Total
Cursando o Ensino Médio	200	115	**315**
Já concluíram o Ensino Médio	180	105	**285**
Total	**380**	**220**	**600**

Dados elaborados para fins didáticos.

a) $p = \frac{180}{285} = \frac{12}{19}$

b) $p = \frac{115}{220} = \frac{23}{44}$

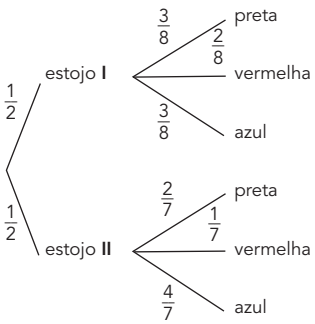
43. Como temos independência entre os eventos, escrevemos:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{2}$: probabilidade de ocorrer coroa

$\frac{3}{6}$: probabilidade de ocorrer um número primo: 2, 3 e 5 são primos.

44.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$p = p$(estojo **I** e caneta azul) + p(estojo **II** e caneta azul) =

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{53}{112}$

46. **a)** A probabilidade de sair o número 1 no dado tetraédrico é $\frac{1}{4}$; no dado cúbico é $\frac{1}{6}$; assim, a probabilidade pedida é $p = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$.

b) A probabilidade de sair um número primo no dado tetraédrico é $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; no dado cúbico é $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; assim, a probabilidade pedida é $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

c) Podemos fazer a seguinte tabela para representar as possibilidades de resultados; note que, pelo princípio multiplicativo, há 24 resultados possíveis (pois $6 \cdot 4 = 24$).

Dado tetraédrico \ Dado cúbico	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)

Há 10 casos favoráveis e a probabilidade pedida é $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

47. **a)** $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$

b) Podemos ter:

- 2 palmitos e 1 queijo:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \underbrace{3}_{\text{ordens}} = \frac{3}{40}$$

- 2 palmitos e 1 carne:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \underbrace{3}_{\text{ordens}} = \frac{1}{10}$$

A probabilidade pedida é, portanto:

$$\frac{3}{40} + \frac{1}{10} = \frac{7}{40}$$

c) A probabilidade de sair um de palmito, um de carne e um de queijo, nessa ordem, é:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{20}$$

Em outra ordem, digamos queijo, palmito e carne, a probabilidade é a mesma:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{20}$$

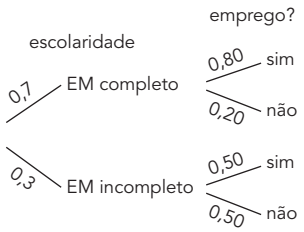
Como há 6 ordens distintas ($P_3 = 3! = 6$) para retirada de um pastel de cada sabor, a probabilidade pedida é $p = 6 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}30$.

50. **a)** **Situação de ensino e emprego dos jovens da cidade**

Emprego / Ensino Médio	Empregado	Desempregado	Total
Ensino Médio completo	1120	280	**1400**
Ensino Médio incompleto	300	300	**600**
Total	**1420**	**580**	**2000**

Dados elaborados para fins didáticos.

b)



Banco de imagens/Arquivo da editora

c) Usando a tabela com universo de 2000 pessoas, temos que a probabilidade pedida é $p = \frac{1420}{2000} = 0{,}71$; ou seja, 71%.

Usando o diagrama da árvore, a probabilidade pedida é:

$0{,}70 \cdot 0{,}80 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}56 + 0{,}15 = 0{,}71$; ou seja, 71%.

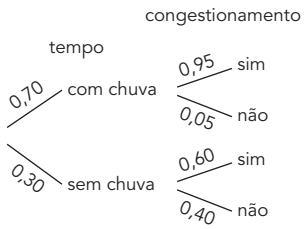
d) Usando a tabela, temos que 1420 jovens estão empregados (esse é o número de elementos do espaço amostral reduzido). Dentre eles, 1120 concluíram o Ensino Médio. Assim, a probabilidade pedida é: $p = \frac{1120}{1420} \simeq 0{,}79$.

Usando o diagrama da árvore, temos que a probabilidade de que o jovem esteja empregado é: $0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}56 + 0{,}15 = 0{,}71$; assim, a probabilidade de ele ter o Ensino Médio completo é: $p = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}8}{0{,}71} \simeq 0{,}79$.

Note que o cálculo anterior se refere à seguinte probabilidade condicional:

$$p(\text{EM completo} \mid \text{tem emprego}) = \frac{p(\text{EM completo e ter emprego})}{p(\text{ter emprego})}$$

51. **a)**



Banco de imagens/Arquivo da editora

b) $0{,}70 \cdot 0{,}95 = 0{,}665 = 66{,}5\%$

c) $\underbrace{0{,}70 \cdot 0{,}95}_{\substack{\text{probabilidade de chover e ocorrer congestionamento}}} + \underbrace{0{,}30 \cdot 0{,}60}_{\substack{\text{probabilidade de não chover e ocorrer congestionamento}}} = 0{,}665 + 0{,}18 = 0{,}845$; ou seja, 84,5%.

Para fundamentar saberes

1. Em um determinado andar, há 6 apartamentos que recebem sol pela manhã, em ao menos um quarto: são os apartamentos de final 1, 2, 3, 4, 5 e 6. O número de maneiras de selecionar 2 desses 6 quartos é $C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2}$ $\left(\text{ou } \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!}\right)$.

Como a pessoa pode comprar em qualquer andar, o número de maneiras de realizar a compra será $9 \cdot \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!}$.

Alternativa **b**.

2. **b)** $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$; $\frac{16}{81} < \frac{4}{9}$

Note que, ao multiplicarmos $\frac{4}{9}$ por um número entre 0 e 1 $\left(\text{que é o próprio } \frac{4}{9}\right)$, o produto é o menor do que $\frac{4}{9}$.

c) $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{64}{729} < \frac{16}{81}$

Note que, ao multiplicarmos $\frac{16}{81}$ por um número entre 0 e 1 $\left(\text{que é } \frac{4}{9}\right)$, o produto é menor do que $\frac{16}{81}$.

d) Devemos determinar n para o qual:

$\left(\frac{4}{9}\right)^n < 0{,}01$

$n = 3 \rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^3 \simeq 0{,}088$

$n = 4 \rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^4 \simeq 0{,}0390$

$n = 5 \rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^5 \simeq 0{,}017$

$n = 6 \rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^6 \simeq 0{,}0077$; que é menor do que 0,01.

Assim, são necessárias no mínimo 6 extrações.

3. Para que isso ocorra, Flávia não pode vencer a 1ª rodada, Gisele não pode vencer a 2ª rodada, e Flávia deve vencer a 3ª rodada. Em cada rodada, a probabilidade de que a soma dos pontos seja igual a 9 é $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, pois são favoráveis os pares (3, 6); (4, 5); (5, 4) e (6, 3). Logo, a probabilidade de que a soma não seja 9 é igual a $\frac{8}{9}$.

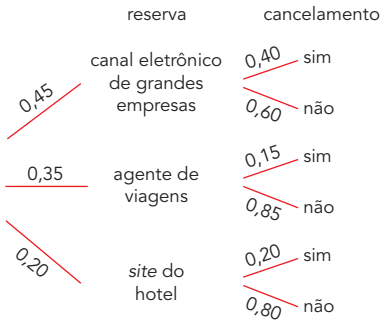
Assim, a probabilidade de que isso ocorra é: $P = \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{9} \simeq 0{,}08779$.

4. $P_I + P_{II} + P_{III} = 1$

$P_I + 3P_I + 6P_I = 1 \Rightarrow P_I = \frac{1}{10}$

Em dois lançamentos, a probabilidade é: $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$; ou seja, 1%.

5. **a)**



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b) $p = 0{,}45 \cdot 0{,}60 + 0{,}35 \cdot 0{,}85 + 0{,}20 \cdot 0{,}80 =$
$= 0{,}27 + 0{,}2975 + 0{,}16 = 0{,}7275$; ou seja, 72,75%.

6. Seja n o número de bolas brancas retiradas. Então:
$\frac{20-n}{50-n} = \frac{1}{6} \Rightarrow n = 14$.
Alternativa **c**.

7. Vamos analisar dois jogadores: **A** e **B**.
Como a partida **A** × **B** é igual à partida **B** × **A**, a ordem em que escolhemos os jogadores em cada partida não importa.
Temos 8 jogadores e devemos escolher duplas para as partidas. Logo, teremos: $C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$.
Alternativa **e**.

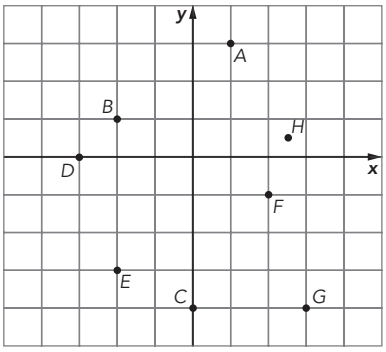
8. Total de escolhas de 3 pontos quaisquer:
$C_{12,3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = 220$.
Desse número, devemos descontar as escolhas de 3 pontos colineares: $2 \cdot C_{4,3} = 2 \cdot 4 = 8$ (note no esquema dado que, em duas das retas dadas, há 4 pontos colineares em cada). O resultado é, portanto, $220 - 8 = 212$.
Alternativa **d**.

Unidade 5

Capítulo 9

Atividades

1.

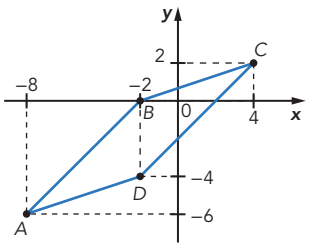


13. $d_{MN} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
Seja $P(x, y)$ o ponto procurado.
$d_{PM} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 8$ *
$d_{PN} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = y$ **
Substituindo-se ** em *, temos:
$(x-2)^2 + x^2 = 8 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$
Se $x = 1 + \sqrt{3}$, por **, obtemos:
$y = 1 + \sqrt{3}$; ou seja, $P(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$.
Se $x = 1 - \sqrt{3}$, por **, obtemos:
$y = 1 - \sqrt{3}$; ou seja, $P(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$.

15.
$$\left.\begin{array}{l} \frac{n+4}{2} = 2 \Rightarrow n + 4 = 4 \Rightarrow n = 0 \\ \frac{5+m}{2} = 3 \Rightarrow 5 + m = 6 \Rightarrow m = 1 \end{array}\right\} m + n = 1$$

17. Seja $Q(a, b)$ o ponto procurado; O é o ponto médio de $\overline{PQ}$, sendo O o centro da circunferência:
$$\begin{cases} 4 = \frac{7+a}{2} \Rightarrow a = 1 \\ 2 = \frac{-3+b}{2} \Rightarrow b = 7 \end{cases}$$
Então: $Q(1, 7)$.

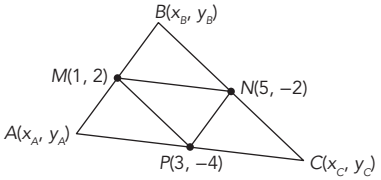
18.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$AD = \sqrt{(-8+2)^2 + (-4+6)^2} = \sqrt{40}$
$BC = \sqrt{(-2-4)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{40}$
$AB = \sqrt{(-8+2)^2 + (-6-0)^2} = \sqrt{72}$
$CD = \sqrt{(-2-4)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{72}$
Note que $AD = BC$ e $AB = CD$.
Recordando: "Todo quadrilátero cujos lados opostos têm medidas iguais é um paralelogramo".

19.



Temos:
$$M\begin{cases} 1 = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_A + x_B = 2 & 1 \\ 2 = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_A + y_B = 4 & 2 \end{cases}$$
$$N\begin{cases} 5 = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_B + x_C = 10 & 3 \\ -2 = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_B + y_C = -4 & 4 \end{cases}$$
$$P\begin{cases} 3 = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_A + x_C = 6 & 5 \\ -4 = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_A + y_C = -8 & 6 \end{cases}$$

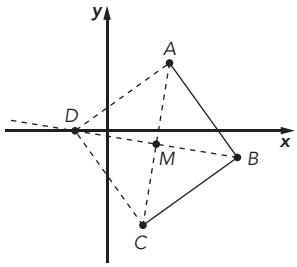
1 e 3: $x_B = 2 - x_A = 10 - x_C \Rightarrow -x_A + x_C = 8$.

Em 5: $\begin{cases} x_A + x_C = 6 \\ -x_A + x_C = 8 \end{cases} \Rightarrow x_C = 7,\ x_A = -1$ e $x_B = 3$.

Analogamente, obtêm-se: $y_A = 0$, $y_B = 4$ e $y_C = -8$.

Assim, $A(-1, 0)$, $B(3, 4)$ e $C(7, -8)$.

20. **a)** $A(2, 3)$, $B(5, -1)$ e $C(1, -4)$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

M é o ponto médio de $\overline{AC}$:

$M\left(\frac{2+1}{2}, \frac{3-4}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

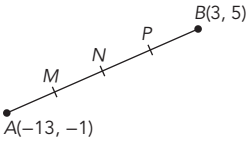
Sendo D o quarto vértice, M é também ponto médio de $\overline{BD}$:

$\frac{3}{2} = \frac{5 + x_D}{2}$ e $-\frac{1}{2} = \frac{-1 + y_D}{2}$

Assim, $x_D = -2$, $y_D = 0$ e $D(-2, 0)$.

b) $d_{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25} = 5$

21.



N é o ponto médio de $\overline{AB}$:

$x_N = \frac{-13+3}{2} = -5$; $y_N = \frac{-1+5}{2} = 2$; ou seja, $N(-5, 2)$.

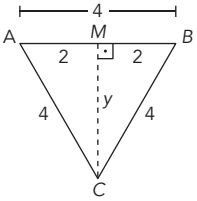
M é o ponto médio de $\overline{AN}$:

$x_M = \frac{-13 + (-5)}{2} = -9$; $y_M = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$; ou seja, $M\left(-9, \frac{1}{2}\right)$.

P é o ponto médio de $\overline{BN}$:

$x_P = \frac{-5+3}{2} = -1$; $y_P = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$; ou seja, $P\left(-1, \frac{7}{2}\right)$.

22.



a) $4^2 = 2^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 12 \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$

Como M é o ponto médio $\overline{AB}$, temos $M(2, 0)$. Daí $C\left(2, -2\sqrt{3}\right)$.

b) $A_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot CM}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3}$; ou seja, $4\sqrt{3}$ cm².

23. **a)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & -\frac{7}{3} & 1 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{14}{3} + 3 + \frac{7}{3} + \frac{21}{3} - \frac{2}{3} - 7 = 0$;

ou seja, os pontos estão alinhados.

b) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 8 - 16 = -16 \neq 0$; ou seja, os pontos não estão alinhados.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 35 - 3 + 14 - 1 + 15 = -8 \neq 0$; ou seja, os pontos não estão alinhados.

d) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5 \neq 0$; ou seja, os pontos não estão alinhados.

25. Seja $R(x, y)$ um ponto qualquer alinhado com P e Q:

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -9 + 5x - y + 3x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - y - 1 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall y \in \mathbb{R}$.

Basta escolher, arbitrariamente, um valor de x (ou de y):

$x = 0 \Rightarrow y = -1$; ou seja, o ponto é $(0, -1)$;

$x = 1 \Rightarrow y = 1$; ou seja, o ponto é $(1, 1)$;

$x = -1 \Rightarrow y = -3$; ou seja, o ponto é $(-1, -3)$;

$x = 2 \Rightarrow y = 3$, ou seja, o ponto é $(2, 3)$; etc.

27. $\begin{cases} A(2, 1) \\ B(4, 5) \\ P(x, y) \text{ é ponto de } \overline{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x + 2y + 6 = 0$

Ou, ainda, $-2x + y + 3 = 0$ 1

$\begin{cases} C(5, 3) \\ D(3, 4) \\ P(x, y) \text{ é ponto de } \overline{CD} \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x - 2y + 11 = 0$ 2

O ponto comum aos segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é dado pela solução do sistema formado por 1 e 2:

$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 + 2x \\ -x - 2y + 11 = 0 \end{cases}$

Substituindo na segunda equação:

$-x - 2 \cdot (-3 + 2x) + 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{17}{5}$

$y = -3 + 2 \cdot \frac{17}{5} \Rightarrow y = \frac{19}{5}$

Assim, o ponto comum é o ponto de coordenadas $\left(\frac{17}{5}, \frac{19}{5}\right)$.

28. **a)** $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 4 - 3x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x + 2y - 4 = 0$ ou $x - 2y + 4 = 0$

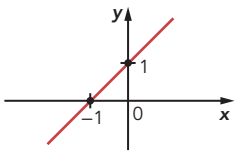
b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5 + 2x - 2y - 5x + y + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x - y - 1 = 0$ ou $3x + y + 1 = 0$

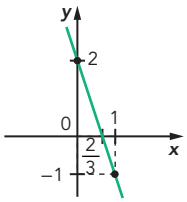
c) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3 - 2x - \frac{1}{2}y - 3x + y - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5x + \frac{1}{2}y - 4 = 0$ ou $10x - y + 8 = 0$

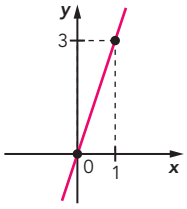
29. **a)**



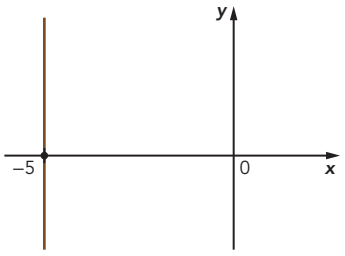
b)



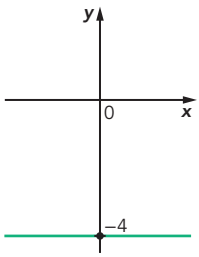
c)



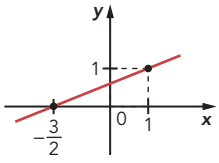
d)



e)



f)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

36.

Medida de tempo x (em h)	Medida da altura h (em cm)
0	8
2	4,8

a) $y = ax + b$

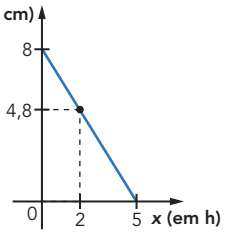
$\begin{cases} 8 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 8 \\ 4{,}8 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Rightarrow 2a = -3{,}2 \Rightarrow a = -1{,}6$

$h = -1{,}6x + 8$

b) $h = 0 \Rightarrow 1{,}6x = 8 \Rightarrow x = 5$; ou seja, 5 horas.

Assim, a vela foi inteiramente consumida às 22 h.

c)



Banco de imagens/ Arquivo da editora

d) De $y = -1{,}6x + 8$, temos: $1{,}6x + y - 8 = 0$, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

37. O sistema formado pelas equações $\begin{cases} px - y + 3p = 0 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases}$ deve ter infinitas soluções, isto é, deve ser possível e indeterminado. Isso significa que as retas devam ser coincidentes.

Os coeficientes de suas equações devem ser ordenadamente iguais (ou proporcionais), temos: $p = 2$ e $3p = 6 \Rightarrow p = 2$.

39. **a)** $m = \frac{5-2}{2-1} = 3 \Rightarrow y = 3x + n$

Usando (1, 2), temos:

$2 = 3 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -1$; então, $y = 3x - 1$.

b) $m = \frac{1-2}{-2+1} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow y = x + n \Rightarrow 2 = -1 + n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 3$; então, $y = x + 3$.

c) $m = \frac{-3+2}{2+3} = -\frac{1}{5} \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + n$

$-2 = -\frac{1}{5} \cdot (-3) + n \Rightarrow -2 = \frac{3}{5} + n \Rightarrow n = -\frac{13}{5}$;

então, $y = -\frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$.

40. **a)** $2y = x + 6 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

c) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{-5+3} = \frac{4}{-2} = -2$

d) Como a reta r é vertical (sua equação é $x = 1$), não se define o seu coeficiente angular.

e) $m = \frac{5-5}{3+2} = 0$

42. **a)** r passa por $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ e $(0, 5)$, assim:

$y = mx + 5 \Rightarrow 0 = m \cdot \frac{5}{2} + 5 \Rightarrow m = -2$

$\therefore r: y = -2x + 5$.

Se $x = 2$, então $y = 1$. Assim, s passa por (0, 0) e (2, 1); seu coeficiente angular é $m = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$.

b) Como s passa por $(0, 0)$, temos: $n_s = 0 \Rightarrow s: y = \frac{1}{2}x$ (reduzida) ou $s: x - 2y = 0$ (geral).

43. Note que os ângulos dos triângulos medem 60°; o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é $m = \tan 60° = \sqrt{3}$; o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $m = \tan 120° = -\sqrt{3}$.

$\overleftrightarrow{BC}$:

$\begin{cases} m = \sqrt{3} \\ C(3, 0) \end{cases} \Rightarrow y - 0 = \sqrt{3} \cdot (x - 3) \Rightarrow y = x\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

$\overleftrightarrow{AB}$:

$\begin{cases} m = -\sqrt{3} \\ A(0, 0) \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -\sqrt{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -x\sqrt{3}$

$\overleftrightarrow{AC}$ coincide com o eixo x, então $y = 0$.

44. **a)** $m = \tan 45° = 1$

$y + 1 = 1 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = x - 4$

b) $m = \tan 135° = -1$

$y + 2 = -1 \cdot (x + 3) \Rightarrow y = -x - 5$

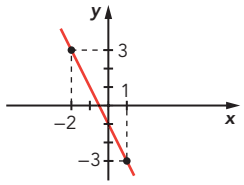
c) $m = \tan 60° = \sqrt{3}$

$y - 3 = \sqrt{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x\sqrt{3} + 3$

d) $m = \tan 0° = 0$

$y + \frac{1}{3} = 0 \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$ ou $y + \frac{1}{3} = 0$

45. **a)**



Banco de imagens/ Arquivo da editora

b) $f(-2) = 3 \Rightarrow x = -2, y = 3$

$f(1) = -3 \Rightarrow x = 1, y = -3$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - (-3)}{-2 - 1} = \frac{6}{-3} = -2$

$y = -2x + n$

$3 = -2 \cdot (-2) + n \Rightarrow n = -1$

c) $y = -2x - 1$

$0 = -2x - 1$

$x = -\frac{1}{2}$ é o zero de f.

48. Plano alfa: $y = 3{,}20 \cdot x$. 1

Plano beta: $y = 1{,}40 \cdot x + d$. 2

y: preço (em reais).

x: número de quilômetros rodados.

a) Em 1: $y = 272 \Rightarrow 272 = 3{,}2 \cdot x \Rightarrow x = 85$.

Em 2: $272 = 1{,}4 \cdot 85 + d \Rightarrow d = 272 - 119 = 153$; ou seja, R$ 153,00.

b) Tomando 1 na forma $f(x) = 3{,}20x$, temos:

$f(x) = 272 \Rightarrow 3{,}20x = 272 \Rightarrow x = 85$

c) Em 1: $3{,}2x - y = 0$; e em 2: $1{,}4x - y + 153 = 0$.

d) Como a declividade é igual ao coeficiente angular da função associada à reta: reta vermelha: 1,4; reta azul: 3,2.

49. **a)** $2y = 8x + 1 \Rightarrow y = 4x + \frac{1}{2}$ e $y = 4x - 1$. Então, são paralelas distintas.

b) $y = 5x + 6$ e $y = -6x + 5$. Então, são concorrentes.

c) $y = -\frac{3x}{2} + 2$; De $6x + 4y - 8 = 0$, segue que $y = -\frac{3}{2}x + 2$. Então, são paralelas coincidentes.

d) $8y = -6x - 4 \Rightarrow y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$. Então, são paralelas distintas.

50. $3x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = -3x + 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; $m = -\frac{3}{2}$.

$kx - 3y + 2 = 0 \Rightarrow kx + 2 = 3y \Rightarrow y = \frac{k}{3} \cdot x + \frac{2}{3}; m = \frac{k}{3}$.

a) $-\frac{3}{2} = \frac{k}{3} \Rightarrow k = -\frac{9}{2}$

b) $k \neq -\frac{9}{2}$

c) Como os coeficientes lineares das retas são distintos $\left(\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3}\right)$, elas não poderão ser coincidentes, ou seja, não existe $k \in \mathbb{R}$.

52. É preciso lembrar que o trapézio tem um par de lados paralelos:

$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{13}{5}}{-\frac{1}{2} + \frac{4}{5}} = 3$; $m_{CD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - \frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = 3$;

$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{13}{5} - 2}{-\frac{4}{5} - 1} = -\frac{1}{3}$; $m_{BD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{5}}{-\frac{1}{2} - \frac{2}{5}} = -\frac{11}{3}$.

Com $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $ABCD$ é trapézio; note que $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são concorrentes, o mesmo ocorrendo com $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ e com $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.

53. $5x - 3y = 15$

Se $x = 0$, então $y = -5$. Se $y = 0$, então $x = 3$. Assim, $A(3, 0)$ e $B(0, -5)$

Como $AO = 3$, temos que $OC = \frac{3}{2}$ e $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$; da mesma maneira, $OB = 5$ e daí $OD = \frac{5}{2}$ e $D\left(0, -\frac{5}{2}\right)$.

Calculando a medida de distância de C a D, temos $d = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

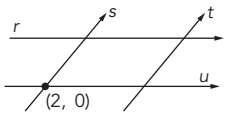
A medida de perímetro do triângulo COD é: $\frac{\sqrt{34}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8 + \sqrt{34}}{2}$.

54. Primeiro, verifica-se se o ponto $(2, 0)$ pertence a alguma das retas dadas e conclui-se que ele pertence à reta s $\left(\text{pois } 0 = \frac{2}{2} - 1\right)$ e não pertence a r nem a t.

Verifica-se, também, que s e t são paralelas, pois $m_s = m_t = \frac{1}{2}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Desse modo, a formação do paralelogramo é a indicada na figura:



$r: 3x + 2y - 12 = 0$; $m_r = -\frac{3}{2}$.

Como r e u são paralelas, temos $m_u = -\frac{3}{2}$.

$u: y = -\frac{3}{2}x + n$; como u passa por $(2, 0)$, vem: $0 = -\frac{3}{2} \cdot 2 + n \Rightarrow n = 3$

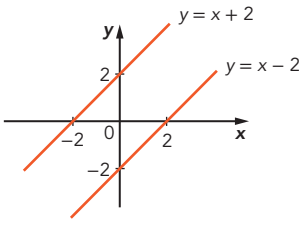
$u: y = -\frac{3}{2}x + 3$ ou $u: 3x + 2y - 6 = 0$.

55. $|x - y| = 2 \Rightarrow x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$ **1**

ou

$x - y = -2 \Rightarrow y = x + 2$ **2**

1 e **2** representam um par de retas paralelas e distintas; então, $m_1 = m_2 = 1$ e $n_1 = -2$ e $n_2 = 2$.



57. **a)** O ponto médio M de $\overline{AB}$ é: $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (1, 3)$.

O coeficiente angular de $\overleftrightarrow{AB}$ é: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-5}{-2-4} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$; assim, o coeficiente angular da reta mediatriz é $-\frac{3}{2}$:

$y = -\frac{3}{2}x + n \xrightarrow{(M)} 3 = -\frac{3}{2} \cdot 1 + n \Rightarrow n = \frac{9}{2}$

$y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \Rightarrow 3x + 2y - 9 = 0$

58. **a)** $m_r = \frac{2}{3}$; seja s a reta perpendicular a r por P:

$\begin{cases} m_s = -\frac{3}{2} \\ (2, -4) \in s \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + n$

Usando P, vem: $-4 = -\frac{3}{2} \cdot 2 + n$.

$n = -1$ e $s: y = -\frac{3}{2}x - 1$, isto é, $3x + 2y + 2 = 0$.

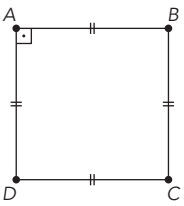
$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ 3x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{18}{13}$ e $y = \frac{14}{13}$

O ponto é $Q\left(-\frac{18}{13}, \frac{14}{13}\right)$.

b) Devemos determinar P', simétrico de P com relação a Q, isto é, Q é o ponto médio de $\overline{PP'}$:

$\begin{cases} -\frac{18}{13} = \frac{2 + x_{P'}}{2} \Rightarrow x_{P'} = -\frac{62}{13} \\ \frac{14}{13} = \frac{-4 + y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = \frac{80}{13} \end{cases} \Rightarrow P'\left(-\frac{62}{13}, \frac{80}{13}\right)$

59.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$

$\overleftrightarrow{AD}: \begin{cases} m = -\frac{2}{3} \\ A(1, 2) \text{ é um ponto: } y - 2 = -\frac{2}{3} \cdot (x - 1) \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

- $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{BC}} = -\frac{2}{3}$

Como $B \in \overleftrightarrow{BC}$, temos: $y - 5 = -\frac{2}{3} \cdot (x - 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{2x}{3} + 7$

60. $m_r = 2$; $m_s = m$.

$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow 2 \cdot m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

$(-2, -1) \in s$:

$-1 = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + n \Rightarrow n = -2$

62. **a)** $d_{OP} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \simeq 5{,}8$. A medida de distância real é aproximadamente $(5{,}8 \text{ m}) \cdot 20 = 116 \text{ m}$.

Verdadeira.

b) $m_{OP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{5-0} = \frac{3}{5}$

Seja C o ponto que representa o café. Temos:

$\overleftrightarrow{CP}: \begin{cases} m = -\frac{5}{3} \left(\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{CP}\right) \\ P(5, 3) \end{cases}$

$y - 3 = -\frac{5}{3} \cdot (x - 5) \Rightarrow y = -\frac{5x}{3} + \frac{34}{3}$

Como C tem ordenada nula, temos:

$0 = -\frac{5x}{3} + \frac{34}{3} \Rightarrow x = \frac{34}{5}$ e $C\left(\frac{34}{5}, 0\right)$

Verdadeira.

c) $d_{OP} = \sqrt{34} \simeq 5{,}8$; ou seja, aproximadamente 5,8 m e a medida de distância real é aproximadamente 116 m.

$\begin{matrix} 1 \text{ h} & \text{——} & 2\,000 \text{ m} \\ x & \text{——} & 16 \text{ m} \end{matrix} \Rightarrow x = 0{,}058 \text{ h} = 0{,}058 \cdot 60 \text{ min} =$

$= 3{,}48 \text{ min}$

Assim, ela chega depois das 18 h 03 min.

Falsa.

d) $\begin{cases} P(5, 3) \\ C\left(\frac{34}{5}, 0\right) \end{cases} \Rightarrow d_{PC} = \sqrt{\left(5 - \frac{34}{5}\right)^2 + 3^2} \simeq 3{,}48$

A medida de distância real entre P e C é aproximadamente 69,6 m $(20 \cdot 3{,}48 = 69{,}6)$.

A medida de distância real entre O e P é aproximadamente 116 m (item **c**). A medida de perímetro do retângulo é aproximadamente $2 \cdot (69{,}6 \text{ m} + 116 \text{ m}) = 371{,}2 \text{ m}$.

$1\text{ h} \text{ —— } 5\,000\text{ m}$
$x \text{ —— } 371{,}2\text{ m}$
$\Rightarrow x = 0{,}07424\text{ h} = 0{,}07424 \cdot 60\text{ min} = 4{,}45\text{ min}$

Falsa.

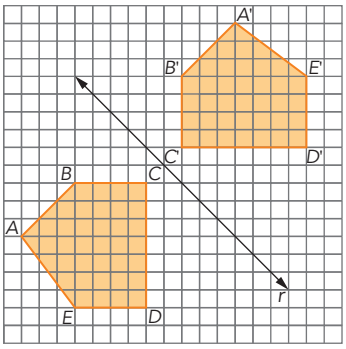
Interligando

1. Situações de salvamento cuja principal dificuldade seja determinar a localização do indivíduo, como resgates por helicóptero em matas, enchentes, desastres ambientais, sequestros e desaparecimentos.

Capítulo 10

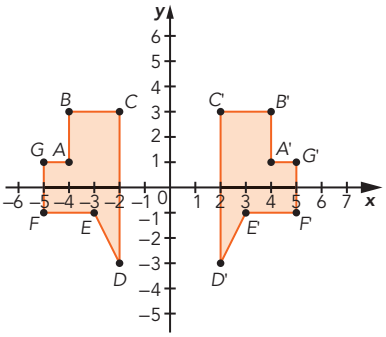
Atividades

1.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. **a)**



c) Calculamos a medida do segmento de reta $\overline{ED}$ por meio do teorema de Pitágoras:

$(ED)^2 = 1^2 + 2^2 \Rightarrow ED = \sqrt{5}$

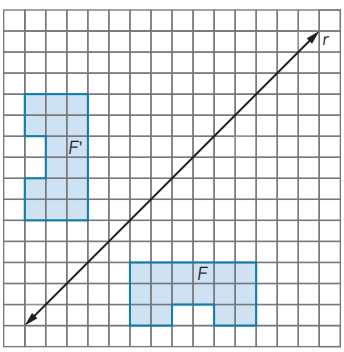
Assim, o perímetro de R mede: $2 + 2 + 6 + \sqrt{5} + 2 + 2 + 1 = 15 + \sqrt{5}$.

A medida de perímetro de R' é igual à de R; portanto, ambas medem $15 + \sqrt{5}$ u.c. Para o cálculo da medida de área, adicionamos as medidas de área da região limitada por um quadrado de lado medindo 2 u.c., da região limitada por um retângulo de base medindo 3 u.c. e altura medindo 2 u.c. e da região limitada por um triângulo de base medindo 1 u.c. e altura medindo 2 u.c. Temos, portanto, a medida de área da região limitada por R, que é igual à da região limitada por R':

$2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 4 + 6 + 1 = 11$

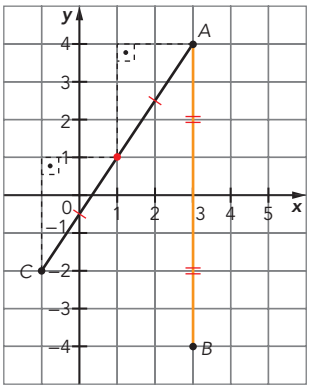
Ambas as áreas medem 11 u.a.

3.



5. **a)** O ponto simétrico de A em relação ao eixo x tem a mesma abscissa de A e ordenada oposta: $B(3, -4)$. Note que a medida de distância entre A e o eixo x é igual à medida de distância entre B e o eixo x.

O ponto simétrico de A em relação as coordenadas (1, 1) é um ponto do plano tal que (1, 1) é o ponto médio do segmento de reta com extremidades nele e no ponto A. Analisando a figura, verificamos que é $C(-1, -2)$. Note que, pelo critério LAL, os triângulos representados, com vértices em A e em C, são congruentes e, consequentemente, as hipotenusas têm as mesmas medidas.

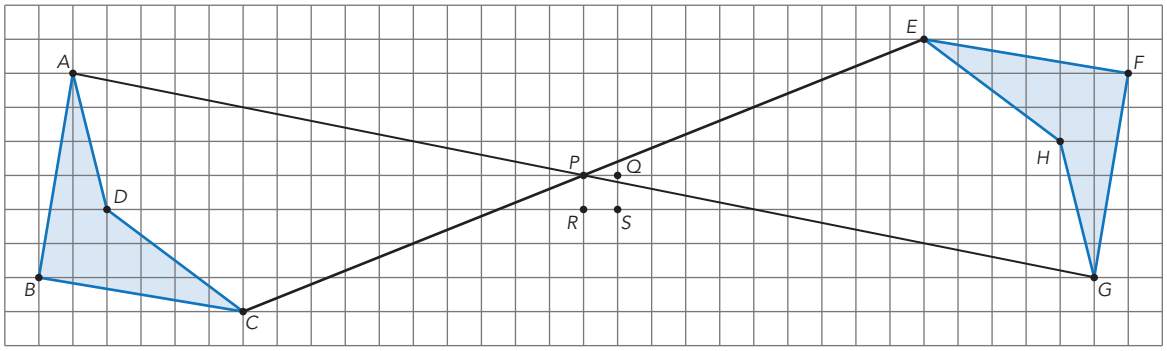


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Analisando a figura do item anterior, a medida de distância entre as casas de Ana e Bruna corresponde a 8 unidades do plano, ou seja, 8 km.

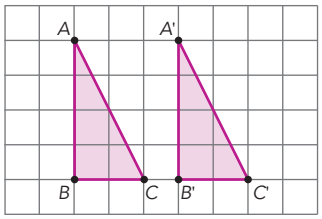
c) Analisando a figura do item **a**, BC é hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos que medem 2 km e 4 km. Logo, $BC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; ou seja, $2\sqrt{5}$ km.

6. Como as regiões limitadas pelos quadriláteros são simétricas em relação a um ponto, este deve ser o ponto médio dos vértices correspondentes.

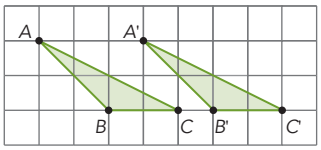


Assim, por exemplo, na representação dos segmentos de reta $\overline{AG}$ e $\overline{CE}$, eles se intersectam no ponto P. Logo, P é o ponto onde a luminária mais simples deve ser instalada.

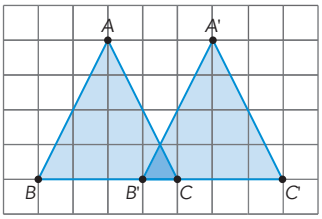
7. **a)**



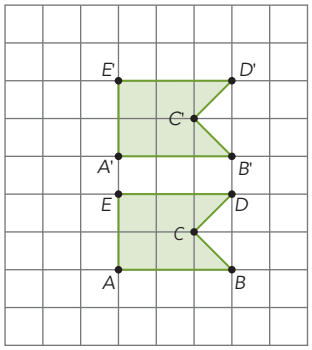
b)



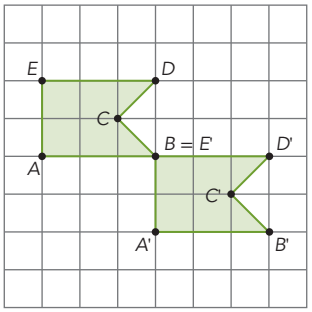
c)



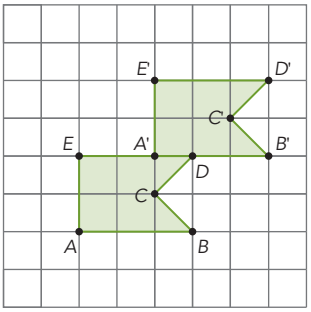
8. **a)**



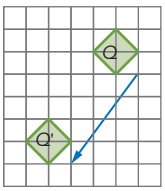
b)



c)

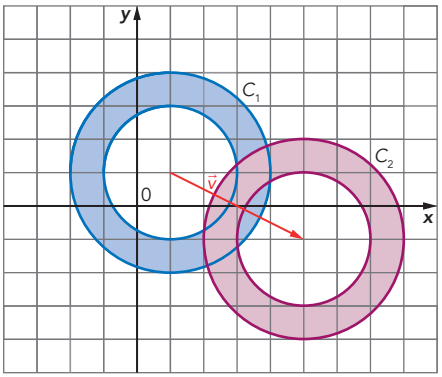


9.

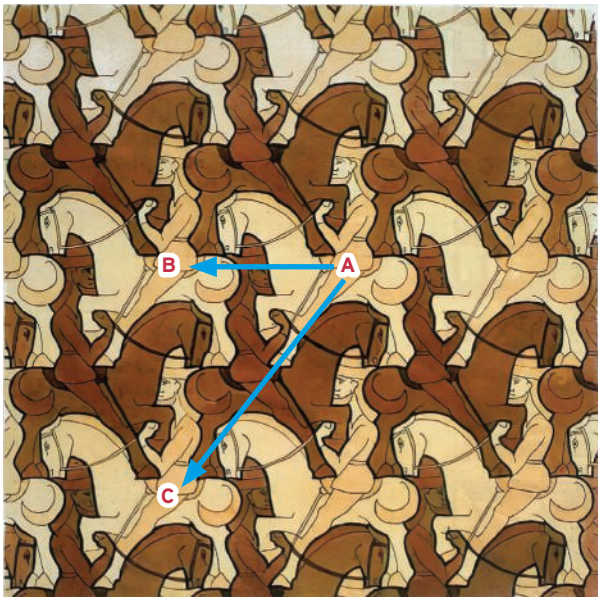


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

10.



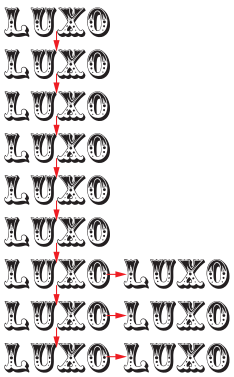
11. A imagem mostra as direções dos vetores.



M.C. Escher's "Relatividade" © 2024 The M.C. Escher Company - The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com

Alternativa **a**.

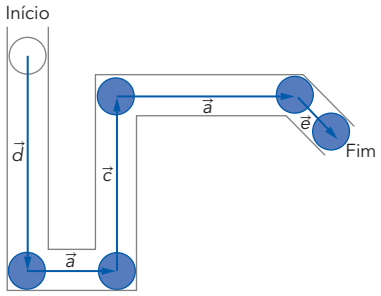
12. A imagem mostra, por exemplo, como podemos compor a letra **L** da palavra LIXO por meio de translações do termo LUXO, segundo vetores verticais e horizontais.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Alternativa **b**.

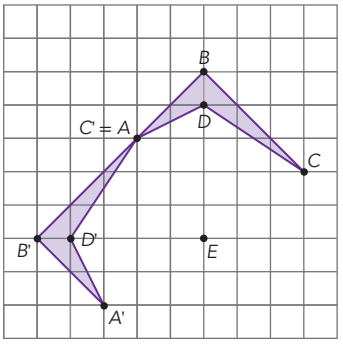
13. A imagem mostra as direções e os sentidos dos vetores.



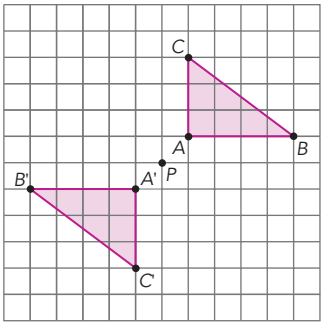
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Alternativa **c**.

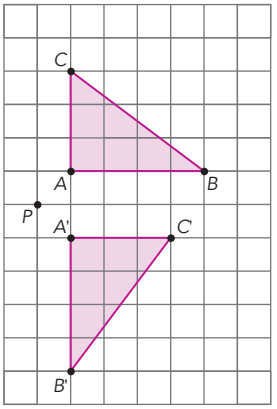
15.



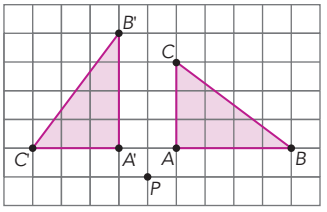
16. **a)** e **b)** A rotação de 180° com centro em *P* resulta na mesma região triangular *A'B'C'*, nos sentidos horário e anti-horário.



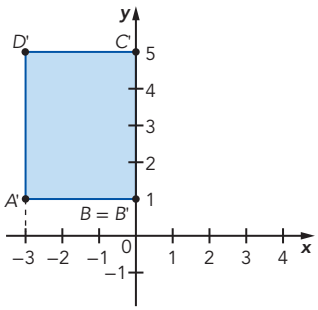
18. **a)**



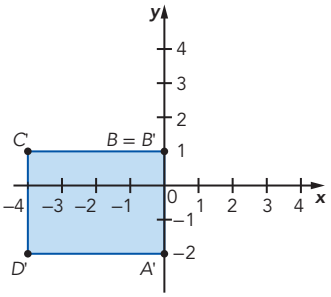
b)



19. a)

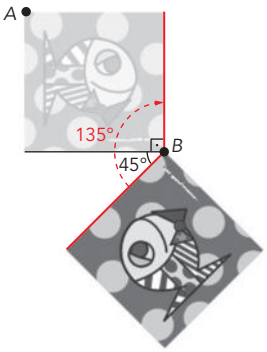


b)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

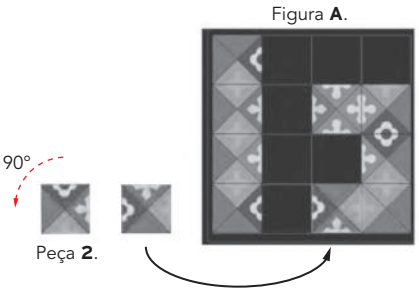
20. Rotacionando 45° + 90° = 135° no sentido horário, conforme a imagem, a tela retorna à posição original.



Reprodução/Enem, 2017

Alternativa **b**.

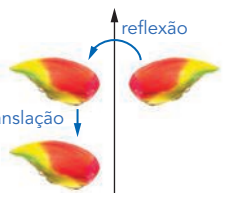
21. É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta da figura **A** utilizando a peça 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.



Reprodução/Enem, 2009.

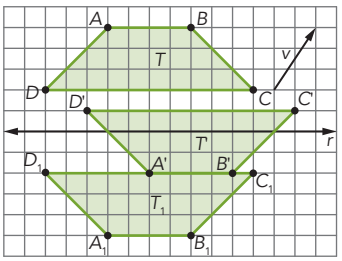
Alternativa **c**.

22. Exemplo de resposta: Reflexão deslizante, ou seja, uma reflexão em torno do eixo vertical seguida de uma translação para baixo.

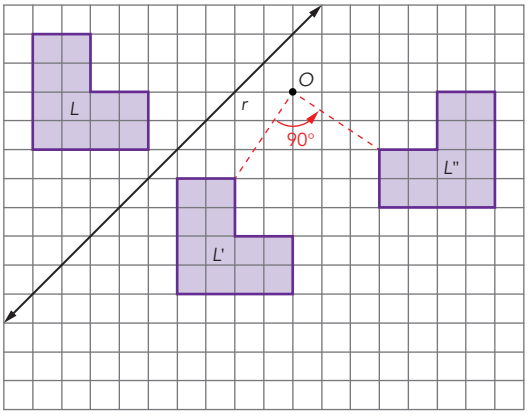


Erlantz/Adobe Stock

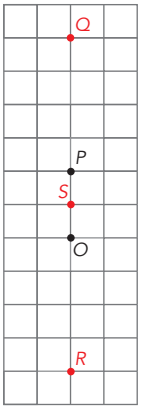
23.



24.

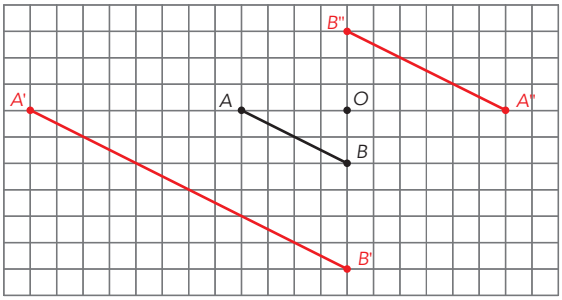


25.



Note que: como a razão de H_1 é 3 (temos $r > 0$), Q está na semirreta $\overrightarrow{OP}$ e $|\overline{OQ}| = 3 \cdot |\overline{OP}|$; como a razão de H_2 é -2 (temos $r < 0$), R está na semirreta $\overrightarrow{PO}$ e $|\overline{OR}| = 2 \cdot |\overline{OP}|$; como a razão de H_3 é $\frac{1}{2}$ (temos $r > 0$), S está na semirreta $\overrightarrow{OP}$ e $|\overline{OS}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{OP}|$.

26.

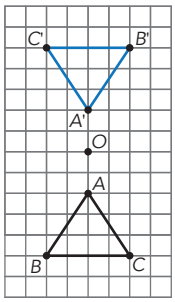


Note que: como a razão é 3 (temos $r > 0$), A' está na semirreta $\overrightarrow{OA}$ e $|\overline{OA'}| = 3 \cdot |\overline{OA}|$; como a razão é $-1{,}5$ (temos $r < 0$), A'' está na semirreta $\overrightarrow{AO}$ e $|\overline{OA''}| = 1{,}5 \cdot |\overline{OA}|$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

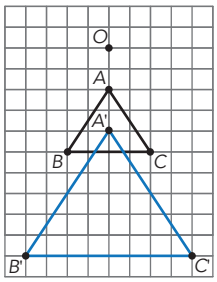
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

27. **a)**



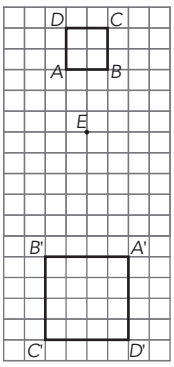
Note que, como a razão é -1 (temos $r < 0$), A' está na semirreta $\overrightarrow{AO}$ e $|\overline{OA'}| = 1 \cdot |\overline{OA}| = |\overline{OA}|$.

b)



Note que, como a razão é 2 (temos $r > 0$), A' está na semirreta $\overrightarrow{OA}$ e $|\overline{OA'}| = 2 \cdot |\overline{OA}|$.

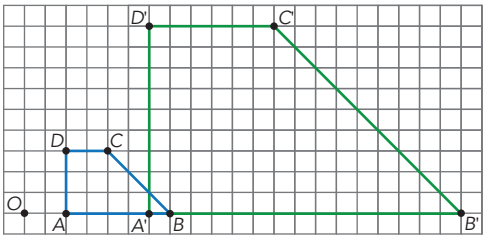
28.



Note que, como a razão é -2 (temos $r < 0$), A' está na semirreta $\overrightarrow{AE}$ e $|\overline{EA'}| = 2 \cdot |\overline{EA}|$.

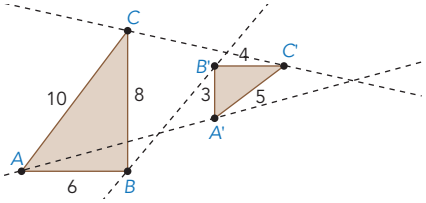
30. É esperado que a homotetia seja similar à da atividade **28**.

31.



Note que, como a razão é 3 ($r > 0$), A' está na semirreta $\overrightarrow{OA}$ e $|\overline{OA'}| = 3 \cdot |\overline{OA}|$.

34. Exemplo de resposta:



Considerando o critério LLL, os triângulos são semelhantes. Contudo, as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ não se intersectam num único ponto. Logo, não há centro da homotetia.

Interligando

a) Como a região triangular $OA'B'$ foi dividida em quatro regiões delimitadas por triângulos equiláteros congruentes entre si, $|\overline{OA'}| = 2 \cdot |\overline{OA}|$. Logo, a razão de semelhança é $\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{2 \cdot |OA|}{|OA|} = 2$.

b) Sim. O centro da homotetia é O, pois é o ponto de intersecção entre as retas $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$. Como $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ têm mesmo sentido e direção e $|\overline{OA}| < |\overline{OA'}|$, a razão é $r > 1$ e, além disso, numericamente igual à razão de semelhança. Logo, $r = 2$.

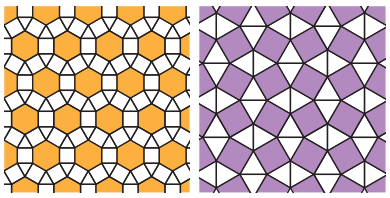
c) Sim. Sendo ℓ a medida do lado do triângulo equilátero maior (antes das remoções das regiões triangulares), por meio da construção, $AB = \frac{\ell}{4}$ e $A'B' = \frac{\ell}{2}$. Logo, a razão de semelhança é $\frac{A'B'}{AB} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell}{4}} = 2$.

d) Sim. O centro da homotetia é o ponto O, que é a intersecção entre as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$. Como $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ têm mesmo sentido e direção e $|\overline{OA}| < |\overline{OA'}|$, a razão é $r > 1$ e, além disso, numericamente igual à razão de semelhança. Logo, $r = 2$.

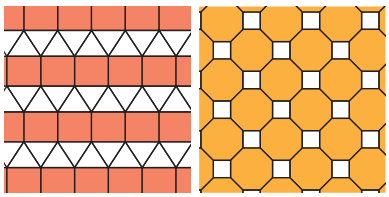
Capítulo 11

Atividades

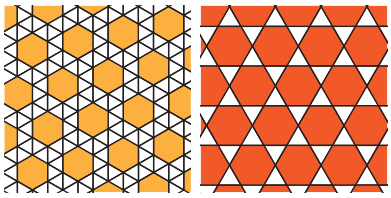
1. **a)**



(3, 4, 6, 4) (3, 4, 3, 3, 4)



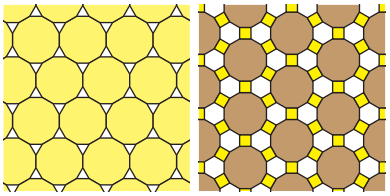
(3, 3, 3, 4, 4) (4, 8, 8)



(3, 3, 3, 3, 6) (3, 6, 3, 6)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



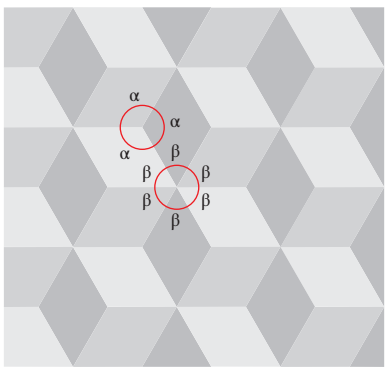
(3, 12, 3, 12) (4, 6, 12)

d) É muito provável que a montagem com os polígonos de papel pareça constituir um ladrilhamento semirregular. Isso se deve pela falta de precisão da cópia ou do recorte do polígono. Note que a soma das medidas dos ângulos em torno de cada vértice de encontro dos polígonos é $108° + 120° + 135° = 363°$, que é maior do que 360°. Logo, haverá sobreposição de polígonos.

e) A medida de um ângulo interno de um heptágono regular é $\frac{(7-2)\cdot 180°}{7} \simeq \frac{900°}{7}$.

A soma das medidas dos ângulos em torno de cada vértice de encontro dos polígonos é $108° + 120° + \frac{900°}{7} \simeq 356°$, que é menor do que 360°. Logo, haverá "espaço" vazio entre dois polígonos.

4. Sejam α e β as medidas dos ângulos internos do losango.



$3\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 120°$

$6\beta = 360° \Rightarrow \beta = 60°$

Portanto, os ângulos internos do losango medem 60° e 120°.

Para fundamentar saberes

1. A trajetória de B é representada por uma reta que passa por (0, 0) e (6, 12) e com coeficiente angular $m = \frac{12-0}{6-0} = 2$. A altura máxima atingida pela trajetória de A está representada pelo ponto (4, 16). A nova trajetória de B é uma reta que deve passar por (0, 0) e (4, 16), portanto seu coeficiente angular deve ser $m = \frac{16-0}{4-0} = 4$. Assim, o coeficiente angular deve aumentar em 2 unidades.

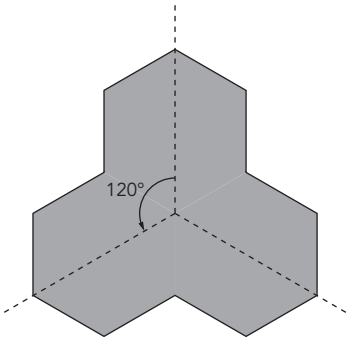
Alternativa **c**.

2. Como a reta dada passa por (100, 0) e (0, 150), seu coeficiente angular é $m = \frac{150-0}{0-100} = -1{,}5$. Portanto, sua equação é: $y = -1{,}5x + n$. Sendo $n = 150$ (ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo y), tem-se: $y = -1{,}5x + 150$. Logo: $D = -\frac{3}{2}C + 150$.

$2D = -3C + 300 \Rightarrow 2D + 3C = 300$

Alternativa **d**.

3. $360 : 3 = 120°$



Banco de imagens/Arquivo da editora

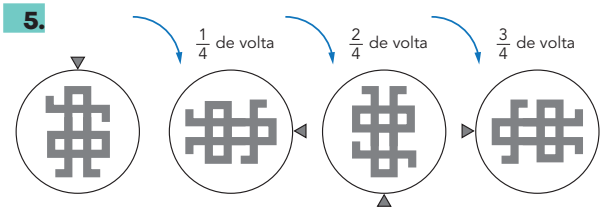
Alternativa **d**.

4. Medida de área do hexágono: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 192\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 128$.

Logo, a medida de área do quadrado será 128 cm².

Alternativa **c**.

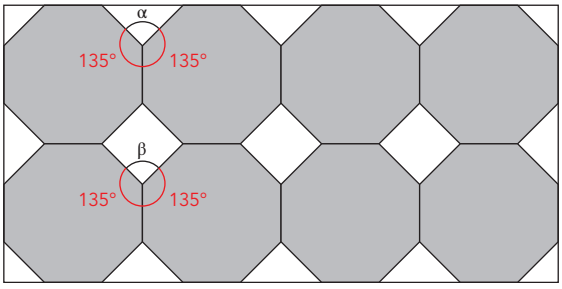
5.



Reprodução/Fatec, 2017.

Alternativa **e**.

6.



Reprodução/Enem, 2020.

O ângulo interno do octógono regular mede $\frac{(8-2)\cdot 180°}{8} = 135°$. Assim, o ângulo interno do triângulo mede $\alpha = 360° - 135° - 135° = 90°$. Logo, o triângulo deve ser retângulo e isósceles, já que seus catetos têm a mesma medida. De modo análogo, concluímos que $\beta = 90°$. Logo, o quadrilátero é um quadrado, já que seus lados têm a mesma medida.

Alternativa **d**.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

Todos os *sites* foram acessados em 9 de setembro de 2024.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução de Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

Essa obra apresenta uma visão histórica da Matemática e mostra como a Matemática é uma construção humana e social, possibilitando que professores levem para a sala de aula novas abordagens e perspectivas. A obra também é referência de contextos históricos importantes para o enriquecimento das aulas.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

A autora desse livro é precursora das mentalidades matemáticas, uma abordagem que busca incentivar o potencial dos estudantes mediante metodologias ativas de aprendizagem e criatividade. Essa perspectiva permeia a elaboração dos textos desta coleção, servindo de referencial teórico para a proposta teórico-metodológica.

BORBA, M. de C. *et al*. *Fases das tecnologias digitais em Educação matemática*: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Referência para o uso de tecnologias proposto nesta coleção, essa obra apresenta uma visão sobre a aplicação de tecnologias em Educação matemática, exemplificando questões teóricas e propostas de atividades, bem como dissertando sobre o presente e o futuro da sala de aula de Matemática.

BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica. 2017. 226 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://tedit.net/rd6pjs.

Essa tese explora métodos para fomentar o pensamento computacional utilizando atividades práticas e interativas, sem o uso de computadores. Foi consultada como referência na elaboração de estratégias para integrar conceitos de computação e lógica matemática nas atividades desta coleção.

BRASIL. *Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Senado Federal, 1996. Disponível em: https://tedit.net/81p5f9.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional é um marco regulatório fundamental que estabelece as diretrizes gerais para a organização e o funcionamento da educação no Brasil. Abrange desde a Educação Infantil até a Educação Superior e define princípios, como a igualdade de condições para o acesso e a permanência na escola, a liberdade de aprender e ensinar, bem como a valorização dos profissionais da educação brasileira.

BRASIL. *Lei n. 13.005, de 25 de junho de 2014*. Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. Brasília, DF: MEC, 2014.

O Plano Nacional de Educação (PNE), instituído em 2014, define 20 tópicos para garantir o acesso à educação de qualidade no Brasil até 2024, para todos os níveis e modalidades de ensino no país, quando deverão ser determinadas novas metas para o novo ciclo. O documento também foi referência para a elaboração de orientações didáticas desta coleção.

BRASIL. *Lei n. 14.533, de 11 de janeiro de 2023*. Institui a Política Nacional de Educação Digital [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, edição extra, ano CLXI, n. 8-B, p. 1, 11 jan. 2023.

Promulgado em 2023, esse documento apresenta a lei que estabelece a criação da Política Nacional de Educação Digital (Pned). Esse documento foi consultado para guiar a elaboração das orientações e das propostas de atividades que envolvem a educação digital nesta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://tedit.net/q0hay4.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo. Define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceituam o Plano Nacional de Educação (PNE) e as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN). A BNCC também estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo de cada ano da escolaridade básica. Os conteúdos selecionados para esta coleção, bem como as orientações didáticas e a proposta teórico-metodológica, têm como referência esse documento.

BRASIL. Ministério da Educação. *Computação*: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://tedit.net/93oura.

Em 2022, a BNCC foi complementada com diretrizes específicas que incluem o ensino de Computação no currículo escolar brasileiro. O documento, que visa promover o desenvolvimento de habilidades dos estudantes associadas ao pensamento computacional e à cultura digital, foi consultado para a elaboração de conteúdos e atividades desta coleção, bem como para as orientações didáticas deste Manual.

BRASIL. Ministério da Educação. *Projeto de vida*: ser ou existir. Caderno de práticas. Disponível em: https://tedit.net/nhft2i.

Nesse caderno de práticas são apresentadas reflexões sobre o papel da escola no projeto de vida dos estudantes. O material serviu de referência para a elaboração de atividades que envolvem projetos e suas respectivas orientações didáticas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a. Disponível em: https://tedit.net/3acdu3.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019b. Disponível em: https://tedit.net/3pnyp2.

Esses dois documentos visam esclarecer a inserção dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), trabalhados nesta coleção, nos currículos escolares e nortear as contextualizações dos conteúdos ensinados por meio de temas do interesse dos estudantes e que têm relevância para o desenvolvimento deles como cidadãos.

CARATTI, R. L.; VASCONCELOS, F. H. L. O pensamento computacional na visão dos professores da Educação Básica. *Educação em foco*, Juiz de Fora, n. 28, 2023. Disponível em: https://tedit.net/gianev.

O artigo investiga a percepção dos professores da Educação Básica sobre o pensamento computacional e destaca a importância dele na formação dos jovens para a melhoria na resolução de problemas e no pensamento crítico dos estudantes.

COSTA, A. C. G. da. *Protagonismo juvenil*: adolescência, educação e participação democrática. Salvador: Fundação Odebrecht, 2000.

Nesse livro, o autor aborda a educação considerando o jovem o núcleo do processo educativo. Também apresenta a descrição de projetos desenvolvidos na prática envolvendo experiências de protagonismo juvenil. Essas propostas foram referência na elaboração de algumas seções da coleção e de orientações neste Manual.

COSTA, C. F. da. Ubiratan D'Ambrosio e a decolonialidade na Etnomatemática. *Revista de Educação Matemática*, [*s. l.*], v. 18, Edição Especial, 2021. Disponível em: https://tedit.net/512lsk.

Nesse artigo, as contribuições de Ubiratan D'Ambrosio para a Etnomatemática são exploradas, destacando a importância de uma abordagem decolonial que valorize os saberes matemáticos de diferentes culturas. A perspectiva inclusiva e multicultural para o ensino da Matemática, que reconhece e integra a diversidade cultural dos estudantes, foi referência para a elaboração das atividades que envolvem o tema nesta coleção.

DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Estado de Educação. *Convivência escolar e Cultura de Paz*. Brasília, DF, 2020. Disponível em: https://tedit.net/fc8gpy.

Nessa publicação são abordadas estratégias e práticas para promover um ambiente escolar harmonioso e pacífico, enfatizando a importância da convivência respeitosa e da resolução de conflitos. Foi consultada na elaboração desta coleção como fonte de orientações sobre como criar um ambiente de sala de aula que favoreça a aprendizagem colaborativa e o bem-estar dos estudantes.

FAVA, R. *Trabalho, educação e inteligência artificial*. Porto Alegre: Penso, 2018.

O debate apresentado nesse livro sobre o impacto da inteligência artificial no mercado de trabalho e suas implicações para a educação pode ser utilizado como base para a elaboração de estratégias para integração da inteligência artificial à sala de aula visando preparar melhor os estudantes para os desafios do século XXI.

FAZENDA, I. *O que é interdisciplinaridade*. São Paulo: Cortez, 2008.

O livro explora a interdisciplinaridade sob uma análise da história, não apenas como integração de componentes curriculares, mas também sob a perspectiva da busca de novos conhecimentos e do enriquecimento da prática pedagógica, facilitando a construção de conhecimentos mais significativos e contextualizados. As atividades e seções interdisciplinares desta coleção foram propostas tendo esse material como embasamento bibliográfico.

FERNANDES, D. *Avaliar para aprender*: fundamentos, práticas e políticas. São Paulo: Unesp, 2009.

A avaliação educacional é abordada nesse livro como um processo formativo, enfatizando práticas que promovem a aprendizagem contínua dos estudantes. Serviu de referência bibliográfica para as diretrizes e estratégias de avaliações presentes nesta coleção, concebendo a avaliação não apenas como instrumento de medida das competências matemáticas desenvolvidas pelos estudantes, mas também como um instrumento que incentive o desenvolvimento delas.

FREITAS, M. C. de. Educação inclusiva: diferenças entre acesso, acessibilidade e inclusão. *Cadernos de Pesquisa*, n. 53, 2023. Disponível em: https://tedit.net/j976u1.

Esse artigo discute as distinções fundamentais entre proporcionar acesso à educação, garantir a acessibilidade e promover a verdadeira inclusão de todos os estudantes no ambiente escolar. Também foi referência para o desenvolvimento das sugestões de adaptação das atividades desta coleção, para que elas não apenas facilitem o acesso e a acessibilidade, mas também assegurem a inclusão efetiva de estudantes com diferentes necessidades e habilidades.

HOFFMANN, J. *Avaliação*: mito & desafio – uma perspectiva construtivista. Porto Alegre: Mediação, 2003.

O livro explora a avaliação educacional sob a ótica do construtivismo, desmistificando práticas tradicionais e propondo novos métodos que promovem a aprendizagem ativa e reflexiva dos estudantes. Foi referência para as abordagens de avaliação presentes nesta coleção, para que elas também fomentem o desenvolvimento contínuo e a compreensão profunda dos conceitos matemáticos.

KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias*: o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

O livro examina o impacto das tecnologias digitais na educação e destaca como essas ferramentas transformam a dinâmica do ensino e da aprendizagem. Foi referência na elaboração desta coleção para a integração de tecnologias digitais nas aulas de Matemática, visando enriquecer o processo educativo e engajar os estudantes de modo mais eficaz.

LASCANE, M. M.; HOMSY, N. P. B.; MONTEIRO, A. F. B. S. Construção do raciocínio lógico matemático. *Unisanta Humanitas*, Santos, v. 8, n. 2, p. 117-127, 2020.

Nesse artigo são debatidas estratégias e metodologias para desenvolver o raciocínio lógico-matemático dos estudantes, enfatizando a importância de práticas pedagógicas que promovam o pensamento crítico e a resolução de problemas. Foi utilizado nesta coleção como referência de possibilidades de abordagens práticas para fortalecer as habilidades lógicas e matemáticas dos estudantes de maneira eficaz e contextualizada.

LIRA, B. C. *Práticas pedagógicas para o séc. XXI*: a sociointeração digital e o humanismo ético. Petrópolis, RJ: Vozes, 2016.

O trabalho do autor propõe reflexões importantes sobre diversas áreas da educação. Além de favorecer a formação dos estudantes, o texto aborda a necessidade de melhoria e constante aperfeiçoamento da formação docente, a fim de que professores estejam cada vez mais capacitados para auxiliar os estudantes nesse mundo em constante transformação.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

O livro aborda a avaliação educacional como um processo formativo e transformador. Propõe práticas que visam promover a aprendizagem efetiva dos estudantes, fornecendo fundamentos teóricos e práticos para a implementação de orientações avaliativas nesta coleção que incentivem o desenvolvimento contínuo e integral dos estudantes.

Todos os *sites* foram acessados em 9 de setembro de 2024.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. *História nas aulas de Matemática*: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

Esse livro explora a integração da História da Matemática no ensino e oferece fundamentos teóricos e sugestões práticas para enriquecimento das aulas. Foi utilizado nesta coleção como referência para a elaboração de estratégias para contextualizar historicamente conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais significativo e engajador para os estudantes.

MILANI, D. R. C. *Contemporaneidade e educações*: mídias digitais nas culturas juvenis. 2012. 207 f. Tese (Doutorado em Educação Escolar) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Letras, Araraquara, 2012.

Essa tese investiga o papel das mídias digitais na formação das culturas juvenis contemporâneas e suas implicações para a educação, inspirando a elaboração das estratégias de inserção de mídias digitais propostas nesta coleção. Desse modo, o ensino torna-se mais relevante e conectado com as vivências e os interesses dos estudantes.

MOEHLECKE, S. O Ensino Médio e as novas diretrizes curriculares nacionais: entre recorrências e novas inquietações. *Revista Brasileira de Educação*, v. 17, n. 49, p. 39-58, 2012. Disponível em: https://tedit.net/rm3e4u.

Esse artigo retoma parte do debate envolvendo a criação de um novo modelo de Ensino Médio, servindo para a compreensão do histórico de leis e debates que resultaram no Novo Ensino Médio proposto em 2017 pela Lei n. 13.415/2017.

MORÁN, J. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, C. A. de; MORALES, O. E. T. (org.). *Convergências midiáticas, educação e cidadania*: aproximações jovens. Ponta Grossa: Proex: UEPG, 2015. v. II, p. 15-33. Disponível em: https://tedit.net/gn1b88.

Essa publicação explora diversas metodologias ativas de ensino e destaca como essas abordagens podem transformar a educação ao promover uma aprendizagem engajada e participativa, conforme sugerido nas orientações didáticas desta coleção.

PERRENOUD, P. *Avaliação*: da excelência à regulação das aprendizagens. Porto Alegre: Artmed, 1999.

No capítulo "A avaliação entre duas lógicas" desse livro, o autor debate as diferentes abordagens de avaliação, contrastando a lógica da excelência com a lógica da regulação das aprendizagens. Foi utilizado como referencial teórico para a perspectiva sobre práticas avaliativas desta coleção.

PERRENOUD, P.; THURLER, M. G. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação de professores e o desafio da avaliação. 1. ed. São Paulo: Penso, 2002.

Esse livro traz para o leitor os textos nos quais os autores suíços apoiaram suas falas na vinda ao Brasil, em 2001, em conferências que contavam com a participação dos educadores brasileiros Lino de Macedo, Nilson José Machado e Cristina D. Allessandrini. Serviu de referência teórica para a elaboração de diretrizes e estratégias pedagógicas e avaliativas alinhadas às demandas do século XXI.

PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Os métodos criativos de resolução de problemas apresentados nesse livro revelam as 4 etapas básicas de uma resolução e estratégias a serem desenvolvidas que inspiraram o trabalho com resolução e elaboração de problemas nesta coleção.

ROCHA, A. D. G. da; OTA, M. A.; HOFFMANN, G. (org.). *Aprendizagem digital*: curadoria, metodologias e ferramentas para o novo contexto educacional. Porto Alegre: Penso, 2020.

O livro analisa as experiências e os desafios enfrentados por estudantes com deficiência ao longo da jornada educacional, à luz das políticas de inclusão. Foi utilizado como referência para as sugestões de práticas inclusivas que promovam a equidade e a continuidade educacional presentes no material.

SILVA, R. V. Autonomia na BNCC: uma análise sob a perspectiva de Paulo Freire. *Revista Educação Pública*, Rio de Janeiro, v. 22, n. 36, 27 de setembro de 2022. Disponível em: https://tedit.net/bcfior.

Esse artigo examina como o conceito de autonomia é tratado na BNCC utilizando como referência os princípios pedagógicos de Paulo Freire. Também serviu de fundamentação teórica da proposta teórico-metodológica desta coleção, propondo uma análise crítica que ajuda a entender e aplicar os conceitos de autonomia no contexto do ensino de Matemática, alinhados com a BNCC.

VARIZO, Z. C. M.; MAGALHÃES, A. P. de A. S. *Atividades investigativas como uma estratégia de ensino e aprendizagem da matemática*. Curitiba: CRV, 2016.

O livro explora o uso de atividades investigativas como uma metodologia eficaz para o ensino e a aprendizagem da Matemática e oferece estratégias práticas, que podem ser incorporadas no planejamento das aulas. Foi referência de consulta para a elaboração de atividades que promovem o pensamento crítico dos estudantes e a resolução de problemas.

WING, J. *Pensamento computacional*: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://tedit.net/gzsm98.

O pensamento computacional é uma habilidade fundamental para todos, pois envolve, com destaque, a resolução de problemas e a identificação de padrões, processos inerentes à atividade matemática e a situações cotidianas. Na publicação original, traduzida para o português, a autora disserta sobre os estudos relacionados ao pensamento computacional. Essa publicação serviu de referência para a elaboração desta coleção e das orientações didáticas deste Manual.