MANUAL DO PROFESSOR

8º ano

Matemática essencial

Patricia Moreno Pataro
Rodrigo Balestri

Ensino Fundamental
Anos finais

Componente curricular:
Matemática

editora scipione

Matemática essencial

8º ano

Ensino Fundamental
Anos finais

Componente curricular:
Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

Patricia Rosana Moreno Pataro

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Especialista em Estatística pela UEL-PR.

Atuou como professora da rede particular de ensino.

Autora de livros didáticos para o Ensino Fundamental.

Rodrigo Dias Balestri

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Especialista em Educação Matemática pela UEL-PR.

Especialista em Física para o Novo Ensino Médio pela UEL-PR.

Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.

Professor da rede pública de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Autor de livros didáticos para o Ensino Fundamental e Ensino Médio.

1ª edição • São Paulo • 2018

editora scipione

editora scipione

Direção geral: Guilherme Luz
Direção editorial: Renata Mascarenhas e Luiz Tonolli
Gestão de projeto editorial: Mirian Senra
Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: André Luiz Steigenberger, Denise Maria Capozzi, Fátima Gomes Machado Vizacaro, Janaina Soler Caldeira, Sheila Caroline Molina
Assistência editorial: Leandro Figueira Ferreira, Paulo Ricardo Mercadante Krzyzanowski
Leitura técnica: Eduardo Henrique Gomes Tavares
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner
Supervisão de produção: Lucília Franco Lemos dos Santos
Revisão: Amanda S. Santos
Projeto gráfico: Marcela Pialarissi
Capa: Marcela Pialarissi
Imagem de capa: Angga -/EyeEm/Getty Images
Designer: Janaina Oliveira
Iconografia: Alaíde Alves de França e Stein
Tratamento de imagens: José Vitor Elorza Costa
Licenciamento de conteúdos de terceiros: Erick Lopes de Almeida, Marissol Martins Maia
Editoração eletrônica: Luiz Roberto Lúcio Correa (superv.)

Avenida das Nações Unidas, 7221, 1º andar, Setor D
Pinheiros – São Paulo – SP – CEP 05425-902
Tel.: 4003-3061
www.scipione.com.br / atendimento@scipione.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Pataro, Patricia Moreno
Matemática essencial 8º ano : ensino fundamental, anos finais / Patricia Moreno Pataro, Rodrigo Balestri. -- 1. ed. -- São Paulo : Scipione, 2018.

Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia.
ISBN: 978-85-474-0164-1 (aluno)
ISBN: 978-85-474-0165-8 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental). I. Balestri, Rodrigo. II. Título.

2018-0051 CDD: 372.7

Julia do Nascimento – Bibliotecária – CRB-8/010142

2018
Código da obra CL 713557
CAE 631769 (AL) / 631770 (PR)
1ª edição
1ª impressão

Impressão e acabamento

Apresentação

O mundo sempre esteve em constantes transformações. No cenário atual, em que os avanços científicos e tecnológicos ocorrem a uma velocidade acelerada, essas transformações exigem e acarretam frequentes mudanças na educação. As informações são transmitidas e acessadas por diferentes meios, portanto, faz-se necessário formar cidadãos capazes de analisar e interpretar essas informações de maneira crítica e eficaz.

Nesse contexto, a Matemática destaca-se como fundamental, tendo em vista que oferece condições e ferramentas para que os alunos possam tomar decisões e desenvolver estratégias com base em princípios lógicos e criativos, além do estímulo a tantas outras competências.

Diante disso, esta coleção foi elaborada sob a luz de uma abordagem abrangente e integrada dos conteúdos, que foram desenvolvidos buscando relacionar, por meio de uma linguagem clara e acessível, os assuntos específicos a situações cotidianas. Aproximar o conteúdo matemático das circunstâncias do dia a dia é uma maneira de aguçar a criatividade e promover o interesse pela natureza prática de seus saberes.

O manual do professor foi pensado com o objetivo de auxiliar os docentes em seu trabalho em sala de aula, de modo a valorizar o papel ativo do professor na construção do conhecimento e estimular a participação dos alunos enquanto agentes do processo de aprendizagem. Nele, explicitamos pressupostos teóricos, tecemos comentários e sugestões e propomos atividades complementares que visam auxiliar o desenvolvimento dos conteúdos e das atividades presentes em cada volume desta coleção.

> “Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais...”

ALVES, Rubem. **A alegria de ensinar**. Campinas: Papirus, 2000.

Sumário

Estrutura da coleção

Esta coleção está organizada em quatro volumes destinados aos anos finais do Ensino Fundamental (6º, 7º, 8º e 9º anos). Os conteúdos de cada volume estão apresentados em capítulos organizados em tópicos e subtópicos, obedecendo às habilidades, aos objetos de conhecimento e às competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Livro do aluno

Capítulo 1

Ângulos e polígonos

Artes indígenas

Veja mais informações sobre os povos indígenas nos *sites*:
<https://indigenas.ibge.gov.br>
<https://pib.socioambiental.org>
(acesso em: 15 ago. 2018)

As comunidades indígenas no Brasil têm grande variedade de culturas, as quais caracterizam o modo como esses povos são organizados socialmente, tanto nos rituais e mitos quanto na linguagem e na organização habitacional. As suas expressões artísticas manifestam-se por meio de dança, música, pintura corporal e objetos decorativos utilizados no cotidiano ou em rituais.

Para a pintura indígena são extraídos pigmentos de plantas como jenipapo e urucum. Muitas vezes, a decoração do corpo e de objetos são desenhos abstratos que mantêm padrão geométrico e representam animais e plantas.

Pensando nisso...

A) As expressões artísticas indígenas podem ser manifestadas de que maneiras?

B) As formas apresentadas na fotografia lembram quais polígonos?

C) Elabore um desenho com padrão inspirado na pintura corporal da fotografia.

Pintura corporal em uma menina da etnia Kayapó, em São Félix do Xingu, no Pará, em 2016.

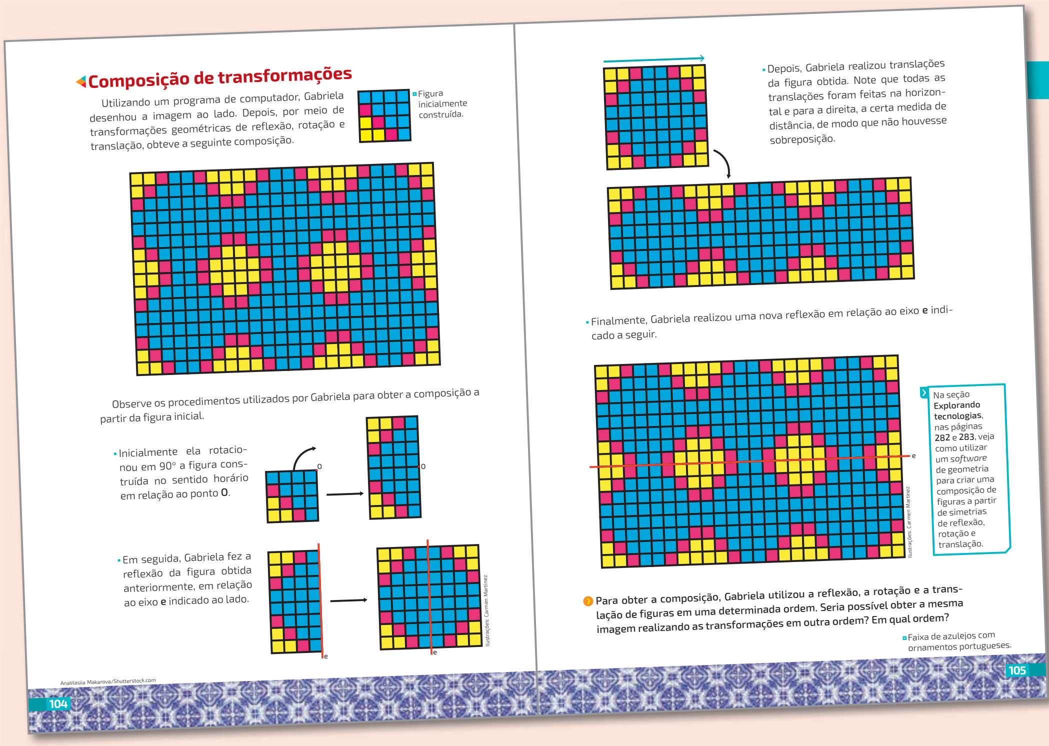
12 13

Abertura do capítulo

No início de cada capítulo, duas páginas apresentam um assunto relacionado ao conteúdo que será estudado. Nelas, há informações que se referem a outras áreas do conhecimento, expostas por meio de textos, fotografias, gráficos, infográficos, esquemas, entre outros.

Pensando nisso...

Nas páginas de abertura, são sugeridos questionamentos que objetivam resgatar o conhecimento prévio do aluno, assim como estabelecer intuitivamente relações entre o assunto abordado e alguns conteúdos matemáticos. Além disso, configuram-se como um importante momento de interação e troca de ideias, propiciando um ambiente em que os alunos desenvolvam a habilidade de argumentação e aprendam a ouvir e a respeitar a opinião dos colegas.



Composição de transformações

Utilizando um programa de computador, Gabriela desenhou a imagem ao lado. Depois, por meio de transformações geométricas de reflexão, rotação e translação, obteve a seguinte composição.

Figura inicialmente construída.

Observe os procedimentos utilizados por Gabriela para obter a composição a partir da figura inicial.

- Inicialmente ela rotacionou em 90° a figura construída no sentido horário em relação ao ponto **O**.
- Em seguida, Gabriela fez a reflexão da figura obtida anteriormente, em relação ao eixo **e** indicado ao lado.

Ilustrações: Carmen Martinez

Anastasiia Makarova/Shutterstock.com

104

- Depois, Gabriela realizou translações da figura obtida. Note que todas as translações foram feitas na horizontal e para a direita, a certa medida de distância, de modo que não houvesse sobreposição.
- Finalmente, Gabriela realizou uma nova reflexão em relação ao eixo **e** indicado a seguir.

Na seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **282** e **283**, veja como utilizar um *software* de geometria para criar uma composição de figuras a partir de simetrias de reflexão, rotação e translação.

Ilustrações: Carmen Martinez

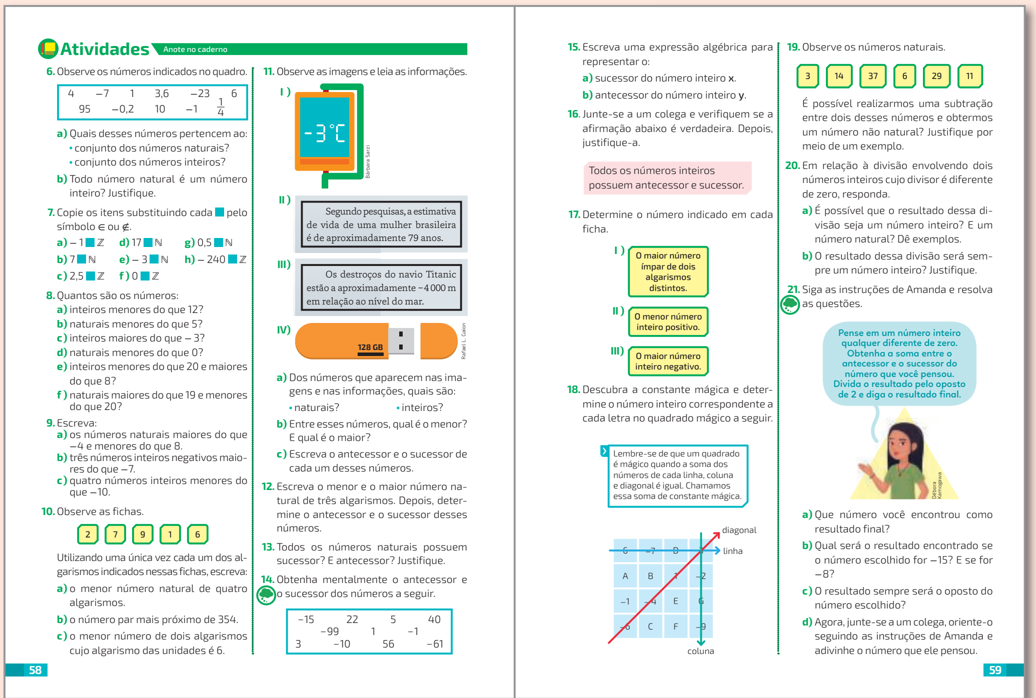
Para obter a composição, Gabriela utilizou a reflexão, a rotação e a translação de figuras em uma determinada ordem. Seria possível obter a mesma imagem realizando as transformações em outra ordem? Em qual ordem?

Faixa de azulejos com ornamentos portugueses.

105

Conteúdos

Sempre que possível, abordamos uma situação contextualizada para iniciar o trabalho com um novo conteúdo. Também são propostas questões que encorajam os alunos a refletirem sobre a ideia, o conceito ou o procedimento que foi apresentado, e os incentivam a participar de forma mais dinâmica das aulas. Utilizamos ainda outros recursos, como ilustrações, fotografias e esquemas para tornar o estudo mais atrativo.



Atividades

Anote no caderno

6. Observe os números indicados no quadro.

4 −7 1 3,6 −23 6
95 −0,2 10 −1 $\frac{1}{4}$

a) Quais desses números pertencem ao:
- conjunto dos números naturais?
- conjunto dos números inteiros?

b) Todo número natural é um número inteiro? Justifique.

7. Copie os itens substituindo cada ■ pelo símbolo ∈ ou ∉.

a) – 1 ■ $\mathbb{Z}$ **d)** 17 ■ $\mathbb{N}$ **g)** 0,5 ■ $\mathbb{N}$
b) 7 ■ $\mathbb{N}$ **e)** – 3 ■ $\mathbb{N}$ **h)** – 240 ■ $\mathbb{Z}$
c) 2,5 ■ $\mathbb{Z}$ **f)** 0 ■ $\mathbb{Z}$

8. Quantos são os números:
a) inteiros menores do que 12?
b) naturais menores do que 5?
c) inteiros maiores do que – 3?
d) naturais menores do que 0?
e) inteiros menores do que 20 e maiores do que 8?
f) naturais maiores do que 19 e menores do que 20?

9. Escreva:
a) os números naturais maiores do que −4 e menores do que 8.
b) três números inteiros negativos maiores do que −7.
c) quatro números inteiros menores do que −10.

10. Observe as fichas.

2 7 9 1 6

Utilizando uma única vez cada um dos algarismos indicados nessas fichas, escreva:
a) o menor número natural de quatro algarismos.
b) o número par mais próximo de 354.
c) o menor número de dois algarismos cujo algarismo das unidades é 6.

11. Observe as imagens e leia as informações.

I) -3 °C

Bárbara Sarzi

II) Segundo pesquisas, a estimativa de vida de uma mulher brasileira é de aproximadamente 79 anos.

III) Os destroços do navio Titanic estão a aproximadamente −4 000 m em relação ao nível do mar.

IV) 128 GB

Rafael L. Gaion

a) Dos números que aparecem nas imagens e nas informações, quais são:
- naturais?
- inteiros?

b) Entre esses números, qual é o menor? E qual é o maior?
c) Escreva o antecessor e o sucessor de cada um desses números.

12. Escreva o menor e o maior número natural de três algarismos. Depois, determine o antecessor e o sucessor desses números.

13. Todos os números naturais possuem sucessor? E antecessor? Justifique.

14. Obtenha mentalmente o antecessor e o sucessor dos números a seguir.

−15 22 5 40
−99 1 −1
3 −10 56 −61

58

15. Escreva uma expressão algébrica para representar o:
a) sucessor do número inteiro **x**.
b) antecessor do número inteiro **y**.

16. Junte-se a um colega e verifiquem se a afirmação abaixo é verdadeira. Depois, justifique-a.

Todos os números inteiros possuem antecessor e sucessor.

17. Determine o número indicado em cada ficha.

I) O maior número ímpar de dois algarismos distintos.
II) O menor número inteiro positivo.
III) O maior número inteiro negativo.

18. Descubra a constante mágica e determine o número inteiro correspondente a cada letra no quadrado mágico a seguir.

Lembre-se de que um quadrado é mágico quando a soma dos números de cada linha, coluna e diagonal é igual. Chamamos essa soma de constante mágica.

6	−7	D	[illegible]
A	B	1	−2
−1	−4	E	G
−6	C	F	−9

diagonal
linha
coluna

19. Observe os números naturais.

3 14 37 6 29 11

É possível realizarmos uma subtração entre dois desses números e obtermos um número não natural? Justifique por meio de um exemplo.

20. Em relação à divisão envolvendo dois números inteiros cujo divisor é diferente de zero, responda.
a) É possível que o resultado dessa divisão seja um número inteiro? E um número natural? Dê exemplos.
b) O resultado dessa divisão será sempre um número inteiro? Justifique.

21. Siga as instruções de Amanda e resolva as questões.

Pense em um número inteiro qualquer diferente de zero. Obtenha a soma entre o antecessor e o sucessor do número que você pensou. Divida o resultado pelo oposto de 2 e diga o resultado final.

Débora Kamogawa

a) Que número você encontrou como resultado final?
b) Qual será o resultado encontrado se o número escolhido for −15? E se for −8?
c) O resultado sempre será o oposto do número escolhido?
d) Agora, junte-se a um colega, oriente-o seguindo as instruções de Amanda e adivinhe o número que ele pensou.

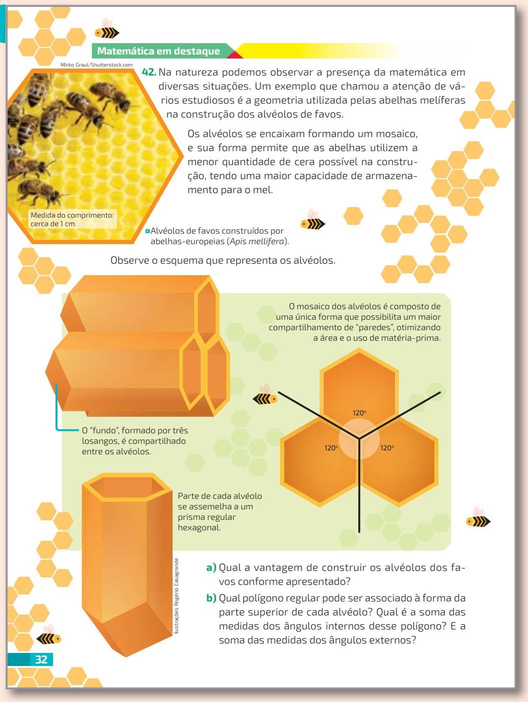
59

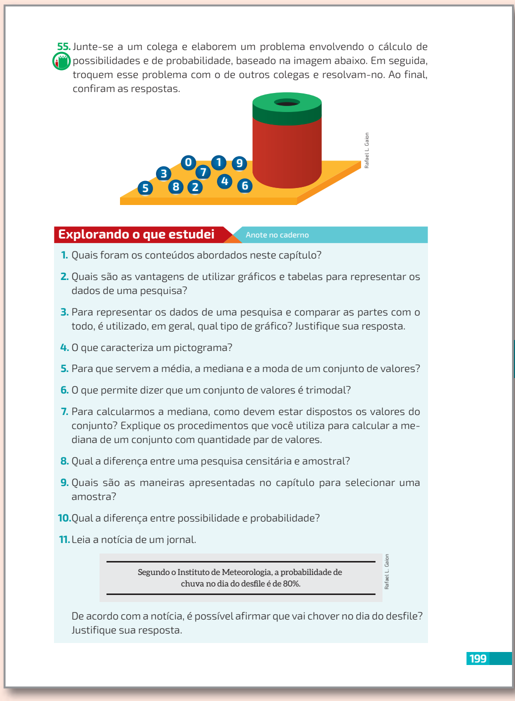
Atividades

Nessa seção, são propostas atividades referentes aos conteúdos abordados no capítulo, dispostas de maneira organizada e em nível crescente de dificuldade. As atividades atendem às exigências da BNCC ao trabalharem com estimativa e aproximação, investigação e conjectura, elaboração de problemas, textos e relatórios, representação de fluxogramas etc. Sugerimos que sejam resolvidas, em sua maioria, na sala de aula, e aquelas que forem selecionadas para casa podem ser corrigidas na aula posterior, a fim de promover explanações e discussões sobre as diferentes estratégias de resolução.

Matemática em destaque

Essas atividades trazem um texto e, por vezes, recursos gráficos que envolvem algum tema curioso relacionado à realidade do aluno e a outras áreas do conhecimento. A contextualização abordada nessas atividades privilegia tanto o desenvolvimento da competência leitora quanto a percepção de que a Matemática está presente em diversas situações fora da educação formal.



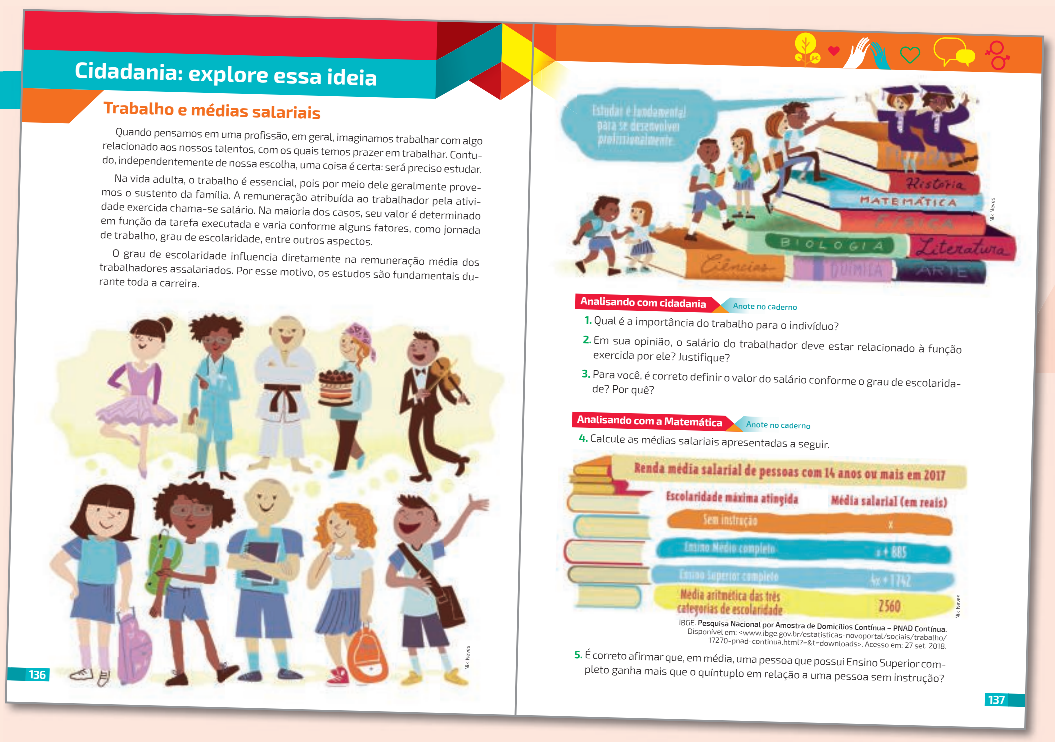


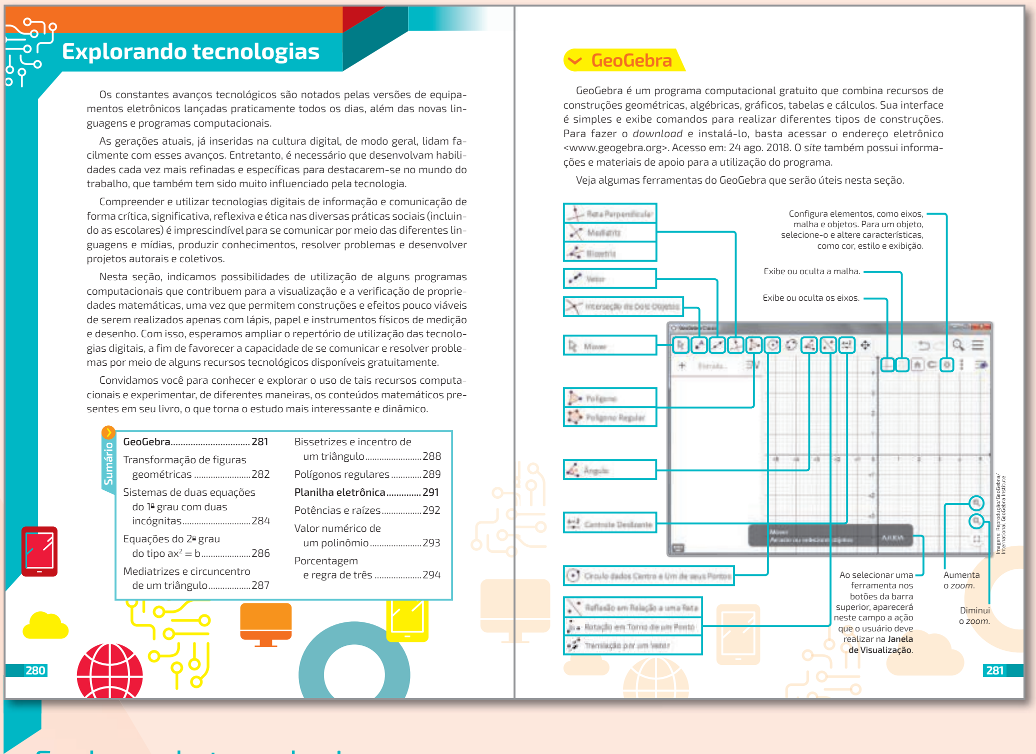
Explorando o que estudei

Localizada após a última seção **Atividades** do capítulo, essa seção oferece aos alunos a oportunidade de refletir sobre o que aprendeu durante o trabalho com o conteúdo estudado. Ao responder às questões, eles terão a oportunidade de explicitar as principais ideias abordadas e fazer uma autoavaliação do seu processo de aprendizagem.

Cidadania: explore essa ideia

Essa seção tem o objetivo de trabalhar os temas contemporâneos elencados na BNCC. As situações abordadas nessa seção são estruturadas por um texto e cenas ilustradas, gráficos e outros elementos que auxiliam e complementam a compreensão do texto. Ao final, são sugeridas questões que despertam no aluno o pensamento crítico sobre o tema e que envolvem conteúdo matemático com base na situação.




Explorando tecnologias

Os constantes avanços tecnológicos são notados pelas versões de equipamentos eletrônicos lançadas praticamente todos os dias, além das novas linguagens e programas computacionais.

As gerações atuais, já inseridas na cultura digital, de modo geral, lidam facilmente com esses avanços. Entretanto, é necessário que desenvolvam habilidades cada vez mais refinadas e específicas para destacarem-se no mundo do trabalho, que também tem sido muito influenciado pela tecnologia.

Compreender e utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) é imprescindível para se comunicar por meio das diferentes linguagens e mídias, produzir conhecimentos, resolver problemas e desenvolver projetos autorais e coletivos.

Nesta seção, indicamos possibilidades de utilização de alguns programas computacionais que contribuem para a visualização e a verificação de propriedades matemáticas, uma vez que permitem construções e efeitos pouco viáveis de serem realizados apenas com lápis, papel e instrumentos físicos de medição e desenho. Com isso, esperamos ampliar o repertório de utilização das tecnologias digitais, a fim de favorecer a capacidade de se comunicar e resolver problemas por meio de alguns recursos tecnológicos disponíveis gratuitamente.

Convidamos você para conhecer e explorar o uso de tais recursos computacionais e experimentar, de diferentes maneiras, os conteúdos matemáticos presentes em seu livro, o que torna o estudo mais interessante e dinâmico.

Sumário

280

GeoGebra

GeoGebra é um programa computacional gratuito que combina recursos de construções geométricas, algébricas, gráficos, tabelas e cálculos. Sua interface é simples e exibe comandos para realizar diferentes tipos de construções. Para fazer o *download* e instalá-lo, basta acessar o endereço eletrônico <www.geogebra.org>. Acesso em: 24 ago. 2018. O site também possui informações e materiais de apoio para a utilização do programa.

Veja algumas ferramentas do GeoGebra que serão úteis nesta seção.

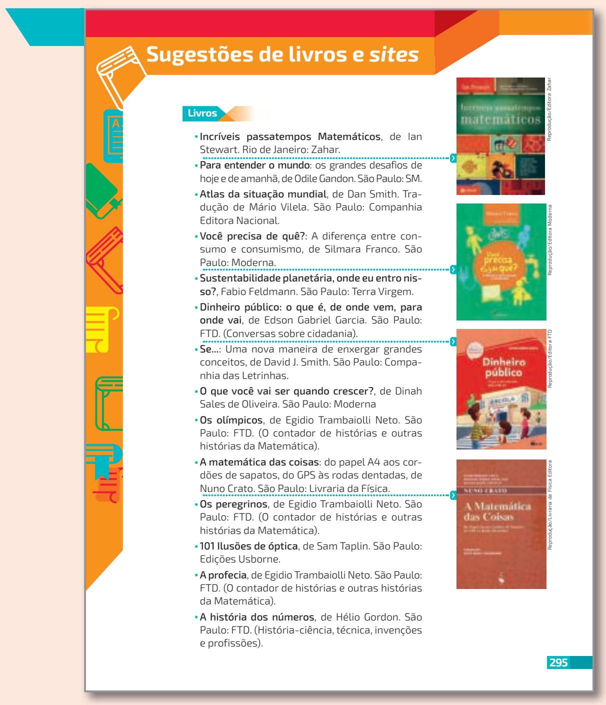
281

Explorando tecnologias

Organizada ao final do volume, a seção **Explorando tecnologias** apresenta exemplos e propostas de atividades que desenvolvem conceitos estudados nos capítulos por meio do uso dos programas de computador GeoGebra e Calc. Essa seção busca estabelecer uma estratégia de ensino complementar fazendo o aluno se sentir estimulado a utilizar ferramentas tecnológicas computacionais para solucionar problemas, realizar construções geométricas, representar dados, entre outros. É importante destacar que os recursos computacionais apresentados nessa seção podem ser acessados e baixados gratuitamente.

Sugestões de livros e *sites*

Encontrada ao fim de cada volume, essa seção traz sugestões de livros e *sites* que permitem aos alunos enriquecer e complementar o trabalho realizado com os conteúdos em sala de aula. É essencial que eles sejam estimulados a consultar essas fontes de informação que vão além do livro didático, incentivando-os, assim, a desenvolver o gosto pela leitura.

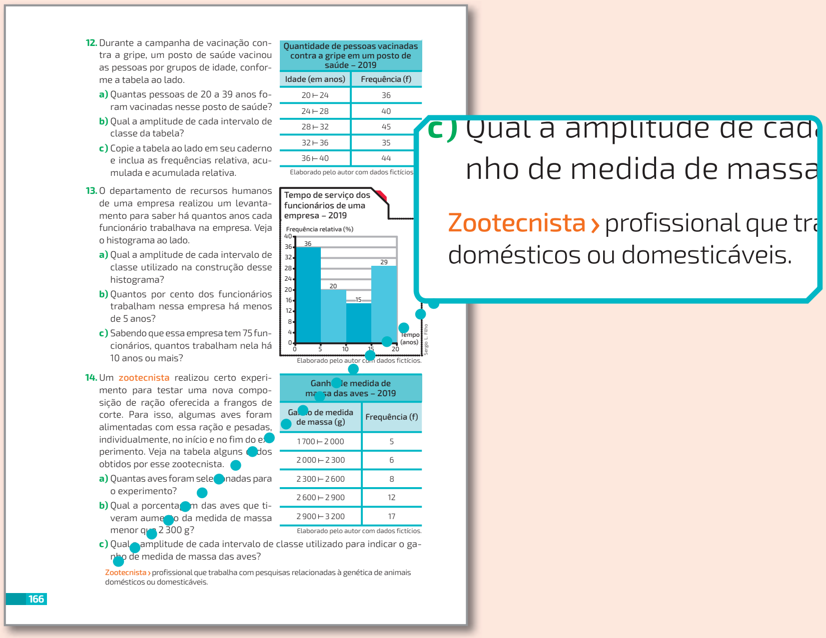

Sugestões de livros e *sites*

Livros

- **Incríveis passatempos Matemáticos**, de Ian Stewart. Rio de Janeiro: Zahar.
- **Para entender o mundo**: os grandes desafios de hoje e de amanhã, de Odile Gandon. São Paulo: SM.
- **Atlas da situação mundial**, de Dan Smith. Tradução de Mário Vilela. São Paulo: Companhia Editora Nacional.
- **Você precisa de quê?**: A diferença entre consumo e consumismo, de Silmara Franco. São Paulo: Moderna.
- **Sustentabilidade planetária, onde eu entro nisso?**, Fabio Feldmann. São Paulo: Terra Virgem.
- **Dinheiro público: o que é, de onde vem, para onde vai**, de Edson Gabriel Garcia. São Paulo: FTD. (Conversas sobre cidadania).
- **Se...**: Uma nova maneira de enxergar grandes conceitos, de David J. Smith. São Paulo: Companhia das Letrinhas.
- **O que você vai ser quando crescer?**, de Dinah Sales de Oliveira. São Paulo: Moderna
- **Os olímpicos**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **A matemática das coisas**: do papel A4 aos cordões de sapatos, do GPS às rodas dentadas, de Nuno Crato. São Paulo: Livraria da Física.
- **Os peregrinos**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **101 ilusões de óptica**, de Sam Taplin. São Paulo: Edições Usborne.
- **A profecia**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **A história dos números**, de Hélio Gordon. São Paulo: FTD. (História-ciência, técnica, invenções e profissões).

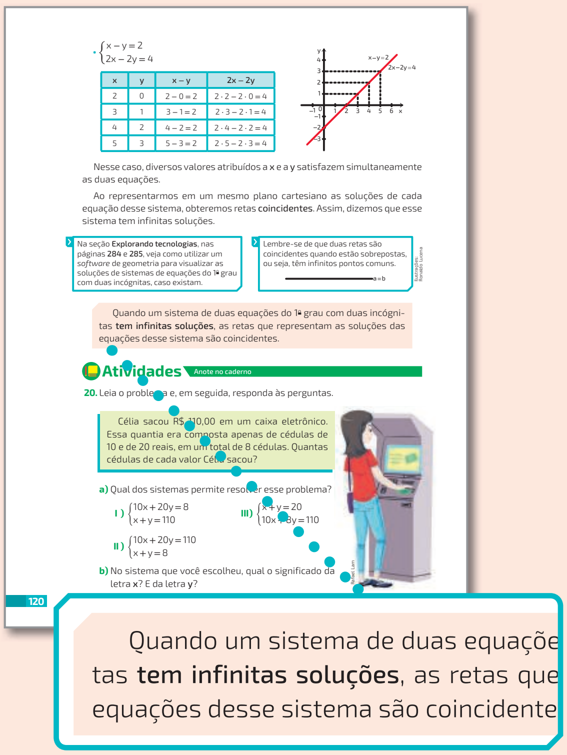
295

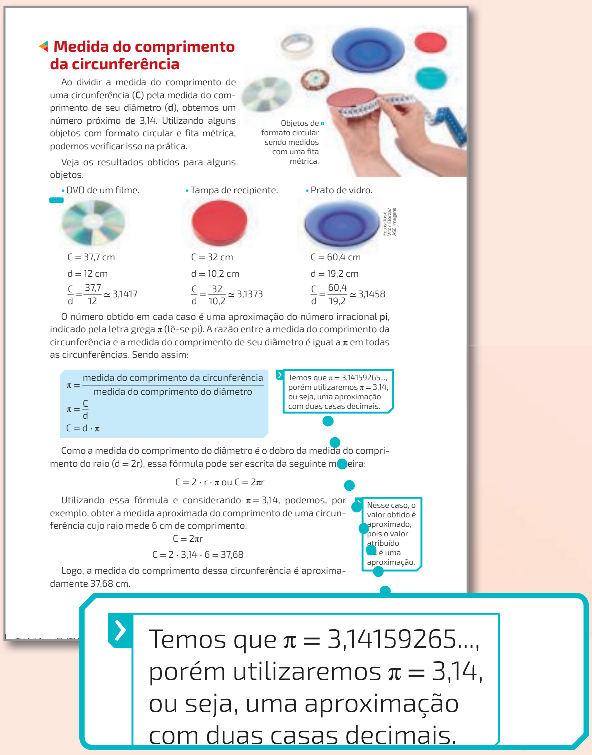
Em toda a coleção, há diferentes tipos de quadros. Observe as informações sobre cada um deles.



Vocabulário

O **Vocabulário** traz o significado de algumas palavras em destaque, geralmente pouco utilizadas ou desconhecidas por parte dos alunos. Em geral, aparece próximo ao texto no qual foi destacada.





Teoria

Na formalização de alguns conteúdos, encontra-se um quadro em destaque que apresenta definições, propriedades, conceitos e relações importantes sobre o conteúdo em estudo.

Dica

Esse quadro contém informações complementares, lembretes ou dicas com o objetivo de auxiliar o aluno na resolução de atividades ou na compreensão da teoria.

A coleção também apresenta ícones que indicam informações importantes em diversos momentos do livro. A seguir, detalhamos o que cada um deles representa.

Cálculo mental
Atividades que apresentam técnicas e procedimentos de cálculo mental. Muitas delas incentivam o aluno a perceber propriedades operatórias que facilitam o processo de cálculo.

Construção geométrica
Atividades que propõem construções geométricas utilizando instrumentos como régua, compasso, esquadros, entre outros.

Estimativa
Atividades que sugerem a realização de estimativas, arredondamentos e aproximações como estratégia de cálculo e verificação de sua razoabilidade.

Desafio
Atividades que exigem a busca de estratégias próprias e variadas, que vão além do conteúdo estudado, estimulando os alunos a desenvolverem o raciocínio lógico.

Calculadora
Atividades que buscam explorar técnicas e procedimentos para o uso da calculadora na execução de cálculos, bem como instruir o aluno em seu manuseio.

Elaboração de textos
Atividades que exploram o desenvolvimento da escrita por meio da elaboração de problemas, relatórios, instruções, procedimentos, fluxogramas e outros tipos de textos.

Proporção
Indica que as imagens não estão proporcionais entre si.

Cor
Indica que as cores utilizadas não correspondem às reais.

Internet
Apresenta endereços eletrônicos de *sites* com informações complementares que auxiliam na compreensão e ampliação dos assuntos tratados na página.

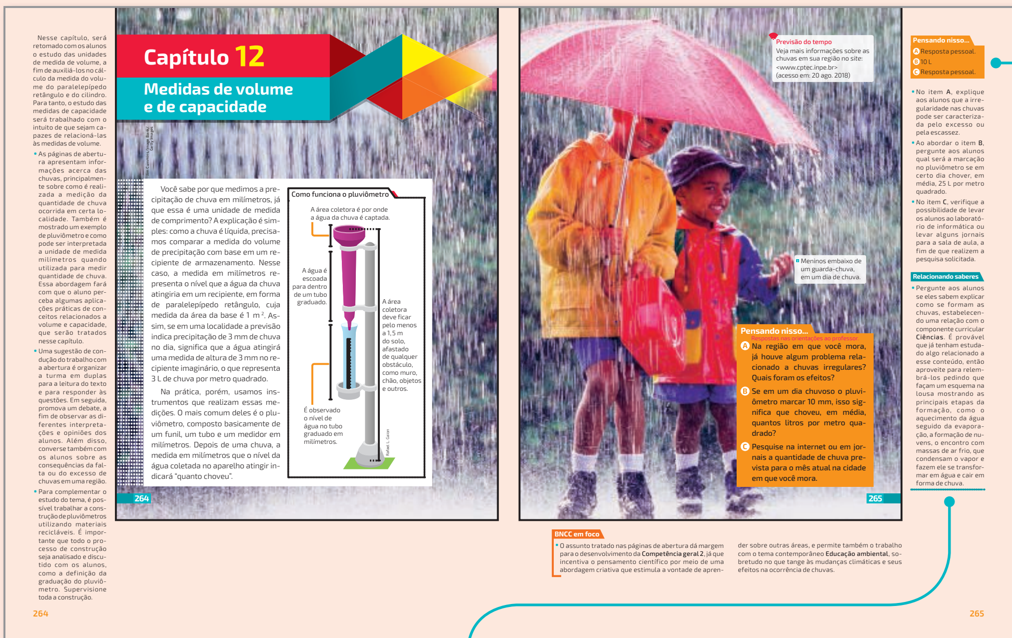
Manual do professor

O manual do professor foi estruturado em duas partes principais. A primeira é composta pelas orientações didáticas e metodológicas da coleção e pelas contribuições da BNCC, com os conteúdos dos capítulos distribuídos em concordância com os objetos de conhecimento e as habilidades específicas de Matemática previstos para este ano na BNCC. Essa parte ainda conta com sugestões de livros e *sites*, páginas para reprodução e bibliografia.

A segunda parte é composta pela reprodução das páginas do livro do aluno de maneira espelhada e reduzida, com as orientações específicas de condução do trabalho ao professor indicadas nas partes lateral e inferior. Todas as respostas das atividades e seções são apresentadas nessa parte do manual, seja no livro do aluno ou nas orientações ao professor.

Veja, a seguir, como configuramos a segunda parte do manual, que corresponde às orientações ao professor página a página.

No início de cada capítulo é apresentado um texto inicial que explicita os principais conteúdos que serão abordados. Também são expostas informações complementares sobre as páginas de abertura e sugestões para trabalhá-las em sala de aula, como a realização de pesquisas adicionais e questionamentos dirigidos aos alunos.


Nesse capítulo, será retomado com os alunos o estudo das unidades de medida de volume, a fim de auxiliá-los no cálculo da medida do volume do paralelepípedo retângulo e do cilindro. Para tanto, o estudo das medidas de capacidade será trabalhado com o intuito de que sejam capazes de relacioná-las às medidas de volume.

- As páginas de abertura apresentam informações acerca das chuvas, principalmente sobre como é realizada a medição da quantidade de chuva ocorrida em certa localidade. Também é mostrado um exemplo de pluviômetro e como pode ser interpretada a unidade de medida milímetros quando utilizada para medir quantidade de chuva. Essa abordagem fará com que o aluno perceba algumas aplicações práticas de conceitos relacionados a volume e capacidade, que serão tratados nesse capítulo.
- Uma sugestão de condução do trabalho com a abertura é organizar a turma em duplas para a leitura do texto e para responder às questões. Em seguida, promova um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. Além disso, converse também com os alunos sobre as consequências da falta ou do excesso de chuvas em uma região.
- Para complementar o estudo do tema, é possível trabalhar a construção de pluviômetros utilizando materiais recicláveis. É importante que todo o processo de construção seja analisado e discutido com os alunos, como a definição da graduação do pluviômetro. Supervisione toda a construção.

Capítulo 12

Medidas de volume e de capacidade

Jim Cummins/Image Bank/Getty Images

Você sabe por que medimos a precipitação de chuva em milímetros, já que essa é uma unidade de medida de comprimento? A explicação é simples: como a chuva é líquida, precisamos comparar a medida do volume de precipitação com base em um recipiente de armazenamento. Nesse caso, a medida em milímetros representa o nível que a água da chuva atingiria em um recipiente, em forma de paralelepípedo retângulo, cuja medida da área da base é 1 m^2. Assim, se em uma localidade a previsão indica precipitação de 3 mm de chuva no dia, significa que a água atingirá uma medida de altura de 3 mm no recipiente imaginário, o que representa 3 L de chuva por metro quadrado.

Na prática, porém, usamos instrumentos que realizam essas medições. O mais comum deles é o pluviômetro, composto basicamente de um funil, um tubo e um medidor em milímetros. Depois de uma chuva, a medida em milímetros que o nível da água coletada no aparelho atingir indicará "quanto choveu".

Como funciona o pluviômetro

A área coletora é por onde a água da chuva é captada.

A água é escoada para dentro de um tubo graduado.

A área coletora deve ficar pelo menos a 1,5 m do solo, afastado de qualquer obstáculo, como muro, chão, objetos e outros.

É observado o nível de água no tubo graduado em milímetros.

Rafael L. Gaion

264

Previsão do tempo
Veja mais informações sobre as chuvas em sua região no *site*: <www.cptec.inpe.br> (acesso em: 20 ago. 2018)

Meninos embaixo de um guarda-chuva, em um dia de chuva.

Pensando nisso...
Respostas nas orientações ao professor.
A) Na região em que você mora, já houve algum problema relacionado a chuvas irregulares? Quais foram os efeitos?
B) Se em um dia chuvoso o pluviômetro marcar 10 mm, isso significa que choveu, em média, quantos litros por metro quadrado?
C) Pesquise na internet ou em jornais a quantidade de chuva prevista para o mês atual na cidade em que você mora.

265

Pensando nisso...
A) Resposta pessoal.
B) 10 L
C) Resposta pessoal.

- No item **A**, explique aos alunos que a irregularidade nas chuvas pode ser caracterizada pelo excesso ou pela escassez.
- Ao abordar o item **B**, pergunte aos alunos qual será a marcação no pluviômetro se em certo dia chover, em média, 25 L por metro quadrado.
- No item **C**, verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática ou levar alguns jornais para a sala de aula, a fim de que realizem a pesquisa solicitada.

Relacionando saberes
- Pergunte aos alunos se eles sabem explicar como se formam as chuvas, estabelecendo uma relação com o componente curricular **Ciências**. É provável que já tenham estudado algo relacionado a esse conteúdo, então aproveite para relembrá-los pedindo que façam um esquema na lousa mostrando as principais etapas da formação, como o aquecimento da água seguido da evaporação, a formação de nuvens, o encontro com massas de ar frio, que condensam o vapor e fazem ele se transformar em água e cair em forma de chuva.

BNCC em foco
- O assunto tratado nas páginas de abertura dá margem para o desenvolvimento da **Competência geral 2**, já que incentiva o pensamento científico por meio de uma abordagem criativa que estimula a vontade de aprender sobre outras áreas, e permite também o trabalho com o tema contemporâneo **Educação ambiental**, sobretudo no que tange às mudanças climáticas e seus efeitos na ocorrência de chuvas.

264

265

Relacionando saberes

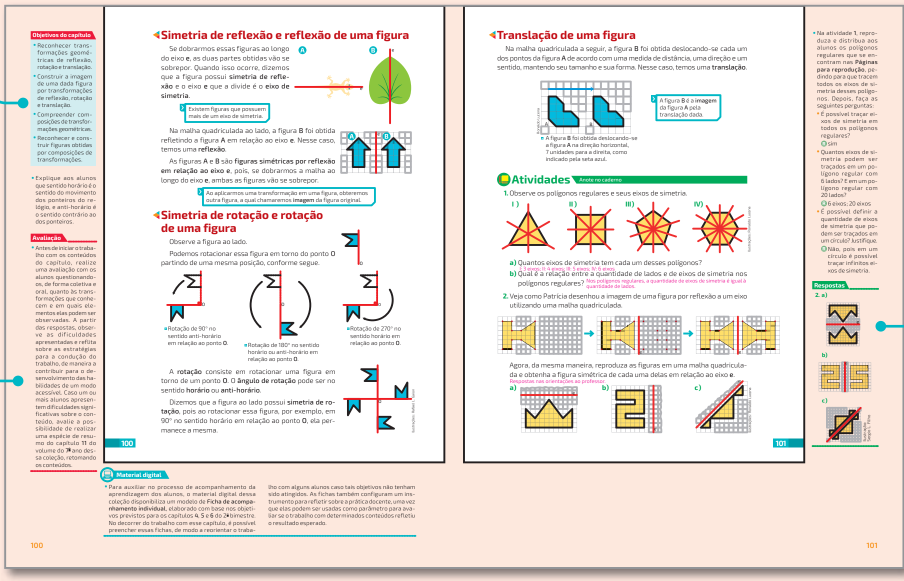
Destina-se a comentários que conectam a Matemática a outras áreas do conhecimento.

Pensando nisso...

Destaca as respostas das questões propostas na seção **Pensando nisso...**.

Objetivos do capítulo

Localizado na página seguinte às páginas de abertura, indica os principais objetivos previstos para o trabalho com o capítulo.



Avaliação

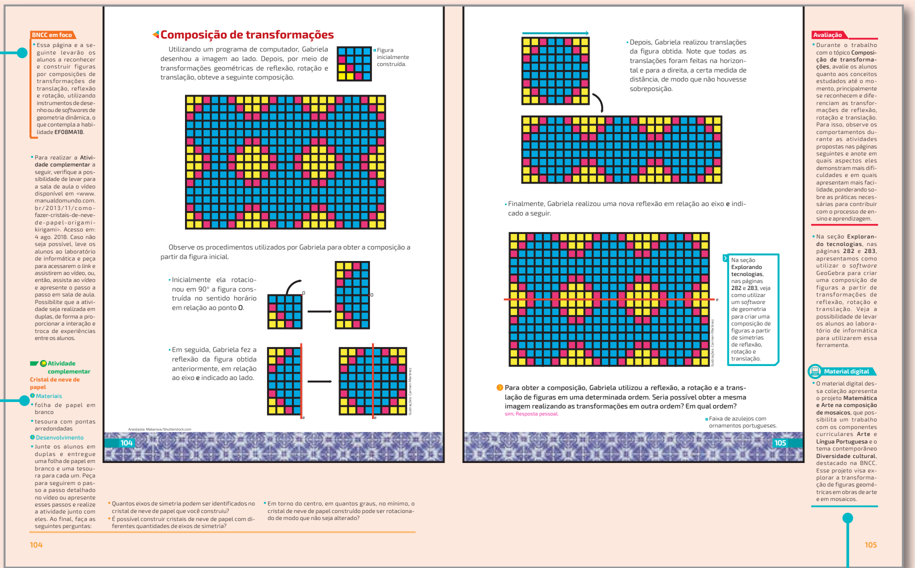
Traz sugestões para auxiliar o professor no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos.

Respostas

De modo geral, as respostas das atividades são preferencialmente apresentadas na reprodução do livro do aluno. Porém, em alguns casos, elas aparecerão nas orientações ao professor, indicadas como **Respostas**.

BNCC em foco

Relaciona o conteúdo trabalhado no livro do aluno às competências gerais, às competências específicas, às habilidades específicas de Matemática e aos temas contemporâneos propostos pela BNCC.



Atividade complementar

Propõe atividades adicionais, como jogos, construções, manipulação de materiais concretos, problemas, entre outras. Indicamos alguns momentos em que é possível utilizar tais atividades como instrumento de avaliação.

Material digital

Aponta momentos oportunos para utilizar os recursos disponíveis no material digital, a fim de enriquecer o trabalho do professor.

Manual do material digital

Como parte das ferramentas que auxiliam o trabalho do professor, esta coleção disponibiliza um **material digital** composto por recursos organizados em bimestres. Embora estruturados de acordo com o livro do aluno, esses recursos são um complemento e podem ser utilizados também por professores que não adotam a coleção.

Assim como este manual e o livro do aluno, o material digital foi produzido com base nos objetos de conhecimento, habilidades e competências propostos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Veja a seguir os recursos que compõem este material.

- **Plano de desenvolvimento**: apresenta a relação dos objetivos específicos de aprendizagem do livro do aluno com os objetos de conhecimento e as habilidades da BNCC. Para auxiliar o desenvolvimento das habilidades do bimestre são sugeridas práticas didático-pedagógicas seguidas de orientações para a gestão de sala de aula importantes para o desenvolvimento dessas práticas. Além disso, são elencadas algumas atividades recorrentes na sala de aula para desenvolver as habilidades desse período; orientações em relação ao acompanhamento contínuo das aprendizagens dos alunos alinhadas com os objetivos essenciais e respectivas habilidades da BNCC para que o aluno possa avançar em seus estudos; sugestões de outras fontes de pesquisa e consulta que podem ser úteis ao professor, tanto para sua formação quanto para o trabalho com os alunos; e projeto integrador. Cada bimestre apresenta um plano de desenvolvimento.
- **Projeto integrador**: é um item do plano de desenvolvimento que tem como objetivo trabalhar com objetos de conhecimento e habilidades de ao menos dois componentes curriculares de modo integrado. Com base em uma questão desafiadora alinhada a temas contemporâneos, as atividades propostas nesse item são organizadas em etapas que visam à apresentação de um produto final à comunidade escolar. Além disso, os projetos integradores são recursos propícios para trabalhar as competências gerais da BNCC. Cada plano de desenvolvimento apresenta um projeto integrador.
- **Sequência didática**: são atividades organizadas em etapas para abordar alguns conteúdos do bimestre, buscando desenvolver objetos de conhecimento e respectivas habilidades. Cada bimestre apresenta três sequências didáticas.
- **Proposta de acompanhamento das aprendizagens**: são ferramentas para auxiliar o acompanhamento das aprendizagens dos alunos em relação a alguns objetos de conhecimento e habilidades desenvolvidos no bimestre. Essa proposta é composta por três itens: avaliação, que propõe dez questões a serem aplicadas aos alunos; gabarito comentado das questões da avaliação, com

reorientações de planejamento e grade de correção; e ficha de acompanhamento individual das aprendizagens, que destaca de maneira organizada as expectativas de aprendizagem do bimestre, de modo que seja possível avaliar cada aluno individualmente, seguida de um formulário para registrar apontamentos que podem contribuir para reuniões do conselho de classe ou atendimento aos pais ou responsáveis. Cada bimestre apresenta uma proposta de acompanhamento das aprendizagens.

- **Material audiovisual**: material disponibilizado ao professor, voltado ao desenvolvimento das habilidades do aluno, esse material é composto por áudios e vídeos que podem contribuir para aprofundar, ampliar ou sintetizar conteúdos trabalhados no bimestre.

Neste manual há sugestões de momentos para aplicação de cada um desses itens. Fica a critério do professor trabalhá-los ou não nos momentos sugeridos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Em um país com dimensões continentais, como é o Brasil, faz-se importante uma unidade no que diz respeito aos conteúdos curriculares e suas propostas. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi pensada no sentido de promover essa unidade, dando subsídios para que os sistemas educacionais públicos e particulares possam estar em conformidade com as diretrizes curriculares e trabalhem os conhecimentos essenciais levando em conta não somente aspectos intelectuais, mas também culturais, emocionais e outros.

O alinhamento na educação que convergiu na BNCC é uma demanda que remonta à promulgação da Constituição Federal de 1988 e vem sendo trabalhado e discutido há tempos, com base em experiências bem-sucedidas e pautado pelas necessidades oriundas dos assuntos e contextos atuais.

Uma base é algo que não só fundamenta, mas também norteia. Nessa perspectiva, a BNCC atua como orientadora dos rumos para trabalhar os currículos e alcançar seus objetivos, primando pelo respeito às diferenças e pela preservação da diversidade que constitui o país. Por serem essencialmente plurais, as orientações ampliam-se para além do ambiente escolar e ecoam no ambiente familiar, de modo que a escola, os professores e a família tenham seus papéis ativados na formação integral do aluno.

Nesse contexto, a BNCC sugere a organização para o Ensino Fundamental (anos iniciais, 1º ao 5º, e finais, 6º ao 9º) a partir de diferentes **componentes curriculares**, agrupados em cinco **áreas do conhecimento**, que se inter-relacionam na formação dos alunos.

<table>
<tr><th>Áreas do conhecimento</th><th>Linguagens</th><th>Matemática</th><th>Ciências da Natureza</th><th>Ciências Humanas</th><th>Ensino Religioso</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Componentes curriculares</td><td>Língua Portuguesa</td><td rowspan="4">Matemática</td><td rowspan="4">Ciências</td><td rowspan="2">Geografia</td><td rowspan="4">Ensino Religioso</td></tr>
<tr><td>Arte</td></tr>
<tr><td>Educação Física</td><td rowspan="2">História</td></tr>
<tr><td>Língua Inglesa</td></tr>
</table>

Competências gerais

Tendo como mote a formação humana em suas múltiplas proporções e a construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva, a BNCC organizou algumas atribuições em dez **competências gerais** que descrevem objetivos a serem atingidos para o desenvolvimento integral do aluno, que orientam as aprendizagens em todas as áreas do conhecimento.

O conceito de competência, conforme entendido pela BNCC, é a mobilização e a articulação de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para a solução de circunstâncias do cotidiano e de demandas que evocam posicionamentos críticos, éticos e criativos no mundo do trabalho e das situações relacionadas ao exercício da cidadania. A respeito dessas competências, o documento assinala:

> [...] Por meio da indicação clara do que os alunos devem “saber” (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017. p. 13. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 16 set. 2018.

As competências, de maneira geral, buscam valorizar o conhecimento e estimular a curiosidade e a postura dialógica, além de prepararem os alunos para a aplicação dos saberes em seu dia a dia com consciência crítica, respeito a si e ao próximo, e incentivá-los a agir em favor da justiça social, dos direitos humanos e da sustentabilidade. Vale destacar, também, a valorização do desenvolvimento dos campos emocional, cultural e físico, que se articulam aos saberes intelectuais para complementar a formação. São estas as competências gerais:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e

a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017. p. 9-10. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 16 set. 2018.

O desenvolvimento dessas competências será estimulado em diversos momentos do trabalho com o livro do aluno, sendo referenciadas algumas vezes nas orientações ao professor.

Competências específicas de Matemática

A BNCC assinala a articulação das competências gerais com as diferentes áreas do conhecimento, o que culmina em **competências específicas** para cada componente curricular do Ensino Fundamental.

As competências específicas são estabelecidas com base na área do conhecimento e, caso a área agrupe mais de um componente curricular, também são definidas competências específicas do componente. A seguir, destacamos as que são relativas à Matemática.

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questio-

namentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017. p. 265. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 16 set. 2018.

As propostas apresentadas nas explicações teóricas, nas atividades e seções ao longo dos volumes da coleção foram desenvolvidas no sentido de encorajar o trabalho com as **competências específicas de Matemática**.

Objetos de conhecimento e habilidades

Com base na BNCC, a coleção traz os pressupostos teóricos e uma organização dos conteúdos pautada no que é apontado como referência para o ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental.

As competências específicas de Matemática e as habilidades propostas para cada ano foram, portanto, tomadas como norte para distribuir os conteúdos e auxiliar o professor no processo de aprendizagem dos alunos, de modo que ele atue como um agente facilitador da construção do conhecimento matemático.

Com o objetivo de garantir que essas competências sejam desenvolvidas, é apresentado um conjunto de **habilidades** para cada componente curricular, organizadas a partir de **objetos de conhecimento**, “entendidos como conteúdos, conceitos e processos” (BRASIL, 2017, p. 28), agrupados por **unidades temáticas**.

Unidades temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades

Para o componente curricular Matemática, por exemplo, cada uma das habilidades recebe um código alfanumérico que indica a etapa da educação (no caso, Ensino Fundamental), o ano, o componente e a numeração sequencial da habilidade.

EF07MA09

Ensino Fundamental ← EF

7º ano ← 07

Matemática ← MA

Numeração da habilidade ← 09

Na primeira parte do manual do professor, no tópico **Distribuição de conteúdos**, serão descritos cada um dos objetos de conhecimento e das habilidades previstas para serem desenvolvidas em determinado capítulo e ano específico da coleção. Ressaltamos que essas propostas são sugestões, e portanto podem ser reorganizadas conforme a conveniência.

> Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017. p. 296. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 16 set. 2018.

Na segunda parte do manual, em que se encontram as orientações ao professor página a página, indicaremos de forma mais pontual em quais momentos o conteúdo previsto poderá auxiliar no desenvolvimento das habilidades, fazendo referência aos códigos que as representam.

Dessa maneira, a coleção fornece subsídios para o desenvolvimento de todas as habilidades previstas e estimula, sempre que possível, a articulação com as competências gerais e específicas.

Temas contemporâneos

A relação das sociedades modernas com a dinâmica das transformações do mundo culmina em desafios de diferentes esferas. São temas que dizem respeito ao meio ambiente, ao consumo, à saúde, aos direitos humanos e tantas outras questões de urgência no panorama atual. Nesse contexto, a BNCC assinala a necessidade de que os currículos e as propostas pedagógicas contemplem, de uma maneira transversal e integradora, o que foi denominado como temas contemporâneos, para que favoreçam a participação social cidadã dos alunos com base em princípios e valores democráticos.

Muitos desses temas já constavam como necessários em orientações pedagógicas de outros documentos oficiais da área educacional, que também incentivavam uma abordagem contextualizada capaz de estimular nos alunos uma reflexão crítica.

No que diz respeito a essa coleção, a abordagem dos temas contemporâneos pode ser encontrada tanto no livro do aluno quanto nas orientações ao professor, e é estimulada não só no decorrer do trabalho com as atividades e as explanações teóricas por meio de diferentes recursos, mas também em uma seção específica, intitulada **Cidadania: explore essa ideia**, sempre com o intuito de auxiliar o professor no desenvolvimento dos temas.

Os temas contemporâneos e as questões a eles relacionadas são apresentados de uma maneira contextualizada, de forma a explorar a integração com os conteúdos estudados. Assim, a seção **Cidadania: explore essa ideia** tem como um dos principais objetivos proporcionar ao aluno condições de refletir sobre sua postura diante dos assuntos abordados e da realidade que o cerca, contribuindo para sua formação como cidadão. Por serem temas presentes em nosso cotidiano que suscitam discussões cabíveis a diversos componentes curriculares, proporcionam reflexões relevantes sobre assuntos que extrapolam esses conteúdos.

A seguir, os temas contemporâneos indicados pela BNCC e que serão trabalhados nesta coleção são apresentados sucedidos por uma breve explicação.

Direitos da criança e do adolescente

O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), aprovado em 1990 pela lei nº 8.069, sistematizou e formalizou o conjunto dos direitos concernentes a essas faixas etárias (crianças até 12 anos incompletos e adolescentes de 12 a 18 anos). É um documento que prioriza a necessidade de conceder uma proteção integral à criança e ao adolescente, atribuindo-lhes prioridades integrais em diversos setores públicos e na destinação de recursos.

Com isso, crianças e adolescentes passaram a ser compreendidos como pessoas em estágio de desenvolvimento que necessitam de atenção e proteção da sociedade como um todo, de modo que a educação assume um papel fundamental na valorização desses direitos e na efetivação das perspectivas descritas no ECA.

No âmbito escolar, a valorização dos direitos da criança e do adolescente pode ser abordada por meio de temas como a prevenção do trabalho e a exploração infantil, o desenvolvimento do senso crítico quanto ao papel das mídias e das redes sociais no processo de crescimento cultural e pessoal dos jovens, além da valorização de atitudes de respeito à diversidade e do incentivo à ampliação do universo cultural de crianças e adolescentes.

Educação para o trânsito

O trabalho com esse tema assume grande relevância na tarefa de promover a interação dos alunos com o meio social em que vivem, contribuindo para que a escola transcenda o conteúdo dos componentes curriculares. Uma maneira de desenvolvê-lo é com a proposição de dinâmicas que compreendam situações reais e contextualizadas e que permitam a reflexão a respeito do tema.

Educação ambiental

Tendo em vista que os problemas que envolvem o ambiente estão constantemente nos meios de comunicação, esse tema incita importantes reflexões, por estar mais próximo à realidade dos alunos. Assim, é possível contemplar diversas discussões e troca de ideias em sala de aula, de forma que o aluno se identifique como parte integrante da natureza e da sociedade e se comprometa com a proteção e a conservação ambiental, tanto em âmbito local quanto global.

Educação alimentar e nutricional

Com o intuito de afirmar comportamentos e hábitos saudáveis e que repercutam na qualidade de vida do aluno e da coletividade, esse tema promove abordagens que estimulam habilidades e práticas favoráveis à saúde, como a alimentação saudável. Além disso, ao colocar também em evidência alguns costumes alimentares das diferentes regiões do Brasil, o trabalho com o tema auxilia no desenvolvimento da tolerância e do respeito pela diversidade cultural brasileira.

Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso

O Estatuto do Idoso, aprovado em 2003, foi um marco para a garantia de direitos relacionados ao bem-estar das pessoas com idade igual ou superior a 60 anos, já que se define por uma série de leis que buscam promover o respeito, a autonomia, a integração e a participação efetiva dos idosos na sociedade brasileira.

Além do Estatuto, a educação é mais um meio de conscientizar os alunos sobre a importância e o valor das pessoas idosas em nossa sociedade.

Para tanto, é necessário promover a sociabilização entre alunos e pessoas idosas, de modo que possam compartilhar conhecimentos e memórias, relatar suas experiências e, com isso, aprofundar o sentido do que foi estudado.

A participação de idosos na vida escolar é, portanto, uma questão fundamental, por isso os projetos pedagógicos devem esforçar-se para contemplar a participação de pessoas idosas da comunidade e de fora dela no processo de ensino-aprendizagem.

Educação em direitos humanos

A abordagem desse tema é fundamental para o desenvolvimento dos sensos de justiça, igualdade e democracia nos alunos, estimulando a consciência crítica sobre a importância de garantias constitucionais para o desenvolvimento pleno dos indivíduos em sociedade. Entre os principais direitos que devem ser garantidos a todo cidadão estão os direitos à vida, à saúde, à alimentação, à moradia, à liberdade, à igualdade, à educação e à livre expressão de afeto. Nesse sentido, é importante promover debates para aproximar temas relacionados aos direitos humanos da realidade do aluno e do cotidiano escolar.

Educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena

Esse tema configura-se de suma importância para a valorização cultural pluriétnica do país. É importante que os alunos reflitam a respeito da formação da sociedade brasileira, debatendo as arbitrariedades e injustiças nas relações étnico-raciais que se estabeleceram historicamente e que ainda ocorrem das mais diversas formas na sociedade. Assim, ao trabalhar esse tema, é importante promover a luta por uma sociedade igualitária, a preservação da memória, o respeito pelas diferentes culturas que contribuíram para a formação do país e o combate ao preconceito racial.

Saúde

Trata-se de um tema amplo que engloba da conscientização para uma mudança de hábitos à interação entre o meio físico, social e cultural dos indivíduos. Sendo assim, questões como o saneamento básico, a qualidade do ar, o estilo de vida, a distribuição de renda, a segurança alimentar, entre outras, são abordadas por terem grande influência no bem-estar das pessoas.

Nesse sentido, a escola tem a oportunidade de estruturar e estimular os comportamentos e hábitos saudáveis dos alunos, fornecendo elementos que os capacitem a cuidar da saúde no âmbito pessoal e coletivo, como o incentivo ao autocuidado e à prevenção, fazendo-os compreender a saúde como direito e responsabilidade pessoal e social.

Vida familiar e social

Este é um tema amplo que aborda as relações dos alunos com suas famílias, o respeito pelas diversas gerações, pelas diferentes estruturas familiares e a convivência com seus colegas, comunidade escolar e sociedade. Além disso, possibilita discutir as transformações no papel das mulheres nas famílias ao longo do tempo e desconstruir preconceitos relacionados aos espaços que elas ocupam.

Educação para o consumo

O consumo consciente é uma preocupação global que se relaciona ao esgotamento de recursos do planeta. Partindo desse princípio, o trabalho com esse tema objetiva fazer com que os alunos reflitam sobre suas escolhas, de modo que se tornem cidadãos preparados para observar, argumentar e contribuir para uma sociedade mais igualitária, conscientes de seus direitos e deveres.

Tendo em vista sua transversalidade, é um tema que permeia toda a coleção, tanto nas atividades propostas como no desenvolvimento teórico dos conceitos, em situações relacionadas, por exemplo, à educação financeira, aos cuidados com o meio ambiente e com a saúde, entre outras.

Educação financeira e fiscal

Este é um tema bastante relacionado com alguns conteúdos matemáticos, que permite que o aluno conheça o sistema tributário do país, o valor da moeda, a importância dos impostos e o modo como são utilizados pelas esferas governamentais. As abordagens também estimulam atitudes cidadãs que visam reivindicar a melhoria de produtos e serviços públicos ofertados com base nos impostos coletados pelo governo.

Trabalho

Este tema abrange questões de vários âmbitos relacionadas às atividades profissionais, como as relações de dependência, a distribuição desigual da riqueza na maioria dos países e a importância e o valor de todas as profissões. Ao abordar esse tema, deve-se considerar sua importância para a vida das pessoas e o impacto que encontra ecos tanto na sociedade quanto na natureza.

É importante que os alunos sejam capazes de conceber o trabalho não apenas como o exercício de uma atividade e uma fonte de renda para o indivíduo custear suas necessidades, mas que também compreendam a complexidade das relações de trabalho.

Ciência e tecnologia

O estudo desse tema, além de estar em consonância com os avanços no campo das pesquisas, possibilita compreender como o ser humano se relaciona com o ambiente ao seu redor e com os outros seres vivos por meio das técnicas que desenvolve, promovendo a reflexão sobre as complexidades e consequências dessas relações. Alguns dos assuntos abordados são os aspectos sociais e humanos da ciência e da tecnologia e a influência que ambas exercem sobre os campos social, cultural, econômico e ambiental, sempre de uma maneira crítica que permite perceber os impactos positivos e negativos na sociedade.

Diversidade cultural

O trabalho com este tema é importante para o entendimento da multiplicidade etnocultural brasileira. Nesse sentido, o respeito às diferenças étnicas, religiosas, linguísticas e regionais somado ao repúdio a qualquer tipo de discriminação é fundamental para uma convivência harmoniosa e justa tanto no ambiente escolar quanto em sociedade.

Orientações didáticas e metodológicas

O ensino de Matemática

A Matemática desempenha um importante papel na formação de cidadãos capazes de compreender o mundo em que vivem e de se comunicar em sociedade, pois está relacionada a várias áreas do conhecimento e faz parte do cotidiano das pessoas. Diante disso, o conhecimento matemático constitui-se uma ferramenta de grande aplicabilidade e deve ser amplamente explorado.

Por ser uma ciência viva, em constante transformação, a Matemática não pode ser encarada como um conjunto de conhecimentos prontos e acabados, imutáveis. É importante que os estudantes a compreendam como fruto da criação humana ao longo da história, inclusive do presente. Um exemplo disso são os desenvolvimentos tecnológicos estreitamente associados aos tradicionais e aos novos conceitos matemáticos, como aqueles que relacionam a programação de computadores às ideias de lógica e de grafos.

Contar, mensurar, representar, compreender fenômenos, calcular e resolver problemas são alguns exemplos de conhecimentos desenvolvidos com a Matemática e que são essenciais na formação de um cidadão do século XXI. No mundo do trabalho, atualmente, são exigidas diversas características dos profissionais, como criatividade, trabalho cooperativo, autonomia, argumentação e construção de estratégias, que encontram terreno no campo da Matemática. Identificar um problema, compreendê-lo, elaborar uma estratégia e resolvê-lo adequadamente são habilidades que podem ser trabalhadas nas aulas de Matemática e que são extremamente valorizadas na formação de um profissional.

Além disso, o ensino da Matemática pode oferecer contribuições significativas para outros aspectos da formação social do cidadão, capacitando-o, por exemplo, a debates relacionados a questões ambientais, ao consumo, à ética e ao respeito à diversidade étnica e cultural.

O manual do professor norteia o trabalho com a coleção no sentido de valorizar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito de situações cotidianas, de outras áreas do conhecimento e da própria matemática, a fim de ampliá-los e enriquecê-los por meio de diversos recursos didáticos e estratégias de trabalho.

Seleção de conteúdos para o Ensino Fundamental

Os conteúdos trabalhados nesta coleção propiciam ao aluno construir e organizar o raciocínio lógico-matemático e promover o desenvolvimento intelectual, criativo, crítico e intuitivo, entre outras competências. Essas atribuições possibilitam que os alunos sejam capazes de ler, compreender e inferir sobre fatos e fenômenos do cotidiano.

Em toda a coleção, os conteúdos matemáticos fundamentais estão organizados em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística.

Números

O conhecimento acerca dos números é construído pelo aluno, ao longo do Ensino Fundamental, como um instrumento eficiente para quantificar, ordenar, medir, codificar e, consequentemente, resolver determinados tipos de problemas. Nesse contexto, outras ideias fundamentais associadas aos números incluem estratégias de aproximação, arredondamento e estimativa.

O trabalho ao longo da coleção levará os alunos a aprender sobre os números naturais, inteiros, racionais e irracionais, bem como seus diferentes significados, considerando suas relações, propriedades e questões ligadas à maneira como foram constituídos.

No que se refere às operações, os alunos serão capacitados a resolver e elaborar problemas utilizando diversas estratégias, como cálculos mentais e escritos, exatos ou aproximados, e instrumentos, como o ábaco, a calculadora, o material dourado e o computador. Além disso, serão estimulados a compreender as relações existentes entre determinadas operações e as propriedades operatórias.

Da mesma maneira, também serão encorajados a calcular porcentagens, porcentagem de porcentagem, acréscimos e decréscimos, especialmente em contextos que envolvem economia e finanças, com o intuito de desenvolver a educação para o consumo e financeira.

Ressaltamos que o desenvolvimento do pensamento numérico não se faz de maneira isolada, sendo comum relacionar esse campo às outras unidades temáticas.

Álgebra

O desenvolvimento do pensamento algébrico trata essencialmente do esforço em dar significado para a álgebra, como ao modelar um problema representando-o por uma equação, ao estabelecer relação entre grandezas por meio de uma lei, ao descrever padrões de sequências, ou ainda ao perceber regularidades de propriedades operatórias.

Ao longo do Ensino Fundamental, espera-se que os alunos, nos anos iniciais, sejam capazes de raciocinar algebricamente, mas ainda de forma mais preliminar, sem utilizar a linguagem algébrica. Já nos anos finais, a proposta dessa unidade temática é a de que os alunos possam compreender o significado de uma variável numérica em uma expressão, generalizar propriedades, descrever regularidades de sequências, inclusive por meio de expressões algébricas, resolver equações, entre outras capacidades. Nessa fase é importante que percebam a relação entre variável e função e incógnita e equação, sabendo diferenciar o significado da representação da letra nesses casos.

Destacamos que a Álgebra está conectada às outras unidades temáticas, uma vez que o pensamento algébrico é útil para modelar problemas apresentados em língua materna para a linguagem matemática, com fórmulas, gráficos e outras representações.

Geometria

O trabalho com a Geometria permite ao aluno interpretar e compreender melhor as formas que o cercam e o mundo em que vive. O conhecimento geométrico tem papel fundamental para a compreensão de conceitos vinculados à Matemática e a outras áreas do conhecimento. Um fator importante no ensino dessa unidade temática é promover valores culturais e estéticos, desenvolvendo a apreciação das formas encontradas na natureza e nas obras de arte. Assim, nesta coleção, procuramos trabalhar com base em objetos, obras de arte, desenhos, pinturas, esculturas, entre outros, a fim de possibilitar ao aluno estabelecer essas conexões.

O estudo da Geometria possibilita a visualização e a percepção do espaço, o reconhecimento e a abstração de formas, além de desenvolver a capacidade de representar essas formas por meio de desenhos ou construções. Também auxilia na aprendizagem de números e medidas, pois leva os alunos a identificarem regularidades e a observarem semelhanças e diferenças. Algumas ideias essenciais presentes nesse trabalho são construção, representação e interdependência.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, são destacadas as transformações de figuras geométricas planas, permitindo aos alunos desenvolverem conceitos de congruência e semelhança, e possibilitando realizar algumas demonstrações simples, como as que envolvem congruência de triângulos. Há também a aproximação entre a Geometria e a Álgebra, por meio dos estudos com o plano cartesiano. A geometria analítica é abordada em atividades que trabalham ideias de coordenadas, por exemplo, na representação da solução de sistemas de equações do 1º grau.

Grandezas e medidas

Os conceitos relacionados às Grandezas e medidas são caracterizados pelo caráter prático. Nesse sentido, essa unidade temática permite a articulação com outras áreas do conhecimento, como Ciências, a partir do trabalho com temperatura, energia e grandezas e escalas do Sistema Solar, por exemplo, ou Geografia, como no trabalho com escalas de mapas e densidade demográfica. Envolver essas noções nos estudos faz com que os alunos percebam a utilidade desses conceitos em situações cotidianas.

A fim de ampliar o que já foi estudado sobre grandezas e medidas nos anos iniciais, os alunos serão levados a reconhecer comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas relacionadas a figuras geométricas, e a escrever e utilizar expressões algébricas para calcular medidas de área e de volume de figuras geométricas planas e espaciais.

Da mesma maneira, serão estimulados a utilizar instrumentos de medição associados a cada uma das grandezas estudadas, assim como resolver problemas que envolvem as unidades de medida padronizadas mais usuais.

Os contextos explorados nessa unidade temática possibilitam tratar de importantes conceitos referentes à Geometria, dar significado a elementos da unidade Números, explorar as ideias de proporcionalidade, além de permitirem uma rica abordagem histórica.

Cabe destacar que, com o advento da informática e seu grande alcance na atualidade, são exploradas, também, algumas unidades de medida relacionadas a esse tema, como velocidade de processamento e armazenamento de dados.

Probabilidade e estatística

Diariamente as pessoas são expostas a uma grande quantidade de informações que, muitas vezes, exigem a leitura e a interpretação de gráficos e tabelas e o conhecimento de outros elementos estatísticos.

Nesta coleção, a unidade temática Probabilidade e estatística tem a finalidade de levar o aluno, de maneira gradual, a compreender procedimentos de coleta e organização de dados, comunicar os resultados obtidos utilizando tabelas, gráficos e outras representações, além de calcular algumas medidas estatísticas, como média, mediana, moda e amplitude, que constituem importantes ferramentas conceituais na interpretação de dados.

Os recursos da estatística desempenham um importante papel como instrumento na análise de várias questões, como as de âmbito social, por exemplo. O trabalho com diferentes contextos, vinculado ao uso do conhecimento matemático, auxilia na formação de um cidadão crítico, consciente e participativo na sociedade.

Em relação à probabilidade, a principal finalidade é levar o aluno a compreender a noção de acontecimentos de natureza aleatória com base na observação de fenômenos do dia a dia, explorando a ideia de acaso e incerteza de maneira inicialmente intuitiva e, posteriormente, procurando quantificar a chance de ocorrência de resultados incertos. Para isso, os alunos devem realizar experimentos e observar eventos, discutindo as ideias básicas de espaços equiprováveis. Ainda nesse campo, deve ser dada prioridade aos problemas de contagem, principalmente aos que apresentam situações em que ocorrem diferentes tipos de agrupamentos, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo. Deve-se enfatizar esse conteúdo como instrumento para o cálculo de probabilidade.

Nesta coleção, os conteúdos relacionados a essa unidade temática são trabalhados em todo o livro do aluno, sendo que cada volume conta com um capítulo para tratar desses assuntos específicos.

O papel do professor

As questões que cercam o processo de ensino e aprendizagem têm recebido grande ênfase em decorrência das constantes mudanças ocorridas na sociedade. Consequentemente, a escola vem passando por uma transição de metodologia de ensino.

O professor, cada vez mais, assume o papel de mediador, facilitador, incentivador e avaliador do processo de construção do conhecimento pelo aluno.

Para desenvolver tais habilidades, o professor precisa ter conhecimento não apenas do conteúdo específico de sua área de atuação, mas também das práticas pedagógicas que colocam o aluno no centro do processo de aprendizagem, e também articular esses conhecimentos com as condições socioculturais, as expectativas e a competência cognitiva dos alunos.

Na função de mediador, o professor é responsável por pautar os procedimentos utilizados pelos alunos nos processos de resolução de problemas, promover debates e valorizar as soluções e o esforço pessoal de cada um, a fim de chegar a um consenso sobre maneiras mais adequadas ou mais eficientes de resolver determinados tipos de problemas.

Enquanto facilitador da aprendizagem, o professor deve propor questionamentos que norteiem os alunos na obtenção de informações e ferramentas que dificilmente teriam condições de obter sozinhos.

Na função de incentivador, não pode deixar de lado seu papel social no ambiente escolar. Ele deve estimular o trabalho coletivo entre os alunos, tão importante quanto a interação entre aluno e professor. Nesse sentido, deve primar por um ambiente de aprendizagem onde os alunos tenham a oportunidade de confrontar e argumentar ideias.

Como avaliador, o professor deve procurar identificar se sua prática pedagógica está adequada ou se necessita de reorganização, e também dar aos alunos a oportunidade de verificar conquistas e dificuldades na construção do conhecimento.

> [...] ao avaliar uma situação, o professor ou a professora não apenas constata e pontua determinada dificuldade do aluno. O professor ou a professora tam-

bém decide que tipos de encaminhamentos e intervenções deve inserir em sua prática pedagógica para que o aluno supere a sua dificuldade inicial. Nesse caso, o professor ou a professora considera não apenas o que o aluno foi capaz de fazer, mas também aquilo que ele já sabe fazer, para, a partir disso, planejar as atividades seguintes.

[...]

CHAMORRO, Carla Cristine Wittmann et al. Avaliação da Aprendizagem em Matemática nos Anos Iniciais. In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Pró-Letramento**: Matemática. Brasília: MEC/SEB, 2007. Fascículo 8. p. 9. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/fasciculo_mat.pdf>. Acesso em: 12 set. 2018.

Ao refletir sobre o acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o professor também faz uma autoavaliação sobre sua própria prática docente. Segundo Perez (2004), pode-se considerar que:

> A reflexão é vista como um processo em que o professor analisa sua prática, compila dados, descreve situações, elabora teorias, implementa e avalia projetos e partilha suas ideias com colegas e alunos, estimulando discussões em grupo.
>
> [...]

PEREZ, Geraldo. Prática reflexiva do professor de matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 252.

Esses múltiplos papéis assumidos pelo professor transformam-no em um agente na formação integral dos alunos, a fim de que estes se tornem cidadãos responsáveis que atuam na sociedade. Nesse sentido, Santaló (1996) afirma que:

> A missão dos educadores é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, com comodidade e eficiência, no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade.
>
> [...]

SANTALÓ, Luis A. Matemática para não matemáticos. In: PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 11.

Planejamento

A promoção de condições para a aprendizagem é um fator de demasiada importância para o sucesso do trabalho com os conteúdos matemáticos. Desse modo, o planejamento das aulas adquire grande relevância, pois é o momento em que o professor pode refletir sobre como trabalhar as habilidades dos alunos e quais estratégias e materiais podem ser utilizados no ensino dos diferentes conteúdos. Os objetivos de cada capítulo são um ponto de partida para a orientação das aulas e do tempo necessário para o trabalho, e também para a criação de estratégias que visem suprir as necessidades e as expectativas dos alunos.

É importante considerar que o planejamento não é um registro estanque, pois deve proporcionar flexibilidade para ser ajustado. Ao planejar, o professor tem condições de aplicar suas aulas de maneira mais segura almejando um melhor resultado.

Trabalho em grupo

O trabalho em grupo é um tipo de atividade que desenvolve nos alunos diferentes habilidades socioemocionais. Nesses momentos de aprendizagem coletiva, em que os alunos conversam entre si e discutem diferentes visões, a interação é ativada e eles têm a oportunidade de desenvolver, com a troca de ideias e os debates, entre tantas outras coisas, o sentido de organização e cooperação.

Vale destacar que, nesse tipo de abordagem, os alunos podem se expressar de modo espontâneo, colocando suas experiências pessoais com leveza, já que há espaço para a experimentação. O professor de Matemática torna-se um mediador do processo de aprendizagem e assume o papel de encorajador na busca de soluções, lançando mão de situações que suscitem um debate rico e construtivo, em que os alunos devem expor suas ideias sempre com vistas a estabelecer uma relação com as opiniões dos colegas, argumentando e ouvindo.

Por ser um trabalho de cooperação, a postura do professor adquire suma importância ao estimular e levar os alunos a se manifestarem e expressarem seus sentimentos e dúvidas de maneira agradável e harmoniosa. Assim, é recomendado que o professor acompanhe o desenvolvimento das ideias e dos argumentos dos alunos. A proposição de questões desafiadoras, capazes de levar o aluno a refletir com argumentos e contra-argumentos, proporciona o desenvolvimento de habilidades essenciais para o convívio humano, para a sociabilidade, para a produção do pensamento e para a aceitação da diversidade.

Nesse sentido, o professor deve estar sempre atento a fatores que, porventura, possam coibir as livres manifestações e causar algum tipo de constrangimento, como grupos que se formam e deixam algum aluno de fora, situações de opressão e bloqueio e discriminação.

A importância da leitura e da escrita

Competência leitora

A capacidade de compreender aquilo que lê é imprescindível para a participação efetiva na vida em sociedade, sobretudo em tempos de muita informação. Pesquisas realizadas nos últimos anos apontaram que uma parcela significativa dos brasileiros, apesar de saber ler e escrever, não consegue compreender adequadamente textos mais extensos ou complexos, o que significa uma defasagem na competência leitora.

A leitura não é um aprendizado fechado, com início e fim. Estamos constantemente aprendendo a ler, a interpretar, e cada texto e situação requer estratégias diferentes de leitura, como levantamento de hipóteses e suposições antes da leitura e a retomada ao final. Tais estratégias também serão sempre plurais conforme as experiências de cada um, ou seja, de acordo com o modo como cada pessoa reúne essas experiências e interpreta a realidade.

A competência se dá justamente na capacidade de empregar esses conhecimentos e as experiências no estabelecimento de relações com os problemas, ou seja, fazer interpretações, interpolações, inferências e associações. A competência leitora está, portanto, atrelada ao modo como a pessoa explora os diversos tipos de mensagens, que podem estar expressas em imagens, gráficos, formulários ou tabelas, publicidades e, sobretudo, com a prática de estratégias de leitura que possibilitam a decodificação de uma maneira mais crítica e autônoma.

É importante lembrar que o fato de um aluno saber ler e escrever, o que ocorre quando ele é alfabetizado, não é suficiente para que ele seja considerado um leitor fluente, isto é, pode ser que ele não tenha capacidades de utilizar estratégias e mobilizar recursos necessários para compreender o que está lendo e exercite uma leitura mecânica.

Ao se considerar a dinâmica de propagação das informações atualmente, vê-se que, na maioria das vezes, o contato com a leitura é feito de maneira rápida e fragmentada. Isso requer atenção e o professor precisa estar apto para desenvolver nos alunos a criticidade em relação ao que se lê.

As atividades desta coleção foram desenvolvidas com vistas à prática da competência leitora, estimulando os alunos com fontes de informação diversificadas, com o objetivo de auxiliá-los na compreensão dos textos de maneira crítica e reflexiva. Além disso, as atividades também visam à valorização das experiências pessoais e buscam a promoção da autonomia, tornando-os sujeitos mais ativos em seu próprio aprendizado.

Leitura e prática da escrita

Na esteira do desenvolvimento da competência leitora, a escrita também deve ser constantemente encorajada, já que a produção de textos estimula os alunos a despertarem sua visão crítica e a refletirem sobre aquilo que estão escrevendo, decifrando ainda mais os conteúdos.

Com base nisso, todos os capítulos desta coleção contam com atividades que impulsionam a leitura e a prática da escrita por meio da elaboração de enunciados de problemas, do desenvolvimento de relatórios sobre pesquisas, da produção de argumentos convincentes sobre observações matemáticas, da síntese de conclusões, entre outros. Assim, espera-se que o aluno, com o auxílio da Matemática, compreenda a importância da leitura e da escrita em sua formação.

Tecnologia e educação

A velocidade com que os avanços tecnológicos acontecem no cerne da sociedade contemporânea coloca em discussão a prática docente: como reorientar o trabalho na sala de aula para acompanhar as novas gerações?

As Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) permitem que qualquer tipo de informação seja processada em tempo real e a comunicação seja instantânea, independente das distâncias geográficas. Devemos considerar que a cultura digital tem provocado mudanças sociais e que os jovens

> [...] têm se engajado cada vez mais como protagonistas da cultura digital, envolvendo-se diretamente em novas formas de interação multimidiática e multimodal e de atuação social em rede, que se realizam de modo cada vez mais ágil. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão Final. Brasília: MEC, 2017. p. 59. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 16 set. 2018.

A partir desse contexto e sob a perspectiva de que o professor deve formar-se continuamente em busca de novos métodos de ensino, as TICs apresentam-se como uma possibilidade enriquecedora para o trabalho do professor.

> [...] é preciso que se construa uma nova concepção de uso, integração e apropriação das tecnologias e mídias digitais que vá além da utilização instrumental, marginal, disjunta e fragmentada – uma concepção que (re)ligue, que articule os recursos tecnológicos digitais aos conteúdos escolares, uma concepção que capture as linguagens implícitas nas mídias que estão presentes nos recursos tecnológicos digitais, uma concepção que incorpore a necessidade do letramento digital. [...]

LUIZ, Learcino dos Santos; SANTOS, Taís Wojciechowski; SÁ, Ricardo Antunes de. A integração das tecnologias e mídias digitais no processo de construção do conhecimento escolar. In: MASCHIO, Elaine Cátia Falcade; SOARES, Eliana Maria do Sacramento (Org.). **Cultura escolar, tecnologias e práticas**: perspectivas históricas e contemporâneas. Curitiba: Appris, 2017. E-Book.

Contudo, não podemos desconsiderar o fato de que o envolvimento inato dos jovens na cultura digital pode favorecer atitudes que coloquem em risco o trabalho com as TICs, se não for bem planejado e orientado. A busca por respostas imediatas e avaliações superficiais de informações são exemplos dessas atitudes, que devem ser reorientadas pelo professor. Pensando nisso, indicamos, a seguir, algumas possibilidades de abordagem com as tecnologias no ensino.

- **Tecnologia como recurso didático**: com o auxílio de um retroprojetor ou de um monitor, é possível tornar a aula mais dinâmica apresentando animações, vídeos, infográficos, entre outros recursos audiovisuais que facilitem a visualização e compreensão de conceitos, propriedades, construções ou procedimentos.
- **Trabalho extraclasse utilizando tecnologias**: essa abordagem propõe que os alunos utilizem as TICs como recurso para o desenvolvimento de algum tipo de projeto ou pesquisa realizados fora da sala de aula. A mediação e a orientação do professor devem ser precisas e detalhadas, principalmente se os alunos não estiverem acostumados a realizar trabalhos como estes que exigem mais autonomia. O tópico **A Pesquisa Escolar** deste manual pode auxiliar nesse processo.
- **Laboratório de informática**: caso haja esse espaço na escola, ele precisa ser previamente preparado pelo professor para que sua utilização seja adequa-

da. É preciso avaliar se os computadores dispõem de determinados recursos que serão utilizados, como internet e *softwares*. As possibilidades de trabalho nesse espaço são inúmeras: *softwares* de geometria dinâmica, que possibilitam construções e verificação de propriedades; planilhas eletrônicas, para organizar dados, construir gráficos e obter resultados a partir de fórmulas e funções; visitas virtuais a exposições e museus, por exemplo; utilização de simuladores; realização de pesquisas etc.

Ressaltamos que as tecnologias não diminuem o papel da escola e do professor na formação dos alunos, mas constituem mais um meio para o processo de construção do conhecimento e, por conta disso, entendemos que seu uso potencializa a interação entre professor, aluno e conhecimento.

Tendo em vista que os alunos lidam com o uso das tecnologias com mais facilidade, por estarem inseridos desde muito cedo nesse mundo, a troca de experiências com eles, por parte do professor, pode facilitar o enfrentamento do desafio de estar atento às constantes mudanças e aos acontecimentos em diversas áreas do conhecimento.

Além disso, ao utilizar as TICs, o professor muitas vezes precisa lidar com alunos em diferentes situações: alguns têm acesso às inovações tecnológicas e domínio de seu uso, e outros têm pouco ou nenhum contato com o universo digital. Nesse sentido, concordamos que:

> Assim como a tecnologia deve estar a serviço da sociedade no intuito de atender as necessidades humanas e reduzir as diferenças sociais, seu uso na educação deve ter o mesmo fim, em especial proporcionar condições aos mais necessitados de romper os limites impostos pela pobreza.

BATISTA, Sandra Aparecida; FREITAS, Carlos Cesar G. O uso da tecnologia na educação: um debate a partir da alternativa da tecnologia social. **Revista Tecnologia e Sociedade**, Curitiba, v. 14, n. 30, p. 123, jan./abr. 2018. Disponível em: <https://revistas.utfpr.edu.br/rts/article/view/5784/4723>. Acesso em: 29 set. 2018.

Para enfrentar mais esse desafio, o professor deve conhecer a realidade socioeconômica dos alunos, avaliando quais tecnologias estão disponíveis em seu cotidiano, por quais meios conseguem acessar a internet, como se comunicam com outras pessoas, entre outras. Esse conhecimento dará subsídios para orientar seu trabalho com as TICs, ampliando o repertório dos alunos que já lidam bem com esses recursos e dando oportunidades de inserção na cultura digital para aqueles que não têm tanto contato.

Recursos didáticos

Nesta coleção, a construção dos conceitos é trabalhada de diversas maneiras, como por meio da resolução e da elaboração de problemas relacionados à realidade do aluno, à matemática ou outra área de conhecimento; por intermédio da utilização de recursos tecnológicos, como calculadoras e computadores, entre outras maneiras. A seguir, detalhamos propostas metodológicas para a utilização do livro e de outros recursos didáticos.

Resolução de problemas

Um dos objetivos de educar é contribuir para o desenvolvimento da autonomia intelectual do aluno. É preciso que ele reconheça o saber escolar como uma forma de compreender e participar do mundo em que vive.

A capacidade de enfrentar os desafios do dia a dia, de superar obstáculos e de resolver problemas é inerente à natureza humana. Assim, diariamente somos surpreendidos por problemas a serem resolvidos em diferentes âmbitos. O matemático húngaro George Polya (1887-1985) afirmava que:

> [...] A maior parte de nosso pensamento consciente é sobre problemas; quando não nos entregamos à simples contemplação, ou devaneios, nossos pensamentos estão voltados para algum fim.
>
> [...]

POLYA, George. Sobre a resolução de problemas de matemática na *high school*. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues; Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 2.

Entendemos problema como algo que precisamos resolver, contudo não sabemos de antemão como fazer. O problema pode ser um ponto de partida para a formação de conceitos, antes de sua formalização, e a ação do aluno é tomada como foco: ele deve interpretar o enunciado, selecionar e refletir sobre os dados e criar uma ou mais estratégias para resolvê-lo. Nesse processo, esperamos que desenvolva espírito investigativo, raciocínio lógico e pensamento crítico, competências essenciais para desenvolver o seu papel como cidadão.

Diferentes estratégias sobre ensinar Matemática por meio da resolução de problemas são defendidas na área de Educação Matemática. Onuchic (1999) considera que:

> [...] O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com estes símbolos).
>
> [...]

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectiva. São Paulo: Editora Unesp, 1999. p. 207.

Portanto, concordamos que a Resolução de problemas deve ser considerada na prática pedagógica do professor, e o livro do aluno reúne diversos exemplos que podem ser utilizados como recurso dessa prática.

De acordo com Onuchic (1999), uma proposta para a aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas pode ser desenvolvida a partir de alguns pressupostos:

- Formação de grupos: os alunos são incentivados a trabalhar coletivamente em prol de um objetivo comum: a solução do problema. Eles têm a oportunidade de aprender uns com os outros em um processo cooperativo.
- O papel do professor: tem a função principal de mediador, propondo questões desafiadoras e instigando os alunos a se ajudarem para enfrentar os obstáculos.
- Resultados na lousa: são anotados todos os resultados na lousa, inclusive os incompletos ou errados.
- Plenária: cada grupo defende seu ponto de vista, de acordo com a resolução e o resultado obtidos.
- Análise dos resultados: abordam-se dificuldades enfrentadas pelos alunos e, se necessário, propõem-se novas explorações.
- Consenso: a turma busca obter um consenso sobre o resultado esperado.
- Formalização: junto com os alunos, o professor sintetiza o objetivo da aprendizagem, por meio dos conceitos, das definições, propriedades e demonstrações envolvidos.

O aluno, ao resolver problemas, torna-se um participante ativo de sua aprendizagem, inserindo-se em um contexto em que o uso da Matemática ocorre em um movimento que possibilita análises, discussões, conjecturas, construção de conceitos e formulação de ideias. É com esse movimento que ele se torna capaz de compreender o papel da Matemática no mundo.

Atividades com jogos

Outro recurso didático de grande importância são as atividades com jogos, pois elas favorecem o desenvolvimento do conhecimento matemático do aluno de maneira lúdica e descontraída. Os jogos configuram uma ótima alternativa para estimular a aprendizagem, desenvolvendo habilidades como autoconfiança, organização, concentração, atenção, senso cooperativo e raciocínio lógico-dedutivo. Qualidades, inclusive, importantes não apenas na aprendizagem da Matemática, mas também na de outras áreas do conhecimento.

Os jogos são um recurso pedagógico eficaz na construção do conhecimento matemático, cujo objetivo principal é fazer o aluno gostar de aprender Matemática, despertando-lhe o interesse e mudando a rotina das aulas. Eles devem ser utilizados como um recurso facilitador para auxiliar nas dificuldades que o aluno porventura apresente em algum conteúdo.

Existe uma correspondência direta dos jogos com a Matemática, pois ambos contam com regras, instruções, definições, operações, deduções, desenvolvimento, utilização de normas e novos conhecimentos. Usar os jogos como recurso didático é uma oportunidade de vincular a teoria à prática, tendo em vista que eles podem ser trabalhados em sala como uma extensão do andamento habitual da aula.

Para desenvolver uma atividade com jogos em sala de aula, o professor deve elaborar um plano de ação que possibilite a aprendizagem de conceitos matemáticos e culturais de uma forma geral. É necessário reservar um horário no planejamento que permita a exploração de todo o potencial dos jogos, métodos de solução, registros e discussões sobre os diversos rumos que poderão surgir.

Nesse tipo de atividade, a função do professor é acompanhar a maneira de jogar dos alunos, interferindo sempre que necessário e levantando questões relevantes, de forma a auxiliar na condução do jogo.

O trabalho com jogos propicia, entre outros, os seguintes benefícios:

- o professor detecta com mais facilidade se os alunos apresentam dificuldades;
- o aluno é levado a aperfeiçoar e criar novas estratégias em busca de obter um bom desempenho;
- o aluno desenvolve habilidades ao expressar suas ideias e ao formular questões. Nessa prática, ele potencializa a autonomia de seu pensamento, tornando-se mais independente das interferências do professor;
- o erro tem papel importante, pois o aluno busca uma nova solução, investigando, explorando e descobrindo por si próprio.

Nas **orientações para o professor** página a página da segunda parte deste manual, há sugestões de jogos referentes a alguns capítulos, os quais podem ser propostos pelo professor de acordo com o seu planejamento.

Recursos tecnológicos

Nas últimas décadas, o impacto das novas tecnologias tem provocado mudanças significativas na vida das pessoas, tanto na área da educação quanto em outros segmentos.

Em um supermercado, por exemplo, há um terminal que informa o preço de um produto com rapidez e eficiência ao ler o código de barras. De maneira semelhante, a utilização de computadores, *smartphones* ou outros dispositivos conectados à internet possibilita o envio e o recebimento de mensagens, o ensino a distância, a obtenção de informações bancárias e a realização de pesquisas com agilidade.

No dia a dia, o aluno está estreitamente ligado às tecnologias, que evoluem rapidamente e se tornam cada vez mais acessíveis. Nesse contexto, é fundamental que o professor repense sua prática para fornecer as ferramentas motivadoras ao aluno e, dessa forma, ajude-o a construir conhecimentos. Além disso, o professor deve buscar novas formas de ação que permitam que o aluno lide, por exemplo, com o computador e com a calculadora.

O uso da calculadora, proposto em diversos momentos no livro do alunos, é um recurso útil na verificação de resultados e na correção de possíveis erros, favorecendo também a percepção de regularidades matemáticas e o desenvolvimento de estratégias de resolução de situações-problema.

Na seção **Explorando tecnologias**, sugerimos a utilização de uma planilha eletrônica e um *software* livre de geometria dinâmica para construções geométricas, percepção de propriedades, organização de dados, construção de gráficos, entre outras tarefas. O uso desses recursos tecnológicos, por vezes, torna os processos mais ágeis, se comparado aos cálculos e construções realizados manualmente e, quando utilizados em sala de aula, podem oferecer uma contribuição para a aprendizagem, por se aproximar da realidade extraclasse dos alunos, onde eles têm contato com a televisão, o computador, o *smartphone*, a internet, isto é, uma realidade com recursos diferentes daqueles geralmente encontrados no ambiente escolar.

Cálculo mental, aproximações e estimativas

Para determinar se um móvel cabe em determinado local, estipular a medida da distância percorrida de casa até a escola ou trabalho, saber se a quantia em dinheiro é suficiente para comprar determinados itens e em muitas outras atividades rotineiras, nossas habilidades de realizar estimativas, aproximações e cálculos mentais são colocadas à prova.

As aulas de Matemática configuram um ambiente propício para desenvolver e aprimorar tais habilidades, desde que o caminho adotado auxilie os alunos a desenvolverem técnicas para tais fins.

Ao realizar uma subtração de números naturais mentalmente, por exemplo, se a estratégia utilizada for uma reprodução do algoritmo escrito, provavelmente, o cálculo exigirá muito da memória, causando possíveis erros no resultado. Então, é necessário criar estratégias baseadas nas propriedades das operações que facilitem esse processo mental.

Dessa forma, no livro do aluno, em diversos momentos, encorajamos os estudantes a realizar estimativas, aproximações e cálculo mental, tanto a partir de estratégias pessoais, quanto por meio de técnicas que podem ser entendidas como mais adequadas para cada situação.

A pesquisa escolar

De modo geral, a pesquisa no ambiente escolar não é algo tão intuitivo e pode causar certa frustração no professor, caso atribua essa tarefa aos alunos e receba resultados inconsistentes. Contudo, o ato de realizar pesquisas é fundamental em todas as áreas do conhecimento, pois ajuda a desenvolver habilidades como autonomia, capacidade de análise e síntese, e leitura.

Nesta coleção, propomos a realização de pesquisas em alguns momentos e, a seguir, apresentamos algumas possibilidades de condução que podem contribuir para que os alunos realizem essa tarefa e se familiarizem cada vez mais com o processo de investigação.

Definição da pergunta de investigação

Primeiro, é necessário definir o tema da pesquisa e, então, propor uma pergunta ou situação-problema de investigação abrangente, que desperte o interesse dos alunos. Em determinados momentos da coleção, pontuamos algumas sugestões de temas, contudo fica a critério do professor e dos alunos outras escolhas, de acordo com as especificidades de cada turma. Nesse momento, permita que os alunos se familiarizem com o tema, conversando e apresentando fotos, vídeos e outros materiais que possam aguçar a curiosidade deles.

Cronograma

Se o trabalho for em grupos, defina a organização da turma e estipule um prazo final para a divulgação da pesquisa. Organize um cronograma de acordo com as etapas seguintes para acompanhar o passo a passo e orientar o trabalho, sugerindo ideias e propondo outras perguntas para nortear a pesquisa.

Escolha das fontes

A próxima etapa é definir, com os alunos, as fontes que serão utilizadas para obter as informações, como livros, jornais, revistas, *sites*, dicionários, fotografias, filmes, músicas etc. É provável que eles recorram à internet como fonte de pesquisa, pela praticidade e disponibilidade de conteúdos. Nesse caso, devem ser orientados a escolher *sites* confiáveis, que informem as origens dos dados e os respectivos autores. Outra sugestão é buscarem informações em *sites* de instituições reconhecidas e governamentais.

Uma forma de fazer com que os alunos avaliem a integridade de um *site* pesquisado é realizar alguns questionamentos, como: "Por que você escolheu esse *site*?"; ou "O autor ou instituição tem propriedade para disponibilizar informações sobre o tema pesquisado?"; ou ainda "Qual o interesse do *site* em divulgar as informações?".

Coleta e análise dos dados

Nessa etapa, os alunos devem se engajar em coletar e selecionar, a partir de diversas fontes, as informações mais apropriadas para responder a pergunta de investigação. A troca de experiências e cooperação entre os alunos é fundamental.

Além dos textos, é valioso ressaltar a importância de buscar também imagens, fotografias, mapas, gráficos, tabelas, infográficos, entre outros recursos que possam enriquecer a divulgação. Após a coleta, é preciso analisar e interpretar as informações, para que sejam entendidas de maneira crítica e compreendidas no contexto estabelecido. Esse processo deve envolver o conhecimento prévio dos alunos, os conteúdos estudados e as problemáticas propostas no início da pesquisa.

Caso a pesquisa seja realizada em grupos, sugerimos que essa etapa seja feita em conjunto, de modo que os alunos tomem conhecimento sobre as informações coletadas pelos colegas e cheguem a um consenso sobre alguns pontos.

Produção

Essa fase requer a definição da ordem em que os tópicos serão apresentados. Nesse momento, é possível criar um esboço do texto e esquemas com as informações principais pesquisadas.

Em seguida, inicia-se o processo de produção, que pode variar de acordo com o produto final da pesquisa. Se for um trabalho escrito, as partes do texto podem ser distribuídas entre os membros do grupo, ou o texto pode ser produzido de forma integral de modo colaborativo. Outras possibilidades podem ser seminários, cartazes, *slides*. É importante ressaltar que os textos devem ser elaborados pelos alunos e, caso haja alguma citação, deve ser referenciada.

Divulgação

Para que a experiência se torne mais enriquecedora, é fundamental que os grupos troquem informações sobre as etapas e conclusões a que chegaram. Cada formato de trabalho tem suas particularidades, sendo importante definir um produto final que:

> [...] pode ser um seminário, um vídeo, uma publicação coletiva, um texto escrito para ser lido na classe... Seja qual for a escolha, o fundamental é ampliar o público. Por dois motivos: primeiro, como forma de incentivar a preocupação com os propósitos da pesquisa e a forma como ela será comunicada. Segundo, para que a pesquisa cumpra verdadeiramente sua função. Se na sociedade a meta de uma investigação é disseminar informações, não faz sentido que na escola ela se transforme em um contato restrito entre aluno e professor. [...]

BIBIANO, Bianca; MARTINS, Ana Rita. Busca certeira: como selecionar *sites* confiáveis. **Nova Escola**. São Paulo, Fundação Lemonn, 1 dez. 2008. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/2563/busca-certeira-como-selecionar-sites-confiaveis>. Acesso em: 13 set. 2018.

Independente do produto final, é necessário orientar os alunos quanto à postura em cada um dos casos. Uma apresentação oral, por exemplo, exige postura, entonação de voz, roteiro e segurança na fala. Já um trabalho escrito precisa incluir um texto com introdução, desenvolvimento e conclusão, além de uma capa com os nomes dos integrantes, da escola, da turma em que estudam, entre outros elementos.

Relações entre componentes curriculares

A transversalidade, que, no contexto dos saberes, considera as inter-relações entre os objetos do conhecimento, é o ponto de partida para se pensar as relações entre os componentes curriculares. O conhecimento passa a ser concebido em sua essência dinâmica, deixando de ser algo estanque, o que demanda nova postura de professores e alunos diante de uma proposta de ensino que possibilita a formulação de um saber crítico-reflexivo com base no diálogo entre os conteúdos dos diferentes componentes.

Com relação a isso, as etapas da Educação Básica necessitam ter suas aprendizagens essenciais asseguradas de modo complementar pela BNCC e pelos currículos, que devem envolver, entre outros elementos, a participação da família e da comunidade. Uma maneira de alcançar tais objetivos é seguir alguns procedimentos de cooperação, como ações transversais que tornem a aprendizagem mais efetiva, e em que os alunos alcancem uma compreensão mais abrangente da realidade.

O trabalho que associa diferentes componentes curriculares requer condutas que instiguem a busca pelo conhecimento e sejam favoráveis aos diferentes atores do ambiente escolar, como alunos, professores, comunidade e a própria escola. Envolver-se com o processo de ensino e aprendizagem é uma maneira de os alunos serem agentes motivadores da cooperação entre professores e auxiliarem no fortalecimento das relações entre os diferentes componentes curriculares. Ademais, eles aprendem a trabalhar coletivamente, privilegiando a interação com os colegas e favorecendo o desenvolvimento da capacidade de argumentar e organizar as informações.

Um modo de concretizar propostas de aprendizagem transversal é por meio de projetos investigativos de trabalho ou de pesquisa, por exemplo. Geralmente, são atividades que requisitam etapas e, por conta disso, provocam situações de aprendizagem essencialmente dinâmicas, com atitudes de reflexão, questionamento e argumentação, já que exigem planejamento, levantamento de hipóteses, coletas de dados, análises, deduções e conclusões.

São numerosas, portanto, as contribuições que as atividades que relacionam diferentes componentes curriculares trazem aos alunos, já que, por meio delas, é possível estabelecer uma convivência de parceria e colaboração tanto com a equipe escolar quanto com a comunidade em que se localiza a escola. Nesta coleção, os diálogos entre a Matemática e os demais componentes curriculares são observados em diversos momentos, e é importante salientar que muitas dessas possibilidades de trabalho podem ser conferidas também nas orientações ao professor.

A avaliação

A importância da avaliação

A avaliação deve ser considerada um diálogo perene entre professor e aluno, pois assinala de modo concreto uma resposta à prática do professor e ao processo de ensino-aprendizagem. É, portanto, um instrumento do professor para diagnosticar, analisar, sistematizar e orientar suas ações pedagógicas, pois aponta os reais problemas na aprendizagem e colabora para a evolução do aluno. Contudo, deve sempre haver a clareza de que o processo deve ser contínuo e não se restringir a resultados isolados.

Por ter natureza dialógica, tendo em vista que professores e alunos são participantes do processo, é necessário que os erros e acertos façam sentido para a aprendizagem de ambos. Assim, a avaliação configura-se como um instrumento de coleta de informações que devem ser sistematizadas e interpretadas pelos professores.

Nesse sentido, a avaliação pode ser uma das ferramentas de sustentação do trabalho do professor, de modo a auxiliá-lo nos ajustes necessários para que seu fazer didático produza desafios que se transformem em aprendizagem, pois é um espaço ideal para a mediação entre as alternativas de ensino do professor e os percursos de aprendizagem dos alunos.

Durante muito tempo, a maneira de avaliação predominante e quase exclusiva nas instituições escolares era por meio de provas escritas que partiam de um ensino homogêneo e linear, sem considerar as particularidades de cada aluno no processo de aprendizagem. Já em uma aprendizagem heterogênea e não linear, deve-se considerar uma avaliação formativa, por valorizar tanto o processo de aprendizagem quanto aquilo que se aprende, tornando a prática pedagógica reflexiva e transformadora.

Uma maneira de garantir o dialogismo do processo e assegurar que a avaliação não se torne uma forma de seleção e exclusão é apresentar e discutir os critérios de avaliação com os alunos, para que eles saibam como e sob quais aspectos serão avaliados.

É de suma importância, também, que o resultado da avaliação seja devolvido e revisado com os alunos, de modo que percebam o ensino como um processo e revejam os motivos de seus erros para avançar na aprendizagem. Por isso, é fundamental que o planejamento do processo de avaliação contenha também atividades que valorizem diferentes tipos de conhecimento, como exercícios objetivos, dissertativos, trabalhos em grupo, debates, entre outros.

A avaliação, portanto, passa a acompanhar a aprendizagem do aluno de maneira formativa e continuada, e possibilita que o professor reveja sua prática pedagógica.

A autoavaliação

A autoavaliação é uma ferramenta que permite aos alunos e aos professores avaliarem seu desempenho em sala de aula, sendo, portanto, fundamental para a democratização da avaliação. É um modo mais autônomo de o aluno enxergar a aprendizagem, pois não se concentra no crivo do professor.

Além disso, ao demandar que os alunos revejam suas metas e averiguem suas estratégias, o professor também passa a refletir sobre a sua atuação nos processos didáticos, de maneira a adequar suas posturas às necessidades originadas.

Nesta coleção, a seção **Explorando o que estudei** é um espaço para que o aluno execute uma autoavaliação, já que incita a reflexão sobre os principais conceitos tratados no capítulo. Da mesma maneira, a seção conduz o professor a uma investigação dos conceitos compreendidos pelos alunos e daqueles que, por quaisquer motivos, necessitam ser revistos com algum tratamento diferente.

Distribuição de conteúdos

1º Bimestre

Capítulo	Tópicos	Objetos de conhecimento	Habilidades
1 Ângulos e polígonos	• Recordando ângulos • Bissetriz de um ângulo • Os polígonos • Diagonais de polígonos convexos • Soma das medidas dos ângulos internos de polígonos convexos • Soma das medidas dos ângulos externos de polígonos convexos	• Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. (1)	**EF08MA15**: Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

(1) Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos. (7º ano)
Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero. (7º ano)
Polígonos regulares. (9º ano)

Capítulo	Tópicos	Objetos de conhecimento	Habilidades
2 Potências e raízes	• Lembrando potências • Potência de base 10 • Raiz quadrada • Raiz cúbica • Potências com expoente fracionário • Raiz exata de um número • Raiz quadrada aproximada de um número	• Notação científica. (2)	**EF08MA01**: Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
		• Potenciação e radiciação. (3)	**EF08MA02**: Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

(2) Números reais: notação científica e problemas. (9º ano)
Unidades de medida para medir distâncias muito grandes e muito pequenas. (9º ano)

(3) Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações. (7º ano)
Potências com expoentes negativos e fracionários. (9º ano)

(2) e (3) Múltiplos e divisores de um número natural. (7º ano)
Unidades de medida utilizadas na informática. (9º ano)

Capítulo	Tópicos	Objetos de conhecimento	Habilidades
3 Conjuntos numéricos	• Conjuntos • Conjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$) e dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) • Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) • Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$) • Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)	• Dízimas periódicas: fração geratriz. (4)	**EF08MA05**: Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

(4) Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. (7º ano)
Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações. (7º ano)

2º Bimestre

Capítulo	Tópicos	Objetos de conhecimento	Habilidades
4 **Polinômios, produtos notáveis e fatoração**	• Expressões algébricas • Monômios • Adição e subtração com monômios • Multiplicação e divisão com monômios • Potenciação com monômios • Sequências • Polinômios • Adição e subtração com polinômios • Multiplicação com polinômios • Divisão de polinômio por monômio • Produtos notáveis • Fatoração de polinômios	• Valor numérico de expressões algébricas. 5	**EF08MA06**: Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
		• Sequências recursivas e não recursivas. 6	**EF08MA10**: Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. **EF08MA11**: Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

5 Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica. (7º ano)
Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis. (9º ano)

6 Equações polinomiais do 1º grau. (7º ano)

5 e 6 Linguagem algébrica: variável e incógnita. (7º ano)
Funções: representações numérica, algébrica e gráfica. (9º ano)

Capítulo	Tópicos	Objetos de conhecimento	Habilidades
5 **Transformação de figuras**	• Simetria de reflexão e reflexão de uma figura • Simetria de rotação e rotação de uma figura • Translação de uma figura • Composição de transformações	• Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação. 7	**EF08MA18**: Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

7 Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem. (7º ano)
Simetrias de translação, rotação e reflexão. (7º ano)

Capítulo	Tópicos	Objetos de conhecimento	Habilidades
2º Bimestre			
6 Equações, sistemas de equações e inequações	• Equações do 1º grau com uma incógnita • Equações do 1º grau com duas incógnitas • Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas • Resolução de sistemas de duas equações pelos métodos da substituição e da eliminação • Inequações do 1º grau com uma incógnita • Equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$	• Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano. (8)	**EF08MA07**: Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
		• Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano. (9)	**EF08MA08**: Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
		• Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. (10)	**EF08MA09**: Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

(8) Razão entre grandezas de espécies diferentes. (9º ano)
Distância entre pontos no plano cartesiano. (9º ano)

(10) Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis. (9º ano)

(8) e (9) Funções: representações numérica, algébrica e gráfica. (9º ano)

(9) e (10) Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações. (9º ano)

(8), (9) e (10) Equações polinomiais do 1º grau. (7º ano)

Capítulo	Tópicos	Objetos de conhecimento	Habilidades
3º Bimestre			
7 Proporcionalidade	• Relação entre grandezas • Regra de três simples	• Porcentagens. (11)	**EF08MA04**: Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
		• Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais. (12)	**EF08MA12**: Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. **EF08MA13**: Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

(11) Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples. (7º ano)
Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos. (9º ano)

(12) Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. (7º ano)
Razão entre grandezas de espécies diferentes. (9º ano)
Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. (9º ano)
Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo. (9º ano)
Relações métricas no triângulo retângulo. (9º ano)
Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais. (9º ano)

	Capítulo	Tópicos	Objetos de conhecimento	Habilidades
3º Bimestre	**8** **Estatística e probabilidade**	• Variáveis estatísticas • Distribuição de frequência • Intervalo de classes • Tabelas e gráficos • Construção de gráficos • Média aritmética • Mediana e moda • Amplitude total • Pesquisas estatísticas • Possibilidades • Probabilidade	• O princípio multiplicativo da contagem. (13)	**EF08MA03**: Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
			• Princípio multiplicativo da contagem. (14) • Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral. (15)	**EF08MA22**: Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
			• Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados. (16)	**EF08MA23**: Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.
			• Organização dos dados de uma variável contínua em classes. (17)	**EF08MA24**: Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.
			• Medidas de tendência central e de dispersão. (18)	**EF08MA25**: Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.
			• Pesquisas censitária ou amostral. (19) • Planejamento e execução de pesquisa amostral. (20)	**EF08MA26**: Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada). **EF08MA27**: Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.

(13) Múltiplos e divisores de um número natural. (7º ano)

(16) Gráficos de setores: interpretação, pertinência e construção para representar conjunto de dados. (7º ano)

(19) Pesquisa amostral e pesquisa censitária. (7º ano)

(13), (14) e (15) Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes. (9º ano)

(14) e (15) Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências. (7º ano)

(16) e (17) Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação. (9º ano)

Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos. (9º ano)

(17) e (18) Estatística: média e amplitude de um conjunto de dados. (7º ano)

(16), (17) e (20) Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e gráficos e interpretação das informações. (7º ano)

(18), (19) e (20) Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório. (9º ano)

3º Bimestre

Capítulo	Tópicos	Objetos de conhecimento	Habilidades
9 Triângulos	• Os triângulos • Ângulos em um triângulo • Congruência de figuras • Casos de congruência de triângulos • Pontos notáveis de um triângulo	• Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. (21)	**EF08MA15**: Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
		• Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas. (22)	**EF08MA17**: Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

(21) Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos. (7º ano)
Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero. (7º ano)
Polígonos regulares. (9º ano)

(22) Simetrias de translação, rotação e reflexão. (7º ano)
Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal. (7º ano)

4º Bimestre

Capítulo	Tópicos	Objetos de conhecimento	Habilidades
10 Quadriláteros e formas circulares	• Os quadriláteros • Paralelogramos • Trapézio • Circunferência e círculo • Posições relativas • Polígonos inscritos e circunscritos na circunferência • Medida do comprimento da circunferência	• Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros. (23)	**EF08MA14**: Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
		• Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. (24)	**EF08MA15**: Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. **EF08MA16**: Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.

(23) Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros. (7º ano)
Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal. (9º ano)
Semelhança de triângulos. (9º ano)
Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração. (9º ano)

(24) Polígonos regulares. (9º ano)

(23) e (24) Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos. (7º ano)
Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero. (7º ano)

Capítulo	Tópicos	Objetos de conhecimento	Habilidades
11 Medidas de área	• Medidas da área de polígonos • Medida da área do círculo	• Área de figuras planas. (25) • Área do círculo e comprimento de sua circunferência. (26)	**EF08MA19**: Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

(25) Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros. (7º ano)

(26) Medida do comprimento da circunferência. (7º ano)
A circunferência como lugar geométrico. (7º ano)

Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta. (9º ano)
Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica. (9º ano)

(25) e (26) Problemas envolvendo medições. (7º ano)
Volume de prismas e cilindros. (9º ano)

Capítulo	Tópicos	Objetos de conhecimento	Habilidades
12 Medidas de volume e de capacidade	• Medidas de volume • Medida do volume do paralelepípedo retângulo • Medida do volume do cilindro • Medidas de capacidade	• Volume de cilindro reto. (27) • Medidas de capacidade. (28)	• **EF08MA20**: Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes. • **EF08MA21**: Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

(27) e (28) Problemas envolvendo medições. (7º ano)
Cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais. (7º ano)
Volume de prismas e cilindros. (9º ano)

Sugestões de livros e *sites*

Livros

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de et al. **Práticas de modelagem matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Educação matemática crítica**: reflexões e diálogos. Belo Horizonte: Argvmentvm, 2007.

BARLOW, Michel. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo Carvalho (Org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 3. ed. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRITO, Márcia Regina Ferreira. **Solução de problemas e a matemática escolar**. 2. ed. Campinas: Alínea, 2010.

BUCK INSTITUTE FOR EDUCATION. **Aprendizagem baseada em projetos**: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

CARRAHER, Terezinha Nunes et al. **Na vida dez, na escola zero**. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2015.

CARVALHO, Mercedes. **Problemas? Mas que problemas?!**: estratégias de resolução de problemas em sala de aula. Petrópolis: Vozes, 2005.

CARVALHO, Luiz Mariano et al. (Org.). **História e tecnologia no ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.

CHACÓN, Inés Maria Gómez. **Matemática emocional**: os afetos na aprendizagem da Matemática. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2005.

DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira; SMOLE, Kátia Cristina Stocco. **O conceito de ângulo e o ensino de geometria**. 2. ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 1996.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman; NUNES, Kátia Regina Ashton. **Fazendo arte com a Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

FERREIRA, Mariana Kawall Leal (Org.). **Ideias matemáticas de povos culturalmente distintos**. São Paulo: Global, 2002. (Antropologia e educação).

GARDNER, Howard. **Inteligências múltiplas**: a teoria na prática. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio**. Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Cia. das Letras, 1999.

HUETE, Juan Carlos Sánchez; BRAVO, José Antonio Fernández. **O ensino da Matemática**: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsk. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1 e 2.

______. **Os números**: história de uma grande invenção. Tradução de Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 1989.

KAISER, Fung. **Os números governam sua vida**: a influência velada das probabilidades e da estatística em tudo que você faz. Tradução de Beth Honorato. São Paulo: DVS, 2011.

LITTON, Jonathan; FLINTHAM, Thomas. **O genial mundo da matemática**. Tradução de Claudia Morales. São Paulo: Publifolha, 2013.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010. (Formação de professores).

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem escolar**: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2018.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação histórica no ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

______. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MONTEIRO, Alexandria; POMPEU JR., Geraldo. **A Matemática e os temas transversais**. São Paulo: Moderna, 2001.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Org.). **A formação do professor que ensina Matemática**: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto de método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROONEY, Anne. **A história da Matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SADOVSKY, Patricia. **O ensino de Matemática hoje**: enfoques, sentidos e desafios. Tradução de Antonio de Padua Danesi. São Paulo: Ática, 2007. (Educação em ação).

SELBACH, Simone. **Matemática e didática**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2015. (Coleção Como Bem Ensinar).

SILVA, Circe Mary Silva; FILHO, Moysés Gonçalves Siqueira. **Matemática:** resolução de problemas. Brasília: Liber livro, 2011.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. 2. ed. Campinas: Papirus, 2001. (Perspectivas em Educação Matemática).

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

STROGATZ, Steven Henry. **A Matemática do dia a dia**: transforme o medo dos números em ações eficazes para a sua vida. Tradução de Paulo Polzonoff Jr. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 1995.

______. **Os números governam o mundo**: folclore da Matemática. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). **Avaliação em Matemática**: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2008. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

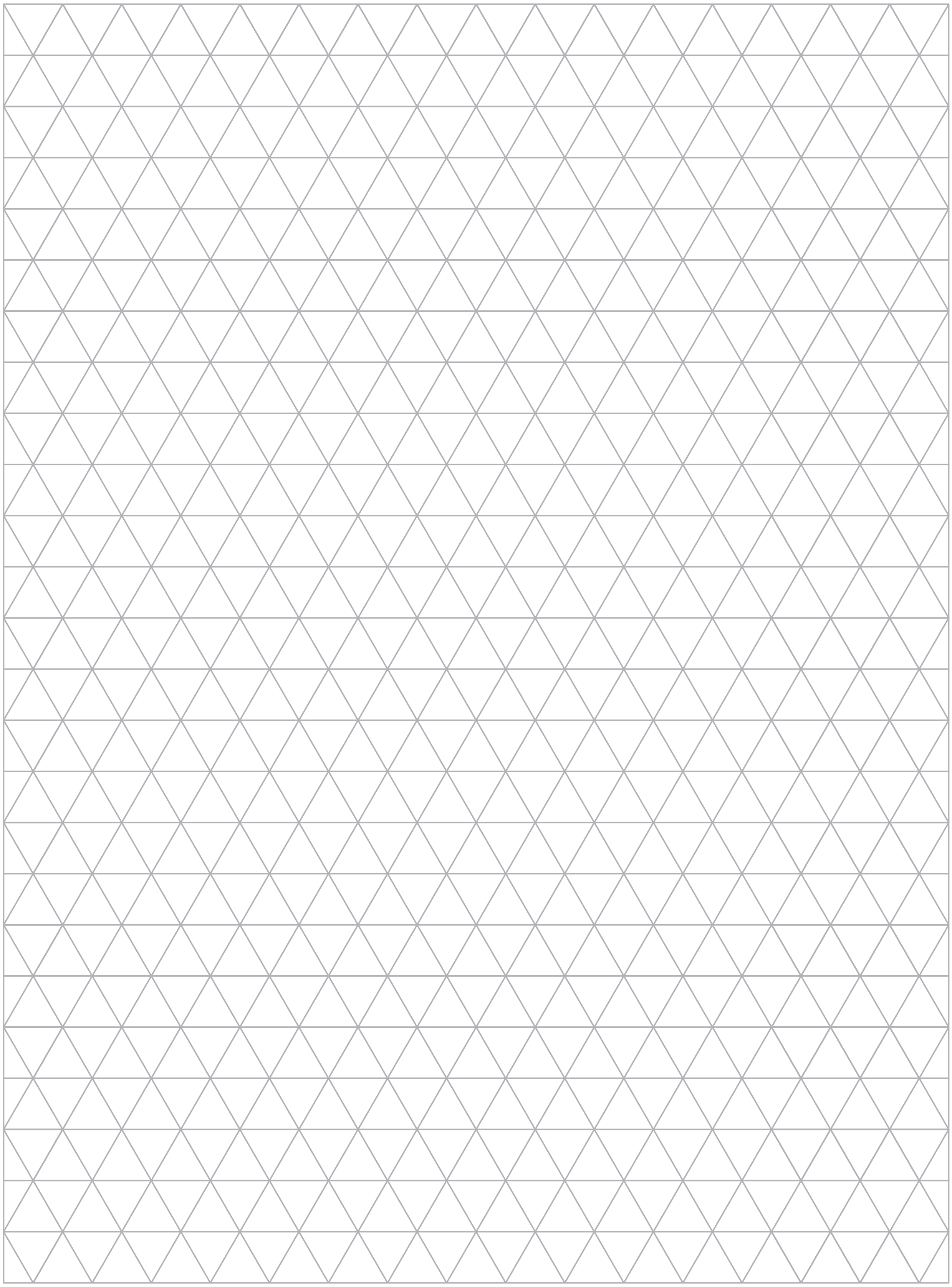
VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

Sites

- A Matemática interativa na internet (Imática):
  <www.matematica.br/historia/index_h_top.html>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Ação Local de Estatística Aplicada (Alea):
  <http://alea.ine.pt/index.php?lang=pt>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação (Anped):
  <www.anped.org.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Auge Educacional:
  <www.augeeducacional.com.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Banco Internacional de Objetos Educacionais:
  <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br>. Acesso em: 5 out. 2018.

- Boletim de Educação Matemática (Bolema):
  <www.scielo.br/scielo.php?script=sci_serial&pid=0103-636X&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Boletim online de Educação Matemática (BoEM):
  <www.revistas.udesc.br/index.php/boem>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática:
  <www.ime.usp.br/caem>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Educação Matemática e Tecnologia Informática (Edumatec):
  <www.edumatec.mat.ufrgs.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Geogebra:
  <www.geogebra.org>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE):
  <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa):
  <https://impa.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Khan Academy:
  <https://pt.khanacademy.org>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Klickeducação:
  <https://br.pearson.com/educacao-basica/KlickEducacao.html>. Acesso em: 5 out. 2018.
- M. C. Escher:
  <www.mcescher.com>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Matematica.com.br:
  <www.matematica.com.br/home>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Matematiquês:
  <www.matematiques.com.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Mathema:
  <http://mathema.com.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Ministério da Educação (MEC):
  <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Nova Escola:
  <https://novaescola.org.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Olimpíada Brasileira de Matemática:
  <www.obm.org.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas:
  <www.obmep.org.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Planilha eletrônica:
  <https://pt-br.libreoffice.org>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Portal do professor:
  <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Revista do Professor de Matemática:
  <www.rpm.org.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Sociedade Brasileira de Matemática:
  <www.sbm.org.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Soroban (ábaco japonês):
  <www.soroban.org>. Acesso em: 5 out. 2018.

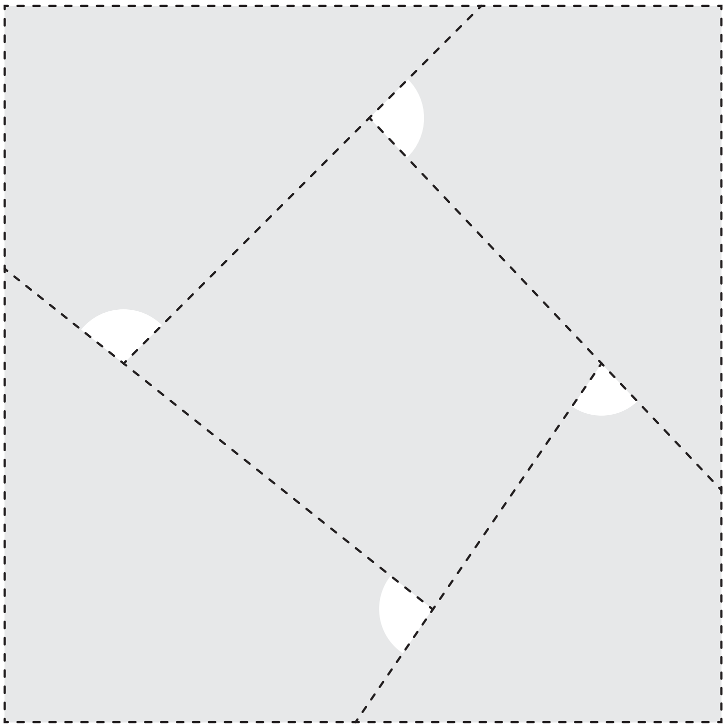
Malha triangular

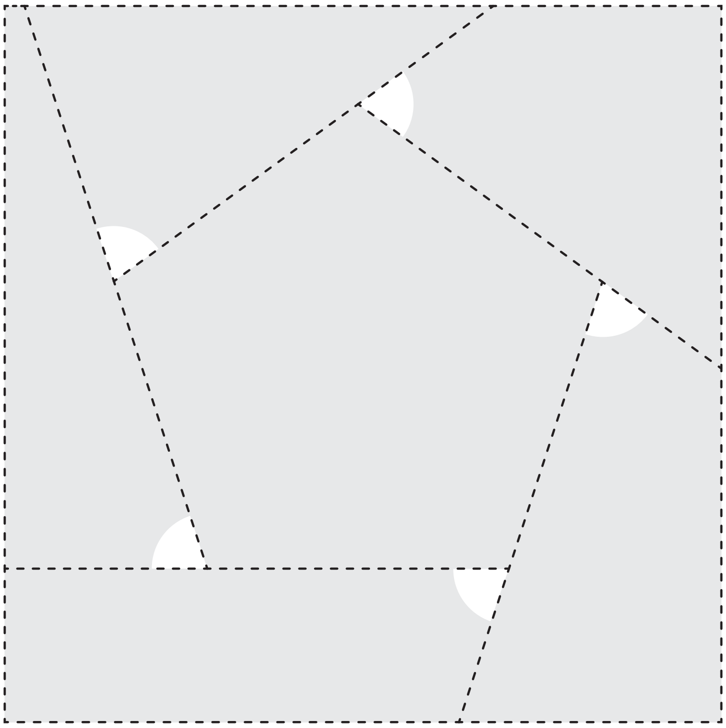


Sergio L. Filho

Referente aos comentários das páginas **25** e **106**.

Ângulos externos de polígonos





Ilustrações: Sergio L. Filho

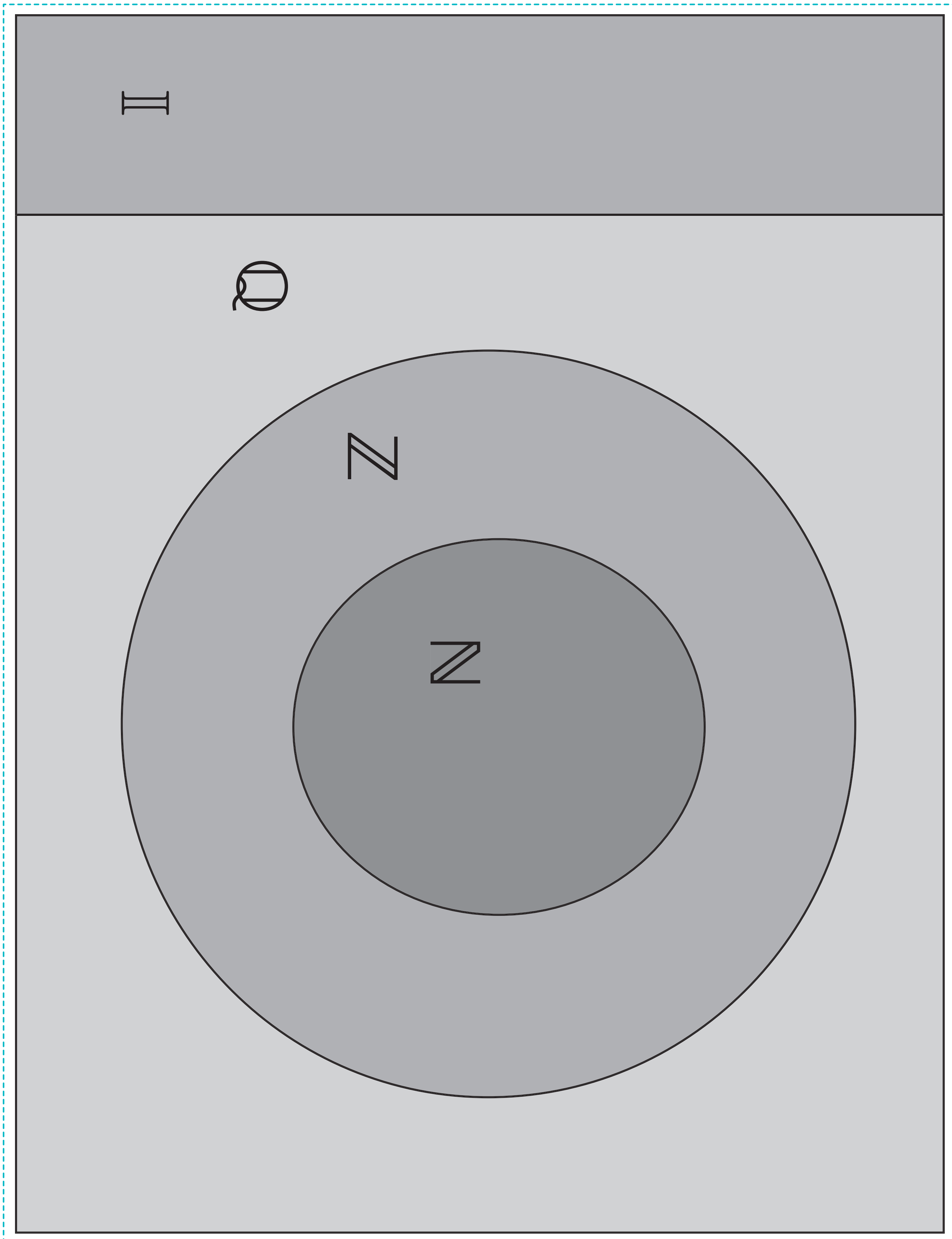
Referente aos comentários da página **29**.

Jogo dos conjuntos

2	4	5	6	8
9	10	12	14	18
30	–3	–7	–11	–13
–19	–28	–22	–10	–33
–40	–1	–19	–6	$-\sqrt{3}$
1,12681...	π	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}$	1,323654...
$\sqrt{7}$	$-\sqrt{11}$	$\frac{\pi}{2}$	2,34	$-\frac{3}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0,25	572,91
1,3	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{9}{10}$

Referente aos comentários da página 65.

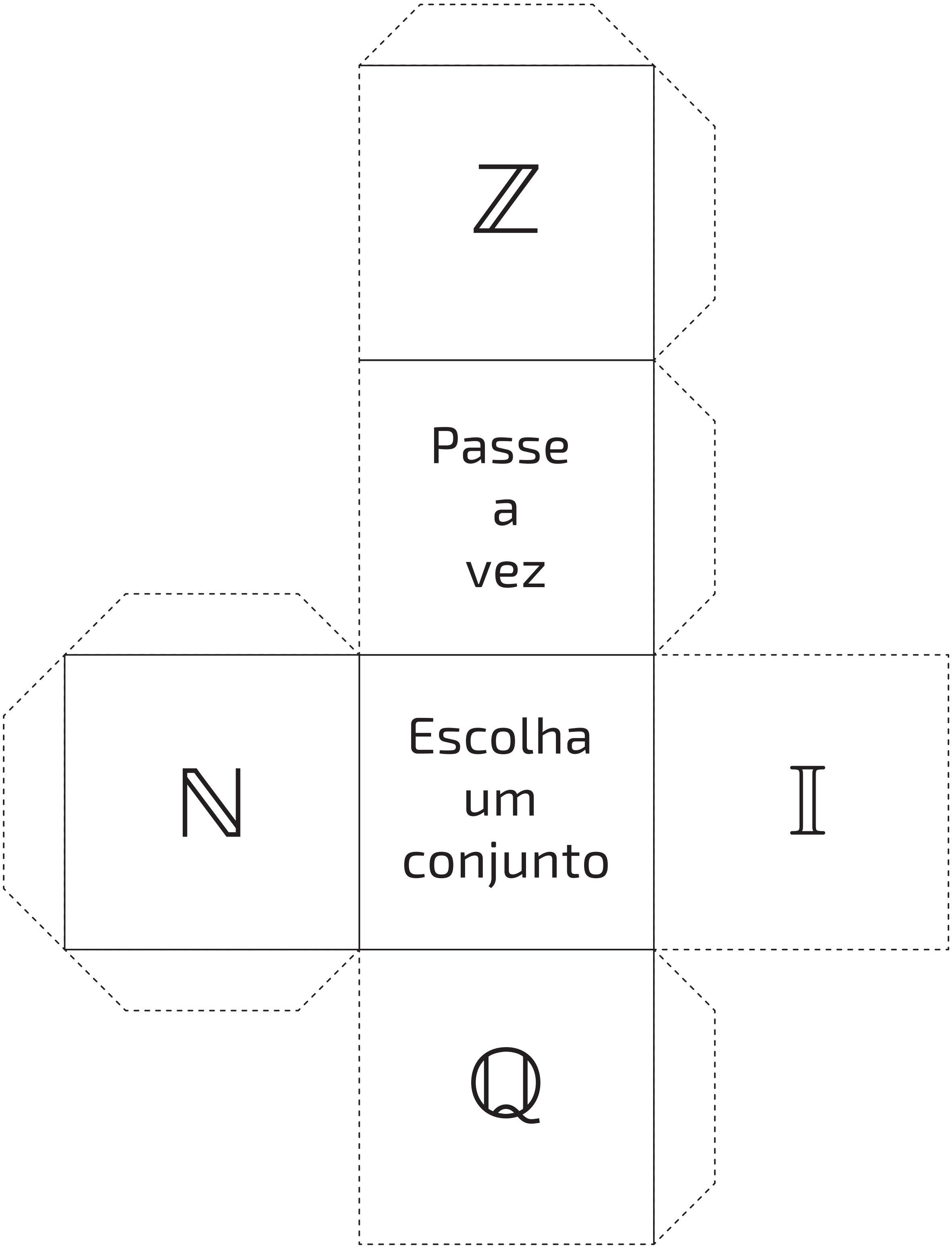
Jogo dos conjuntos



Sergio L. Filho

Referente aos comentários da página **65**.

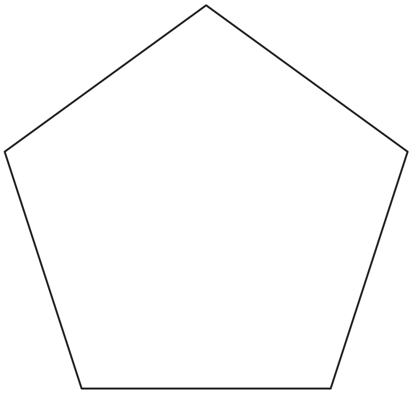
Jogo dos conjuntos

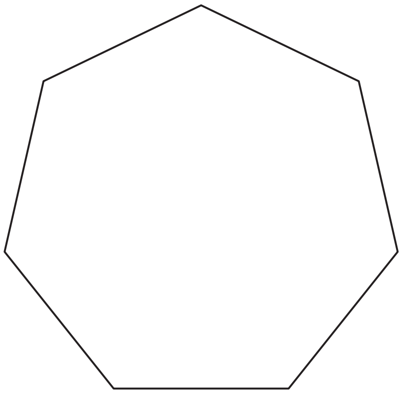


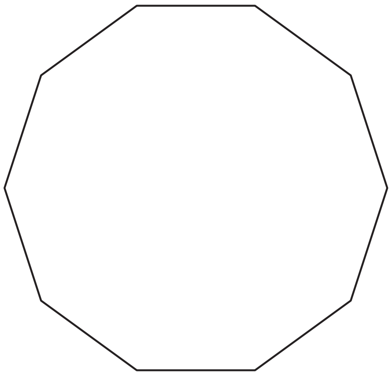
Sergio L. Filho

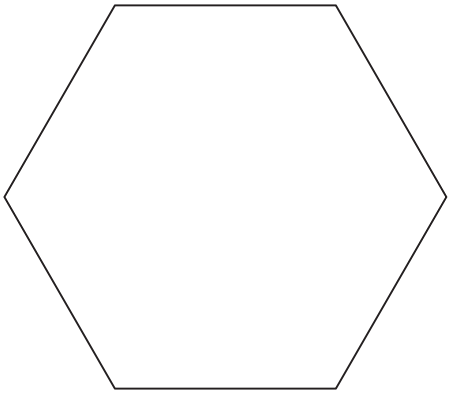
Referente aos comentários da página **65**.

Simetria em polígonos

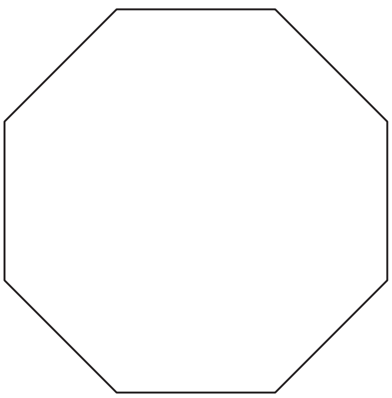


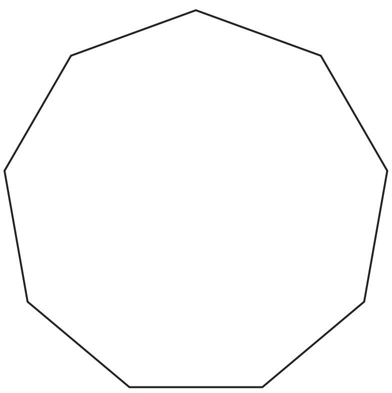






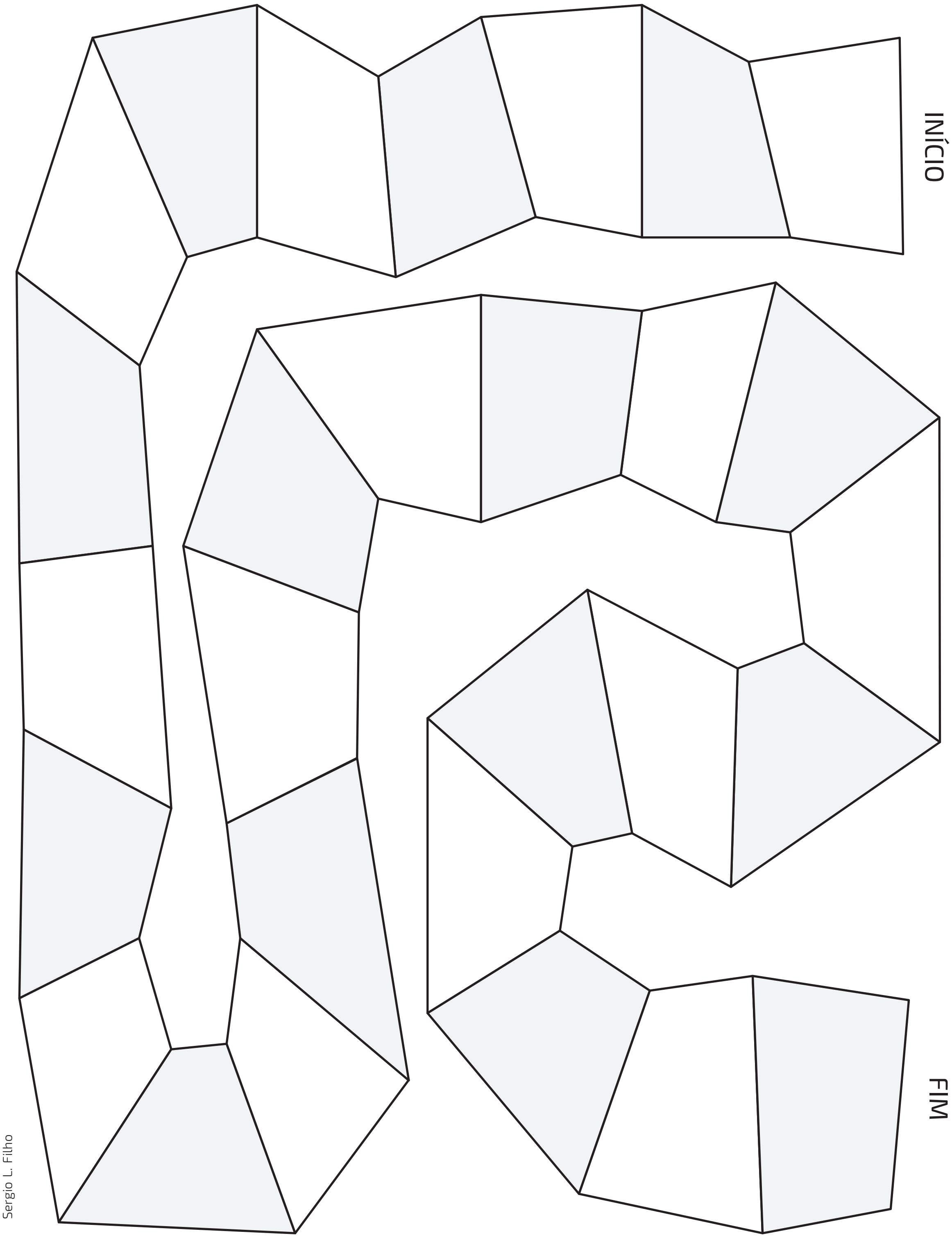
Ilustrações: Sergio L. Filho





Referente aos comentários da página **101**.

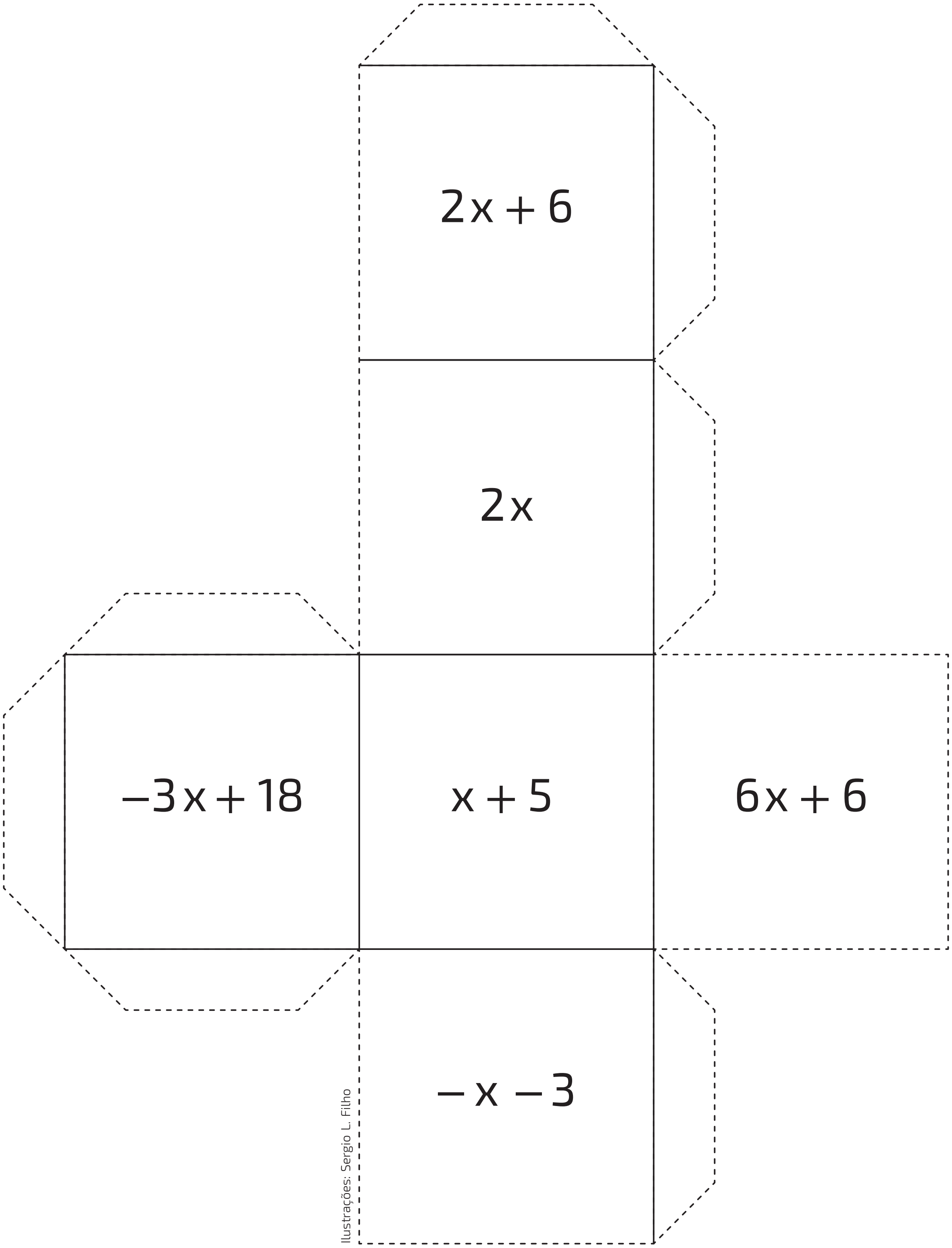
Trilha das equações

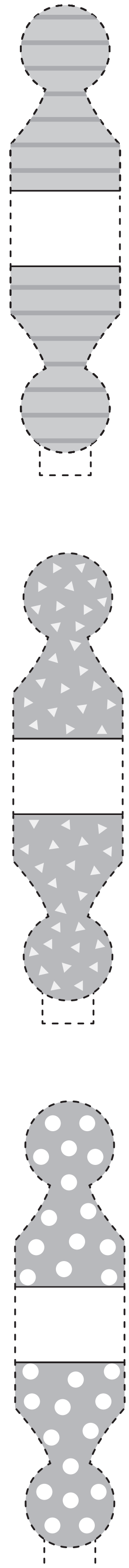


Sergio L. Filho

Referente aos comentários da página **114**.

Trilha das equações

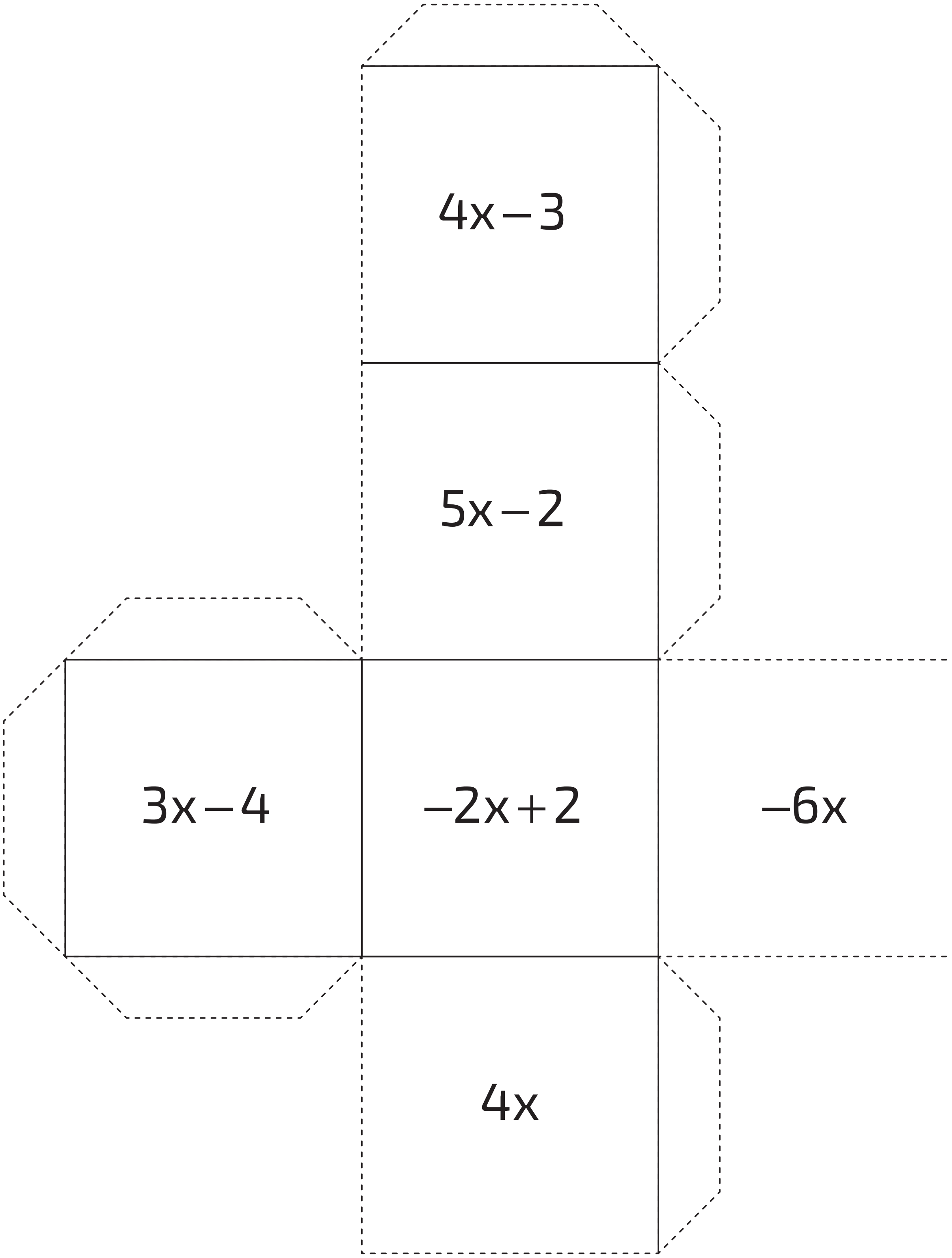




Ilustrações: Sergio L. Filho

Referente aos comentários da página **114**.

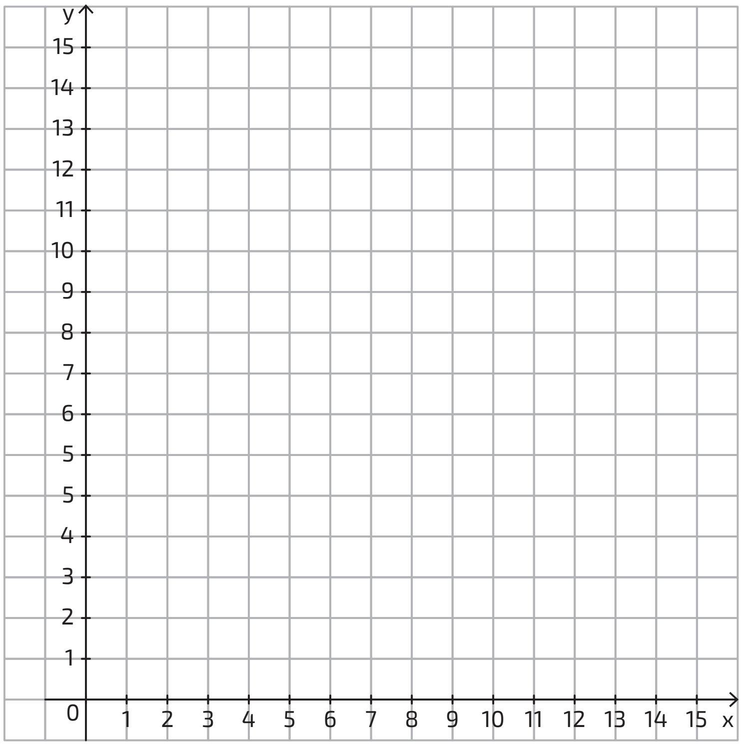
Trilha das equações

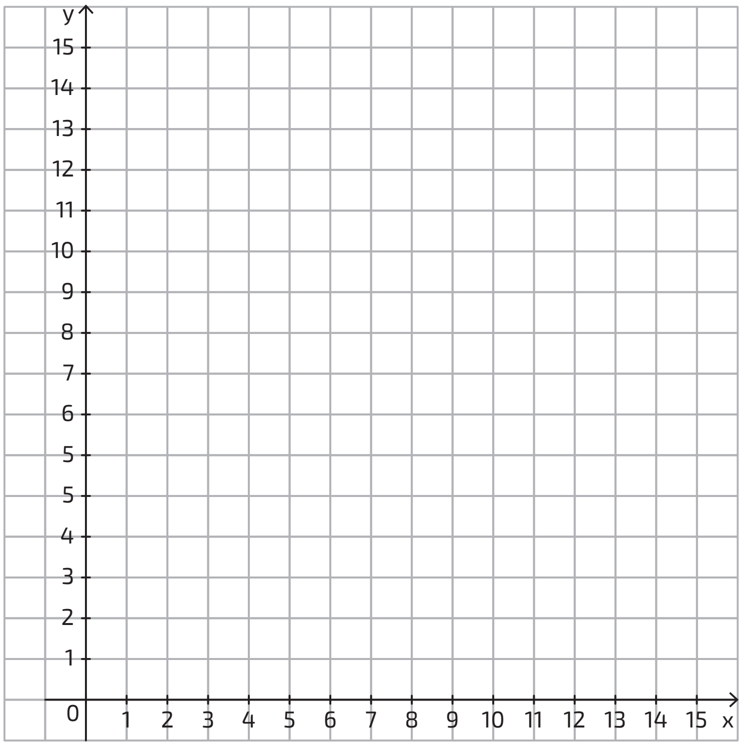


Sergio L. Filho

Referente aos comentários da página **114**.

Plano cartesiano





Sergio L. Filho

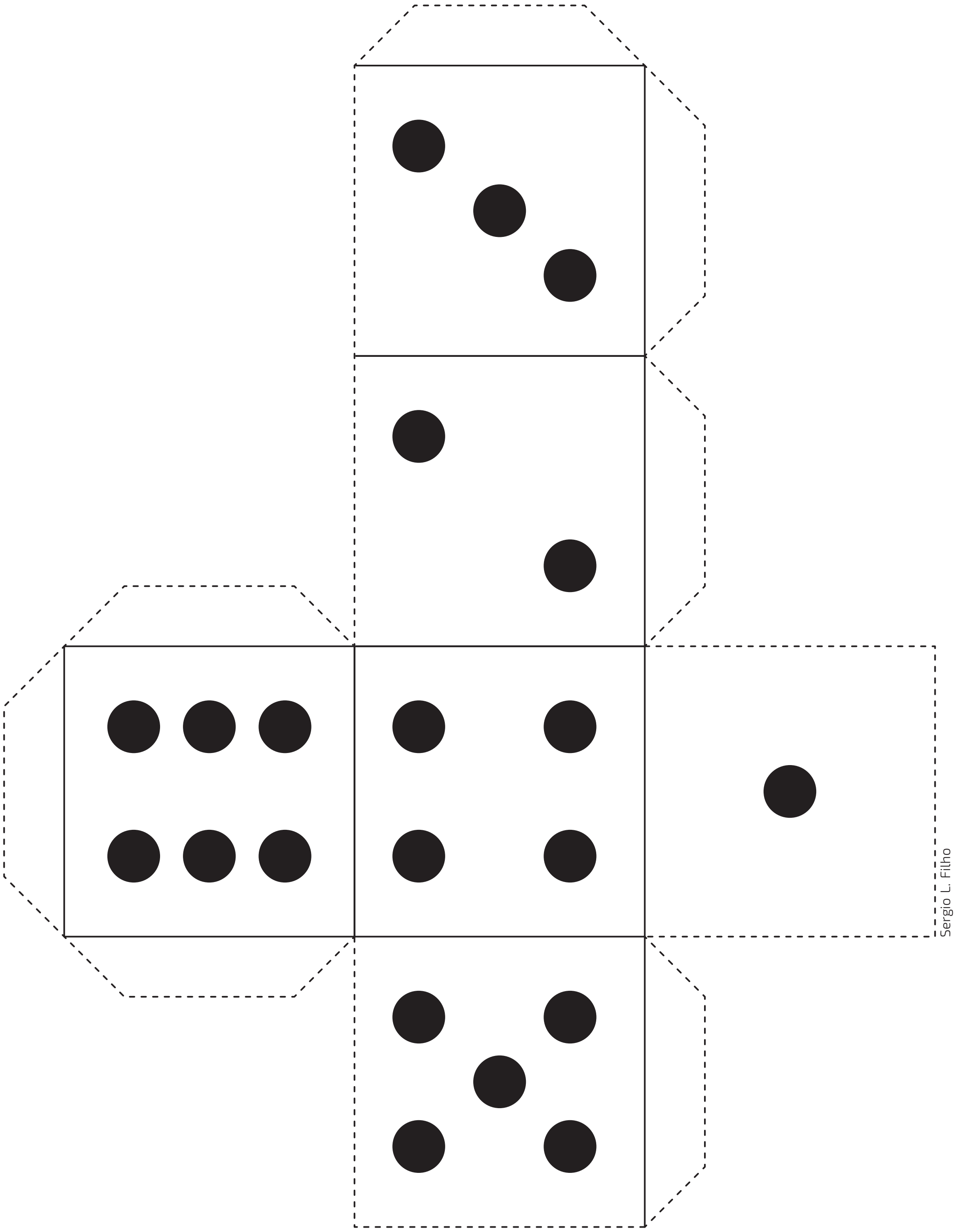
Referente aos comentários da página **117**.

Jogo das probabilidades

Rodada / Número escolhido	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1ª												
2ª												
3ª												
4ª												
5ª												

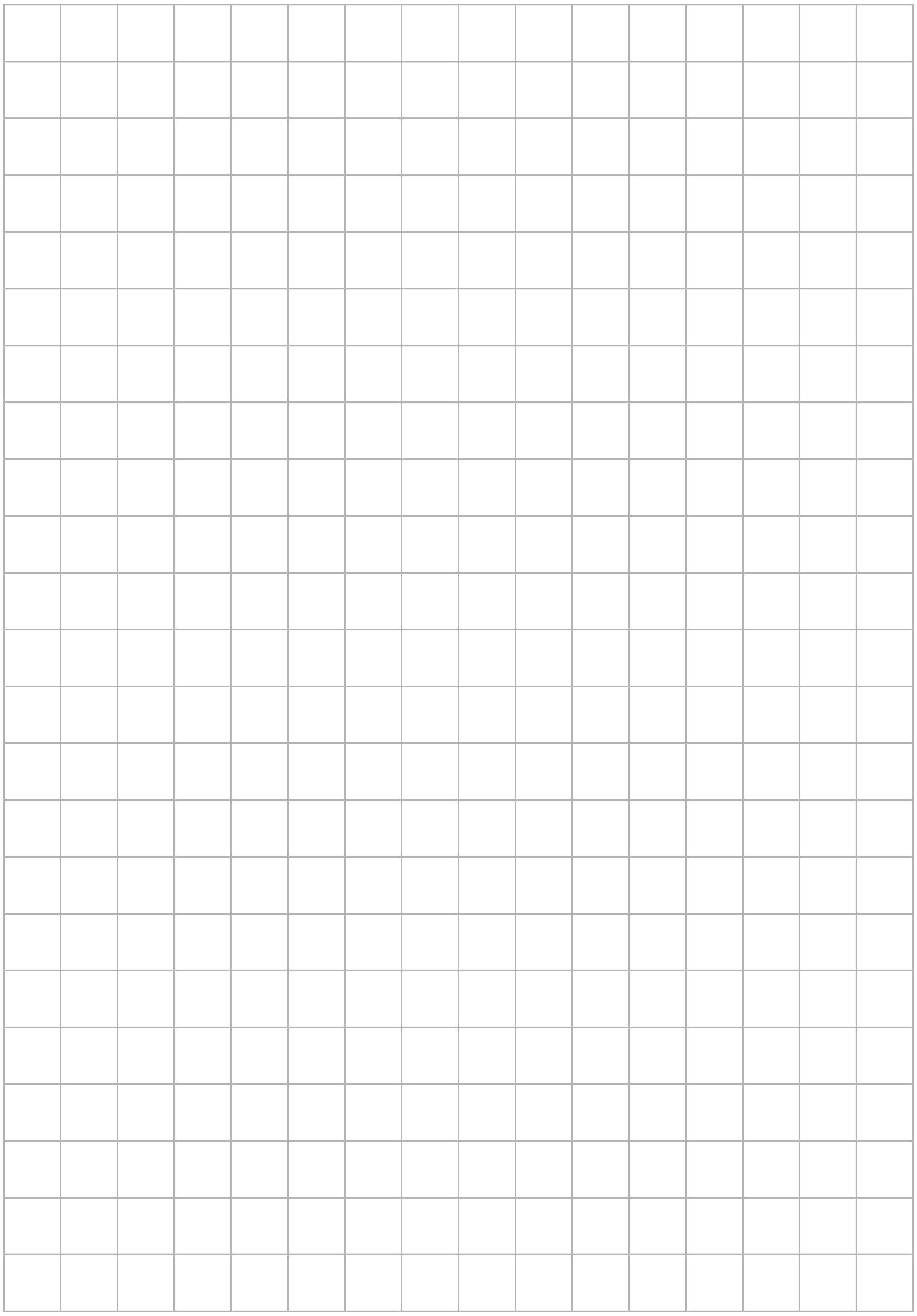
Referente aos comentários da página **196**.

Jogo das probabilidades



Referente aos comentários da página **196**.

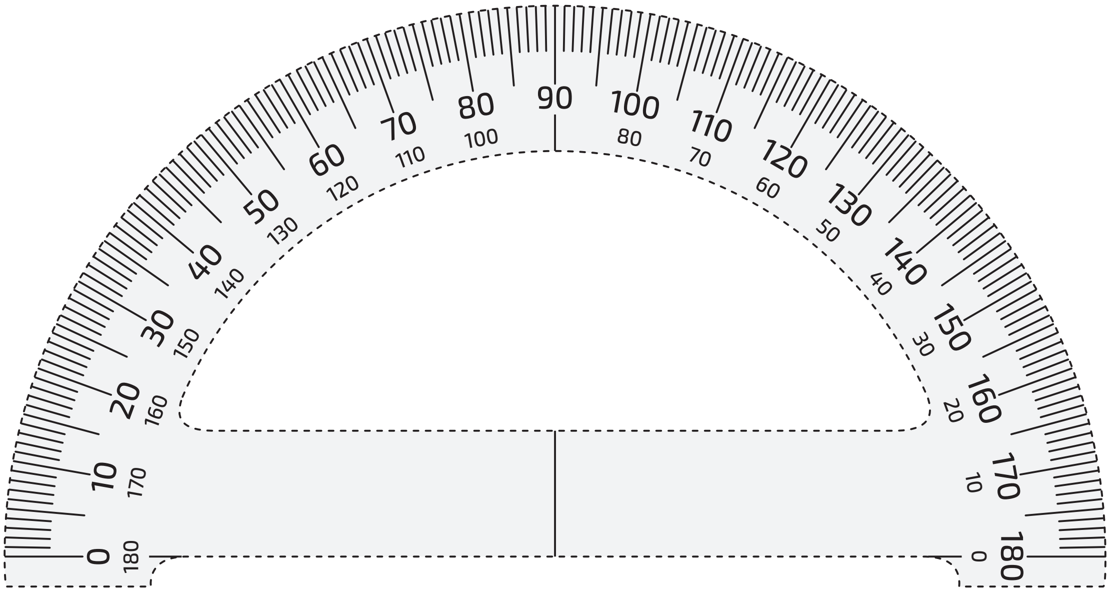
Malha quadriculada

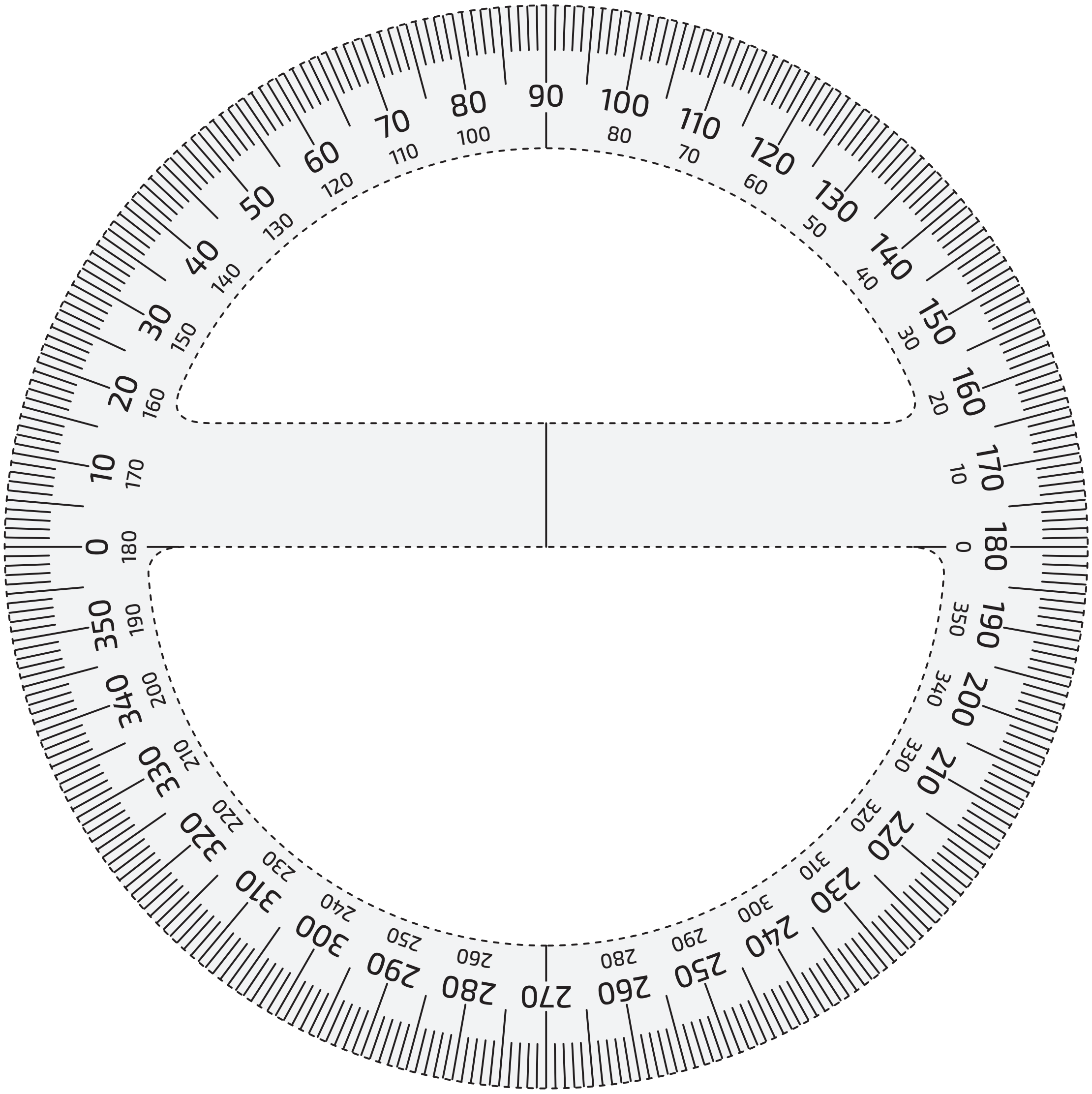


Sergio L. Filho

Referente aos comentários da página **205**.

Transferidor

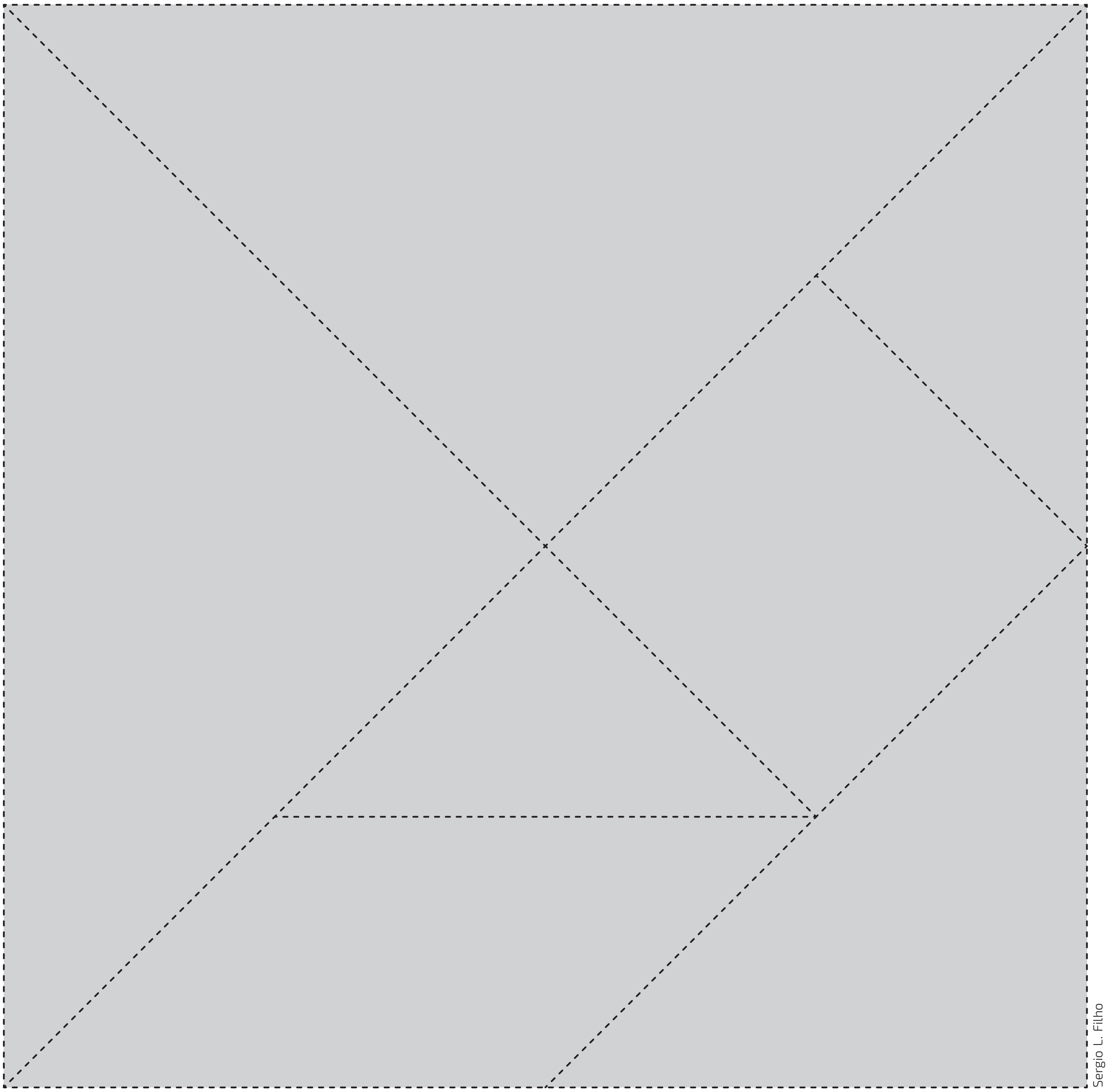




Ilustrações: Cynthia Sekiguchi

Referente aos comentários das páginas **15** e **224**.

Tangram



Referente aos comentários da página **256**.

Bibliografia

BASSIT, Ana Zahira (Org.). **O interdisciplinar**: olhares contemporâneos. São Paulo: Factash, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 25 set. 2018.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Pró-Letramento**: Programa de formação continuada de professores dos anos/séries iniciais do Ensino Fundamental. Matemática. Brasília: MEC/SEB, 2007.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectiva. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

CHAMBERS, Paul; TIMILIN, Robert. **Ensinando Matemática para adolescentes**. 2. ed. Tradução de Gabriela Wondracek Linck. Porto Alegre: Penso, 2015.

DIMENSTEIN, Gilberto. **O cidadão de papel**: a infância, a adolescência e os direitos humanos no Brasil. 24. ed. São Paulo: Ática, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 55. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2017.

HUETE, Juan Carlos Sánchez; BRAVO, José A. Fernández. **O ensino da Matemática**: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

LIMA, Elon Lages. Matemática e ensino. **Sociedade Portuguesa de Matemática**. 8. ed. Lisboa: Gradiva, 2004.

MACHADO, José Nilson. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimentos e inteligência e a prática docente. 7. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

______. **Matemática e educação**: alegorias, tecnologias, jogo, poesia. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2012. (Questões da nossa época).

MASCHIO, Elaine Cátia Falcade; SOARES, Eliana Maria do Sacramento (Org.). **Cultura escolar, tecnologias e práticas**: perspectivas históricas e contemporâneas. Curitiba: Appis, 2017.

MENDEZ, Juan. **Avaliar para conhecer**: examinar para excluir. Porto Alegre: Artmed, 2002.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

MORENO, Montserrat et al. **Falemos de sentimentos**: a afetividade como um tema transversal. Tradução de Maria Cristina de Oliveira. São Paulo: Moderna, 1999. (Educação em pauta: temas transversais).

NACARATO, Adair; MENGALI, Brenda; PASSOS, Cármen. **A Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma (Orgs.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artmed, 1996.

POLYA, George. Sobre a resolução de problemas de Matemática na *high school*. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues; Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

Matemática essencial

8º ano

Ensino Fundamental
Anos finais

Componente curricular: Matemática

Patricia Rosana Moreno Pataro

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Especialista em Estatística pela UEL-PR.

Atuou como professora da rede particular de ensino.

Autora de livros didáticos para o Ensino Fundamental.

Rodrigo Dias Balestri

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

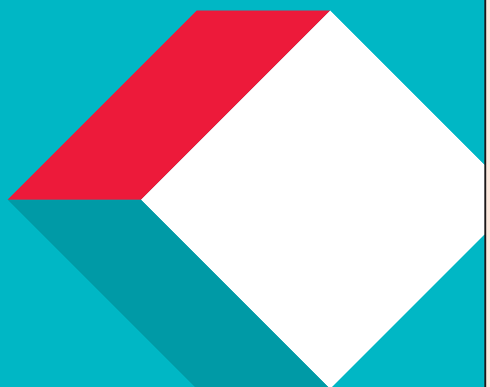
Especialista em Educação Matemática pela UEL-PR.

Especialista em Física para o Novo Ensino Médio pela UEL-PR.

Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.

Professor da rede pública de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Autor de livros didáticos para o Ensino Fundamental e Ensino Médio.



1ª edição • São Paulo • 2018

editora scipione

editora scipione

Direção geral: Guilherme Luz
Direção editorial: Renata Mascarenhas e Luiz Tonolli
Gestão de projeto editorial: Mirian Senra
Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: André Luiz Steigenberger, Denise Maria Capozzi, Fátima Gomes Machado Vizacaro, Janaina Soler Caldeira, Sheila Caroline Molina
Assistência editorial: Leandro Figueira Ferreira, Paulo Ricardo Mercadante Krzyzanowski
Leitura técnica: Eduardo Henrique Gomes Tavares
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner
Supervisão de produção: Lucília Franco Lemos dos Santos
Revisão: Amanda S. Santos
Projeto gráfico: Marcela Pialarissi
Capa: Marcela Pialarissi
Imagem de capa: Angga -/EyeEm/Getty Images
Designer: Janaina Oliveira
Iconografia: Alaíde Alves de França e Stein
Tratamento de imagens: José Vitor Elorza Costa
Licenciamento de conteúdos de terceiros: Erick Lopes de Almeida, Marissol Martins Maia
Editoração eletrônica: Luiz Roberto Lúcio Correa (superv.)

Avenida das Nações Unidas, 7221, 1º andar, Setor D
Pinheiros – São Paulo – SP – CEP 05425-902
Tel.: 4003-3061
www.scipione.com.br / atendimento@scipione.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Pataro, Patricia Moreno
Matemática essencial 8º ano : ensino fundamental, anos finais / Patricia Moreno Pataro, Rodrigo Balestri. -- 1. ed. -- São Paulo : Scipione, 2018.

Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia.
ISBN: 978-85-474-0164-1 (aluno)
ISBN: 978-85-474-0165-8 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental). I. Balestri, Rodrigo. II. Título.

2018-0051 CDD: 372.7

Julia do Nascimento – Bibliotecária – CRB-8/010142

2018
Código da obra CL 713557
CAE 631769 (AL) / 631770 (PR)
1ª edição
1ª impressão

Impressão e acabamento

Apresentação

Você já observou como a Matemática está presente em nosso dia a dia? Conferir o troco em uma compra, observar uma obra de arte, planejar um passeio e preparar uma receita são alguns exemplos de situações em que a Matemática é utilizada como ferramenta indispensável.

Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo a explorar a Matemática, dando significado a suas ideias de modo que você seja capaz de utilizá-las. Procuramos abordar os conteúdos e as situações de maneira prazerosa, trabalhando sua autonomia e criatividade e possibilitando a você que argumente e tome decisões.

Esperamos que utilize este livro com dedicação e entusiasmo. No decorrer do trabalho, troque informações com os colegas e o professor e exponha suas ideias e opiniões, sempre respeitando as dos demais.

Desejamos a você sucesso em seus estudos!

Os autores.

Vamos conhecer o livro!

Abertura do capítulo


Capítulo 4

Polinômios, produtos notáveis e fatoração

As cataratas do Iguaçu, localizadas na fronteira entre o Brasil e a Argentina, destacam-se por sua impressionante formação geológica, com diversas quedas-d'água a um desnível medindo até 80 m de altura e 19 saltos principais, sendo cinco deles pertencentes à região brasileira, no município de Foz do Iguaçu, Paraná. A medida de sua vazão média é cerca de 1500 m^3/s (metros cúbicos por segundo) de água, variando entre 300 m^3/s nos períodos de seca e 8500 m^3/s nas cheias.

Veja no quadro a medida do volume de água escoada, em média, pelas cataratas, de acordo com a medida do tempo.

Medida do tempo (s)	1	2	3	4	...	n
Medida do volume (m^3)	1500	3000	4500	6000	...	$1500 \cdot n$

Todo esse volume de água compõe a bela paisagem que impressiona turistas, fazendo das cataratas do Iguaçu o segundo ponto turístico brasileiro mais visitado pelos estrangeiros e certamente uma das principais belezas naturais do mundo.

70

Pensando nisso...

A) Por que as cataratas do Iguaçu são um dos pontos turísticos mais visitados por estrangeiros?

B) De acordo com o quadro, em média, quantos metros cúbicos de água escoam pelas cataratas em 5 s? E em 10 s?

C) Na última coluna do quadro da página **70**, o que a letra **n** representa na expressão $1500 \cdot n$?

Cataratas do Iguaçu, em Foz do Iguaçu, no Paraná, em 2017.

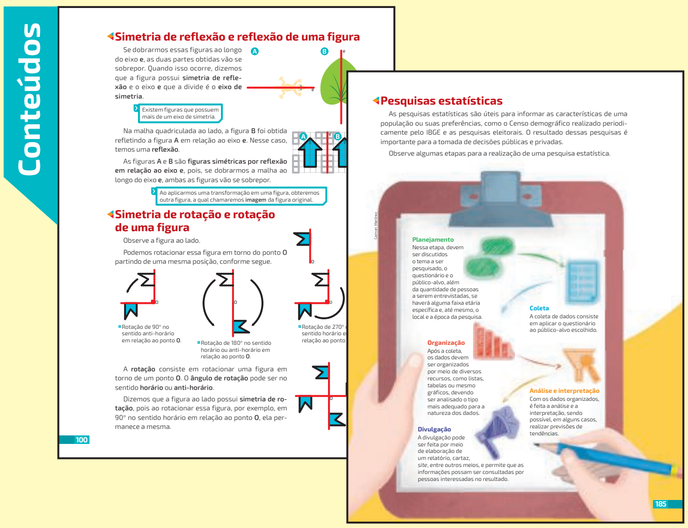
Cataratas do Iguaçu

Veja mais informações sobre as cataratas do Iguaçu:
<www.cataratasdoiguacu.com.br/>
<https://iguazuargentina.com/po/index>
(acesso em: 3 ago. 2018)

71

Na abertura, você entrará em contato com os assuntos que serão estudados no capítulo. São propostas questões que permitem mostrar o que você já sabe e também trocar ideias com seus colegas e o professor.

Conteúdos


Simetria de reflexão e reflexão de uma figura

Se dobrarmos essas figuras ao longo do eixo **e**, as duas partes obtidas vão se sobrepor. Quando isso ocorre, dizemos que a figura possui **simetria de reflexão** e o eixo **e** que a divide é o **eixo de simetria**.

Existem figuras que possuem mais de um eixo de simetria.

Na malha quadriculada ao lado, a figura **B** foi obtida refletindo a figura **A** em relação ao eixo **e**. Nesse caso, temos uma **reflexão**.

As figuras **A** e **B** são **figuras simétricas por reflexão em relação ao eixo e**, pois, se dobrarmos a malha ao longo do eixo **e**, ambas as figuras vão se sobrepor.

Ao aplicarmos uma transformação em uma figura, obteremos outra figura, a qual chamaremos **imagem** da figura original.

Simetria de rotação e rotação de uma figura

Observe a figura ao lado.

Podemos rotacionar essa figura em torno do ponto **O** partindo de uma mesma posição, conforme segue.

Rotação de 90° no sentido anti-horário em relação ao ponto **O**.

Rotação de 180° no sentido horário ou anti-horário em relação ao ponto **O**.

A **rotação** consiste em rotacionar uma figura em torno de um ponto **O**. O **ângulo de rotação** pode ser no sentido **horário** ou **anti-horário**.

Dizemos que a figura ao lado possui **simetria de rotação**, pois ao rotacionar essa figura, por exemplo, em 90° no sentido horário em relação ao ponto **O**, ela permanece a mesma.

100

Pesquisas estatísticas

As pesquisas estatísticas são úteis para informar as características de uma população ou suas preferências, como o Censo demográfico realizado periodicamente pelo IBGE e as pesquisas eleitorais. O resultado dessas pesquisas é importante para a tomada de decisões públicas e privadas.

Observe algumas etapas para a realização de uma pesquisa estatística.

Planejamento
Nessa etapa, devem ser discutidos o tema a ser pesquisado, o questionário e o público-alvo, além da quantidade de pessoas a serem entrevistadas, se haverá alguma faixa etária específica e, até mesmo, o local e a época da pesquisa.

Coleta
A coleta de dados consiste em aplicar o questionário ao público-alvo escolhido.

Organização
Após a coleta, os dados devem ser organizados por meio de diversos recursos, como listas, tabelas ou mesmo gráficos, devendo ser analisado o tipo mais adequado para a natureza dos dados.

Análise e interpretação
Com os dados organizados, é feita a análise e a interpretação, sendo possível, em alguns casos, realizar previsões de tendências.

Divulgação
A divulgação pode ser feita por meio de elaboração de um relatório, cartaz, *site*, entre outros meios, e permite que as informações possam ser consultadas por pessoas interessadas no resultado.

185

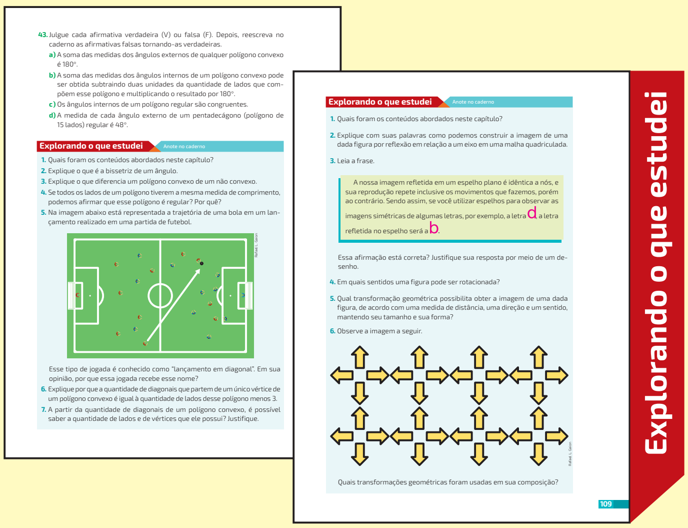
Os conteúdos propostos são abordados gradativamente para que você possa desenvolver e aprimorar seu conhecimento.

4

Nessa seção, você encontrará atividades diversificadas, que possibilitam desenvolver as ideias e os conceitos estudados.

As atividades com a tarja **Matemática em destaque** permitem que você relacione a Matemática com situações do dia a dia e também com outras áreas do conhecimento.

Após a última seção de **Atividades** do capítulo, são propostas questões que retomam o conteúdo abordado para que você reflita sobre o que estudou. Assim, você pode identificar as principais ideias compreendidas e também as que precisam ser revistas.




Cidadania: explore essa ideia

Cidadania: explore essa ideia

Aldeia Aiha

Alguns povos indígenas vivem em casas chamadas ocas, que juntas formam as aldeias. A aldeia Aiha, dos indígenas Kalapalo, tem o formato parecido com o de um grande círculo cuja região interna é descampada e funciona como uma praça pública para as atividades comunitárias ou como um palco central para os rituais. Próximo ao centro há uma construção chamada *kwakutu*, onde são guardados os materiais utilizados nesses rituais, por exemplo, as flautas sagradas *kagutu*, tocadas exclusivamente pelos homens.

As ocas estão posicionadas sobre uma figura que lembra uma circunferência, facilitando o trajeto entre elas e o *kwakutu*, além de promover a cooperação entre vizinhos com laços de parentesco. Esse formato manifesta ainda uma distinção cultural fundamental entre homens e mulheres na vida dos Kalapalo: a praça predominantemente masculina e as ocas, espaço feminino e de atividades domésticas.

Analisando com cidadania Anote no caderno

1. O espaço descampado no centro da aldeia é utilizado para quais finalidades?
2. Como a disposição circular das ocas na aldeia facilita o modo de vida dos Kalapalo?

Analisando com a Matemática Anote no caderno

3. No texto aparecem as palavras "círculo" e "circunferência" em momentos distintos. Explique a diferença entre essas duas figuras geométricas planas.
4. Supondo que a maior medida de distância entre duas ocas na circunferência dessa aldeia seja de 300 m, qual é a área da região circular? Considere $\pi = 3{,}14$.

Representação artística da aldeia Aiha, localizada no parque indígena Xingu, no estado do Mato Grosso.

262 263

Nessa seção, são abordados temas que contribuem com sua formação cidadã, permitindo que você reflita sobre a importância de cada um deles para a sociedade e para seu cotidiano.

Dica

Nesse quadro, você obtém orientações para o desenvolvimento dos conteúdos e das atividades. Além disso, encontra indicações para trabalhar a seção **Explorando tecnologias**.

Veja o significado dos ícones apresentados na coleção.

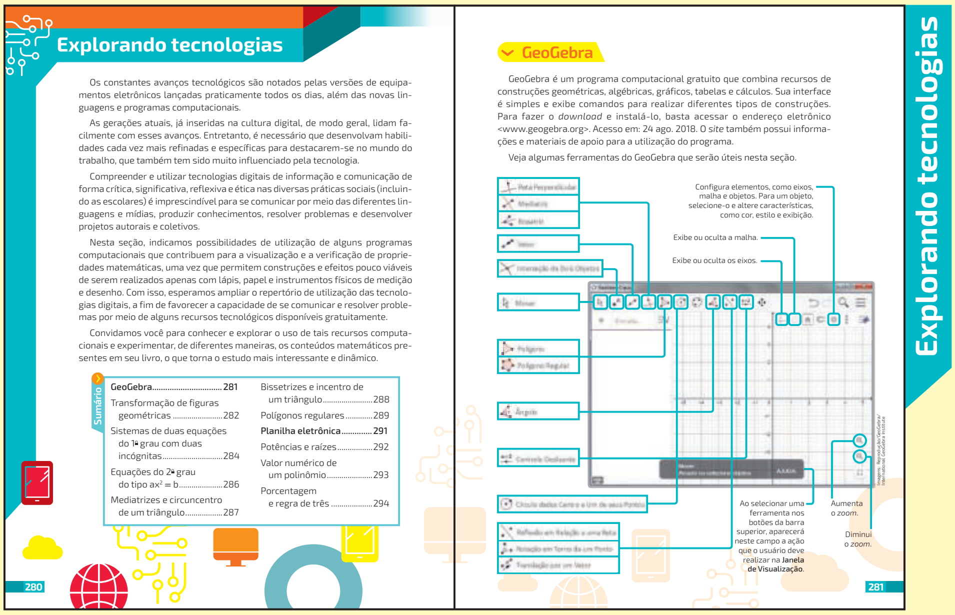
Apresenta sugestões de *sites* para que você obtenha mais informações sobre o assunto estudado.

Atividades em que você deve elaborar questões, problemas ou textos.

Atividades de caráter desafiador, em que você é estimulado a desenvolver as próprias estratégias para a resolução.

Atividades em que você realiza procedimentos de cálculo mental.

Atividades que exploram procedimentos para que você utilize a calculadora.



Explorando tecnologias

Os constantes avanços tecnológicos são notados pelas versões de equipamentos eletrônicos lançadas praticamente todos os dias, além das novas linguagens e programas computacionais.

As gerações atuais, já inseridas na cultura digital, de modo geral, lidam facilmente com esses avanços. Entretanto, é necessário que desenvolvam habilidades cada vez mais refinadas e específicas para destacarem-se no mundo do trabalho, que também tem sido muito influenciado pela tecnologia.

Compreender e utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) é imprescindível para se comunicar por meio das diferentes linguagens e mídias, produzir conhecimentos, resolver problemas e desenvolver projetos autorais e coletivos.

Nesta seção, indicamos possibilidades de utilização de alguns programas computacionais que contribuem para a visualização e a verificação de propriedades matemáticas, uma vez que permitem construções e efeitos pouco viáveis de serem realizados apenas com lápis, papel e instrumentos físicos de medição e desenho. Com isso, esperamos ampliar o repertório de utilização das tecnologias digitais, a fim de favorecer a capacidade de se comunicar e resolver problemas por meio de alguns recursos tecnológicos disponíveis gratuitamente.

Convidamos você para conhecer e explorar o uso de tais recursos computacionais e experimentar, de diferentes maneiras, os conteúdos matemáticos presentes em seu livro, o que torna o estudo mais interessante e dinâmico.

Sumário

280

GeoGebra

GeoGebra é um programa computacional gratuito que combina recursos de construções geométricas, algébricas, gráficos, tabelas e cálculos. Sua interface é simples e exibe comandos para realizar diferentes tipos de construções. Para fazer o *download* e instalá-lo, basta acessar o endereço eletrônico <www.geogebra.org>. Acesso em: 24 ago. 2018. O *site* também possui informações e materiais de apoio para a utilização do programa.

Veja algumas ferramentas do GeoGebra que serão úteis nesta seção.

281

Explorando tecnologias

Nessa seção, você utilizará a planilha eletrônica Calc e o *software* GeoGebra, para desenvolver exemplos e realizar atividades que complementam o que foi estudado no capítulo.

Essa seção apresenta sugestões de livros e *sites*, possibilitando que você amplie os conceitos estudados nos capítulos.

Sugestões de livros e *sites*

Livros

- **Incríveis passatempos Matemáticos**, de Ian Stewart. Rio de Janeiro: Zahar.
- **Para entender o mundo**: os grandes desafios de hoje e de amanhã, de Odile Gandon. São Paulo: SM.
- **Atlas da situação mundial**, de Dan Smith. Tradução de Mário Vilela. São Paulo: Companhia Editora Nacional.
- **Você precisa de quê?**: A diferença entre consumo e consumismo, de Silmara Franco. São Paulo: Moderna.
- **Sustentabilidade planetária, onde eu entro nisso?**, Fabio Feldmann. São Paulo: Terra Virgem.
- **Dinheiro público: o que é, de onde vem, para onde vai**, de Edson Gabriel Garcia. São Paulo: FTD. (Conversas sobre cidadania).
- **Se...**: Uma nova maneira de enxergar grandes conceitos, de David J. Smith. São Paulo: Companhia das Letrinhas.
- **O que você vai ser quando crescer?**, de Dinah Sales de Oliveira. São Paulo: Moderna
- **Os olímpicos**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **A matemática das coisas**: do papel A4 aos cordões de sapatos, do GPS às rodas dentadas, de Nuno Crato. São Paulo: Livraria da Física.
- **Os peregrinos**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **101 Ilusões de óptica**, de Sam Taplin. São Paulo: Edições Usborne.
- **A profecia**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **A história dos números**, de Hélio Gordon. São Paulo: FTD. (História-ciência, técnica, invenções e profissões).

295

Sugestões de livros e *sites*

Atividades em que você faz construções geométricas utilizando instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.

Atividades em que você realiza estimativas ou aproximações.

Indica que as imagens apresentadas não estão proporcionais entre si.

Indica que as cores utilizadas não correspondem às reais.

Apresenta sugestões de áudios e vídeos que contribuem para ampliar ou sintetizar conteúdos trabalhados.

Sumário

Fabio Colombini

Sunti/Shutterstock.com

9

capítulo 7 Proporcionalidade ... 138

capítulo 8 Estatística e probabilidade 156

capítulo 9 Triângulos 200

capítulo 10 Quadriláteros e formas circulares 218

Mirko Graul/ Shutterstock.com

agustavop/Getty Images

11

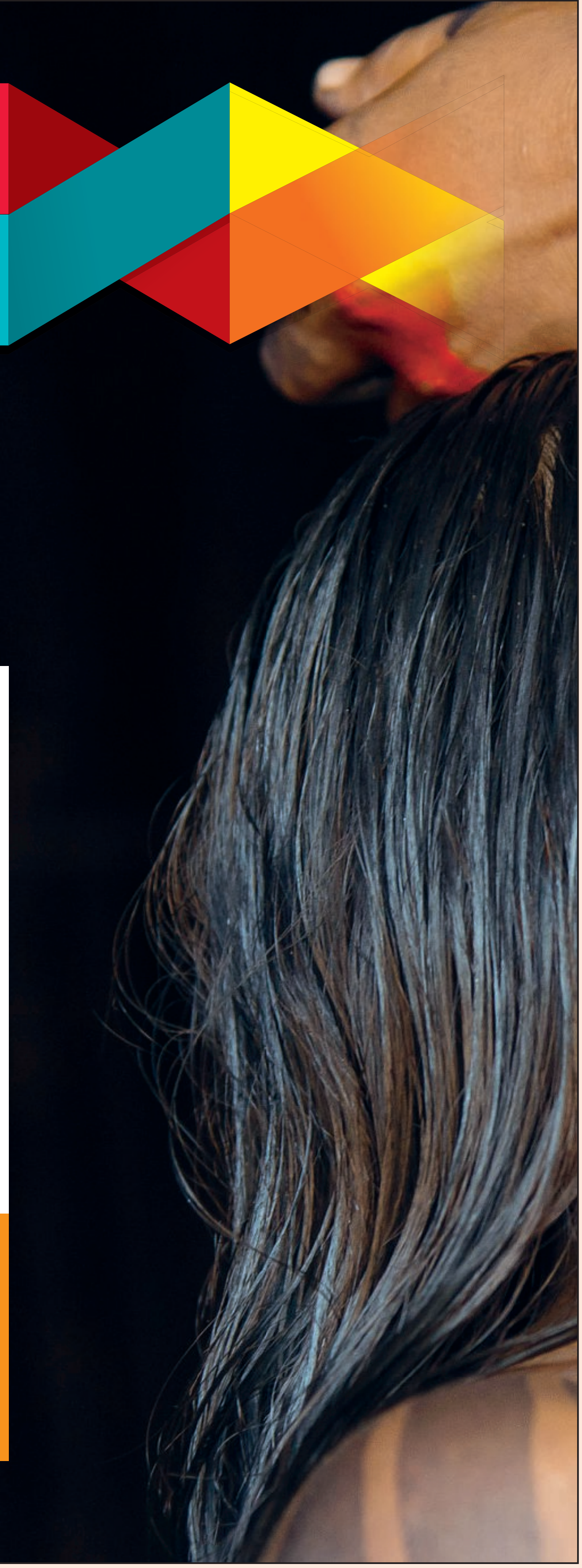
Esse capítulo ampliará os conhecimentos dos alunos quanto ao conceito de ângulo, uma vez que aborda diferentes ideias, apresenta o conceito de bissetriz e os capacita a construir ângulos com determinadas medidas, utilizando régua e compasso.

Do mesmo modo, serão estimulados a identificar os elementos de um polígono, bem como a classificá-lo de acordo com a quantidade de lados e em convexos e não convexos. Também serão levados a calcular a quantidade de diagonais, a soma das medidas dos ângulos internos, e a soma das medidas dos ângulos externos de polígonos convexos.

- Nas páginas de abertura, são apresentadas informações sobre os povos indígenas brasileiros e sua cultura, o que possibilita ao aluno reconhecer na pintura corporal indígena o uso de padrões geométricos e de algumas figuras que lembram polígonos. Com base na leitura do texto e das questões propostas, é possível verificar o conhecimento prévio dos alunos sobre a classificação de polígonos. Uma sugestão de condução do trabalho é organizar a turma em duplas para realizar a leitura e responder às questões e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões deles. Para complementar o estudo do tema, questione se eles já manusearam algum objeto produzido por indígenas e se seria possível associar sua forma com algum polígono. Verifique a possibilidade de trazer para a sala de aula alguns objetos indígenas que apresentem figuras geométricas para os alunos as identificarem. Sugira, ainda, que realizem uma pesquisa sobre quais povos indígenas habitam a região em que moram e seus respectivos aspectos culturais.

Capítulo 1

Ângulos e polígonos



Artes indígenas

Veja mais informações sobre os povos indígenas nos *sites*:
<https://indigenas.ibge.gov.br>
<https://pib.socioambiental.org>
(acesso em: 15 ago. 2018)

As comunidades indígenas no Brasil têm grande variedade de culturas, as quais caracterizam o modo como esses povos são organizados socialmente, tanto nos rituais e mitos quanto na linguagem e na organização habitacional. As suas expressões artísticas manifestam-se por meio de dança, música, pintura corporal e objetos decorativos utilizados no cotidiano ou em rituais.

Para a pintura indígena são extraídos pigmentos de plantas como jenipapo e urucum. Muitas vezes, a decoração do corpo e de objetos são desenhos abstratos que mantêm padrão geométrico e representam animais e plantas.

Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

A As expressões artísticas indígenas podem ser manifestadas de que maneiras?

B As formas apresentadas na fotografia lembram quais polígonos?

C Elabore um desenho com padrão inspirado na pintura corporal da fotografia.

12

Pintura corporal em uma menina da etnia Kayapó, em São Félix do Xingu, no Pará, em 2016.

13

BNCC em foco

- As páginas de abertura possibilitam o trabalho com a **Competência geral 3**, tendo em vista que destacam a pintura corporal indígena e não só apresentam aos alunos esta manifestação artística ligada à cultura dos povos nativos, mas também os instigam a participar de sua produção. Reconhecer a cultura indígena é um modo de valorizar uma parte importante da formação do universo brasileiro.
- Nesse sentido, o tema contemporâneo **Educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena** é também contemplado e possibilita o trabalho com a cultura de povos indígenas escravizados em determinado momento da história nacional, e que, muitas vezes, ainda hoje são marginalizados. Aproveite o assunto para promover debates que privilegiem a promoção da igualdade nas relações étnico-raciais e contribuam para uma sociabilidade consciente entre os alunos.

Pensando nisso...

A) Espera-se que os alunos respondam que as expressões artísticas indígenas podem ser manifestadas por meio de danças, músicas, pintura corporal e objetos decorativos utilizados no cotidiano ou em rituais.

B) Possível resposta: triângulos e quadriláteros.

C) Resposta pessoal.

- Pergunte aos alunos, no item **A**, se eles já tiveram contato com a cultura indígena ou se conhecem alguma pessoa com essa ascendência.
- No item **C**, diga aos alunos que vários outros polígonos podem ser vistos nos padrões utilizados pelos indígenas, portanto, eles podem utilizar vários formatos diferentes em seus desenhos.

Objetivos do capítulo

- Compreender o conceito de ângulo.
- Construir ângulos utilizando instrumentos de desenho.
- Identificar ângulos complementares e suplementares.
- Compreender o conceito, determinar e construir a bissetriz de um ângulo.
- Identificar os elementos de um polígono.
- Classificar os polígonos de acordo com a quantidade de lados.
- Classificar os polígonos em convexos ou não convexos.
- Calcular a quantidade de diagonais de polígonos convexos.
- Calcular a soma das medidas dos ângulos internos e a soma das medidas dos ângulos externos de polígonos convexos.

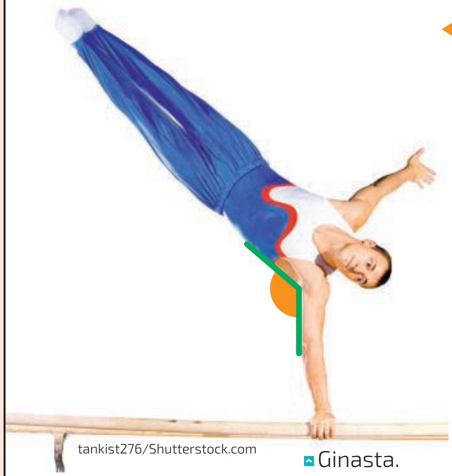
Avaliação

- Ao trabalhar com o tópico **Recordando ângulos**, peça que os alunos citem exemplos de elementos (objetos, lugares, profissões, situações do dia a dia) nos quais se pode identificar a presença de ângulos. Dessa maneira, é possível explorar o conhecimento prévio deles acerca dos conteúdos abordados no capítulo e, a partir dessa observação, traçar metas para o desenvolvimento do processo de ensino, de forma a contemplar suas necessidades.

Recordando ângulos

Neste tópico vamos recordar alguns conceitos estudados em anos anteriores e, também, construir alguns ângulos.

A ideia de **ângulo** pode ser associada a várias situações do cotidiano, como as que envolvem giro em torno de um ponto fixo.


tankist276/Shutterstock.com

Ginasta.

Dmitrij Skorobogatov/Shutterstock.com

Relógio.

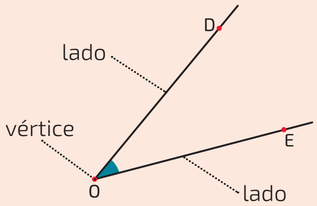

FabrikaSimf/Shutterstock.com

Notebook.

Ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem.

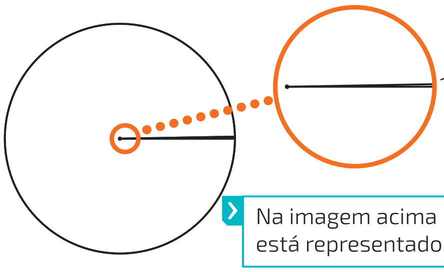
Na imagem ao lado, as semirretas OD e OE são os **lados** do ângulo e o ponto **O** (origem das semirretas) é o **vértice** do ângulo.

Indicamos esse ângulo por $\hat{O}$, $D\hat{O}E$ ou $E\hat{O}D$.



Para medir ângulos, podemos utilizar o **grau** (°) como unidade de medida.

Imagine uma circunferência dividida em 360 partes iguais. Um grau (1°) é a medida de um ângulo com o vértice no centro da circunferência correspondente a uma dessas divisões. Se considerarmos uma volta completa, teremos um ângulo cuja medida é 360°.

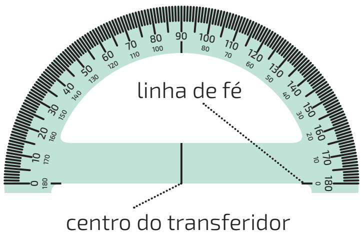


Ilustrações: Ronaldo Lucena

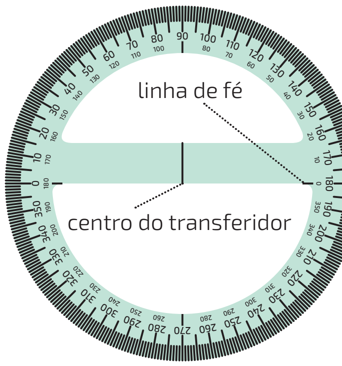
Na imagem acima está representado 1°.

O instrumento utilizado para medir ângulos é o **transferidor**.

Transferidor de 180°



Transferidor de 360°



Ilustrações: Cynthia Sekiguchi

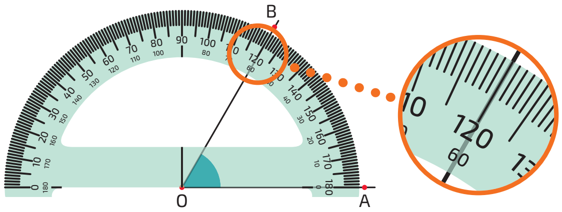
14

Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **1**, **2** e **3** do 1º bimestre. Durante o trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos atingiu o resultado esperado.

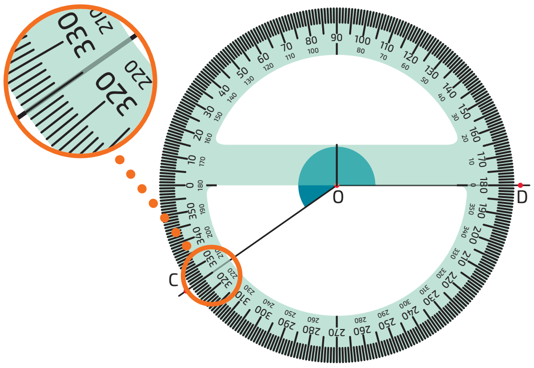
Note que nos transferidores há duas graduações, uma no sentido horário e outra no sentindo anti-horário.

Para medir um ângulo utilizando um transferidor, posicionamos seu centro no vértice do ângulo e a linha de fé sobre um dos lados do ângulo. Veja alguns exemplos.

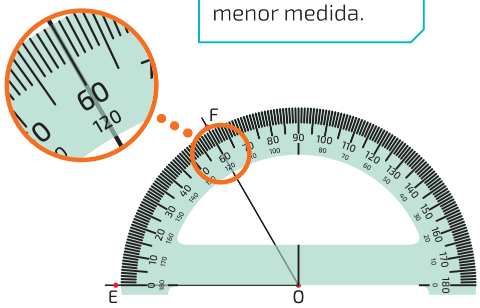


$\text{med}(\hat{AOB}) = 60°$

> Para saber qual medida do ângulo estamos considerando, nós a indicamos por um "arco". Caso não haja indicação de "arco", consideramos a menor medida.



$\text{med}(\hat{COD}) = 215°$



$\text{med}(\hat{EOF}) = 60°$

Ilustrações: Cynthia Sekiguchi

Note que não há indicação de "arco", neste caso, considerou-se a menor medida.

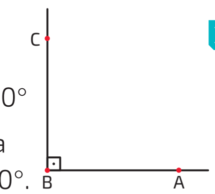
Quando dois ângulos têm medidas iguais, dizemos que eles são congruentes. Nos exemplos acima, os ângulos $\hat{AOB}$ e $\hat{EOF}$ são congruentes e indicamos essa congruência por $\hat{AOB} \equiv \hat{EOF}$.

De acordo com as medidas, os ângulos podem ser classificados em **reto**, **agudo**, **raso** ou **obtuso**.

Reto

$\text{med}(\hat{B}) = 90°$

Ângulo cuja medida é 90°.

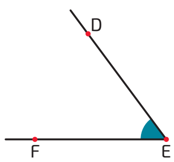


> Podemos indicar o ângulo reto pelo símbolo ⦜.

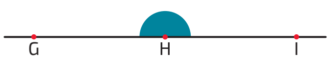
Agudo

$\text{med}(\hat{E}) < 90°$

Ângulo cuja medida é menor do que 90°.



Raso



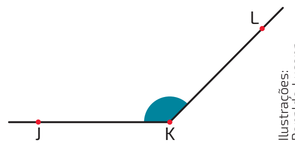
$\text{med}(\hat{H}) = 180°$

Ângulo cuja medida é 180°.

Obtuso

$90° < \text{med}(\hat{K}) < 180°$

Ângulo cuja medida é maior do que 90° e menor do que 180°.

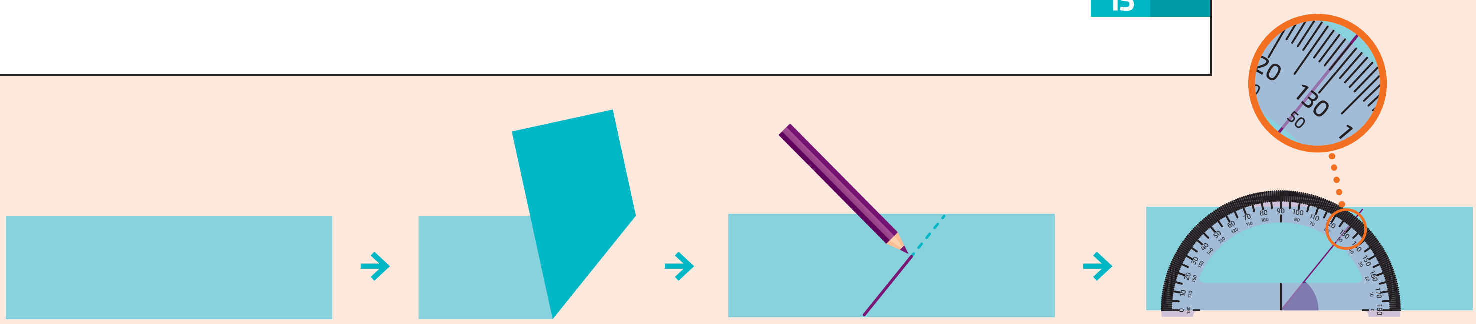


Ilustrações: Ronaldo Lucena

- Distribua a cada aluno algumas tiras de papel, oriente-os a dobrá-las e desdobrá-las, formando um vinco, conforme indicado no rodapé. Em seguida, peça-lhes que tracem um segmento sobre o vinco e meçam o ângulo que construíram com um transferidor.
- Veja a possibilidade de trazer para a sala de aula alguns transferidores para que os alunos possam utilizar na resolução das atividades propostas no capítulo. Caso não haja transferidores para todos reproduza e entregue os que estão disponíveis nas **Páginas para reprodução** ou considere juntar os alunos em duplas, de forma a contribuir com a interação e a troca de experiências entre eles.

Material digital

- No material digital, é apresentado um **Plano de desenvolvimento** para o 1º bimestre capaz de auxiliar nos planejamentos e desenvolvimentos das aulas, em que são descritos em um quadro os objetivos específicos, os objetos de conhecimento e as habilidades específicas **EF08MA01**, **EF08MA02**, **EF08MA05** e **EF08MA15**, previstas para os capítulos **1**, **2** e **3** sugeridos para esse período. Além disso, são elencadas as principais práticas didático-pedagógicas e atividades recorrentes previstas para o conteúdo abordado nesse bimestre.



Ilustrações: Cynthia Sekiguchi/ Keithy Mostachi/Sergio L. Filho

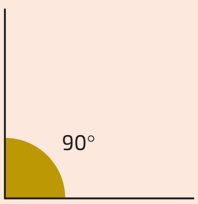
BNCC em foco

- No decorrer desse capítulo, os alunos serão levados a construir, utilizando instrumentos de desenho, a bissetriz de um ângulo e ângulos cujas medidas são 90°, 60°, 45° e 30°. Dessa forma, contempla-se parcialmente a habilidade **EF08MA15**.

Material digital

- Para complementar o trabalho com o tópico **Construindo ângulos**, no material digital dessa coleção disponibilizamos a **Sequência didática 1**, elaborada com objetivo de desenvolver a habilidade **EF08MA15**. As atividades propostas nessa sequência exploram o reconhecimento a e classificação de ângulos em raso, reto, agudo e obtuso, a construção de ângulos utilizando transferidor e compasso, além de possibilitar compreender, identificar e construir a bissetriz de um ângulo.

Resposta



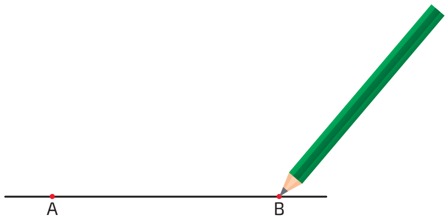
Sergio L. Filho

Construindo ângulos

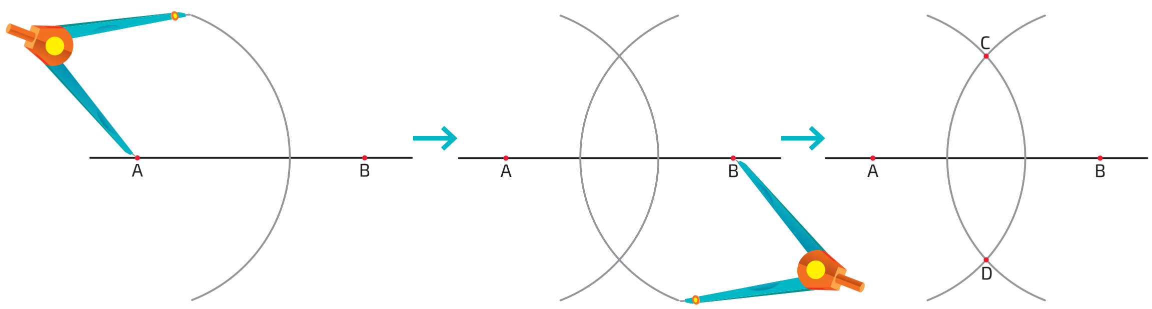
Observe como podemos construir alguns ângulos utilizando régua e compasso.

Ângulo reto

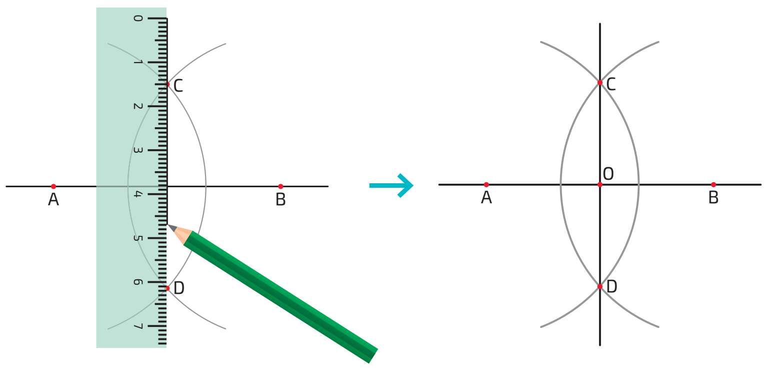
- Com o auxílio de uma régua, traçamos uma reta e indicamos os pontos **A** e **B** sobre ela.



- Com a ponta-seca do compasso em **A** e abertura maior do que metade da medida do comprimento de $\overline{AB}$, traçamos um arco. Com a mesma abertura e a ponta-seca em **B**, traçamos outro arco cruzando o feito anteriormente em dois pontos distintos, determinando, assim, os pontos **C** e **D**.



- Por fim, com auxílio de uma régua, traçamos a reta CD e marcamos o ponto **O** na interseção das retas CD e AB, obtendo assim os ângulos retos $A\hat{O}C$, $B\hat{O}C$, $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}D$.



Ilustrações: Cynthia Sekiguchi/Keithy Mostachi/Ronaldo Lucena

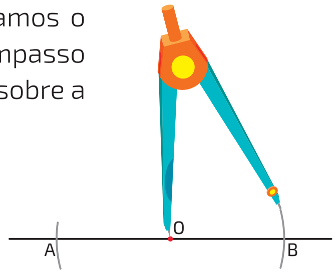
Na página **223** do capítulo **10**, justificaremos que os ângulos $A\hat{O}C$, $B\hat{O}C$, $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}D$ são retos.

Utilizando régua e compasso, construa um ângulo reto.
Resposta nas orientações ao professor.

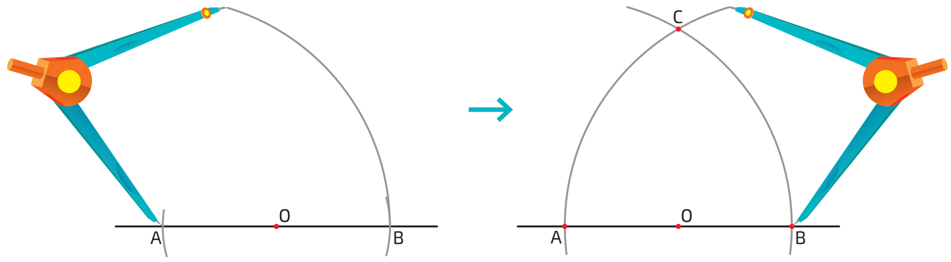
16

Ângulo cuja medida é 60°

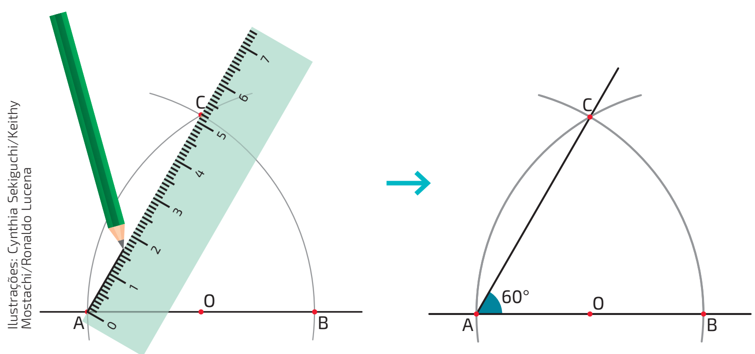
- Com o auxílio de uma régua, traçamos uma reta e indicamos o ponto **O** sobre ela. Em seguida, com a ponta-seca do compasso em **O** e abertura qualquer, traçamos dois arcos, marcando sobre a reta os pontos **A** e **B**.



- Depois, com a ponta-seca do compasso em **A** e abertura igual à medida do comprimento de $\overline{AB}$, traçamos um arco. Em seguida, com a ponta-seca em **B** e mesma abertura, traçamos outro arco cruzando o feito anteriormente, determinando, assim, o ponto **C**.



- Finalmente, traçamos a semirreta AC, obtendo, assim, o ângulo $B\hat{A}C$, cuja medida é 60°.



Por construção, os segmentos com extremos em **A** e **C**, **A** e **B** e **B** e **C** possuem a mesma medida de comprimento, assim, o triângulo ABC é equilátero. Como o triângulo equilátero é um polígono regular, o ângulo $B\hat{A}C$, obtido ao traçarmos a semirreta AC, mede 60°.

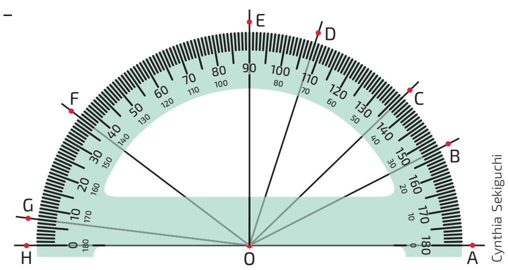
Utilizando régua e compasso, construa um ângulo medindo 60°.
Resposta nas orientações ao professor.

Atividades

Anote no caderno

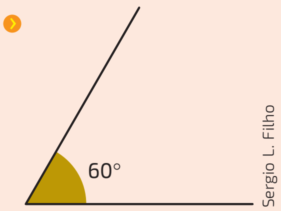
1. A imagem representa um transferidor com alguns ângulos indicados.
Determine a medida do ângulo:

a) $A\hat{O}B$. 27°
b) $A\hat{O}E$. 90°
c) $G\hat{O}H$. 7°
d) $C\hat{O}F$. 99°
e) $B\hat{O}F$. 116°
f) $G\hat{O}D$. 101°



- Ao justificar a construção do ângulo de 60°, se necessário, recorde os alunos de que o triângulo equilátero é um polígono regular e, consequentemente, a medida de cada um de seus ângulos internos é 60°, pois $\frac{180°}{3} = 60°$.

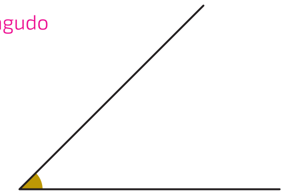
Resposta



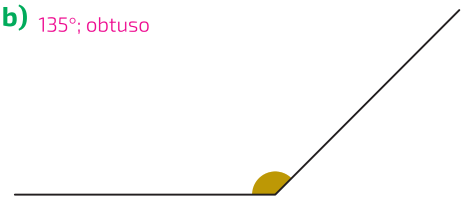
- Verifique se é possível levar para a sala de aula alguns esquadros de 45° e 60° como os apresentados na atividade **3**, para que os alunos possam realizá-la. É possível propor a construção de outros ângulos, utilizando o par de esquadros, como 120° e 15°.

2. Estime a medida dos ângulos. Em seguida, utilizando um transferidor, meça-os e classifique-os em reto, agudo, raso ou obtuso.

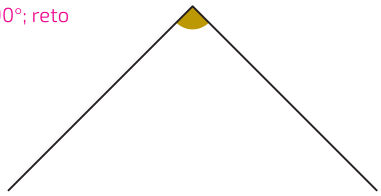
a) 45°; agudo



b) 135°; obtuso

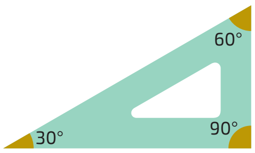


c) 90°; reto

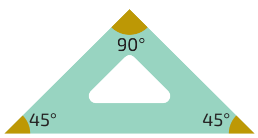


Ilustrações: Ronaldo Lucena

3. Observe dois modelos de esquadros.

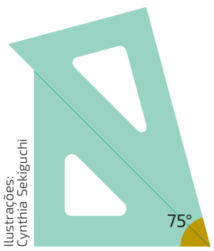


Esquadro de 60°.



Esquadro de 45°.

Com esses esquadros, Gláucia representou um ângulo cuja medida é 75°. Observe.

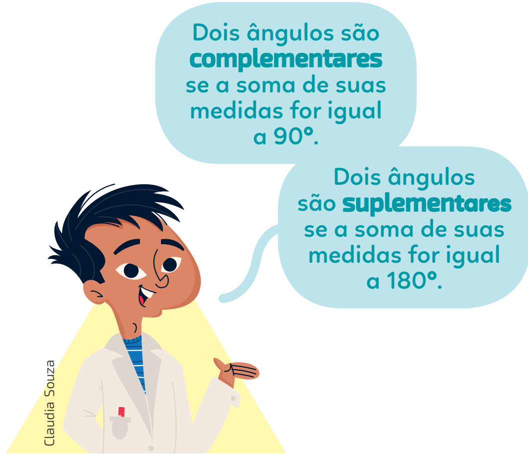


Ilustrações: Cynthia Sekiguchi

Agora, utilizando esses modelos de esquadros, represente um ângulo cuja medida seja: Respostas nas orientações ao professor.

a) 135°. **b)** 150°. **c)** 105°.

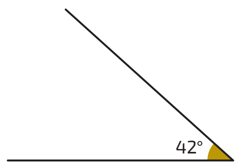
4. Leia o que o professor Felipe está dizendo.



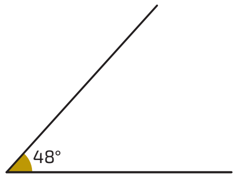
Claudia Souza

De acordo com essas informações, determine as medidas dos ângulos complementar e suplementar de cada ângulo a seguir.

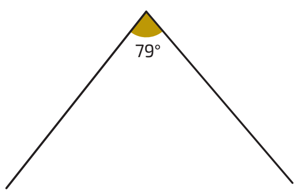
a) 48°; 138°



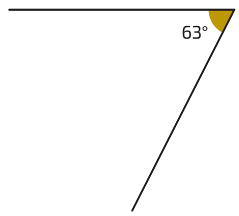
b) 42°; 132°



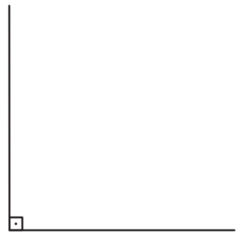
c) 11°; 101°



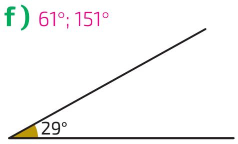
d) 27°; 117°



e) 0°; 90°



f) 61°; 151°

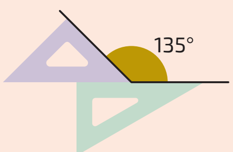


Ilustrações: Ronaldo Lucena

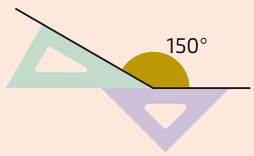
Respostas

3. Possíveis respostas:

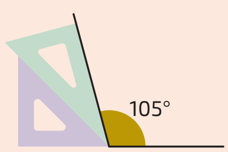
a)



b)

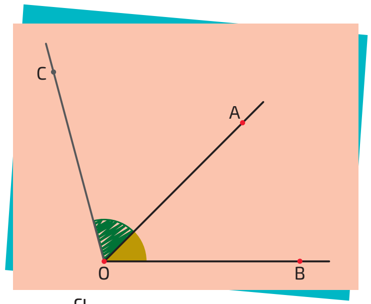


c)



Ilustrações: Cynthia Sekiguchi/ Sergio L. Filho

5. A professora do 8º ano entregou a cada aluno uma folha de papel com o ângulo $A\hat{O}B$. Em seguida, ela pediu aos alunos que construíssem um ângulo $A\hat{O}C$ medindo 60°, de maneira que $A\hat{O}C$ tenha um lado comum com o ângulo $A\hat{O}B$ e as regiões determinadas por esses ângulos não tenham pontos em comum. Veja ao lado a construção feita por Marta.



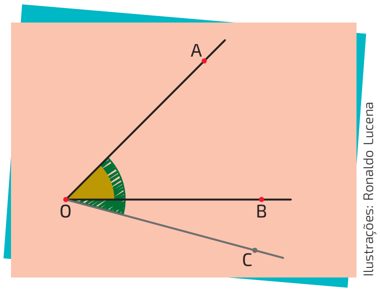
Os procedimentos utilizados por Marta estão representados no fluxograma a seguir.

Início. → Com a ponta-seca do compasso em **A** e abertura igual à medida do comprimento de $\overline{OA}$, trace a partir de **O**, no sentido horário, um arco. → Com a ponta-seca do compasso em **O** e abertura igual à medida de comprimento de $\overline{OA}$, trace a partir de **A**, no sentido anti-horário, um arco cruzando o arco feito no passo anterior. → Na interseção dos arcos, marque o ponto **C**. → Trace a semirreta OC. → Fim.

a) A construção de Marta atende aos requisitos solicitados pela professora? Justifique. Sim, pois os ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ possuem um lado em comum e as regiões determinadas por esses ângulos não possuem pontos em comum.

b) Joaquim realizou a construção de maneira diferente da de Marta. Observe-a.

5. b) não; Apesar de os ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ possuírem um lado em comum, essa construção não atende ao requisito de que as regiões determinadas por esses ângulos não possuam pontos em comum.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

5. c) sim; Espera-se que os alunos respondam que as regiões determinadas pelos ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ não possuem pontos em comum, logo $med(B\hat{O}C) = med(A\hat{O}C) + med(A\hat{O}B)$; não; Espera-se que os alunos respondam que as regiões determinadas pelos ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ possuem pontos em comum, logo $med(B\hat{O}C) \neq med(A\hat{O}C) + med(A\hat{O}B)$.

Essa construção está correta? Justifique.

c) Na construção de Marta, se $med(A\hat{O}B) = 45°$, podemos concluir que $med(B\hat{O}C) = 105°$? E na construção de Joaquim? Justifique.

d) Utilizando régua e compasso, construa um ângulo medindo:

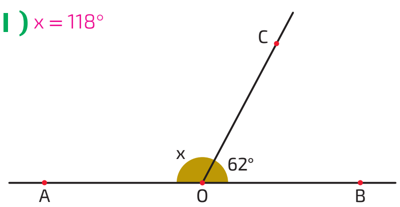
Respostas nas orientações ao professor.

- 120°.
- 150°.

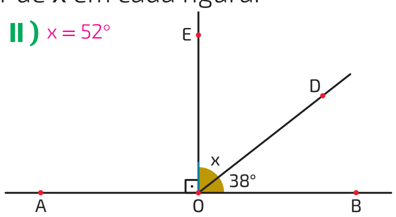
6. A quinta parte da medida do suplementar de $A\hat{O}B$ é 32°. Qual é a medida do complementar desse ângulo? 70°

7. Sabendo que os pontos **A**, **B** e **O** pertencem a uma mesma reta, realize os cálculos necessários e determine o valor de **x** em cada figura.

I) $x = 118°$



II) $x = 52°$

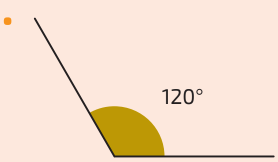


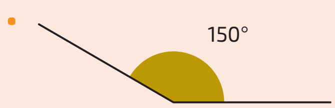
Ilustrações: Ronaldo Lucena

- Leve para a sala de aula réguas, transferidores e compassos ou peça para os alunos levarem, de maneira que eles possam manusear esses instrumentos e realizar as atividades propostas no capítulo. Caso não seja possível disponibilizar instrumentos a todos, considere a possibilidade de juntá-los em duplas para resolverem as atividades. Valorizar o trabalho em grupo é um modo de contribuir significativamente para a troca de experiências e preparar os alunos para a vida em sociedade.

Respostas

5. d)



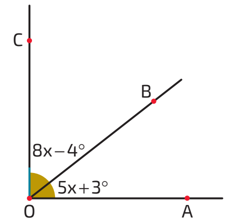


Ilustrações: Sergio L. Filho

- Ao resolver a atividade **9**, converse com os alunos a respeito da rigidez do triângulo e de sua aplicabilidade em construções. Peça a eles que realizem uma pesquisa e levem para a sala de aula imagens de construções em que seja possível identificar triângulos. Se for conveniente, verifique a possibilidade de levá-los ao laboratório de informática.
- Veja uma possível resolução para o desafio proposto na atividade **10**.
  Seja **x** a medida desse ângulo. Então:

$$180° - x = 3 \cdot (90° - x)$$
$$180° - x = 270° - 3 \cdot x$$
$$3 \cdot x - x = 270° - 180°$$
$$2 \cdot x = 90°$$
$$x = 45°$$

8. Observe ao lado os ângulos complementares $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$.



Como esses ângulos são complementares, temos $med(A\hat{O}B) + med(B\hat{O}C) = 90°$. Assim, podemos determinar o valor de **x** escrevendo e resolvendo uma equação.

$$\overbrace{5x + 3°}^{med(A\hat{O}B)} + \overbrace{8x - 4°}^{med(B\hat{O}C)} = 90°$$

$$5x + 8x + 3° - 4° = 90°$$

$$13x - 1° = 90°$$

$$13x - 1° + 1° = 90° + 1°$$

$$13x = 91°$$

$$\frac{13x}{13} = \frac{91°}{13}$$

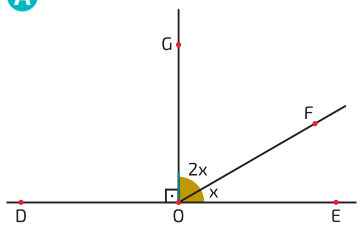
$$x = 7°$$

Utilizando o valor obtido para **x**, podemos calcular as medidas de $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$.

- $med(A\hat{O}B) = 5x + 3°$
  $med(A\hat{O}B) = 5 \cdot 7° + 3° = 38°$
- $med(B\hat{O}C) = 8x - 4°$
  $med(B\hat{O}C) = 8 \cdot 7° - 4° = 52°$

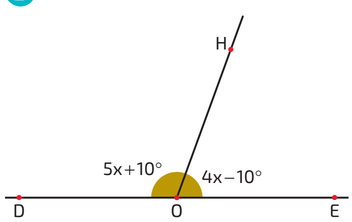
Agora, calcule as medidas dos ângulos indicados em cada uma das imagens, sabendo que os pontos **D**, **O** e **E** pertencem a uma mesma reta.

A



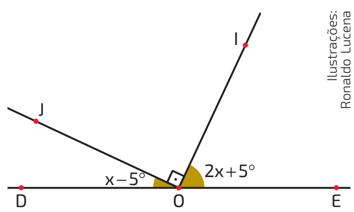
$med(E\hat{O}F) = 30°$; $med(F\hat{O}G) = 60°$

B



$med(E\hat{O}H) = 70°$; $med(H\hat{O}D) = 110°$

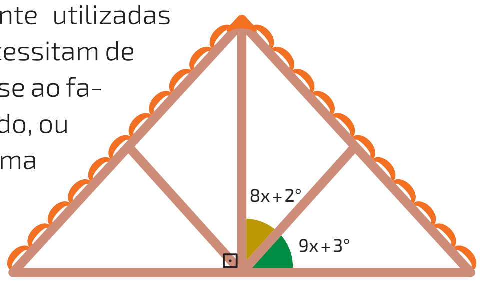
C



$med(E\hat{O}I) = 65°$; $med(D\hat{O}J) = 25°$

Ilustrações: Ronaldo Lucena

9. Formas triangulares são amplamente utilizadas em construções e estruturas que necessitam de rigidez. Essa grande utilização deve-se ao fato de o triângulo ser um polígono rígido, ou seja, que não se deforma. No esquema ao lado estão indicadas algumas informações acerca da estrutura de sustentação de um telhado.



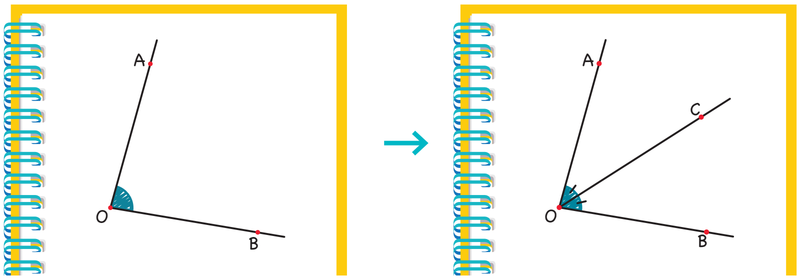
Ronaldo Lucena

Nessa estrutura, considerando os caibros como segmentos de reta e sabendo que os ângulos indicados em amarelo e verde são complementares, determine o valor de **x** e a medida do ângulo indicado em verde. $x = 5°$; $48°$

10. A medida do suplementar de um ângulo é igual ao triplo da medida de seu complementar. Qual é a medida desse ângulo? $45°$

Bissetriz de um ângulo

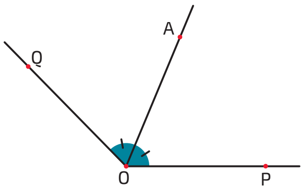
João desenhou o ângulo $A\hat{O}B$ medindo 84°. Em seguida, ele traçou uma semirreta OC, de maneira que $A\hat{O}C \equiv C\hat{O}B$.



A semirreta traçada por João dividiu o ângulo ao meio, de maneira que $med(A\hat{O}C) = med(C\hat{O}B) = 42°$, pois $84°: 2 = 42°$. Neste caso, dizemos que a semirreta OC é a **bissetriz** do ângulo $A\hat{O}B$.

A bissetriz de um ângulo é uma semirreta de origem no vértice que o divide em dois ângulos congruentes.

Na imagem ao lado, a semirreta OA é a bissetriz do ângulo $P\hat{O}Q$.

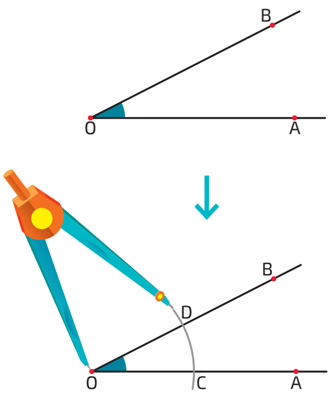


Ilustrações: Ronaldo Lucena

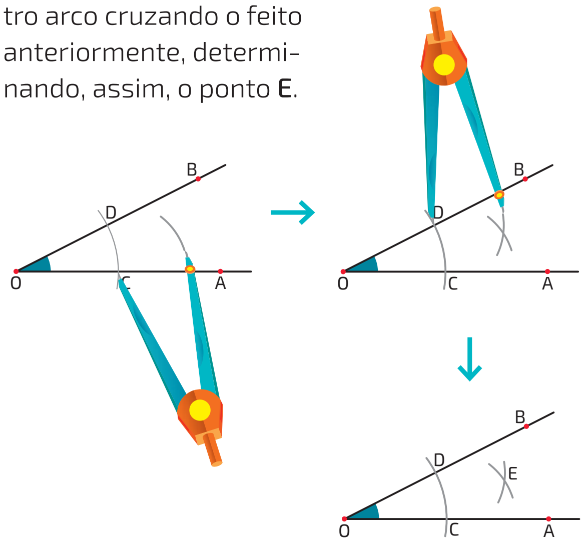
Construção da bissetriz de um ângulo

Utilizando régua e compasso, vamos traçar a bissetriz de um ângulo.

- Inicialmente, traçamos um ângulo $A\hat{O}B$ qualquer. Em seguida, com a ponta-seca do compasso em **O** e abertura qualquer, traçamos um arco marcando o ponto **C** sobre a semirreta OA e o ponto **D** sobre a semirreta OB.



- Com a ponta-seca do compasso em **C** e abertura maior do que a metade da medida do comprimento de $\overline{CD}$, traçamos um arco. Com a mesma abertura e ponta-seca em **D**, traçamos outro arco cruzando o feito anteriormente, determinando, assim, o ponto **E**.

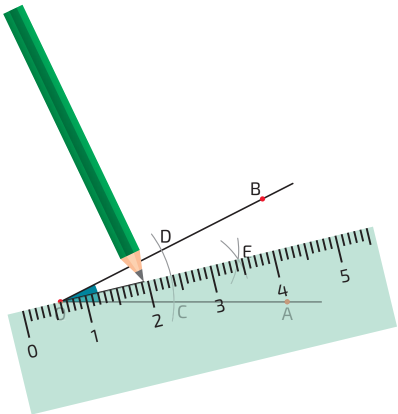


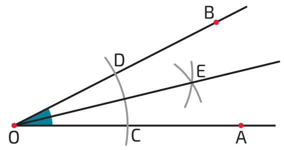
Ilustrações: Keithy Mostachi/ Ronaldo Lucena

- Solicite aos alunos que construam a bissetriz de alguns ângulos utilizando régua e compasso, como indicado nessa página e na próxima. Caso não haja compasso ou régua em quantidade suficiente para todos os alunos, reúna-os em grupos.

- Na atividade **12**, verifique se os alunos perceberam que o ângulo $A\hat{O}F$ é raso, ou seja, mede 180°, para auxiliá-los no cálculo das medidas solicitadas em cada item.
- No item **b** da atividade **13**, os alunos podem realizar as construções da seguinte maneira:
  - Para construir o ângulo medindo 135°, espera-se que os alunos construam dois ângulos adjacentes cujas medidas sejam 90° e 45°.
  - Para construir o ângulo medindo 75°, espera-se que os alunos construam dois ângulos adjacentes cujas medidas sejam 45° e 30°.

- Em seguida, traçamos a semirreta OE, que é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.





Ilustrações: Cynthia Sekiguchi/ Keithy Mostachi/ Ronaldo Lucena

Atividades

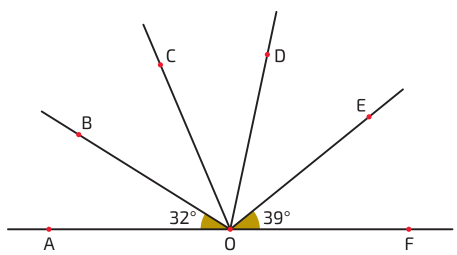
Anote no caderno

11. Utilizando régua, transferidor e compasso, construa os ângulos cuja medida está indicada. Depois, trace a bissetriz de cada um deles. Respostas nas orientações ao professor.

a) 45° **c)** 140°

b) 60° **d)** 100°

12. Na figura a seguir, $E\hat{O}F \equiv D\hat{O}E$ e a semirreta OC é bissetriz do ângulo $B\hat{O}D$.



Ronaldo Lucena

Os pontos **A**, **O** e **F** pertencem a uma mesma reta.

Qual é a medida do ângulo:

a) $D\hat{O}E$. 39° **c)** $B\hat{O}C$. 35°

b) $B\hat{O}D$. 70° **d)** $B\hat{O}F$. 148°

13. Estudamos no tópico anterior como construir ângulos retos e ângulos medindo 60°.

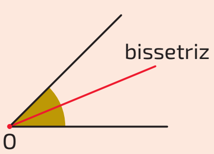
a) Escreva como você faria para construir, utilizando régua e compasso, ângulos medindo 45° e 30°. Em seguida, construa-os. Respostas nas orientações ao professor.

b) Utilizando régua e compasso, construa um ângulo medindo:

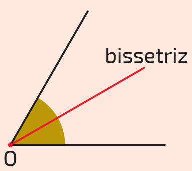
- 135°. Respostas nas orientações ao professor.
- 75°.

Respostas

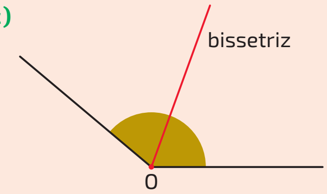
11. a)



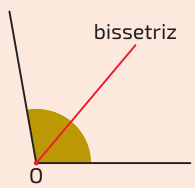
b)



c)



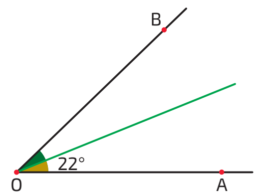
d)



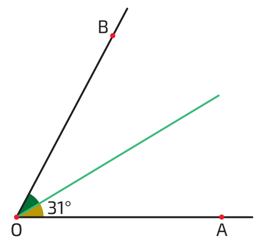
Ilustrações: Sergio L. Filho

14. Calcule a medida de $A\hat{O}B$ em cada item sabendo que a semirreta em verde é bissetriz do ângulo.

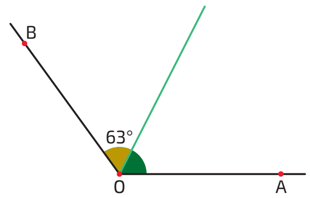
a) 44°



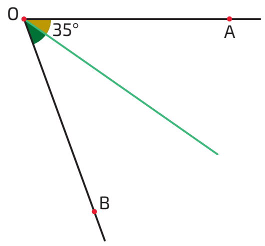
b) 62°



c) 126°



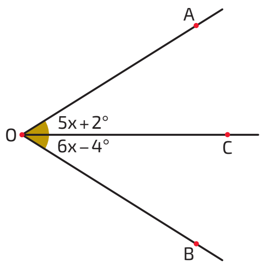
d) 70°



Ilustrações: Ronaldo Lucena

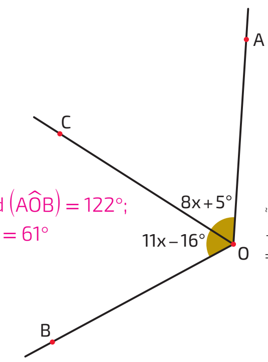
15. Em cada item, determine o valor de **x** e calcule as medidas de $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ sabendo que $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $A\hat{O}B$.

I) $x = 6°$; med $(A\hat{O}B) = 64°$; med $(A\hat{O}C) = 32°$



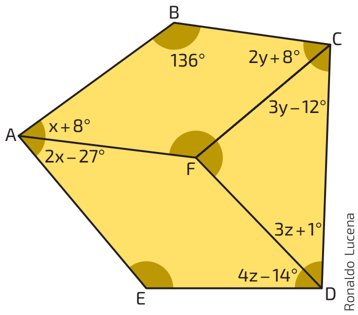
II)

$x = 7°$; med $(A\hat{O}B) = 122°$;
med $(A\hat{O}C) = 61°$



Ilustrações: Ronaldo Lucena

16. No pentágono ABCDE, os segmentos AF, CF e DF pertencem, respectivamente, às bissetrizes dos ângulos $E\hat{A}B$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}E$. Quais são as medidas dos ângulos $B\hat{C}D$, $C\hat{F}D$ e $D\hat{E}A$? med $(B\hat{C}D) = 96°$; med $(C\hat{F}D) = 86°$ e med $(D\hat{E}A) = 130°$

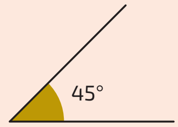


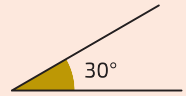
Ronaldo Lucena

- Nas atividades **15** e **16**, se necessário, retome com os alunos os métodos de resolução de uma equação do 1º grau, a fim de auxiliá-los em suas resoluções.

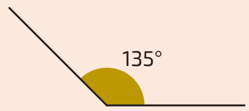
Respostas

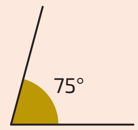
13. a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que, para construir ângulos medindo 45° e 30°, eles construiriam ângulos medindo 90° e 60° e, em seguida, traçariam suas bissetrizes, obtendo, assim, os ângulos desejados.





b) Sugestão de resposta:





Ilustrações: Sergio L. Filho

BNCC em foco

- Antes de iniciar o trabalho com o conteúdo dessa página, vale dizer aos alunos que, em muitas situações, a Álgebra e a Geometria estão presentes em um mesmo conhecimento matemático, e isso pode ser percebido no estudo da soma das medidas dos ângulos internos de polígonos convexos, que pode ser expressa por uma fórmula. Dessa forma, os alunos podem compreender as relações entre os diferentes campos da Matemática e desenvolver a capacidade de construir e aplicar esses conhecimentos, exercitando a perseverança na busca de soluções. Com isso, a **Competência específica de Matemática 3** é contemplada.
- Assim como nas páginas de abertura, o tema contemporâneo **Educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena** é contemplado, mostrando aspectos importantes da cultura indígena. Aproveite o assunto para promover debates que privilegiem a promoção da igualdade nas relações étnico-raciais e contribuam para uma sociabilidade consciente entre os alunos.

- Retome com os alunos o conceito de linhas poligonais.

Os polígonos

Vimos nas páginas **12** e **13** que alguns povos indígenas brasileiros utilizam em suas pinturas corporais formas que podem ser associadas a polígonos. Outra expressão cultural indígena em que também podemos identificar figuras que lembram polígonos são os objetos decorativos e utensílios confeccionados por eles.

Fabio Colombini

Maracás confeccionados pelos indígenas Karajá.

Maracá › chocalho indígena feito a partir de um fruto chamado cabaça.

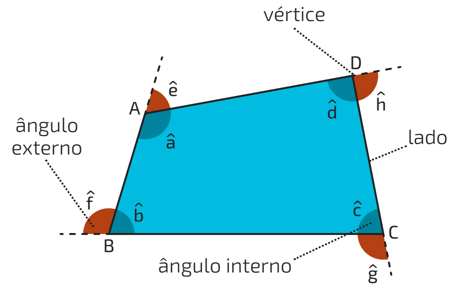
Você já estudou em anos anteriores os polígonos. Vamos recordar alguns dos conceitos estudados?

Chamamos de **polígono** uma linha poligonal simples e fechada. Cada segmento de reta que a compõe é chamado **lado** do polígono.

> Nesta coleção, exceto quando dito o contrário, apresentaremos os polígonos com suas regiões internas coloridas, conforme imagem a seguir.

No polígono ao lado podemos destacar alguns de seus elementos.

- 4 vértices: A, B, C e D.
- 4 lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$.
- 4 ângulos internos: $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$.
- 4 ângulos externos: $\hat{e}$, $\hat{f}$, $\hat{g}$ e $\hat{h}$.

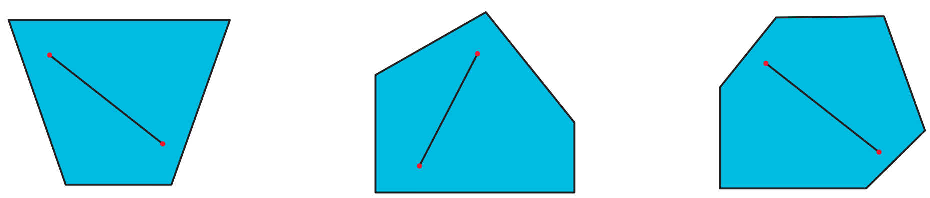


Podemos classificar os polígonos de acordo com a quantidade de lados.

- triângulo: 3 lados
- quadrilátero: 4 lados
- pentágono: 5 lados
- hexágono: 6 lados
- heptágono: 7 lados
- octógono: 8 lados
- eneágono: 9 lados
- decágono: 10 lados
- dodecágono: 12 lados

Os polígonos também podem ser classificados em **convexos** ou **não convexos**.

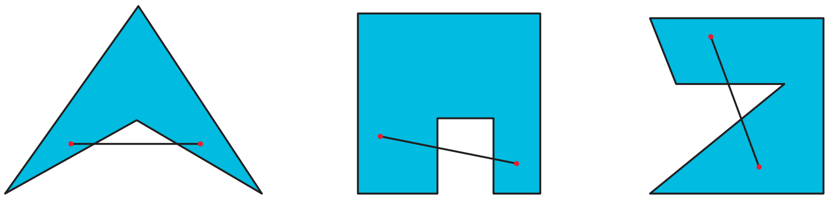
- Dizemos que um polígono é **convexo** quando todo segmento de reta, cujas extremidades pertencem ao interior desse polígono, tem todos os seus pontos no interior do polígono.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

- É importante que os alunos identifiquem figuras geométricas planas que não sejam polígonos. Para isso, apresente outros exemplos de figuras que não sejam polígonos, e peça que justifiquem a classificação.

- Dizemos que um polígono é **não convexo** quando existe pelo menos um segmento de reta cujas extremidades pertencem ao interior desse polígono, sem ter todos os seus pontos no interior do polígono.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

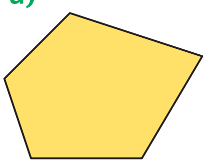
Atividades

Anote no caderno

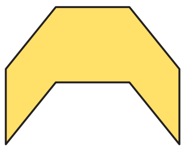
17. Dentre as figuras abaixo, quais são:

- polígonos? a; c
- não polígonos? b; d

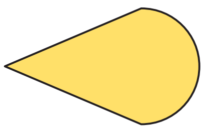
a)



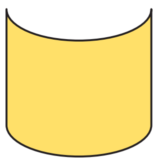
c)



b)



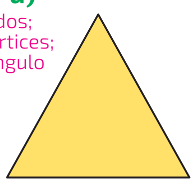
d)



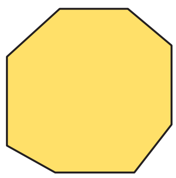
Ilustrações: Ronaldo Lucena

18. Escreva a quantidade de lados e de vértices de cada polígono. Em seguida, classifique-os quanto à quantidade de lados.

a) 3 lados; 3 vértices; triângulo

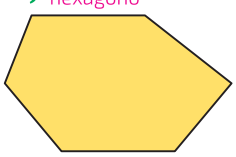


c) 8 lados; 8 vértices; octógono



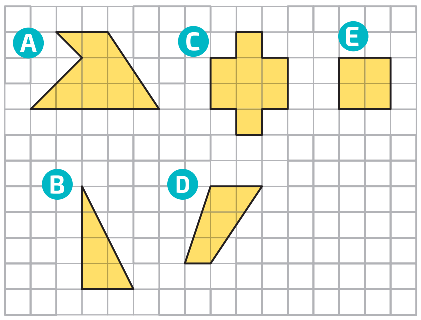
b) 4 lados; 4 vértices; quadrilátero

d) 6 lados; 6 vértices; hexágono



Ilustrações: Ronaldo Lucena

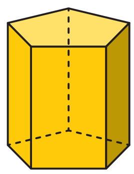
19. Classifique os polígonos em convexo ou não convexo. convexo: b, d, e; não convexo: a, c



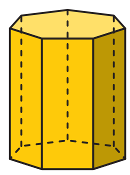
Ronaldo Lucena

20. Observe os prismas.

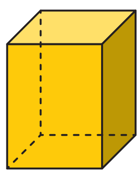
I)



III)

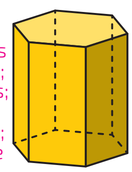


II)



a) I: pentágonos e quadriláteros; II: quadriláteros; III: heptágonos e quadriláteros; IV: hexágonos e quadriláteros

IV)



Ilustrações: Ronaldo Lucena

a) Em relação à quantidade de lados, classifique os polígonos que são as faces desses primas.

b) Quantas faces possui cada um desses primas? I: 7 faces; II: 6 faces; III: 9 faces; IV: 8 faces

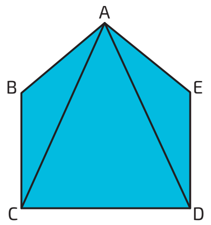
c) Quantas faces do prisma **I** são pentágonos? E quantas são quadriláteros? 2 faces; 5 faces

- Ao trabalhar a atividade **19**, distribua a malha triangular disponível nas **Páginas para reprodução** e peça para os alunos construírem polígonos convexos e não convexos diferentes dos apresentados na atividade. Em seguida, solicite que troquem com um colega e classifiquem os polígonos em convexo ou não convexo.
- Na atividade **20**, verifique a possibilidade de levar objetos que lembrem os prismas apresentados para auxiliar os alunos em suas resoluções.

Diagonais de polígonos convexos

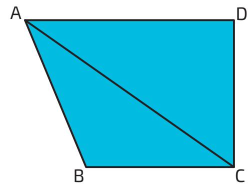
Estudamos anteriormente que as **diagonais** de um polígono convexo são os segmentos de reta que unem dois de seus vértices não consecutivos.

No pentágono convexo ABCDE, as diagonais que partem de **A** ligam-no aos demais vértices, com exceção dele próprio e dos dois vértices consecutivos a ele (**B** e **E**). Assim, a quantidade de diagonais que partem de um único vértice do pentágono convexo é dada por:



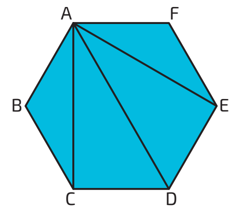
$$\underbrace{5}_{\text{quantidade de vértices do pentágono (A, B, C, D e E)}} - \underbrace{3}_{\text{quantidade de vértices que não são ligados a A por diagonal (A, B e E)}} = \underbrace{2}_{\text{quantidade de diagonais que partem de um único vértice}}$$

Veja a quantidade de diagonais que partem de um único vértice de alguns polígonos convexos.



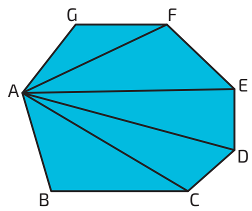
Quadrilátero.

$4 - 3 = 1 \longrightarrow$ 1 diagonal



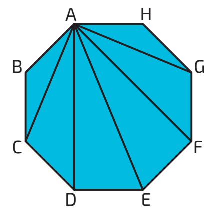
Hexágono.

$6 - 3 = 3 \longrightarrow$ 3 diagonais



Heptágono.

$7 - 3 = 4 \longrightarrow$ 4 diagonais



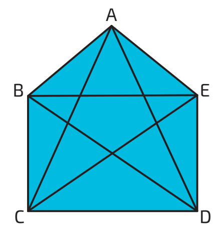
Octógono.

$8 - 3 = 5 \longrightarrow$ 5 diagonais

Veja o mesmo pentágono convexo ABCDE com todas as suas diagonais traçadas.

Podemos obter a quantidade de diagonais do pentágono convexo da seguinte maneira.

- Sabemos que a quantidade de diagonais que partem de um único vértice do pentágono convexo é dada por 5 – 3.
- Multiplicamos a quantidade de diagonais que partem de um único vértice pela quantidade de vértices do pentágono.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

$$\underbrace{5}_{\text{quantidade de vértices}} \cdot \underbrace{(5 - 3)}_{\text{quantidade de diagonais que partem de um único vértice}}$$

26

- Antes de iniciar o trabalho com o tópico **Diagonais de polígonos convexos**, realize a atividade complementar apresentada no rodapé, possibilitando que os alunos manipulem o geoplano e criem figuras que lembrem polígonos convexos. Dessa forma, eles poderão relacionar as diagonais de polígonos convexos e verificar na prática as possibilidades, de modo que tenham uma visão do conteúdo que vai além da abstrata. Ao final da atividade, peça para identificarem relações entre a quantidade de lados do polígono convexo e a quantidade de diagonais.

Material digital

- O material digital dessa coleção apresenta o projeto **Pintura corporal indígena**, que possibilita um trabalho com o componente curricular **Arte** e os temas contemporâneos **Diversidade cultural** e **Educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena**, destacados na BNCC. Esse projeto desenvolve um trabalho que possibilita compreender um pouco sobre a cultura indígena, em particular no que diz respeito à geometria presente na pintura corporal, na arquitetura, nos costumes, na produção, entre outras temáticas.

Atividade complementar

Diagonais no geoplano

Materiais

- geoplano com 25 pregos
- elásticos

Desenvolvimento

- Organize os alunos em duplas e distribua um geoplano e vários elásticos para cada uma.
- Solicite que realizem a construção de diversas figuras que lembrem polígonos convexos e representem suas diagonais, utilizando os elásticos. Peça que reproduzam os polígonos apresentados nessa página e suas diagonais ao lado, e preencham o quadro ao lado.

Polígono	Quantidade de lados	Quantidade de diagonais
Quadrado		
Pentágono		
Hexágono		
Heptágono		
Octógono		

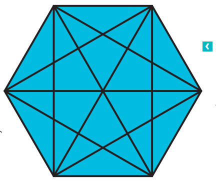
- Note que $\overline{AC}$ e $\overline{CA}$ representam a mesma diagonal, assim como $\overline{AD}$ e $\overline{DA}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DB}$ etc. Para não consideramos a mesma diagonal duas vezes, dividimos $5 \cdot (5 - 3)$ por 2.

$$\frac{5 \cdot (5-3)}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Portanto, o pentágono convexo tem 5 diagonais.

Agora, veja a quantidade total de diagonais de alguns polígonos convexos.

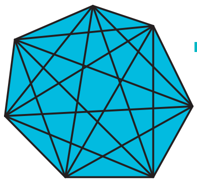
Ilustrações: Ronaldo Lucena



Hexágono.

$\frac{6 \cdot (6-3)}{2} = 9$

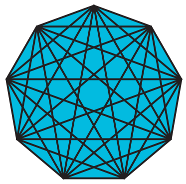
9 diagonais



Heptágono.

$\frac{7 \cdot (7-3)}{2} = 14$

14 diagonais



Eneágono.

$\frac{9 \cdot (9-3)}{2} = 27$

27 diagonais

Em um polígono convexo de **n** lados, a quantidade de diagonais (**D**) é dada pela fórmula: $D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$

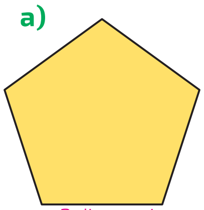
Quantos vértices tem um polígono convexo com 9 diagonais partindo de cada vértice? 12 vértices

Atividades

Anote no caderno

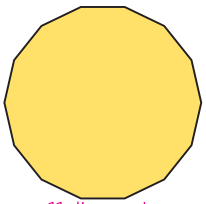
21. Determine a quantidade de diagonais que partem de um único vértice em cada polígono.

a)



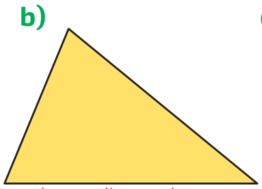
2 diagonais

c)



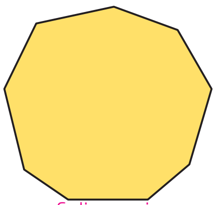
11 diagonais

b)



nenhuma diagonal

d)



6 diagonais

Ilustrações: Ronaldo Lucena

22. Calcule quantos lados tem um polígono convexo, sabendo que de cada vértice partem:

a) 7 diagonais. 10 lados

b) 13 diagonais. 16 lados

c) 22 diagonais. 25 lados

23. Em um dodecágono convexo há 7 diagonais traçadas que partem todas de um mesmo vértice.

a) Quantas diagonais ainda é possível traçar nesse polígono a partir desse mesmo vértice? Por quê?

b) No total, quantas diagonais tem esse polígono? 54 diagonais

24. Quantas diagonais tem um polígono convexo de:

a) 5 lados? 5 diagonais

b) 8 lados? 20 diagonais

c) 11 lados? 44 diagonais

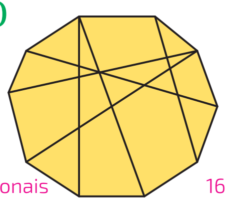
d) 15 lados? 90 diagonais

e) 16 lados? 104 diagonais

f) 18 lados? 135 diagonais

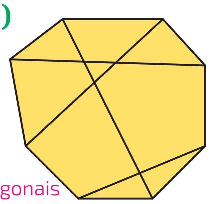
25. Quantas diagonais ainda podem ser traçadas em cada polígono?

a)



29 diagonais

b)



16 diagonais

Ilustrações: Ronaldo Lucena

23. a) Duas diagonais, pois a quantidade de diagonais que partem de um único vértice nesse polígono é dada por $12 - 3 = 9$ e estão traçadas apenas 7 delas.

BNCC em foco

- As atividades dessa página desenvolvem o raciocínio lógico nos alunos e o espírito de investigação ao proporem o estabelecimento de regularidades a partir da quantidade de lados dos polígonos convexos e da quantidade de diagonais, solicitando que os alunos formulem argumentos convincentes recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender o mundo e atuar nele. Dessa forma, contempla-se a **Competência específica de Matemática 2.**

- Ao realizarem as atividades **21** e **25**, peça aos alunos para não traçarem as diagonais no livro.

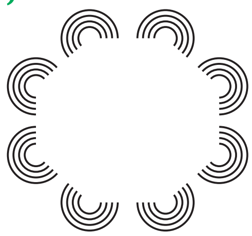
- Na atividade **26**, explique aos alunos que as imagens apresentadas criam um efeito visual chamado ilusão de óptica, fazendo com que observemos de maneira diferente do que elas são realmente.
- Na atividade **29**, na última linha do quadro, em que devem ser determinados **L**, **M**, **N** e **O**, os próprios alunos vão definir o polígono convexo. Contudo, informe que não pode ser utilizado um polígono convexo que já esteja definido em outra linha do quadro. Ao concluir essa atividade, escreva na lousa algumas das respostas dadas pelos alunos para que eles as comparem e verifiquem se estão corretas.

BNCC em foco

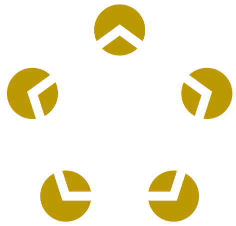
- A atividade **30** apresenta uma tela de Piet Mondrian, relacionando-a ao conteúdo estudado. Esse tipo de relação é um modo profícuo de contemplar o que expressa a **Competência geral 3**, pois coloca os alunos em contato com referências artísticas que contribuem para a formação do senso estético, algo imprescindível para a valorização da diversidade cultural.

26. Cada imagem a seguir sugere um polígono.

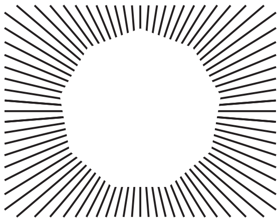
I)



II)



III)



Ilustrações: Ronaldo Lucena

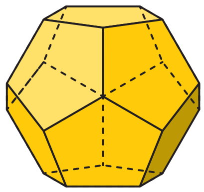
a) Classifique cada polígono sugerido quanto à quantidade de lados.
I: octógono; II: pentágono; III: eneágono

b) Em cada polígono sugerido, quantas diagonais partem de um único vértice?
I: 5 diagonais; II: 2 diagonais; III: 6 diagonais

c) Quantas diagonais tem cada um desses polígonos sugeridos?
I: 20 diagonais; II: 5 diagonais; III: 27 diagonais

27. Sabendo que em certo polígono convexo partem 14 diagonais de cada vértice, qual é a quantidade total de vértices desse polígono? E qual a quantidade de dia-gonais? 17 vértices; 119 diagonais

28. O dodecaedro é uma figura geométrica espacial composta de 12 faces pentagonais. Quantas diagonais podem ser traçadas em cada face dessa figura? 5 diagonais



Ronaldo Lucena

29. Determine o nome ou o número que as letras em destaque no quadro representam, sabendo que as informações são referentes a cinco polígonos convexos diferentes.

Classificação quanto à quantidade de lados	Quantidade de vértices	Quantidade de diagonais que partem de cada vértice	Quantidade total de diagonais
Pentágono convexo	A 5	B 2	C 5
D eneágono convexo	E 9	6	F 27
G octógono convexo	8	H 5	I 20
Undecágono convexo	11	J 8	K 44
L	M	N	O

L, M, N e O: Resposta pessoal.

30. Piet Mondrian (1872-1944) nasceu na Holanda e iniciou seus estudos de pintura na Academia de Belas-Artes de Amsterdã em 1892. Esse artista criou o termo Neoplasticismo para designar sua pintura.

Junte-se a um colega, observe a obra de Mondrian ao lado e classifiquem, quanto à quantidade de lados, os polígonos que podem ser identificados nessa obra. Em seguida, determinem a quantidade de diagonais desses polígonos. triângulo: 0; quadrilátero: 2; octógono: 20

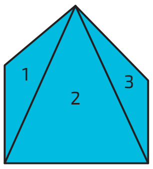
Reprodução/Museu Municipal de Haia, Holanda

Composição em losango com quatro traços amarelos. 1933. Piet Mondrian. Óleo sobre tela.

Soma das medidas dos ângulos internos de polígonos convexos

Veja como podemos obter a soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono convexo.

- Decompomos o pentágono em triângulos. Neste caso, cada triângulo obtido deve ser formado por exatamente 3 vértices do polígono.

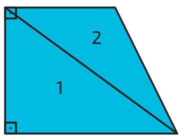


- Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, multiplicamos a quantidade de triângulos obtidos na decomposição por 180°.

$$\underbrace{3}_{\text{quantidade de triângulos obtidos}} \cdot \underbrace{180°}_{\text{soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo}} = 540°$$

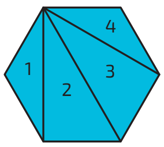
Assim, a soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono convexo é 540°.

Agora, veja a soma das medidas dos ângulos internos de alguns polígonos convexos.



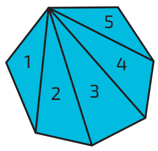
Quadrilátero.

$2 \cdot 180° = 360°$



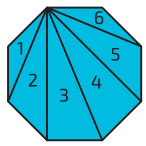
Hexágono.

$4 \cdot 180° = 720°$



Heptágono.

$5 \cdot 180° = 900°$



Octógono.

$6 \cdot 180° = 1\,080°$

Ao decompormos um polígono convexo em triângulos, cada triângulo obtido deve ser formado por exatamente 3 vértices do polígono.

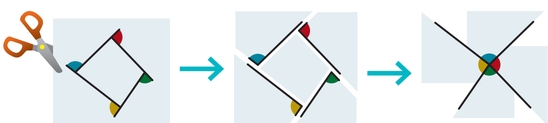
Note que a quantidade de triângulos em que um polígono convexo é decomposto é igual à quantidade de lados desse polígono menos 2.

> Em um polígono convexo de **n** lados, a soma das medidas dos ângulos internos (**S**) é dada por: $S = (n - 2) \cdot 180°$.

Soma das medidas dos ângulos externos de polígonos convexos

Observe como obter a soma das medidas dos ângulos externos de um quadrilátero convexo e de um pentágono convexo por meio de recorte.

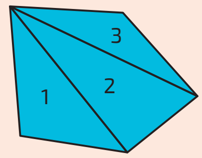
- Quadrilátero

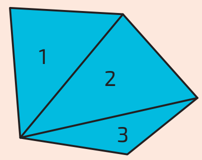


- Pentágono

Ilustrações: Ronaldo Lucena

- Explique aos alunos como decompor um polígono convexo em triângulos e como verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, conteúdos estudados no capítulo **9** do volume do **7º** ano dessa coleção.
- Explique também que, embora um polígono convexo de 4 lados ou mais possa ser decomposto em triângulos de maneiras diferentes, a quantidade de triângulos obtidos será sempre a mesma.





Ilustrações: Sergio L. Filho

- Nas **Páginas para reprodução**, disponibilizamos dois moldes para recortes de polígonos convexos com a indicação de seus ângulos externos. Oriente os alunos a colorirem os arcos que indicam esses ângulos, um de cada cor, recortá-los e encaixá-los, conforme indicado no final da página, para observarem, de maneira prática, que a soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360°.

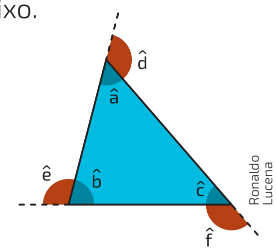
- Ao término das explicações teóricas dessa página, pergunte aos alunos como é possível determinar as medidas dos ângulos internos de um polígono regular, sabendo a soma dessas medidas e a quantidade de lados. Espera-se que eles respondam que basta dividir a soma pela quantidade de ângulos (ou de lados), pois em polígonos regulares as medidas dos ângulos internos são iguais.
Instigue-os também a obter uma fórmula para determinar a medida dos ângulos internos $\hat{a}$ de um polígono regular qualquer, dada a quantidade de **n** de lados, ou seja, $med(\hat{a}) = \dfrac{180°(n-2)}{n}$.

Assim, temos que a soma das medidas dos ângulos externos de um quadrilátero convexo ou de um pentágono convexo é 360°.

A soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo é 360°. Isso pode ser demonstrado da seguinte maneira.

- Considere o triângulo abaixo.

ângulos internos: $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$
ângulos externos: $\hat{d}$, $\hat{e}$ e $\hat{f}$



O ângulo interno e o externo em cada vértice são suplementares, ou seja:

$$med(\hat{a}) + med(\hat{d}) = 180°$$
$$med(\hat{b}) + med(\hat{e}) = 180°$$
$$med(\hat{c}) + med(\hat{f}) = 180°$$

Assim:

$$med(\hat{a}) + med(\hat{b}) + med(\hat{c}) + med(\hat{d}) + med(\hat{e}) + med(\hat{f}) = 3 \cdot 180° = 540°$$

Como a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é 180°, temos:

$$\underbrace{med(\hat{a}) + med(\hat{b}) + med(\hat{c})}_{180°} + med(\hat{d}) + med(\hat{e}) + med(\hat{f}) = 540°$$
$$180° + med(\hat{d}) + med(\hat{e}) + med(\hat{f}) = 540°$$
$$180° - 180° + med(\hat{d}) + med(\hat{e}) + med(\hat{f}) = 540° - 180°$$
$$med(\hat{d}) + med(\hat{e}) + med(\hat{f}) = 360°$$

Portanto, a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo, assim como a do quadrilátero convexo e a do pentágono convexo, também é 360°.

De maneira parecida, é possível demonstrar que a soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360°.

A soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360°.

Qual é a medida de cada ângulo externo de um retângulo? 90°

Atividades

Anote no caderno

31. Desenhe os polígonos indicados, decomponha cada um deles em triângulos e calcule a soma das medidas dos ângulos internos.

a) Polígono convexo de 4 lados. 360°

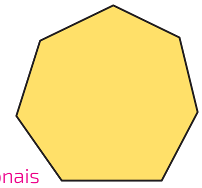
b) Polígono convexo de 8 lados. 1080°

c) Polígono convexo de 9 lados. 1260°

d) Polígono convexo de 13 lados. 1980°

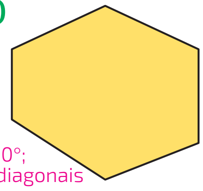
32. Determine a soma das medidas dos ângulos internos e a quantidade de diagonais de cada polígono.

a)



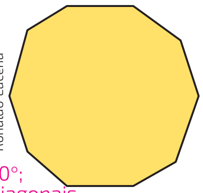
900°;
14 diagonais

c)



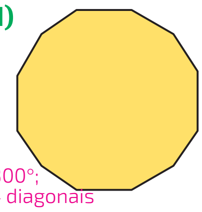
720°;
9 diagonais

b)



1 440°;
35 diagonais

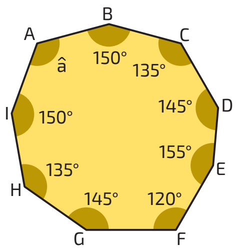
d)



1 800°;
54 diagonais

Ilustrações: Ronaldo Lucena

33. Qual é a medida do ângulo â no polígono a seguir? 125°



Ronaldo Lucena

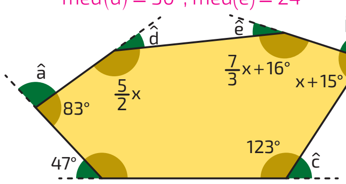
34. Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular de:

a) 15 lados. 2 340°
b) 18 lados. 2 880°
c) 25 lados. 4 140°
d) 30 lados. 5 040°

35. Determine a quantidade de diagonais que partem de um único vértice de um polígono regular cuja medida de cada ângulo externo é:

a) 40°. 6 diagonais
b) 24°. 12 diagonais
c) 18°. 17 diagonais

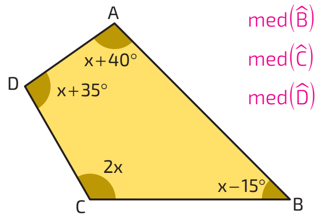
36. Determine a medida de cada ângulo externo desconhecido, no polígono a seguir. $med(\hat{a}) = 97°$; $med(\hat{b}) = 105°$; $med(\hat{c}) = 57°$; $med(\hat{d}) = 30°$; $med(\hat{e}) = 24°$



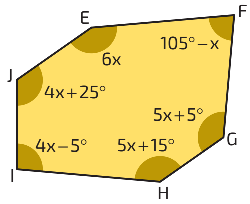
Ronaldo Lucena

37. Realize os cálculos necessários e determine a medida de cada um dos ângulos internos dos polígonos.

a) $med(\hat{A}) = 100°$; $med(\hat{B}) = 45°$; $med(\hat{C}) = 120°$; $med(\hat{D}) = 95°$



b) $med(\hat{E}) = 150°$; $med(\hat{F}) = 80°$; $med(\hat{G}) = 130°$; $med(\hat{H}) = 140°$; $med(\hat{I}) = 95°$; $med(\hat{J}) = 125°$



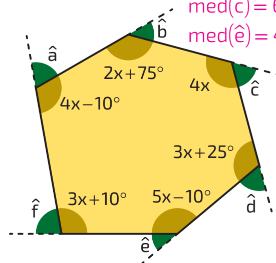
Ilustrações: Ronaldo Lucena

38. Quantos lados tem um polígono convexo cuja soma das medidas dos ângulos internos é:

a) 2 160°? 19 lados
b) 2 520°? 16 lados
c) 3 060°? 19 lados
d) 3 420°? 21 lados

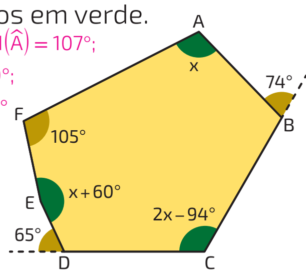
39. Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo que possui um total de 44 diagonais? 1 620°

40. Calcule a medida de cada ângulo externo do polígono a seguir. $med(\hat{a}) = 70°$; $med(\hat{b}) = 45°$; $med(\hat{c}) = 60°$; $med(\hat{d}) = 65°$; $med(\hat{e}) = 40°$; $med(\hat{f}) = 80°$



Ronaldo Lucena

41. No polígono a seguir, calcule o valor de **x** e determine a medida dos ângulos indicados em verde.
$x = 107°$; $med(\hat{A}) = 107°$; $med(\hat{C}) = 120°$; $med(\hat{E}) = 167°$



Ronaldo Lucena

- Caso os alunos apresentem dificuldade em resolver a atividade **35**, proponha que, com base na medida de cada ângulo externo, obtenham inicialmente a quantidade de lados do polígono que, por ser regular, tem as medidas desses ângulos iguais.
- Para a resolução da atividade **36**, assim como outras que aparecerão posteriormente nesse capítulo, solicite que os alunos escrevam inicialmente uma equação.
- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **39**:
  Sendo **n** a quantidade de lados do polígono convexo, temos:
  $44 = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$
  $n \cdot (n-3) = 88$
  Por tentativas, temos que n = 11. Assim, segue que:
  $S = (n-2) \cdot 180° =$
  $= (11-2) \cdot 180° = 1620°$

31

Relacionando saberes

- A atividade **42** apresenta uma relação com o componente curricular **Ciências**, pois o estudo dos polígonos é associado a elementos que compõem comunidades biológicas, como a sociedade das abelhas. Nessa abordagem, mostra-se que os alvéolos dos favos são construídos com a base superior em formato hexagonal para armazenar mais mel com menos quantidade de cera em suas "paredes". Diga aos alunos que a abelha-rainha é alimentada com uma geleia real produzida pelas suas operárias e é a única fêmea fértil da colmeia, colocando de 2 000 a 3 000 ovos por dia, que podem se tornar rainhas apenas se estiverem na realeira (alvéolos de rainha) e nascerem primeiro, pois a primeira a nascer mata as demais, já que cada colmeia pode ter somente uma rainha.

- Explique aos alunos que a formação de um mosaico com polígonos regulares do mesmo tipo somente é possível em três opções: triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares.

Matemática em destaque

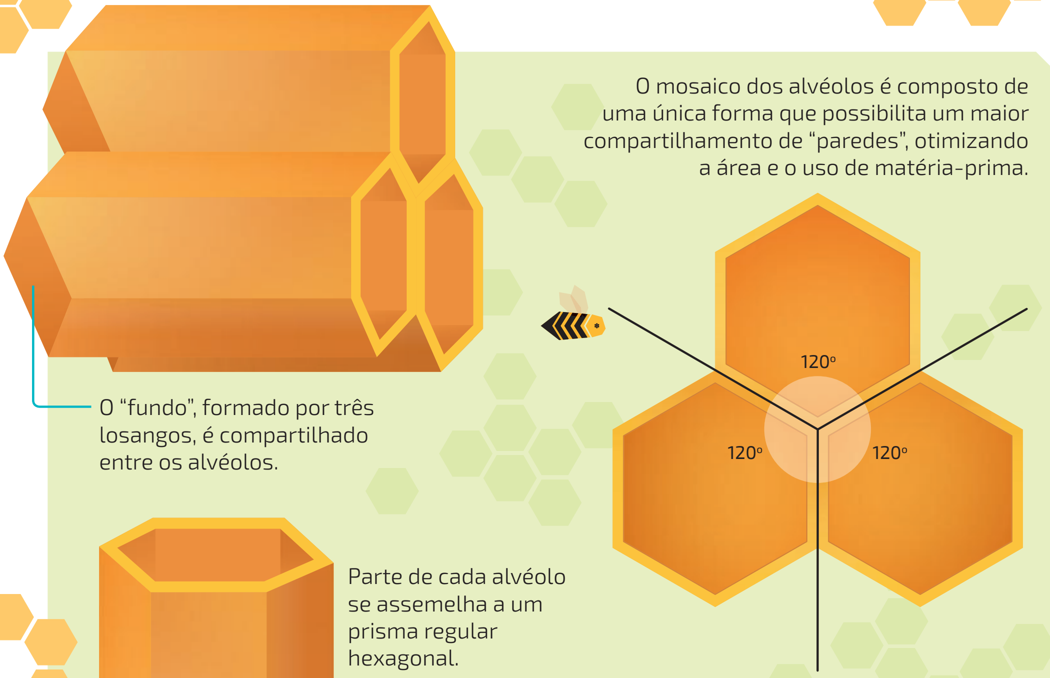
Mirko Graul/Shutterstock.com

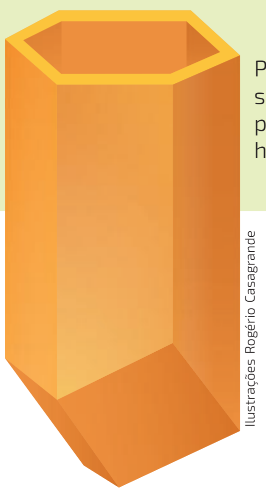
Alvéolos de favos construídos por abelhas-europeias (*Apis mellifera*).

42. Na natureza podemos observar a presença da matemática em diversas situações. Um exemplo que chamou a atenção de vários estudiosos é a geometria utilizada pelas abelhas melíferas na construção dos alvéolos de favos.

Os alvéolos se encaixam formando um mosaico, e sua forma permite que as abelhas utilizem a menor quantidade de cera possível na construção, tendo uma maior capacidade de armazenamento para o mel.

Observe o esquema que representa os alvéolos.





Ilustrações Rogério Casagrande

a) Espera-se que os alunos respondam que nesse formato a quantidade de cera utilizada na construção é menor e obtém-se uma maior capacidade de armazenamento de mel.

a) Qual a vantagem de construir os alvéolos dos favos conforme apresentado?

b) Qual polígono regular pode ser associado à forma da parte superior de cada alvéolo? Qual é a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono? E a soma das medidas dos ângulos externos?
hexágono regular; 720°; 360°

43. Julgue cada afirmativa verdadeira (V) ou falsa (F). Depois, reescreva no caderno as afirmativas falsas tornando-as verdadeiras.

a) A soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 180°. F
A soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360°.

b) A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo pode ser obtida subtraindo duas unidades da quantidade de lados que compõem esse polígono e multiplicando o resultado por 180°. V

c) Os ângulos internos de um polígono regular são congruentes. V

d) A medida de cada ângulo externo de um pentadecágono (polígono de 15 lados) regular é 48°. F
A medida de cada ângulo externo de um pentadecágono regular é 24°.

Explorando o que estudei

Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? ângulos, medida de ângulo, bissetriz de um ângulo, polígonos, diagonais de polígonos convexos, soma das medidas dos ângulos internos de polígonos convexos e soma das medidas dos ângulos externos de polígonos convexos

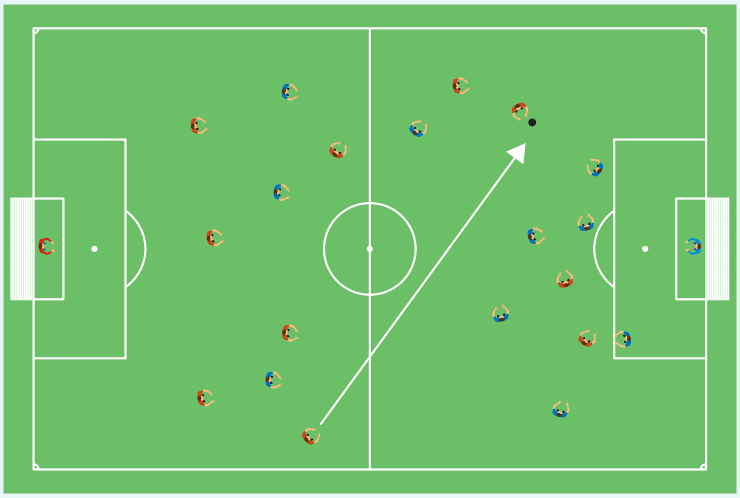
2. Explique o que é a bissetriz de um ângulo.
Bissetriz é uma semirreta de origem no vértice do ângulo que o divide em duas partes de mesma medida.

3. Explique o que diferencia um polígono convexo de um não convexo.
Um polígono é convexo quando todo segmento de reta que possui suas extremidades no interior do polígono tem todos os seus pontos pertencentes ao interior do polígono. Um polígono é não convexo quando existe pelo menos um segmento de reta que possui suas extremidades no interior do polígono, sem ter todos os seus pontos pertencentes ao interior do polígono.

4. Se todos os lados de um polígono tiverem a mesma medida de comprimento, podemos afirmar que esse polígono é regular? Por quê?
Não, pois seus ângulos internos também devem ser congruentes.

5. Na imagem abaixo está representada a trajetória de uma bola em um lançamento realizado em uma partida de futebol.

7. sim; Possível resposta: para determinar a quantidade de lados e de vértices de um polígono dada a quantidade de diagonais (**D**) podemos utilizar a fórmula $D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$, em que **n** corresponde à quantidade de lados do polígono (e, consequentemente, à quantidade de vértices).



Rafael L. Gaion

6. Espera-se que os alunos respondam que as diagonais que partem de um único vértice de um polígono convexo são segmentos de reta que ligam esse vértice aos demais, com exceção dele próprio e dos dois consecutivos a ele.

Esse tipo de jogada é conhecido como “lançamento em diagonal”. Em sua opinião, por que essa jogada recebe esse nome?
Possível resposta: porque a trajetória da bola no campo lembra uma diagonal.

6. Explique por que a quantidade de diagonais que partem de um único vértice de um polígono convexo é igual à quantidade de lados desse polígono menos 3.

7. A partir da quantidade de diagonais de um polígono convexo, é possível saber a quantidade de lados e de vértices que ele possui? Justifique.

Avaliação

- A seção **Explorando o que estudei** pode contribuir significativamente para avaliar os alunos quanto aos conteúdos estudados no capítulo. Observe como eles compreenderam o conceito de bissetriz de um ângulo, se diferenciam de forma correta polígonos convexos e não convexos e se aprenderam o conceito de diagonal de um polígono convexo. Essa avaliação também contribui para que os alunos percebam suas dificuldades e possam contar com o auxílio do professor, que tem uma boa oportunidade para traçar novas estratégias de ensino para os próximos capítulos.

- Na questão **3**, solicite aos alunos que construam figuras para exemplificar as diferenças entre polígonos convexos e não convexos.
- Em relação à questão **5**, peça aos alunos que pesquisem outras situações de uso da palavra diagonal e expliquem a relação desse significado no contexto pesquisado com a diagonal de um polígono convexo.

Material digital

- Antes de prosseguir com os estudos, se julgar oportuno, avalie a aprendizagem dos alunos em relação a algumas habilidades trabalhadas no decorrer do bimestre. O material digital apresenta uma proposta de avaliação para o 1º bimestre que pode ser utilizada neste momento como ferramenta auxiliar do processo de ensino e aprendizagem.

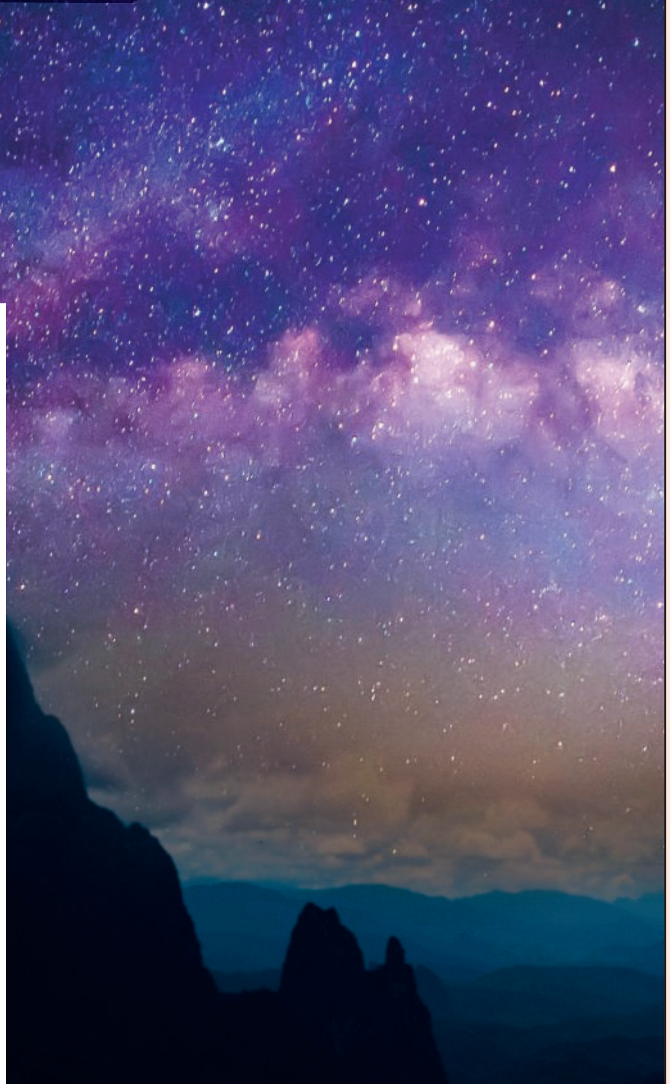
Esse capítulo retomará o conceito de potências com o intuito de preparar os alunos para o estudo das propriedades das potências e dos cálculos que envolvem expoente negativo e fracionário.

Da mesma maneira, o estudo da raiz quadrada também será retomado, a fim de auxiliá-los na compreensão do modo de realizar o cálculo da raiz quadrada e, também, da raiz cúbica.

- As páginas de abertura apresentam informações sobre constelações e estrelas e a medida da distância entre estas e o planeta Terra. O tema auxilia os alunos a compreender a unidade de medida de comprimento ano-luz, usada para representar medidas de distâncias astronômicas e relacioná-las a conceitos que serão estudados no capítulo, principalmente o de notação científica.
  Uma sugestão de condução do trabalho é realizar uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. As questões propostas podem ser respondidas na lousa, de acordo com as respostas dadas pelos alunos e, nesse momento, é importante que a turma seja incentivada a participar.
  Para complementar o estudo do tema, sugira que os alunos pesquisem a medida da distância entre algumas estrelas e a Terra, representando-a com a unidade de medida ano-luz, e peça que apresentem aos colegas as medidas das distâncias encontradas.

Capítulo 2

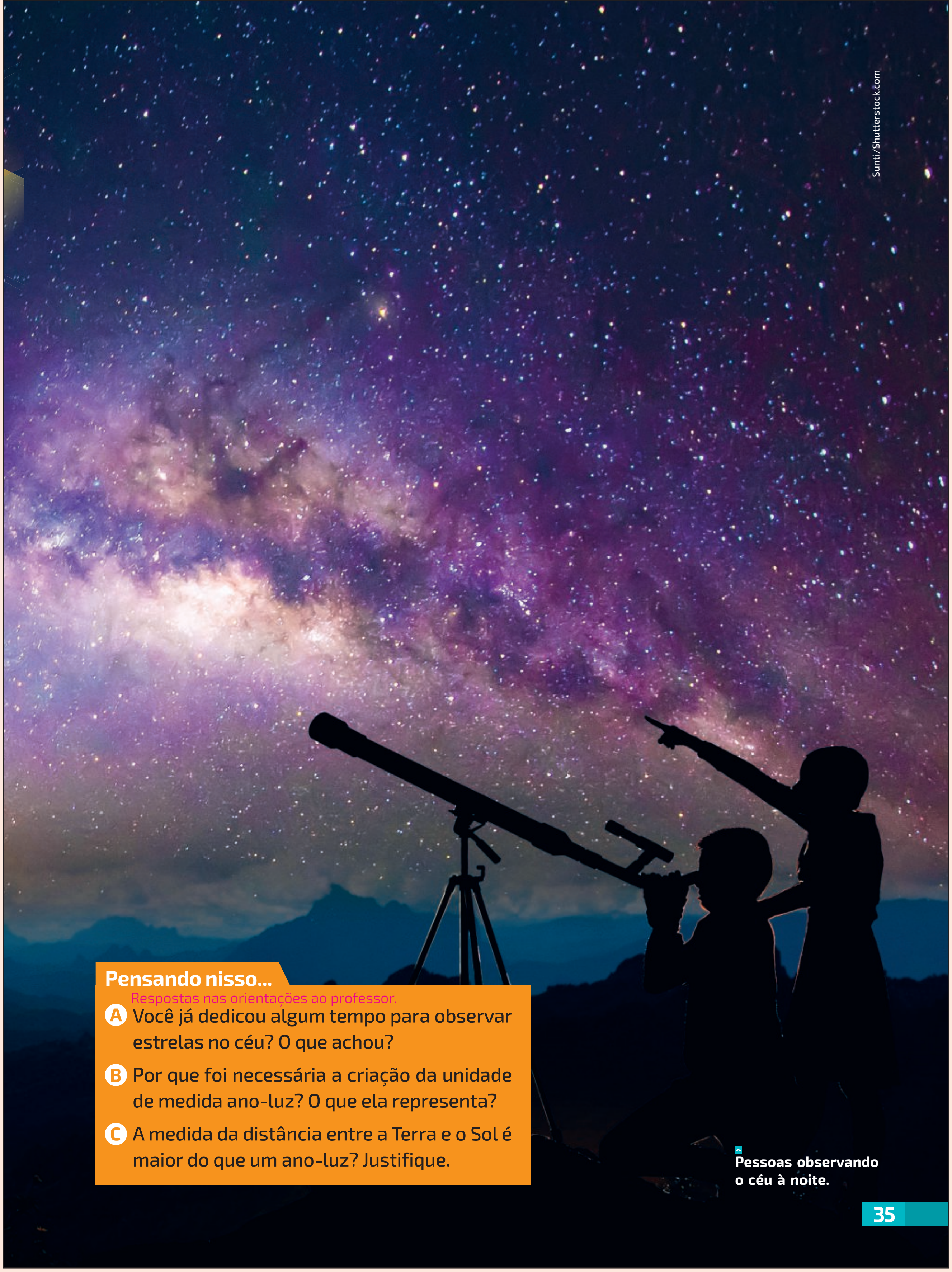
Potências e raízes



Atualmente, a União Astronômica Internacional considera 88 constelações, sendo possível identificar diversas delas no céu, de acordo com a localização e época do ano em que se observa. Em uma noite com céu limpo e escuro é possível visualizar a olho nu entre 1 000 e 1 500 estrelas.

Todas essas estrelas encontram-se muito distantes da Terra. O Sol, que é a mais próxima, localiza-se a, aproximadamente, 149,6 milhões de quilômetros (ou $1{,}496 \cdot 10^8$ km) do nosso planeta. Para expressar essas medidas de uma maneira mais eficiente foram criadas algumas unidades de medida, entre elas o ano-luz, que é a medida da distância percorrida pela luz, no vácuo, no período de um ano, o que equivale a $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km. Quando observamos Sírius, por exemplo, estamos vendo uma estrela com aproximadamente o dobro do tamanho do Sol, contudo, vemos apenas um pontinho porque ela está a aproximadamente 8,6 anos-luz distante de nós. Essa luz que visualizamos, na verdade, foi emitida há 8,6 anos.

Estrelas
Veja mais informações sobre as estrelas no *site*: <www.on.br/index.php/pt-br> (acesso em: 27 jul. 2018)



Sunti/Shutterstock.com

Pessoas observando o céu à noite.

Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

A Você já dedicou algum tempo para observar estrelas no céu? O que achou?

B Por que foi necessária a criação da unidade de medida ano-luz? O que ela representa?

C A medida da distância entre a Terra e o Sol é maior do que um ano-luz? Justifique.

Pensando nisso...

A Resposta pessoal.

B Para expressar medidas de distâncias muito grandes de maneira mais eficiente. Um ano-luz é a medida da distância percorrida pela luz no vácuo no período de um ano, o que equivale a $9,46 \cdot 10^{12}$ km.

C Não, pois a medida de distância $1,496 \cdot 10^{8}$ km é menor do que $9,46 \cdot 10^{12}$ km.

- Ao abordar o item **A**, peça aos alunos que dediquem um tempo em suas casas para observarem as estrelas no céu e proponha uma conversa em sala de aula sobre o que visualizaram. Se for possível, agende uma visita a um planetário ou observatório.
- Aproveite o trabalho com o item **B** para avaliar a leitura e a interpretação dos alunos a respeito das informações apresentadas.
- O item **C** possibilita avaliar o conhecimento prévio dos alunos sobre as potências de base 10.

BNCC em foco

- As páginas de abertura desse capítulo são oportunas para trabalhar e desenvolver a **Competência geral 2**, já que promovem o pensamento científico e exercitam a curiosidade intelectual por meio de uma abordagem atrativa do conteúdo. Assuntos relacionados à astronomia geralmente despertam o interesse dos alunos, por isso aproveite para estimular neles a vontade de aprender e se aprofundar nesse conhecimento.

Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **1**, **2** e **3** do 1º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos atingiu o resultado esperado.

Objetivos do capítulo

- Compreender a potenciação como uma multiplicação de fatores iguais.
- Identificar os elementos da potenciação e da radiciação.
- Aplicar as propriedades operatórias da potenciação.
- Calcular potências.
- Reconhecer e calcular potências de base 10.
- Escrever números utilizando a notação científica.
- Compreender o conceito de raiz quadrada e raiz cúbica.
- Calcular raiz quadrada exata e raiz aproximada de um número.
- Representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

Avaliação

- Avalie a possibilidade de apresentar algumas potências para que os alunos calculem e avaliem o conhecimento deles com relação ao conteúdo.

Lembrando potências

No depósito de uma fábrica de peças de computador, a produção é acondicionada em caixas e armazenada em lotes, como mostra a imagem.

Edde Aguiar

Para determinar quantas caixas são empilhadas em cada lote, podemos realizar uma multiplicação de fatores iguais, que pode ser escrita na forma de **potência**.

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$$

potência

expoente: indica a quantidade de vezes que o fator se repete

base: fator que se repete

Portanto, em cada lote são empilhadas 125 caixas.

Veja outros exemplos de cálculos envolvendo potências.

- $6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,296$
- $(0,3)^2 = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{8}{125}$
- $(-3)^3 = \underbrace{(-3) \cdot (-3)}_{(-3)^2 = 9} \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$

Em uma potência cuja base é um número qualquer e o expoente é igual a 1, o resultado é o próprio número. Já em uma potência cuja base é diferente de zero e o expoente é igual a zero, o resultado é igual a 1. Veja os exemplos.

- $36^1 = 36$
- $(-1,9)^1 = -1,9$
- $15^0 = 1$
- $(0,2)^0 = 1$

Nas potências de bases fracionárias, elevamos o numerador e o denominador ao mesmo expoente. Assim, sendo **a** e **b** números inteiros, com $b \neq 0$, e **n** um número natural, temos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- Uma potência será **positiva** se o expoente for um número:
  - natural e se a base for um número positivo.
  - **par** e se a base for um número negativo.
- Uma potência será **negativa** se o expoente for um número **ímpar** e se a base for um número negativo.

- Ao abordar as potências de bases negativas, calcule na lousa, com os alunos, algumas potências com essa característica, a fim de que percebam a relação do resultado com a paridade do expoente natural, quando a base for um número racional negativo. Alguns exemplos são:

$(-5)^4 = \underbrace{(-5) \cdot (-5)}_{25} \cdot \underbrace{(-5) \cdot (-5)}_{25} = 25 \cdot 25 = 625$

$(-7)^3 = \underbrace{(-7) \cdot (-7)}_{49} \cdot (-7) = 49 \cdot (-7) = -343$

Potências com expoente negativo

Para obter um termo qualquer, a partir do segundo, da sequência apresentada a seguir, dividimos o termo anterior por 4.

4^4	4^3	4^2	4^1	4^0	...
256	64	16	4		

$$256 \xrightarrow{:4} 64 \xrightarrow{:4} 16 \xrightarrow{:4} 4 \xrightarrow{:4} \boxed{}$$

Preservando essa regularidade, temos que os quatro próximos termos dessa sequência são:

- $4^0 = \dfrac{4}{4} = 1$
- $4^{-2} = \dfrac{\frac{1}{4}}{4} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4^2} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$
- $4^{-1} = \dfrac{1}{4^1} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^1 = \dfrac{1}{4}$
- $4^{-3} = \dfrac{\frac{1}{16}}{4} = \dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4^2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4^3} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{64}$

Um número diferente de zero elevado a um expoente negativo é igual ao inverso desse número elevado ao oposto desse expoente. Assim, sendo **a** um número diferente de zero e **n** um número natural, temos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ ou } a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Exemplos:

- $8^{-3} = \dfrac{1}{8^3} = \dfrac{1}{512}$
- $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-4} = \left(\dfrac{5}{1}\right)^4 = \dfrac{5^4}{1^4} = 625$
- $\left(\dfrac{2}{9}\right)^{-3} = \left(\dfrac{9}{2}\right)^3 = \dfrac{9^3}{2^3} = \dfrac{729}{8}$
- $(-7)^{-2} = \left(\dfrac{1}{(-7)}\right)^2 = \dfrac{1^2}{(-7)^2} = \dfrac{1}{49}$

Sejam **a** e **b** diferentes de zero.

O inverso de **a** é $\dfrac{1}{a}$, pois $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$, e o inverso de $\dfrac{a}{b}$ é $\dfrac{b}{a}$, pois $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{a} = 1$.

Propriedades das potências

Vamos rever algumas propriedades que podem ser úteis ao realizarmos cálculos com potências.

- **1ª propriedade**: Uma multiplicação de potências de mesma base pode ser escrita como uma única potência. Para isso, conservamos a base e adicionamos os expoentes. De modo geral, sendo **m** e **n** números inteiros e $a \neq 0$ se $m \leq 0$ ou $n \leq 0$, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Exemplo:

$$(-6)^2 \cdot (-6)^3 = \underbrace{(-6) \cdot (-6)}_{(-6)^2} \cdot \underbrace{(-6) \cdot (-6) \cdot (-6)}_{(-6)^3} = (-6)^5 \text{ ou } (-6)^2 \cdot (-6)^3 = (-6)^{2+3} = (-6)^5$$

- **2ª propriedade**: Uma divisão de potências de mesma base (não nula) pode ser escrita como uma única potência. Para isso, conservamos a base e subtraímos os expoentes. De modo geral, sendo **m** e **n** números inteiros e $a \neq 0$, $a^m : a^n = a^{m-n}$. Exemplo:

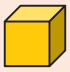
$$7^5 : 7^2 = \frac{7^5}{7^2} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 \text{ ou } 7^5 : 7^2 = 7^{5-2} = 7^3$$

BNCC em foco

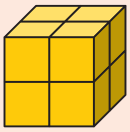
- O trabalho com esse capítulo possibilita que os alunos sejam capazes de efetuar cálculos de potências com expoentes inteiros, contemplando, a habilidade **EF08MA01**.
- As propriedades das potências apresentadas aqui são válidas quando as bases das potências são números racionais. Esse conjunto numérico será apresentado ao aluno no capítulo seguinte.

Atividade complementar

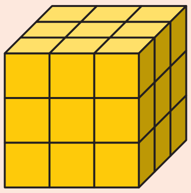
- Escreva uma potência para representar a quantidade de cubos que compõe cada pilha.



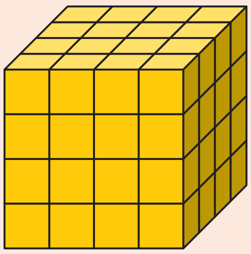
R 1^3



R 2^3



R 3^3



R 4^3

Ilustrações: Sergio L. Filho

- **3ª propriedade**: Em uma multiplicação de dois ou mais fatores elevada a um expoente, podemos elevar cada um dos fatores a esse expoente. De modo geral, sendo **n** um número inteiro e **a** e **b** tais que $a \cdot b \neq 0$ se $n \leq 0$, então $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Exemplo:

$$(5 \cdot 7)^2 = (5 \cdot 7) \cdot (5 \cdot 7) = 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 = \underbrace{5 \cdot 5}_{5^2} \cdot \underbrace{7 \cdot 7}_{7^2} = 5^2 \cdot 7^2$$

- **4ª propriedade**: Em uma divisão elevada a um expoente, podemos elevar o dividendo e o divisor a esse mesmo expoente. De modo geral, sendo **n** um número inteiro, **a** e **b** tais que $b \neq 0$ e $a \neq 0$ se $n \leq 0$, então $(a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} =$ $= a^n : b^n$. Exemplo:

$$(18 : 5)^4 = \left(\frac{18}{5}\right)^4 = \frac{18}{5} \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{18}{5} = \frac{18^4}{5^4} = 18^4 : 5^4$$

- **5ª propriedade**: Uma potência elevada a um expoente pode ser escrita como uma única potência. Para isso, preservamos a base e multiplicamos os expoentes. De modo geral, sendo **m** e **n** números inteiros e $a \neq 0$ se $m \leq 0$ ou $n \leq 0$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Exemplo:

$$(7^3)^4 = 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3 = 7^{3+3+3+3} = 7^{12}$$

$$\text{ou } (7^3)^4 = 7^{3 \cdot 4} = 7^{12}$$

Na seção **Explorando tecnologias**, na página **292**, veja como utilizar uma planilha eletrônica para calcular potências.

Atividades

Anote no caderno

1. Calcule as potências.

a) 5^3 125 **d)** 4^2 16 **g)** 13^1 13

b) 89^1 89 **e)** 6^5 7 776 **h)** 3^4 81

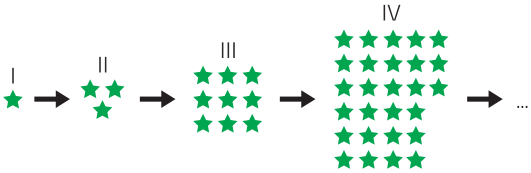
c) 127^0 1 **f)** 25^0 1 **i)** 1^7 1

2. Escreva por extenso as potências e calcule.

a) 3^2 **c)** 6^6 **e)** 8^4

b) 2^4 **d)** 10^3 **f)** 4^5

3. Observe a sequência de imagens.



Rafael L. Gaion

a) Escreva uma potência de base 3 para representar a quantidade de elementos em cada um dos quatro primeiros termos dessa sequência. 3^0; 3^1; 3^2; 3^3

b) Se essa sequência preservar a regularidade apresentada, qual potência de base 3 representará a quantidade de elementos do quinto termo? E do nono termo? 3^4; 3^8

4. Escreva cada produto de fatores iguais na forma de uma única potência.

a) $17 \cdot 17 \cdot 17$ 17^3

b) $\left(\frac{5}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{7}\right)$ $\left(\frac{5}{7}\right)^4$

c) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$ $(-3)^5$

d) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ 10^7

5. Calcule as potências.

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ $\frac{9}{49}$ **d)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ $-\frac{1}{32}$

b) $(0{,}4)^4$ 0,0256 **e)** $(0{,}7)^2$ 0,49

c) $(0{,}28)^1$ 0,28 **f)** $\left(\frac{2}{9}\right)^0$ 1

6. Os resultados de $(-7)^2$ e -7^2 são iguais? Por quê? Não, pois $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$ e $-7^2 = -(7 \cdot 7) = -49$.

- Agora, calcule as potências a seguir.

a) $(-3)^2$ 9 **d)** $-\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $-\frac{1}{8}$

b) -3^2 −9 **e)** $(-0{,}8)^4$ 0,4096

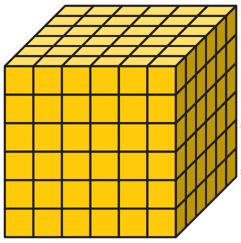
c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ $-\frac{1}{8}$ **f)** $-(0{,}8)^4$ −0,4096

2. a) três elevado ao quadrado ou três elevado à segunda potência; 9
b) dois elevado à quarta potência; 16
c) seis elevado à sexta potência; 46 656
d) dez elevado ao cubo ou dez elevado à terceira potência; 1 000
e) oito elevado à quarta potência; 4 096
f) quatro elevado à quinta potência; 1 024

7. Escreva os números na forma de potência com expoente 2.

a) 9 3^2 ou $(-3)^2$ **b)** 49 7^2 ou $(-7)^2$ **c)** 225 15^2 ou $(-15)^2$ **d)** $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ou $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

8. Escreva, na forma de potência com expoente 3, a quantidade de ▢ que compõem a pilha abaixo.



Ilustrações: Cynthia Sekiguchi

Sabendo que um ▢ tem volume medindo 5 cm³, determine a medida do volume da pilha. 1080 cm³

9. Resolva.

a) 2^{-5} $\frac{1}{32}$ **b)** 5^{-3} $\frac{1}{125}$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 4 **d)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ $\frac{27}{8}$

10. Copie os itens substituindo cada ■ pelo símbolo >, < ou =.

a) $3^4 > 2^5$

b) $20^1 < 6^2$

c) $5^{-3} < 5^3$

d) $7^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$

e) $2^{-3} > 3^{-2}$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

11. Escreva as potências correspondentes às letras **A**, **B**, **C** e **D** no quadro.

X	Y	X · Y	X : Y
7^5	7^2	7^7	7^3
4^8	**A** 4^3	4^{11}	**B** 4^5
C 10^9	10^3	**D** 10^{12}	10^6

12. Determine o resultado de cada sentença.

- $4^2 - 3^2$ 7
- $9^2 - 8^2$ 17
- $14^2 - 13^2$ 27
- $6^2 - 5^2$ 11
- $10^2 - 9^2$ 19
- $17^2 - 16^2$ 33

Qual relação você pode observar entre o minuendo, o subtraendo e o resultado obtido em cada item? Junte-se a um colega e discutam as relações observadas.
Resposta pessoal.

13. Utilizando as propriedades, escreva cada sentença como uma única potência.

a) $3^2 \cdot 4^2$ 12^2 **b)** $(7^2)^4$ 7^8 **c)** $18^5 : 4^5$ $\left(\frac{9}{2}\right)^5$ **d)** $\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3^3}$ $\frac{1}{6^3}$

14. Veja como Daniel resolveu a expressão:

$$9^{-2} - \left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

$$9^{-2} - \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{81} - \left(-\frac{8}{27}\right) =$$
$$= \frac{1}{81} + \frac{8}{27} = \frac{1+24}{81} = \frac{25}{81}$$

Agora, resolva as expressões.

a) $3^2 - 32 + 7^3$ 320

b) $(-9+3)^2 + 15$ 51

c) $(2^3)^2 - 42 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\frac{87}{4}$

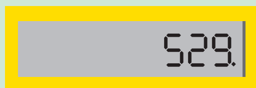
d) $(3^2)^{-1} + (4^2 : 4^2)$ $\frac{10}{9}$

15. Observe como Camila efetuou 23^3 utilizando uma calculadora.

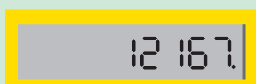
I Inicialmente ela registrou o número 23.

2 → 3

II Em seguida, digitou as teclas × e = e obteve o resultado de 23^2.



III Novamente digitou a tecla = para obter o resultado de 23^3.



Ilustrações: Keithy Mostachi

Utilizando uma calculadora, efetue.

a) 14^5 537 824 **b)** $(40,5)^2$ 1 640,25 **c)** $(7,3)^3$ 389,017 **d)** 55^4 9 150 625 **e)** 524^2 274 576 **f)** 6^9 10 077 696

39

- Na resolução da atividade **7**, verifique se os alunos perceberam que em cada item há duas possibilidades de potências que são soluções e suas bases são números opostos.
- Na resolução da atividade **12**, é possível que os alunos observem as relações apresentadas a seguir, no que tange ao minuendo, subtraendo e ao resultado obtido:
  - a base da potência, que é o minuendo da subtração, é uma unidade maior do que a base da potência que é o subtraendo;
  - o resultado é a soma das bases.

  Eles também podem observar que o resultado é igual ao dobro da base da potência do subtraendo mais 1.
  Caso tenham dificuldade em perceber as regularidades, sugira que observem mais alguns itens com as características apresentadas.
  Ao final dessa atividade, trabalhe com a **Atividade complementar** sugerida no rodapé dessa página.
- Ao abordar a atividade **14**, oriente os alunos a resolverem as expressões considerando a seguinte ordem nas operações: potenciação, multiplicação e divisão, adição e subtração.
- Na atividade **15**, caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, verifique a possibilidade de levar algumas calculadoras para a sala de aula.

Atividade complementar

- Observe os cálculos abaixo:
- $1^3 = 1$
- $2^3 = 8 = 3 + 5$
- $3^3 = 27 = 7 + 9 + 11$
- $4^3 = 64 = 13 + 15 + 17 + 19$
- $5^3 = 125 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$

- Quais regularidades você pôde observar nos cálculos?

R Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que os resultados obtidos podem ser escritos como a soma de uma sequência de números ímpares consecutivos, cuja quantidade de parcelas é correspondente ao número que aparece na base.

- De maneira parecida, escreva uma adição correspondente às potências 6^3, 7^3, 8^3 e 9^3.

R $6^3 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$;
$7^3 = 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55$;
$8^3 = 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71$;
$9^3 = 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89$

BNCC em foco

- No estudo do tópico **Potência de base 10**, espera-se que os alunos utilizem os conhecimentos de cálculos com potências de expoentes inteiros para os auxiliar na representação de números em notação científica, contemplando a habilidade **EF08MA01**.

- Ao abordar o tópico **Potência de base 10**, explique aos alunos que a maneira como Arquimedes entendia o Universo é diferente da maneira como entendemos hoje.
Estimule-os a observar as regularidades nas potências com base 10 usando uma calculadora.

Potência de base 10


drawhunter/Shutterstock.com
Arquimedes.

Arquimedes foi um matemático grego que viveu no século III a.C. Em um de seus estudos, ele tentou calcular quantos grãos de areia eram necessários para encher uma esfera de centro na Terra e raio alcançando o Sol e obteve um número formado por muitos algarismos.

Arquimedes precisava representar o resultado de forma mais resumida. Para isso, ele criou uma maneira de representação próxima às potências que utilizamos atualmente.

Ao escrevermos o resultado obtido por Arquimedes nas notações atuais, temos a potência 10^{63}.

Agora, observe nos quadros outras potências de base 10.

A
- $10^2 = 100$
- $10^3 = 1\,000$
- $10^4 = 10\,000$

B
- $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = 0{,}01$
- $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = 0{,}001$
- $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = 0{,}0001$

- No quadro **A**, note que os expoentes são números positivos e a quantidade de zeros do resultado é igual ao valor do expoente.

Para calcular 10^6, por exemplo, basta acrescentar seis zeros à direita do algarismo 1, isto é:

$$10^6 = 1\underbrace{000\,000}_{\text{6 zeros}}$$

- No quadro **B**, note que os expoentes são números negativos e a quantidade de casas decimais do resultado é igual ao oposto do valor do expoente.

Para calcular 10^{-6}, por exemplo, basta acrescentar zeros à esquerda do algarismo 1 até completar seis casas decimais, incluindo o algarismo 1.

$$10^{-6} = 0{,}\underbrace{000001}_{\text{6 casas}}$$

Notação científica

Quando trabalhamos com números que apresentam muitos algarismos, é utilizada uma escrita abreviada chamada **notação científica**, que é uma maneira de representar um número utilizando potências de base 10.

Os números representados com essa notação são escritos na forma $a \cdot 10^n$, em que:

- $|a|$ é um número maior ou igual a 1 e menor do que 10;
- **n** é um número inteiro.

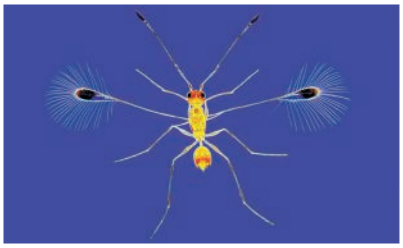
Veja exemplos de alguns números escritos em notação científica.

- Medida da distância média entre a Terra e o Sol: 149 600 000 km.

$$149\,600\,000 = 1{,}496 \cdot 100\,000\,000 = 1{,}496 \cdot 10^8$$

- Medida aproximada do comprimento da vespa *Mymaridae* (*Fairyflies*): 0,025 cm.

$$0{,}025 = \frac{2{,}5}{100} = 2{,}5 \cdot \frac{1}{100} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$$


M. I. Walker/Science Source/Fotoarena

Vespa da família *Mymaridae*. Aumento aproximado de 10,4 vezes.

Pesquise a medida aproximada, em metros, do diâmetro do planeta Terra. Depois, escreva essa medida em notação científica.
Espera-se que os alunos respondam aproximadamente 12 700 000 m; $12{,}7 \cdot 10^5$ m

Atividades

Anote no caderno

16. Calcule as sentenças e escreva os resultados sem utilizar potências.

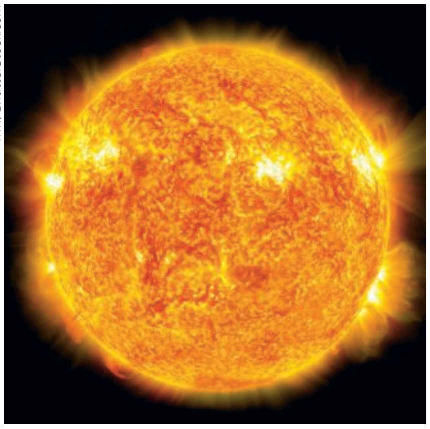
a) $10^4 \cdot 10^2$ 1 000 000
b) $2 \cdot 10^7 \cdot 10^3$ 20 000 000 000
c) $10^9 \cdot 10^0$ 1 000 000 000
d) $10^8 : 10$ 10 000 000
e) $4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3$ 0,004
f) $10^5 : 10^4$ 10

17. Escreva o número apresentado em cada item em notação científica.

a) A medida aproximada da massa do Sol é 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 t. $1{,}99 \cdot 10^{30}$ t

b) A medida aproximada do comprimento de um vírus do mosaico de alfafa é 0,000000055 m. $5{,}5 \cdot 10^{-8}$ m

18. Observe no quadro a medida aproximada da distância de alguns planetas ao Sol.


Triff/Shutterstock.com

O Sol é uma entre bilhões de estrelas existentes em nossa galáxia. Ao seu redor, encontram-se planetas, asteroides, cometas, entre outros astros, cada qual em sua órbita.

Planeta	Medida aproximada da distância ao Sol (em km)	a)
Vênus	108 000 000	$1{,}08 \cdot 10^8$
Marte	228 000 000	$2{,}28 \cdot 10^8$
Júpiter	778 000 000	$7{,}78 \cdot 10^8$
Saturno	1 429 000 000	$1{,}429 \cdot 10^9$
Netuno	4 504 000 000	$4{,}504 \cdot 10^9$

IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 7. ed. Rio de Janeiro, 2016.

a) Escreva as medidas aproximadas das distâncias entre o Sol e os planetas apresentadas na tabela em notação científica.

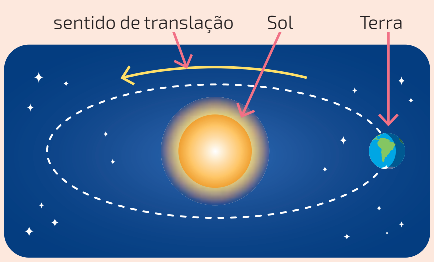
b) Junte-se a um colega e pesquise a medida aproximada da distância do Sol aos demais planetas do Sistema Solar. Em seguida, escreva essas medidas em notação científica. Mercúrio: $5{,}8 \cdot 10^7$ km; Terra: $1{,}5 \cdot 10^8$ km; Urano: $2{,}871 \cdot 10^9$ km

c) Elabore uma pergunta relacionada à tabela e dê para um colega resolver. Depois, confira a resposta dada por ele. Resposta pessoal.

- Aproveite o trabalho com o item **c** da atividade **18** para avaliar a leitura e a interpretação de tabelas e a utilização dessas informações na formulação de perguntas, que podem ser do tipo:
  - Qual a medida aproximada da distância entre as órbitas de Júpiter e de Marte? Escreva essa medida em forma de notação científica.
    R 550 000 000 km; $5{,}5 \cdot 10^8$ km

Relacionando saberes

- A atividade **18** relaciona-se ao componente curricular **Ciências**, portanto aproveite para explorar ainda mais esse conteúdo explicando aos alunos que o formato elíptico da órbita dos planetas faz com que a medida da distância em relação ao Sol varie ligeiramente no decorrer dos dias do ano. A Terra fica mais próxima do Sol em janeiro, a uma medida de distância aproximada de 147,1 milhões de quilômetros, e mais distante em julho, a aproximadamente 152,1 milhões de quilômetros. Desenhe um esquema na lousa para que o entendimento seja facilitado.

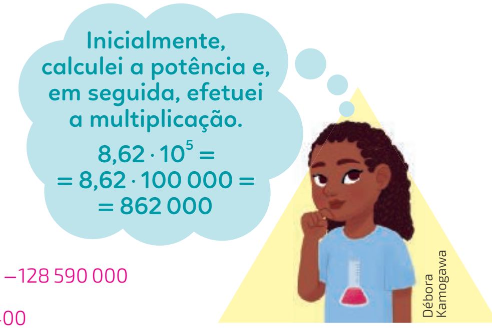


Sergio L. Filho

Relacionando saberes

- Complemente a atividade **21** pedindo aos alunos que relacionem os estados apresentados com as respectivas regiões do país às quais pertencem, estabelecendo, por conseguinte, uma ligação com o componente curricular **Geografia**. Se achar conveniente, peça que pesquisem, nesses estados, quais são as cidades mais populosas, auxiliando-os caso apresentem dificuldades.
- Aprofunde o trabalho com a atividade **22** sugerindo uma pesquisa sobre a produção de teias pelas aranhas, estabelecendo uma relação com o componente curricular **Ciências**. O intuito é que os alunos percebam o modo como são feitas, portanto cite algumas curiosidades desse processo, como o fato de serem produzidas, na maioria das vezes, pelas fêmeas, terem a finalidade de cópula, captura ou refúgio, o que influencia na arquitetura do desenho da teia.
Algumas dessas e outras informações podem ser encontradas no *site*: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-e-feita-a-teia-de-aranha>. Acesso em: 10 set. 2018.

19. Observe como Sabrina calculou mentalmente $8{,}62 \cdot 10^5$.



Agora, sem efetuar cálculos por escrito ou na calculadora, resolva.

a) $-7 \cdot 10^3$ $-7\,000$
b) $4{,}8 \cdot 10^3$ $4\,800$
c) $4{,}85 \cdot 10^6$ $4\,850\,000$
d) $3{,}7 \cdot 10^4$ $37\,000$
e) $-3{,}987 \cdot 10^9$ $-3\,987\,000\,000$
f) $-3 \cdot 10^1$ -30
g) $-1{,}2859 \cdot 10^8$ $-128\,590\,000$
h) $7{,}04 \cdot 10^4$ $70\,400$

20. Determine o número correspondente a cada uma das letras em destaque.

Escrita decimal	220 000 000	B (45 700)	19 000 000	0,00087	E (0,008473)
Notação científica	A ($2{,}2 \cdot 10^8$)	$4{,}57 \cdot 10^4$	C ($1{,}9 \cdot 10^7$)	D ($8{,}7 \cdot 10^{-4}$)	$8{,}473 \cdot 10^{-3}$

21. Na tabela está apresentado o estado mais populoso de cada região do Brasil, em 2017.

População estimada de alguns estados brasileiros – julho de 2017	
Estado	**População**
Pará	8 366 628
Bahia	15 344 447
São Paulo	45 094 866
Rio Grande do Sul	11 322 895
Goiás	6 778 772

IBGE. **Estimativas da população residente no Brasil e Unidades da Federação com data de referência em 1º de julho de 2017**. Disponível em: <ftp://ftp.ibge.gov.br/Estimativas_de_Populacao/Estimativas_2017/estimativa_dou_2017.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2018.

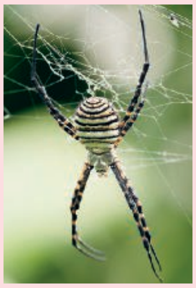
a) Arredonde a população de cada estado para a unidade de milhão mais próxima e escreva-a utilizando potência de base 10. Pará: 8 000 000 e $8 \cdot 10^6$; Bahia: 15 000 000 e $15 \cdot 10^6$; São Paulo: 45 000 000 e $45 \cdot 10^6$; Rio Grande do Sul: 11 000 000 e $11 \cdot 10^6$; Goiás: 7 000 000 e $7 \cdot 10^6$

b) Escreva a população total aproximada desses estados em notação científica. $8{,}6 \cdot 10^7$

22. Leia o texto.

Curiosidades

O comprimento do diâmetro do fio de uma teia de aranha mede, aproximadamente, 0,00000015 m. Esses fios extremamente finos, além de elásticos, são muito resistentes, podendo deter pequenos insetos, como uma mosca ou um besouro em pleno voo.



FRANCISGONSA/Shutterstock.com

Medida do comprimento: cerca de 5 a 20 mm

Aranha tecendo uma teia.

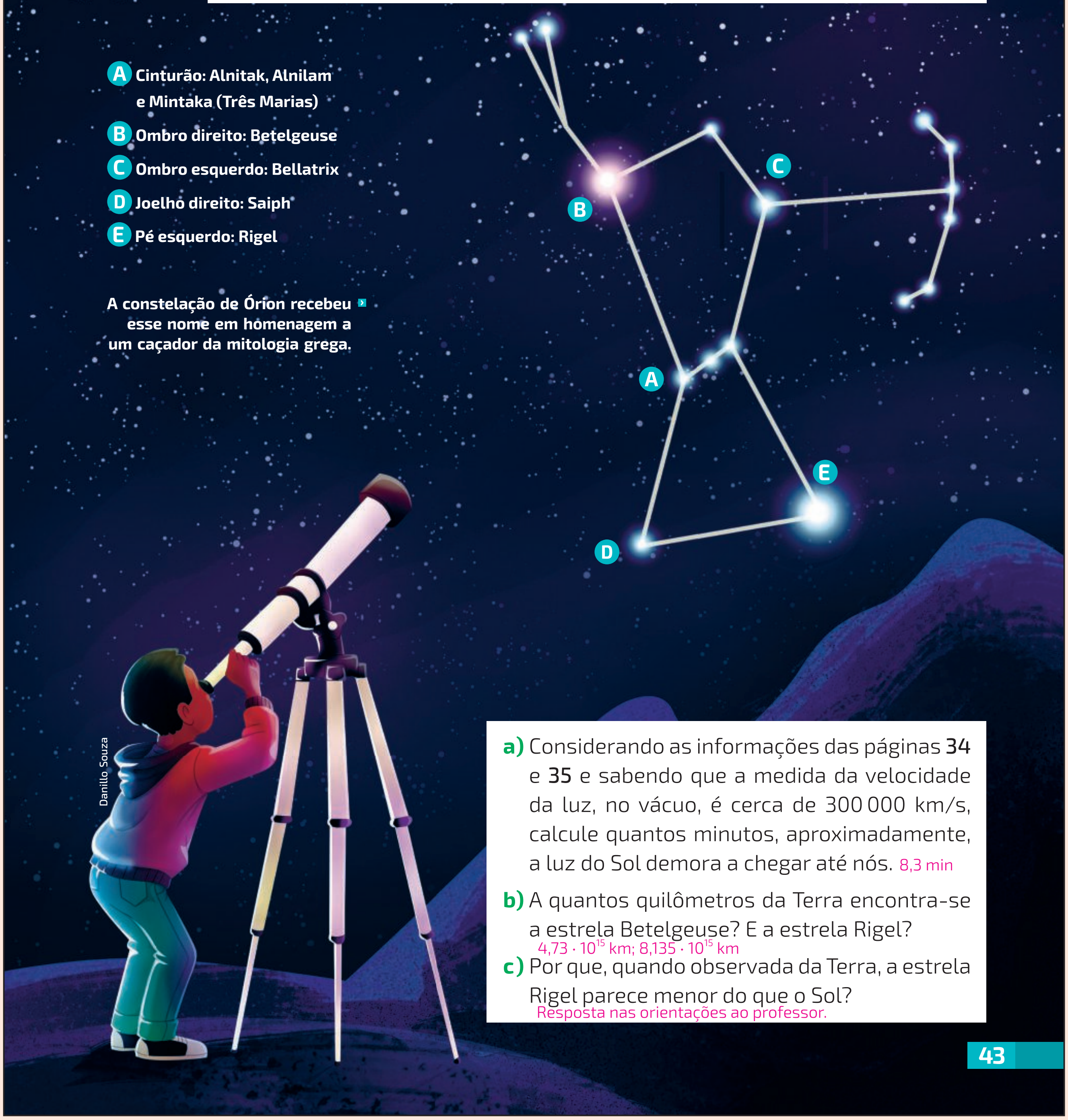
a) Escreva, em notação científica, a medida do comprimento, em metros, do diâmetro do fio de uma teia de aranha. $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ m

b) A medida do comprimento do diâmetro do fio de uma teia de aranha é maior ou menor do que a medida do comprimento do diâmetro de um fio de cabelo, que é $3 \cdot 10^{-5}$ m? menor

- Na atividade **19**, verifique se os alunos calculam as potências de base 10 de modo prático, isto é, se acrescentam zeros à direita do algarismo 1 de acordo com o expoente, a fim de facilitar os cálculos.
Lembre-os de que, na multiplicação de um número decimal por um número de potência de base 10, a vírgula desloca-se para a direita, de acordo com a quantidade de zeros do número.

Matemática em destaque

23. Nas páginas **34** e **35** vimos algumas informações sobre as estrelas. Dentre as mais famosas, encontram-se as que compõem a constelação do Cruzeiro do Sul e as Três Marias, que formam o cinturão da constelação de Órion. Dessa constelação, Betelgeuse é a estrela mais próxima da Terra, a cerca de 500 anos-luz. Já a estrela Rigel, considerada uma supergigante, pois comparada ao Sol é milhares de vezes mais luminosa e possui raio dezenas de vezes maior, está a cerca de 860 anos-luz da Terra.



A constelação de Órion recebeu esse nome em homenagem a um caçador da mitologia grega.

a) Considerando as informações das páginas **34** e **35** e sabendo que a medida da velocidade da luz, no vácuo, é cerca de 300 000 km/s, calcule quantos minutos, aproximadamente, a luz do Sol demora a chegar até nós. 8,3 min

b) A quantos quilômetros da Terra encontra-se a estrela Betelgeuse? E a estrela Rigel?
$4{,}73 \cdot 10^{15}$ km; $8{,}135 \cdot 10^{15}$ km

c) Por que, quando observada da Terra, a estrela Rigel parece menor do que o Sol?
Resposta nas orientações ao professor.

- Ao trabalhar a atividade **23**, questione os alunos se já observaram no céu as estrelas que formam o Cruzeiro do Sul e as Três Marias. Caso alguns deles não tenham visto, peça para pesquisarem suas localizações, o melhor horário e a melhor maneira de visualizar essas constelações sem equipamentos.
Se achar conveniente, indique aos alunos a série de documentários científicos **Cosmos: Uma Odisseia do Espaço-Tempo**, de 2014, apresentada pelo astrofísico Neil deGrasse Tyson, que aborda uma variedade de assuntos sobre o universo. No episódio 8 da primeira temporada, denominado "As irmãs do Sol" (no original *Sisters of the sun*), o tema principal é a relação dos seres humanos com as estrelas e é contada a origem mitológica da constelação de Órion.

Resposta

23. c) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que é porque essa estrela encontra-se muito mais distante da Terra do que o Sol.

- No trabalho com o tópico **Raiz quadrada**, verifique se os alunos compreenderam o método utilizado pela personagem, na divisão da cartolina com formato quadrado. Questione-os sobre como seria essa divisão se fosse necessária a obtenção de 36 fichas iguais e quadradas.
Para dar mais significado às operações de radiciação e potenciação, diga aos alunos que essas são operações inversas, assim como a divisão e a multiplicação.

Raiz quadrada

Milena precisa recortar uma cartolina quadrada em 25 fichas iguais com formato de quadrado, sem que haja sobras.

Edde Aguiar

Nesse caso, ela deve dividir cada um dos lados da cartolina em uma mesma quantidade de partes. Para isso, é necessário determinar qual número positivo que multiplicado por ele mesmo resulte em 25, ou seja, a **raiz quadrada** de 25.

Nesta situação, Milena verificou que 5 é a raiz quadrada de 25, a qual indicamos por:

$$\sqrt[2]{25} = 5$$

Lê-se: raiz quadrada de 25 é igual a 5.

> Em geral, representamos a raiz quadrada sem escrever o índice 2. No caso acima, escrevemos $\sqrt{25}$.

A operação utilizada para resolver a situação apresentada é a **radiciação**. Nessa operação, podemos destacar os seguintes elementos:

índice → $\sqrt[2]{25} = 5$ ← raiz

radical; radicando

A raiz quadrada de um número positivo **a** é um número positivo que elevado ao quadrado resulta em **a**.

No exemplo acima, temos dois números que elevados ao quadrado resultam em 25, ou seja, $5^2 = 25$ e $(-5)^2 = 25$. No entanto, como a raiz quadrada de 25 é um número único e positivo, temos que $\sqrt{25} = 5$.

Obtemos a raiz quadrada somente de números positivos, pois nenhum número elevado ao quadrado resulta em um número negativo.

Não podemos calcular, por exemplo, $\sqrt{-0{,}36}$. No entanto, podemos calcular $-\sqrt{0{,}36}$, que é o oposto de $\sqrt{0{,}36}$. Nesse caso, como $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$, temos $-\sqrt{0{,}36} = -0{,}6$.

> Note que $(0{,}6)^2 = 0{,}36$ e $(-0{,}6)^2 = 0{,}36$.

Veja outros exemplos:

- $\sqrt{5{,}29} = 2{,}3$, pois $(2{,}3)^2 = 5{,}29$.
- $-\sqrt{1{,}44} = -1{,}2$, pois $(1{,}2)^2 = 1{,}44$ e $-1{,}2$ é o oposto de $1{,}2$.
- $-\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = -\frac{3}{4}$, pois $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ e $-\frac{3}{4}$ é o oposto de $\frac{3}{4}$.

Se **a** e **b** são números naturais, com $b \neq 0$, temos:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Nem sempre a raiz quadrada de um número natural é outro número natural. A raiz quadrada de 5, por exemplo, não é um número natural, pois não há um número natural que elevado ao quadrado seja igual a 5. Nesse caso, dizemos que 5 não é um **número quadrado perfeito**.

O número 40 é um quadrado perfeito? Justifique.
não; Possível resposta: Temos que $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$ e $\sqrt{36} < \sqrt{40} < \sqrt{49}$. Assim, $6 < \sqrt{40} < 7$ e, consequentemente, não existe um número natural que elevado ao quadrado seja igual a 40.

Atividades

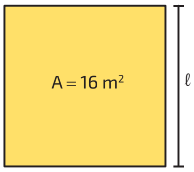
Anote no caderno

24. Calcule.

a) $\sqrt{4}$ 2
b) $\sqrt{36}$ 6
c) $\sqrt{289}$ 17
d) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ $\frac{1}{3}$
e) $\sqrt{0,36}$ 0,6
f) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ $\frac{2}{5}$

Quais dos radicandos acima são números quadrados perfeitos? 4; 36; 289

25. Veja como Luciana fez para calcular a medida do comprimento do lado do quadrado a seguir.



Ronaldo Lucena

Na imagem, **A** indica a medida da área do quadrado.

$A = \ell^2$
$\ell = \sqrt{A}$
$\ell = \sqrt{16} = 4$
Portanto, $\ell = 4$ m.

Agora, calcule a medida do comprimento do lado do quadrado cuja área mede:

a) 49 cm². 7 cm
b) 81 cm². 9 cm
c) 100 cm². 10 cm
d) 196 cm². 14 cm

26. Determine o valor de **x** em cada item.

a) $\sqrt{x} = 1$ 1
b) $\sqrt{x} = 5$ 25
c) $\sqrt{x} = 6,2$ 38,44
d) $\sqrt{x} = 4,3$ 18,49
e) $\sqrt{x} = 0,7$ 0,49
f) $\sqrt{x} = 3,1$ 9,61

27. Calcule, em centímetros, a medida do perímetro do quadrado cuja área mede:

a) 12,25 cm². 14 cm
b) 39,69 cm². 25,2 cm

28. Veja como podemos calcular $\sqrt{1,96}$, escrevendo o radicando na forma de fração.

$$\sqrt{1,96} = \sqrt{\frac{196}{100}} = \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{100}} = \frac{14}{10} = 1,4$$

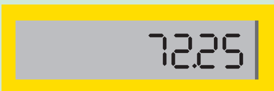
Agora, de maneira parecida, calcule.

a) $\sqrt{3,24}$ 1,8
b) $\sqrt{4,41}$ 2,1
c) $\sqrt{0,16}$ 0,4
d) $\sqrt{6,25}$ 2,5

29. Observe como podemos calcular $\sqrt{72,25}$ utilizando uma calculadora.

I Inicialmente, registramos o número 72,25:

7 → 2 → . → 2 → 5



II Em seguida, digitamos a tecla √ e obtemos o valor de $\sqrt{72,25}$.

Ilustrações: Keithy Mostachi

Portanto, $\sqrt{72,25} = 8,5$.

Agora, utilizando uma calculadora, resolva os itens.

a) $\sqrt{88,36}$ 9,4
b) $\sqrt{349,69}$ 18,7
c) $\sqrt{1\,056,25}$ 32,5
d) $\sqrt{19,0969}$ 4,37
e) $\sqrt{2\,410,81}$ 49,1
f) $\sqrt{4\,395,69}$ 66,3

- Lembre os alunos da definição de quadrados perfeitos e escreva na lousa os números quadrados perfeitos de 1 a 100.

BNCC em foco

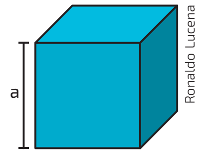
- A atividade **25** permite o reconhecimento das relações entre os diferentes campos da Matemática, nesse caso a Aritmética e a Geometria. Verifique a segurança dos alunos quanto à capacidade de construir e aplicar os conhecimentos matemáticos e a persistência na busca de soluções, a fim de contemplar a **Competência específica de Matemática 3**.

- Na atividade **29**, caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizá-la ou, então, verifique a possibilidade de levar algumas calculadoras para a sala de aula.
Lembre-os de que, ao registrarmos um número decimal em uma calculadora, utilizamos ponto no lugar da vírgula.

- Para auxiliar na resolução das atividades **30** e **31**, sugira aos alunos que, com uma calculadora, determinem inicialmente o cubo dos números naturais menores que 12.
- Caso não haja calculadoras disponíveis para todos os alunos resolverem a atividade **32**, peça para formarem duplas.

Raiz cúbica

O cubo representado ao lado tem volume medindo 64 cm^3. Qual é a medida do comprimento da aresta desse cubo?



Podemos resolver essa questão utilizando a seguinte fórmula:

$$V = a \cdot a \cdot a \text{ ou } V = a^3$$

Substituindo **V** por 64 na fórmula $V = a^3$, temos:

$$64 = a^3$$

Precisamos determinar um número **a** que elevado ao cubo resulte em 64. Esse número é a **raiz cúbica** de 64, que indicamos por $\sqrt[3]{64}$.

O número procurado é 4, pois:

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Assim, $\sqrt[3]{64} = 4$.

Portanto, a medida do comprimento da aresta do cubo é 4 cm.

Veja outros exemplos.

- $\sqrt[3]{-216} = -6$, pois $(-6)^3 = -216$
- $\sqrt[3]{\frac{64}{343}} = \frac{4}{7}$, pois $\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{64}{343}$

Atividades

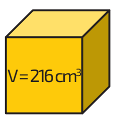
Anote no caderno

30. Calcule.

a) $\sqrt[3]{8}$ 2 **b)** $\sqrt[3]{125}$ 5 **c)** $\sqrt[3]{-27}$ −3 **d)** $\sqrt[3]{\frac{8}{64}}$ $\frac{1}{2}$ **e)** $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}}$ $-\frac{3}{5}$ **f)** $\sqrt[3]{\frac{27}{729}}$ $\frac{1}{3}$

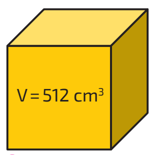
31. Determine a medida do comprimento da aresta de cada cubo a partir da medida de seu volume.

a)



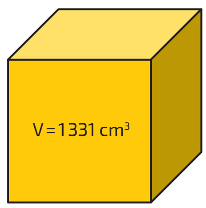
6 cm

b)



8 cm

c)

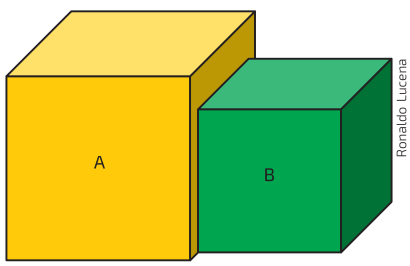


11 cm

Ilustrações: Ronaldo Lucena

Em cada uma das imagens, **V** indica a medida do volume do cubo.

32. Observe a imagem.



Sabendo que a medida do volume do cubo **B** é 42,875 cm^3 e a soma das medidas dos volumes dos dois cubos é 134 cm^3, determine a medida do comprimento da aresta de cada cubo.

A: 4,5 cm; B: 3,5 cm

Se necessário, utilize uma calculadora.

Potências com expoente fracionário

Estudamos, até o momento, potências cujos expoentes são números inteiros e, também, as raízes quadradas e cúbicas. Agora, vamos calcular potências cujos expoentes são frações com denominadores 2 e 3. Veja alguns exemplos.

- $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}$, pois $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 4^{\frac{2}{2}} = 4$
- $9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9^2}$, pois $\left(9^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 9^{\frac{2}{3}\cdot 3} = 9^{\frac{2\cdot 3}{3}} = 9^2$

Lembre-se de que para calcularmos a potência de uma potência, preservamos a base e multiplicamos os expoentes. Essa propriedade também é válida para expoentes fracionários.

Podemos escrever potências de base positiva e expoente fracionário por meio de radicais e escrever radicais por meio de potências de base positiva e expoentes fracionários. Considerando **a** um número positivo e **b** um número natural, diferente de zero, podemos demonstrar que:

$$a^{\frac{b}{2}} = \sqrt{a^b} \qquad\qquad a^{\frac{b}{3}} = \sqrt[3]{a^b}$$

Note que o índice do radical é o denominador do expoente da potência.

Atividades

Anote no caderno

33. Escreva os radicais na forma de potência.

a) $\sqrt{17^9}$ $17^{\frac{9}{2}}$

b) $\sqrt[3]{6^2}$ $6^{\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt{13^{11}}$ $13^{\frac{11}{2}}$

d) $\sqrt[3]{4^4}$ $4^{\frac{4}{3}}$

e) $\sqrt{12^{20}}$ $12^{\frac{20}{2}}$ ou 12^{10}

f) $\sqrt[3]{7^{12}}$ $7^{\frac{12}{3}}$ ou 7^4

34. Determine o radical equivalente a cada potência.

a) $6^{\frac{8}{3}}$ $\sqrt[3]{6^8}$

b) $47^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{47}$

c) $9^{\frac{13}{3}}$ $\sqrt[3]{9^{13}}$

d) $59^{\frac{7}{2}}$ $\sqrt{59^7}$

e) $15^{\frac{17}{3}}$ $\sqrt[3]{15^{17}}$

f) $100^{\frac{11}{2}}$ $\sqrt{100^{11}}$

35. Sem efetuar cálculos por escrito ou na calculadora, determine quais igualdades são verdadeiras. a, c

a) $\sqrt{1\,458^2} = 1\,458$

b) $\sqrt[3]{9} = 9$

c) $\sqrt[3]{10\,000^3} = \sqrt{10\,000^2}$

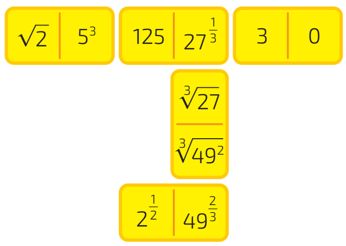
d) $\sqrt{120} = \sqrt[3]{120}$

36. Calcule as expressões.

a) $64^{\frac{1}{3}} + \sqrt{81} - 12$ 1

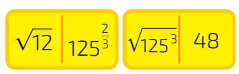
b) $10 + 1^{\frac{2}{3}} + 121^{\frac{1}{2}}$ 22

37. Marcelo e Ariane estão jogando dominó envolvendo potências e raízes. O objetivo desse jogo é encaixar peças cujos valores são iguais. Observe como eles encaixaram as peças em uma rodada.



a) As peças encaixadas estão corretas? Justifique. Sim, pois todas as peças encaixadas apresentam resultados iguais.

b) Em certo momento do jogo, Marcelo encaixou as seguintes peças.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Essa jogada está correta? Justifique.

c) De acordo com as peças apresentadas, invente uma questão e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal.

37. b) Não, pois $125^{\frac{2}{3}} \neq \sqrt{125^3}$.

47

- Apresente aos alunos a dedução a seguir, a fim de que percebam as relações entre a radiciação e a potenciação.
Seja $\sqrt[3]{64} = a$.
Então, $a^3 = 64$.
Assim $(a^3)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}}$ e, portanto, $a = 64^{\frac{1}{3}}$.
Logo, $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}}$.

BNCC em foco

- O trabalho com o tópico **Potências com expoente fracionário** e as atividades propostas proporcionam aos alunos o desenvolvimento de suas capacidades de resolução e elaboração de problemas usando a relação entre a potenciação e radiciação para representar uma raiz como potência de expoente fracionário, o que contempla a habilidade **EF08MA02**.

- No item **c** da atividade **37**, os alunos devem elaborar uma questão de acordo com a imagem apresentada. Aproveite para avaliar a capacidade de leitura e interpretação de informações deles.
Os alunos podem elaborar questões como:
  - Beatriz encaixou as peças, conforme mostra a imagem a seguir.

Sergio L. Filho

  - Essa jogada está correta? Justifique.

R sim, pois $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

Material digital

- Para complementar o trabalho com o tópico **Potências com expoente fracionário**, no material digital dessa coleção disponibilizamos a **Sequência didática 2**, elaborada com objetivo de desenvolver a habilidade **EF08MA02**. As atividades propostas nessa sequência visam desenvolver o cálculo mental para resoluções de raízes e potências, além de promover o entendimento das propriedades das potências.

- Ao trabalhar o método da tentativa para obtenção da raiz exata de um número, é importante fazer os alunos compreenderem que as tentativas devem ser norteadas, por exemplo, por estimativas e tentativas anteriores.
- No método por decomposição em fatores primos, verifique se os alunos perceberam que, na decomposição de 5 184, os fatores obtidos foram agrupados em potências de expoente 2, pois está sendo calculada a raiz quadrada. Já na decomposição de 216, os fatores foram agrupados em potências de expoente 3, pois está sendo calculada a raiz cúbica. Para facilitar a decomposição em fatores primos, lembre os alunos sobre os critérios de divisibilidade, conteúdo estudado no volume do **6º** ano dessa coleção.

Raiz exata de um número

Uma das maneiras de calcular a raiz de um número é por meio de tentativas. Vamos calcular a raiz quadrada de 5 184, ou seja, $\sqrt{5\,184}$.

Temos de encontrar um número positivo que elevado ao quadrado resulte em 5 184. Esse número pode estar entre 0 e 10, 10 e 20, 20 e 30, 30 e 40, e assim por diante.

Como ainda não sabemos entre quais dezenas exatas esse número está compreendido, vamos construir um quadro com os quadrados das dezenas exatas de 10 a 100.

a	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
a^2	100	400	900	1 600	2 500	3 600	4 900	6 400	8 100	10 000

Note que 5 184 está entre 70^2 e 80^2, isto é:

$$\underbrace{4\,900}_{70^2} < \underbrace{5\,184}_{a^2} < \underbrace{6\,400}_{80^2}$$

Assim, a raiz quadrada de 5 184 está entre 70 e 80. Calcularemos então o quadrado dos números inteiros entre 70 e 80, até obter um número maior ou igual a 5 184.

- $71^2 = 5\,041$
- $72^2 = 5\,184$

Portanto, $\sqrt{5\,184} = 72$, pois $72^2 = 5\,184$.

Como 5 184 é um número natural, outra maneira de calcular $\sqrt{5\,184}$ é decompor o número 5 184 em fatores primos e, depois, simplificar o resultado da decomposição.

$$\begin{array}{r|l l}
5\,184 & 2 & \\
2\,592 & 2 & 2^2 \\
1\,296 & 2 & \\
648 & 2 & 2^2 \\
324 & 2 & \\
162 & 2 & 2^2 \\
81 & 3 & \\
27 & 3 & 3^2 \\
9 & 3 & \\
3 & 3 & 3^2 \\
1 & &
\end{array}$$

$$5\,184 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3)}_{72}^2 = 72^2$$

Portanto, $\sqrt{5\,184} = 72$, pois $72^2 = 5\,184$.

Ainda utilizando a decomposição em fatores primos, vamos calcular $\sqrt[3]{216}$.

$$\begin{array}{r|l l}
216 & 2 & \\
108 & 2 & 2^3 \\
54 & 2 & \\
27 & 3 & \\
9 & 3 & 3^3 \\
3 & 3 & \\
1 & &
\end{array}$$

$$216 = 2^3 \cdot 3^3 = \underbrace{(2 \cdot 3)}_{6}^3 = 6^3$$

Portanto, $\sqrt[3]{216} = 6$, pois $6^3 = 216$.

Raiz quadrada aproximada de um número

Vimos que os números quadrados perfeitos são aqueles cuja raiz quadrada é um número natural.

Os números naturais que não são quadrados perfeitos não possuem raízes quadradas exatas. Nesses casos, podemos calcular a **raiz quadrada aproximada** desses números.

Veja como podemos calcular, por meio de tentativas, o valor aproximado de $\sqrt{71}$.

Inicialmente, verificamos entre quais números quadrados perfeitos o número 71 se encontra. Para isso, construímos um quadro com os quadrados dos números naturais de 1 a 10.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Note que 71 está entre 8^2 e 9^2, isto é: $\underbrace{64}_{8^2} < \underbrace{71}_{a^2} < \underbrace{81}_{9^2}$

Assim, a raiz quadrada de 71 está entre 8 e 9. Dessa forma, calculamos o quadrado de alguns números entre 8 e 9 até obtermos um número maior do que 71.

- $(8{,}1)^2 = 65{,}61$
- $(8{,}3)^2 = 68{,}89$
- $(8{,}5)^2 = \underbrace{72{,}25}_{\text{maior do que 71}}$
- $(8{,}2)^2 = 67{,}24$
- $(8{,}4)^2 = 70{,}56$

Note que $8{,}4 < \sqrt{71} < 8{,}5$. Como $(8{,}4)^2$ está mais próximo de 71, temos:

$$\sqrt{71} \simeq 8{,}4$$

Lê-se: raiz quadrada de 71 é aproximadamente 8,4.

Nesse caso, $\sqrt{71}$ está com aproximação de uma casa decimal. Se quisermos calcular a raiz quadrada aproximada com duas casas decimais, procedemos de maneira parecida à apresentada, calculando o quadrado de alguns números entre 8,4 e 8,5 até obtermos um número maior do que 71.

- $(8{,}41)^2 = 70{,}7281$
- $(8{,}42)^2 = 70{,}8964$
- $(8{,}43)^2 = \underbrace{71{,}0649}_{\text{maior do que 71}}$

Como $8{,}42 < \sqrt{71} < 8{,}43$ e $(8{,}43)^2$ está mais próximo de 71, temos:

$$\sqrt{71} \simeq 8{,}43$$

Calcule o valor aproximado de $\sqrt{35}$ com duas casas decimais. 5,92

- Antes de trabalhar com o conteúdo dessa página, apresente um número que não tenha raiz quadrada exata e questione os alunos para verificar como eles calculariam a raiz quadrada utilizando os conhecimentos adquiridos. Caso algum aluno faça relação com os números quadrados perfeitos da maneira mostrada no livro, aproveite para iniciar a explicação.
- Explique a eles que o símbolo ≃ indica que os valores são aproximados.
- Se necessário, auxilie os alunos nas multiplicações com números decimais ou leve algumas calculadoras para a sala de aula, a fim de facilitar os cálculos e agilizar os processos.

- Na resolução do desafio proposto na atividade **39**, caso seja necessário, relembre os alunos como é realizado o cálculo da medida do volume do paralelepípedo retângulo e do cubo.
- A atividade **41** solicita que os alunos elaborem um problema de acordo com o quadro apresentado. Aproveite para avaliar a leitura, a interpretação, a escrita e, sobretudo, o domínio deles com relação ao conteúdo.
Os alunos podem elaborar problemas como:
  - Para determinar a medida do comprimento da aresta de um cubo com medida de volume igual a 125 cm³, Rodolfo deve calcular $\sqrt[3]{125}$. Qual dos números apresentados no quadro é igual a essa raíz cúbica?
  R $125^{\frac{1}{3}}$
- Ao trabalhar com a atividade **45**, se julgar necessário, peça aos alunos para escreverem os números quadrados perfeitos entre 0 e 170.

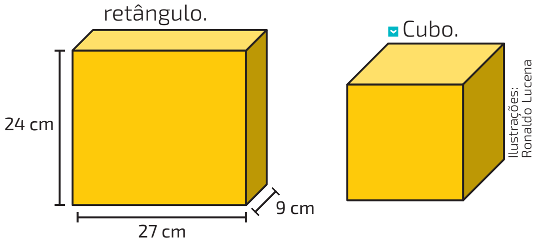
Atividades

Anote no caderno

38. Calcule.

a) $\sqrt{529}$ 23
b) $\sqrt{3\,025}$ 55
c) $\sqrt{1\,024}$ 32
d) $\sqrt{2\,401}$ 49
e) $\sqrt{6\,561}$ 81
f) $\sqrt[3]{1\,728}$ 12
g) $\sqrt[3]{10\,648}$ 22
h) $\sqrt[3]{5\,832}$ 18
i) $\sqrt[3]{19\,683}$ 27
j) $\sqrt[3]{27\,000}$ 30

39. Determine a medida do comprimento da aresta do cubo sabendo que a medida do volume do paralelepípedo retângulo é igual à medida do volume do cubo. 18 cm



Paralelepípedo retângulo.
Cubo.
Ilustrações: Ronaldo Lucena

40. Entre quais números está o resultado de:

a) $\sqrt{440}$? 20 e 21
- 20 e 21
- 21 e 22
- 22 e 23

b) $\sqrt{780}$? 27,9 e 28
- 27,7 e 27,8
- 27,8 e 27,9
- 27,9 e 28

41. Escreva os números em ordem decrescente. 18, $\sqrt{270}$, 14, 12, $135^{\frac{1}{2}}$, 6, $125^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt[3]{27}$

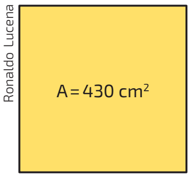
6	$\sqrt{16}$	12
$\sqrt[3]{27}$	$135^{\frac{1}{2}}$	14
18	$\sqrt{270}$	$125^{\frac{1}{3}}$

Agora, de acordo com os números apresentados no quadro, elabore um problema e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal.

42. Sem utilizar calculadora, determine cada raiz com aproximação de duas casas decimais.

a) $\sqrt{35}$ 5,92
b) $\sqrt{18}$ 4,24
c) $\sqrt{7}$ 2,65
d) $\sqrt{40}$ 6,32

43. Calcule a medida aproximada do comprimento do lado do quadrado, sabendo que **A** indica a medida de sua área. 20,74 cm

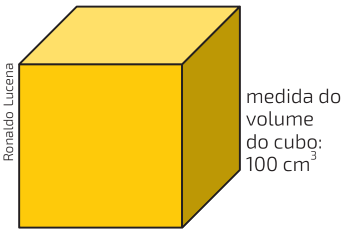


Ronaldo Lucena

Arredonde a medida do comprimento do lado do quadrado ao centésimo mais próximo.

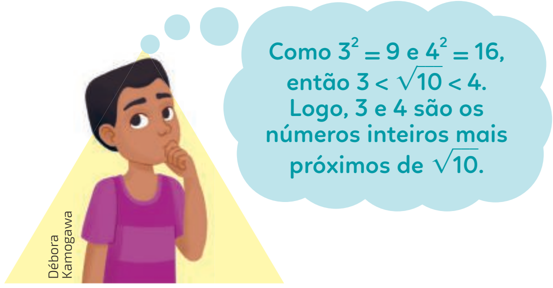
44. Qual das medidas a seguir está mais próxima (por sobra ou falta) da medida do comprimento da aresta do cubo abaixo? d

a) 2 cm
b) 3 cm
c) 4 cm
d) 5 cm
e) 6 cm



Ronaldo Lucena

45. Observe como Marcos calculou mentalmente os dois números inteiros mais próximos de $\sqrt{10}$.

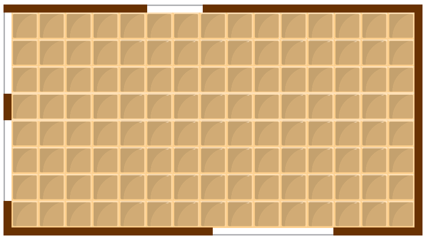


Débora Kamogawa

Determine mentalmente os dois números inteiros mais próximos de:

a) $\sqrt{5}$. 2 e 3
b) $\sqrt{18}$. 4 e 5
c) $\sqrt{24}$. 4 e 5
d) $-\sqrt{40}$. −7 e −6
e) $\sqrt{62}$. 7 e 8
f) $-\sqrt{150}$. −13 e −12

46. José cobriu totalmente o piso de uma cozinha cuja medida da área é 24,3 m^2, com lajotas quadradas.

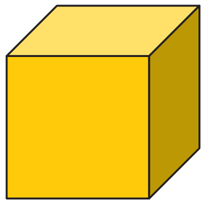


Rafael L. Gaion

> Para resolver esta atividade, desconsidere o espaço ocupado entre uma lajota e outra.

De acordo com a imagem, determine qual é, em centímetros, a medida do comprimento do lado de cada lajota. 45 cm

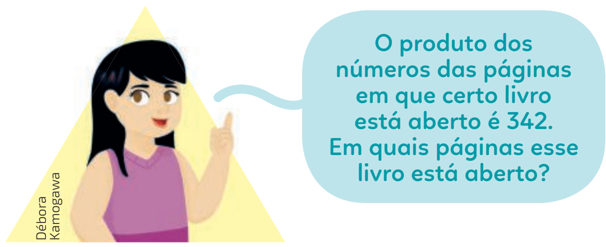
47. Com base na imagem elabore um problema e, em seguida, troque com um colega. Depois, verifiquem os resultados obtidos. Resposta pessoal.



Ronaldo Lucena

medida do volume do cubo: 1 728 cm^3

48. Leia o que Luana está dizendo e responda à pergunta. 18 e 19



Débora Kamogawa

Agora, abra o seu livro em quaisquer duas páginas e diga ao seu colega o produto dos números dessas páginas. Peça a ele que determine em quais páginas você abriu o livro. Resposta pessoal.

Explorando o que estudei

Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? potências, propriedades das potências, potência de base 10, notação científica, raiz quadrada, raiz cúbica, potência cujo expoente é uma fração com denominador 2 e 3, raiz quadrada e cúbica exata e raiz quadrada aproximada

2. Em sua opinião, é vantajoso utilizar as propriedades das potências? Justifique por meio de exemplos. Possíveis respostas: sim, pois as propriedades das potências facilitam os cálculos. Resposta pessoal.

3. Escreva o procedimento que você utiliza para calcular uma potência de expoente natural usando uma calculadora. Possível resposta: inicialmente registramos a base da potência e, em seguida, digitamos a tecla de multiplicação. Por fim, digitamos a tecla "igual" a quantidade de vezes correspondente ao expoente menos 1.

4. Explique com suas palavras como escrever um número em notação científica. Resposta pessoal.

5. A afirmação a seguir é verdadeira? Justifique. sim; Espera-se que os alunos respondam que não há números quadrados perfeitos maiores do que 9 e menores do que 16.

> Não existe um número maior do que 9 e menor do que 16 cuja raiz quadrada é um número natural.

6. Como você faria para escrever a potência $4^{\frac{7}{3}}$ por meio de um radical? Possível resposta: como o denominador do expoente é o índice do radical, temos a raiz cúbica de 4^7, ou seja, $4^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{4^7}$.

- A atividade **47** solicita que os alunos elaborem um problema de acordo com a imagem apresentada.

Dar oportunidade para que os alunos formulem problemas é uma forma de levá-los a escrever e perceber o que é importante na elaboração e na resolução de uma dada situação; que relação há entre os dados apresentados, a pergunta a ser respondida e a resposta; como articular o texto, os dados e a operação a ser usada. Mais que isso, ao formularem problemas, os alunos sentem que têm controle sobre o fazer matemática e que podem participar desse fazer, desenvolvendo interesse e confiança diante de situações-problema.

CHICA, Cristiane H. Por que formular problemas?. In: SMOLE, Kátia S. DINIZ, Maria I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Os alunos podem elaborar problemas como:

- Quantos cubos como o da imagem são necessários para formar uma pilha cúbica com a medida do comprimento da aresta igual a 36 cm?

  R 27 cubos

- Na atividade **48**, explique aos alunos que a parte inteira da raiz quadrada do produto das páginas corresponde ao menor número de páginas em que o livro está aberto. Resolvendo a raiz quadrada, obtém-se:

  $\sqrt{342} \simeq 18{,}49$

  Assim, o livro está aberto nas páginas 18 e 19.

Avaliação

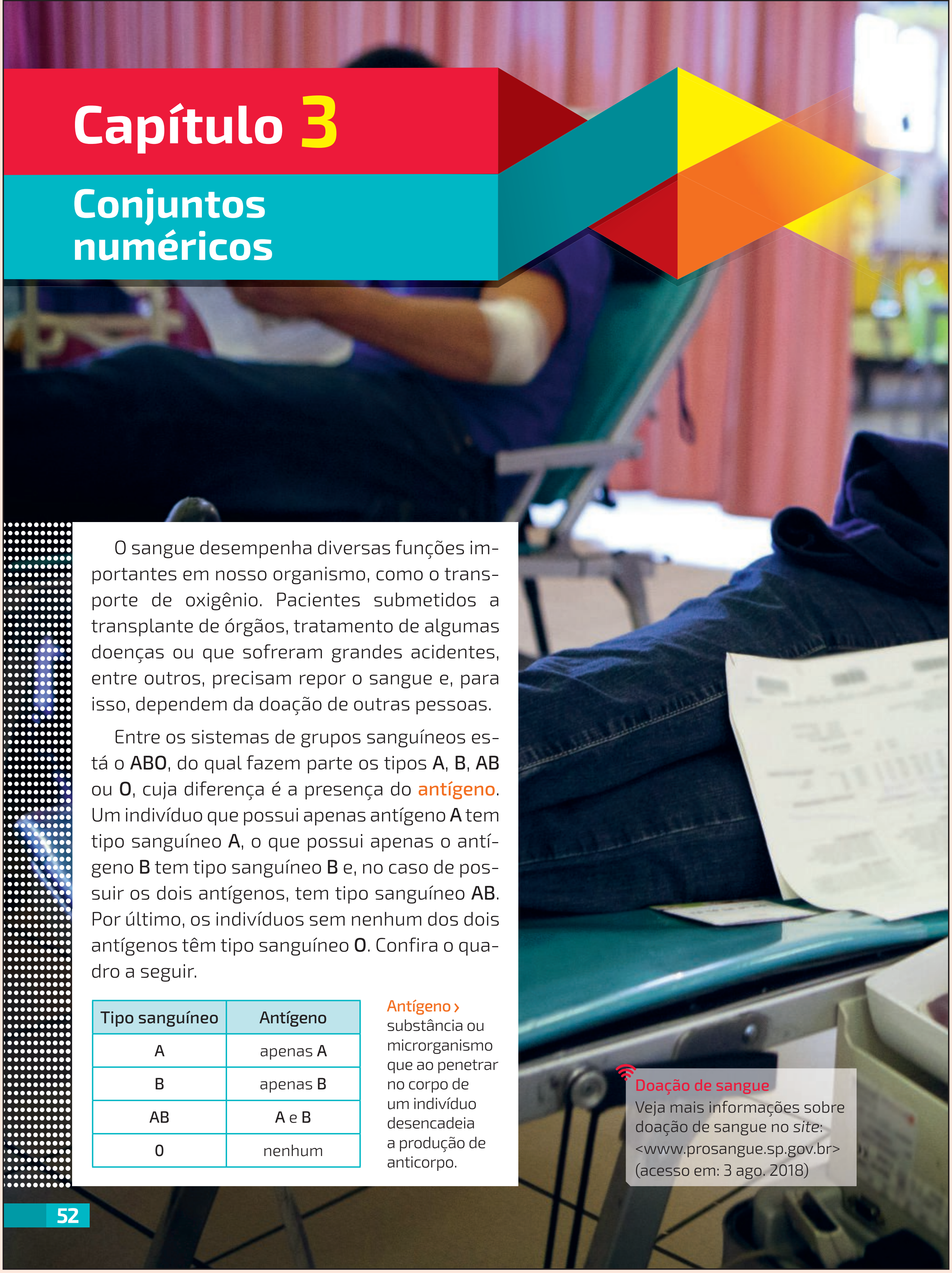
- Aproveite as questões apresentadas na seção **Explorando o que estudei** para avaliar o conhecimento dos alunos com relação aos conteúdos abordados no decorrer do capítulo. Para isso, após resolverem as questões, promova uma discussão, de modo que todos exponham suas interpretações e ideias sobre o conteúdo.

Esse capítulo possibilitará a ampliação dos conhecimentos dos alunos quanto a um dos conceitos fundamentais da Matemática: os conjuntos numéricos. Assim, eles serão levados a compreender, representar e identificar conjuntos e seus elementos, bem como suas propriedades e notações.

Além disso, os estudos avançarão no conceito de conjuntos apresentando os números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, e ainda abordarão a representação de números irracionais na reta numérica e a identificação de frações geratrizes de dízimas periódicas.

Relacionando saberes

- O tema abordado nessas páginas de abertura mostra algumas características do sangue e a importância da sua doação, estabelecendo relações entre os componentes curriculares **Matemática** e **Ciências**. A representação do sistema sanguíneo **ABO** contribui para a aplicação de conceitos relacionados a conjuntos em uma situação real, aspecto que torna o aprendizado mais significativo. Uma sugestão de condução do trabalho é organizar os alunos em duplas para realizar a leitura e responder às questões. Em seguida, promova um debate com toda a turma, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. Para complementar o estudo do tema, pergunte se eles sabem qual é o seu tipo sanguíneo e, se for possível, elabore na lousa um esquema que represente a quantidade de alunos em cada tipo sanguíneo. Outra sugestão é propor a realização de uma pesquisa a fim de verificar quais são os tipos sanguíneos mais comuns no Brasil. Para isso, verifique a possibilidade de levá-los ao laboratório de informática para realizar tal pesquisa.



Capítulo 3

Conjuntos numéricos

O sangue desempenha diversas funções importantes em nosso organismo, como o transporte de oxigênio. Pacientes submetidos a transplante de órgãos, tratamento de algumas doenças ou que sofreram grandes acidentes, entre outros, precisam repor o sangue e, para isso, dependem da doação de outras pessoas.

Entre os sistemas de grupos sanguíneos está o **ABO**, do qual fazem parte os tipos **A**, **B**, **AB** ou **O**, cuja diferença é a presença do **antígeno**. Um indivíduo que possui apenas antígeno **A** tem tipo sanguíneo **A**, o que possui apenas o antígeno **B** tem tipo sanguíneo **B** e, no caso de possuir os dois antígenos, tem tipo sanguíneo **AB**. Por último, os indivíduos sem nenhum dos dois antígenos têm tipo sanguíneo **O**. Confira o quadro a seguir.

Tipo sanguíneo	Antígeno
A	apenas **A**
B	apenas **B**
AB	**A** e **B**
O	nenhum

Antígeno › substância ou microrganismo que ao penetrar no corpo de um indivíduo desencadeia a produção de anticorpo.

Doação de sangue
Veja mais informações sobre doação de sangue no *site*: <www.prosangue.sp.gov.br> (acesso em: 3 ago. 2018)

52

Mulher doando sangue.

Universal Images Group/BSIP/Getty Images

Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

A Qual é a importância de doar sangue?

B Em quais tipos sanguíneos há antígeno **B**?

C É possível que uma pessoa com tipo sanguíneo **O** possua o antígeno **A**? Por quê?

Pensando nisso...

A Espera-se que os alunos respondam que a doação de sangue pode ajudar pacientes submetidos a transplante de órgãos, tratamento de algumas doenças ou que sofreram grandes acidentes e precisam repor o sangue para se recuperarem.

B Tipo **B** e tipo **AB**.

C Não, pois pessoas com tipo sanguíneo **O** não têm o antígeno **A**.

- Na questão **A**, comente com os alunos que o corpo humano tem, em média, 5 litros de sangue circulando e, na doação, são retirados apenas cerca de 450 mililitros, sendo que o corpo repõe todo esse sangue doado em aproximadamente 72 horas.

BNCC em foco

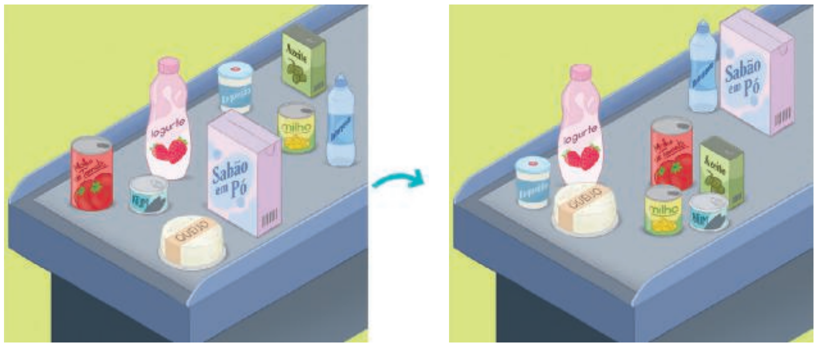
- Tendo em vista que o assunto dessas páginas destaca a doação de sangue, aproveite para fortalecer a essência da **Competência geral 10**, que parte do princípio da autonomia, para estimular decisões baseadas em princípios éticos e solidários, ressaltando a importância desse ato para salvar vidas e ajudar o próximo.

Objetivos do capítulo

- Compreender o conceito de conjunto.
- Representar conjuntos utilizando chaves e diagramas.
- Identificar os elementos de um conjunto.
- Determinar se um elemento pertence a certo conjunto.
- Verificar se um conjunto está contido em outro.
- Identificar os elementos do conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.
- Escrever números decimais na forma de fração e vice-versa.
- Identificar dízimas periódicas e seus períodos, bem como obter frações geratrizes de dízimas periódicas.
- Representar os números reais na reta numérica.

Conjuntos

Em um supermercado, para acondicionar certa compra em sacolas reutilizáveis, Pedro organizou os produtos de acordo com algumas características comuns entre eles.



Ilustrações: Somma Studio

Note que as mercadorias foram separadas em três conjuntos: o conjunto dos alimentos enlatados, o dos alimentos refrigerados e o dos produtos de limpeza.

Pode-se dizer que um **conjunto** é um agrupamento qualquer de objetos distintos. Representamos um conjunto dispondo seus elementos entre chaves e separados por vírgula. Veja a seguir alguns exemplos de conjuntos formados por números.

- Conjunto dos divisores positivos de 36. Nomeando esse conjunto por **A**, temos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

> Geralmente, nomeamos os conjuntos com letras maiúsculas de nosso alfabeto.

- Conjunto dos números pares menores do que 15. Nomeando esse conjunto por **B**, temos:

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

- Conjunto dos divisores positivos de 18. Nomeando esse conjunto por **C**, temos:

$$C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

Cada objeto de um conjunto é chamado **elemento** do conjunto. O conjunto que não possui elementos é chamado **conjunto vazio**, o qual indicamos por { } ou ∅. O conjunto dos divisores pares de 13, por exemplo, é vazio, pois o número 13 não tem divisor par. Nomeando esse conjunto por **D**, temos:

$$D = \varnothing \text{ ou } D = \{\ \}$$

Há também conjuntos que possuem infinitos elementos, chamados **conjuntos infinitos**. Para representá-los, escrevemos alguns de seus elementos seguidos de reticências. O conjunto dos números naturais maiores do que 10, por exemplo, é infinito. Nomeando esse conjunto por **E**, temos:

$$E = \{11, 12, 13, 14, 15 \ldots\}$$

- Ao trabalhar o conteúdo dessa página, peça aos alunos que deem alguns exemplos de conjuntos infinitos. Para isso, eles devem, inicialmente, definir uma característica para esse conjunto, como: conjunto **A** formado pelos números naturais maiores que 100: $A = \{101, 102, 103, 104, 105, 106, \ldots\}$.
- Caso julgue necessário, comente com eles que em um conjunto finito é possível contar seus elementos. Desse modo, os conjuntos não finitos são chamados de infinitos.
- Converse com os alunos sobre o uso de sacolas retornáveis no lugar das sacolas plásticas descartáveis que costumam estar disponíveis nos supermercados, perguntando se eles têm o hábito de levar suas próprias sacolas ao fazer compras. Instigue-os a pensar nos danos que o descarte inadequado do plástico causa ao meio ambiente e, se possível, apresente alguma pesquisa relativa a isso, como as reportagens disponíveis em: <www.natgeo.pt/planeta-ou-plastico>. Acesso em: 17 set. 2018. Conversas como essa auxiliam os alunos nas tomadas de decisões baseadas em princípios éticos e sustentáveis.

Dizemos que os objetos que são elementos de um conjunto **pertencem** a esse conjunto.

Em relação aos conjuntos **A**, **B** e **C** apresentados anteriormente, temos que:

- 4 **pertence** a **A**, pois 4 é divisor positivo de 36

pertence

$4 \in A$

Lê se: 4 pertence a **A**.

- 10 **pertence** a **B**, pois 10 é um número par menor do que 15

$10 \in B$

- 9 **pertence** a **C**, pois 9 é divisor positivo de 18

$9 \in C$

Quando um objeto não é elemento de um conjunto, dizemos que ele **não pertence** a esse conjunto.

- 5 **não pertence** a **A**, pois 5 não é divisor de 36

não pertence

$5 \notin A$

Lê se: 5 não pertence a **A**.

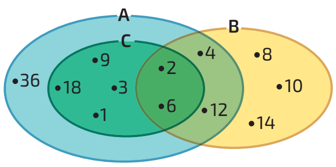
- 11 **não pertence** a **B**, pois 11 não é par

$11 \notin B$

- 8 **não pertence** a **C**, pois 8 não é divisor de 18

$8 \notin C$

Podemos representar os conjuntos **A**, **B** e **C** em uma figura, como ao lado, chamada diagrama de Venn.



Cynthia Sekiguchi

Note que todos os elementos de **C** também são elementos de **A**. Nesse caso, dizemos que o conjunto **C** está **contido** em **A**.

está contido

$C \subset A$

Lê-se: **C** está contido em **A**.

Também podemos notar que existem elementos de **B** que não são elementos de **A** (8, 10 e 14). Nesse caso, dizemos que o conjunto **B não está contido** em **A**.

não está contido

$B \not\subset A$

Lê-se: **B** não está contido em **A**.

Os símbolos $\in$ e $\notin$ são utilizados para indicar pertinência ou não de um objeto a um conjunto. Já os símbolos $\subset$ e $\not\subset$ são utilizados para indicar a inclusão ou não de um conjunto em outro.

Quais números são elementos de A, de B e de C, simultaneamente? 2 e 6

- Ao final do trabalho com essa página, apresente aos alunos o texto a seguir, que traz informações sobre a importância que a teoria dos conjuntos de Georg Cantor teve na Matemática.

A teoria dos conjuntos, criada por Georg Cantor perto do final do século XIX, logo despertou um interesse generalizado muito grande e praticamente não há hoje nenhum campo da matemática que não tenha recebido seu impacto. As noções de espaço e geometria de um espaço, por exemplo, passaram por uma revolução completa com a teoria dos conjuntos. [...] Mais importante porém foi a oportunidade que ela abriu para progressos matemáticos com que sequer se sonhava há cinquenta anos. Assim, paralelamente à nova atividade consistindo em apreciar os procedimentos postulacionais em matemática, foram nascendo os espaços abstratos, sendo criadas as teorias gerais da dimensão e da medida e infundidos a um ramo da matemática chamado *topologia* progressos extraordinários. Em resumo, sob a influência da teoria dos conjuntos verificou-se uma unificação considerável da matemática tradicional e se criou muita matemática nova em ritmo acelerado.

[...]

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 659.

Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos, **1**, **2** e **3** do 1º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos atingiu o resultado esperado.

- O nome da revista que aparece na atividade **1** é fictício.
- Após realizar a atividade **1**, proponha aos alunos uma atividade parecida. Para isso, peça-lhes que, utilizando alguns materiais da sala de aula, estabeleçam critérios e os separem em conjuntos.
- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **5**.

a) $17 + 10 + 15 = 42$
42 entrevistados

b) 15 entrevistados

c) 10 entrevistados

d) $17 + 10 + 15 + 18 = 60$
60 pessoas

Atividades

Anote no caderno

1. Observe os objetos sobre a mesa.

Podemos formar conjuntos com esses objetos, classificando-os segundo uma característica comum. Por exemplo:

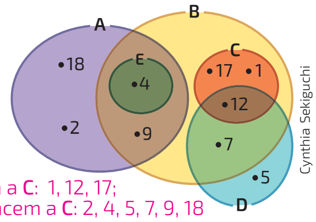
$$\underbrace{\text{Conjunto dos objetos eletrônicos}}_{\text{característica comum}} = \{\textit{smartphone}, \text{calculadora}\}$$

Agora, forme outros três conjuntos com esses objetos e escreva a característica comum de seus elementos. Em seguida, responda às questões. Respostas nas orientações ao professor.

a) Quantos elementos possui cada conjunto que você escreveu?

b) De acordo com as características, um mesmo objeto pode pertencer a mais de um conjunto? Justifique.

2. Observe o diagrama de Venn.



pertencem a **C**: 1, 12, 17;
não pertencem a **C**: 2, 4, 5, 7, 9, 18

a) Quais elementos pertencem a **C**? E quais elementos não pertencem a **C**?

b) Copie os itens substituindo cada ■ pelo símbolo $\in$ ou $\notin$.

- 1 ■ D $\notin$
- 17 ■ A $\notin$
- 12 ■ B $\in$
- 9 ■ B $\in$
- 7 ■ C $\notin$
- 9 ■ E $\notin$

c) Copie os itens substituindo cada ■ pelo símbolo $\subset$ ou $\not\subset$.

- E ■ A $\subset$
- C ■ B $\subset$
- C ■ D $\not\subset$
- B ■ C $\not\subset$
- B ■ A $\not\subset$
- E ■ B $\subset$

3. Considere os conjuntos A = {e, u}, B = {a, d, e, i, u} e C = {b, i, o}.

a) Represente esses conjuntos em um diagrama de Venn. Resposta nas orientações ao professor.

b) A quais conjuntos o elemento **e** pertence? A e B

c) O conjunto **A** está contido em **B**? Justifique. sim; Espera-se que os alunos respondam que todos os elementos do conjunto **A** são também elementos do conjunto **B**.

4. Escreva, utilizando chaves, o conjunto:
Respostas nas orientações ao professor.

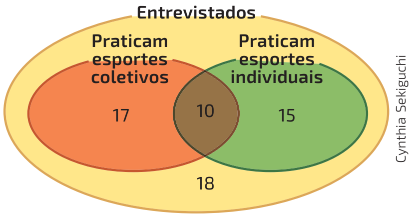
a) **A**, formado por todos os números maiores do que 8 e menores do que 35 que sejam múltiplos de 3.

b) **B**, formado pelos números pares maiores do que 7 e menores do que 15.

c) **C**, formado por todos os números naturais maiores do que 14.

d) **D**, formado por todos os números ímpares divisíveis por 6.

5. O diagrama apresenta os resultados de uma pesquisa em que os entrevistados responderam se praticam algum esporte coletivo ou individual.



Os números no diagrama indicam quantidades de entrevistados.

a) Quantos entrevistados disseram que praticam pelo menos algum tipo de esporte? 42

b) Qual a quantidade de entrevistados que pratica apenas esporte individual? 15

c) Quantos entrevistados disseram que praticam esporte coletivo e individual? 10

d) Ao todo, quantas pessoas foram entrevistas? 60

Respostas

1. Possíveis respostas: conjunto dos objetos escolares: {transferidor, caneta, caderno, lápis, borracha, calculadora}; conjunto dos objetos que começam com a letra c: {calculadora, caderno, caneta}; conjunto dos objetos confeccionados com papel: {caderno, revista}.

a) Possíveis respostas: conjuntos dos objetos escolares: 6 elementos; conjunto dos objetos que começam com a letra c: 3 elementos; conjunto dos objetos confeccionados com papel: 2 elementos.

b) sim; Possível resposta: o caderno, nas possíveis respostas, pertence ao conjunto dos objetos escolares, ao conjunto dos objetos que começam com a letra c e ao conjunto dos objetos confeccionados com papel.

Conjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$) e dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

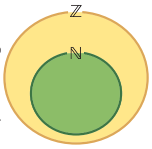
Os números 1, 2, 3, 4, 5, ... surgiram da necessidade que o ser humano teve de quantificar objetos, membros da comunidade, animais do rebanho etc. Esses números acrescidos do zero formam o **conjunto dos números naturais** ($\mathbb{N}$).

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \ldots\}$$

Porém, no decorrer da história, os números naturais não foram suficientes para expressar determinadas situações, como as que envolviam dívida, débito etc. Nesses casos, são utilizados os números inteiros negativos.

Os números inteiros negativos e os números naturais formam o **conjunto dos números inteiros** ($\mathbb{Z}$).

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$$



Cynthia Sekiguchi

Todo número natural também é um número inteiro, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Os números naturais também podem ser identificados como os **números inteiros não negativos**.

Podemos representar os elementos de $\mathbb{Z}$ por meio de pontos em uma reta numérica.

Sergio L. Filho

Na reta numérica, a medida da distância entre dois pontos consecutivos é sempre a mesma.

Cada número inteiro tem um **antecessor** e um **sucessor**. Em relação ao número -5, por exemplo, -6 é o antecessor e -4 é o sucessor.

Qual é o antecessor de:

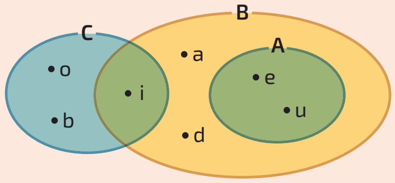
a) -10? -11 **b)** -999? -1000 **c)** 0? -1

Podemos destacar as seguintes propriedades em relação a $\mathbb{Z}$:
- ao adicionarmos ou subtrairmos dois números inteiros, o resultado também é um número inteiro.
- o produto de dois números inteiros também é um número inteiro.

Mariana efetuou $25 \cdot (-3\,489)$. O produto obtido por ela é um número inteiro? Justifique. Sim, pois o produto de dois números inteiros também é um número inteiro e os números 25 e $-3\,489$ são inteiros.

- Nessa página, são retomados alguns conceitos sobre os números naturais e os inteiros que, até o momento, foram trabalhados de maneira informal. No tópico, eles são apresentados de maneira formal, juntamente com suas principais características e os símbolos que os representam.
- Também é retomada a representação dos números na reta numérica. Revise com os alunos como construir uma reta numérica, cujo assunto foi explorado em volumes anteriores dessa coleção.

3. a)



Cynthia Sekiguchi

4. a) A = {9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33}
b) B = {8, 10, 12, 14}
c) C = {15, 16, 17, 18 ...}
d) D = { }

Respostas

13. sim; não; Espera-se que os alunos digam que o conjunto dos números naturais é infinito, portanto, sempre é possível determinar o sucessor de um número natural. O número zero não possui antecessor, pois é o menor dos números naturais.

14.

Antecessor	Número	Sucessor
–16	–15	–14
21	22	23
4	5	6
39	40	41
–100	–99	–98
0	1	2
–2	–1	0
2	3	4
–11	–10	–9
55	56	57
–62	–61	–60

Atividades

Anote no caderno

6. Observe os números indicados no quadro.

4	−7	1	3,6	−23	6
95	−0,2	10	−1	$\frac{1}{4}$	

a) Quais desses números pertencem ao:

- conjunto dos números naturais? 4, 1, 6, 95 e 10
- conjunto dos números inteiros? 4, −7, 1, −23, 6, 95, 10 e −1

b) Todo número natural é um número inteiro? Justifique.

7. Copie os itens substituindo cada ■ pelo símbolo ∈ ou ∉.

a) -1 ■ $\mathbb{Z}$ ∈ **d)** 17 ■ $\mathbb{N}$ ∈ **g)** $0{,}5$ ■ $\mathbb{N}$ ∉

b) 7 ■ $\mathbb{N}$ ∈ **e)** -3 ■ $\mathbb{N}$ ∉ **h)** -240 ■ $\mathbb{Z}$ ∈

c) $2{,}5$ ■ $\mathbb{Z}$ ∉ **f)** 0 ■ $\mathbb{Z}$ ∈

8. Quantos são os números:

a) inteiros menores do que 12? infinitos

b) naturais menores do que 5? 5

c) inteiros maiores do que −3? infinitos

d) naturais menores do que 0? nenhum

e) inteiros menores do que 20 e maiores do que 8? 11

f) naturais maiores do que 19 e menores do que 20? nenhum

9. Escreva:

a) os números naturais maiores do que −4 e menores do que 8. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7

b) três números inteiros negativos maiores do que −7. Possível resposta: −6, −5 e −4.

c) quatro números inteiros menores do que −10. Possível resposta: −11, −12, −13 e −14.

10. Observe as fichas.

2 7 9 1 6

Utilizando uma única vez cada um dos algarismos indicados nessas fichas, escreva:

a) o menor número natural de quatro algarismos. 1267

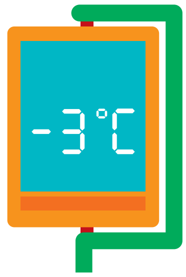
b) o número par mais próximo de 354. 296

c) o menor número de dois algarismos cujo algarismo das unidades é 6. 16

6. b) sim; Espera-se que os alunos respondam que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros.

11. Observe as imagens e leia as informações.

I)



Bárbara Sarzi

II)

> Segundo pesquisas, a estimativa de vida de uma mulher brasileira é de aproximadamente 79 anos.

III)

> Os destroços do navio Titanic estão a aproximadamente −4 000 m em relação ao nível do mar.

IV)

Rafael L. Gaion

a) Dos números que aparecem nas imagens e nas informações, quais são:

- naturais? 79 e 128
- inteiros? −3, 79, −4 000 e 128

b) Entre esses números, qual é o menor? E qual é o maior? −4 000; 128

c) Escreva o antecessor e o sucessor de cada um desses números. −3: −4 e −2; 79: 78 e 80; 128: 127 e 129; −4 000: −4 001 e −3 999

12. Escreva o menor e o maior número natural de três algarismos. Depois, determine o antecessor e o sucessor desses números. menor: 100; maior 999; 99 e 101; 998 e 1 000

13. Todos os números naturais possuem sucessor? E antecessor? Justifique.
Respostas nas orientações ao professor.

14. Obtenha mentalmente o antecessor e o sucessor dos números a seguir.
Respostas nas orientações ao professor.

−15	22	5	40
−99	1	−1	
3	−10	56	−61

- Nos itens **b** e **c** da atividade **9**, peça a alguns alunos que escrevam, na lousa, as respostas obtidas. Dessa maneira, eles poderão compará-las e estabelecer relações entre os conjuntos numéricos.
- Complemente a atividade **12** com as seguintes perguntas:
- Qual é o maior número natural compreendido entre 82 e 98 que seja múltiplo de 3? R 96
- Qual é o menor número natural compreendido entre 34 e 46 que seja múltiplo de 3? R 36
- Usando os algarismos 1, 4 e 9, quantos números de três algarismos é possível formar? R 27

15. Escreva uma expressão algébrica para representar o:

a) sucessor do número inteiro **x**. $x+1$

b) antecessor do número inteiro **y**. $y-1$

16. Junte-se a um colega e verifiquem se a afirmação abaixo é verdadeira. Depois, justifique-a.
Respostas nas orientações ao professor.

> Todos os números inteiros possuem antecessor e sucessor.

17. Determine o número indicado em cada ficha.

I) 97 — O maior número ímpar de dois algarismos distintos.

II) 1 — O menor número inteiro positivo.

III) −1 — O maior número inteiro negativo.

18. Descubra a constante mágica e determine o número inteiro correspondente a cada letra no quadrado mágico a seguir.
constante mágica: −6

> Lembre-se de que um quadrado é mágico quando a soma dos números de cada linha, coluna e diagonal é igual. Chamamos essa soma de constante mágica.

diagonal

linha

6	−7	D	3
A	B	1	−2
−1	−4	E	G
−6	C	F	−9

coluna

A: −5; B: 0; C: 5; D: −8; E: −3; F: 4; G: 2

19. Observe os números naturais.

3 14 37 6 29 11

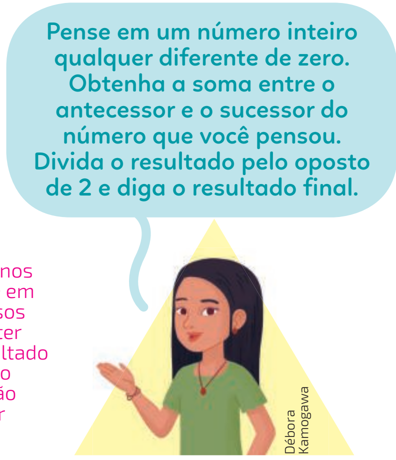
É possível realizarmos uma subtração entre dois desses números e obtermos um número não natural? Justifique por meio de um exemplo.
sim; Possível resposta: $3-11=-8$

20. Em relação à divisão envolvendo dois números inteiros cujo divisor é diferente de zero, responda.

a) É possível que o resultado dessa divisão seja um número inteiro? E um número natural? Dê exemplos.
sim; sim; Possível resposta: $8:4=2$; $(-27):(-3)=9$

b) O resultado dessa divisão será sempre um número inteiro? Justifique.

21. Siga as instruções de Amanda e resolva as questões.



20. b) não; Espera-se que os alunos digam que em alguns casos podemos ter como resultado um número decimal não inteiro, por exemplo: $3:2=1{,}5$.

a) Que número você encontrou como resultado final? O oposto do número escolhido.

b) Qual será o resultado encontrado se o número escolhido for −15? E se for −8? 15; 8

c) O resultado sempre será o oposto do número escolhido? sim

d) Agora, junte-se a um colega, oriente-o seguindo as instruções de Amanda e adivinhe o número que ele pensou.
Resposta pessoal.

59

- Após os alunos resolverem a atividade **15**, complemente-a pedindo a eles que atribuam valores para as variáveis **x** e **y**, a fim de calcular o antecessor e o sucessor.
- Ao realizarem as atividades **18**, **19** e **20**, peça aos alunos que escrevam, na lousa, algumas das respostas obtidas. Dessa maneira, peça que exponham suas estratégias de resolução para a turma a fim de contribuir com o surgimento de um ambiente de aprendizagem que possibilite a interação entre todos.

BNCC em foco

- No item **c** da atividade **21**, é possível discutir uma justificativa algébrica, o que proporciona a compreensão das relações entre os conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática, desenvolvendo nos alunos tanto a segurança quanto a própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, bem como a autoestima e a perseverança na busca de soluções. Dessa maneira, contempla-se a **Competência específica de Matemática 3**.
Aproveite para estimular o cálculo mental, uma importante ferramenta que auxilia no estudo da Matemática.
Segue uma justificativa algébrica: Tomando **n** como o número pensado, temos:
  - $(n-1)+(n+1)=$
    $=n-1+n+1=2n$
  - $\dfrac{2n}{-2}=-n$
  Portanto, o resultado será o oposto de **n**.

Resposta

16. sim; Espera-se que os alunos respondam que o conjunto dos números inteiros é infinito e não podemos determinar o maior ou o menor número desse conjunto. Portanto, sempre antes e após um número inteiro haverá outro.

- Ao definir os números racionais como aqueles possíveis de serem representados na forma $\frac{a}{b}$, sendo **a** e **b** números inteiros, é importante destacar a restrição $b \neq 0$.

Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

Vimos em anos anteriores que, ao dividirmos um número inteiro por outro, diferente de zero, nem sempre o resultado obtido é um número inteiro. Observe o exemplo.

DnD-Production.com/Shutterstock.com

Medida do comprimento: a medida varia de acordo com a raça.

No sítio de José, uma vaca leiteira produziu, em 4 dias, 34 L de leite. Quantos litros de leite, em média, essa vaca produziu por dia?

Para responder a essa pergunta, precisamos dividir 34 por 4.

$$34 : 4 = 8{,}5$$

Assim, a produção média diária foi de 8,5 L de leite.

O número 8,5 é um número decimal e também pode ser representado pela fração $\frac{85}{10}$.

Os números que são obtidos a partir da divisão de dois números inteiros, cujo divisor é diferente de zero, formam o **conjunto dos números racionais** ($\mathbb{Q}$). Esses números podem ser expressos na forma fracionária.

- $\frac{7}{4} = 1{,}75$
- $\frac{47}{3} = 15{,}666...$
- $-\frac{2}{25} = -0{,}08$
- $-\frac{5}{6} = -0{,}833...$

Se continuarmos efetuando a divisão a seguir, o algarismo 6 continuará se repetindo no quociente. Não é possível obter resto igual a zero nessa divisão.

$$\begin{array}{l|l} 47 & 3 \\ \hline 17 & 15{,}666... \\ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 2 & \end{array}$$

Os números decimais que representam as frações $\frac{47}{3}$ e $-\frac{5}{6}$ são chamados **dízimas periódicas**. Nesses casos, o número decimal tem algarismos que se repetem infinitamente de modo periódico. Esses algarismos formam o **período** da dízima periódica.

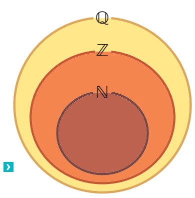
Podemos também representar uma dízima periódica indicando um traço sobre seu período. Por exemplo, a dízima periódica 2,8353535... pode ser representada por $2{,}8\overline{35}$.

Os números racionais são aqueles que podem ser representados na forma $\frac{a}{b}$, em que **a** e **b** são números inteiros e $b \neq 0$.

Todo número inteiro pode ser representado por uma fração. Veja alguns exemplos.

- 3 pode ser representado por: $\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3} ...$
- -5 pode ser representado por: $\frac{-5}{1}, \frac{-10}{2}, \frac{-15}{3} ...$

Dessa maneira, dizemos que todo número inteiro também é um número racional.

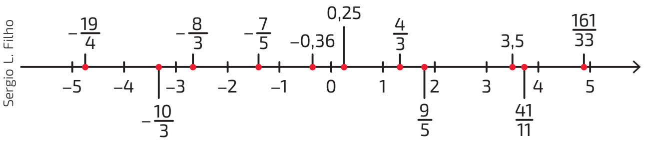


Cynthia Sekiguchi

O conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros que, por sua vez, está contido no conjunto dos números racionais.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Os elementos de $\mathbb{Q}$ podem ser representados por meio de pontos em uma reta numérica. Veja alguns deles.



Sergio L. Filho

Para localizar, por exemplo, o número 1,333… na reta numérica, inicialmente dividimos cada unidade em 3 partes iguais, pois $1,333\ldots = \frac{4}{3}$ e o denominador da fração é 3. Em seguida, consideramos, a partir do zero, no sentido positivo, 4 dessas partes, pois $1,333\ldots > 0$ e o numerador da fração $\frac{4}{3}$ é 4.

Podemos destacar as seguintes propriedades em relação a $\mathbb{Q}$:

- ao adicionarmos ou subtrairmos dois números racionais, o resultado também é um número racional.
- o produto de dois números racionais também é um número racional.
- o quociente da divisão de um número racional por outro, diferente de zero, também é um número racional.

Frações geratrizes

As frações que geram as dízimas periódicas são chamadas **frações geratrizes**. Por exemplo:

- $\frac{1}{3}$ é a fração geratriz da dízima periódica $0,\overline{3}$, pois $1 : 3 = 0,333\ldots$
- $\frac{122}{99}$ é a fração geratriz da dízima periódica $1,\overline{23}$, pois $122 : 99 = 1,232323\ldots$

Agora, vamos escrever a fração geratriz da dízima periódica $7,\overline{35}$.

1º Seja **x** a parte decimal da dízima periódica $7,\overline{35}$, ou seja:

$$x = 0,\overline{35}$$

2º Multiplicando ambos os membros da equação por uma potência de 10 cujo expoente representa a quantidade de casas no período da dízima periódica, temos:

$$10^2 \cdot x = 10^2 \cdot 0,\overline{35}$$
$$100x = 35,\overline{35}$$

3º Subtraindo **x** de ambos os membros da equação $100x = 35,\overline{35}$, temos:

$$100x - x = 35,\overline{35} - \underbrace{0,\overline{35}}_{x}$$
$$99x = 35$$
$$x = \frac{35}{99}$$

4º Por fim, adicionando a parte inteira à parte decimal, temos:

$$7 + x = 7 + \frac{35}{99} = \frac{693}{99} + \frac{35}{99} = \frac{728}{99}$$

Portanto, $7,\overline{35} = \frac{728}{99}$.

Explique com suas palavras como você faria para localizar o número $-2,666\ldots$ na reta numérica. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que inicialmente dividiriam cada unidade em 3 partes iguais. Em seguida, considerariam, a partir do zero, no sentido negativo, 8 dessas partes.

BNCC em foco

- Os conteúdos abordados no tópico **Frações geratrizes** possibilitam aos alunos reconhecer e utilizar procedimentos para obter uma fração geratriz de uma dízima periódica, contemplando, desse modo, a habilidade **EF08MA05**.

- Se julgar conveniente, para complementar o trabalho com o conteúdo dessa página, apresente outras dízimas periódicas e oriente os alunos a construírem uma reta numérica e a localizarem tais números nela. Para isso, espera-se que primeiro eles obtenham frações que geram tais dízimas periódicas e, em seguida, utilizem a estratégia apresentada.

Material digital

- Para complementar o trabalho com o tópico **Conjunto dos números racionais**, no material digital dessa coleção, disponibilizamos a **Sequência didática 3**, elaborada com objetivo de desenvolver a habilidade **EF08MA05**. As atividades propostas nessa sequência visam obter frações geratrizes a partir de dízimas periódicas.

BNCC em foco

- As atividades **27** e **30** possibilitam aos alunos utilizarem procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica, contemplando a habilidade **EF08MA05**.

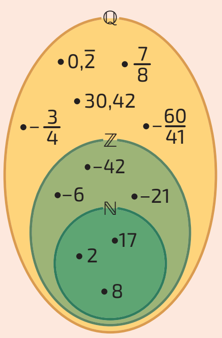
Respostas

24. a) 2,666... ou $2,\overline{6}$
b) 2,090909... ou $2,\overline{09}$
c) 0,369369... ou $0,\overline{369}$
d) 0,65625

Dízimas periódicas	Período
2,666...	6
2,090909...	09
0,369369	369

26. $\frac{1}{8} = 0,125$;
$2 = \frac{10}{5}$;
$0,5 = \frac{-1}{-2}$;
$-6 = \frac{6}{-1}$;
$\frac{16}{25} = 0,64$;
$3 = \frac{36}{12}$

29. Possível resposta:



Cynthia Sekiguchi

Atividades

Anote no caderno

22. Verifique se cada item é verdadeiro ou falso.

a) $2,33 \in \mathbb{Z}$ F
b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ V
c) $-\frac{1}{10} \in \mathbb{Q}$ V
d) $-9 \in \mathbb{N}$ F
e) $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ V
f) $\frac{5}{6} \in \mathbb{Z}$ F
g) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}$ F
h) $-0,444... \in \mathbb{Q}$ V

23. Escreva as frações na forma de números decimais.

a) $\frac{19}{4}$ 4,75 **b)** $\frac{1}{8}$ 0,125 **c)** $\frac{4}{3}$ 1,333... ou $1,\overline{3}$ **d)** $\frac{17}{8}$ 2,125

24. Utilizando uma calculadora, escreva as frações na forma de números decimais.

a) $\frac{8}{3}$ **b)** $\frac{23}{11}$ **c)** $\frac{123}{333}$ **d)** $\frac{21}{32}$

Respostas nas orientações ao professor.

Agora, verifique quais desses números decimais são dízimas periódicas e determine o período de cada uma delas.

25. Para escrever o número 1,28 na forma de fração, João escreveu o número decimal na forma de fração decimal. Em seguida, simplificou a fração até torná-la irredutível.

$$1,28 = \frac{128}{100} = \frac{64}{50} = \frac{32}{25}$$

Agora, escreva os números decimais na forma de fração.

a) 0,36 $\frac{9}{25}$
b) 9,75 $\frac{39}{4}$
c) 2,2 $\frac{11}{5}$
d) 1,625 $\frac{13}{8}$

26. Determine quais pares de números a seguir representam o mesmo valor.

Respostas nas orientações ao professor.

$\frac{1}{8}$ 2 0,5 −6 $\frac{16}{25}$ 3

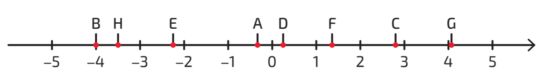
0,64 $\frac{10}{5}$ $\frac{6}{-1}$ 0,125 $\frac{-1}{-2}$ $\frac{36}{12}$

27. Escreva a fração geratriz de cada dízima periódica a seguir.

a) 0,555... $\frac{5}{9}$
b) 2,444... $\frac{22}{9}$
c) 1,191919... $\frac{118}{99}$
d) 3,878787... $\frac{384}{99}$

28. Na reta numérica, cada letra representa um número do quadro. Associe cada letra da reta ao número correspondente.

0,25 D	−4 B	$1,3\overline{6}$ F	$-\frac{2}{6}$ A
$\frac{14}{5}$ C	$-\frac{9}{4}$ E	4,07 G	$-\frac{7}{2}$ H



Sergio L. Filho

29. Desenhe o diagrama de Venn representando a relação entre o conjunto dos números naturais (ℕ), dos números inteiros (ℤ) e dos números racionais (ℚ). Em seguida, escreva no diagrama alguns números pertencentes a cada um desses conjuntos numéricos.

Respostas nas orientações ao professor.

30. Veja como Cláudia obteve a fração geratriz da dízima periódica $4,9\overline{6}$.

Seja x a dízima periódica $4,9\overline{6}$, ou seja: $x = 4,9\overline{6}$
Multiplicando ambos os membros da igualdade por 10 e realizando os cálculos necessários, obtenho:

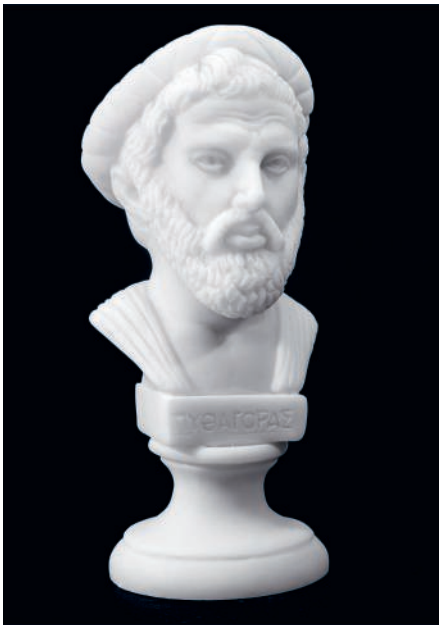
$$10 \cdot x = 10 \cdot 4,9\overline{6}$$
$$10x = 49,\overline{6}$$
$$10x = 49 + 0,\overline{6}$$
$$10x = 49 + \frac{6}{9}$$
$$x = \frac{447}{90}$$

De maneira parecida, obtenha a fração geratriz das dízimas periódicas.

a) 25,1666... $\frac{151}{6}$
b) 3,8333... $\frac{23}{6}$
c) 0,5111... $\frac{46}{90}$
d) 1,7424242... $\frac{1725}{990}$

Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$)

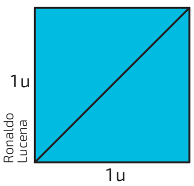
Quando realizamos medições, como de comprimento ou massa, raramente a medida obtida pode ser expressa por um número inteiro, pois a unidade de medida considerada não costuma caber uma quantidade inteira de vezes nessa medida. Em algumas situações como essa é necessário utilizar números racionais.



blackboard1965/Shutterstock.com

Pitágoras.

Em seus estudos, os pitagóricos, que eram discípulos do matemático e filósofo grego Pitágoras, que viveu por volta de 570 a.C., descobriram que a medida do comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário não podia ser expressa por um número racional.



Ronaldo Lucena

Nesse quadrado, a medida do comprimento da diagonal não pode ser expressa por uma fração $\frac{a}{b}$, em que **a** e **b** são números inteiros e $b \neq 0$.

> Lado unitário: lado cuja medida do comprimento é 1 u.

Para expressar medidas como essa, foi necessário estabelecer um novo tipo de número, os **números irracionais**, que significa números **não racionais**.

Veja, por exemplo, o cálculo de 357 : 999 e $\sqrt{3}$ realizado com o auxílio de um programa de computador.

- 357 : 999 = 0,357357357357357357357357357357357357357357357357357...

  No cálculo 357 : 999, note que os algarismos 3, 5 e 7 do resultado obtido se repetem infinitamente de modo periódico. Assim, dizemos que o número 0,357357357... é uma dízima periódica, portanto, um número racional.

- $\sqrt{3}$ = 1,7320508075688772935274463415058723669428052538103806 2...

  O resultado obtido no cálculo de $\sqrt{3}$ também é um número que possui infinitas casas decimais. No entanto, as casas decimais desse número não se repetem de modo periódico, ou seja, não é uma dízima periódica. Essa é uma característica dos números irracionais.

> Os resultados de 357 : 999 e $\sqrt{3}$ são números que possuem infinitas casas decimais. Acima, estão apresentadas apenas as primeiras casas decimais.

Os números que não podem ser escritos na forma de fração formam o **conjunto dos números irracionais** ($\mathbb{I}$).

- Leia o texto a seguir para os alunos, que traz algumas informações sobre Pitágoras.

[...] Ao que parece Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. na ilha egeia de Samos. É possível que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, pois era cinquenta anos mais novo do que este e morava perto de Mileto, onde vivia Tales. Depois parece que residiu por algum tempo no Egito e pode mesmo ter-se abalançado a viagens mais extensas. Ao retornar a Samos encontrou o poder nas mãos do tirano Polícrates e a Jônia sob o domínio persa; decidiu então emigrar para o porto marítimo de Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália. Lá ele fundou a famosa escola pitagórica. [...]

A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico. Esse grupo de matérias tornou-se conhecido na Idade Média como *quadrivium*, ao qual se acrescentava o *trivium*, formado de gramática, lógica e retórica. Essas sete artes liberais vieram a ser consideradas como a bagagem cultural necessária de uma pessoa educada.

[...]

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 97.

- Veja a seguir uma maneira de justificar que a medida do comprimento do lado de um quadrado de área medindo $2\,u^2$ é igual a $\sqrt{2}\,u$.
  - Seja ℓ a medida do comprimento do lado desse quadrado. Então:

$$\ell^2 = 2u^2$$
$$\ell = \sqrt{2}\,u$$

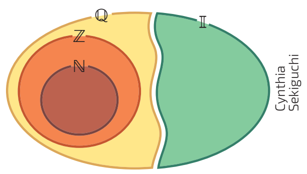
  Note que foi considerada apenas a raiz quadrada positiva de 2, pois se trata de uma medida de comprimento.
  - Nessa página é apresentado o símbolo π, que também representa a 16ª letra do alfabeto grego. Diga aos alunos, se achar oportuno, que o valor de π é calculado dividindo a medida do comprimento de uma circunferência pela medida do comprimento de seu diâmetro. O valor do número π nessa página é apresentado com alguns dígitos.

  $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211 7068...$
  - Além disso, diga a eles que não podemos afirmar, por exemplo, que $\sqrt{2}$ é um número irracional observando apenas algumas casas decimais, mas é possível provar matematicamente que $\sqrt{2}$ é um número irracional. O mesmo também ocorre com outros exemplos apresentados, ou seja, $-\sqrt{5}$ e $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Veja alguns exemplos de números irracionais:

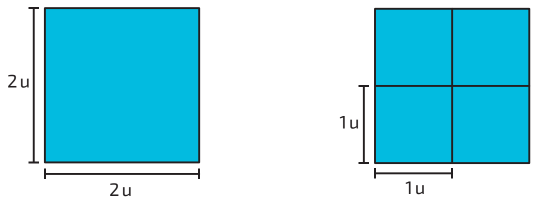
- $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$
- $\pi = 3{,}141592653...$
- $-\sqrt{5} = -2{,}236067977...$
- $\dfrac{\sqrt{10}}{4} = 0{,}790569415...$

Representando os conjuntos dos números naturais $(\mathbb{N})$, inteiros $(\mathbb{Z})$, racionais $(\mathbb{Q})$ e irracionais $(\mathbb{I})$ por meio de diagramas, temos:



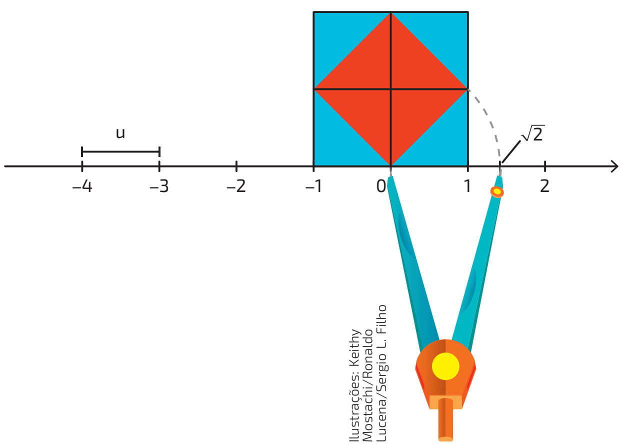
Também podemos representar alguns números irracionais em uma reta numérica. Observe, por exemplo, como podemos representar $\sqrt{2}$ na reta numérica.

- Inicialmente, construímos um quadrado cuja medida do comprimento do lado é 2 unidades, isto é, 2 u. Em seguida, dividimos esse quadrado em 4 quadrados menores, cuja medida do comprimento do lado é 1 u.



Cada quadrado menor obtido tem área medindo $1\,u^2$.

- Em cada quadrado traçamos uma diagonal, obtendo os 4 triângulos vermelhos. Cada um desses triângulos tem a medida da área igual à metade da medida da área do quadrado menor, ou seja, tem área medindo $0{,}5\,u^2$. Assim, a figura vermelha obtida é um quadrado cuja medida da área é $2\,u^2$, pois $4 \cdot 0{,}5 = 2$.



Dessa maneira, como um quadrado de área medindo **A** tem o comprimento do lado medindo $\sqrt{A}$, a medida do comprimento do lado do quadrado vermelho é $\sqrt{2}\,u$.

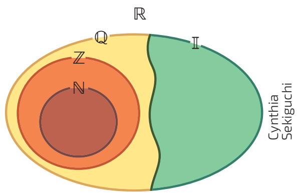
- Para obter o ponto correspondente a $\sqrt{2}$ na reta numérica, transportamos para ela, com o auxílio de um compasso, a medida do comprimento do lado do quadrado vermelho, como mostra a imagem.

Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

Estudamos anteriormente que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros e que o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

Ao reunirmos todos os números racionais e todos os números irracionais, obtemos o **conjunto dos números reais** ($\mathbb{R}$).

Portanto, todos os números que estudamos até este momento pertencem ao conjunto dos números reais.

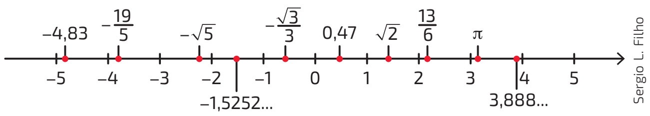


$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

Em algumas situações, é necessário excluir o zero dos conjuntos numéricos. Para representar um conjunto excluindo o zero, utilizamos *.
Exemplos:

- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- $\mathbb{R}^*$: conjunto dos números reais excluindo o zero

Podemos representar números reais em uma reta numérica. Veja alguns exemplos.



Quando a reta numérica representa os números reais ela é chamada **reta real**. Assim, cada ponto da reta real corresponde a um número racional ou irracional.

Podemos destacar as seguintes propriedades em relação a $\mathbb{R}$:

- ao adicionarmos, subtrairmos ou multiplicarmos dois números reais, o resultado também é um número real.
- o quociente da divisão de um número real por outro número real diferente de zero também é um número real.
- a raiz quadrada de um número real positivo é um número real. Porém, a raiz quadrada de um número real negativo não é um número real, pois não existe número real que elevado ao quadrado resulte em um número real negativo.

Quantos números inteiros existem entre -3 e 2? E quantos números reais?
4 números inteiros; infinitos números reais

- Ao trabalhar esse conteúdo, realize com os alunos a **Atividade complementar** a seguir, a fim de proporcionar um momento descontraído que pode enriquecer o processo de ensino e contribuir para a compreensão da classificação dos conjuntos numéricos quanto às suas características.

Atividade complementar

Jogo dos conjuntos

Materiais

- tabuleiro
- fichas
- cartolina
- molde do dado
- tesoura com pontas arredondadas
- cola

Desenvolvimento

- Organize os alunos em grupos de, no máximo, 5 integrantes. Reproduza e distribua para cada grupo as fichas, o tabuleiro e o molde do dado disponíveis nas **Páginas para reprodução**. Solicite que colem na cartolina o molde e as fichas, recortem e construam o dado.
- As fichas devem ser distribuídas aleatoriamente entre os integrantes do grupo de modo que todos fiquem com a mesma quantidade, caso sobrem fichas, estas deverão ficar empilhadas viradas para a mesa.
- Por sorteio, define-se qual integrante vai começar o jogo. Cada jogador, na sua vez, deve lançar o dado e, de acordo com a indicação na face voltada para cima, realizar sua jogada. Ao obter como resultado no dado um dos conjuntos numéricos, ele deve colocar uma de suas fichas com um número pertencente a esse conjunto no campo correspondente do tabuleiro. Caso não tenha uma ficha com o número pertencente ao conjunto tirado, deverá retirar uma ficha do monte ou passar a vez se não existirem mais fichas no monte. Se obtiver como resultado no dado "Escolha um conjunto", ele deverá escolher um conjunto numérico para realizar sua jogada, e caso obtenha "Passe a vez", ele deverá passar a vez.
- Vencerá o jogo o integrante que conseguir colocar primeiro todas as suas fichas no tabuleiro.

- Na atividade **33**, explique aos alunos que, em alguns casos, podem ser feitas aproximações para a representação na reta numérica.
- Complemente a atividade **35** com as seguintes perguntas:
  - Quantos números inteiros existem entre $-\frac{\sqrt{15}}{2}$ e $\sqrt{36}$?
    R 7 números
  - Quantos números naturais são menores que 100? E quantos números inteiros são menores que 100?
    R 100 números; infinitos
  - O número $6,5\overline{7}$ pertence a quais conjuntos numéricos?
    R $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$
  - Ao unir os conjuntos $\mathbb{I}$ e $\mathbb{Q}$, qual conjunto numérico é obtido?
    R $\mathbb{R}$
- Veja uma possível solução do desafio proposto na atividade **37**.

$$C = 2\pi r$$
$$2\,680 = 2\pi r$$
$$\underbrace{\frac{2\,680}{\underbrace{\pi}_{3{,}14}}}_{} = \underbrace{2r}_{\text{diâmetro}}$$
$$2r \simeq 854$$

Portanto, a medida aproximada do comprimento do diâmetro é 854 m.

Atividades

Anote no caderno

31. Determine se cada um dos números a seguir pertence a $\mathbb{Q}$ ou a $\mathbb{I}$.

a) $\sqrt{121}$ $\mathbb{Q}$
b) $-\frac{\pi}{4}$ $\mathbb{I}$
c) 12 $\mathbb{Q}$
d) $\sqrt{81}$ $\mathbb{Q}$
e) -9 $\mathbb{Q}$
f) $-1,387466431$ $\mathbb{Q}$
g) $\frac{14}{13}$ $\mathbb{Q}$
h) $-18,\overline{49}$ $\mathbb{Q}$
i) $\sqrt{46}$ $\mathbb{I}$
j) $\sqrt{6}$ $\mathbb{I}$

Todos esses números pertencem a $\mathbb{R}$? Justifique. Sim; Resposta esperada: pois todo número racional e todo número irracional é um número real.

32. Verifique se cada afirmativa é verdadeira ou falsa.

a) O número $0,\overline{1}$ não pertence a $\mathbb{I}$. V
b) O número $\sqrt{3}$ pertence a $\mathbb{I}$. V
c) Os números 5 e $1,\overline{70}$ pertencem a $\mathbb{I}$. F
d) Todo número racional também é um número irracional. F

33. Desenhe uma reta numérica e indique os números do quadro a seguir.
Respostas nas orientações ao professor.

6	$-\frac{13}{5}$		-4	1
$\sqrt{2}$		$-\frac{20}{4}$	$\frac{2}{9}$	$1,\overline{3}$

Agora, escolha outros números racionais e indique-os na reta que você desenhou.
Resposta pessoal.

34. Construa um diagrama relacionando os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ e $\mathbb{R}$. Depois escreva nele os números a seguir nos locais correspondentes.
Respostas nas orientações ao professor.

a) -17
b) $\frac{8}{11}$
c) 24
d) $-\sqrt{8}$
e) $-9,42$
f) 10
g) 28,2525...
h) -2

35. Responda às questões.

a) Quantos números inteiros existem entre $-\sqrt{20}$ e π? 8
b) O número 62 pertence aos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$? Justifique.
Sim, pois 62 pertence a $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

36. Escreva os números em ordem crescente.
Respostas nas orientações ao professor.

$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{4}$	π	$\frac{10}{3}$	$-0,2$
$2,\overline{941}$	$-\sqrt{9}$	0	$-\sqrt{17}$	$\frac{23}{7}$

37. O sistema de irrigação de pivô central é composto de aspersores que recebem água de tubulações apoiadas sobre torres com rodas. A água chega até a tubulação por meio de um dispositivo que fica em uma das extremidades do sistema. Esse dispositivo é o centro do círculo formado pelo sistema ao girar.


Thomas Williams/Alamy/Fotoarena
Irrigação com pivô central.

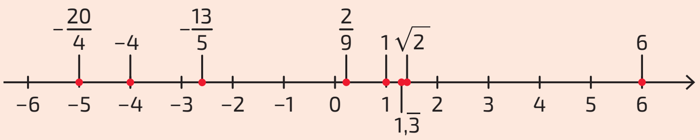

B Brown/Shutterstock.com
Círculo formado pela região irrigada pelo pivô central.

Em certa propriedade rural, um dos pivôs de irrigação abrange um círculo cuja medida do comprimento da circunferência é cerca de 2 680 m. Qual é a medida aproximada do comprimento do diâmetro da região irrigada por esse pivô?
aproximadamente 854 m

> Lembre-se de que a medida do comprimento **C** de uma circunferência cujo comprimento do raio mede **r** é dada por $C = 2\pi r$.

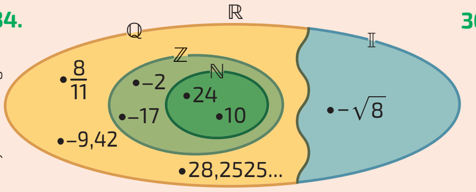
Respostas

33.



Sergio L. Filho

34.



Cynthia Sekiguchi

36. $-\sqrt{17}; -\sqrt{9}; -\frac{1}{4}; -0,2; 0; \sqrt{3}; 2,\overline{941}; \pi; \frac{23}{7}; \frac{10}{3}$

38. Leia a tirinha e resolva as questões.

© Ziraldo/Acervo do cartunista

Ziraldo. **O Menino maluquinho**: as melhores tiras. Porto Alegre: L&PM, 1995.

> Para resolver as questões, considere que os quatro bombons serão repartidos igualmente entre os três meninos.

a) Cada menino que aparece na tirinha vai receber mais ou menos do que uma unidade? Justifique. mais do que uma unidade; Possível resposta: pois $(4 : 3) > 1$

b) Cada um dos meninos receberá qual quantidade de bombons? Escreva uma fração, um número na forma mista e um número decimal que represente essa quantidade. $\frac{4}{3}$; $1\frac{1}{3}$; $1,\overline{3}$ ou 1,333...

c) Os números que você escreveu no item **b** pertencem a quais conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ ou $\mathbb{R}$? $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

d) Converse com um colega sobre como os bombons poderiam ser repartidos. Resposta pessoal.

Explorando o que estudei

Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? conjuntos, conjuntos dos números naturais, conjunto dos números inteiros, conjunto dos números racionais, conjunto dos números irracionais e conjunto dos números reais.

2. Cite algumas situações de seu dia a dia em que os números reais estão presentes. Resposta nas orientações ao professor.

3. Além do número π, cite outros dois números que são irracionais. Possível resposta: $\sqrt{5}$, $\frac{2\sqrt{11}}{2}$

4. Em quais situações podemos usar os símbolos:

a) $\in$ e $\notin$? Espera-se que os alunos respondam que podemos usar os símbolos para indicar a pertinência ou não de um objeto a um conjunto.

b) $\subset$ e $\not\subset$? Espera-se que os alunos respondam que podemos usar os símbolos para indicar a inclusão ou não de um conjunto em outro.

5. Explique com suas palavras as diferenças entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que o conjunto dos números inteiros é formado pelos números inteiros negativos e pelos números naturais.

6. Existe algum número que seja racional e irracional simultaneamente? Justifique. não; Espera-se que os alunos justifiquem diizendo que não há um número irracional que possa ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$.

Resposta

2. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que os números reais estão presentes em inúmeras situações, como no pagamento de um produto, nas medidas dos ingredientes da receita de um bolo, na medida do comprimento de seus pés, entre outras.

Avaliação

- Utilize a seção **Explorando o que estudei** para realizar uma avaliação informal com os alunos, observando as estratégias utilizadas por eles para responderem às questões propostas. Ademais, reflita se os objetivos do capítulo foram atingidos e analise as estratégias que foram utilizadas para alcançar os resultados, com o intuito de confirmá-las ou modificá-las para o trabalho com os próximos capítulos.

Material digital

- Antes de prosseguir com os estudos e, se julgar oportuno, avalie a aprendizagem dos alunos em relação a algumas habilidades trabalhadas no decorrer desse bimestre. O material digital apresenta uma proposta de avaliação para o 1º bimestre que pode ser utilizada neste momento como ferramenta auxiliar do processo de ensino e aprendizagem.

BNCC em foco

- A seção apresentada nessas páginas desenvolve o tema contemporâneo **Educação alimentar e nutricional**, pois aborda a importância de uma alimentação equilibrada, com o consumo de alimentos energéticos, construtores e reguladores. Junto aos alunos, faça uma leitura das cenas e questione se eles têm o hábito de consumir alimentos de todos os grupos. Ressalte que uma alimentação deficitária em alguns desses grupos pode ocasionar problemas de saúde, como anemia e desnutrição, e incentive-os a se importarem com o assunto. Diga que há profissionais especializados no estudo da alimentação equilibrada, como os nutrólogos e nutricionistas, que podem auxiliar no entendimento desses grupos alimentares. Dessa maneira, esperamos estimular o autoconhecimento e o autocuidado, de modo que os alunos tenham capacidade de valorizar sua saúde física, conforme postula a **Competência geral 8**.

Cidadania: explore essa ideia

Alimentação equilibrada

O bem-estar físico e mental de uma pessoa está relacionado à nutrição adequada, por isso é importante mantermos uma alimentação equilibrada, que consiste basicamente na ingestão apropriada de água, carboidratos, proteínas, gorduras, vitaminas, fibras e sais minerais. Uma maneira de ingerirmos todos esses nutrientes de maneira saudável é consumir alimentos variados, preferencialmente *in natura* ou minimamente processados, como frutas, hortaliças, carne fresca, grãos e leite.

Os alimentos podem ser organizados em conjuntos ou grupos de acordo com a função que desempenham em nosso organismo. Os **alimentos energéticos** são responsáveis pelo fornecimento de energia de que o nosso corpo necessita para a realização das atividades. Os **alimentos construtores** são responsáveis pela construção de novos tecidos, sendo muito importantes para crianças e adolescentes, pois estão em fase de crescimento. Além desses, há os **alimentos reguladores**, responsáveis pelo bom funcionamento do corpo e por protegê-lo contra doenças.

Nik Neves

- A leitura do texto pode ser realizada coletivamente. Instigue os alunos a expressarem suas opiniões, sempre tomando cuidado para que haja respeito mútuo. Informe que, na faixa etária em que se encontram, a preocupação com uma alimentação balanceada vai muito além de questões estéticas, e importa principalmente pela fase de crescimento que requer alimentos específicos e variados e necessita de uma maior quantidade de nutrientes para se desenvolver de maneira adequada. Se achar conveniente, junto aos alunos, faça uma lista com alimentos dos três grupos que são característicos de sua região, de modo que saibam reconhecê-los quando forem consumi-los.
- Ao final, enfatize que os bons hábitos alimentares norteiam não só a manutenção da saúde, mas também do humor e da disposição das pessoas.

Analisando com cidadania Anote no caderno Respostas nas orientações ao professor.

1. Você considera sua alimentação equilibrada? Há algo que deveria ser mudado?
2. Por que é importante mantermos uma alimentação equilibrada?
3. Qual a importância de crianças e adolescentes consumirem alimentos como carnes, ovos e leite?

Analisando com a Matemática Anote no caderno

4. Identifique alguns alimentos que estão na mesa de jantar da família de Pedro e separe-os conforme os grupos alimentares acima. Em sua opinião, a refeição da família de Pedro está equilibrada? Por quê?
5. Agora, faça uma lista com os alimentos que você costuma comer frequentemente. Depois, organize-os de acordo com os grupos alimentares citados acima.

69

Respostas

1. Resposta pessoal.
2. Uma alimentação equilibrada ajuda o nosso organismo a desenvolver corretamente as suas funções.
3. Esses alimentos são construtores de tecidos, sendo essenciais para a fase de crescimento.
4. Lista: arroz, feijão, alface, brócolis, carne, azeite e ovo. Separação por grupos: alimentos energéticos: arroz e azeite; alimentos construtores: feijão, carne e ovo; alimentos reguladores: alface e brócolis. A refeição da família de João inclui alimentos dos três grupos alimentícios, portanto, espera-se que os alunos respondam que esta refeição está equilibrada.
5. Resposta pessoal.

- Proponha aos alunos uma pesquisa para que possam se aprofundar na questão da alimentação equilibrada, de modo que percebam os benefícios e os malefícios que podem advir da alimentação, ou seja, o que bons e maus hábitos podem ocasionar. Informe-os de que o Ministério da Saúde disponibiliza o **Guia Alimentar para a População Brasileira**, em que há estudos sobre os hábitos conforme as regiões, as etnias, em função de apoiar a educação alimentar e nutricional. Vale verificar o conteúdo da publicação, disponível no *site*: <http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_relatorio_final.pdf>. Acesso em: 2 nov. 2018.
- Tendo em vista que, atualmente, muitas pessoas optam pelo vegetarianismo, pergunte se, em sala de aula, há algum aluno vegetariano e quais são as trocas para suprir, por exemplo, os nutrientes provindos da carne. Se achar oportuno, pesquise juntamente com eles mais informações sobre a alimentação vegetariana.

Nesse capítulo será retomado o estudo de expressões algébricas, a fim de que os alunos aprofundem seus conhecimentos relacionados à Álgebra. Nesse sentido, serão levados a compreender o que são monômios e polinômios, bem como realizar adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação envolvendo polinômios.

Os alunos também serão levados a reconhecer alguns produtos de polinômios, chamados produtos notáveis, e o estudo de sequências também será abordado, de modo a ampliar ainda mais o conhecimento.

- As páginas de abertura apresentam informações sobre as Cataratas do Iguaçu, um dos pontos turísticos mais visitados no Brasil. Ao tratar sobre a vazão das cataratas, os alunos perceberão que a relação existente entre a medida de tempo e a medida do volume de água pode ser representada por um monômio. Isso permite que eles percebam uma interação entre o conteúdo tratado no capítulo e situações reais, o que torna o estudo mais significativo. Uma sugestão de condução do trabalho é realizar uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. As questões propostas podem ser respondidas na lousa, de acordo com as respostas dadas. Nesse momento, é importante que a turma seja incentivada a participar.
  Para complementar o estudo do tema, pergunte aos alunos se conhecem ou gostariam de conhecer as Cataratas do Iguaçu.

Capítulo 4

Polinômios, produtos notáveis e fatoração

Fabricio Rezende/ Shutterstock.com

As cataratas do Iguaçu, localizadas na fronteira entre o Brasil e a Argentina, destacam-se por sua impressionante formação geológica, com diversas quedas-d'água a um desnível medindo até 80 m de altura e 19 saltos principais, sendo cinco deles pertencentes à região brasileira, no município de Foz do Iguaçu, Paraná. A medida de sua vazão média é cerca de 1 500 m^3/s (metros cúbicos por segundo) de água, variando entre 300 m^3/s nos períodos de seca e 8 500 m^3/s nas cheias.

Veja no quadro a medida do volume de água escoada, em média, pelas cataratas, de acordo com a medida do tempo.

Medida do tempo (s)	1	2	3	4	...	n
Medida do volume (m^3)	1 500	3 000	4 500	6 000	...	$1500 \cdot n$

Todo esse volume de água compõe a bela paisagem que impressiona turistas, fazendo das cataratas do Iguaçu o segundo ponto turístico brasileiro mais visitado pelos estrangeiros e certamente uma das principais belezas naturais do mundo.

Também é possível pesquisar na internet vídeos que mostrem as cataratas com diferentes vazões. Proponha a construção de um gráfico de barras que represente a medida do volume de água escoada, em média, pelas cataratas em relação a medida do tempo, com base nos dados do qudro apresentado.

Pensando nisso...

Respostas na orientações ao professor.

A Por que as cataratas do Iguaçu são um dos pontos turísticos mais visitados por estrangeiros?

B De acordo com o quadro, em média, quantos metros cúbicos de água escoam pelas cataratas em 5 s? E em 10 s?

C Na última coluna do quadro da página **70**, o que a letra **n** representa na expressão $1\,500 \cdot n$?

Cataratas do Iguaçu, em Foz do Iguaçu, no Paraná, em 2017.

Cataratas do Iguaçu
Veja mais informações sobre as cataratas do Iguaçu:
<www.cataratasdoiguacu.com.br/>
<https://iguazuargentina.com/po/index>
(acesso em: 3 ago. 2018)

Pensando nisso...

A Espera-se que os alunos respondam que é por causa de sua impressionante formação geológica, que apresenta um incrível espetáculo: grande volume de água despencando constantemente de uma altura cuja medida é de até 80 m, compondo uma bela paisagem.

B 7 500 m^3; 15 000 m^3

C A medida do tempo em segundos.

- Aproveite o trabalho com o item **A** para avaliar a leitura e interpretação dos alunos com relação às informações apresentadas.
- No item **B**, os alunos podem obter as respostas observando a regularidade, ou seja, adicionando 1 500 após cada segundo. Nesse caso, oriente-os a resolverem utilizando a expressão apresentada, a fim de avaliar o conhecimento prévio com relação ao conteúdo a ser estudado.
- Ao abordar o item **C**, questione-os de modo que percebam a importância dessa expressão, pois ela auxilia no cálculo da medida do volume de água escoada, em média, em relação a um período de tempo. Nesse sentido, peça que calculem, por exemplo, quantos metros cúbicos de água escoam, em média, pelas cataratas em 45 s.

BNCC em foco

- No decorrer do capítulo, nas introduções dos conteúdos e nas seções de atividades os alunos poderão observar relações entre diferentes campos da Matemática. Estimule-os de modo que tenham segurança quanto à capacidade de construir e aplicar seus conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções, o que contempla a **Competência específica de Matemática 3**.

Expressões algébricas

Aline, Bruno e Carol colocaram algumas bolinhas em três caixas. Podemos representar quantas bolinhas foram colocadas nas caixas escrevendo a seguinte **expressão algébrica**.

$$\underbrace{x}_{\substack{\text{quantidade}\\ \text{de bolinhas}\\ \text{na caixa azul}}} + \overbrace{y}^{\substack{\text{quantidade}\\ \text{de bolinhas}\\ \text{na caixa verde}}} + \underbrace{z}_{\substack{\text{quantidade de}\\ \text{bolinhas na}\\ \text{caixa vermelha}}}$$


Débora Kamogawa

Se a caixa azul tem 6 bolinhas, a verde tem 9 e a vermelha tem 3, podemos calcular o total de bolinhas substituindo, na expressão algébrica, as letras **x**, **y** e **z** por 6, 9 e 3, respectivamente, ou seja:

$$x + y + z = 6 + 9 + 3 = 18$$

Portanto, há ao todo 18 bolinhas nessas caixas.

Nesse caso, obtivemos o **valor numérico** da expressão algébrica $x + y + z$ quando $x = 6$, $y = 9$ e $z = 3$.

As expressões em que aparecem letras e números são chamadas **expressões algébricas**. Nessas expressões, as letras são as **variáveis**.

Quando substituímos cada variável de uma expressão algébrica por um número e efetuamos os cálculos, obtemos um **valor numérico** da expressão.

Por exemplo, o valor numérico da expressão algébrica $2x + y^2 - 5$, para $x = 8$ e $y = -2$, é:

$$2x + y^2 - 5 = 2 \cdot 8 + (-2)^2 - 5 = 16 + 4 - 5 = 15$$

A expressão $2x + y^2 - 5$ tem duas variáveis, isto é, **x** e **y**. No entanto, podemos ter expressões algébricas com uma, duas, três ou mais variáveis.

Em geral, no produto de dois fatores em que pelo menos um deles é uma letra, não utilizamos o símbolo · ou ×. O produto de $2 \cdot x$, por exemplo, geralmente é indicado por $2x$.

A parte da Matemática que estuda o emprego de letras para representar números é chamada **Álgebra**.

As letras no lugar de números eram mais usadas pelos hindus. Porém, foi com os gregos que surgiram os primeiros vestígios de cálculos efetuados com letras, sendo seu precursor o matemático grego Diofanto de Alexandria, que viveu por volta de 250 d.C.

Séculos depois, com o matemático francês François Viète (1540-1603), a Álgebra adquiriu uma forma própria com a introdução das primeiras notações sistematizadas.

Objetivos do capítulo

- Reconhecer a utilização de letras para representar números em expressões algébricas.
- Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.
- Identificar os termos de uma expressão algébrica.
- Utilizar a linguagem algébrica para representar situações.
- Reconhecer monômios, binômios, trinômios e polinômios.
- Identificar o coeficiente e a parte literal de um monômio.
- Identificar monômios semelhantes.
- Indicar o grau de um monômio e de um polinômio.
- Efetuar adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação envolvendo monômios e polinômios.
- Simplificar polinômios.
- Obter o polinômio oposto a um outro polinômio.
- Reconhecer e desenvolver produtos notáveis.
- Aplicar os produtos notáveis na realização de cálculos.
- Fatorar polinômios.

- Explique aos alunos que a palavra álgebra está relacionada ao termo árabe *al-jabr*, do livro *Al-jabr wa'l muqabalah*, publicado em Bagdá pelo matemático árabe Al-Khowarizmi, por volta do ano de 825, e significa restituição, redução, restauração.

Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **4**, **5** e **6** do 2º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos atingiu o resultado esperado.

Atividades

Anote no caderno

1. Associe cada expressão algébrica a uma frase, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. a–III; b–I; c–IV; d–II; e–V

a) $2x + \frac{y}{3}$

b) $2 \cdot (x + 7)$

c) $3x + y^4$

d) $\frac{4x}{2}$

e) $x^2 + 1$

I) O dobro da soma entre um número e 7.

II) A metade do quádruplo de um número.

III) O dobro de um número mais a terça parte de outro.

IV) O triplo de um número mais outro número elevado à quarta potência.

V) O quadrado de um número mais 1.

2. Determine o valor numérico de:

a) $3 \cdot (x - 8)$, para $x = 12$. 12

b) $3x + x^3$, para $x = 4$. 76

c) $x^3 - x^2 - 2x$, para $x = -2$. –8

d) $3x + \frac{x}{4} - y$, para $x = 4$ e $y = 5$. 8

3. Escreva uma expressão algébrica de variável **x** para representar cada situação.

a) Para pagar algumas peças de roupa, dei R$ 28,00 de entrada e o restante dividi em 5 prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação? $\frac{(x - 28)}{5}$

b) Nesse mês, o consumo de energia elétrica da casa de Rodrigo aumentou em $\frac{2}{9}$ em relação ao mês passado. Qual é o consumo nesse mês? $x + \frac{2}{9}x$

Agora, elabore e escreva uma situação como as apresentadas acima. Diga a um colega que a represente por meio de uma expressão algébrica de variável **x** e calcule o valor numérico da expressão para alguns valores da variável. Depois, verifique se ele resolveu corretamente. Resposta pessoal.

4. Em uma loja, o preço de uma máquina de lavar roupas é dado pela expressão $250 + 12p$, sendo **p** o valor correspondente a cada prestação. Calcule o preço da máquina de lavar roupas se cada prestação for R$ 96,50. R$ 1 408,00

5. Observe os produtos.

Ilustrações: Rafael L. Gaion

Escreva uma expressão algébrica para representar o valor a ser pago ao se comprar:

a) doze caixas de sabão em pó. $12x$

b) uma caixa de sabão em pó e três pacotes de biscoito. $x + 3z$

c) duas caixas de sabão em pó e três pacotes de biscoito. $2x + 3z$

d) duas caixas de sabão em pó e três queijos. $2x + 3y$

Agora, calcule o valor a ser pago em cada compra acima sabendo que o preço da caixa de sabão em pó é R$ 10,80, do pacote de biscoito é R$ 3,20 e do queijo é R$ 12,50. a: R$ 129,60; b: R$ 20,40; c: R$ 31,20; d: R$ 59,10

6. Escreva uma expressão algébrica que, ao substituir a variável pelos números da coluna **A**, obtém-se o número correspondente da coluna **B**. Possível resposta: $2x + 2$.

A	B
2	6
9	20
17	36
35	72
50	102

BNCC em foco

- Assim como na atividade **3**, em diversas outras atividades do capítulo são propostas a resolução e a elaboração de problemas envolvendo situações que podem ser representadas por meio de expressões algébricas, possibilitando o cálculo de seu valor numérico e utilizando propriedades das operações. Com isso, pode-se contemplar a habilidade **EF08MA06**, da BNCC.
- A atividade **4** fornece uma oportunidade para conversar com os alunos sobre o tema contemporâneo **Educação para o consumo**. Fale sobre a importância de um planejamento mensal de gastos, que evita o descontrole e o acúmulo de dívidas, de modo que tenham consciência, sobretudo, de que as compras à vista, muitas vezes, são mais vantajosas do que as parceladas, pois é possível ober descontos e pagar mais barato por um produto.

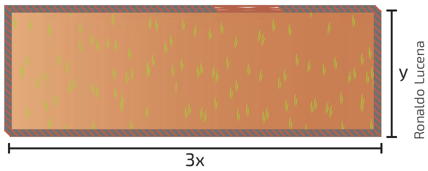
- Aproveite o trabalho com a atividade **3** para avaliar os alunos com relação à produção de problemas na língua materna, à criatividade na elaboração e ao modo como estruturam o problema, além de verificar se estão ou não dominando o conteúdo. Eles podem elaborar problemas como:
  - Em uma sessão de cinema, foram vendidos **x** ingressos de valor inteiro, que custam R$ 16,00 cada, e **y** ingressos de meia-entrada, que custam R$ 8,00 cada. Escreva uma expressão que represente o valor total arrecadado nesse dia e calcule o valor numérico dessa expressão para $x = 50$ e $y = 40$.
    R $16x + 8y$; 1 120

- Na atividade **4**, questione os alunos sobre o que significa 250 na expressão algébrica $250 + 12p$. Espera-se que eles percebam que esse valor corresponde à quantia dada de entrada na compra da máquina de lavar roupas.

- Verifique se os alunos perceberam que os monômios apresentados nos itens **c** e **e** no destaque da teoria têm coeficientes iguais a 1. Se julgar necessário, peça para escreverem esses monômios com o coeficiente. No caso do item **b**, o monômio é considerado nulo e, no item **a**, é um monômio sem parte literal.
- Ao explicar aos alunos o que são monômios semelhantes, aproveite a oportunidade e peça para que eles digam oralmente ou escrevam na lousa pares de monômios semelhantes, de modo a verificar a compreensão do assunto.
- Ao trabalhar com a questão da teoria proposta nessa página, escreva na lousa algumas respostas diferentes para que os alunos vejam variadas maneiras de representar um monômio com coeficiente 3 e grau 6.

Monômios

A figura ao lado representa um terreno em forma de retângulo.



Podemos representar a medida da área desse terreno por meio de uma expressão algébrica.

$3xy$

Esse tipo de expressão algébrica é chamado **monômio.**

Em geral, para representar um monômio, não utilizamos o símbolo · ou x.
O monômio $3 \cdot x \cdot y$, por exemplo, pode ser indicado por $3xy$.

Os **monômios** são expressões algébricas formadas por um único **termo**. Esse termo, em geral, é constituído de duas partes: um número, chamado **coeficiente**, e uma variável ou um produto de variáveis, chamado **parte literal**.

Exemplos:

$2x$: coeficiente 2, parte literal x

$-5x^2y$: coeficiente -5, parte literal x^2y

Veja outros exemplos de monômios.

a) 9 **b)** 0 **c)** xy^2z^3 **d)** $-7x$ **e)** xy **f)** $-\frac{1}{3}y$

Agora, observe os monômios.

$8x^2y$ x^2y $21x^2y$ $-x^2y$ $\frac{x^2y}{4}$ $-17x^2y$

Note que esses monômios possuem a mesma parte literal (x^2y). Assim, dizemos que esses são **monômios semelhantes**.

Podemos indicar o **grau de um monômio** adicionando os expoentes das variáveis. O monômio $-3a^2b^4c$, por exemplo, tem grau 7, pois $2 + 4 + 1 = 7$.

Veja outros dois exemplos.

- $23x^3y^2$
  Monômio de grau 5 ou de 5º grau, pois $3 + 2 = 5$.
- $-5abc$
  Monômio de grau 3 ou de 3º grau, pois $1 + 1 + 1 = 3$.

- Monômios que apresentam a mesma parte literal são chamados **monômios semelhantes**.
- O **grau de um monômio** de coeficiente não nulo é dado pela soma dos expoentes das variáveis. O grau de um monômio representado apenas por um número não nulo é zero.

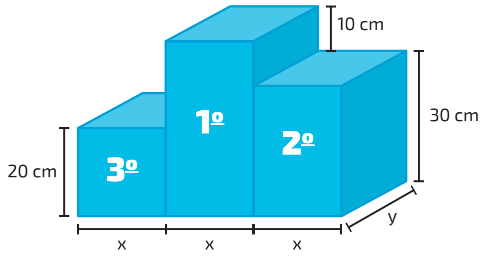
Escreva um monômio que tenha coeficiente 3 e grau 6.
Resposta pessoal. Possível resposta: $3x^5y$

Material digital

- No material digital, é apresentado um **Plano de desenvolvimento** para o 2º bimestre capaz de auxiliar nos planejamentos e desenvolvimentos das aulas, em que são descritos em um quadro os objetivos específicos, os objetos de conhecimento e as habilidades específicas **EF08MA06**, **EF08MA07**, **EF08MA08**, **EF08MA09**, **EF08MA10**, **EF08MA11** e **EF08MA18**, previstas para os capítulos **4**, **5** e **6** sugeridos para esse período.
Além disso, são elencadas as principais práticas didático-pedagógicas e atividades recorrentes previstas para o conteúdo abordado nesse bimestre.

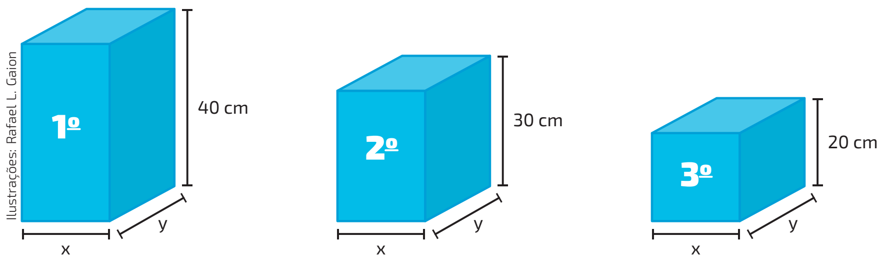
Adição e subtração com monômios

Um pódio foi construído com três peças de concreto maciço em formato de paralelepípedo retângulo, como mostra a figura.



Qual é a medida do volume de concreto utilizado na construção desse pódio?

Para responder a essa questão, vamos calcular inicialmente a medida do volume de cada peça que compõe o pódio.



$V_{1^a} = 40xy$ $V_{2^a} = 30xy$ $V_{3^a} = 20xy$

Agora, adicionamos a medida do volume das três peças.

$$V_{pódio} = V_{1^a} + V_{2^a} + V_{3^a} = 40xy + 30xy + 20xy = (40 + 30 + 20) \cdot xy = 90xy$$

Portanto, a medida do volume de concreto utilizado é dada por 90xy.

Simplificamos uma expressão algébrica em que aparecem monômios semelhantes adicionando ou subtraindo os coeficientes e preservando a parte literal. Exemplos:

- $12ab^2 + 3ab^2 - 6ab^2 = (12 + 3 - 6) \cdot ab^2 = 9ab^2$
- $-6x^3y^4 + 4x^3y^4 - 12x^3y^4 + x^3y^4 = (-6 + 4 - 12 + 1) \cdot x^3y^4 = -13x^3y^4$
- $\frac{1}{4}abc - \frac{3}{4}abc + \frac{7}{4}abc = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right) \cdot abc = \frac{5}{4}abc$

Em cada item, para simplificar a expressão, utilizamos a **propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição**.

Escreva uma adição de monômios cujo resultado seja $5a^2b$.
Resposta pessoal. Possível resposta: $2a^2b + 3a^2b$

- Lembre os alunos de que a medida do volume de um paralelepípedo retângulo é dada pelo produto das medidas de suas dimensões.
- Para que eles compreendam melhor os conceitos de adição e subtração de monômios, lembre-os da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e a subtração. Para isso, apresente alguns exemplos numéricos, como:
$5 \cdot (8 + 2 - 4) =$
$= 5 \cdot 8 + 5 \cdot 2 - 5 \cdot 4 =$
$= 40 + 10 - 20 = 30$

- Na atividade **8**, verifique se os alunos simplificaram as expressões escritas em cada item.
- Ao abordar a atividade **12**, questione os alunos se os monômios obtidos em cada composição são semelhantes.
- Aproveite o trabalho com a atividade **13** para avaliar os alunos acerca da interpretação de texto e imagens. Eles podem elaborar problemas como:
  - Escreva uma expressão algébrica que represente a medida do perímetro de cada figura, simplifique-a e calcule o valor numérico de cada expressão para $x = 3{,}5$, $a = 2$ e $b = 4{,}2$.
  - R 11x e 25, 3ab; 38,5 e 212,52
- Na atividade **14**, verifique as estratégias utilizadas pelos alunos em suas resoluções e, caso julgue necessário, oriente-os a resolverem utilizando as operações inversas, de acordo com cada caso. No item **a**, por exemplo, é possível obter o monômio realizando a subtração $138{,}9mn - 107mn = 31{,}9mn$, logo $107mn + 31{,}9mn = 138{,}9mn$.

Atividades

Anote no caderno

7. Identifique o coeficiente e a parte literal de cada monômio.

a) $3xy$ 3; xy

b) $\frac{1}{6}x^2$ $\frac{1}{6}$; x^2

c) x^3yz^2 1; x^3yz^2

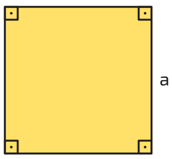
d) $3\sqrt{5}x$ $3\sqrt{5}$; x

e) $-15w^2$ -15; w^2

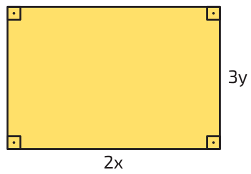
f) a 1; a

8. Represente, por meio de uma expressão algébrica, a medida do perímetro de cada figura.

a) 4a



b) 4x + 6y



Ilustrações: Ronaldo Lucena

Qual dessas expressões, em sua forma simplificada, é um monômio? 4a

9. Em cada item, determine o valor de cada ■ de forma que os pares de monômios sejam semelhantes.

a) $5x^3y^{■}$ e $\frac{1}{4}x^3y^6$ 6

b) $0{,}3x^{■}z^4$ e $-\frac{5}{8}x^5z^4$ 5

c) $-\frac{4}{3}x^{■}y^8$ e $\frac{3}{4}xy^{■}$ 1; 8

d) $1{,}5y^7z^{■}$ e $-2y^{■}z^4$ 4; 7

10. Escreva o grau de cada monômio.

a) $22n$ 1º grau

b) $3{,}9xy^2$ 3º grau

c) $5abc$ 3º grau

d) $10x^3z^3$ 6º grau

e) $1{,}4x^9$ 9º grau

f) $\frac{1}{7}a^2b^5$ 7º grau

11. Simplifique as expressões algébricas.

a) $x + x + x$ 3x

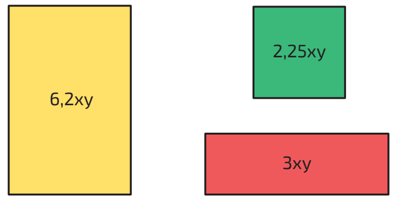
b) $3y + y$ 4y

c) $2ab^2c + 5ab^2c + ab^2c$ $8ab^2c$

d) $40x^2 - 25x^2$ $15x^2$

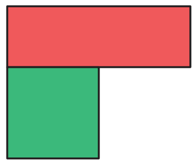
e) $23{,}4xy^3z - 8{,}9xy^3z + 2{,}5xy^3z$ $17xy^3z$

12. Os monômios indicados no interior das figuras representam a medida da área de cada uma delas.

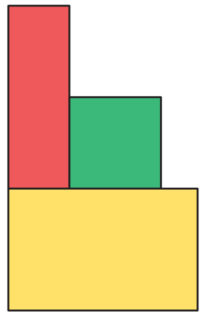


Agora, determine o monômio que representa a medida da área total de cada composição.

a) 5,25xy



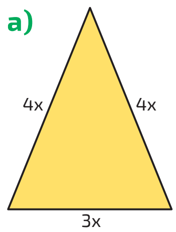
b) 11,45xy



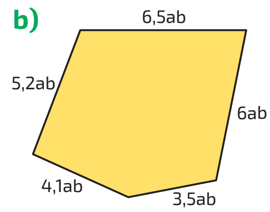
Ilustrações: Ronaldo Lucena

13. Para cada uma das figuras a seguir escreva um problema relacionando o monômio que representa a medida do perímetro da figura e o valor numérico desse monômio para determinado valor da variável. Em seguida, peça a um colega que o resolva e verifique se ele resolveu corretamente. Resposta pessoal.

a)



b)



Ilustrações: Ronaldo Lucena

14. Determine o monômio que:

a) somado com 107mn tem como resultado 138,9mn. 31,9mn

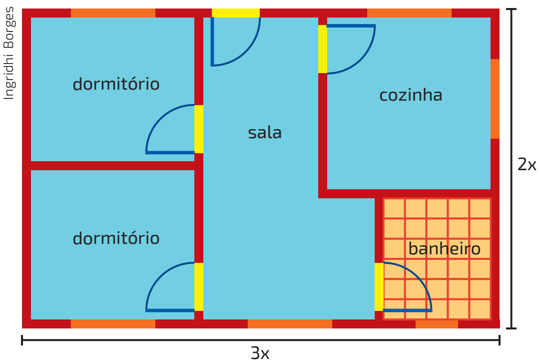
b) subtraído de $\frac{5}{7}y^5$ resulta em $\frac{3}{7}y^5$. $\frac{2}{7}y^5$

c) subtraído de $-7{,}1ab^2$ resulta em $-10{,}5ab^2$. $3{,}4ab^2$

Multiplicação e divisão com monômios

Multiplicação com monômios

A figura ao lado representa a planta baixa de uma casa e tem formato retangular.



Ingridhi Borges

Para calcular a medida da área ocupada por essa casa, vamos multiplicar os monômios que representam as medidas do comprimento e da largura da casa.

$$A = 3x \cdot 2x$$

$$A = \underbrace{3 \cdot 2}_{6} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{x^{1+1} = x^2}$$

$$A = 6x^2$$

Portanto, a medida da área ocupada por essa casa é dada por $6x^2$.

Para determinar o produto de monômios, multiplicamos os coeficientes e, depois, as variáveis da parte literal. Exemplos:

- $8a^7 \cdot 3 = 8 \cdot 3 \cdot a^7 = 24a^7$
- $5ab^2 \cdot 4a^3b = 5 \cdot 4 \cdot a \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot b = 20a^4b^3$
- $-6x^2 \cdot 3xy \cdot 2y = -6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y = -36x^3y^2$

Para simplificar as expressões, utilizamos a **propriedade comutativa da multiplicação** e a **propriedade da multiplicação de potências de mesma base**.

Divisão com monômios

Para resolver a expressão $18x^5y^7 : 6x^2y$, Janaína a escreveu, inicialmente, na forma de fração e, depois, efetuou os cálculos.

$$18x^5y^7 : 6x^2y = \frac{18x^5y^7}{6x^2y} = \frac{18}{6} \cdot \frac{x^5y^7}{x^2y} = 3x^{5-2}y^{7-1} = 3x^3y^6$$

Para determinar o quociente de monômios, dividimos os coeficientes e, depois, as variáveis da parte literal. Exemplos:

- $12a^5 : 4a^2 = \frac{12a^5}{4a^2} = \frac{12}{4} \cdot \frac{a^5}{a^2} = 3 \cdot a^{5-2} = 3a^3$
- $63x^4y^3 : 9xy = \frac{63x^4y^3}{9xy} = \frac{63}{9} \cdot \frac{x^4y^3}{xy} = 7 \cdot x^{4-1} \cdot y^{3-1} = 7x^3y^2$

Para simplificar as expressões, utilizamos a **propriedade da divisão de potências de mesma base**.

Determine possíveis medidas para o comprimento dos lados de um retângulo cuja medida da área seja:

a) $15x^2$. Resposta pessoal. Possível resposta: $3x$ e $5x$.

b) $80abc$. Resposta pessoal. Possível resposta: $8abc$ e 10.

- Lembre os alunos de que a planta baixa é um desenho que representa a construção observada do alto, considerando um corte horizontal e a retirada da parte de cima dessa construção.
- Ao trabalhar o conceito de multiplicações com monômios, lembre os alunos de que as seguintes propriedades da multiplicação são válidas:
  - comutativa - ao mudarmos a ordem dos fatores, o produto não se altera, por exemplo:

    $$\underbrace{7 \cdot (-5)}_{-35} = \underbrace{(-5) \cdot 7}_{-35}$$

  - associativa - em uma multiplicação de três ou mais fatores, podemos associar esses fatores de maneiras diferentes e o resultado não se altera, por exemplo:

    $$\underbrace{12 \cdot 7}_{84} \cdot (-5) =$$
    $$= 84 \cdot (-5) = -420$$
    $$12 \cdot \underbrace{7 \cdot (-5)}_{-35} =$$
    $$= 12 \cdot (-35) = -420$$

- Apresente alguns exemplos numéricos a fim de auxiliar os alunos a recordarem as propriedades de potenciação citadas no trabalho com multiplicação e divisão de monômios.

77

BNCC em foco

- O trabalho com a atividade **19** propõe a elaboração de um problema, contemplando a habilidade **EF08MA06** da BNCC.

- Aproveite o trabalho com a atividade **19** para avaliar os alunos com relação à leitura e interpretação de imagem para a elaboração de problemas.
  Eles podem elaborar problemas como:
  - Quantos cubos cabem na caixa?
    R 60 cubos
- Verifique as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução da atividade **21**, pois nos itens **a**, **b** e **d** eles podem realizar a divisão do dividendo pelo quociente para obter o divisor. E, no item **c**, podem multiplicar o quociente pelo divisor para obter o dividendo. Nesse mesmo sentido, oriente-os na resolução da atividade **22**.

Atividades

Anote no caderno

15. Escreva um monômio que represente o resultado de cada cálculo.

a) $2x \cdot 3y$ $6xy$

b) $3x^2 \cdot 5xy$ $15x^3y$

c) $2ab \cdot 5bc$ $10ab^2c$

d) $4a^2 \cdot 7$ $28a^2$

e) $8x^2 : 4x$ $2x$

f) $15a^4b^3c : 3a^2b$ $5a^2b^2c$

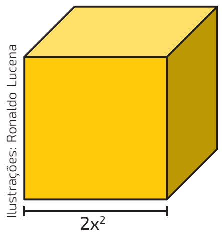
g) $4{,}5xy : 1{,}5x$ $3y$

h) $36ab : 9$ $4ab$

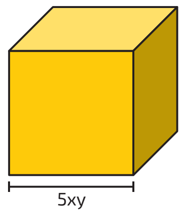
16. Represente por um monômio a medida da área de um quadrado com medida do comprimento do lado igual a $2xy^2$. $4x^2y^4$

17. Escreva um monômio que representa a medida do volume de cada cubo.

a) $8x^6$



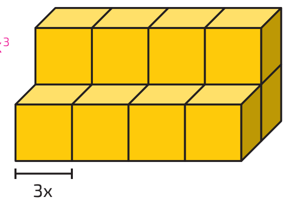
b) $125x^3y^3$



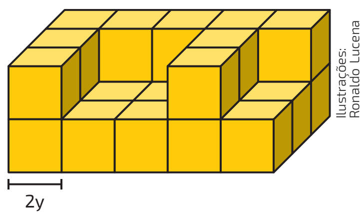
Agora, indique o grau de cada um dos monômios que você escreveu.
a: 6º grau; b: 6º grau

18. Cada pilha a seguir é composta de cubos idênticos. Escreva um monômio que represente a medida do volume de cada pilha.

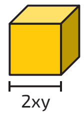
a) $324x^3$



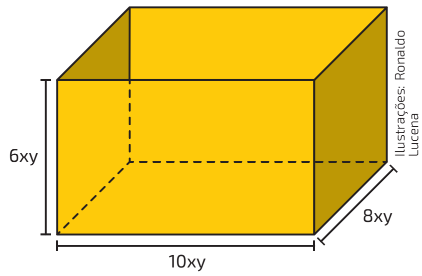
b) $192y^3$



19. Determine o monômio que representa a medida do volume do cubo. $8x^3y^3$



Agora, elabore um problema que relaciona a medida do volume do cubo e a caixa representada a seguir e dê para um colega resolver. Depois, confira a resposta do seu colega. Resposta pessoal.



20. Escreva uma divisão de monômios cujo resultado seja: Resposta pessoal. Possível resposta:

a) $3x^2$. $6x^3 : 2x$

b) $4x^3y^2z$. $16x^4y^2z : 4x$

21. Em cada item, sem efetuar cálculos por escrito ou na calculadora, determine o monômio que cada ■ representa.

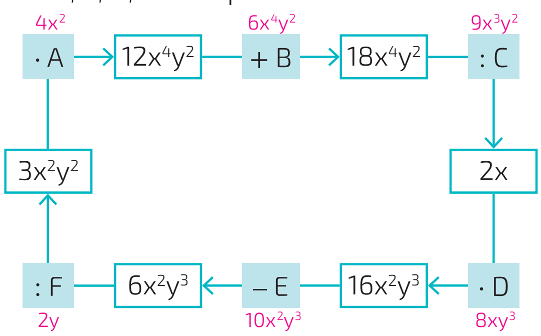
a) $4x^3 : ■ = 2x$ $2x^2$

b) $6a^2b^2 : ■ = 2ab$ $3ab$

c) $■ : 2x = 4xy$ $8x^2y$

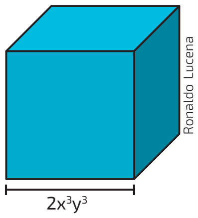
d) $14xy : ■ = 7$ $2xy$

22. Determine o monômio que as letras **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** representam.



Potenciação com monômios

A figura abaixo representa um cubo.



Podemos escrever uma expressão que representa a medida do volume desse cubo por meio da potência $(2x^3y^2)^3$. Simplificando essa expressão, temos:

$$(2x^3y^2)^3 = 2^3 \cdot (x^3)^3 \cdot (y^2)^3 = 8 \cdot x^{3 \cdot 3} \cdot y^{2 \cdot 3} = 8x^9y^6$$

Para calcular uma potência cuja base é um monômio, elevamos o coeficiente e cada uma das variáveis da parte literal ao expoente dado.

Exemplos:

- $(3x^5)^2 = 3^2 \cdot (x^5)^2 = 9 \cdot x^{5 \cdot 2} = 9x^{10}$
- $(3x^3y^4)^5 = 3^5 \cdot (x^3)^5 \cdot (y^4)^5 = 243 \cdot x^{3 \cdot 5} \cdot y^{4 \cdot 5} = 243x^{15}y^{20}$

Para simplificar as expressões, utilizamos a **propriedade da multiplicação de dois ou mais fatores elevada a um expoente** e a **propriedade de uma potência elevada a um expoente**:

- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

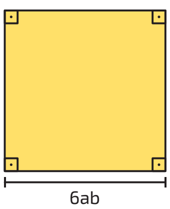
Atividades

Anote no caderno

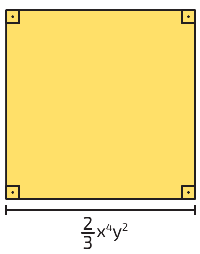
23. Efetue os cálculos.

a) $(3x^2)^3$ $27x^6$ **b)** $(2a^2b^3)^4$ $16a^8b^{12}$ **c)** $\left(\frac{1}{2}y^5\right)^2$ $\frac{1}{4}y^{10}$ **d)** $(5a^4)^3$ $125a^{12}$ **e)** $(3t^2u)^5$ $243t^{10}u^5$ **f)** $(4y^5z^3)^3$ $64y^{15}z^9$

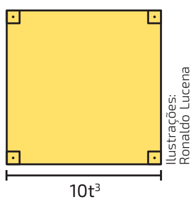
24. Indique a medida da área de cada quadrado escrevendo uma potência de monômios. Depois, calcule as potências que você escreveu.

a) 

$(6ab)^2$; $36a^2b^2$

b) 

$\left(\frac{2}{3}x^4y^2\right)^2$; $\frac{4}{9}x^8y^4$

c) 

$(10t^3)^2$; $100t^6$

25. Sabendo que $A = 2a$, $B = 3a^3$ e $C = 6a^2$, calcule:

a) $A \cdot B$ $6a^4$ **b)** $B : C$ $\frac{1}{2}a$ **c)** $\left(\frac{C}{A}\right)^3$ $27a^3$ **d)** $2A \cdot 2B$ $24a^4$ **e)** $(5C)^2$ $900a^4$

Avaliação

- Antes de iniciar o trabalho com o tópico **Potenciação com monômios**, avalie o conhecimento dos alunos com relação ao cálculo de potências. Para isso, apresente algumas potências para que eles calculem e, em seguida, faça a correção com toda a turma, esclarecendo as dúvidas que surgirem.

- Mostre alguns exemplos numéricos para lembrar os alunos das propriedades das potências apresentadas.

BNCC em foco

- O trabalho com o tópico **Sequências** proporciona aos alunos a identificação de regularidades em sequências numéricas ou figurais recursivas e não recursivas, além de capacitá-los na construção de algoritmos por meio de um fluxograma que possibilite indicar os números ou as figuras seguintes, contemplando, desse modo, as habilidades **EF08MA10** e **EF08MA11** da BNCC.

Material digital

- Para complementar o trabalho com o tópico **Sequências**, no material digital dessa coleção, disponibilizamos a **Sequência didática 4**, elaborada com objetivo de desenvolver as habilidades **EF08MA10** e **EF08MA11**. As atividades propostas nessa sequência possibilitam identificar a regularidade de uma sequência numérica, além de permitir reconhecer sequências recursivas e não recursivas.

Sequências

Já estudamos que uma sequência é definida de acordo com seus elementos e a ordem em que eles aparecem. As sequências podem ser constituídas por figuras, letras, números, entre outros elementos, e podem ser finitas ou infinitas. Quando uma sequência possui uma regra de formação, ou seja, a obtenção de cada um de seus termos obedece a determinado padrão ou regra, podemos obter os próximos termos.

> Lembre-se de que, em uma sequência, cada elemento chama-se **termo**.

Vimos também que uma sequência pode ser definida de maneira **recursiva**, ou seja, quando a obtenção de um termo qualquer depende de termos anteriores a ele, ou então por meio de seu **termo geral**.

Vamos definir recursivamente a sequência numérica (7, 9, 11, 13 ...). Note que o primeiro termo é igual a 7, e cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior mais 2. Assim:

$$a_1 = 7$$
$$a_n = a_{n-1} + 2\text{, para } n > 1$$

> Lembre-se de que representamos os termos de uma sequência por uma letra e um índice. Por exemplo, o primeiro termo representamos por a_1, o segundo termo por a_2, o terceiro por a_3, e assim por diante. Representamos um termo qualquer da sequência por a_n, em que **n** é um número natural não nulo.

Também podemos indicar como determinar os termos dessa sequência por meio do fluxograma a seguir.

Início. → Considere o termo da sequência anterior ao termo que pretende determinar. → Adicione 2 ao termo considerado no passo anterior. → O resultado é o termo que se pretende determinar. → Fim.

Agora, considere a sequência numérica (1, 4, 9, 16, 25, 36 ...). Note que, nessa sequência, cada termo é igual ao quadrado da posição que ele ocupa. Essa sequência pode ser definida por meio do seu termo geral, que é dado por $a_n = n^2$.

> O termo geral de uma sequência nos permite obter qualquer um de seus termos a partir da posição **n** que ele ocupa. Por exemplo, o décimo termo da sequência acima é igual a 100, pois $a_{10} = 10^2 = 100$.

Veja como obter os termos dessa sequência por meio do fluxograma a seguir.

Início. → Considere a posição **n** do termo da sequência que pretende determinar. → Calcule o quadrado do número referente à posição do termo, ou seja, calcule n^2. → O resultado é o termo que se pretende determinar. → Fim.

80

Respostas

28. Possível resposta:

Início. → Considere o termo da sequência, anterior ao termo que pretende determinar. → Multiplique por 5 o termo considerado no passo anterior. → O resultado é o termo que se pretende determinar. → Fim.

Atividades

Anote no caderno

26. Determine os próximos três termos de cada sequência a seguir.

a) (3, 7, 11, 15 ...) 19, 23, 27 **b)** (4, 8, 12, 16 ...) 20, 24, 28 **c)** (2, 10, 18, 26 ...) 34, 42, 50

Agora para cada item construa um fluxograma por meio do qual seja possível obter os termos da sequência.

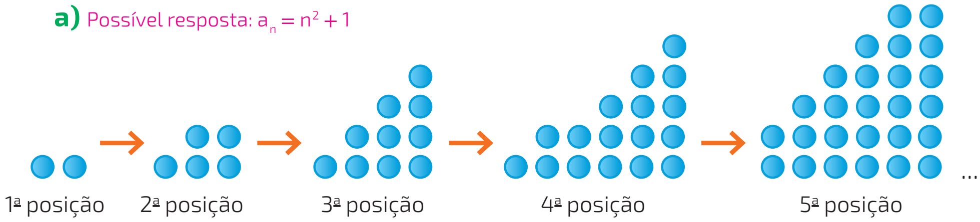
Possível resposta: a) Início. → Considere o termo da sequência anterior ao termo que pretende determinar. → Adicione 4 ao termo considerado no passo anterior. → O resultado é o termo que se pretende determinar. → Fim.

26. b) Possível resposta: Início. → Considere a posição **n** do termo da sequência que pretende determinar. → Calcule o quádruplo do número referente à posição do termo, ou seja, calcule 4n. → O resultado é o termo que se pretende determinar. → Fim.

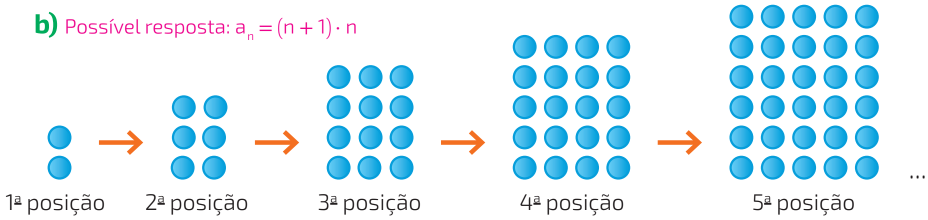
26. c) Possível resposta: Início. → Considere o termo da sequência anterior ao termo que pretende determinar. → Adicione 8 ao termo considerado no passo anterior. → O resultado é o termo que se pretende determinar. → Fim.

27. Em cada item, escreva o termo geral da sequência que indica a quantidade de ● em cada figura da sequência de imagens de acordo com sua posição.

a) Possível resposta: $a_n = n^2 + 1$



b) Possível resposta: $a_n = (n + 1) \cdot n$



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Agora, construa para cada item um fluxograma para obter qualquer termo da sequência de acordo com sua posição.

27. a) Possível resposta: Início. → Considere a posição **n** do termo da sequência que pretende determinar. → Calcule o quadrado do número referente à posição do termo e adicione 1, ou seja, calcule $n^2 + 1$. → O resultado é o termo que se pretende determinar. → Fim.

27. b) Possível resposta: Início. → Considere a posição **n** do termo da sequência que pretende determinar. → Calcule o quadrado do número referente à posição do termo e adicione o número referente à posição, ou seja, calcule $n^2 + n$. → O resultado é o termo que se pretende determinar. → Fim.

28. Escreva os 6 primeiros termos da sequência definida por $a_1 = 10$ e $a_n = a_{n-1} \cdot 5$, para $n > 1$. Depois, construa um fluxograma para obter um termo dessa sequência. 10, 50, 250, 1 250, 6 250, 31 250

Respostas nas orientações ao professor.

29. Observe a sequência.

$$(3x^2, 6x^5, 12x^8, 24x^{11}...)$$

a) Que regularidade você pôde observar nessa sequência?
Possível resposta: de um monômio para o seguinte, o coeficiente dobra e o expoente da variável aumenta três unidades.

b) Escreva os dois próximos termos dessa sequência.
$48x^{14}$ e $96x^{17}$

c) Com exceção do 1º, divida cada termo da sequência pelo anterior. O que você pôde observar? Resposta pessoal: espera-se que os alunos respondam que os resultados são sempre iguais a $2x^3$.

d) Defina essa sequência de maneira recursiva.
$a_1 = 3x^2$ e $a_n = a_{n-1} \cdot 2x^3$, para $n > 1$

30. Defina o termo geral da sequência (4, 7, 10, 13 ...). Depois, construa um fluxograma com o passo a passo para obter um termo qualquer dessa sequência.
Resposta nas orientações ao professor.

31. Escreva os três próximos termos de cada sequência.

a) $(2x, 4x^2, 8x^3, 16x^4...)$ $32x^5, 64x^6, 128x^7$

b) $(x^3y^2, x^6y^4, x^{12}y^8, x^{24}y^{16}...)$ $x^{48}y^{32}, x^{96}y^{64}, x^{192}y^{128}$

- Oriente os alunos na construção dos fluxogramas solicitados nas atividades dessa página, aproveitando para avaliá-los com relação à transcrição do pensamento matemático para língua materna.
- Peça aos alunos que obtenham a quantidade de bolinhas dos próximos três termos de cada sequência apresentada na atividade **27**, pedindo para que calculem de acordo com o termo geral obtido por eles em cada sequência.

BNCC em foco

- Nas atividades propostas nessa página os alunos deverão identificar regularidades nas sequências propostas, desse modo é possível desenvolver a curiosidade intelectual, a investigação, a análise crítica na elaboração de hipóteses para resolver problemas e propor soluções, contemplando a **Competência geral 2**. Além disso, a **Competência geral 4** é contemplada nessa página, pois os alunos são solicitados a expressar suas respostas por meio da linguagem escrita e visual, ao construírem fluxogramas, a fim de que partilhem informações e ideias, objetivando alcançar o entendimento mútuo.

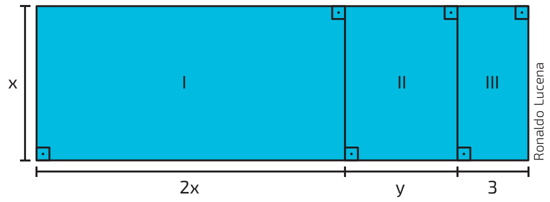
30. $a_n = 3n + 1$

Início. → Considere a posição **n** do termo da sequência que pretende determinar. → Calcule o triplo do número referente à posição do termo e adicione 1, ou seja, calcule 3n + 1. → O resultado é o termo que se pretende determinar. → Fim.

- Ao apresentar o tópico **Polinômios**, certifique-se de que os alunos compreenderam que um polinômio reduzido é aquele que não tem termos semelhantes em sua representação.
- Após trabalhar com a simplificação de polinômios, apresente outros polinômios para os alunos reduzirem.

Polinômios

Para montar uma loja, Renato dividiu um salão em três partes, como mostra a figura.



Veja a seguir uma expressão algébrica que representa a medida da área do salão após a divisão.

$$\underbrace{2x^2}_{\text{parte I}} + \underbrace{xy}_{\text{parte II}} + \underbrace{3x}_{\text{parte III}}$$

A expressão algébrica que representa a medida da área total do salão é um **polinômio**.

Os **polinômios** são expressões algébricas formadas pela adição algébrica de monômios, sendo cada monômio um **termo** do polinômio.

Dependendo da quantidade de termos, um polinômio recebe um nome particular. Os polinômios que possuem um termo são os monômios, os que possuem dois termos, binômios, e os que possuem três termos, trinômios.

As expressões algébricas que possuem mais de três termos não recebem nomes particulares.

Veja alguns exemplos de polinômios.

- $\dfrac{xy^3}{2}$ (monômio)
- $x + 15$ (binômio)
- $a^2 - b^2$ (binômio)
- $9x^8 + 7x - 1$ (trinômio)
- $x^2y - y^2 + 3x$ (trinômio)
- $a + b - c - 4$ (polinômio)

O polinômio 0 é chamado **polinômio nulo**.

Simplificação de polinômios

É possível simplificar um polinômio que apresenta monômios semelhantes em sua escrita.

Vamos simplificar o polinômio $5x^2y^3 - 4x^2 + 3x \cdot (x - 2) - 2x^2y^3 + 3 + x^2$.

$5x^2y^3 - 4x^2 + 3x \cdot (x - 2) - 2x^2y^3 + 3 + x^2 =$

Aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação para eliminar os parênteses.

$= 5x^2y^3 - 4x^2 + 3x^2 - 6x - 2x^2y^3 + 3 + x^2 =$

$= 5x^2y^3 - 2x^2y^3 - 4x^2 + 3x^2 + x^2 - 6x + 3 =$

$= (5 - 2) \cdot x^2y^3 + (-4 + 3 + 1) \cdot x^2 - 6x + 3 =$

$= 3x^2y^3 + 0x^2 - 6x + 3 =$

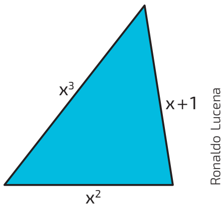
$= 3x^2y^3 - 6x + 3$

Organizamos os monômios semelhantes lado a lado e efetuamos as adições e subtrações.

O polinômio $3x^2y^3 - 6x + 3$ é um **polinômio reduzido**.

Agora, veja o polinômio que representa a medida do perímetro do triângulo ao lado.

$$x^3 + x^2 + x + 1$$



Nesse polinômio, a única variável é **x**. Dizemos que esse é **um polinômio com uma única variável**. Veja outros exemplos de polinômios com essa característica.

$2y^3 - y^2 + 15y$ — variável **y**

$7a^6 - 3a^4 + a^2 + 5a + 34$ — variável **a**

Grau de um polinômio

Veja como podemos indicar o grau do polinômio reduzido $x^5 - 8x^2y + 2x^3y^4$. Inicialmente, indicamos o grau de cada termo do polinômio.

- $x^5 \rightarrow$ 5º grau
- $-8x^2y \rightarrow$ 3º grau, pois $2 + 1 = 3$
- $2x^3y^4 \rightarrow$ 7º grau, pois $3 + 4 = 7$

O grau de um polinômio é dado pelo termo de maior grau. Assim, o polinômio $x^5 - 8x^2y + 2x^3y^4$ é do 7º grau ou de grau 7.

Agora, vamos indicar o grau do polinômio $ab^3 + 23a^2b^2 - 14a^3b^2$.

- $ab^3 \rightarrow$ 4º grau, pois $1 + 3 = 4$
- $23a^2b^2 \rightarrow$ 4º grau, pois $2 + 2 = 4$
- $-14a^3b^2 \rightarrow$ 5º grau, pois $3 + 2 = 5$

Assim, o polinômio $ab^3 + 23a^2b^2 - 14a^3b^2$ é do 5º grau.

> O **grau de um polinômio** de coeficientes não nulos escritos na forma reduzida corresponde ao do termo de maior grau. Não se define o grau do polinômio nulo.

Qual é o grau do polinômio $6a^2b^4 - 8a^3b$? 6º grau

Atividades

Anote no caderno

32. Classifique cada polinômio em monômio, binômio ou trinômio.

a) $3x - 2y^2$ binômio

b) $4x^4y^3z$ monômio

c) $\frac{5}{2} + 7xy - 4x$ trinômio

d) 56 monômio

e) $3x^5 - 10y + \frac{1}{6}z$ trinômio

f) $8xy^4 + 5$ binômio

33. Simplifique os polinômios à forma reduzida.

a) $10x^2 + 7xy + 4xy - 10x^2$ $11xy$

b) $5a^3 + 2b^5 - 6 + c^2 - 3a^3 + 4$
$2a^3 + 2b^5 + c^2 - 2$

c) $3 \cdot (4a - b) + 2a + 5b - 6$ $14a + 2b - 6$

d) $x \cdot (2x + 3y) - 11 \cdot (xy + 2y) + 2x^2$
$4x^2 - 8xy - 22y$

34. Gustavo foi ao supermercado e comprou **x** kg de arroz, **y** kg de feijão e **z** kg de laranja. Escreva um polinômio para representar o total gasto nessa compra, sabendo que Gustavo pagou R$ 3,90 por quilograma de arroz, R$ 6,10 por quilograma de feijão e R$ 3,20 por quilograma de laranja. $3{,}90x + 6{,}10y + 3{,}20z$

- Peça para os alunos escreverem no caderno alguns polinômios com uma única variável.
- No estudo do tópico **Grau de um polinômio**, reforce que, antes de indicar o grau de um polinômio, deve-se obter a sua forma reduzida.
- Na atividade **33**, caso julgue necessário, peça para os alunos escreverem o grau de cada polinômio.
- Complemente a atividade **34** com a seguinte questão:
  - Quantos reais Gustavo pagará ao comprar 5 kg de arroz, 2 kg de feijão e 3 kg de laranja? R R$ 41,30

- Para complementar a atividade **35**, proponha a questão abaixo aos alunos:
  - Quanto Marcela receberá por uma encomenda de 2 kg de bolo, 300 salgadinhos e 100 docinhos? R R\$ 326,00
- Ao abordar o item **b** da atividade **36**, caso necessário, relembre os alunos como realizar a subtração de frações.

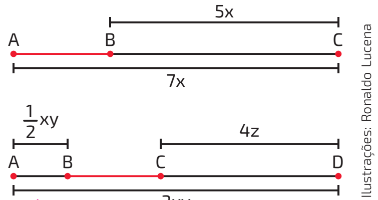
BNCC em foco

- As atividades **37** e **40** propõem aos alunos o trabalho com o valor numérico de polinômio, contemplando, a habilidade **EF08MA06** da BNCC.

- Avalie a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática e trabalhar com a página **293**, da seção **Explorando tecnologias**, na qual apresentamos uma maneira de obter o valor numérico de um polinômio utilizando uma planilha eletrônica.
- Na atividade **41**, os alunos podem elaborar problemas como:
  - Sabendo que a idade do pai de Juliano é 42 anos, qual é a idade de Juliano? R 12 anos

35. Marcela preparou para vender **x** kg de bolo, **y** centenas de salgadinhos e **z** centenas de docinhos para uma festa de aniversário. Sabendo que um quilograma de bolo custa R\$ 50,00, cem salgadinhos custam R\$ 48,00 e cem docinhos, R\$ 82,00, escreva um polinômio que represente a quantia que Marcela deverá receber. $50x + 48y + 82z$

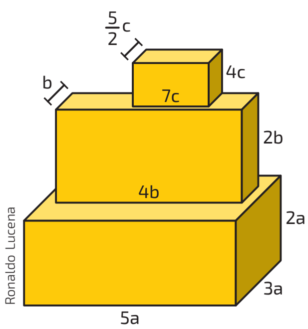
36. Escreva um polinômio para representar a medida do comprimento do segmento de reta em destaque de cada item.



a) $2x$

b) $\frac{5}{2}xy - 4z$

37. A pilha é formada por três paralelepípedos retângulo.



a) Escreva um polinômio que represente a medida do volume dessa pilha. $30a^3 + 8b^3 + 70c^3$

b) Qual é o grau do polinômio que você escreveu no item **a**? 3º grau

c) Calcule a medida do volume dessa pilha para $a = 3$ cm, $b = 2$ cm e $c = 0{,}5$ cm. $882{,}75\ cm^3$

38. Escreva: Resposta pessoal. Possível resposta:

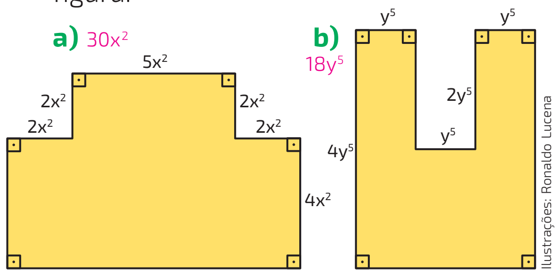
a) um monômio de grau 3. a^2b

b) um trinômio de grau 5. $4a^3 - 3a^2b^3 + 2b$

Compare suas respostas com as de um colega.

39. Escreva o polinômio reduzido que representa a medida do perímetro de cada figura.

a) $30x^2$ **b)** $18y^5$



40. Calcule o valor numérico do polinômio $13x^2 + 8y - 4$ para:

a) $x = 1$ e $y = 2$. 25

b) $x = 2$ e $y = 0$. 48

c) $x = 3$ e $y = -1$. 105

d) $x = -2$ e $y = 3$. 72

Na seção **Explorando tecnologias**, na página **293**, veja como utilizar uma planilha eletrônica para calcular o valor numérico de um polinômio.

41. Juliano tem 9 anos a menos que a metade da idade de seu pai. Escreva um polinômio para representar a idade de Juliano, sabendo que a idade de seu pai é **x** anos. $\frac{x}{2} - 9$

Débora Kamogawa

Elabore um problema envolvendo as idades de Juliano e de seu pai e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se ele resolveu corretamente. Reposta pessoal.

Adição e subtração com polinômios

Adição com polinômios

Observe as figuras ao lado.

Para representar a medida da área das duas figuras juntas, adicionamos os polinômios que representam a medida da área dessas figuras.

$$\underbrace{(5x^2y + 3xy^2)}_{\text{figura 1}} + \underbrace{(x^2y + 2xy^2)}_{\text{figura 2}}$$

Figura 1

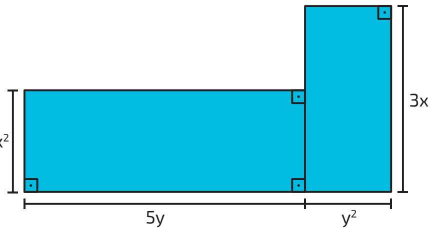
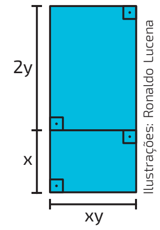


Figura 2



Agora, eliminamos os parênteses, organizamos os termos semelhantes lado a lado e efetuamos as adições.

$$5x^2y + 3xy^2 + x^2y + 2xy^2 = 5x^2y + x^2y + 3xy^2 + 2xy^2 =$$
$$= (5 + 1) \cdot x^2y + (3 + 2) \cdot xy^2 = 6x^2y + 5xy^2$$

Assim o polinômio que representa a medida da área das duas figuras juntas é $6x^2y + 5xy^2$.

Polinômio oposto

Quando adicionamos um polinômio a outro e obtemos o polinômio nulo como resultado, dizemos que esses polinômios são **opostos**. De maneira prática, para obtermos o oposto de um polinômio dado, trocamos o sinal de cada um de seus termos. Veja, por exemplo, o oposto de $5x^2 - 4x + 8$.

$$-(5x^2 - 4x + 8) = \underbrace{-5x^2 + 4x - 8}_{\text{oposto de } 5x^2 - 4x + 8}$$

Observe que ao adicionarmos $5x^2 - 4x + 8$ ao seu oposto, obtemos o polinômio nulo.

$$(5x^2 - 4x + 8) + (-5x^2 + 4x - 8) = 5x^2 - 4x + 8 - 5x^2 + 4x - 8 =$$
$$= (5 - 5) \cdot x^2 + (-4 + 4) \cdot x + 8 - 8 = 0x^2 + 0x + 0 = 0$$

Subtração com polinômios

Outra operação que podemos realizar com os polinômios é a subtração.

Para calcular a subtração $(7y^2 - 12y + 15) - (4y^2 + 16y - 18)$, por exemplo, adicionarmos o 1º polinômio ao oposto do 2º polinômio.

$$(7y^2 - 12y + 15) + \underbrace{(-4y^2 - 16y + 18)}_{\text{oposto de } 4y^2 + 16y - 18} = 7y^2 - 12y + 15 - 4y^2 - 16y + 18 =$$
$$= 7y^2 - 4y^2 - 12y - 16y + 15 + 18 = (7 - 4) \cdot y^2 + (-12 - 16) \cdot y + 15 + 18 =$$
$$= 3y^2 - 28y + 33$$

Qual polinômio adicionamos a $3{,}8y^5 - 6y^4 + 2{,}5y$ para que o resultado seja o polinômio nulo? $-3{,}8y^5 + 6y^4 - 2{,}5y$

- Ao trabalhar com o tópico **Adição com polinômios**, peça aos alunos para calcularem o polinômio que representa a medida da área de cada retângulo que compõe a figura **1** e escreverem uma soma. Oriente-os a realizarem o mesmo procedimento para a figura **2** e, em seguida, executarem a soma das medidas das áreas dessas figuras.
- Antes de iniciar o trabalho com o tópico **Polinômio oposto**, escreva alguns números na lousa e questione os alunos sobre seus opostos.

- Nos itens **b** e **d** da atividade **42**, oriente os alunos na escrita dos polinômios opostos nos casos em que será realizada a subtração.
- Na atividade **43**, verifique se os alunos perceberam que o polinômio a ser adicionado é o polinômio oposto.
- Ao abordar a atividade **45**, lembre os alunos o que é um triângulo equilátero e um triângulo isósceles.

Atividades

Anote no caderno

42. Sabendo que $A = x^3 - 3x^2 + 8x - 7$, $B = 2x^2 + 10$ e $C = 4x^3 + x - 14$, calcule:

a) $A + B$. $x^3 - x^2 + 8x + 3$

b) $A - C$. $-3x^3 - 3x^2 + 7x + 7$

c) $A + B + C$. $5x^3 - x^2 + 9x - 11$

d) $B + C - A$. $3x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

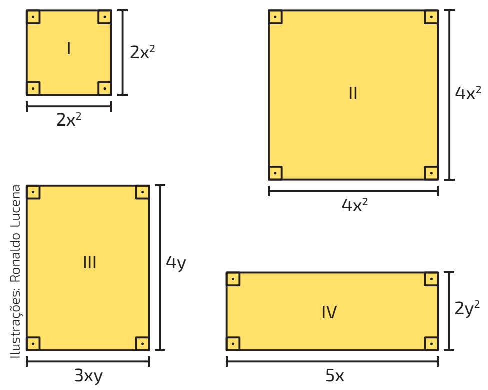
43. Determine o polinômio que deve ser adicionado ao apresentado em cada item para que o resultado seja o polinômio nulo.

a) $4x^3 + 5$ $-4x^3 - 5$

b) $\frac{2}{3}a^2 - a - 30$ $-\frac{2}{3}a^2 + a + 30$

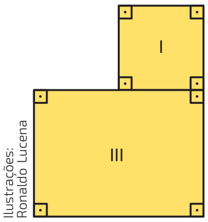
c) $-\frac{2}{11}t^7 + 18t^6 - 3t^5 + t^3 - 14$ $\frac{2}{11}t^7 - 18t^6 + 3t^5 - t^3 + 14$

44. Observe os retângulos a seguir.

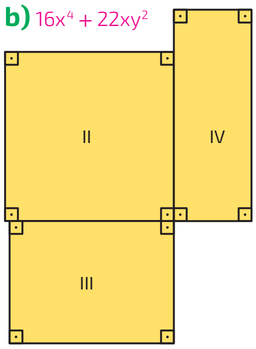


Para cada item determine o polinômio reduzido que representa a medida da área total de cada composição.

a) $4x^4 + 12xy^2$



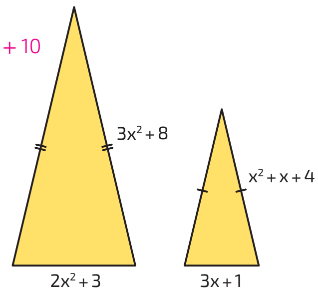
b) $16x^4 + 22xy^2$



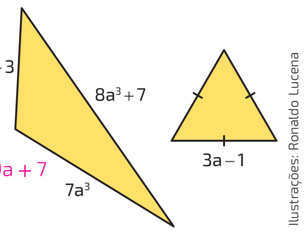
45. Em cada item, escreva um polinômio reduzido que represente a diferença entre as medidas dos perímetros dos triângulos maior e menor.

> Os triângulos do item **a** são isósceles e o triângulo menor do item **b** é equilátero.

a) $6x^2 - 5x + 10$



b) $15a^3 + 6a^2 - 9a + 7$



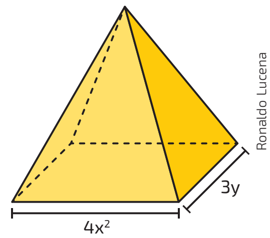
46. Determine qual polinômio deve ser:

a) somado a $3x + 2y - 4$ para que resulte em $3x + 4y - 1$. $2y + 3$

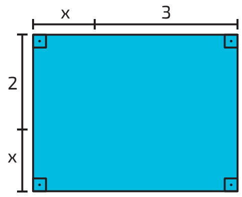
b) subtraído de $9x^2 + 5$ para que resulte em $7x^2 - x$. $2x^2 + x + 5$

c) somado a $5x^5$ para que resulte em $6x^5 - 2x^3 + 4x - 7$. $x^5 - 2x^3 + 4x - 7$

47. A figura ao lado representa uma pirâmide de base retangular. Escreva um polinômio que represente a medida da área total da superfície dessa pirâmide sabendo que duas das faces laterais têm $(7x^2y^2 + 1)$ cm² cada uma e as outras faces laterais, $(8y^2)$ cm² cada uma. $14x^2y^2 + 12x^2y + 16y^2 + 2$



Multiplicação com polinômios

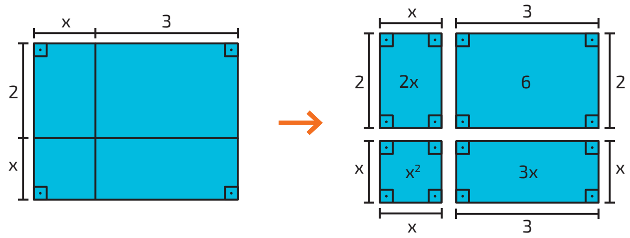


A figura ao lado representa um retângulo.

Podemos determinar um polinômio que represente a medida da área desse retângulo de duas maneiras.

1ª maneira

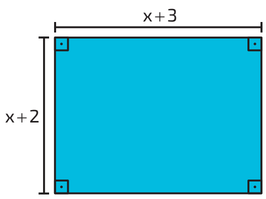
Dividimos o retângulo em quatro partes, calculamos a medida da área de cada uma delas e adicionamos os resultados obtidos.



$$A = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

2ª maneira

Multiplicamos a medida do comprimento dos lados do retângulo. Em seguida, para eliminar os parênteses, utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

$$A = (x + 3) \cdot (x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

Note que tanto na 1ª quanto na 2ª maneira os resultados obtidos são os mesmos.

Assim, o polinômio que representa a medida de área do retângulo é $x^2 + 5x + 6$.

Para determinar o produto de dois polinômios, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação. Para isso, multiplicamos cada termo de um deles por todos os termos do outro e adicionamos os resultados obtidos.

Exemplos:

$$3y^3 \cdot (4y^2 - 2xy + 8) = 3y^3 \cdot 4y^2 + 3y^3 \cdot (-2xy) + 3y^3 \cdot 8 = 12y^5 - 6xy^4 + 24y^3$$

$$(x + 4) \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x^2 - 1) + 4 \cdot (x^2 - 1) = x^3 - x + 4x^2 - 4 = x^3 + 4x^2 - x - 4$$

- Ao trabalhar com o tópico **Multiplicação com polinômios**, lembre os alunos da propriedade distributiva da multiplicação com exemplos numéricos e solicite que realizem cálculos utilizando essa propriedade. Algumas sugestões são:

$$(2 + 3) \cdot (5 + 1) = \underbrace{10}_{2 \cdot 5} + \underbrace{2}_{2 \cdot 1} + \underbrace{15}_{3 \cdot 5} + \underbrace{3}_{3 \cdot 1} = 30$$

$$(5 + 8) \cdot (-10 + 2) = \underbrace{-50}_{5 \cdot (-10)} + \underbrace{10}_{5 \cdot 2} + \underbrace{(-80)}_{8 \cdot (-10)} + \underbrace{16}_{8 \cdot 2} = -104$$

- Nas atividades **50**, **52** e **53**, os alunos serão levados a calcular o valor numérico de polinômios, contemplando a habilidade **EF08MA06** da BNCC.

- Na atividade **52**, os alunos podem representar a medida do comprimento de um lado por $3x$ e do outro, por $2x^2 + 3y$. Assim, o polinômio reduzido que representa a medida da área do retângulo é dada por $6x^3 + 9xy$.
- O valor numérico do polinômio $6x^3 + 9xy$, para $x = 5$ cm e $y = 2$ cm, por exemplo, é 840 cm².
- Na atividade **54**, os alunos podem elaborar um problema como o que segue:
  - Pedro calculou a medida da área de uma figura formada por dois retângulos e obteve o polinômio $2x^2 + 16x - 9 + x^2 + 4x - 6$. Escreva o polinômio reduzido. R $3x^2 + 20x - 15$

Nas multiplicações que envolvem mais de dois polinômios, devemos calcular o produto dos dois primeiros e depois multiplicar o resultado obtido pelo terceiro, e assim por diante. Exemplo:

$$\underbrace{(y+1)\cdot(y+3)}_{y^2+4y+3}\cdot(2y+1) = (y^2+4y+3)\cdot(2y+1) = 2y^3+9y^2+10y+3$$

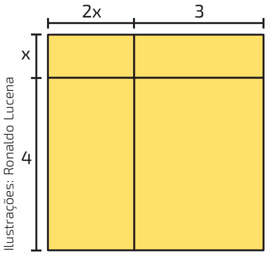
Escreva $(2y^3 - y)\cdot(y^2 - 7)$ na forma reduzida. $2y^5 - 15y^3 + 7y$

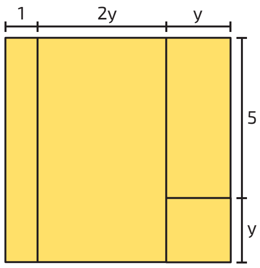
Atividades

Anote no caderno

48. Escreva um polinômio reduzido que represente a medida de área de cada figura composta de retângulos.

a) $2x^2 + 11x + 12$ **b)** $3y^2 + 16y + 5$





49. Calcule os seguintes produtos.

a) $x\cdot(2x - 3)$ $2x^2 - 3x$

b) $(4a + b)\cdot 2b^2$ $8ab^2 + 2b^3$

c) $-xy\cdot(x^2 - 2xy + y^2)$ $-x^3y + 2x^2y^2 - xy^3$

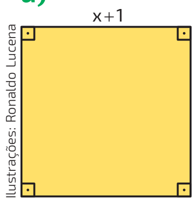
d) $(a - 5b - 7ab)\cdot 3ab^2$ $3a^2b^2 - 15ab^3 - 21a^2b^3$

e) $4xy\cdot(-x - 3 + y)$ $-4x^2y - 12xy + 4xy^2$

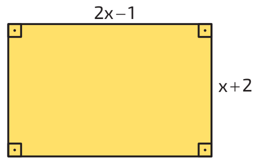
f) $(ab^2c - 3 + 2b)\cdot(a^2c)$ $a^3b^2c^2 - 3a^2c + 2a^2bc$

50. A medida da área de qual das figuras pode ser representada por meio do polinômio $2x^2 + 3x - 2$?

a)



b)



Calcule a medida da área dessa figura para $x = 8$ cm. b; 150 cm²

51. Calcule e escreva os resultados na forma reduzida.

a) $(x + 2)\cdot(x^2 - 4x + 9)$ $x^3 - 2x^2 + x + 18$

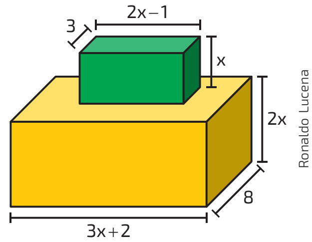
b) $(a^2b^2 + 5ab - 3)\cdot(4 - ab)$ $-a^3b^3 - a^2b^2 + 23ab - 12$

c) $(x^2y + 2xy^2 - 6xy)\cdot(x - y)$ $x^3y + x^2y^2 - 2xy^3 - 6x^2y + 6xy^2$

52. Desenhe um retângulo. Represente a medida do comprimento de um dos lados por um monômio e do outro lado por um binômio. Troque o seu desenho com o de um colega e escreva um polinômio na forma reduzida que represente a medida da área do retângulo desenhado por ele.

Ao final, determine um valor para as variáveis e obtenha o valor numérico do polinômio. Resposta pessoal.

53. Determine um polinômio para representar a medida do volume da pilha de paralelepípedos retângulo. $54x^2 + 29x$



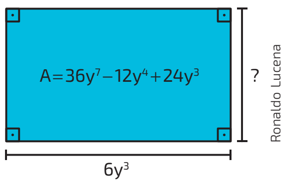
Agora, determine o valor numérico do polinômio para $x = 15$. 12 585

54. Elabore um problema cuja solução seja dada pelo polinômio $3x^2 + 20x - 15$.

Em seguida, dê para um colega resolver e verifique se sua resposta está correta. Resposta pessoal.

Divisão de polinômio por monômio

No retângulo está indicada a medida do comprimento de um de seus lados e a medida da sua área.



Podemos determinar a medida do comprimento do outro lado desse retângulo dividindo o polinômio que representa a medida da sua área pelo monômio que representa a medida do comprimento de um de seus lados, isto é:

$$\frac{36y^7 - 12y^4 + 24y^3}{6y^3} = \frac{36y^7}{6y^3} - \frac{12y^4}{6y^3} + \frac{24y^3}{6y^3} = 6y^4 - 2y + 4$$

Assim, a medida do comprimento do outro lado é dada por $6y^4 - 2y + 4$.

Para dividirmos um polinômio por um monômio não nulo, dividimos cada termo do polinômio pelo monômio. Exemplo:

$$\frac{18x^4 - 21x^3 + 12x^2}{3x} = \frac{18x^4}{3x} - \frac{21x^3}{3x} + \frac{12x^2}{3x} = 6x^3 - 7x^2 + 4x$$

ou

$$(18x^4 - 21x^3 + 12x^2) : 3x = \underbrace{(18x^4 : 3x)}_{6x^3} - \underbrace{(21x^3 : 3x)}_{7x^2} + \underbrace{(12x^2 : 3x)}_{4x} = 6x^3 - 7x^2 + 4x$$

Escreva uma divisão de um polinômio por um monômio não nulo de modo que o quociente seja igual a $2x + 3$. Resposta pessoal. Possível resposta: $(6x^2 + 9x) : 3x$.

Atividades

Anote no caderno

55. Efetue os cálculos.

a) $\dfrac{4x^3 - x^2 - 2x}{x}$ $4x^2 - x - 2$

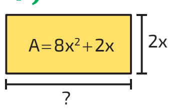
b) $\dfrac{5a^6 + 15a^3 - 10a}{5a}$ $a^5 + 3a^2 - 2$

c) $\dfrac{12x^5 - 8x^3}{2x^2}$ $6x^3 - 4x$

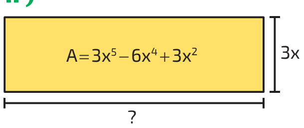
d) $\dfrac{2x^4y^4 - 4x^3y}{2x^2y}$ $x^2y^3 - 2x$

56. Cada retângulo tem a medida do comprimento de um dos lados e a medida da área representada por polinômios.

I)



II)



Ilustrações: Ronaldo Lucena

Para cada retângulo, determine:

a) o polinômio que representa a medida do comprimento do outro lado. I: $4x + 1$; II: $x^4 - 2x^3 + x$

b) a medida do comprimento e a medida da largura para $x = 3$ cm. I: 13 cm e 6 cm; II: 30 cm e 9 cm

c) a medida da área para $x = 2$ cm. I: 36 cm²; II: 12 cm²

57. Copie os itens substituindo cada ■ por um polinômio de forma que as igualdades sejam verdadeiras.

a) $(x^3 + 2x^2) : x^2 =$ ■ $x + 2$

b) ■ $: a = a^4 + a^3 - 2$ $a^5 + a^4 - 2a$

c) $(4b^3 - 18b^2 - 10b) : 2b =$ ■ $2b^2 - 9b - 5$

58. Qual é o polinômio que, dividido por $5x$, resulta no quociente $4x^2 + 10x - 1$? $20x^3 + 50x^2 - 5x$

59. Qual é o grau do quociente obtido na divisão de $16b^5 + 4b^4 + 32b$ por $4b$? 4º grau

60. Multiplicando certo polinômio por $15y$ obtemos o produto $45y^3 + 30y^2$. Qual é esse polinômio? $3y^2 + 2y$

61. Simplifique os polinômios.

a) $[2 \cdot (s^2 - 3s) - s] : s$ $2s - 7$

b) $[4 \cdot (u^3 - 1) + 4] : 2u^2$ $2u$

- Explique aos alunos que, na divisão de polinômios, devemos considerar o denominador diferente de zero.
- O item **b** da atividade **57** e as atividades **58** e **60** podem ser resolvidas por tentativa e erro, porém, a fim de agilizar o processo de resolução, oriente os alunos a se valerem do fato de a multiplicação e a divisão serem operações inversas.

89

- Explique aos alunos que a palavra “notável”, nesse caso, é o mesmo que merecer a atenção, dar destaque.
- Ao apresentar os produtos notáveis abordados nessa página, peça aos alunos para escreverem uma expressão algébrica que represente as frases:
  - quadrado da soma de dois termos;
  - quadrado da diferença de dois termos.

  Em seguida, solicite que utilizem o conhecimento de potenciação e multiplicação de polinômios para resolverem a expressão escrita, de modo que seja possível avaliar os conteúdos abordados até o momento.

Produtos notáveis

Alguns produtos de polinômios aparecem com frequência em problemas e apresentam certas regularidades. Esses produtos são chamados **produtos notáveis**, e o conhecimento dessas regularidades facilita a realização de cálculos.

Quadrado da soma de dois termos

O **quadrado da soma de dois termos** pode ser indicado por:

$$(\underset{\text{1º termo}}{a} + \underset{\text{2º termo}}{b})^2 \text{ ou } (a+b)\cdot(a+b)$$

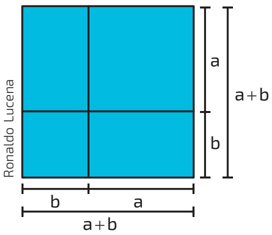
Utilizando a propriedade distributiva e comutativa da multiplicação, temos:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + \underbrace{ab}_{ba} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A expressão $a^2 + 2ab + b^2$ tem três termos e é chamada **trinômio quadrado perfeito**. Para visualizar geometricamente a igualdade acima, para **a** e **b** positivos, considere um quadrado com comprimento do lado medindo $a + b$, decomposto em quatro partes retangulares.

A medida da área do quadrado pode ser expressa de duas maneiras:

- $A = (a+b)^2$
- $A = (a+b)\cdot(a+b)$



Ronaldo Lucena

Também podemos adicionar as medidas das áreas das partes em que o quadrado foi decomposto.

$$A = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Assim:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Veja a seguir alguns exemplos.

- $(\overbrace{2x}^{\text{1º termo}} + \underbrace{3y}_{\text{2º termo}})^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
- $(c^2+9)^2 = (c^2)^2 + 2\cdot c^2\cdot 9 + 9^2 = c^4 + 18c^2 + 81$

Quadrado da diferença de dois termos

Outro produto notável é o **quadrado da diferença de dois termos**, indicados por: $(a-b)^2$ ou $(a-b)\cdot(a-b)$.

Desenvolvendo esse produto notável temos:

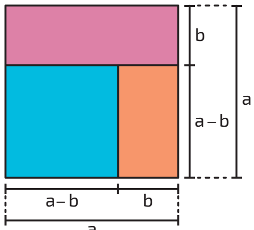
$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - \underbrace{ab}_{ba} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

> A expressão $a^2 - 2ab + b^2$ também é um trinômio quadrado perfeito.

Para visualizar geometricamente esse produto notável, para **a** e **b** positivos, com $a > b$, considere um quadrado com comprimento do lado medindo **a** decomposto em três partes retangulares.

A medida da área do quadrado azul pode ser expressa de duas maneiras.

- $A = (a - b)^2$
- $A = (a - b) \cdot (a - b)$



Também podemos subtrair as medidas das áreas dos retângulos laranja e rosa da medida da área do quadrado inicial.

$$A = a^2 - ab - (ab - b^2) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Assim:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Veja a seguir alguns exemplos.

- $(\overbrace{3}^{1^{\underline{o}}\text{ termo}} - \underbrace{5b}_{2^{\underline{o}}\text{ termo}})^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5b + (5b)^2 = 9 - 30b + 25b^2$
- $(2x - y^3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot y^3 + (y^3)^2 = 4x^2 - 4xy^3 + y^6$

Produto da soma pela diferença de dois termos

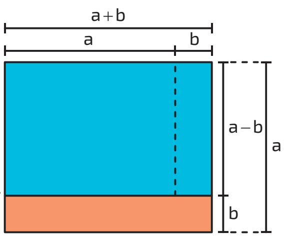
O **produto da soma pela diferença de dois termos** também é um produto notável, e é indicado por: $(a + b) \cdot (a - b)$.

Desenvolvendo esse produto notável temos:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \underbrace{\cancel{ab}}_{ba} - b^2 = a^2 - b^2$$

> A expressão $a^2 - b^2$ é chamada **diferença de quadrados**.

Para visualizar geometricamente esse produto notável, para **a** e **b** positivos, com $a > b$, considere um retângulo com comprimento dos lados medindo $a + b$ e **a**, decomposto em retângulos conforme segue.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

A medida da área do retângulo azul pode ser expressa da seguinte maneira:

$$A = (a + b) \cdot (a - b)$$

Também podemos subtrair a medida da área do retângulo laranja da medida da área do retângulo inicial.

$$A = a^2 + ab - (ab + b^2) = a^2 \cancel{+ ab} \cancel{- ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

Assim:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

- Antes de iniciar o trabalho com o tópico **Produto da soma pela diferença de dois termos**, realize o mesmo procedimento feito com os produtos notáveis da página anterior sugerido nos comentários da página anterior.

91

- Complemente a atividade **65** apresentando aos alunos as seguintes questões:
  - Qual monômio deve ser adicionado a $(3x+y)^2$ para obtermos $9x^2+y^2$?
    R $-6xy$
  - Qual polinômio deve ser adicionado a $(2a-3)^2$ para obtermos $6a^2-5a+3$?
    R $2a^2+7a-6$
  - Qual monômio deve ser multiplicado por $(4m-6n)^2$ para obtermos $4m^2np-12mn^2p+9n^3p$?
    R $\frac{1}{4}np$

Veja a seguir alguns exemplos.

- $(\overset{1^{\underline{o}}\text{ termo}}{\overbrace{2x}} + \underset{2^{\underline{o}}\text{ termo}}{\underbrace{3y}}) \cdot (2x-3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$
- $(5+4a^2)\cdot(5-4a^2) = 5^2 - (4a^2)^2 = 25 - 16a^4$

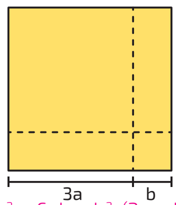
Qual número deve ser adicionado a $(-5p-2)^2$ para obtermos $25p^2+20p$? -4

Atividades

Anote no caderno

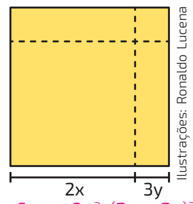
62. Determine o trinômio quadrado perfeito que representa a medida da área de cada quadrado. Em seguida, represente cada polinômio obtido por meio do quadrado da soma de dois termos.

a)



$9a^2+6ab+b^2$; $(3a+b)^2$

b)



$4x^2+6xy+9y^2$; $(2x+3y)^2$

Ilustrações: Ronaldo Lucena

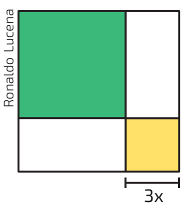
63. Copie as igualdades substituindo cada ■ pelo monômio adequado.

a) $(4+x)^2 = 16 + ■ + x^2$ $8x$

b) $(2a-3)^2 = 4a^2 - ■ + 9$ $12a$

c) $(2x+2y)^2 = x^2 + 8xy + 4y^2 + ■$ $3x^2$

64. O quadrado a seguir foi divido em dois quadrados menores e dois retângulos. Escreva o monômio que representa a medida da área desse quadrado sabendo que a medida da área da parte verde é o quádruplo da medida da área da parte amarela. $81x^2$



Ronaldo Lucena

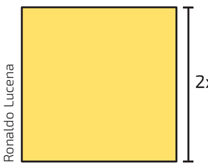
65. Responda.

a) Qual monômio deve ser adicionado a $(a+4b)^2$ para obtermos $3a^2+8ab+16b^2$? $2a^2$

b) Qual polinômio deve ser adicionado a $(4y+2x)^2$ para obtermos $10y^2+8yx$? $-6y^2-8yx-4x^2$

c) Qual monômio deve ser multiplicado por $(-1+n)^2$ para obtermos $3z-6zn+3zn^2$? $3z$

66. Observe o quadrado a seguir.



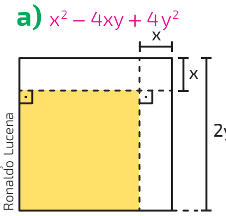
Ronaldo Lucena

a) Qual monômio representa a medida da área desse quadrado? $4x^2$

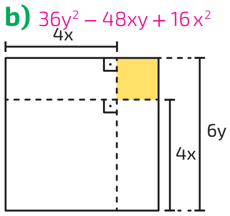
b) Se diminuirmos em 5 cm a medida do comprimento de cada um dos lados desse quadrado, qual será o polinômio que representará a medida da sua área? $4x^2-20x+25$

67. Identifique, entre os trinômios quadrados perfeitos das fichas, o que representa a medida da área do quadrado amarelo em cada item.

a) $x^2-4xy+4y^2$



b) $36y^2-48xy+16x^2$



Ilustrações: Ronaldo Lucena

$36y^2-48xy+16x^2$	$x^2-4xy+4y^2$
$\frac{81}{4}x^2-\frac{9}{2}xy+\frac{y^2}{4}$	$4x^2+6xy+\frac{9}{4}y^2$

68. Escreva cada expressão por meio de uma diferença de quadrados.

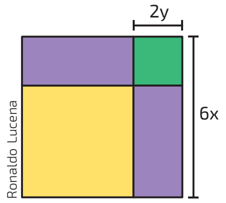
a) $(x+y)\cdot(x-y)$ x^2-y^2

b) $(2x^2-5y)\cdot(2x^2+5y)$ $4x^4-25y^2$

c) $(-x+2y)\cdot(-x-2y)$ x^2-4y^2

d) $\left(-\frac{x}{3}+y\right)\cdot\left(\frac{x}{3}+y\right)$ $y^2-\frac{x^2}{9}$

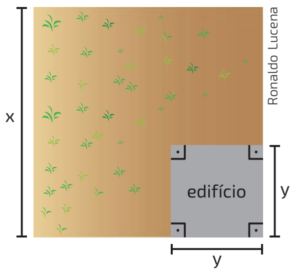
69. A figura a seguir é composta de dois quadrados e dois retângulos.



a) Determine o polinômio que representa a medida da área do quadrado amarelo. $36x^2 - 24xy + 4y^2$

b) Considerando $x = 3$ cm e $y = 5$ cm, elabore duas perguntas e dê para um colega responder. Depois, confira se ele as respondeu corretamente. Resposta pessoal.

70. Em um terreno quadrado será construído um edifício como representado no esquema.



a) Escreva o polinômio que representa a medida da área do terreno que não será ocupado pelo edifício. $x^2 - y^2$

b) Sabendo que $x = 80$ m e $x - y = 50$ m, qual é a medida da área da parte do terreno que será ocupada pelo edifício? E a medida da área da parte que não será ocupada? 900 m²; 5 500 m²

71. Escreva cada expressão por meio de um polinômio na forma reduzida.

a) $(a + 1)^2 + (2a)^3$ $8a^3 + a^2 + 2a + 1$

b) $(2a + b)^2 - (a - b)^2$ $3a^2 + 6ab$

c) $(-a - b)^2 - 8ab - a^2$ $b^2 - 6ab$

d) $(3a + 6b) \cdot (2a - 2) - 8a^2$
$-2a^2 - 6a - 12b + 12ab$

Agora, determine o valor numérico de cada polinômio obtido para $a = 1$ e $b = 2$.
a: 12; b: 15; c: −8; d: −8

72. Associe cada igualdade a uma das afirmações, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. a-II; b-I; c-III

I) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

II) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

III) $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$

a) O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, menos duas vezes o 1º termo vezes o 2º, mais o quadrado do 2º termo.

b) O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, mais duas vezes o 1º termo vezes o 2º, mais o quadrado do 2º termo.

c) O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo menos o quadrado do 2º termo.

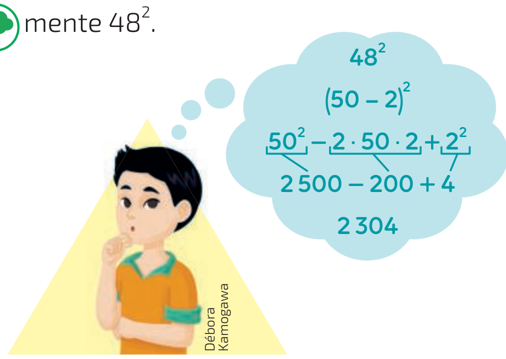
73. Qual polinômio que elevado ao quadrado é igual a:

a) $x^2 + 2xy + y^2$? $x + y$

b) $4a^2 - 4ab + b^2$? $2a - b$

c) $25 + 10k + k^2$? $5 + k$

74. Observe como Lucas calculou mentalmente 48^2.



a) Qual conteúdo estudado neste capítulo Lucas utilizou para realizar esse cálculo? quadrado da diferença de dois termos

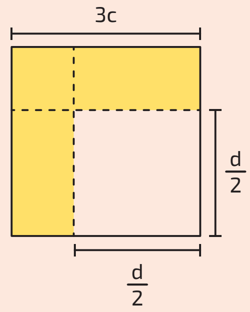
b) Agora, calcule.

- 15^2 225
- 98^2 9 604
- 64^2 4 096
- 36^2 1 296
- 21^2 441
- 89^2 7 921

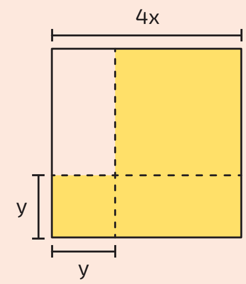
- Após realizarem as atividades dessa página, avalie a possibilidade de os alunos resolverem a **Atividade complementar** abaixo.

Atividade complementar

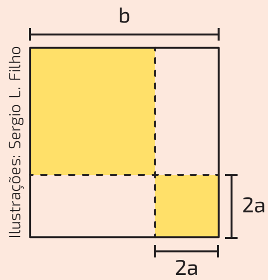
- Escreva o polinômio que representa a área das partes em amarelo em cada quadrado.



R $9c^2 - \frac{d^2}{4}$



R $16x^2 - 4xy + y^2$



R $b^2 - 4ab + 8a^2$

BNCC em foco

- Na atividade **69**, os alunos devem elaborar duas perguntas que sejam respondidas utilizando o cálculo do valor numérico de um polinômio, contemplando, a habilidade **EF08MA06** da BNCC.

- No item **b** da atividade **69**, os alunos podem elaborar perguntas como:
  - Qual é a medida da área do quadrado amarelo? R 64 cm²
  - Qual é a medida da área total da figura apresentada? R 324 cm²

- Verifique se os alunos perceberam que fatorar um número ou polinômio é o mesmo que escrevê-los como uma multiplicação.
Lembre-os de que os termos de uma multiplicação são chamados fatores, e o resultado, produto.
Avalie a possibilidade de apresentar alguns exemplos para os alunos realizarem a fatoração.

Fatoração de polinômios

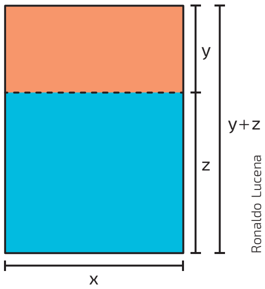
Estudamos em anos anteriores que podemos escrever um número como o produto de dois ou mais números, ou seja, escrevê-lo de **forma fatorada**.

Observe alguns exemplos de como podemos fatorar o número 36.

- $36 = 4 \cdot 9$
- $36 = 3 \cdot 12$
- $36 = 6 \cdot 6$
- $36 = 2 \cdot 18$
- $36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$
- $36 = 2 \cdot 2 \cdot 9$
- $36 = 3 \cdot 3 \cdot 4$
- $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Além de números, também podemos **fatorar** polinômios, isto é, escrevê-los como o produto de dois ou mais polinômios.

Considere o retângulo ao lado, decomposto em duas partes retangulares. Podemos representar a medida da área desse retângulo de duas maneiras.



- Desconsiderando a decomposição.

$$x \cdot (y + z)$$

- Adicionando as medidas das áreas das duas partes obtidas:

$$xy + xz$$

O polinômio $x \cdot (y + z)$ é uma forma fatorada de $xy + xz$.

Estudaremos a seguir alguns métodos de fatoração de polinômio.

Fatoração colocando um fator comum em evidência

Observe como podemos fatorar o polinômio $6ab + 10bc$.

- Inicialmente decompomos cada termo.

$$6ab + 10bc = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot 5 \cdot b \cdot c$$

Note que os fatores 2 e **b** são comuns aos dois termos do polinômio.

- Dessa maneira, em cada termo, escrevemos esses fatores multiplicando os demais.

$$2 \cdot 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot 5 \cdot b \cdot c = 2b \cdot (3a + 5c)$$

Portanto, dizemos que $2b$ é o fator comum aos termos de $6ab + 10bc$, dos quais uma das formas fatoradas é $2b \cdot (3a + 5c)$.

> No polinômio $2b \cdot (3a + 5c)$ o **fator comum em evidência** é $2b$.

Veja outros exemplos.

- $5x^3y^4z - 15xy^3 = 5xy^3 \cdot (x^2yz - 3)$
- $3y^5 + 6y^3 + 12y^6 = 3y^3 \cdot (y^2 + 2 + 4y^3)$
- $6xy^2z^2 + 2x^2y^4z^2 - 16x^3y^5z^9 + 2xy^3z = 2xy^2z \cdot (3z + xy^2z - 8x^2y^3z^8 + y)$

Fatoração por agrupamento

Há polinômios que não têm fatores comuns a todos os termos. Em alguns desses casos é possível utilizar o método de **fatoração por agrupamento**.

Observe como podemos fatorar $ax - az + 5x - 5z$ por agrupamento.

- Inicialmente agrupamos os termos que possuem fator comum e colocamos esse fator em evidência em cada grupo obtido.

$$ax - az + 5x - 5z = (ax - az) + (5x - 5z) = a \cdot (x - z) + 5 \cdot (x - z)$$

Note que $(x - z)$ é um fator comum a todos os termos obtidos.

- Assim, colocamos $(x - z)$ em evidência.

$$a \cdot (x - z) + 5 \cdot (x - z) = (x - z) \cdot (a + 5)$$

Portanto, $(x - z) \cdot (a + 5)$ é uma forma fatorada do polinômio $ax - az + 5x - 5z$.

Veja mais alguns exemplos.

- $7b + 7 + ab^3 + ab^2 = 7 \cdot (b + 1) + ab^2 \cdot (b + 1) = (b + 1) \cdot (7 + ab^2)$
- $3a^3 + 3ab - 4a^2b - 4b^2 = 3a \cdot (a^2 + b) - 4b \cdot (a^2 + b) = (a^2 + b) \cdot (3a - 4b)$

> Para verificar se uma fatoração foi realizada de maneira correta, utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação. O resultado obtido deve ser igual ao polinômio que foi fatorado.
>
> $$(a + 5) \cdot (x - z) = ax - az + 5x - 5z$$

Fatoração da diferença de dois quadrados

No estudo de produtos notáveis, vimos que o produto da soma pela diferença de dois termos é uma diferença de quadrados, ou seja, $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

O produto $(a + b) \cdot (a - b)$ é a forma fatorada de $a^2 - b^2$. Observe alguns exemplos.

- $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x + 7) \cdot (x - 7)$
- $\frac{1}{4}a^2 - b^2c^4 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - (bc^2)^2 = \left(\frac{1}{2}a + bc^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a - bc^2\right)$

Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Vimos que o quadrado da soma ou da diferença de dois termos é um trinômio quadrado perfeito, ou seja:

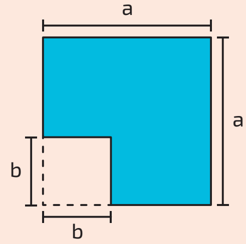
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Dizemos que $(a + b)^2$ é a forma fatorada de $a + 2ab + b^2$ e $(a - b)^2$ é a forma fatorada de $a^2 - 2ab + b^2$.

Observe alguns exemplos de fatoração de trinômios quadrados perfeitos.

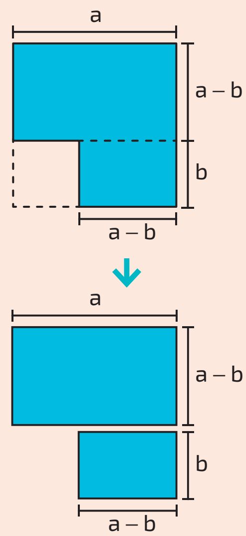
- $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot (x \cdot 3) + 3^2 = (x + 3)^2$
- $9a^2 + 12a + 4 = (3a)^2 + 2 \cdot (3a \cdot 2) + 2^2 = (3a + 2)^2$
- $y^2 - 12y + 36 = y^2 - 2 \cdot (y \cdot 6) + 6^2 = (y - 6)^2$

- Apresente aos alunos a seguinte justificativa geométrica para a fatoração da diferença de dois quadrados, ou seja, para a igualdade $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$:
  - Primeiro, determinamos o polinômio que representa a medida da área da região em destaque no quadrado a seguir.

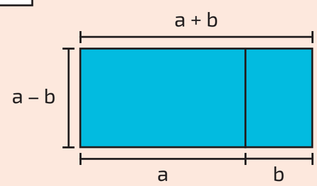


$a^2 - b^2$

  - Depois, decompomos a figura como indicado, obtendo dois retângulos.



  - Ao colocarmos um retângulo ao lado do outro, de forma que os lados com a mesma medida fiquem justapostos, obtemos um novo retângulo, cuja medida do comprimento é dada por $a + b$ e a medida da largura, por $a - b$.



Ilustrações: Sergio L. Filho

O polinômio que representa a medida da área desse retângulo é dado por $(a + b) \cdot (a - b)$.

  - Como a medida da área da região em destaque no quadrado inicial e a medida da área do retângulo obtido são iguais, então: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

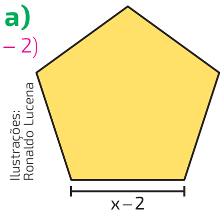
- Ao resolverem a atividade **75**, lembre os alunos de que, em um polígono regular, os lados têm a mesma medida de comprimento e as medidas dos ângulos internos são iguais.
- Na atividade **76**, após os alunos escreverem o fator comum, oriente-os a também escreverem o polinômio em sua forma fatorada.

Atividades

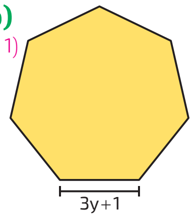
Anote no caderno

75. Escreva, na forma fatorada, o polinômio que representa a medida do perímetro de cada polígono regular.

a) $5 \cdot (x - 2)$



b) $7 \cdot (3y + 1)$



76. Determine o fator comum a todos os termos em cada polinômio.

a) $8zy - 3y^2zx$ zy

b) $yx - x^2 + 4yx$ x

c) $z^2w^3 + 13zw^2 + 10zw^2$ zw^2

d) $6x^2y^3 - 2x^5y^6 - 4x^2y^2$ $2x^2y^2$

77. Colocando o fator comum em evidência, escreva os polinômios na forma fatorada.

a) $2x^2 + 4y$ $2 \cdot (x^2 + 2y)$

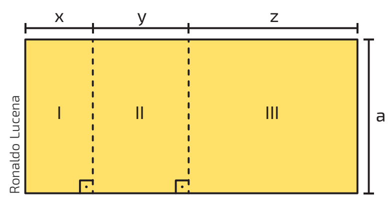
b) $ab^2 - 8ac$ $a \cdot (b^2 - 8c)$

c) $5zw^2 + 25z^2w$ $5zw \cdot (w + 5z)$

d) $12xy^2 + 9x^5y^3$ $3xy^2 \cdot (4 + 3x^4y)$

e) $4a^3b^2c^5 - 6a^2b^3 + 14b^2c$ $2b^2 \cdot (2a^3c^5 - 3a^2b + 7c)$

78. O retângulo a seguir foi decomposto em três partes retangulares.



a) Qual a forma fatorada do polinômio que representa a medida do perímetro desse retângulo? $2 \cdot (x + y + z + a)$

b) Escreva o polinômio que representa a medida da área correspondente à:

- parte **I**. ax
- parte **II**. ay
- parte **III**. az

c) Escreva, na forma fatorada, o polinômio que representa a medida da área do retângulo inicial. $a \cdot (x + y + z)$

79. Para fatorar alguns polinômios é conveniente reduzir os termos semelhantes. Observe:

$$\underbrace{2ab + 3b - ab + 4b}_{\text{polinômio}} =$$
$$= 2ab - ab + 3b + 4b =$$
$$= ab + 7b = \underbrace{b \cdot (a + 7)}_{\text{forma fatorada}}$$

Reduza os termos semelhantes em cada polinômio e, em seguida, fatore.

a) $7x - 10xy + 3xy - 2x$ $x \cdot (5 - 7y)$

b) $ab + 6a + 9ab - a$ $5a \cdot (2b + 1)$

c) $x^2y - 4y^2 + 8y^2 - 5x^2y$ $4y \cdot (y - x^2)$

d) $4x^2y^6 + 6x^2y^6 - 3x^2y^3 + 7x^2y^3$ $2x^2y^3 \cdot (5y^3 + 2)$

80. Agrupe os termos que possuem fator comum e fatore as expressões.

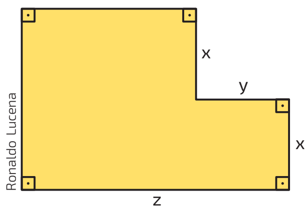
a) $2 + 2y + x + xy$ $(2 + x) \cdot (1 + y)$

b) $ax + b^3y + ay + b^3x$ $(a + b^3) \cdot (x + y)$

c) $2x^2 + 2xy - 3x - 3y$ $(2x - 3) \cdot (x + y)$

d) $3ab - 4a^2b^2 + a^3 - 12b^3$ $(a^2 + 3b) \cdot (a - 4b^2)$

81. Escreva, na forma fatorada, o polinômio que representa a medida da área da figura. $x \cdot (2z - y)$



Para resolver esta atividade, decomponha a figura em retângulos.

82. Fatore as expressões.

a) $a^2 - 64$ $(a + 8) \cdot (a - 8)$

b) $9x^2 - 25y^2$ $(3x - 5y) \cdot (3x + 5y)$

c) $a^2b^4 - c^6$ $(ab^2 + c^3) \cdot (ab^2 - c^3)$

d) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^8$ $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y^4\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y^4\right)$

83. Obtenha mentalmente a forma fatorada dos trinômios quadrados perfeitos.

a) $x^2 - 10xy + 25y^2$ $(x - 5y)^2$

b) $36a^2 + 12ab + b^2$ $(6a + b)^2$

c) $49x^2 - 56xy + 16y^2$ $(7x - 4y)^2$

d) $a^6 + 2a^3b^2 + b^4$ $(a^3 + b^2)^2$

84. Em cada esquema, um dos monômios indicados ao ser adicionado ao binômio resulta em um trinômio quadrado perfeito. Determine qual é esse monômio e, em seguida, fatore o trinômio obtido.

a) $4x$; $(x + 2)^2$

$2x$

$4x$ — $x^2 + 4$ — x^2

b) a^2; $(a + 6b)^2$

a^2

$4b$ — $12ab + 36b^2$ — $6ab$

85. Para cada sentença, determine o polinômio correspondente ao ■ de maneira que torne a igualdade verdadeira.

a) $4a^3b - 7a^2b^3 = a^2b \cdot (■)$ $4a - 7b^2$

b) $xb + xy + 2ab + 2ay = (■) \cdot (x + 2a)$ $b + y$

c) $a^2 - b^4 = (■) \cdot (a - b^2)$ $a + b^2$

d) $a^2 + 10ay + 25y^2 = (a + 5y) \cdot (■)$ $a + 5y$

e) $3ax - 6ay + ■ = (3a - b) \cdot (x - 2y)$ $-bx + 2by$

f) $2x^2y^3 + 8x^2y - 4xy^2 = 2xy \cdot (■)$ $xy^2 + 4x - 2y$

86. Aplique a propriedade distributiva da multiplicação eliminando os parênteses das sentenças. Em seguida, reduza os termos semelhantes e fatore os resultados.

a) $x \cdot (3 + y) - y \cdot (x - 9)$ $3 \cdot (x + 3y)$

b) $2a \cdot (ab + b) - b \cdot (3a + a^2)$ $ab \cdot (a - 1)$

c) $a \cdot (3a^2 - b) + b \cdot (a^3 - 7a)$ $a \cdot (3a^2 - 8b + ba^2)$

d) $2x \cdot (x + y)^2 + 4y^3$ $(x^2 + y^2) \cdot (2x + 4y)$

Explorando o que estudei

Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? expressões algébricas, monômios, sequências, polinômios, produtos notáveis e fatoração de polinômios

2. Explique, com suas palavras, por que em algumas situações é necessário utilizar letras no lugar de números. Resposta pessoal.

3. Em um monômio, o que é coeficiente? E a parte literal? fator numérico do monômio; variáveis

4. Considere a sequência definida por $a_1 = 15$ e $a_n = a_{n-1} + 6$ para $n > 1$. Qual é o termo geral dessa sequência? $a_n = 6n + 9$

5. Qual procedimento pode ser utilizado para realizar uma subtração de polinômios? Espera-se que os alunos respondam que o procedimento é adicionar o polinômio correspondente ao minuendo ao oposto do subtraendo.

6. Ao multiplicar um polinômio de grau **n** por outro de grau **p**, como podemos indicar o grau do polinômio obtido? $n + p$

7. Leia a informação.

> Para indicarmos o grau de um polinômio ele deve estar na forma reduzida.

Essa afirmação está correta? sim

8. Por que os produtos notáveis recebem esse nome? Espera-se que os alunos respondam que é porque são produtos de polinômios que aparecem com frequência em problemas e apresentam certas regularidades.

9. Quais produtos notáveis você conhece? Espera-se que os alunos respondam quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos e produto da soma pela diferença de dois termos.

10. O que é fatorar um número inteiro? E um polinômio? É escrevê-lo como produto de dois ou mais números inteiros. É escrevê-lo como produto de dois ou mais polinômios.

11. Cite as maneiras de fatorar estudadas neste capítulo. fatoração colocando um fator comum em evidência, fatoração por agrupamento, fatoração da diferença de dois quadrados, fatoração do trinômio quadrado perfeito

Avaliação

- Aproveite as questões propostas na seção **Explorando o que estudei** para avaliar o conhecimento dos alunos a respeito dos conteúdos abordados no capítulo. Peça para resolverem as questões em duplas e, em seguida, realize um debate, de modo que todos exponham suas dúvidas, ideias e interpretações a respeito do tema.

- Na questão **7** da seção **Explorando o que estudei**, para que os alunos compreendam melhor o porquê de indicarmos o grau de um polinômio somente quando ele está em sua forma reduzida, proponha a eles que indiquem o grau de um polinômio não reduzido, por exemplo, $3ab^5 + 5a - 3ab^5$. Nesse caso, em uma análise menos atenta, podemos equivocadamente, dizer que o grau do polinômio é 6, pois $1 + 5 = 6$. Contudo, na forma reduzida, os termos $3ab^5$ e $-3ab^5$ se anulam, ficando o polinômio reduzido ao monômio $5a$, cujo grau é 1. Dessa forma, $3ab^5 + 5a - 3ab^5$ é do 1º grau.

Esse capítulo ampliará os conhecimentos dos alunos referentes às transformações geométricas de reflexão, translação e rotação, avançando os estudos para a resolução de problemas e a construção de figuras provenientes das composições dessas transformações. As construções são propostas a partir do uso de instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica.

- As páginas de abertura permitem que os alunos percebam elementos relacionados à ideia de figuras simétricas por reflexão em relação a um eixo, conteúdo estudado em anos anteriores. Uma sugestão de condução do trabalho é realizar uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. As questões propostas podem ser respondidas na lousa, de acordo com as respostas dadas por eles. Nesse momento, é importante que a turma seja incentivada a participar.

Capítulo 5

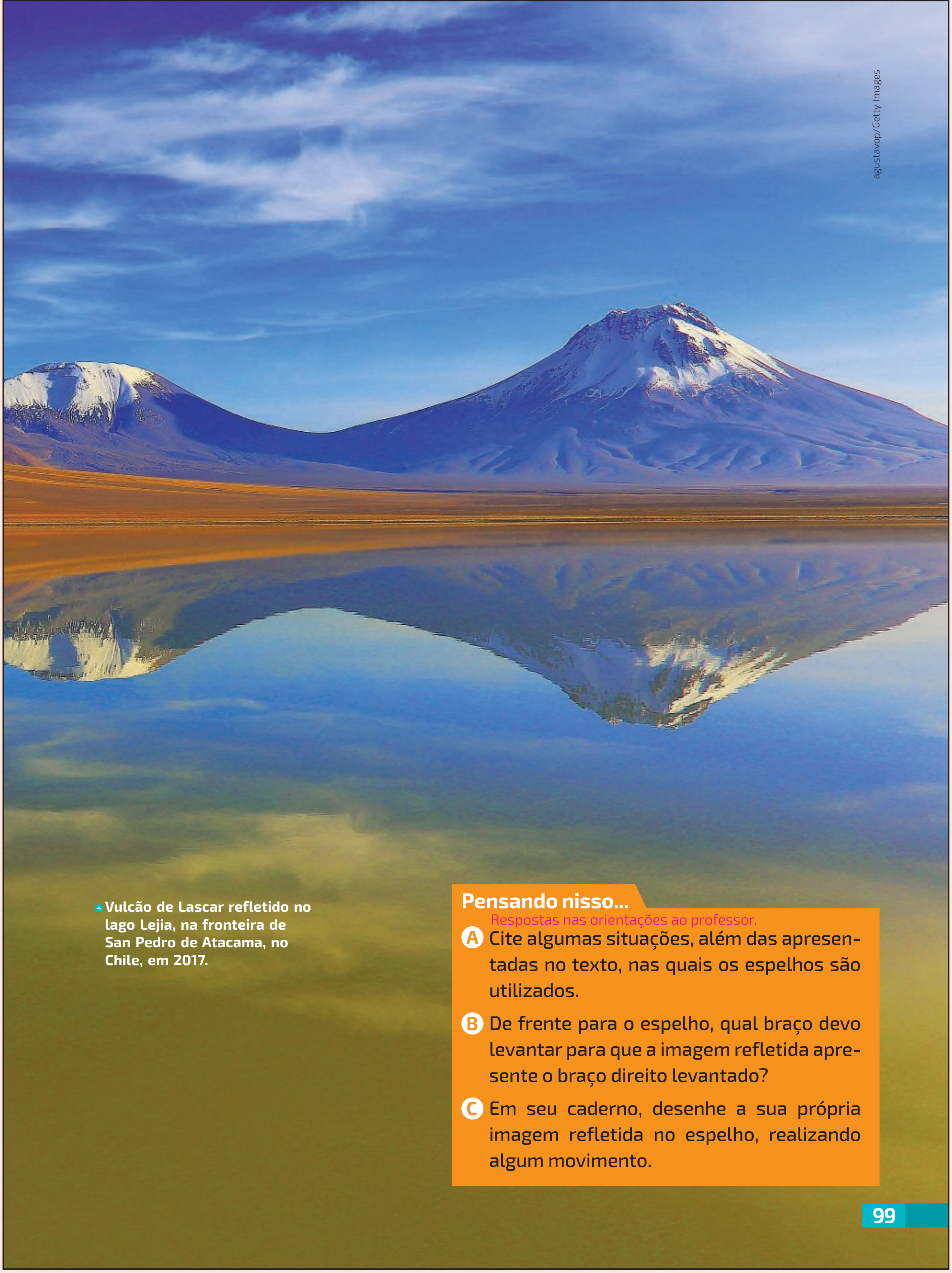
Transformação de figuras

Quando queremos visualizar a nossa imagem em situações como ao sair de casa ou mesmo ao pentear o cabelo, costumamos utilizar um acessório indispensável: o espelho.

Para garantir a reprodução plana da imagem, como ocorre nos espelhos convencionais, todo o processo de produção do vidro e do espelho deve ser muito cuidadoso, a fim de evitar imperfeições e, consequentemente, distorções na imagem refletida.

Além dos espelhos produzidos pelo homem, há também aqueles próprios da natureza, como os espelhos d'água, que refletem, por exemplo, a paisagem à margem de uma lagoa.

A nossa imagem refletida em um espelho plano é idêntica a nós, e sua reprodução repete inclusive os mesmos movimentos que fazemos, porém ao contrário. Se você piscar o olho direito, por exemplo, seu reflexo piscará o olho esquerdo.



agustavop/Getty Images

Vulcão de Lascar refletido no lago Lejia, na fronteira de San Pedro de Atacama, no Chile, em 2017.

Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

A Cite algumas situações, além das apresentadas no texto, nas quais os espelhos são utilizados.

B De frente para o espelho, qual braço devo levantar para que a imagem refletida apresente o braço direito levantado?

C Em seu caderno, desenhe a sua própria imagem refletida no espelho, realizando algum movimento.

Pensando nisso...

A Possíveis respostas: provadores de lojas, retrovisor de carro, fachada de prédio, decoração de casa, refletores de luz.

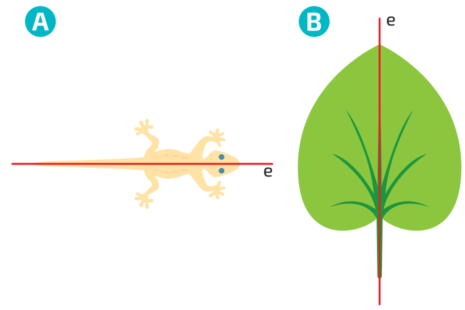
B braço esquerdo

C Resposta pessoal.

- No item **C**, verifique se os alunos perceberam que, para ilustrar um movimento de frente para o espelho, deve-se considerar que no reflexo os movimentos são invertidos.
- Nas questões **B** e **C**, uma sugestão é que os alunos, organizados em duplas, realizem um experimento. Para isso, com um aluno de frente para o outro, defina um deles como reflexo, de modo que, enquanto o outro aluno realiza movimentos, este que representa o reflexo deve simular os movimentos correspondentes, como em um espelho.

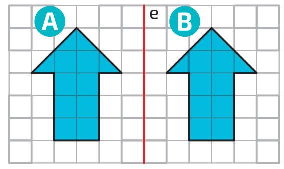
Simetria de reflexão e reflexão de uma figura

Se dobrarmos essas figuras ao longo do eixo **e**, as duas partes obtidas vão se sobrepor. Quando isso ocorre, dizemos que a figura possui **simetria de reflexão** e o eixo **e** que a divide é o **eixo de simetria**.



Existem figuras que possuem mais de um eixo de simetria.

Na malha quadriculada ao lado, a figura **B** foi obtida refletindo a figura **A** em relação ao eixo **e**. Nesse caso, temos uma **reflexão**.

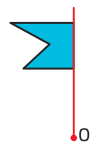


As figuras **A** e **B** são **figuras simétricas por reflexão em relação ao eixo e**, pois, se dobrarmos a malha ao longo do eixo **e**, ambas as figuras vão se sobrepor.

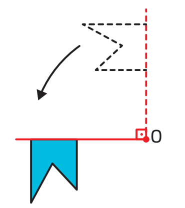
Ao aplicarmos uma transformação em uma figura, obteremos outra figura, a qual chamaremos **imagem** da figura original.

Simetria de rotação e rotação de uma figura

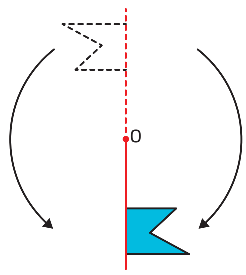
Observe a figura ao lado.



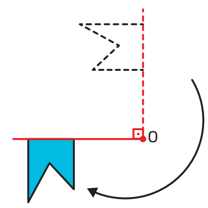
Podemos rotacionar essa figura em torno do ponto **O** partindo de uma mesma posição, conforme segue.



Rotação de 90° no sentido anti-horário em relação ao ponto **O**.



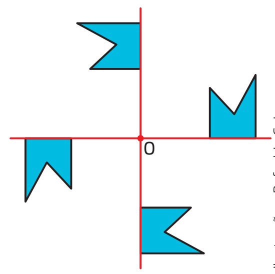
Rotação de 180° no sentido horário ou anti-horário em relação ao ponto **O**.



Rotação de 270° no sentido horário em relação ao ponto **O**.

A **rotação** consiste em rotacionar uma figura em torno de um ponto **O**. O **ângulo de rotação** pode ser no sentido **horário** ou **anti-horário**.

Dizemos que a figura ao lado possui **simetria de rotação**, pois ao rotacionar essa figura, por exemplo, em 90° no sentido horário em relação ao ponto **O**, ela permanece a mesma.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Objetivos do capítulo

- Reconhecer transformações geométricas de reflexão, rotação e translação.
- Construir a imagem de uma dada figura por transformações de reflexão, rotação e translação.
- Compreender composições de transformações geométricas.
- Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações.

- Explique aos alunos que sentido horário é o sentido do movimento dos ponteiros do relógio, e anti-horário é o sentido contrário ao dos ponteiros.

Avaliação

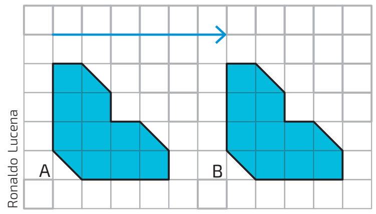
- Antes de iniciar o trabalho com os conteúdos do capítulo, realize uma avaliação com os alunos questionando-os, de forma coletiva e oral, quanto às transformações que conhecem e em quais elementos elas podem ser observadas. A partir das respostas, observe as dificuldades apresentadas e reflita sobre as estratégias para a condução do trabalho, de maneira a contribuir para o desenvolvimento das habilidades de um modo acessível. Caso um ou mais alunos apresentem dificuldades significativas sobre o conteúdo, avalie a possibilidade de realizar uma espécie de resumo do capítulo **11** do volume do **7º** ano dessa coleção, retomando os conteúdos.

Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **4**, **5** e **6** do 2º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

Translação de uma figura

Na malha quadriculada a seguir, a figura **B** foi obtida deslocando-se cada um dos pontos da figura **A** de acordo com uma medida de distância, uma direção e um sentido, mantendo seu tamanho e sua forma. Nesse caso, temos uma **translação**.



A figura **B** foi obtida deslocando-se a figura **A** na direção horizontal, 7 unidades para a direita, como indicado pela seta azul.

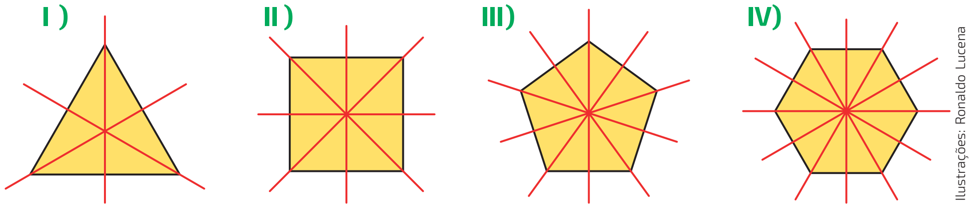
A figura **B** é a **imagem** da figura **A** pela translação dada.

Atividades

Anote no caderno

1. Observe os polígonos regulares e seus eixos de simetria.

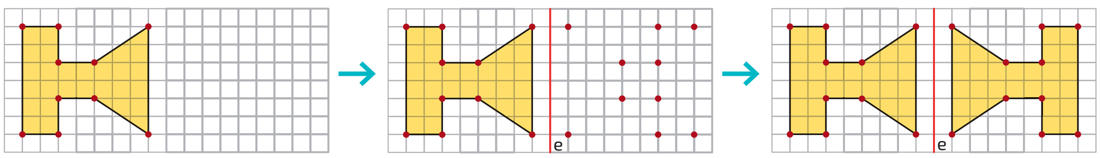
I) **II)** **III)** **IV)**



a) Quantos eixos de simetria tem cada um desses polígonos?
I: 3 eixos; II: 4 eixos; III: 5 eixos; IV: 6 eixos

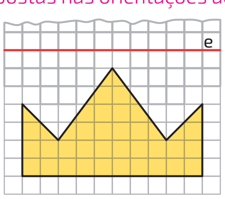
b) Qual é a relação entre a quantidade de lados e de eixos de simetria nos polígonos regulares? Nos polígonos regulares, a quantidade de eixos de simetria é igual à quantidade de lados.

2. Veja como Patrícia desenhou a imagem de uma figura por reflexão a um eixo utilizando uma malha quadriculada.

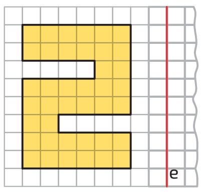


Agora, da mesma maneira, reproduza as figuras em uma malha quadriculada e obtenha a figura simétrica de cada uma delas em relação ao eixo **e**.
Respostas nas orientações ao professor.

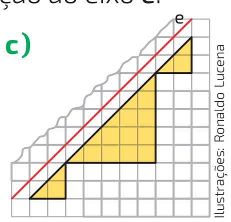
a)



b)



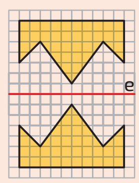
c)



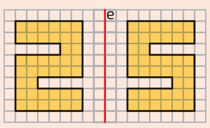
- Na atividade **1**, reproduza e distribua aos alunos os polígonos regulares que se encontram nas **Páginas para reprodução**, pedindo para que tracem todos os eixos de simetria desses polígonos. Depois, faça as seguintes perguntas:
  - É possível traçar eixos de simetria em todos os polígonos regulares?
    R sim
  - Quantos eixos de simetria podem ser traçados em um polígono regular com 6 lados? E em um polígono regular com 20 lados?
    R 6 eixos; 20 eixos
  - É possível definir a quantidade de eixos de simetria que podem ser traçados em um círculo? Justifique.
    R Não, pois em um círculo é possível traçar infinitos eixos de simetria.

Respostas

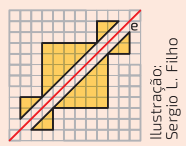
2. a)



b)

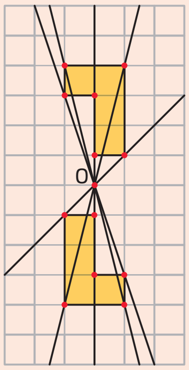


c)



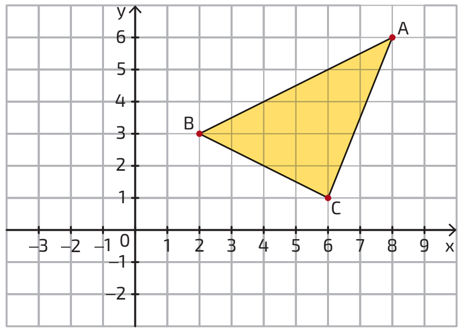
Resposta

5. Resposta pessoal. Possível resposta:



Sergio L. Filho

3. Observe um triângulo construído em um plano cartesiano e resolva as questões.



Ronaldo Lucena

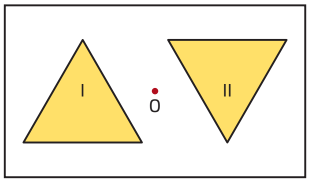
a) Quais as coordenadas dos vértices do ΔABC? A(8, 6), B (2, 3) e C(6, 1)

b) Considere um ΔA'B'C' simétrico ao ΔABC em relação ao eixo **x**. Quais as coordenadas de A', B' e C'? A(8, −6), B(2, −3) e C(6, −1)

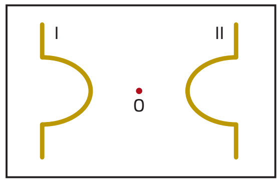
4. Em quais quadros a figura **I** sofreu uma rotação de 180° em torno do ponto **O**?

a; b

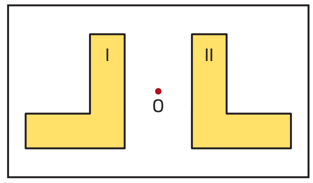
a)



b)

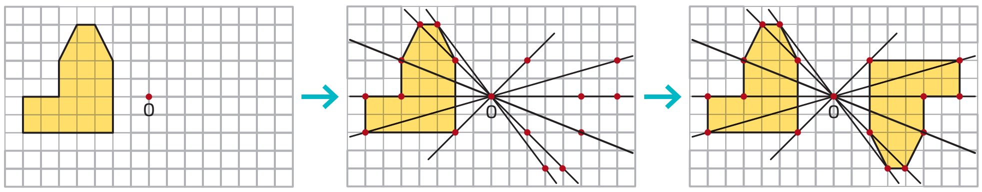


c)



Ilustrações: Ronaldo Lucena

5. Veja como Carolina desenhou a imagem de uma figura, por rotação de 180° em relação a um ponto **O**, em uma malha quadriculada.

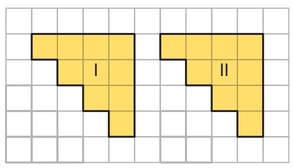


Ilustrações: Ronaldo Lucena

Agora, desenhe uma figura em uma malha quadriculada e indique um ponto **O**. Em seguida, assim como Carolina fez, desenhe a imagem dessa figura por rotação de 180° em relação ao ponto **O**. Resposta nas orientações ao professor.

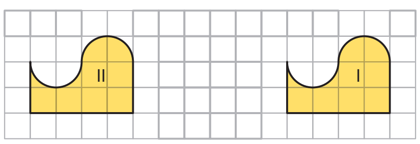
6. Em cada item, a figura **II** foi obtida por translação da figura **I**. Escreva a direção, a medida da distância e o sentido dessa translação.

a)



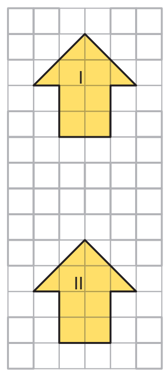
horizontal, 5 unidades para a direita

b)



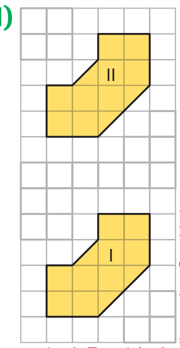
horizontal, 10 unidades para a esquerda

c)



vertical, 8 unidades para baixo

d)

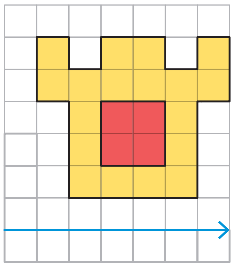


vertical, 7 unidades para cima

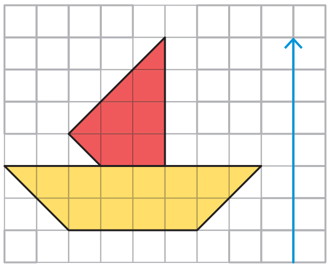
Ilustrações: Ronaldo Lucena

7. Em uma malha quadriculada, reproduza e obtenha a imagem de cada figura por meio da translação determinada pela seta. Respostas nas orientações ao professor.

a)



b)

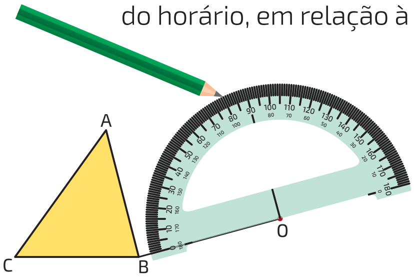


Ilustrações: Ronaldo Lucena

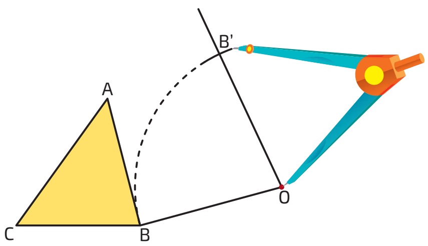
A seta indica a medida da distância, a direção e o sentido da translação da figura.

8. Veja como podemos construir a imagem do triângulo ABC por rotação de 80° no sentido horário em relação ao ponto **O**.

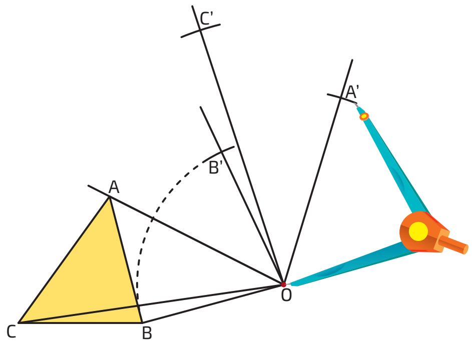
1º Trace um segmento de reta que ligue o vértice **B** do triângulo ao ponto **O**. Com o centro do transferidor em **O**, marque 80°, no sentido horário, em relação à $\overline{BO}$.



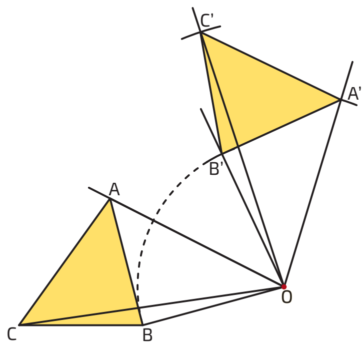
2º Com o auxílio de uma régua, trace uma semirreta a partir de **O**, de acordo com o ângulo indicado anteriormente. Com a ponta-seca do compasso em **O** e abertura igual a BO, marque o ponto **B'** sobre a semirreta traçada.



3º Repita os procedimentos anteriores e marque os pontos **C'** e **A'**.



4º Ligue os pontos e pinte a figura obtendo o triângulo A'B'C', que é a imagem do triângulo ABC por rotação de 80° no sentido horário em relação ao ponto **O**.

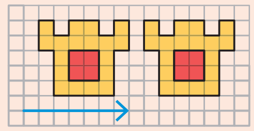


Ilustrações: Cynthia Sekiguchi/ Keithy Mostachi/Ronaldo Lucena

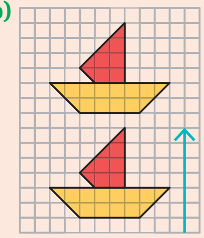
Agora, utilizando régua, compasso e transferidor, construa um triângulo DEF e indique um ponto **O**. Em seguida, construa a imagem do triângulo DEF por rotação de 60° no sentido horário em relação ao ponto **O**. Resposta nas orientações ao professor.

Respostas

7. a)



b)



8. Resposta pessoal. Possível resposta:

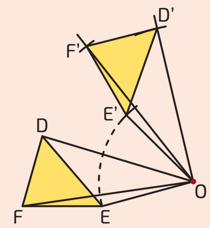


Ilustração: Sergio L. Filho

No material digital audiovisual dessa coleção, disponibilizamos um vídeo que explora a transformação de rotação na construção de mandalas, que pode ser utilizado como ferramenta para enriquecer o trabalho com esse conteúdo. As orientações de uso desse recurso estão disponíveis no material digital.

BNCC em foco

- Essa página e a seguinte levarão os alunos a reconhecer e construir figuras por composições de transformações de translação, reflexão e rotação, utilizando instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica, o que contempla a habilidade **EF08MA18**.

- Para realizar a **Atividade complementar** a seguir, verifique a possibilidade de levar para a sala de aula o vídeo disponível em <www.manualdomundo.com.br/2013/11/como-fazer-cristais-de-neve-de-papel-origami-kirigami>. Acesso em: 4 ago. 2018. Caso não seja possível, leve os alunos ao laboratório de informática e peça para acessarem o *link* e assistirem ao vídeo, ou, então, assista ao vídeo e apresente o passo a passo em sala de aula. Possibilite que a atividade seja realizada em duplas, de forma a proporcionar a interação e troca de experiências entre os alunos.

Atividade complementar

Cristal de neve de papel

Materiais

- folha de papel em branco
- tesoura com pontas arredondadas

Desenvolvimento

- Junte os alunos em duplas e entregue uma folha de papel em branco e uma tesoura para cada um. Peça para seguirem o passo a passo detalhado no vídeo ou apresente esses passos e realize a atividade junto com eles. Ao final, faça as seguintes perguntas:

Composição de transformações

Utilizando um programa de computador, Gabriela desenhou a imagem ao lado. Depois, por meio de transformações geométricas de reflexão, rotação e translação, obteve a seguinte composição.

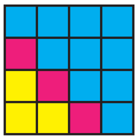
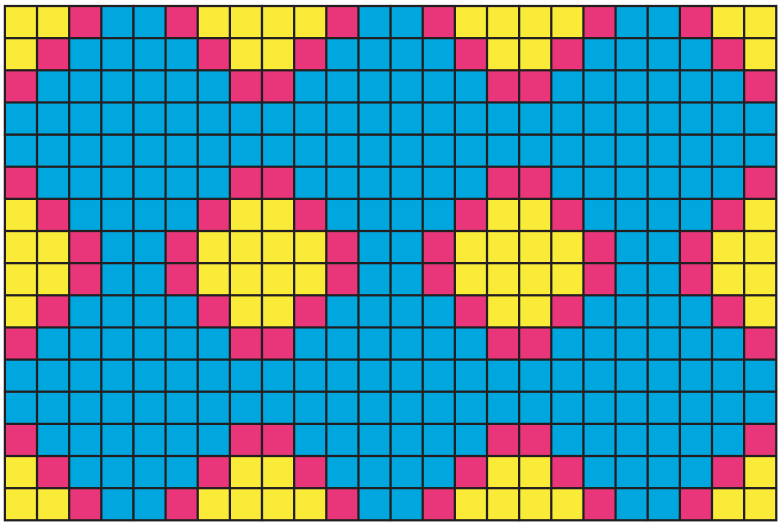
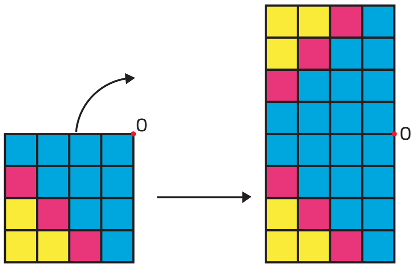


Figura inicialmente construída.

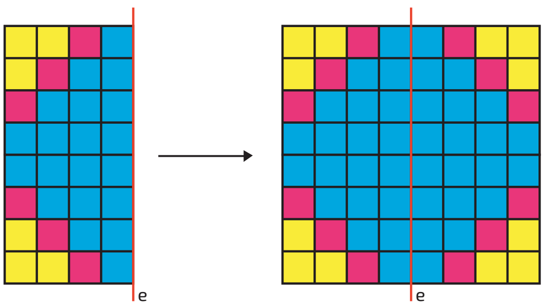


Observe os procedimentos utilizados por Gabriela para obter a composição a partir da figura inicial.

- Inicialmente ela rotacionou em 90° a figura construída no sentido horário em relação ao ponto **O**.



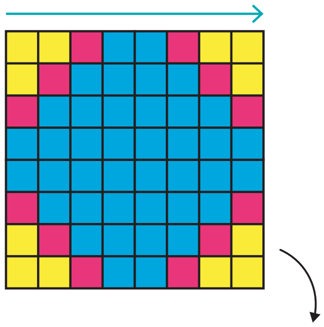
- Em seguida, Gabriela fez a reflexão da figura obtida anteriormente, em relação ao eixo **e** indicado ao lado.



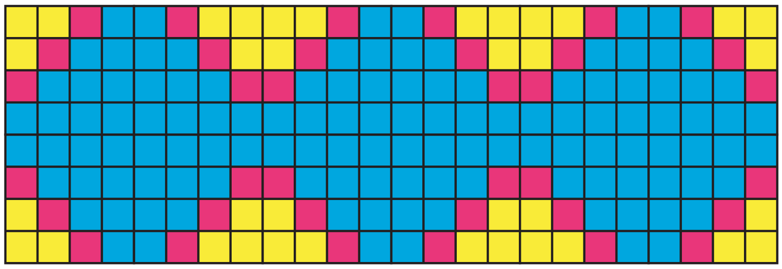
Ilustrações: Carmen Martinez

Anastasiia Makarova/Shutterstock.com

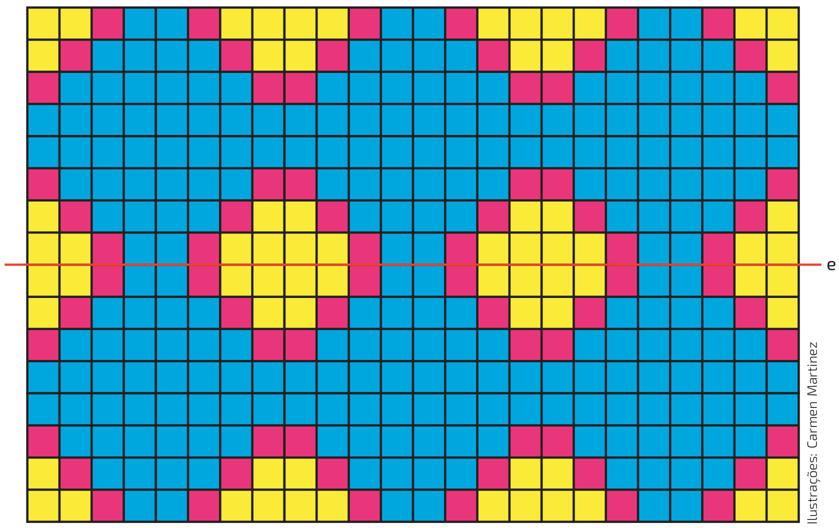
- Quantos eixos de simetria podem ser identificados no cristal de neve de papel que você construiu?
- É possível construir cristais de neve de papel com diferentes quantidades de eixos de simetria?
- Em torno do centro, em quantos graus, no mínimo, o cristal de neve de papel construído pode ser rotacionado de modo que não seja alterado?



- Depois, Gabriela realizou translações da figura obtida. Note que todas as translações foram feitas na horizontal e para a direita, a certa medida de distância, de modo que não houvesse sobreposição.



- Finalmente, Gabriela realizou uma nova reflexão em relação ao eixo **e** indicado a seguir.



Ilustrações: Carmen Martinez

Na seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **282** e **283**, veja como utilizar um *software* de geometria para criar uma composição de figuras a partir de simetrias de reflexão, rotação e translação.

Para obter a composição, Gabriela utilizou a reflexão, a rotação e a translação de figuras em uma determinada ordem. Seria possível obter a mesma imagem realizando as transformações em outra ordem? Em qual ordem?
sim; Resposta pessoal.

Faixa de azulejos com ornamentos portugueses.

Avaliação

- Durante o trabalho com o tópico **Composição de transformações**, avalie os alunos quanto aos conceitos estudados até o momento, principalmente se reconhecem e diferenciam as transformações de reflexão, rotação e translação. Para isso, observe os comportamentos durante as atividades propostas nas páginas seguintes e anote em quais aspectos eles demonstram mais dificuldades e em quais apresentam mais facilidade, ponderando sobre as práticas necessárias para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem.

- Na seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **282** e **283**, apresentamos como utilizar o *software* GeoGebra para criar uma composição de figuras a partir de transformações de reflexão, rotação e translação. Veja a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para utilizarem essa ferramenta.

Material digital

- O material digital dessa coleção apresenta o projeto **Matemática e Arte na composição de mosaicos**, que possibilita um trabalho com os componentes curriculares **Arte** e **Língua Portuguesa** e o tema contemporâneo **Diversidade cultural**, destacado na BNCC. Esse projeto visa explorar a transformação de figuras geométricas em obras de arte e em mosaicos.

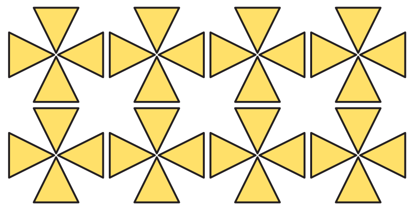
Relacionando saberes

- Aproveite as atividades dessa página para estabelecer uma relação com o componente curricular **Arte**, destacando, por exemplo, o mosaico apresentado na atividade **11**. Se possível, conte com o auxílio do professor responsável pelo componente e converse com os alunos sobre a origem dessa arte milenar, que remonta à Antiguidade greco-romana. Sugira uma pesquisa para que busquem quais são as principais matérias-primas do mosaico e onde mais se aplica, além de pesquisarem também alguns artistas que já se utilizaram da técnica. Para complementar a atividade, proponha que os alunos componham um mosaico de acordo com a criatividade de cada um, utilizando uma malha triangular, disponível nas **Páginas para reprodução**, e lápis de cor.

Atividades

Anote no caderno

9. A imagem ao lado representa uma composição construída a partir da transformação de figuras. a) Possível resposta: o menor elemento utilizado para compor a imagem foi o triângulo.

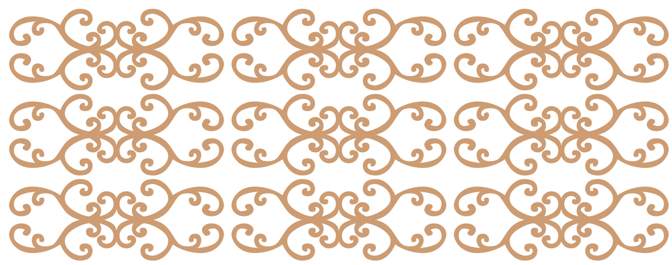


Ronaldo Lucena

a) Qual o menor elemento utilizado para compor a imagem apresentada?

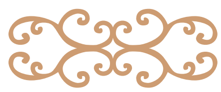
b) Quais transformações foram usadas em sua composição? Possível resposta: reflexão, rotação e translação.

10. Em um trabalho escolar, Célio construiu a seguinte composição.

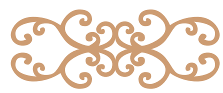


Em qual item está representado o elemento usado por Célio na construção dessa composição? b

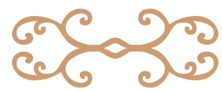
a)



b)

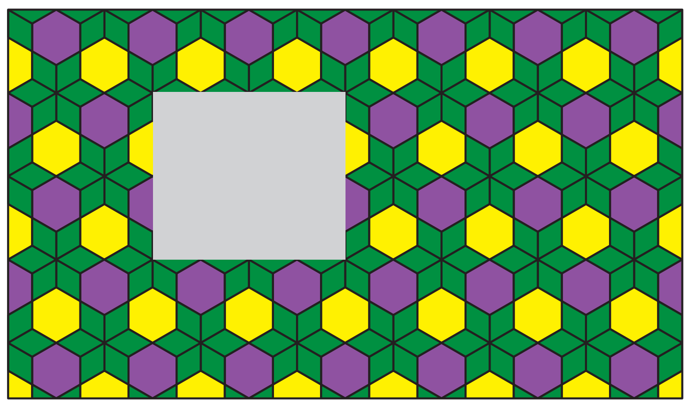


c)



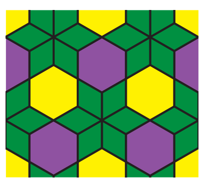
Ilustrações: Rafael L. Gaion

11. Observe o mosaico a seguir, com uma parte faltando.

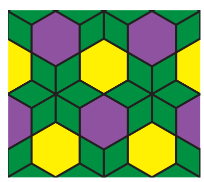


Identifique, entre as partes abaixo, aquelas que não se encaixam nesse mosaico. a e c

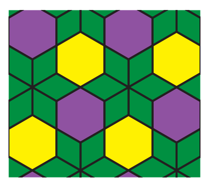
a)



b)



c)



Ilustrações: Rafael L. Gaion

106

Matemática em destaque

12. A arte cerâmica marajoara caracteriza-se por padrões decorativos que se repetem com traços gráficos simétricos e cores da decoração marajoara. Esses traços podem ser encontrados até hoje no artesanato local de Belém e da Ilha de Marajó. Louças e outros objetos, como enfeites e peças de decoração dos antigos povos de Marajó, são exemplos da riqueza cultural dos ancestrais dos povos nativos da área.

Rita Barreto/Fotoarena

Artesanato marajoara.

Carmen Martinez

O padrão simétrico representado ao lado está presente em um dos vasos da fotografia acima. É constituído por quadriláteros e cores (branco, vermelho e preto) que se repetem a partir do reflexo horizontal e vertical, rotação e translação de figuras em uma determinada ordem para obter a imagem.

a) Como se caracteriza a arte marajoara?

b) Quais transformações geométricas você identifica nas cerâmicas da fotografia acima?

c) Junte-se a um colega e criem um desenho baseando-se na arte marajoara.

BNCC em foco

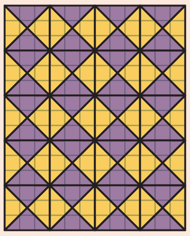
- A atividade dessa página apresenta a cerâmica marajoara e relaciona seu valor cultural com os padrões simétricos e as transformações geométricas que podem ser observados. Aproveite para contemplar o tema contemporâneo **Educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena** e enfatize a importância dessa arte na diversidade cultural brasileira, valorizando o trabalho artístico dos povos nativos, geralmente produzido longe dos grandes centros urbanos.
- Sob a mesma perspectiva, a **Competência geral 3** também é contemplada, tendo em vista que possibilita o apuramento do senso estético dos alunos por meio do contato com manifestações artísticas variadas, nesse caso, a apresentação de uma referência da cultura popular e ancestral brasileira.

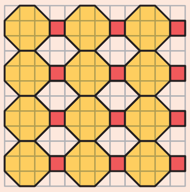
- O trabalho com essa página adapta o conteúdo estudado à realidade vivenciada pelos alunos, tendo em vista que, provavelmente, muitos deles já viram o padrão das cerâmicas indígenas na TV, em *sites*, nas ruas, nos livros ou mesmo pessoalmente. Abordar o conteúdo de maneira contextualizada e objetiva é uma forma de romper as limitações de uma Matemática com aplicações apenas abstratas.

Material digital

- Para complementar o trabalho com o tópico **Composição de transformações**, no material digital dessa coleção disponibilizamos a **Sequência didática 5**, elaborada com objetivo de desenvolver a habilidade **EF08MA18**. As atividades propostas nessa sequência possibilitam reconhecer a simetria em elementos da natureza e em objetos construídos pelo homem, investigar e reconhecer figuras simétricas em relação a um eixo e identificar os diferentes tipos de simetria nas figuras.

- Avalie a possibilidade de produzir um molde ou desenhar na lousa os dois exemplos da atividade **14** para que os alunos realizem a composição.
- Na atividade **14**, os alunos podem elaborar composições como as apresentadas abaixo.





Resposta

15. Possível resposta:

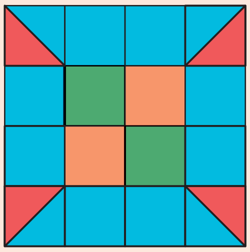


Ilustração: Sergio L. Filho

BNCC em foco

- A atividade **15** possibilita aos alunos enfrentar uma situação-problema inserida em um contexto não diretamente relacionado com o aspecto prático-utilitário e expressar suas respostas por meio de um desenho, contemplando a **Competência específica de Matemática 6**.

13. A imagem a seguir foi construída com o auxílio de um programa de computador.

a) Quantos eixos de simetria tem essa imagem? 2 eixos

b) Qual das figuras a seguir foi usada para construir o padrão apresentado? III

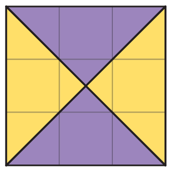
I)

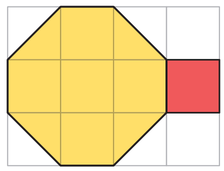
II)

III)

Ilustrações: Sergio L. Filho

14. Elabore, a partir de uma das imagens a seguir, uma composição que envolva, pelo menos, duas das transformações geométricas estudadas.

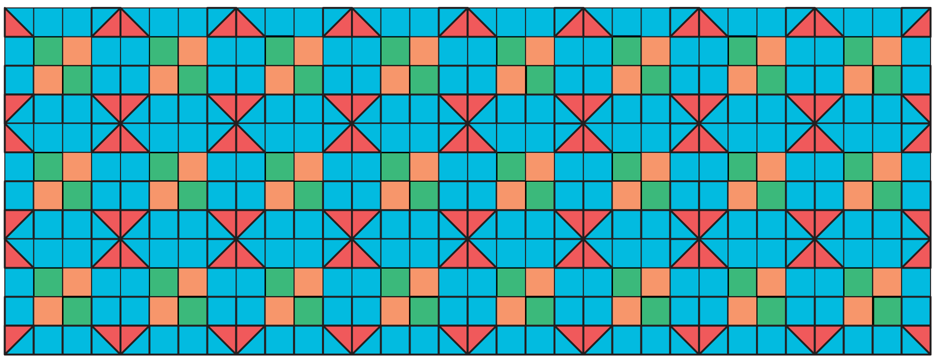




Ilustrações: Ronaldo Lucena

- Quais transformações foram usadas em sua composição? Escreva um passo a passo que permita obter a figura que você construiu.
Resposta nas orientações ao professor.

15. A imagem a seguir foi composta a partir de algumas transformações.



Rafael L. Gaion

Desenhe em seu caderno uma figura usada para obter a composição acima.
Resposta nas orientações ao professor.

Explorando o que estudei

Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo?
simetria de reflexão, reflexão de uma figura, simetria de rotação, rotação de uma figura, translação de uma figura e composição de transformações

2. Explique com suas palavras como podemos construir a imagem de uma dada figura por reflexão em relação a um eixo em uma malha quadriculada.
Resposta pessoal.

3. Leia a frase.

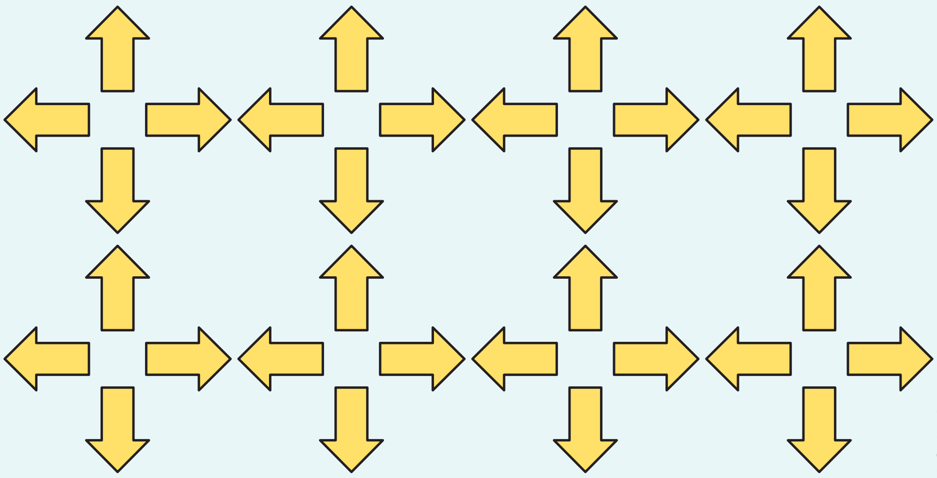
> A nossa imagem refletida em um espelho plano é idêntica a nós, e sua reprodução repete inclusive os movimentos que fazemos, porém ao contrário. Sendo assim, se você utilizar espelhos para observar as imagens simétricas de algumas letras, por exemplo, a letra d, a letra refletida no espelho será a b.

Essa afirmação está correta? Justifique sua resposta por meio de um desenho. sim; Resposta pessoal.

4. Em quais sentidos uma figura pode ser rotacionada? sentido horário ou anti-horário

5. Qual transformação geométrica possibilita obter a imagem de uma dada figura, de acordo com uma medida de distância, uma direção e um sentido, mantendo seu tamanho e sua forma? translação.

6. Observe a imagem a seguir.



Rafael L. Gaion

Quais transformações geométricas foram usadas em sua composição?
Possível resposta: reflexão, rotação e translação.

Avaliação

- Utilize a seção **Explorando o que estudei** para realizar uma avaliação com os alunos. Durante a resolução das atividades, procure observar pontos positivos e negativos e avalie se há necessidade de realizar uma revisão do conteúdo do capítulo, de modo a esclarecer possíveis dúvidas que tenham permanecido. Aproveite também para refletir sobre as práticas pedagógicas utilizadas.

- Avalie a possibilidade de levar os alunos a uma praça em que as calçadas sejam de mosaicos que se assemelham às composições de transformações geométricas, a um museu ou loja com peças indígenas que apresentem esses padrões, ou ainda a uma construção que contenha mosaicos simétricos em suas janelas, para que os alunos possam ter uma experiência real de aplicação do conteúdo e voltem para a sala de aula mais engajados em aprender.

Capítulo 6

Equações, sistemas de equações e inequações

Veículo sendo abastecido.

Os preços dos combustíveis nos postos são determinados por diversos fatores, e não é raro que eles oscilem durante o ano, sofrendo altas ou baixas repentinas. Se o veículo tiver motor *flex*, o consumidor pode economizar optando por encher o tanque com etanol ou com gasolina, de acordo com os preços. Em geral, o litro do etanol é mais barato que o litro da gasolina, porém, o rendimento (quilômetros por litro) da gasolina é maior. Abastecido com etanol, o veículo percorre, em média, cerca de 70% da medida da distância que poderia percorrer com a mesma quantidade de gasolina. Em geral, o etanol será financeiramente vantajoso para o consumidor quando o seu preço por litro for menor do que 70% do preço por litro da gasolina.

Esse capítulo auxiliará os alunos a compreender e resolver equações do 1º grau com uma incógnita, avançando para a representação de situações oriundas de contextos reais e próximos a eles, utilizando sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Para a resolução, serão empregados conceitos geométricos e métodos, como o da substituição e da eliminação.

Além disso, serão abordadas resoluções de inequações do 1º grau com uma incógnita e a resolução e elaboração de problemas envolvendo equações do 2º grau incompletas do tipo $ax^2 = b$.

- A contextualização apresentada na abertura do capítulo permite a observação de informações sobre o etanol e os veículos *flex*, destacando as possibilidades que o consumidor tem de escolher o combustível. Ao abordar o tema e as questões propostas, espera-se que os alunos reconheçam, de maneira intuitiva, o uso de equações em situações do cotidiano. Uma sugestão de condução do trabalho é realizar uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. As respostas das questões propostas podem ser indicadas na lousa, com base no que foi respondido pelos alunos. Nesse momento, incentive a turma a participar. Para complementar o estudo do tema, sugira uma pesquisa acerca do preço do etanol e da gasolina, em algum posto de combustíveis do município em que moram, para verificar qual combustível é mais vantajoso financeiramente, no momento, para se abastecer veículos *flex*.

110

bunyarit/Shutterstock.com

Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

A Em relação ao abastecimento de combustível, qual é a vantagem de se ter um veículo com motor *flex*?

B Com o tanque cheio de gasolina, certo veículo com motor *flex* percorre, em média, 500 km. Quantos quilômetros esse veículo poderia percorrer se o tanque estivesse cheio de etanol?

C Representando por **x** o preço por litro de gasolina e por **y** o preço por litro de etanol, qual das expressões indica que, financeiramente, equivale a abastecer um veículo com motor *flex* com qualquer um dos dois combustíveis?

I) $x = y$ **II)** $\frac{70}{100}x = y$ **III)** $x = \frac{70}{100}y$

Pensando nisso...

A Espera-se que os alunos repondam que o motor *flex* possibilita o abastecimento do veículo tanto com etanol quanto com gasolina, ou seja, o combustível que for mais vantajoso.

B aproximadamente 350 km

C II

- Comente com os alunos, no item **A**, que além de poder escolher qual o combustível mais vantajoso economicamente, também é possível ponderar sobre a poluição produzida por eles, sendo que o etanol é menos poluente quando comparado com a gasolina.

Objetivos do capítulo

- Reconhecer equações do 1º grau.
- Descrever uma situação por meio de uma equação do 1º grau.
- Identificar os elementos de uma equação do 1º grau.
- Resolver equações do 1º grau com uma ou duas incógnitas.
- Reconhecer e resolver sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.
- Analisar graficamente as soluções de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.
- Descrever uma situação por meio de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.
- Reconhecer inequações do 1º grau com uma incógnita.
- Descrever uma situação por meio de uma inequação do 1º grau com uma incógnita.
- Reconhecer equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
- Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

- Verifique se os alunos perceberam que, na equação, a quantia em cédulas de 2 reais corresponde ao produto do valor de cada cédula (**2**) pela quantidade de cédulas (**x**).

Equações do 1º grau com uma incógnita

Rafael possui R$ 43,50, sendo R$ 17,50 em moedas e o restante em cédulas de 2 reais.


Débora Kamogawa

Podemos determinar, por meio de uma **equação**, quantas cédulas de 2 reais Rafael possui. Para isso, indicamos por **x** a quantidade de cédulas de 2 reais e escrevemos a equação:

$$\overbrace{\underbrace{2x}_{\substack{\text{quantia em}\\ \text{cédulas}\\ \text{de 2 reais}}} + \underbrace{17{,}50}_{\substack{\text{quantia em}\\ \text{moedas}}}}^{1^{\underline{o}}\text{ membro}} = \overbrace{\underbrace{43{,}50}_{\substack{\text{quantia}\\ \text{total}}}}^{2^{\underline{o}}\text{ membro}}$$

Podemos resolver essa equação utilizando os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade.

$$2x + 17{,}50 = 43{,}50$$

$$2x + 17{,}50 - 17{,}50 = 43{,}50 - 17{,}50 \leftarrow \text{subtraímos 17,50 dos dois membros}$$

$$2x = 26$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{26}{2} \leftarrow \text{dividimos os dois membros por 2}$$

$$x = 13$$

Portanto, Rafael possui 13 cédulas de 2 reais.

> Lembre-se de que pelo **princípio aditivo** a igualdade se mantém ao adicionarmos ou ao subtrairmos um mesmo número dos dois membros de uma equação. E pelo princípio **multiplicativo**, a igualdade se mantém ao multiplicarmos ou dividirmos os dois membros da equação pelo mesmo número diferente de zero.

Equação é uma sentença matemática expressa por uma igualdade em que há pelo menos uma letra que representa um valor desconhecido, chamada **incógnita**.

Resolver uma equação é determinar o valor desconhecido da incógnita, ou seja, obter a **solução** ou a **raiz** da equação.

Na equação $2x + 17{,}50 = 43{,}50$, por exemplo, a incógnita é **x** e a raiz ou solução é $x = 13$, pois $2 \cdot 13 + 17{,}50 = 26 + 17{,}50 = 43{,}50$.

Dos R$ 17,50 em moedas de Rafael, R$ 2,50 são em moedas de 50 centavos e o restante, em moedas de 1 real. Quantas moedas de 1 real ele tem? 15 moedas

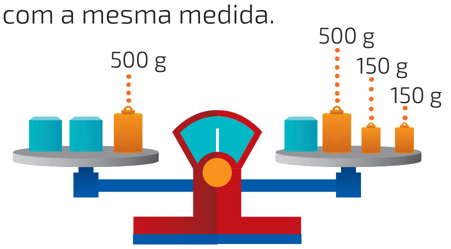
Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **4**, **5** e **6** do 2º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

Atividades

Anote no caderno

1. A balança a seguir está em equilíbrio. Nela, as caixas azuis possuem massas com a mesma medida.



Indicando por **x** a medida da massa de cada caixa azul, podemos obter essa medida escrevendo e resolvendo a seguinte equação.

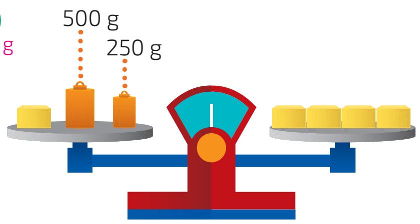
$$2x + 500 = x + 500 + 150 + 150$$
$$2x + 500 = x + 800$$
$$2x + 500 - 500 = x + 800 - 500$$
$$2x = x + 300$$
$$2x - x = x + 300 - x$$
$$x = 300$$

Portanto, a medida da massa de cada caixa azul é 300 g.

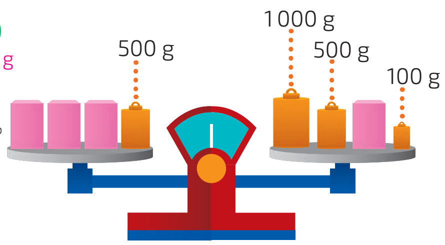
Agora, em cada item, escreva uma equação e determine a medida da massa de cada caixa sobre as balanças em equilíbrio.

> Nessas balanças, caixas de mesma cor possuem medidas de massa iguais.

I) 250 g



II) 550 g



Ilustrações: Cynthia Sekiguchi

2. Determine, entre as equações a seguir, qual permite responder a cada um dos problemas. Em seguida, resolva-a.

$x + x = 25$ $\quad$ $32 + x = 86$

$x + 25 = 86$ $\quad$ $86 + x = 32$

$x + (x + 1) = 25$

a) A soma de dois números consecutivos é 25. Qual é o valor do menor deles? $x + (x + 1) = 25;\ x = 12$

b) Leonardo pagou R$ 86,00 por uma camiseta e um boné. Sabendo que o boné custou R$ 32,00, qual é o preço da camiseta? $32 + x = 86;\ x = 54 \rightarrow$ R$ 54,00

3. Escreva uma equação que represente cada um dos problemas e depois resolva-a.

a) A subtração de 7 do triplo de um número **x** é igual ao dobro desse número mais 2. $3x - 7 = 2x + 2;\ x = 9$

b) A adição de uma unidade ao dobro de um número **x** é igual ao maior número natural de dois algarismos. $1 + 2x = 99;\ x = 49$

c) A quinta parte de um número **x** é igual a esse número menos 12. $\frac{x}{5} = x - 12;\ x = 15$

4. Cláudia comprou em uma panificadora dois pedaços de torta de mesmo preço. Ela pagou essa compra com uma cédula de R$ 50,00 e recebeu R$ 33,40 de troco. Escreva uma equação que permita determinar quantos reais ela pagou em cada pedaço de torta e resolva-a. $2x + 33{,}40 = 50;\ x = 8{,}30$

5. Resolva as equações e determine a quais conjuntos numéricos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ ou $\mathbb{R}$) pertence a solução de cada uma delas.

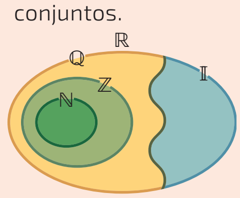
a) $8b - 3 = 5b + 6$ $\quad b = 3;\ \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

b) $2y + 9 = 10 - y$ $\quad y = \frac{1}{3};\ \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

c) $z - 7 = 1 + 2z$ $\quad z = -8;\ \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

d) $5 + 4a = a - 3$ $\quad a = -\frac{8}{3};\ \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

- Explique aos alunos que uma balança está em equilíbrio quando a medida da massa em um prato é igual à medida da massa no outro prato.
- Na atividade **1**, observe e verifique se os alunos perceberam que o 1º membro na equação $2x + 500 = x + 500 + 150 + 150$ corresponde à medida da massa do prato da esquerda, e o 2º membro está relacionado à medida da massa do prato da direita.
- Antes de os alunos resolverem a atividade **5**, lembre-os das relações entre os conjuntos numéricos citados. Para isso, explique as características dos elementos que compõem cada um deles e apresente o diagrama abaixo, que mostra a relação entre esses conjuntos.



Cynthia Sekiguchi

- Complemente o trabalho com as atividades dessa e da próxima página realizando a **Atividade complementar** indicada nos comentários da página a seguir. Nela, é possível estimular os alunos a realizarem cálculo de equações de forma lúdica. Se for necessário, crie outras equações e substitua as que estão no dado.

Atividade complementar

Trilha das equações

Materiais

- dados com expressões
- trilha (tabuleiro)
- cartolina
- tesoura com pontas arredondadas
- cola

Desenvolvimento

- Reproduza o tabuleiro com a trilha, os peões e os moldes dos dados disponíveis nas **Páginas para reprodução** e peça para que os alunos, em grupos de dois ou três, colem-nos na cartolina e depois os recortem e montem para que fiquem resistentes.
- Cada jogador, na sua vez, deve jogar os dados e montar uma equação, a qual deverá ser formada por uma expressão, tirada em um dos dados, no primeiro membro, e a expressão obtida no outro dado, no segundo membro. Depois, o jogador deverá resolvê-la e o peão percorrerá a quantidade de casas da seguinte maneira:
  - se for um número inteiro, caminha para frente a quantidade de casas igual ao valor absoluto da solução.
  - se for um racional não inteiro, arredonda o valor ao inteiro mais próximo e caminha para frente a quantidade de casas correspondente ao valor absoluto arredondado da solução.
- Todos devem efetuar o cálculo para verificar a solução dada pelo jogador da vez, que terá 1 minuto para resolver a equação. Caso erre, deverá voltar 3 casas (se possível). Vence o jogo quem chegar primeiro ao final da trilha.

6. Observe como podemos determinar a solução da equação $3 \cdot \left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{x}{3} + 2$.

$$3 \cdot \left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{x}{3} + 2 \longleftarrow$$ Eliminamos os parênteses utilizando a propriedade distributiva da multiplicação.

$$\frac{3x}{2} - 3 = \frac{x}{3} + 2$$

$$\frac{3x}{2} - 3 + 3 = \frac{x}{3} + 2 + 3 \longleftarrow$$ Adicionamos 3 aos dois membros.

$$\frac{3x}{2} = \frac{x}{3} + 5$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{3} + 5 - \frac{x}{3} \longleftarrow$$ Subtraímos $\frac{x}{3}$ dos dois membros.

$$\frac{3x}{2} - \frac{x}{3} = 5$$

Note que, no 1º membro, temos uma subtração de frações com denominadores diferentes. Nesse caso, podemos obter frações equivalentes a cada uma dessas frações calculando o mmc (2, 3) e, em seguida, dividindo o mmc pelo denominador da fração e multiplicando o resultado pelo numerador.

$$\frac{3x}{2} - \frac{x}{3} = 5$$

$$\frac{\overbrace{9x}^{(6:2)\cdot 3x}}{6} - \frac{\overbrace{2x}^{(6:3)\cdot x}}{6} = 5$$

$$\frac{7x}{6} = 5$$

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{7}{6}x = 5 \cdot \frac{6}{7} \longleftarrow$$ Multiplicamos os dois membros por $\frac{6}{7}$, que é o inverso de $\frac{7}{6}$.

$$x = \frac{30}{7}$$

mmc (2, 3)	
2, 3	2
1, 3	3
1, 1	
mmc (2, 3) = 2 · 3 = 6	

Agora, determine a solução de cada equação.

a) $\frac{x}{4} - 3 = 4 - \frac{x}{3}$ $x = 12$

b) $x + \frac{7}{6} = \frac{11}{2} - \frac{5x}{3}$ $x = \frac{13}{8}$

c) $4 \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{2x}{9}\right) = -1$ $x = -\frac{9}{10}$

d) $\frac{1}{6} \cdot (4x - 12) = \frac{6x}{5}$ $x = -\frac{15}{4}$

e) $2 \cdot \left(\frac{3x}{8} - 2\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{7x}{4}\right) - x$ $x = 1$

7. A soma do antecessor com o sucessor de determinado número é 72. Qual é esse número? 36

8. Natália pagou R$ 315,00 pelas três peças de roupa a seguir.


Avs/Shutterstock.com
Calça *jeans*.


Evikka/Shutterstock.com
Calça *legging*.


NYS/Shutterstock.com
Saia.

Sabendo que as calças têm preços iguais e que a saia custou metade do preço da calça:

a) escreva uma equação que represente essa situação. $2x + \frac{x}{2} = 315$

b) determine o preço pago por Natália em cada peça de roupa. calça: R$ 126,00; saia: R$ 63,00

9. O texto a seguir pertence à coleção de problemas *Antologia grega*, reunida por volta de 500 d.C., cuja solução representaria quantos anos o matemático grego do século III Diofanto viveu.

> [...] "Diofanto passou $\frac{1}{6}$ de sua vida como criança, $\frac{1}{12}$ como adolescente e mais $\frac{1}{7}$ na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar nasceu-lhe um filho que morreu 4 anos antes de seu pai, com metade da idade (final) de seu pai." [...]

Eves, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 225.

a) Qual das equações a seguir representa esse problema? III

I) $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 - 4 + \frac{x}{2} = x$

II) $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} - 5 + 4 + \frac{x}{2} = x$

III) $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + 4 + \frac{x}{2} = x$

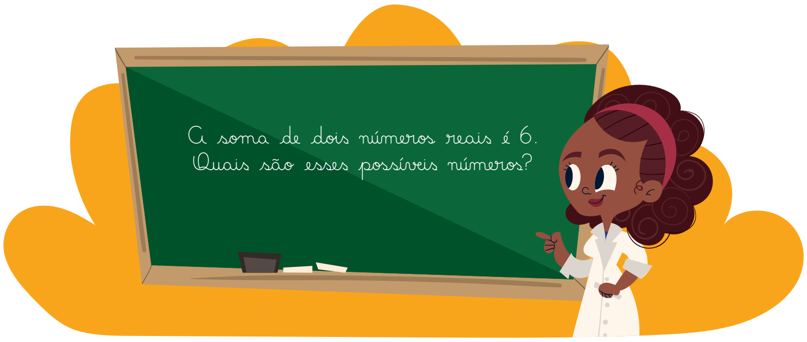
b) Segundo esse problema, quantos anos Diofanto viveu? 84 anos

c) Que idade Diofanto tinha quando se casou? 33 anos

- Explique aos alunos que, na resolução da equação da atividade **6**, na etapa em que se multiplicam os dois membros por $\frac{6}{7}$, essa fração foi escolhida convenientemente por ser o inverso de $\frac{7}{6}$, obtendo como resultado 1x, ou apenas **x** no 1º membro.
- Veja uma possível resolução para a atividade **7**:
  n: o número desconhecido
  $(n-1)+(n+1) = 72$
  $2n = 72$
  $n = 36$
  Logo, o número é 36.
  Caso seja necessário, para resolver essa atividade, auxilie os alunos na escrita da equação $(n-1)+(n+1) = 72$, em que $(n-1)$ indica o antecessor e $(n+1)$ o sucessor do número **n** procurado.
- Para resolver a atividade **8**, peça aos alunos que representem por **x** o preço de cada calça ao escreverem a equação no item **a**.

Equações do 1º grau com duas incógnitas

Observe o problema que a professora escreveu na lousa.



Claudia Souza

Podemos resolver esse problema utilizando uma equação. Para isso, indicamos por **x** e por **y** os números procurados.

$$x + y = 6$$

A seguir, temos alguns possíveis valores de **x** e de **y**.

x	y	x + y
6	0	6 + 0 = 6
5	1	5 + 1 = 6
4	2	4 + 2 = 6
3	3	3 + 3 = 6

x	y	x + y
2	4	2 + 4 = 6
1	5	1 + 5 = 6
0	6	0 + 6 = 6

Dizemos que $x + y = 6$ é uma **equação do 1º grau com duas incógnitas**, **x** e **y**.

As equações que podem ser escritas na forma $ax + by = c$, em que **x** e **y** são as incógnitas, **a**, **b** e **c** são números reais e **a** e **b** são ambos não nulos chamam-se equações do 1º grau com duas incógnitas.

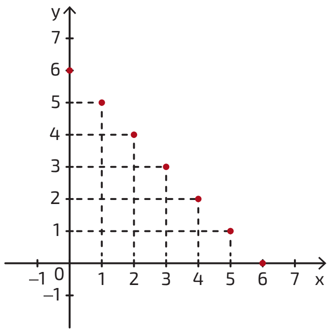
As equações a seguir não são do 1º grau com duas incógnitas.
- $3m - \sqrt{n} = 12$
- $4r - 3s + t = 0$
- $x^2 + y = 31$

Veja alguns exemplos de equações do 1º grau com duas incógnitas.

- $\frac{1}{2}x + 5y = -4$
- $3s - 2t = 11$
- $x + \sqrt{5}y = -5$
- $-3x + 7y = 0$
- $4m + 6n = -\frac{1}{5}$
- $\frac{2}{3}x - \sqrt{2}y = 3$

As **soluções** de uma equação do 1º grau com duas incógnitas são **pares ordenados**. Em relação à equação $x + y = 6$, os pares ordenados (6, 0), (5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5) e (0, 6) são algumas de suas soluções.

Note que os pontos representados no plano cartesiano, se ligados, sugerem uma reta.



Ronaldo Lucena

- Comente com os alunos que os possíveis valores de **x** e **y** apresentados no quadro referem-se apenas a soluções contidas no conjunto dos números naturais (ℕ). Questione-os sobre as condições de se determinar outros pares de números que são solução da equação, incluindo aqueles pertencentes ao conjunto dos números reais (ℝ), não naturais, por exemplo: $5{,}936 + 0{,}064 = 6$ ou $7{,}34 + (-1{,}34) = 6$. Veja que, na página seguinte, essas soluções são abordadas.

BNCC em foco

- A teoria e algumas atividades apresentadas no decorrer do capítulo proporcionam que os alunos compreendam as relações entre conceitos e procedimentos de diferentes campos da Matemática, como a Geometria e a Álgebra. Por meio dessa compreensão, é possível favorecer a segurança dos estudantes quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções, o que vai ao encontro do que postula a **Competência específica de Matemática 3**.

- Explique aos alunos que o ponto e vírgula é usado para separar os números nos pares ordenados com números decimais.

No problema proposto pela professora, está indicado que os números procurados são reais. Assim, podemos atribuir infinitos valores para **x** obtendo, para cada um, um único valor de **y**. Para $x = 2{,}5$, por exemplo, temos:

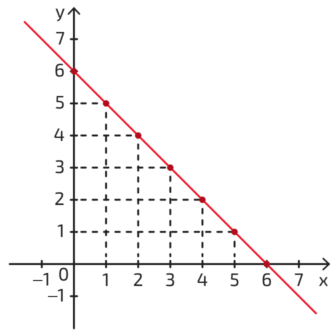
$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 2{,}5 + y &= 6 \\ 2{,}5 - 2{,}5 + y &= 6 - 2{,}5 \\ y &= 3{,}5 \end{aligned}$$

Assim, obtemos o par ordenado (2,5; 3,5).

Veja outros exemplos de valores que podem ser atribuídos a **x**.

x	$x + y = 6 \rightarrow y = 6 - x$	(x, y)
-1	$y = 6 - (-1) = 7$	$(-1, 7)$
$\frac{3}{2}$	$y = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$
2,56	$y = 6 - 2{,}56 = 3{,}44$	(2,56; 3,44)
8	$y = 6 - 8 = -2$	$(8, -2)$

Em um plano cartesiano, os infinitos pares ordenados que são soluções da equação $x + y = 6$ são representados por pontos que constituem uma reta.



Ronaldo Lucena

Pode-se demonstrar que os pontos que representam as soluções de qualquer equação do 1º grau com duas incógnitas na forma $ax + by = c$, em que **x** e **y** são números reais, constituem uma reta. Porém, não apresentaremos a demonstração nesse momento.

Atividades

Anote no caderno

10. Represente cada situação por meio de uma equação do 1º grau com duas incógnitas.

a) A quantidade de pães franceses menos a de pães doces é igual a 3. $x - y = 3$

b) Estela pagou R$ 83,00 por três CDs e um DVD. $3x + y = 83$

c) A soma do quíntuplo da idade de Márcio com a metade da idade de sua mãe é igual a 78 anos. $5x + \frac{y}{2} = 78$

11. Quais pares ordenados a seguir são soluções da equação $x + 2y = -5$?
$(1, -3)$; $(-5, 0)$; $(7, -6)$; $\left(-4, -\frac{1}{2}\right)$ e $(-15, 5)$

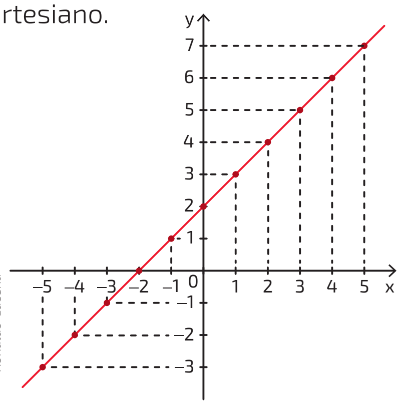
$(1, -3)$	$(1, 2)$	$(-5, -2)$	$(-5, 0)$	$(3, 4)$
$(7, -6)$	$(6, -4)$	$(-15, 5)$	$\left(-4, -\frac{1}{2}\right)$	$(-1, 3)$

12. O triplo de um número natural mais outro número natural é igual a 12.
Respostas nas orientações ao professor.

a) Escreva uma equação que representa essa situação e, em seguida, alguns pares ordenados que sejam solução dessa equação.

b) Represente alguns pares ordenados que são solução da equação que você escreveu no item **a** em um plano cartesiano.

13. Observe a reta representada no plano cartesiano.



Ronaldo Lucena

Essa reta representa as soluções de qual das equações? IV

I) $x - y = 3$

II) $2x + y = 11$

III) $x + y = -4$

IV) $y - x = 2$

14. Em um mesmo plano cartesiano, trace a reta que representa as soluções de cada uma das equações a seguir.
Respostas nas orientações ao professor.

a) $3x - y = 2$

b) $4y - 2x = 0$

c) $\frac{x}{2} + y = -1$

Construa o plano cartesiano em uma malha quadriculada.

15. Para cada par ordenado abaixo, escreva uma equação do 1º grau com duas incógnitas, de modo que ele seja uma de suas soluções.
Possíveis respostas:

a) $(3, 1)$ $x + y = 4$

b) $(-2, 5)$ $x - y = -7$

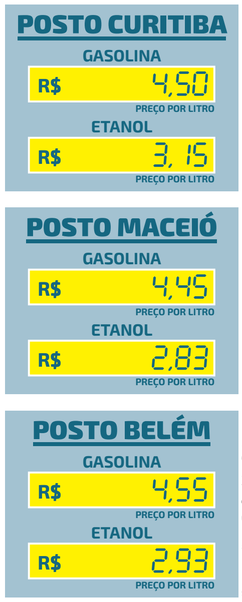
c) $(0, 0)$ $x + y = 0$

d) $(-8, -3)$ $x - y = -5$

Agora, compare as equações que você escreveu com as de um colega.
Resposta pessoal.

16. Para cada um dos pares ordenados da atividade anterior é possível escrever mais de uma equação? Justifique sua resposta.

17. Com base nas informações apresentadas nas páginas **110** e **111**, em qual dos postos de combustíveis a seguir os preços do litro de etanol e de gasolina se equivalem no abastecimento de um veículo com motor *flex*? Curitiba



Ilustrações: Rafael L. Gaion

18. Determine o valor de **a** sabendo que $(-6, a)$ é solução da equação $5y - \frac{x}{2} = 8$. 1

19. Os pares ordenados a seguir, com exceção de um deles, são soluções de uma mesma equação do 1º grau com duas incógnitas.

$\left(0, \frac{3}{2}\right)$ $(-1, 2)$ $(7, -2)$

$(4, 3)$ $(1, 1)$ $(3, 0)$

Qual dos pares ordenados não é solução dessa equação? $(4, 3)$

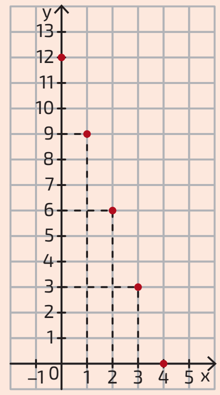
Justifique sua resposta e registre os procedimentos utilizados para resolver esta atividade. Resposta pessoal.

16. sim; Possível resposta: pois um mesmo par ordenado pode ser solução de diferentes equações.

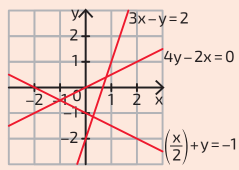
Respostas

12. a) $3x + y = 12$;
Possíveis respostas:
$(0, 12)$, $(1, 9)$, $(2, 6)$, $(3, 3)$, $(4, 0)$

b)



14.



Ilustrações: Sergio L. Filho

- Os nomes dos estabelecimentos que aparecem nessa página são fictícios.
- Nas atividades dessa página, em que é necessária a representação gráfica das soluções de equações, reproduza e distribua aos alunos os planos cartesianos em malhas quadriculadas disponíveis nas **Páginas para reprodução**.

BNCC em foco

- As atividades **13** e **14** possibilitam que os alunos tracem retas no plano cartesiano que representam soluções de equações lineares do 1º grau com duas incógnitas, contemplando a habilidade **EF08MA07**.

- Na atividade **17**, pergunte aos alunos em qual posto é financeiramente mais vantajoso abastecer o carro com gasolina e em qual posto é mais vantajoso abastecer com etanol.

- No trabalho com o tópico dessa página, solicite que os alunos citem outras situações que podem ser representadas por um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, como:
  - Pedro comprou dois salgados e um suco, pelos quais pagou R$ 10,00. Seu irmão comprou um salgado e um suco a mais, pagando R$ 16,50. Qual é o preço do salgado? E do suco?
    R R$ 3,50; R$ 3,00

Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Em um estacionamento, entre carros e motos, há 12 veículos, sendo a maioria carros. A diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos é igual a 3.

Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Edde Aguiar

Podemos resolver essa questão escrevendo duas equações: uma para representar a quantidade total de veículos no estacionamento e outra para representar a diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos. Para isso, chamamos de **x** a quantidade de carros e de **y** a quantidade de motos.

Informação	Equação
Quantidade total de veículos	$x + y = 12$
Diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos	$x - 2y = 3$

As duas equações obtidas formam um **sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas**, que é indicado da seguinte maneira: $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

Para que um par ordenado seja solução desse sistema, ele tem de ser solução das duas equações simultaneamente.

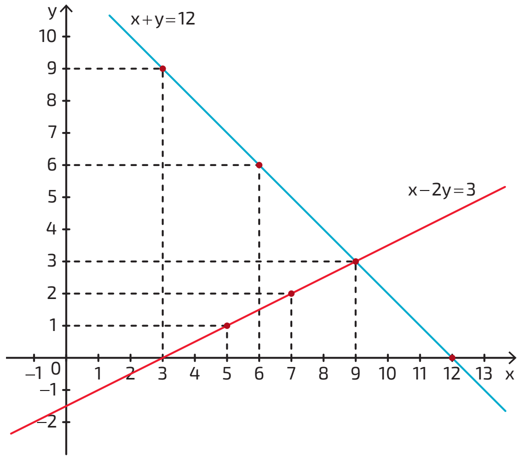
Para resolver esse sistema, podemos realizar **tentativas**, atribuindo valores para **x** e para **y**.

x	y	x + y	x − 2y
11	1	$11 + 1 = 12$	$11 - 2 \cdot 1 = 9$
10	2	$10 + 2 = 12$	$10 - 2 \cdot 2 = 6$
9	3	$9 + 3 = 12$	$9 - 2 \cdot 3 = 3$

Note que os pares ordenados (11, 1) e (10, 2) são solução apenas da equação $x + y = 12$. Já o par ordenado (9, 3) é solução, simultaneamente, das duas equações, assim, é **solução do sistema**.

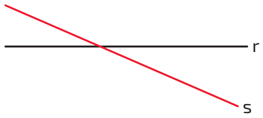
Portanto, há no estacionamento 9 carros e 3 motos.

Podemos representar graficamente esse sistema. Para isso, representamos em um mesmo plano cartesiano as soluções das equações $x + y = 12$ e $x - 2y = 3$.



As retas que representam as soluções das equações são **concorrentes** e se encontram no ponto de coordenadas (9, 3). Assim, o par ordenado (9, 3) é a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

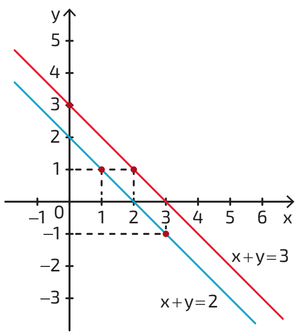
Lembre-se de que duas retas são concorrentes quando se cruzam em um único ponto.



Quando um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas **tem uma única solução**, as retas que representam as soluções das equações desse sistema são concorrentes.

Agora, veja a representação gráfica de outros dois sistemas.

- $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$



Nesse caso, não é possível atribuir valores a **x** e a **y** que satisfaçam simultaneamente as duas equações, pois não existem dois números que, quando adicionados, sejam iguais a 3 e a 2 ao mesmo tempo. Assim, dizemos que esse sistema não tem solução.

Ao representarmos em um mesmo plano cartesiano as soluções de cada equação desse sistema, obteremos retas **paralelas**.

Lembre-se de que duas retas são paralelas quando elas estão no mesmo plano e nunca se cruzam.

Ilustrações: Ronaldo Lucena

Quando um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas **não tem solução**, as retas que representam as soluções das equações desse sistema são paralelas.

- Nesse tópico, optou-se por trabalhar a representação gráfica das soluções das equações de um sistema, a fim de que os alunos percebam visualmente quando o sistema apresenta uma, infinitas ou nenhuma solução.

119

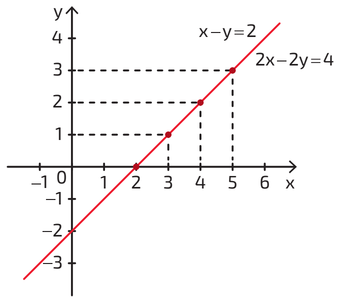
BNCC em foco

- Diversas atividades relacionadas ao tópico **Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas** possibilitam que os alunos resolvam e elaborem problemas com base em contextos reais, próximos a eles, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, e os interpretem utilizando o plano cartesiano, o que contempla a habilidade **EF08MA08**.

- Veja a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática e trabalhar com a proposta da seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **284** e **285**, a qual sugere a representação gráfica de soluções de equações do 1º grau e também a visualização de soluções de sistemas de equações do 1º grau, quando existirem.
- A fim de complementar o trabalho com a atividade **20** e avaliar o conhecimento dos alunos com relação entre o problema escrito na língua materna e sua transcrição para linguagem matemática, proponha a atividade a seguir.
  - Em um sítio, há galinhas e coelhos, num total de 35 animais e 110 patas. Quantas galinhas e quantos coelhos há nesse sítio?
    R 15 galinhas e 20 coelhos

- $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

x	y	x − y	2x − 2y
2	0	$2 - 0 = 2$	$2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 4$
3	1	$3 - 1 = 2$	$2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4$
4	2	$4 - 2 = 2$	$2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4$
5	3	$5 - 3 = 2$	$2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 4$



Nesse caso, diversos valores atribuídos a **x** e a **y** satisfazem simultaneamente as duas equações.

Ao representarmos em um mesmo plano cartesiano as soluções de cada equação desse sistema, obteremos retas **coincidentes**. Assim, dizemos que esse sistema tem infinitas soluções.

Na seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **284** e **285**, veja como utilizar um *software* de geometria para visualizar as soluções de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, caso existam.

Lembre-se de que duas retas são coincidentes quando estão sobrepostas, ou seja, têm infinitos pontos comuns.

a ≡ b

Ilustrações: Ronaldo Lucena

Quando um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas **tem infinitas soluções**, as retas que representam as soluções das equações desse sistema são coincidentes.

Atividades

Anote no caderno

20. Leia o problema e, em seguida, responda às perguntas.

Célia sacou R$ 110,00 em um caixa eletrônico. Essa quantia era composta apenas de cédulas de 10 e de 20 reais, em um total de 8 cédulas. Quantas cédulas de cada valor Célia sacou?

Rafael Lam

a) Qual dos sistemas permite resolver esse problema? II

I) $\begin{cases} 10x + 20y = 8 \\ x + y = 110 \end{cases}$

II) $\begin{cases} 10x + 20y = 110 \\ x + y = 8 \end{cases}$

III) $\begin{cases} x + y = 20 \\ 10x + 8y = 110 \end{cases}$

b) No sistema que você escolheu, qual o significado da letra **x**? E da letra **y**? quantidade de cédulas de 10 reais; quantidade de cédulas de 20 reais

21. O sistema $\begin{cases} 4x - 3y = -4 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases}$ tem uma única solução. Verifique em qual dos itens é apresentada a solução desse sistema. b

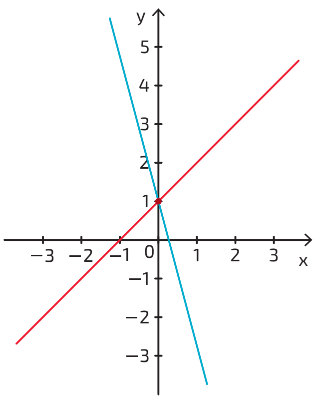
a) $(2, 4)$ **b)** $(5, 8)$ **c)** $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ **d)** $(-3, 7)$

22. Adriana e Felipe possuem juntos a quantidade de CDs indicada na figura, sendo que Adriana possui 4 CDs a mais que Felipe. Chamando de **x** a quantidade de CDs de Adriana e de **y** a quantidade de CDs de Felipe, escreva um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas que possibilite determinar a quantidade de CDs de cada um deles. $\begin{cases} x + y = 28 \\ x - y = 4 \end{cases}$

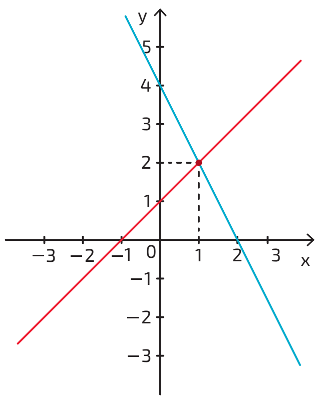
Rafael L. Gaion

23. Qual dos gráficos mostra a solução do sistema $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$? c

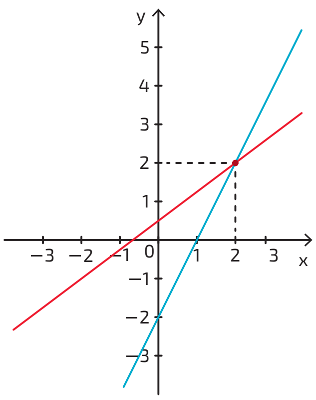
a)



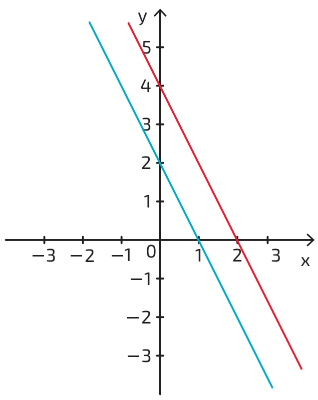
c)



b)

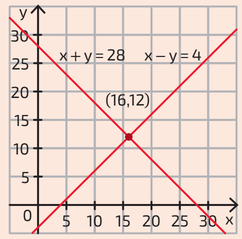


d)



Ilustrações: Ronaldo Lucena

• Na atividade **22**, peça que os alunos determinem os valores de **x** e **y** para saberem qual a quantidade de CDs que Adriana e Felipe têm. Para isso, solicite que construam o gráfico que ajuda a visualizar a solução desse sistema. Veja um gráfico que representa tal solução:



Sergio L. Filho

121

- Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos na questão **26**:
  - Marcos e sua irmã Eva têm juntos R$ 9,00 em moedas, porém Eva tem R$ 2,20 a mais do que ele. Quantos reais em moedas tem cada um?

    Ⓡ Marcos: R$ 3,40; Eva: R$ 5,60.

24. Associe cada sistema de equações à sua representação gráfica, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. a-II; b-III; c-I; d-IV

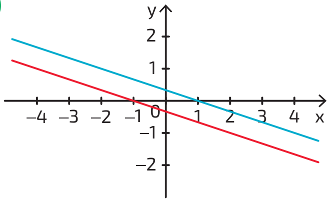
a) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -4x + 2y = -12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$

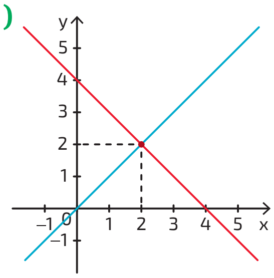
c) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 0y = 10 \\ x + y = 7 \end{cases}$

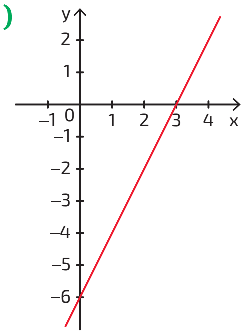
I)



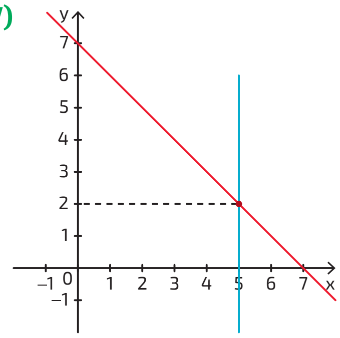
III)



II)

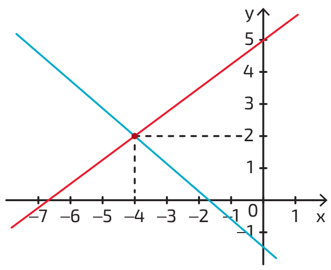


IV)



Ilustrações: Ronaldo Lucena

25. O gráfico mostra a solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.



Ronaldo Lucena

a) Qual é a solução desse sistema? (−4, 2)

b) De acordo com a representação gráfica, é possível que esse sistema possua mais de uma solução? Justifique sua resposta.
Não, pois retas concorrentes se encontram em um único ponto.

26. Com base no sistema de equação abaixo, elabore um problema e, em seguida, dê para um colega resolver. Depois verifique se a resposta de seu colega está correta. Resposta pessoal.

$$\begin{cases} x - y = 2{,}2 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Resolução de sistemas de duas equações pelos métodos da substituição e da eliminação

Vamos estudar alguns métodos para resolver sistemas de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas.

Método da substituição

Em certa competição esportiva, participaram 515 atletas. A quantidade de homens participantes foi maior do que a de mulheres, uma diferença de 45 atletas.

Quantos homens e quantas mulheres participaram dessa competição?

Alfiya Safuanova/Shutterstock.com

Atletas disputando uma maratona.

Para responder a essa questão, podemos escrever e resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Para isso, chamamos de **x** a quantidade de atletas homens e de **y** a quantidade de atletas mulheres.

Informação	Equação	Sistema
Quantidade total de atletas	$x + y = 515$	$\begin{cases} x + y = 515 \\ x - y = 45 \end{cases}$
Diferença entre a quantidade de homens e a de mulheres	$x - y = 45$	

Para resolvermos esse sistema pelo **método da substituição**, escolhemos inicialmente uma das equações e isolamos uma das incógnitas. Nesse caso, vamos escolher a equação $x + y = 515$ e isolar a incógnita **y**.

$$x + y = 515$$
$$x - x + y = 515 - x$$
$$y = 515 - x$$

- No estudo da resolução de um sistema de equações pelo método da substituição, resolva o sistema dado no exemplo isolando **x** ou **y** na equação $x - y = 45$ para que os alunos comparem e verifiquem que a solução obtida é a mesma da apresentada.

Material digital

- Para complementar o trabalho com o tópico **Resolução de sistemas de duas equações pelos métodos da substituição e da eliminação**, no material digital dessa coleção disponibilizamos a **Sequência didática 6**, elaborada com objetivo de desenvolver a habilidade **EF08MA08**. As atividades propostas nessa sequência possibilitam reconhecer que uma equação com duas variáveis pode ter infinitas soluções, identificar a formação de pares ordenados como solução de sistema de equações e resolver sistemas de equações utilizando, além dos métodos abordados no capítulo, o método da comparação.

- Após a solução do problema, a partir dos dois métodos, verifique com os alunos que o total de atletas era dado por $280 + 235 = 515$ e que a quantidade de atletas homens a mais do que atletas mulheres é dada por $280 - 235 = 45$.

Avaliação

- Durante o trabalho com os métodos de resolução de sistemas apresentados, observe se os alunos apresentam dificuldades em manipular equações do 1º grau, pois essa habilidade é fundamental para compreender os métodos de resolução de sistemas de duas equações. Caso um ou mais alunos apresentem dificuldades, antes de prosseguir com o conteúdo, contribua com a aprendizagem possibilitando uma melhor compreensão das atividades e da teoria seguinte. Para isso, apresente os exemplos no quadro e, junto com os alunos, resolva-os de maneira que eles próprios citem os passos necessários para solucionar as equações, conduzindo-os apenas na utilização do método.

Em seguida, para determinar o valor de **x**, substituímos **y** por $515 - x$ na outra equação e resolvemos a equação obtida, que possui apenas uma incógnita.

$$\begin{aligned} x - y &= 45 \\ x - (515 - x) &= 45 \\ x - 515 + x &= 45 \\ 2x - 515 + 515 &= 45 + 515 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x &= 560 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{560}{2} \\ x &= 280 \end{aligned}$$

Para determinar o valor de **y**, substituímos **x** por 280 em qualquer uma das equações do sistema. Nesse caso, vamos substituir **x** por 280 na equação $x + y = 515$.

$$\begin{aligned} x + y &= 515 \\ 280 + y &= 515 \\ 280 - 280 + y &= 515 - 280 \\ y &= 235 \end{aligned}$$

Portanto, o par ordenado (280, 235) é a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 515 \\ x - y = 45 \end{cases}$, ou seja, participaram da competição 280 atletas homens e 235 atletas mulheres.

Método da eliminação

Além do método da substituição, podemos resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas pelo **método da eliminação**.

Veja como podemos resolver por esse método o sistema $\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 8 \end{cases}$.

Note que as equações apresentam os termos opostos **y** e $-y$. Adicionando essas equações membro a membro, a incógnita **y** será eliminada.

$$\begin{array}{r} x + y = 14 \\ x - y = 8 \\ \hline 2x + 0y = 22 \end{array} \longrightarrow 2x = 22$$

Ao adicionarmos duas igualdades membro a membro, obtemos outra igualdade.

Resolvendo a equação $2x = 22$, obtemos o valor de **x**.

$$\begin{aligned} 2x &= 22 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{22}{2} \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Agora, substituímos **x** por 11 em qualquer uma das equações do sistema para obter o valor de **y**. Nesse caso, vamos substituir **x** por 11 na equação $x + y = 14$.

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ 11 + y &= 14 \\ 11 - 11 + y &= 14 - 11 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (11, 3).

Ao resolver o sistema de equações do 1º grau proposto no tópico "Método da eliminação" usando o método da substituição, a solução obtida será a mesma? Justifique. sim; Espera-se que os alunos respondam que, como o sistema apresenta apenas uma solução, independentemente do método utilizado, ela será a mesma.

Alguns sistemas não apresentam termos opostos nas equações. Nesses casos, multiplicamos uma ou as duas equações por números escolhidos convenientemente, a fim de obter termos opostos. Observe os exemplos.

- 1º exemplo: $\begin{cases} 2x - y = 23 \\ x + 3y = 22 \end{cases}$

Para resolvermos esse sistema pelo método da eliminação, podemos inicialmente multiplicar por -2 a equação $x + 3y = 22$, a fim de obter termos opostos.

$$\begin{cases} 2x - y = 23 \\ x + 3y = 22 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x - y = 23 \\ -2x - 6y = -44 \end{cases}$$

No sistema obtido há os termos opostos $2x$ e $-2x$.

Resolvendo o sistema obtido pelo método da eliminação, temos:

$$\begin{array}{r} 2x - y = 23 \\ -2x - 6y = -44 \\ \hline 0x - 7y = -21 \end{array} \longrightarrow y = 3$$

$$\begin{gathered} 2x - y = 23 \\ 2x - 3 = 23 \\ 2x - 3 + 3 = 23 + 3 \\ 2x = 26 \\ \frac{2x}{2} = \frac{26}{2} \\ x = 13 \end{gathered}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (13, 3).

- 2º exemplo: $\begin{cases} 2x - 7y = 4 \\ 3x + 5y = 37 \end{cases}$

Para obtermos nas equações termos opostos, podemos multiplicar a equação $2x - 7y = 4$ por -3 e a equação $3x + 5y = 37$ por 2.

$$\begin{cases} 2x - 7y = 4 \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ 3x + 5y = 37 \xrightarrow{\cdot 2} \end{cases} \begin{cases} -6x + 21y = -12 \\ 6x + 10y = 74 \end{cases}$$

No sistema obtido há os termos opostos $-6x$ e $6x$.

Resolvendo o sistema obtido pelo método da eliminação, temos:

$$\begin{array}{r} -6x + 21y = -12 \\ 6x + 10y = 74 \\ \hline 0x + 31y = 62 \end{array} \longrightarrow y = 2$$

$$\begin{gathered} 6x + 10y = 74 \\ 6x + 10 \cdot 2 = 74 \\ 6x + 20 = 74 \\ 6x + 20 - 20 = 74 - 20 \\ 6x = 54 \\ \frac{6x}{6} = \frac{54}{6} \\ x = 9 \end{gathered}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (9, 2).

- Na solução dos exemplos apresentados nessa página, peça para os alunos construírem as retas que representam as soluções das equações a fim de visualizarem as soluções dos sistemas graficamente.
- Solicite que os alunos resolvam os exemplos apresentados no tópico dessa página utilizando o método da substituição, verificando que as soluções do sistema serão as mesmas, independentemente do método utilizado.

- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **34**:
x: medida de um ângulo interno
y: medida de um ângulo externo
$\begin{cases} x + y = 180° \\ x - y = 90° \end{cases}$
$2x + 0y = 270°$
$2x = 270°$
$x = 135°$
Logo, cada ângulo interno mede 135°. A soma dos ângulos internos de um polígono de **n** lados (ou **n** vértices) é dada por $(n - 2) \cdot 180°$. Assim, temos:
$135° \cdot n = (n - 2) \cdot 180°$
$135° \cdot n = 180° \cdot n - 360°$
$45° \cdot n = 360°$
$n = 8$
Portanto, o polígono possui 8 vértices.
- Na resolução dessa atividade, se for necessário, lembre os alunos de que, em um polígono, os ângulos interno e externo correspondentes são suplementares.

Atividades

Anote no caderno

27. Resolva os sistemas pelo método da substituição.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + y = 28 \end{cases}$ (12, −8)

b) $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ x + 5y = -19 \end{cases}$ (1, −4)

c) $\begin{cases} -2x - 3y = -9 \\ x + 4y = 12 \end{cases}$ (0, 3)

d) $\begin{cases} -6x + 2y = 8 \\ 9x - y = 8 \end{cases}$ (2, 10)

28. Observe os preços dos ingressos em um cinema.

Rafael L. Gaion

Para determinada sessão, foram vendidos 216 ingressos, arrecadando um total de R$ 3 780,00. Determine quantos ingressos de cada tipo foram vendidos.
162 entradas e 54 meias-entradas

29. Utilizando o método da eliminação, resolva.

a) $\begin{cases} x + 7y = -2 \\ -x - 4y = -1 \end{cases}$ (5, −1)

b) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -4x + y = -2 \end{cases}$ (2, 6)

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ -x + 5y = -7 \end{cases}$ (7, 0)

d) $\begin{cases} 3x - 5y = -14 \\ -2x - 8y = -2 \end{cases}$ (−3, 1)

30. Em uma papelaria, a soma dos preços de três cadernos iguais e uma caixa de lápis de cor é R$ 65,15. O preço de um caderno é R$ 2,00 a mais do que o de duas caixas de lápis de cor. Quanto custam um caderno e uma caixa de lápis de cor?
R$ 27,35

31. Em uma turma de 8º ano estudam 25 alunos, sendo a maioria meninos. A diferença entre a quantidade de meninos e a de meninas é 7 alunos. Escreva um sistema de equações e determine a quantidade de meninos e meninas dessa turma. $\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 7 \end{cases}$; 16 meninos e 9 meninas

32. Daniele abasteceu seu carro *flex* com 5 L de etanol e 8 L de gasolina, pagando a quantia de R$ 54,65. No dia seguinte, ela o abasteceu com 8 L de etanol e 4 L de gasolina, pagando R$ 44,32. Sabendo que não houve alteração nos preços, qual é o valor pago por Daniele em cada litro de etanol? E de gasolina?
etanol: R$ 3,09; gasolina: R$ 4,90

33. Uma revendedora de água mineral comercializa apenas garrafas de 5 L e 1 L. Observe o preço unitário de cada garrafa.

Ronaldo Lucena

Em certo dia foram vendidas 66 garrafas de água, arrecadando no total R$ 302,40. Quantos litros de água foram vendidos nesse dia? 266 L

34. Determine a quantidade de vértices de um polígono regular sabendo que a diferença entre a medida de um de seus ângulos internos e a de um dos ângulos externos é igual a 90°. 8 vértices

126

35. Represente graficamente a solução de cada sistema. Respostas nas orientações ao professor.

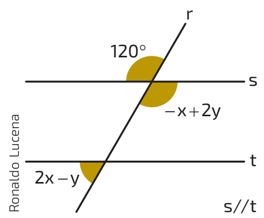
a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 6y = -12 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x + y = -1 \end{cases}$

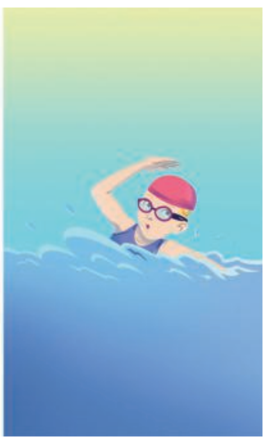
d) $\begin{cases} -6x + y = 6 \\ x + \dfrac{y}{2} = 3 \end{cases}$

36. Realize os cálculos necessários e determine os valores de **x** e **y**. $x = 80°$; $y = 100°$



37. Segundo especialistas, um adulto gasta, em média, 520 quilocalorias em uma hora de natação e 750 quilocalorias em uma hora de corrida. Se semanalmente certa pessoa adulta nada 30 min a menos do que corre, gastando na prática desses dois esportes 2 915 quilocalorias, quantas horas por semana ela pratica cada um desses esportes?
corrida: 2,5 h; natação: 2 h

> Lembre-se de que 30 min é igual a 0,5 h



Ilustrações: Rafael Lam

38. O par ordenado $(-3, 2)$ é a única solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Sabendo que uma das equações é $2x - 3y = -12$, represente graficamente esse sistema.

Agora, compare o gráfico que você construiu com o de um colega. As retas que vocês traçaram representam as retas das mesmas equações? Justifique.
Resposta pessoal.

39. De acordo com as informações abaixo, elabore um problema que possa ser resolvido por meio de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Em seguida, entregue-o para um colega resolver e verifique se ele o resolveu corretamente.

> Uma prova é composta de 40 questões. A cada questão respondida corretamente são somados 3 pontos na nota, mas as que forem respondidas incorretamente ou não respondidas, descontam-se 2 pontos. Resposta pessoal.

40. Leia o problema.

> Em uma banca, a quantidade de revistas de culinária e de esportes totaliza 350. O dobro da quantidade de revistas de esportes menos o triplo das revistas de culinária é igual a 10. Quantas revistas de culinária e quantas de esportes há nessa banca?

Por meio de qual sistema é possível resolver esse problema? II

I) $\begin{cases} c - e = 350 \\ 2e - 3c = 10 \end{cases}$ **II)** $\begin{cases} c + e = 350 \\ 2e - 3c = 10 \end{cases}$

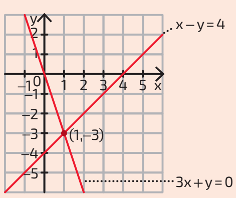
Agora, resolva o sistema escolhido e responda ao problema.
138 revistas de culinária e 212 revistas de esportes

41. Elabore um problema no qual seja necessário escrever e resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se ele o resolveu corretamente. Resposta pessoal.

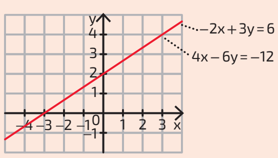
- Para resolver a atividade **36**, lembre aos alunos as propriedades dos ângulos formados por um par de retas paralelas e uma transversal, conteúdo estudado no volume do **7º** ano da coleção.
- Ao compararem os gráficos construídos na atividade **38**, é importante que os alunos percebam que existem infinitas retas determinadas por um único ponto no plano cartesiano.
- Na atividade **39**, os alunos podem elaborar um problema com a pergunta que segue:
  - Sabendo que nessa prova um aluno ficou com 30 pontos, quantas questões ele acertou e quantas ele errou ou não respondeu?
    R acertou: 22; errou ou não respondeu: 18
- Veja um possível problema elaborado pelos alunos na atividade de **41**:
  - João usou apenas notas de R$ 20,00 e de R$ 5,00 para pagar R$ 140,00 a um amigo. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que, no total, foram utilizadas 10 notas?
    R João usou 6 notas de R$ 20,00 e 4 notas de R$ 5,00.

Respostas

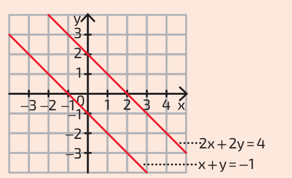
35. a)



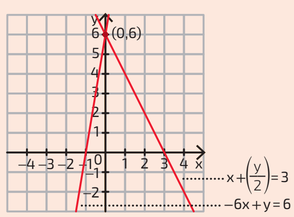
b)



c)



d)

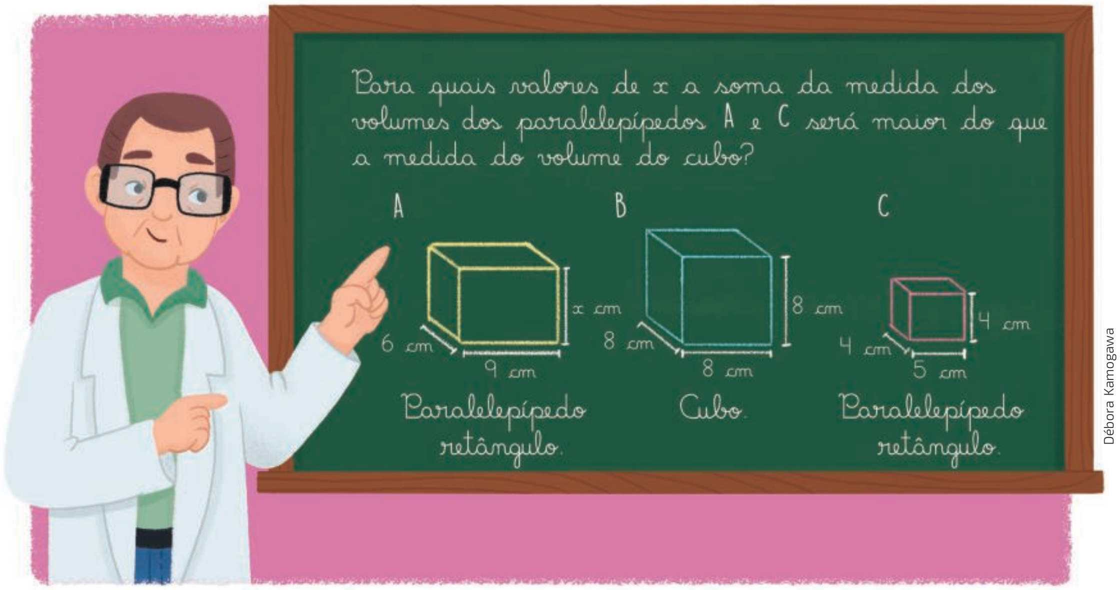


Ilustrações: Sergio L. Filho

- Lembre os alunos de que, para determinarmos a medida do volume de um paralelepípedo retângulo, multiplicamos as medidas de suas dimensões. Já no cubo, como as três dimensões têm medidas iguais, a medida do seu volume é obtida elevando-se ao cubo a medida de sua aresta.
- Verifique se os alunos compreendem os símbolos que representam as desigualdades nas inequações. Caso seja necessário, apresente outros exemplos.

Inequações do 1º grau com uma incógnita

Observe o problema proposto pelo professor.



Débora Kamogawa

Para resolvermos essa questão, inicialmente calculamos, em centímetros cúbicos, a medida do volume de cada figura geométrica espacial.

- Medida do volume de **A**: $9 \cdot 6 \cdot x = 54x$.
- Medida do volume de **B**: $8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.
- Medida do volume de **C**: $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$.

Como a soma da medida dos volumes de **A** e **C** deve ser maior do que a medida do volume de **B**, escrevemos uma sentença matemática chamada **inequação**.

$$\underbrace{54x + 80}_{1^{\circ}\ \text{membro}} > \underbrace{512}_{2^{\circ}\ \text{membro}}$$ (lê-se: 54x mais 80 **maior** do que 512)

Nessa inequação, o 1º membro indica a soma da medida dos volumes de **A** e **C** e o 2º membro, a medida do volume de **B**.

Inequações são sentenças matemáticas que possuem uma ou mais incógnitas e são expressas por uma das seguintes desigualdades: $>$ (maior), $<$ (menor), $\geq$ (maior ou igual) e $\leq$ (menor ou igual).

Exemplos:

- $3x > 9$ ⟵ lê-se: 3x **maior** do que 9
- $2x \geq x + 3$ ⟵ lê-se: 2x **maior ou igual** a **x** mais 3
- $5x - 2 < 8$ ⟵ lê-se: 5x menos 2 **menor** do que 8
- $-x \leq 12$ ⟵ lê-se: menos x **menor ou igual** a 12

Podemos determinar o valor de **x** resolvendo a inequação $54x + 80 > 512$. Para isso, podemos utilizar o princípio aditivo e o princípio multiplicativo.

> A desigualdade se mantém:
> - ao adicionarmos ou ao subtrairmos um mesmo número nos dois membros de uma inequação (**princípio aditivo**).
> - ao multiplicarmos ou dividirmos os dois membros da inequação por um mesmo número real positivo (**princípio multiplicativo**).

Resolvendo a inequação, temos:

$$54x + 80 > 512$$

$$54x + 80 - 80 > 512 - 80 \leftarrow \text{subtraímos 80 dos dois membros da desigualdade}$$

$$54x > 432$$

$$\frac{54x}{54} > \frac{432}{54} \leftarrow \text{dividimos por 54 os dois membros da desigualdade}$$

$$x > 8$$

A solução dessa inequação é todo número real maior do que 8, e pode ser representada pela parte em destaque na reta real.

Ronaldo Lucena

O símbolo ∘ indica que o número 8 não pertence à solução dessa inequação.

Portanto, **x** deve ser maior do que 8 cm.

A fim de verificar a solução obtida, atribuímos a **x** valores menores, iguais e maiores do que 8 na inequação inicial.

$x = 7$	$x = 8$	$x = 9$
$54x + 80 > 512$ $54 \cdot 7 + 80 > 512$ $458 > 512$ desigualdade falsa	$54x + 80 > 512$ $54 \cdot 8 + 80 > 512$ $512 > 512$ desigualdade falsa	$54x + 80 > 512$ $54 \cdot 9 + 80 > 512$ $566 > 512$ desigualdade verdadeira

Note que para o valor menor ou igual a 8, a desigualdade obtida é falsa. Já para o valor maior do que 8, a desigualdade obtida é verdadeira.

Veja o que ocorre quando multiplicamos ou dividimos os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número negativo.

$$5 > -7$$
$$(-1) \cdot 5 < (-7) \cdot (-1)$$
$$-5 < 7$$

Note que, ao multiplicarmos os dois membros por um mesmo número negativo, temos de inverter a desigualdade para que ela fique verdadeira. Caso contrário, obteríamos $-5 > 7$, que é uma desigualdade falsa.

$$4 < 8$$
$$\frac{4}{-2} > \frac{8}{-2}$$
$$-2 > -4$$

O mesmo ocorre quando dividimos os dois membros por um mesmo número negativo. Nesse caso, também invertemos a desigualdade para que ela fique verdadeira.

- Explique aos alunos que, na representação geométrica de uma inequação **maior do que** (>) ou **menor do que** (<), utilizaremos "bolinha aberta" (**o**). Nas inequações **maior ou igual a** (≥), ou **menor ou igual a** (≤), utilizaremos "bolinha fechada" (**●**).
- Peça que os alunos atribuam outros valores a **x**, além dos apresentados no quadro, inclusive números não inteiros na inequação, para verificarem se a desigualdade obtida é verdadeira ou falsa.

- Veja duas possíveis situações elaboradas pelos alunos no item **d** da atividade **45**:
  - Mariana tem o dobro da quantia em dinheiro que tem sua irmã. Juntas, elas têm mais do que R$ 250,00.
    R $x + 2x > 250$
  - O dobro da idade de Fátima mais 5 é menor do que 37.
    R $2x + 5 < 37$

Quando multiplicamos ou dividimos os dois membros de uma inequação por um mesmo número negativo, invertemos o sinal da desigualdade para que a sentença obtida permaneça verdadeira.

Observe outros exemplos com inequações.

- $-2x \geq 8$

$$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{8}{-2}$$

$$x \leq -4$$

- $-x + 25 < 12$

$$-x + 25 - 25 < 12 - 25$$

$$-x < -13$$

$$(-1) \cdot (-x) > (-13) \cdot (-1)$$

$$x > 13$$

Sergio L. Filho

O símbolo ● indica que o número −4 pertence à solução dessa inequação.

Atividades

Anote no caderno

42. Quais das sentenças são inequações? a; c

a) $7x + 4 > -3$

b) $8x - 13y = 9$

c) $a - \frac{9}{2} \leq 2a + 8$

d) $x^2 + 5x - 6$

43. Associe cada inequação a uma frase, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. a–IV; b–III; c–I; d–II

a) O triplo de um número menos 1 é menor do que −7.

b) A metade de um número mais 8 é maior ou igual a 20.

c) O quádruplo de um número menos 5 é maior do que seu triplo mais 11.

d) A sexta parte de um número mais seu dobro é menor ou igual ao seu triplo.

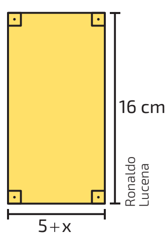
I) $4x - 5 > 3x + 11$

II) $\frac{x}{6} + 2x \leq 3x$

III) $\frac{x}{2} + 8 \geq 20$

IV) $3x - 1 < -7$

44. A medida do perímetro da figura deve ser maior ou igual a 50 cm. Escreva uma inequação que represente essa condição.
$2x + 42 \geq 50$



Ronaldo Lucena

45. Escreva uma inequação para cada uma das situações. I: $x \leq 80$; II: $3x > 5$; III: $\frac{x}{2} \geq 21$

I)

Rafael L. Gaion

II)

Claudia Souza

III)

A metade de um número deve ser maior ou igual a 21.

a) Na situação **I**, um veículo que trafega a 75 km/h está abaixo ou acima da velocidade máxima permitida? abaixo

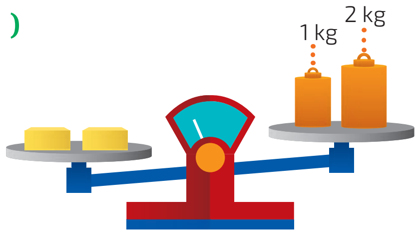
b) De acordo com as informações da situação **II** é possível comprar seis bombons com R$ 10,00? não

c) O número 42 é uma solução da inequação que representa a situação **III**? E o número 40? sim; não

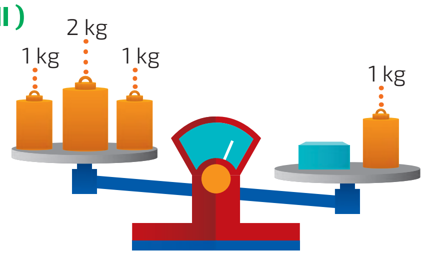
d) Elabore duas outras situações que podem ser representadas por inequações. Em seguida, escreva as inequações. Resposta pessoal.

46. As balanças de dois pratos estão em desequilíbrio. Nessas balanças, caixas de mesma cor possuem a mesma medida de massa.

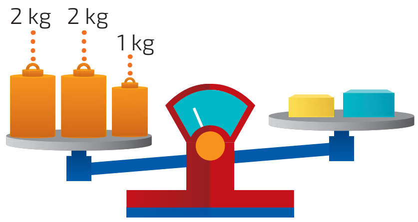
I)



II)



III)



Ilustrações: Cynthia Sekiguchi

a) Escreva uma inequação que represente a situação de cada uma dessas balanças. I: $2x > 3$; II: $4 < y + 1$; III: $5 > x + y$

b) Qual das caixas possui maior medida de massa? caixa azul

c) A medida da massa de cada caixa amarela é menor ou maior do que 1,5 kg? Justifique. maior; Espera-se que os alunos respondam que, como duas caixas amarelas têm mais de 3 kg, cada caixa tem mais de 1,5 kg.

d) A medida da massa de cada caixa azul é maior do que 2,5 kg e menor do que 4 kg? sim

e) Qual a medida da massa máxima e a medida de massa mínima de cada uma das caixas? caixa amarela: mais de 1,5 kg e menos de 2 kg; caixa azul: mais de 3 kg e menos de 3,5 kg

f) É possível determinar a medida da massa exata de alguma dessas caixas? Justifique.
não; Espera-se que os alunos justifiquem dizendo que há apenas balanças em desequilíbrio.

47. Escreva quatro números inteiros que sejam soluções da inequação: Possível resposta:

a) $5x - 3 > 2x - 5$. 0, 1, 2 e 3

b) $6x - 1 \leq 3x + 3 - x$. 1, 0, −1 e −2

c) $7 + 4x \geq 3 \cdot (2 + x)$. −1, 0, 1 e 2

d) $\frac{3}{4}x - 3 < \frac{2}{5} - x - \frac{3}{20}$. 1, 0, −1 e −2

48. Quais dos números a seguir são soluções da inequação $2x + 5 > 13$? 5,3; 20; 9; $6\frac{2}{3}$; 59

0 | $5{,}3$ | -2 | $\sqrt{6}$ | $\frac{1}{8}$ | 20

-17 | 4 | 9 | $6\frac{2}{3}$ | 59

Agora, determine em qual dos itens está representada a solução dessa inequação. a

a) 

b) 

c) 

Ilustrações: Sergio L. Filho

49. Resolva as inequações.

a) $3x - 12 < -9$ $x < 1$

b) $5x + 1 \geq 7 + 4x$ $x \geq 6$

c) $-x - 2 > -4x - 6$ $x > -\frac{4}{3}$

d) $8 + 2x \leq -6x + 20$ $x \leq \frac{3}{2}$

50. Escreva uma situação que corresponda a cada inequação apresentada. Resposta pessoal.

a) $4x \leq 12$ **b)** $2x > x + 6$ **c)** $x - 2 < 8$

51. Micheli pretende realizar uma viagem gastando com transporte e estadia, no máximo, R$ 1 950,00. Sabendo que ela gastará R$ 450,00 com o transporte, para cada item escreva uma inequação e responda.

a) Quantos dias, no máximo, ela poderá ficar hospedada em um hotel cuja diária é R$ 300,00? $300x + 450 \leq 1950$; 5 dias

b) Se ela escolher um hotel em que a diária custa R$ 375,00, quantos dias, no máximo, ela poderá ficar hospedada? $375x + 450 \leq 1950$; 4 dias

- Na atividade **46**, com base nas imagens apresentadas, dê as explicações necessárias em cada item a fim de que os alunos compreendam e consigam responder às questões.
- Algumas possibilidades de situações escritas pelos alunos nos itens da atividade **50** são:

Item **a**:
- Se gasto R$ 4,00 por dia com lanche na escola, qual o máximo de dias que consigo lanchar com R$ 12,00?

R $4x \leq 12$; 3 dias

Item **b**:
- A medida de massa de uma caixa mais 6 kg é mais leve do que o dobro da medida da massa dessa caixa.

R $2x > x + 6$

Item **c**:
- A minha idade menos 2 é menor do que a do meu amigo de 8 anos.

R $x - 2 < 8$

- Na atividade **51**, diga aos alunos que a quantidade de diárias deve ser um número natural, ou seja, a solução da inequação em cada item deve ser dada pelo maior número natural possível.

131

Relacionando saberes

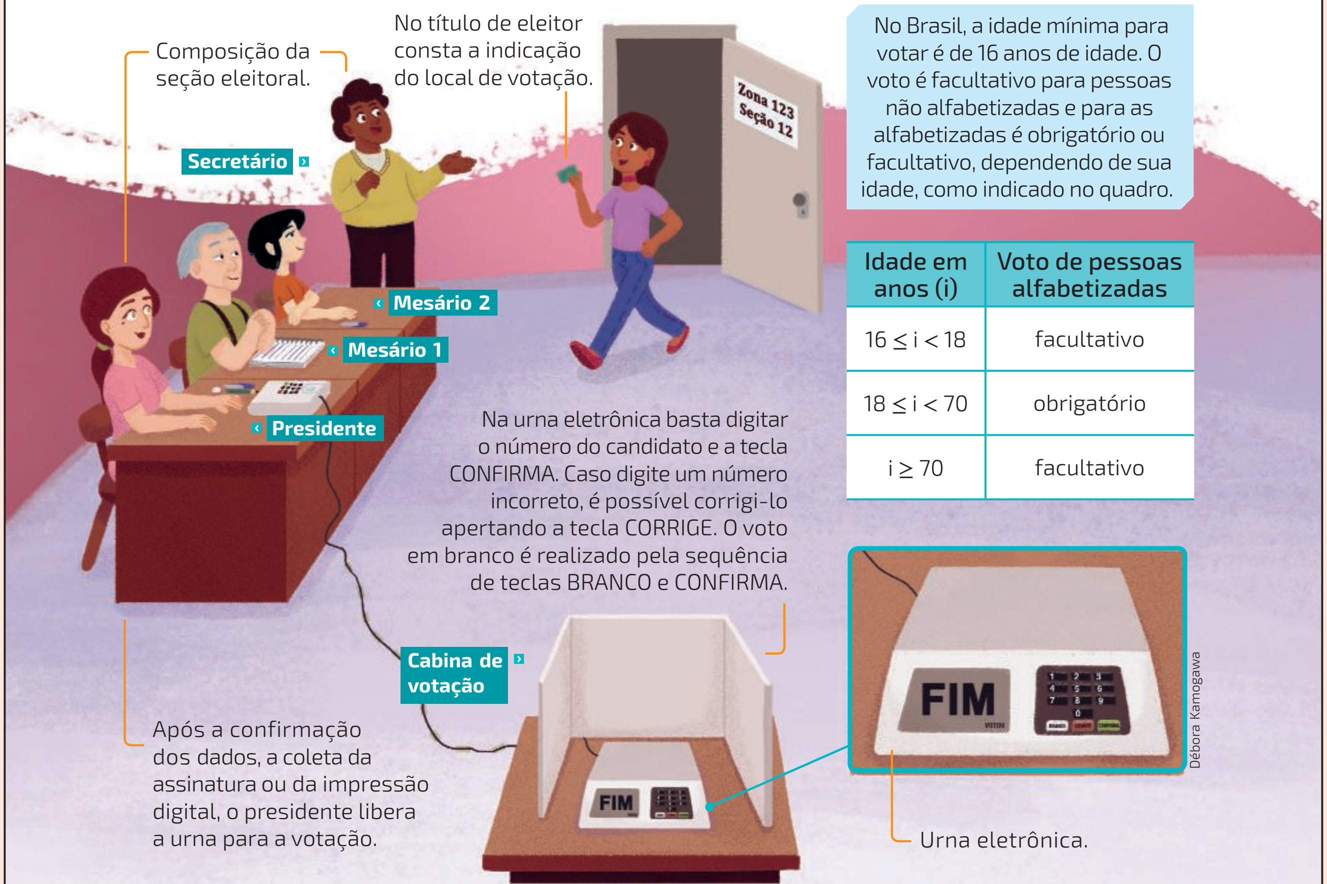
- A atividade apresentada nessa página pode ser relacionada ao componente curricular **História**, por lançar mão de um tema ligado ao regime político do país. Aproveite para sugerir uma pesquisa sobre o tema que pode ser feita com o auxílio do professor responsável pelo componente, a fim de que os alunos compreendam os movimentos políticos que levaram o Brasil a ter um regime democrático.

- Para enfatizar mais a importância do voto, pergunte aos alunos se eles se lembram do nome do prefeito do município, do governador do estado ou de um vereador, procurando informá-los sobre as principais atribuições desses cargos.
Explique aos alunos que, para anular o voto, deve-se digitar o número de um candidato que não existe e a tecla CONFIRMA. Geralmente, isso é feito digitando apenas zeros.
Diga também que só é realizada a coleta da digital por meio do sistema de biometria nas cidades em que os eleitores realizaram o cadastro antecipadamente. Nas outras cidades ou quando ocorre falha no reconhecimento biométrico, é realizada a coleta da assinatura.
Outra informação importante para os alunos é a de que, para emitir o título de eleitor, é necessário comparecer ao cartório eleitoral com um documento oficial e original, comprovante de residência e de quitação do serviço militar (no caso dos homens que completam 18 anos no ano do alistamento eleitoral).
Explique aos alunos que voto facultativo é quando o eleitor tem a opção de votar, mas não a obrigação.

Matemática em destaque

52. O regime político atual brasileiro é a democracia, em que um dos pressupostos é a participação do povo, sendo o voto a sua principal forma de expressão. O voto é um direito de todos e possibilita a escolha de representantes para diversos cargos, como vereador, prefeito, deputados estadual e federal, senador, governador e presidente da República. Para a escolha de um candidato é importante avaliar o que ele já realizou e quais são suas propostas para uma sociedade melhor.

Observe uma seção eleitoral em um dia de votação.



No Brasil, a idade mínima para votar é de 16 anos de idade. O voto é facultativo para pessoas não alfabetizadas e para as alfabetizadas é obrigatório ou facultativo, dependendo de sua idade, como indicado no quadro.

Idade em anos (i)	Voto de pessoas alfabetizadas
$16 \leq i < 18$	facultativo
$18 \leq i < 70$	obrigatório
$i \geq 70$	facultativo

a) Quais critérios você utilizaria para a escolha de um candidato? Resposta pessoal.

b) Uma pessoa alfabetizada, com 15 anos de idade, pode votar? Por quê? Não, pois o voto é um direito das pessoas com 16 anos de idade ou mais.

c) O voto é obrigatório ou facultativo para uma pessoa alfabetizada de:

- 16 anos? facultativo
- 63 anos? obrigatório
- 75 anos? facultativo
- 18 anos? obrigatório
- 34 anos? obrigatório
- 70 anos? facultativo

d) De acordo com sua idade você pode votar? Caso não possa votar, a partir de que ano é possível você emitir o título de eleitor? Resposta pessoal.

- No item **d**, é importante o aluno perceber que o ano em que poderá emitir o título de eleitor é aquele em que ele completará 16 anos de idade após a data de seu aniversário.

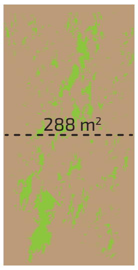
BNCC em foco

- Atividades como essa, que informam os alunos sobre fatores importantes da vida em sociedade, são uma maneira eficiente de contemplar a **Competência geral 9**, no sentido de que promovem a empatia e a cooperação por fazerem com que os alunos se reconheçam como parte de uma coletividade e se comprometam com ela, no que diz respeito a exercer o direito de votar e, por meio desse voto, buscar melhorias para a sua comunidade.

Equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$

Nas seções anteriores estudamos as equações do 1º grau, ou seja, equações cujo expoente das incógnitas é 1. Nesta seção, vamos estudar um tipo de equação cujo expoente da incógnita é 2.

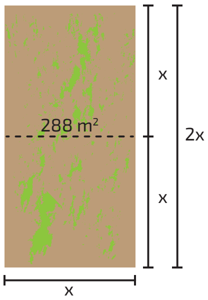
Considere um terreno com formato retangular que será dividido em dois terrenos iguais com formato de quadrado. Se a medida da área do terreno retangular é 288 m², qual será a medida do comprimento do lado dos terrenos com formato de quadrado?



Para resolver esse problema, chamamos de **x** a medida do comprimento do lado dos terrenos com formato de quadrado.

Assim, temos que a medida da área de cada terreno com formato de quadrado é x^2 e a medida da área do terreno retangular é $2x^2 = 288$.

Ilustrações: Ronaldo Lucena



Dizemos que $2x^2 = 288$ é uma **equação do 2º grau**, pois a incógnita tem expoente 2. Para resolvê-la, inicialmente isolamos x^2 em um dos membros.

$$2x^2 = 288$$

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{288}{2} \longleftarrow \text{dividimos os dois membros por 2}$$

$$x^2 = 144$$

Temos que há dois números cujo quadrado é 144, isto é:

$x = 12$ ou $x = -12$

Nessa caso, **x** corresponde à medida do comprimento do lado de um terreno, e como uma medida de comprimento não pode ser negativa, desconsideramos o valor negativo −12.

Portanto, cada um dos terrenos com formato de quadrado tem comprimento do lado medindo 12 m.

As equações que podem ser escritas na forma $ax^2 + b = 0$, em que **a** e **b** são números reais, com $a \neq 0$, são chamadas equações do **2º grau incompletas**. Exemplos:

- $x^2 - 3 = 0$
- $-3x^2 = -27$
- $2,5x^2 = 0$

- No tópico **Equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$** são estudadas apenas as equações do 2º grau incompletas desse tipo. As equações completas do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ e os outros tipos de equações incompletas do 2º grau serão estudadas mais adiante.
- Se julgar conveniente, peça aos alunos que consultem o capítulo **2** desse volume e retome com eles o conceito de raiz quadrada, a fim de auxiliá-los na compreensão do conteúdo abordado nesse tópico.

BNCC em foco

- As atividades propostas nessa página e na página seguinte contemplam a habilidade **EF08MA09**, pois levam o aluno a resolver e elaborar problemas que podem ser representados por equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com e sem o uso de tecnologias.

- Na atividade 56, os alunos podem elaborar um problema com a seguinte pergunta:
  - Qual a medida do comprimento e da largura desse terreno?

    R medida do comprimento: 27 m; medida da largura: 9 m
- Na seção **Explorando tecnologias**, na página **286**, apresentamos uma maneira de resolver equações do tipo $ax^2 = b$ utilizando o *software* GeoGebra. Veja a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para utilizarem essa ferramenta na resolução de alguns problemas que envolvem esse tipo de equação.

Atividades

Anote no caderno

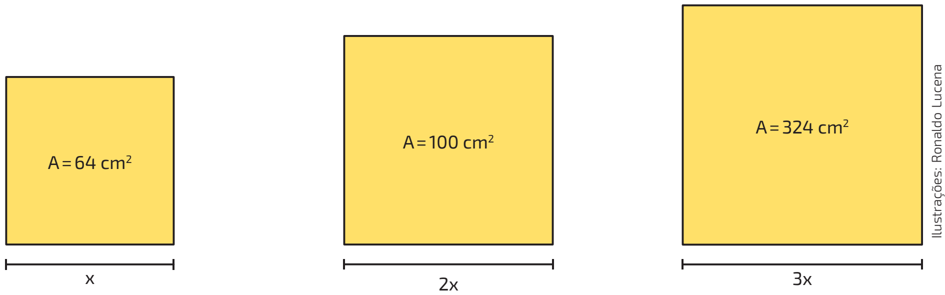
53. Identifique quais dos itens a seguir apresentam uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$. b, f

a) $4x + 2 = 0$ **c)** $2x - \frac{x}{2} = 10$ **e)** $3x = 9$

b) $3x^2 = 12$ **d)** $x^2 + \frac{x}{10} = 25$ **f)** $7x^2 = 21$

54. Em cada item, **A** indica a medida da área do quadrado. Escreva uma equação do 2º grau e obtenha o valor de **x**.

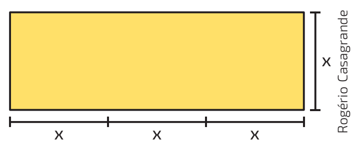
a) $x^2 = 64$; $x = 8$ **b)** $4x^2 = 100$; $x = 5$ **c)** $9x^2 = 324$; $x = 6$



- Qual a medida do comprimento do lado de cada um desses quadrados?
  a: 8 cm; b: 10 cm; c: 18 cm

55. Uma piscina em fase de construção precisou ser coberta por uma lona com formato de quadrado cuja área mede 81 m². Qual é a medida do comprimento do lado dessa lona? 9 m

56. A imagem ao lado representa um terreno retangular cuja medida da área é 243 m².



De acordo com essas informações, elabore um problema e entregue para um colega resolver. Em seguida, verifique se a resolução feita por ele está correta.
Resposta pessoal.

57. Escreva uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ para cada uma das situações abaixo e determine o valor de **x**.

a) **x** multiplicado por **x** é igual a 144. $x^2 = 144$; $x = 12$ ou $x = -12$

b) O quadrado de **x** dividido por 2 é igual a 32. $\frac{x^2}{2} = 32$; $x = 8$ ou $x = -8$

c) O triplo do quadrado de **x** é igual a 3 888. $3x^2 = 3\,888$; $x = 36$ ou $x = -36$

58. Resolva as equações.

a) $x^2 = 16$ $x = -4$ ou $x = 4$

b) $x^2 = 36$ $x = -6$ ou $x = 6$

c) $x^2 - 25 = 0$ $x = -5$ ou $x = 5$

d) $2x^2 - 128 = 0$ $x = -8$ ou $x = 8$

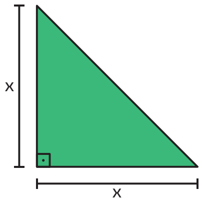
e) $9x^2 + 45 = 369$ $x = -6$ ou $x = 6$

f) $16x^2 - 228 = -84$ $x = -3$ ou $x = 3$

Na seção **Explorando tecnologias**, na página **286**, veja como utilizar um *software* para resolver equações do tipo $ax^2 = b$.

59. Com base na equação $3x^2 - 27 = 0$, elabore um problema e, em seguida, dê para um colega resolver. Depois verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal.

60. Felipe vai plantar grama em seu quintal, que tem formato de triângulo retângulo isósceles. Para isso, ele comprou 8 tapetes de grama com formato de quadrado cuja medida da área de cada um é 1 m². Observe, a seguir, o esquema que representa o quintal de Felipe.



Sergio L. Filho

Determine a medida de **x**, sabendo que Felipe utilizará toda a grama comprada. $x = 4$; 4 m

Considere que Felipe possa recortar os tapetes de grama.


Rafael Lam

Explorando o que estudei

Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo?
equações do 1º grau, sistemas de equações do 1º grau, inequações do 1º grau e equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$

2. O que é a incógnita de uma equação?
Espera-se que os alunos respondam que é um número desconhecido representado por uma letra.

3. Nas equações com uma incógnita, como é possível verificar se certo número é uma solução? Possível resposta: substituindo a incógnita por esse número. Se a igualdade obtida for verdadeira, o número é solução da equação.

4. Quantas soluções tem uma equação do 1º grau com duas incógnitas reais?
infinitas soluções

5. Vimos que um sistema de equações pode ser resolvido pelo método da substituição ou da eliminação. Qual desses métodos você prefere? Por quê?
Resposta pessoal.

6. Qual característica permite decidir se, para resolvermos um problema, utilizamos uma equação ou uma inequação? Possível resposta: em geral, quando um problema remete a uma igualdade, utilizamos equações, quando remete a uma desigualdade ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$), utilizamos inequações.

- Veja um possível problema elaborado pelos alunos na atividade **59**:
  - A diferença entre o triplo do quadrado de um número e 27 é zero. Qual é esse número?
    R −3 ou 3

Avaliação

- A seção **Explorando o que estudei** é um dos momentos oportunos para se realizar uma avaliação com a intenção de identificar habilidades e dificuldades dos alunos com relação ao conteúdo trabalhado no capítulo. Para isso, observe-os enquanto respondem às questões propostas e, caso julgue necessário, realize um resumo do conteúdo estudado e possibilite que eles sanem suas dúvidas.

Material digital

- Antes de prosseguir com os estudos e se julgar oportuno, avalie a aprendizagem dos alunos com relação a algumas habilidades trabalhadas no decorrer desse bimestre. O material digital apresenta uma proposta de avaliação para o 2º bimestre que pode ser utilizada neste momento como ferramenta auxiliar do processo de ensino e aprendizagem.

Trabalho e médias salariais

Quando pensamos em uma profissão, em geral, imaginamos trabalhar com algo relacionado aos nossos talentos, com os quais temos prazer em trabalhar. Contudo, independentemente de nossa escolha, uma coisa é certa: será preciso estudar.

Na vida adulta, o trabalho é essencial, pois por meio dele geralmente provemos o sustento da família. A remuneração atribuída ao trabalhador pela atividade exercida chama-se salário. Na maioria dos casos, seu valor é determinado em função da tarefa executada e varia conforme alguns fatores, como jornada de trabalho, grau de escolaridade, entre outros aspectos.

O grau de escolaridade influencia diretamente na remuneração média dos trabalhadores assalariados. Por esse motivo, os estudos são fundamentais durante toda a carreira.

Nik Neves

BNCC em foco

- A seção apresentada nessas páginas visa desenvolver o tema contemporâneo **Trabalho**, informando sobre as relações entre o grau de escolaridade e a remuneração do profissional.
  Junto aos alunos, faça uma leitura das cenas e peça para eles identificarem as profissões imaginadas pelos alunos na cena.
  A leitura do texto pode ser realizada coletivamente. Instigue os alunos a expressarem suas opiniões, sempre tomando cuidado para que haja respeito mútuo. Proponha um momento de discussão sobre as profissões que eles pensam em seguir e as motivações para a escolha. Aproveite para ressaltar a importância de todas as profissões para a sociedade, independentemente do grau de instrução ou do salário.
  Conversas desse tipo são importantes para se desenvolver o que propõe a **Competência geral 1**, pois auxiliam na compreensão da realidade e, consequentemente, na construção de uma sociedade mais justa e solidária.

- Pergunte aos alunos se eles têm ideia da origem da palavra "salário" e diga que ela deriva do latim *salarium*, que significa "pagamento com sal". Na Roma Antiga, o sal era mercadoria valiosa por ser de difícil obtenção, sobretudo no interior do continente europeu, e por ser responsável também pela conservação dos alimentos. Assim, sua importância lhe conferia alto valor, a ponto de servir como moeda de troca entre mercadorias, como vestimentas, alimentos e armas.

Mais informações sobre a etimologia da palavra em: <www.dicionarioetimologico.com.br/salario>. Acesso em: 11 out. 2018.

Analisando com cidadania Anote no caderno Respostas nas orientações ao professor.

1. Qual é a importância do trabalho para o indivíduo?
2. Em sua opinião, o salário do trabalhador deve estar relacionado à função exercida por ele? Justifique?
3. Para você, é correto definir o valor do salário conforme o grau de escolaridade? Por quê?

Analisando com a Matemática Anote no caderno

4. Calcule as médias salariais apresentadas a seguir.

Renda média salarial de pessoas com 14 anos ou mais em 2017

Escolaridade máxima atingida	Média salarial (em reais)
Sem instrução	x
Ensino Médio completo	x + 885
Ensino Superior completo	4x + 1742
Média aritmética das três categorias de escolaridade	2560

Nik Neves

IBGE. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua – PNAD Contínua.** Disponível em: <www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/sociais/trabalho/17270-pnad-continua.html?=&t=downloads>. Acesso em: 27 set. 2018.

5. É correto afirmar que, em média, uma pessoa que possui Ensino Superior completo ganha mais que o quíntuplo em relação a uma pessoa sem instrução?

Respostas

1. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que, além de se manter e colaborar para o sustento da família, o trabalho também faz com que os indivíduos se sintam úteis perante a sociedade.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que sim, quanto mais instruído o indivíduo, mais chances de conquistar um trabalho em que as exigências de qualificação são maiores e, consequentemente, obtém-se maior salário.
4. sem instrução: R$ 842,17; Ensino Médio completo: R$ 1 727,17; Ensino Superior completo: R$ 5 110,68
5. sim

- Na questão **1**, pergunte aos alunos quais as consequências na vida da pessoa e de sua família, quando fica sem emprego por um período de tempo. Aproveite para falar sobre a importância do seguro-desemprego, que atua como uma maneira de garantir uma renda mínima temporária ao trabalhador desligado de seu posto sem uma justa causa.

- Aproveite a questão **2** para conversar sobre algumas relações injustas de trabalho e suas remunerações. Auxilie-os a perceber que, na maioria das vezes, trabalhos que exigem esforços físicos são menos valorizados do que os que exigem esforços intelectuais. Isso tem a ver com o grau de instrução para cada função, mas também há um histórico de desigualdades que definem quais profissões têm mais prestígio social que outras.

- Na questão **3**, saliente que, muitas vezes, mesmo que o profissional tenha alto grau de qualificação, o empregador nem sempre se propõe a pagar um salário justo valendo-se da quantidade de desempregados, pois, quando há muitos profissionais procurando emprego, as ofertas são propostas por salários mais baixos.

Esse capítulo possibilitará aos alunos a ampliação dos conhecimentos quanto às grandezas proporcionais e não proporcionais, capacitando-os a classificá-las como diretamente ou inversamente proporcionais, conforme a relação existente entre elas. No capítulo também serão abordads expressões algébricas que relacionam duas grandezas, bem como suas representações no plano cartesiano.

Os alunos serão levados a compreender a regra de três como um método para resolver problemas que envolvam grandezas proporcionais, contextualizados, sempre que possível, com situações reais. Trabalharão com a elaboração de problemas e com o cálculo de porcentagens com o uso de calculadora, inclusive.

- As páginas de abertura destacam engrenagens em máquinas, especialmente algumas funções e características do sistema utilizado em bicicletas. De maneira intuitiva, os alunos poderão perceber que a relação existente entre duas engrenagens está associada ao conceito de grandezas proporcionais, assunto que será tratado no capítulo. Uma sugestão de condução do trabalho é organizar os alunos em duplas para realizarem a leitura do texto e, depois, responderem às questões. Em seguida, promova um debate com toda a turma, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões. Se possível, leve para a sala de aula uma bicicleta que possua um sistema de engrenagens formado por diversas coroas e catracas, para que os alunos observem o seu funcionamento.

Capítulo 7
Proporcionalidade

Sistema de marcha em uma bicicleta.

Rocksweeper/Shutterstock.com

A engrenagem é parte fundamental de qualquer sistema mecânico que transmita movimento rotativo e amplie ou reduza a força aplicada, como em máquinas e dispositivos eletrônicos.

Nas bicicletas, por exemplo, as engrenagens atuam em um sistema de transmissão de movimento circular, que consiste em uma relação entre a coroa, onde se localiza o pedal, e a catraca. Ao pedalarmos em uma bicicleta, a coroa gira e, como estão ligadas por uma corrente, a catraca também gira. Quando a medida do comprimento do raio da catraca é menor do que a do raio da coroa, ao pedalarmos uma volta, a catraca realizará um giro de mais de uma volta. Se a medida do comprimento do raio da coroa for três vezes maior do que a do raio da catraca, ao pedalarmos uma volta a catraca realizará um giro de três voltas.

Em bicicletas que possuem diversas coroas e catracas, a relação de transmissão pode ser ajustada pelo ciclista, de acordo com a necessidade.

Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

A Cite algumas funções das engrenagens em máquinas e dispositivos eletrônicos.

B Em uma bicicleta estão selecionadas uma coroa com medida do comprimento do raio de 6 cm e uma catraca com medida do comprimento do raio de 3 cm. Quantas voltas a catraca realiza a cada volta da coroa?

C Imagine ter de percorrer uma subida pedalando uma bicicleta que possui diversas coroas e catracas. Com relação ao tamanho, qual coroa e catraca seriam mais apropriadas para que se tenha um menor esforço? Converse com o professor e os colegas.

Pensando nisso...

A Possíveis respostas: transmitir movimento rotativo e ampliar ou reduzir a força aplicada.

B 2 voltas

C Menor coroa e maior catraca.

- Na questão **C**, converse com os alunos a respeito dos tamanhos da coroa e da catraca, tendo em vista que, quanto maior for a coroa e menor for a catraca, menos pedaladas são necessárias para que a roda traseira, onde se encontra a catraca, se movimente, o que exige maior esforço do ciclista em uma subida. Assim, mesmo que o ciclista dê mais pedaladas, ao deixar a corrente na menor coroa e na menor catraca seu esforço será menor.

Material digital

- No material digital, é apresentado um **Plano de desenvolvimento** para o 3º bimestre capaz de auxiliar nos planos e desenvolvimentos das aulas. Nele, os objetivos específicos, os objetos de conhecimento e as habilidades específicas **EF08MA03**, **EF08MA04**, **EF08MA12**, **EF08MA13**, **EF08MA15**, **EF08MA17**, **EF08MA22**, **EF08MA23**, **EF08MA24**, **EF08MA25**, **EF08MA26** e **EF08MA27**, previstas para os capítulos **7**, **8** e **9** sugeridos para esse período são descritos em um quadro.
Além disso, são elencadas as principais práticas didático-pedagógicas e atividades recorrentes previstas para o conteúdo abordado nesse bimestre.

Objetivos do capítulo

- Reconhecer grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.
- Identificar grandezas não proporcionais.
- Compreender a regra de três como um método de resolver problemas que envolvam grandezas proporcionais.
- Utilizar a regra de três simples para resolver problemas que envolvam grandezas proporcionais e relacionados ao cálculo de porcentagens.

Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **7**, **8** e **9** do 3º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

Relação entre grandezas

Já estudamos que uma grandeza é tudo aquilo que pode ser medido. Estudamos também que há situações em que duas ou mais grandezas podem estar relacionadas, sendo essa relação de proporcionalidade direta, inversa ou sem relação proporcional.

Grandezas diretamente proporcionais

Veja abaixo o preço por litro de gasolina no posto de combustíveis em que Alfredo abasteceu sua motocicleta.

- Quanto Alfredo pagou por 4 L de gasolina?

Rafael Lam

Para determinar quanto Alfredo pagou pela gasolina, basta multiplicar por 4 o preço do litro de gasolina.

$$4 \cdot 5 = 20$$

Assim, Alfredo pagou R$ 20,00 por 4 L de gasolina.

Quantidade de gasolina (L)	Valor pago (R$)
1	5,00
4	?

$\cdot 4$ $\cdot 4$

Na situação apresentada, o valor pago está relacionado à quantidade de combustível, de maneira que, ao dobrarmos a quantidade de combustível, o valor pago também dobrará. Se a quantidade de combustível diminuir pela metade, o valor pago também diminuirá pela metade, e assim por diante.

Nesse caso, dizemos que a quantidade de combustível e o valor pago são **grandezas diretamente proporcionais**.

Indicando por **x** a quantidade de gasolina e por **y** o valor pago, representamos a relação entre essas grandezas por:

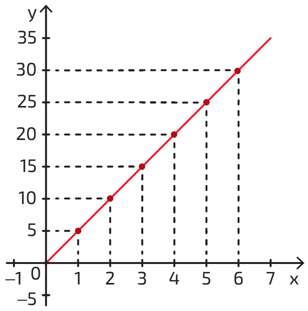
$$\underbrace{y}_{\text{valor pago}} = \underbrace{5}_{\text{preço por litro}} \cdot \underbrace{x}_{\text{quantidade de gasolina}}$$

BNCC em foco

- O tópico **Relações entre grandezas** possibilita que os alunos identifiquem a natureza da variação de duas grandezas, diretamente ou inversamente proporcionais, ou ainda não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano. Dessa maneira, a habilidade **EF08MA12** é contemplada.

Atribuindo valores para **x** e calculando os valores correspondentes para **y**, obtemos pares ordenados (x, y), que são representados no plano cartesiano por pontos.

x	$y = 5 \cdot x$	(x, y)
1	$y = 5 \cdot 1 = 5$	(1, 5)
2	$y = 5 \cdot 2 = 10$	(2, 10)
3	$y = 5 \cdot 3 = 15$	(3, 15)
4	$y = 5 \cdot 4 = 20$	(4, 20)
5	$y = 5 \cdot 5 = 25$	(5, 25)
6	$y = 5 \cdot 6 = 30$	(6, 30)



Sergio L. Filho

Podemos atribuir infinitos valores para **x**, obtendo um único valor correspondente de **y** para cada um. Nesse caso, temos infinitos pares ordenados que, representados no plano cartesiano, constituem uma reta.

Quanto uma pessoa pagará pela compra de 30 L de gasolina nesse posto de combustíveis? R$ 150,00

Grandezas inversamente proporcionais

Leia o problema a seguir.

> Para pintar as paredes da escola, dois pintores precisam de 12 dias de trabalho. Em quantos dias seis pintores, no mesmo ritmo de trabalho, fazem a pintura das paredes dessa escola?

Rafael Lam

Observando o quadro ao lado, podemos notar que, de dois para seis, a quantidade de pintores foi multiplicada por 3. Nesse caso, considerando que os pintores mantenham o ritmo de trabalho, a quantidade de dias necessários para pintar as paredes da escola será reduzida à terça parte, ou seja, será dividida por 3.

Quantidade de pintores	Quantidade de dias
2	12
6	?

$\cdot 3$ $: 3$

$$12 : 3 = 4$$

Assim, seis pintores pintam as paredes da escola em 4 dias.

Avaliação

- Antes de iniciar o trabalho com o tópico **Grandezas inversamente proporcionais**, avalie informalmente os alunos quanto a seus conhecimentos prévios sobre o assunto. Aproveite para refletir acerca do planejamento feito para as aulas seguintes levando em conta o modo de pensar e a linguagem dos alunos. As questões a seguir podem auxiliá-lo nessa tarefa e, se julgar necessário, acrescente outras:
  - Dois homens trabalhando na construção de um muro terminarão o serviço mais rápido do que quatro homens, supondo que todos trabalhem no mesmo ritmo?
    R não
  - Uma jarra contém 2 L de suco que será dividido entre algumas pessoas. Quanto mais pessoas houver, menos suco cada uma receberá?
    R sim

141

• Ao trabalhar com essa página, caso um ou mais alunos apresentem dificuldades em compreender o plano cartesiano, verifique a possibilidade de fazer um resumo, retomando os conceitos vistos ou até mesmo resolvendo algumas atividades que são propostas no capítulo **11** do volume do **7º** ano dessa coleção.

Na situação apresentada anteriormente, a quantidade de dias de trabalho depende da quantidade de pintores. Se a quantidade de pintores dobrar, a quantidade de dias trabalhados será reduzida pela metade; se a quantidade de pintores diminuir pela metade, a quantidade de dias trabalhados será o dobro, e assim por diante. Caso apenas um pintor realize o trabalho, serão necessários 24 dias.

Dessa maneira, dizemos que a quantidade de pintores e a quantidade de dias de trabalho são **grandezas inversamente proporcionais**.

Indicando por **x** a quantidade de pintores, por **y** a quantidade de dias de trabalho e sabendo que um pintor realiza a pintura em 24 dias, representamos a relação entre essas grandezas por:

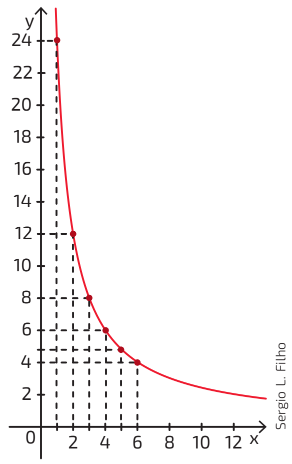
quantidade de dias para que um pintor realize o trabalho

quantidade de dias de trabalho → $y = \frac{24}{x}$

quantidade de pintores

Atribuindo valores para **x** e calculando os valores correspondentes de **y**, obtemos pares ordenados (x, y), que são representados no plano cartesiano por pontos.

x	$y=\frac{24}{x}$	(x, y)
1	$y=\frac{24}{1}=24$	(1, 24)
2	$y=\frac{24}{2}=12$	(2, 12)
3	$y=\frac{24}{3}=8$	(3, 8)
4	$y=\frac{24}{4}=6$	(4, 6)
5	$y=\frac{24}{5}=4{,}8$	(5; 4,8)
6	$y=\frac{24}{6}=4$	(6, 4)



Podemos atribuir infinitos valores para **x**, obtendo, para cada um, um único valor correspondente de **y**. Nesse caso, temos infinitos pares ordenados que, representados no plano cartesiano, constituem a curva apresentada no gráfico.

Em quantos dias 8 pintores, mantendo o ritmo de trabalho, realizariam a pintura do pátio da escola? 3 dias

Grandezas não proporcionais

Nem sempre duas grandezas são proporcionais. Por exemplo, a medida da altura de uma pessoa não é proporcional à sua idade. Se aos 15 anos uma pessoa mede 1,4 m, isso obviamente não significa que essa pessoa aos 30 anos de idade medirá 2,8 m de altura.

Outros exemplos de grandezas não proporcionais são: o comprimento do lado e a área de um quadrado. Já estudamos que a medida da área de um quadrado é dada pelo produto das medidas do comprimento de dois de seus lados, ou seja, se a medida do comprimento do lado de um quadrado é igual a 3 cm, então a medida de sua área é igual a 9 cm², pois:

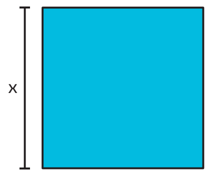
$$A = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$

Indicando por **x** a medida do comprimento do lado do quadrado e por **y** a medida da área desse quadrado, representamos a relação entre essas grandezas por:

$$y = x^2$$

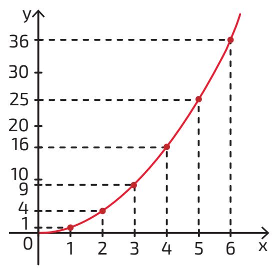
medida da área do quadrado

medida do comprimento do lado



Atribuindo valores para **x** e calculando os valores correspondentes de **y**, obtemos pares ordenados (x, y), que são representados no plano cartesiano por pontos.

x	$y = x^2$	(x, y)
1	$y = 1^2 = 1$	(1, 1)
2	$y = 2^2 = 4$	(2, 4)
3	$y = 3^2 = 9$	(3, 9)
4	$y = 4^2 = 16$	(4, 16)
5	$y = 5^2 = 25$	(5, 25)
6	$y = 6^2 = 36$	(6, 36)



Ilustrações: Sergio L. Filho

Podemos atribuir infinitos valores para **x**, obtendo, para cada um, um único valor correspondente de **y**. Nesse caso, temos infinitos pares ordenados que, representados no plano cartesiano, constituem a curva apresentada no gráfico.

A medida do comprimento do lado de um quadrado e a medida de seu perímetro são grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou grandezas não proporcionais? grandezas diretamente proporcionais

- Questione os alunos sobre outras situações em que é possível observar grandezas que não são proporcionais, como a medida da massa de uma pessoa em relação à sua idade e a medida da temperatura de um dia em relação ao horário.

Relacionando saberes

- A atividade **3** destaca a prática de uso da composteira, que transforma resíduos orgânicos em adubo. Avalie a possibilidade de, junto ao professor responsável pelo componente curricular **Ciências** e com o auxílio dos alunos, construir na escola uma composteira caseira. Peça ao professor do componente que explique à turma como os dejetos viram compostos orgânicos e quais benefícios estes compostos podem trazer às plantas e aos seres vivos. Ressalte ainda a questão ambiental que perpassa a prática da compostagem, pois os dejetos deixam de ser jogados no lixo comum e, com isso, reduzem a quantidade de lixo que vai parar nos aterros, de modo a contemplar o tema contemporâneo **Educação ambiental**. Obtenha mais informações sobre como construir e operar uma composteira caseira no *site* da Embrapa: <www.embrapa.br/busca-de-publicacoes/-/publicacao/1033373/como-montar-uma-composteira-caseira>. Acesso em: 15 out. 2018.

Atividades

Anote no caderno

1. Em cada item, classifique as grandezas em diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

a) Para lavar o telhado de uma casa, 3 pessoas precisam de 6 horas e 9 pessoas precisam de 2 horas.
inversamente proporcionais

Quantidade de pessoas	Medida de tempo (h)
3	6
9	2

b) Um carro gasta 1 litro de combustível para percorrer 15 km e 4 litros para percorrer 60 km. diretamente proporcionais

Quantidade de combustível (L)	Medida de distância (km)
1	15
4	60

c) Em um supermercado 1 litro de suco de laranja custa R$ 7,00, mas, comprando 5 litros, o preço total é de R$ 30,00.
não proporcional

Quantidade de suco (L)	Preço (R$)
1	7,00
5	30,00

2. Para encher um tanque, uma torneira leva 9 horas. Quantas horas são necessárias para encher esse tanque com 3 torneiras de mesma medida de vazão?
3 horas

3. A área do jardim da casa de Fábio mede 27 m^2. Para fertilizar a terra, Fábio usa um composto sólido produzido a partir de uma composteira caseira. Sabendo que para cada metro quadrado de terra são necessários 3 kg de composto sólido, quantos quilogramas do composto serão necessários para fertilizar todo o jardim da casa de Fábio? 81 kg

4. Um operário vai assentar lajotas em um cômodo cuja medida de área é 19 m^2. Sabendo que a medida de área de cada lajota é de 0,5 m^2, quantas lajotas serão necessárias nesse cômodo? 38 lajotas

5. Para realizar a colheita de laranjas, um trabalhador levou 12 dias. Se esse mesmo trabalho fosse feito por 4 trabalhadores trabalhando no mesmo ritmo, em quantos dias a mesma colheita seria feita? 3 dias

6. A cada semana, uma família consome 3 quilogramas de arroz. Considerando **y** o consumo de arroz da família, em quilogramas, e **x** a quantidade de semanas, associe a fórmula e o gráfico que representa a relação entre as grandezas. a-II

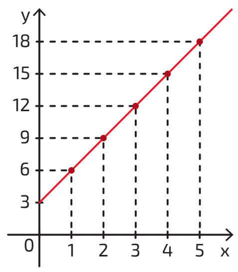
a) $y = 3 \cdot x$

b) $y = 4 \cdot x$

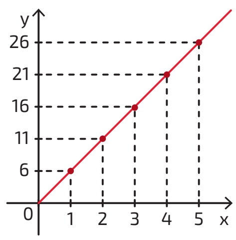
c) $y = 6 \cdot x$

d) $y = 5 \cdot x$

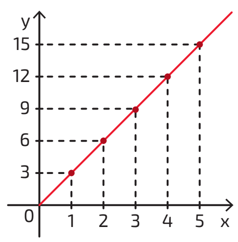
I)



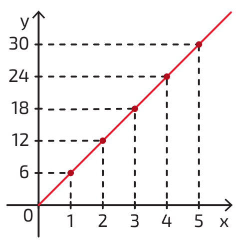
III)



II)



IV)



Ilustrações: Sergio L. Filho

Agora, calcule quantas semanas essa família levaria para consumir 45 kg de arroz. Essas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais?
15 semanas; diretamente proporcionais

- No item **c** da atividade **1**, comente com os alunos que, normalmente, o preço por litro de um produto não é proporcional ao preço de mais litros porque recipientes com maior medida de capacidade têm menor preço por litro. Isto é justificado pelo fato de as empresas terem maior gasto com a produção de mais embalagens. Sendo assim, uma embalagem maior geralmente tem menor custo do que duas embalagens menores, o que é revertido no preço final. No caso apresentado na atividade, ao comprar 5 litros de suco, cada litro custará R$ 6,00.

7. Em cada item a seguir, de acordo com a relação entre as grandezas, elabore duas questões e troque-as com um colega. Depois, verifiquem se as respostas estão corretas. Respostas pessoais.

I) Uma indústria engarrafa 200 litros de suco a cada hora.

II) Um funcionário carrega um caminhão de caixas de leite em 6 horas.

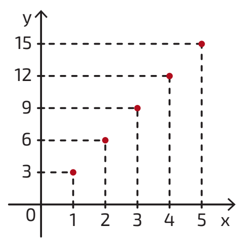
8. Para reflorestar uma mata **ciliar**, 2 funcionários de uma empresa demoraram 30 dias e um grupo de 3 funcionários levaria 20 dias. Indicando a quantidade de funcionários por **x** e a quantidade de dias de trabalho por **y**, qual fórmula representa a relação entre as grandezas? b

a) $y = 20 \cdot x$ **b)** $y = \frac{60}{x}$ **c)** $y = 60 \cdot x$

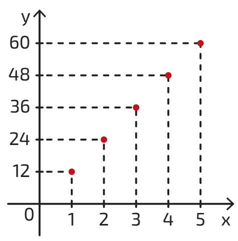
Ciliar › que margeia cursos de água.

9. Para pavimentar um trecho de rodovia, foram necessários 12 dias utilizando 4 máquinas. A fórmula $y = \frac{48}{x}$ representa essa relação, em que **x** representa a quantidade de máquinas e **y**, a quantidade de dias. Qual dos gráficos representa essa relação? II

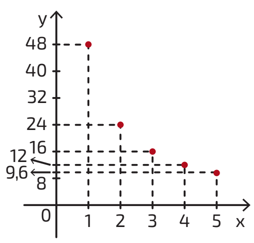
I)



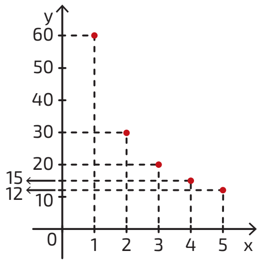
III)



II)



IV)



Ilustrações: Sergio L. Filho

10. Em cada item, escreva a fórmula que representa a relação entre as grandezas. Depois, em uma malha quadriculada, construa o gráfico. Respostas nas orientações ao professor.

a) Para construir um muro, um trabalhador leva 12 dias e dois trabalhadores levam 6 dias.

b) Um quilograma de maçã custa R$ 5,00. Três quilogramas custam R$ 15,00.

11. Observe as relações entre as grandezas.

I) Um entregador cobra R$ 5,00 mais R$ 0,50 por quilômetros percorridos.

II) No início do expediente, 8 caixas já estavam armazenadas no estoque, e a cada hora de trabalho 6 novas caixas são armazenadas no estoque.

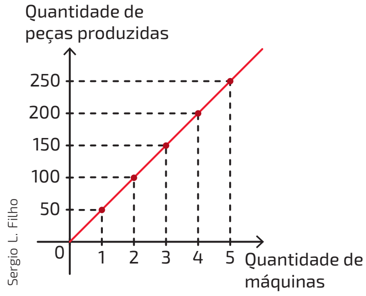
a) Em cada item, as grandezas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou são não proporcionais? não proporcionais

b) Qual seria o valor de uma entrega se forem percorridos 18 km? E a quantidade de caixas no estoque após 8 horas de trabalho? R$ 14,00; 56 caixas

c) Escreva as fórmulas que representam a relação entre essas grandezas. $y = 5 + x \cdot 0{,}5$; $y = 8 + x \cdot 6$

d) Em uma malha quadriculada, construa um gráfico para representar a relação entre as grandezas em cada item. Resposta nas orientações ao professor.

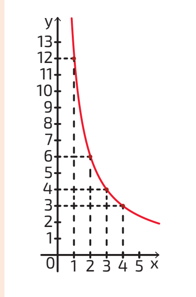
12. Com base nos dados apresentados no gráfico, elabore uma atividade e, em seguida, troque-a com um colega. Depois, verifiquem os resultados obtidos. Resposta pessoal.



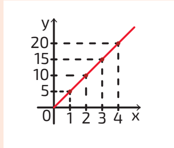
Sergio L. Filho

Respostas

10. a) $y = \frac{12}{x}, x > 0$

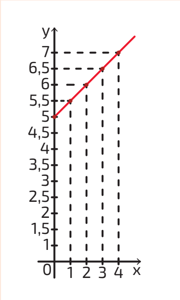


b) $y = 5x$

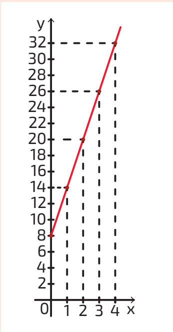


11. d)

I)



II)



Ilustrações: Sergio Lima

- Veja uma possível atividade que pode ser elaborada pelos alunos na questão **12**:
  - Uma fábrica de peças de computadores, tem 3 máquinas que produzem 150 peças de um determinado componente eletrônico por hora. Ao adicionar mais duas dessas máquinas, qual será a produção desse componente por hora?

    R 250 peças

- Veja algumas possíveis questões elaboradas pelos alunos na atividade **7**:

I)

- Se em uma hora são engarrafados 200 litros de suco, quantos litros são engarrafados em 15 minutos?

  R 50 litros
- Se essa fábrica dobrar a sua produção, o que acontecerá com a medida do tempo necessária para engarrafar toda a produção de suco?

  R Deverá dobrar também.

II)

- Quantos funcionários serão necessários para carregar o caminhão em 2 horas, supondo que todos os funcionários trabalhem no mesmo ritmo?

  R 3 funcionários
- Caso o caminhão tenha sido carregado em 1 hora, quantos funcionários foram necessários para carregá-lo?

  R 6 funcionários

- Apresente aos alunos o texto a seguir, que traz informações históricas sobre a regra de três.

[...]

A regra de três, que provavelmente se originou na China antiga, alcançou a Arábia através da Índia, onde Brahmagupta e Bháskara a tratavam por essa mesma designação. [...] Ela era enunciada mecanicamente, sem nenhuma justificação, e seus vínculos com as proporções só foram reconhecidos no fim do século XIV. Eis como Brahmagupta enunciava a regra: "Na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto". A título de esclarecimento, considere o seguinte problema dado por Bháskara: Se dois palas e meio de açafrão custam três sétimos de niska, quantos palas se comprarão com nove niskas? Neste caso, $\frac{3}{7}$ e 9, que têm a mesma denominação, são o Argumento e o Requisito e $\frac{5}{2}$ é o Fruto. A resposta, ou Produto, é dada por $\frac{(9)\left(\frac{5}{2}\right)}{\left(\frac{3}{7}\right)} = 52\frac{1}{2}$. Hoje em dia simplesmente resolveríamos a proporção $x:9 = \left(\frac{5}{2}\right):\left(\frac{3}{7}\right)$. [...]

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 263.

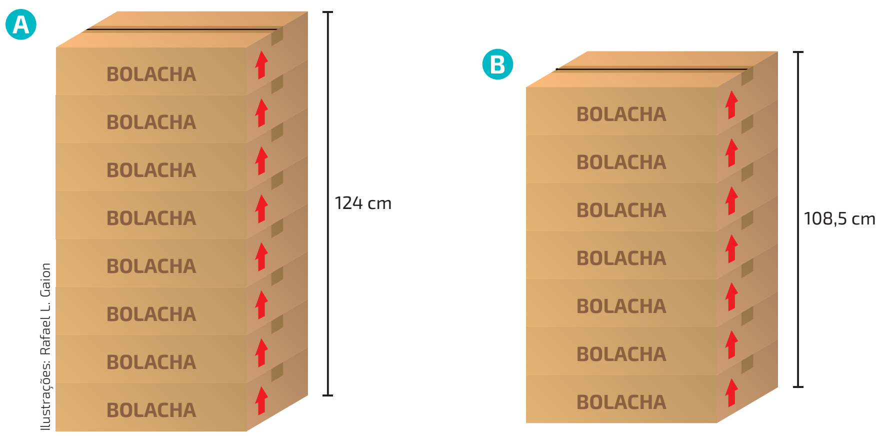
Regra de três simples

Existe um método para resolver problemas envolvendo grandezas proporcionais denominado regra de três. Quando o problema tem duas grandezas, utilizamos uma **regra de três simples**. Esse método consiste em resolver problemas que envolvam quatro valores, dos quais três são conhecidos, e por meio deles determinamos o valor desconhecido.

O estudo da regra de três simples ocorrerá em duas etapas, uma com grandezas diretamente proporcionais e outra com grandezas inversamente proporcionais.

Regra de três simples com grandezas diretamente proporcionais

Em um depósito, algumas caixas da mesma dimensão estão sendo estocadas. Observe nas imagens a medida da altura das pilhas de caixas.



Observando as imagens, podemos notar que, quanto maior a quantidade de caixas, maior é a medida da altura da pilha. Se dividirmos a medida da altura de cada pilha pela quantidade de caixas da pilha, teremos:

A $\frac{124}{8} = 15,5$ **B** $\frac{108,5}{7} = 15,5$

As grandezas altura da pilha e quantidade de caixas são diretamente proporcionais e a **constante de proporcionalidade** é 15,5. Assim, podemos escrever a seguinte **proporção**:

$\frac{124}{8} = \frac{108,5}{7}$ (lê-se: 124 está para 8 assim como 108,5 está para 7)

BNCC em foco

- O tópico **Regra de três simples** levará os alunos à resolução e elaboração de problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas. Dessa maneira, a habilidade **EF08MA13** é contemplada.

Em uma proporção, ao multiplicarmos o numerador de uma fração pelo denominador de outra, obteremos o mesmo resultado.

$$\frac{124}{8} = \frac{108{,}5}{7} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow 8 \cdot 108{,}5 = 868 \\ \longrightarrow 124 \cdot 7 = 868 \end{array}$$

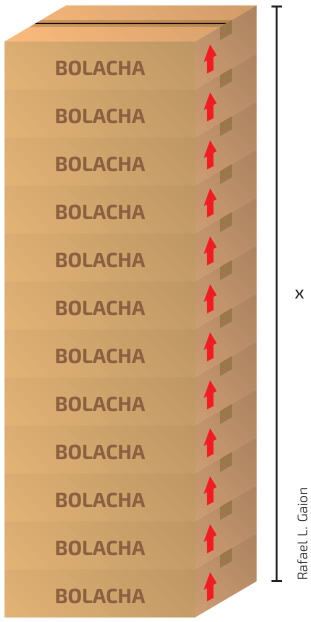
> Proporção é uma igualdade entre duas razões.

$$124 \cdot 7 = 8 \cdot 108{,}5$$

Nesse depósito, há uma pilha de caixas como a representada ao lado. Qual é a medida da altura dessa pilha?

Para responder a essa questão, basta resolver a equação a seguir.

C



$$\frac{\overbrace{x}^{\text{medida da altura da pilha C}}}{\underbrace{12}_{\text{quantidade de caixas}}} = \underbrace{15{,}5}_{\text{constante de proporcionalidade}}$$

$$\frac{x}{12} \cdot 12 = 15{,}5 \cdot 12$$

$$x = 186 \longrightarrow 186 \text{ cm}$$

Portanto, a medida da altura da pilha **C** é 186 cm.

Também podemos determinar a medida da altura dessa pilha da maneira a seguir.

	Medida da altura da pilha (cm)	Quantidade de caixas
Pilha A	124	8
Pilha C	x	12

Escrevendo uma proporção com base no quadro e resolvendo-a, temos:

$$\frac{124}{x} = \frac{8}{12}$$

$$x \cdot 8 = 124 \cdot 12$$

$$\frac{8x}{8} = \frac{1\,488}{8}$$

$$x = 186 \longrightarrow 186 \text{ cm}$$

> Nessa proporção, o produto de **x** e 8 é igual ao produto de 124 e 12.

Utilizamos a **regra de três simples** para determinar o quarto termo de uma proporção quando conhecemos três deles.

Material digital

- Para complementar o trabalho com o tópico **Regra de três simples**, no material digital dessa coleção disponibilizamos a **Sequência didática 7**, elaborada com objetivo de desenvolver as habilidades **EF08MA12** e **EF08MA13**. As atividades propostas nessa sequência visam promover a compreensão do conceito de proporcionalidade, possibilitando a compreensão da ideia de grandezas direta e inversamente proporcionais, além de apresentar problemas variados para serem resolvidos utilizando regra de três.

147

- O contexto abordado nessa página e a questão proposta buscam proporcionar aos alunos o contato com observações sistemáticas de aspectos quantitativos, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes a fim de interpretá-las e avaliá-las de maneira crítica e ética, produzindo argumentos convincentes. Dessa maneira, a **Competência específica de Matemática 4** é contemplada.

- Ao final do trabalho com o tópico **Regra de três simples**, verifique se os alunos observam que, utilizando a regra de três, os cálculos para a obtenção do quarto termo de uma proporção cujos três primeiros são conhecidos tornam-se mais simples. Veja a possibilidade de escrever na lousa outros exemplos de proporções cujo quarto termo é calculado a partir dos três primeiros.

Regra de três simples com grandezas inversamente proporcionais

Para confeccionar certa quantidade de um tipo de cadeira, um marceneiro necessita de 8 dias trabalhando 3 h por dia. Porém, se ele trabalhar 6 h por dia, a mesma quantidade de cadeiras será confeccionada em 4 dias.

Veja ao lado como podemos representar essa situação.

Quantidade de dias	Quantidade de horas
8	3
4	6

De acordo com esse quadro, temos que:

$$\frac{8}{4}=2 \text{ é diferente de } \frac{3}{6}=0{,}5, \text{ logo } \frac{8}{4}\neq\frac{3}{6}$$

Note que os resultados das divisões são diferentes, pois, se dobrarmos a quantidade de horas trabalhadas por dia, a quantidade de dias necessários para confeccionar as cadeiras diminuirá pela metade. Isso ocorre porque essas grandezas são inversamente proporcionais.

No entanto, se invertermos uma das razões, obteremos uma proporção:

- $\frac{8}{4}=2$ é igual a $\frac{6}{3}=2$, logo $\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$ ou
- $\frac{4}{8}=0{,}5$ é igual a $\frac{3}{6}=0{,}5$, logo $\frac{4}{8}=\frac{3}{6}$, assim, $\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$ ou $\frac{4}{8}=\frac{3}{6}$.

Agora, vamos supor que o marceneiro fosse confeccionar a mesma quantidade de cadeiras em 12 dias. Quantas horas ele deveria trabalhar por dia?

Para responder a essa questão, vamos representar por **x** a quantidade de horas e construir o quadro ao lado:

Quantidade de dias	Quantidade de horas
8	3
12	x

Como as grandezas quantidade de dias e quantidades de horas, nesse caso, são inversamente proporcionais, invertemos uma das frações e escrevemos as seguintes proporções:

$$\frac{8}{12}=\frac{x}{3} \text{ ou } \frac{12}{8}=\frac{3}{x}$$

Escolhemos uma das proporções e calculamos o valor de **x**.

$$\frac{8}{12}=\frac{x}{3}$$
$$12\cdot x=8\cdot 3$$
$$\frac{12x}{12}=\frac{24}{12}$$
$$x=2 \longrightarrow 2\text{ h}$$

Assim, o marceneiro deveria trabalhar 2 h por dia durante 12 dias.

Caso o mesmo marceneiro fosse trabalhar 6 horas por dia, quantos dias seriam necessários para confeccionar a mesma quantidade de cadeiras? 4 dias

Atividades

Anote no caderno

13. De acordo com as indicações, determine o valor de **x** em cada item.

a) **A** e **B** são grandezas diretamente proporcionais.

A	B
x 3	4
18	24

b) **C** e **D** são grandezas diretamente proporcionais.

C	D
20	5
36	x 9

c) **E** e **F** são grandezas inversamente proporcionais.

E	F
15	2
x 5	6

d) **G** e **H** são grandezas inversamente proporcionais.

G	H
8	x 14
7	16

14. Um dos alimentos mais ricos em vitamina **E** é o abacate, cuja porção de 75 g tem 3 mg de vitamina **E**.

De acordo com as informações apresentadas e o quadro a seguir, determine quantos miligramas de vitamina **E** há em 125 g de abacate.

Quantidade de abacate (g)	Quantidade de vitamina E (mg)
75	3
125	x 5 mg

15. De acordo com as informações apresentadas na embalagem, determine quantos litros de suco são obtidos utilizando 2,7 L de suco concentrado.

Quantidade de concentrado (L)	Quantidade de suco (L)
1,5	10
2,7	x 18 L

Rafael L. Gaion

16. Com base nos dados apresentados, elabore um problema envolvendo regra de três e troque-o com um colega. Depois, confiram os resultados obtidos. Resposta pessoal.

Alqueires Paulista	Medida da área (m^2)
2,5	60 500
x	19 360

17. Paulo fez uma viagem entre os municípios de Cáceres (MT) e Dourados (MS) em 16 h, a uma velocidade média cuja medida é de 55 km/h. Se a viagem fosse feita a uma velocidade média medindo 80 km/h, quantas horas Paulo gastaria? 11 h

- Antes de trabalhar com as atividades dessas páginas, peça para os alunos resolverem as **Atividades complementares** a seguir. Para isso, oriente-os a utilizar, quando necessário, quadros como os apresentados.

Atividade complementar

- Em uma padaria, 100 g de pão francês são vendidos por R$ 0,75. Quanto custam 800 g de pão francês nessa padaria?

  R R$ 6,00

Quantidade de pão (g)	Preço (R$)
100	0,75
200	1,50
300	2,25
400	3,00

- A uma velocidade média de 1,2 m/s é possível percorrer certo percurso em 240 s. Em quantos segundos é possível percorrer esse mesmo percurso a uma medida de velocidade média de 7,2 m/s?

  R 40 s

Medida da velocidade média (m/s)	Medida do tempo (s)
1,2	240
2,4	120
3,6	80
4,8	60

- Solicite aos alunos que façam uma pesquisa e levem à sala de aula as tabelas nutricionais de alguns produtos alimentícios para realizarem uma atividade análoga à **14**. Para isso, leve-os ao laboratório de informática e peça para formularem perguntas relacionadas às tabelas nutricionais que, em seguida, devem ser trocadas com um colega. Após o colega resolvê-las, deve-se conferir se as resoluções estão corretas.

- Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos na atividade **16**:
  - José quer plantar milho em 2,5 alqueires paulistas de sua propriedade, que correspondem à 50 500 m^2 de medida de área. Porém, ele já efetuou o plantio em 19 360 m^2, qual a medida, em alqueires paulistas, da propriedade em que José já plantou?

    R 0,8 alqueire paulista

- Em algumas atividades, são exploradas situações nas quais se considera, por exemplo, que, ao aumentarmos as horas diárias de trabalho ou a quantidade de operários, o rendimento individual será mantido, sendo possível prever com exatidão a medida do tempo necessário para o término da obra. Contudo, explique aos alunos que, na prática, as situações não procedem assim, pois existem diversos fatores que podem alterar o rendimento individual de um operário.
- Veja dois possíveis problemas que podem ser apresentados pelos alunos para a questão **19**:
  - Sabendo que 12 alunos foram classificados para a segunda fase do campeonato, com quantos livros a escola presenteou cada aluno?
    R 5 livros
  - Cleide convidou 60 pessoas para a festa e fez 4 bombons para cada uma delas. Porém, apenas 48 pessoas compareceram à festa. Quantos bombons cada convidado poderá comer, de maneira que todos possam comer a mesma quantidade?
    R 5 bombons
- Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos na atividade **20**.
  - Um determinado tipo de macarrão instantâneo informa, na tabela nutricional de sua embalagem, que uma porção de 80 g possui 270 kcal. Quantas quilocalorias vai ingerir uma pessoa que comer 72 gramas desse macarrão instantâneo?
    R 243 quilocalorias

18. Para imprimir folhetos, uma gráfica pode utilizar a máquina **A**, que imprime 65 folhetos por minuto, ou a máquina **B**, que imprime 80 folhetos por minuto.

Se for utilizada a máquina **A**, serão necessários 32 min de funcionamento para atender a determinada encomenda.

Quantos minutos de funcionamento são necessários para que a máquina **B** atenda a essa mesma encomenda? 26 min

19. Para cada situação apresentada a seguir, elabore um problema que envolva proporção e, em seguida, troque-os com um colega. Depois, confira os resultados obtidos. Resposta pessoal.

a) Como prêmio para os alunos classificados para a segunda fase de um campeonato escolar, 60 livros seriam igualmente distribuídos.

b) Para a festa de aniversário de seu filho, Cleide vai fazer 4 bombons de morango por convidado.

20. Elabore um problema envolvendo duas grandezas proporcionais e dê para um colega resolver. Ao final, confira a resposta dada pelo seu colega. Resposta pessoal.

21. Para realizar uma excursão, os alunos de uma turma do 7º ano decidiram dividir o custo do frete do ônibus entre os 34 alunos participantes, o que resultou em R$ 24,00 para cada um. Sabendo que alguns desistiram da viagem e que cada aluno que viajou pagou R$ 27,20 pelo frete do ônibus, determine quantos alunos participaram da excursão. 30 alunos

Custo por aluno (R$)	Quantidade de alunos
24	34
27,20	x

22. Para transportar toda a terra retirada de uma obra, 2 caminhões necessitam realizar 18 viagens cada um. Se forem utilizados 6 caminhões como esses no transporte da terra, quantas viagens cada um terá de realizar? 6 viagens

Quantidade de caminhões	Quantidade de viagens de cada caminhão
2	18
6	x

23. Um apicultor possui em sua propriedade 75 colmeias. No ano passado, ele extraiu dessas colmeias 1 875 kg de mel. Considerando que a produtividade média de mel por colmeia se mantenha, quantos quilogramas de mel esse apicultor extrairia se tivesse 30 colmeias em sua propriedade? 750 Kg


Pazargic Liviu/Shutterstock.com

Apicultor.

Apicultor › criador de abelhas com a finalidade de extrair mel, própolis etc.

24. Em uma fábrica, são necessárias seis costureiras trabalhando 8 h para atender a certa encomenda. Considerando que o ritmo de trabalho se mantenha, quantas costureiras são necessárias para que essa encomenda seja atendida em 3 h? 16 costureiras

- Complemente a atividade **24** propondo as seguintes perguntas:
  - O problema trata de grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais?
    R inversamente proporcionais
  - Caso a fábrica dobre a quantidade de costureiras, em quantas horas a encomenda será confeccionada?
    R 4 horas

25. Em certo município, 23% da população tem menos de 15 anos de idade. Sabendo que 54% da população desse município corresponde a 1 944 habitantes, quantos habitantes têm menos de 15 anos?

Para responder a essa pergunta, podemos construir o esquema a seguir.

Quantidade de habitantes	Porcentagem (%)
1 944	54
x	23

Como quanto maior a porcentagem, maior será proporcionalmente a quantidade de habitantes, temos que as grandezas quantidade de habitantes e porcentagem são diretamente proporcionais.

Escrevendo a proporção e resolvendo por regra de três, temos:

$$\frac{1\,944}{x} = \frac{54}{23}$$

$$x \cdot 54 = 1\,944 \cdot 23$$

$$\frac{54x}{54} = \frac{44\,712}{54}$$

$$x = 828$$

Na seção **Explorando tecnologias**, na página **294**, veja como utilizar uma planilha eletrônica para resolver problemas envolvendo regra de três e porcentagem.

Portanto, 828 habitantes desse município têm menos de 15 anos de idade.

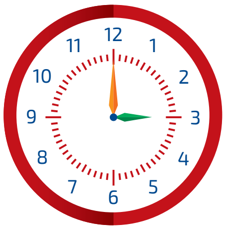
Agora, calcule o total de habitantes desse município. 3 600 habitantes

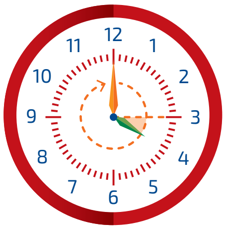
O total de habitantes do município corresponde a 100%.

26. Claudete comprou uma estante pagando de entrada R$ 270,00, o que corresponde a 20% do preço total. Qual é o preço da estante comprada por Claudete? R$ 1 350,00

27. Se Pedro poupar diariamente R$ 6,00 durante 13 semanas, ele terá exatamente a quantia necessária para comprar a máquina fotográfica digital que deseja. Quantos reais ele deve poupar diariamente para comprar a mesma máquina fotográfica em 8 semanas? R$ 9,75

28. Nos relógios, enquanto o ponteiro dos minutos faz um giro completo, o ponteiro das horas realiza um giro de 30°.





Ilustrações: Cynthia Sekiguchi

a) Quantos graus o ponteiro das horas gira quando o ponteiro dos minutos gira:

- 180°? 15°
- 132°? 11°

b) Quantos graus o ponteiro dos minutos gira quando o ponteiro das horas gira:

- 8°? 96°
- 17°? 204°

29. Em uma turma de 7º ano foi realizada uma eleição para escolher o seu representante. O candidato vencedor obteve 22 votos, o equivalente a 55% do total. Sabendo que o segundo colocado nessa eleição obteve 12 votos, quantos por cento do total de votos ele recebeu? 30%

- Complemente a atividade **29** realizando as seguintes perguntas:
  - Qual a porcentagem do terceiro colocado, em relação ao total, sabendo que ele obteve 6 votos?
    R 15%
  - Qual o total de alunos que participaram da eleição?
    R 40 alunos

BNCC em foco

- As atividades propostas nessa página e nas páginas seguintes proporcionarão aos alunos resolver e elaborar problemas envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais. Dessa maneira, a habilidade **EF08MA04** é contemplada. Tal habilidade também pode ser contemplada na utilização de um *software* de geometria dinâmica, cujas orientações encontram-se na página **294** da seção **Explorando tecnologias**.

- Procure estimular os alunos a elaborarem problemas, desenvolvendo a capacidade de combinar os dados apresentados, exercitem o uso da língua escrita e busquem se desafiar. Uma possível questão que pode ser elaborada pelos alunos no item **b** da atividade **30** é a apresentada a seguir:
  - Utilizando a calculadora, calcule a porcentagem aproximada da produção de soja dos estados do Sul e Sudeste juntos.
    R aproximadamente 43%

30. De acordo com as informações da tabela a seguir, Ricardo calculou, com o auxílio de uma calculadora, a porcentagem da produção de soja da região Centro-Oeste do Brasil nesses anos. Observe como ele realizou esse cálculo.

Produção (mil toneladas)	Porcentagem (%)
114 075	100
50 150	x

$$\begin{matrix} 114\,075 & \searrow\!\!\!\!\nearrow & 100\% \\ 50\,150 & & x \end{matrix}$$

$$114\,075x = 5\,015\,000$$

$$x = \frac{5\,015\,000}{114\,075}$$

$$x \simeq 44$$

Produção de soja nas regiões brasileiras – safra 2016/2017

Região	Produção (mil toneladas)
Norte	5 536
Nordeste	9 645
Centro-Oeste	50 150
Sudeste	8 151
Sul	40 593
Total	114 075

CONAB – Companhia Nacional de Abastecimento. Boletim da Safra de Grãos. **Acompanhamento da safra brasileira de grãos**: Safra 2017/2018. Brasília, v. 5, n. 11, p. 144, ago. 2018. Disponível em: <www.conab.gov.br/info-agro/safras/graos/boletim-da-safra-de-graos>. Acesso em: 28 ago. 2018.

Portanto, a porcentagem da produção de soja na região Centro-Oeste foi de aproximadamente 44%.

a) Utilizando uma calculadora, obtenha a porcentagem aproximada de produção referente às outras regiões brasileiras. Norte: 5%; Nordeste: 8%; Sudeste: 7%; Sul: 36%

b) Elabore uma questão que envolva porcentagem a partir das informações da tabela e dê para um colega resolver utilizando uma calculadora. Depois, confira as respostas dadas por ele. Resposta pessoal.

31. Laura quer economizar dinheiro para comprar uma bicicleta e pagá-la à vista. A bicicleta que ela quer comprar custa R$ 900,00 e a loja oferece um desconto de 15% no pagamento à vista.

a) Quantos reais Laura precisa economizar para comprar a bicicleta à vista? R$ 765,00

b) Qual será o valor, em reais, do desconto dado pela compra à vista? R$ 135,00

32. Gustavo esqueceu de pagar, no dia do vencimento, uma conta de luz no valor de R$ 95,00, tendo de pagar um valor maior depois. Sabendo que Gustavo pagou R$ 102,60, calcule a porcentagem que Gustavo pagou a mais nessa conta. 8%

33. Para comprar um televisor no valor de R$ 1 900,00, Conceição deu uma entrada de 45% do preço total e pagou o restante em 5 parcelas iguais.

a) Qual foi o valor, em reais, pago na entrada e em cada parcela? R$ 855,00; R$ 209,00

b) Qual porcentagem cada parcela representa em relação ao valor total do televisor? 11%

Fotomontagem de Sergio L. Filho. Foto: BEELDPHOTO/Shutterstock.com

34. Observe os preços dos produtos a seguir.

Rafael L. Gaion

Considerando que ambas as embalagens serão usadas sem desperdício, qual delas é mais vantajosa para o consumidor comprar? Justifique sua resposta. O pacote de 2,2 kg, pois cada quilograma nesta embalagem custa R$ 10,50, ao passo que no pacote de 0,9 kg cada quilograma custa R$ 12,00.

35. Uma operadora de telefonia, ao começar a atender determinada cidade, recebeu 800 pedidos de instalação de linha de telefone e internet. No 1º mês, a operadora conseguiu atender 12% dos pedidos de instalação, no 2º mês, 20 pedidos a mais que no 1º mês, no 3º mês, 20 pedidos a mais que no 2º mês, mantendo esse ritmo para os próximos meses.

a) Quantos pedidos foram atendidos no primeiro mês? E no quarto mês? 96 pedidos atendidos; 156 pedidos atendidos

b) Mantendo esse ritmo, quantos meses são necessários para atender os 800 pedidos de instalação? 6 meses

Explorando o que estudei

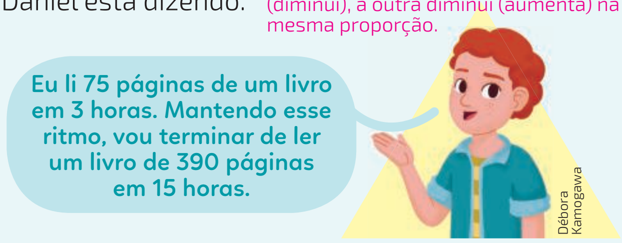
Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? relação entre grandezas, grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais, grandezas não proporcionais, regra de três simples, regra de três simples com grandezas diretamente proporcionais, regra de três simples com grandezas inversamente proporcionais

2. Duas grandezas que são relacionadas sempre são proporcionais? Justifique por meio de exemplos. não; Resposta pessoal.

3. Qual a diferença entre grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais? Nas grandezas diretamente proporcionais, quando uma das grandezas aumenta (diminui), a outra aumenta (diminui) na mesma proporção. Já nas inversamente proporcionais, quando uma das grandezas aumenta (diminui), a outra diminui (aumenta) na mesma proporção.

4. Leia o que Daniel está dizendo.



Débora Kamogawa

A afirmação de Daniel é verdadeira? Justifique. não; Possível resposta: Mantendo esse ritmo de leitura, ele leria 375 páginas após 15 horas.

5. Além das situações apresentadas neste capítulo, cite outras em que são necessários conhecimentos de porcentagem. Resposta pessoal.

Avaliação

- Utilize a seção **Explorando o que estudei** para realizar uma avaliação com os alunos, observando-os enquanto realizam as atividades. Se necessário, faça intervenções que possam guiá-los nas resoluções, ou ainda um resumo do conteúdo estudado, com a intenção de contribuir com aqueles que apresentarem alguma dificuldade em responder às questões propostas. Aproveite para refletir sobre as práticas adotadas no trabalho com o capítulo, de modo a confirmá-las ou reformulá-las para os próximos conteúdos, com o objetivo de proporcionar aos alunos um ambiente favorável à aprendizagem.

- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **35**:

a)

Pedidos	Porcentagem
800	100%
x	12%

800 — 100%

x — 12%

$800 \cdot 12 = 100 \cdot x$

$x = \frac{9\,600}{100} = 96$ pedidos atendidos no primeiro mês.

Para o quarto mês:

1º mês: 96

2º mês: $96 + 20 = 116$

3º mês: $116 + 20 = 136$

4º mês: $136 + 20 = 156$ pedidos atendidos.

b) 1º mês:

$800 - 96 = 704$

2º mês:

$704 - 116 = 588$

3º mês:

$588 - 136 = 452$

4º mês:

$452 - 156 = 296$

5º mês: $296 - 176 = 120$, logo, no 6º mês, todos os 800 pedidos foram atendidos.

BNCC em foco

- Na atividade **34**, converse com os alunos sobre a questão do desperdício, de modo a contemplar a **Competência geral 10** e estimular decisões baseadas em princípios sustentáveis. Diga que, apesar de o preço de um produto vendido em maior quantidade normalmente ser menor, deve-se ponderar a sua utilização para que não haja desperdício.

- Veja alguns exemplos para a questão **2**:
  - Idade de uma pessoa e a medida de sua massa; hora do dia e a medida da temperatura, entre outros.
- Algumas situações para a questão **5** são: a porcentagem de determinado ingrediente de uma receita, a apresentação de taxas de dados estatísticos, e outras.

BNCC em foco

- A seção apresentada nessas páginas desenvolve o tema contemporâneo **Educação Financeira e fiscal**, mostrando aos alunos informações referentes ao sistema tributário do Brasil, a destinação dos impostos e o modo como os recursos advindos dos tributos são aplicados.
- Junto aos alunos, realize uma leitura das cenas e questione se eles têm o hábito de verificar, em notas e cupons fiscais, o valor que foi pago em tributos na compra de cada mercadoria. Diga que a Lei nº 12 741/2012 determina que os estabelecimentos comerciais discriminem esses valores ao consumidor. Peça a eles que digam o que pensam sobre a quantidade de tributos pagos com relação aos de serviços públicos prestados pelos governos, se consideram que o dinheiro está sendo bem empregado ou se há investimentos falhos, de modo a exercitar a **Competência geral 1**, que promove a compreensão da realidade em favor de intervenções positivas na sociedade, e a **Competência geral 7**, que estimula a capacidade de argumentação com base em dados confiáveis.

Cidadania: explore essa ideia

Nota fiscal e tributos

Ao comprarmos um produto ou contratarmos um serviço, deve ser emitida a nota ou o cupom fiscal. Com isso, garantimos diversos direitos, como a troca do produto em caso de defeito, e asseguramos que os tributos sejam arrecadados e revertidos para o bem da população, como na manutenção dos serviços públicos nos setores de saúde, educação, segurança, entre outros.

De maneira geral, o percentual dos tributos que compõem o preço do produto depende de seu nível de necessidade. Enquanto nos alimentos da cesta básica incide um menor percentual, os tributos têm um peso maior em produtos considerados supérfluos, por exemplo, perfumaria e bebidas alcoólicas. Além de conter a descrição e o preço, as notas fiscais devem conter também o valor da tributação embutida no produto.

154

- A leitura do texto e das cenas pode ser realizada coletivamente. Instigue os alunos a expressarem suas opiniões sobre o texto, sempre tomando cuidado para que haja respeito mútuo. Aproveite para reforçar as informações sobre a importância de se pedir a nota fiscal, por ela ser uma garantia da compra em casos de necessidade de troca. Diga ainda que esse é um modo de controlar a sonegação de impostos por parte dos comerciantes, que, com a emissão da nota, têm o dever de declarar a venda.

Analisando com cidadania

Anote no caderno   Respostas nas orientações ao professor.

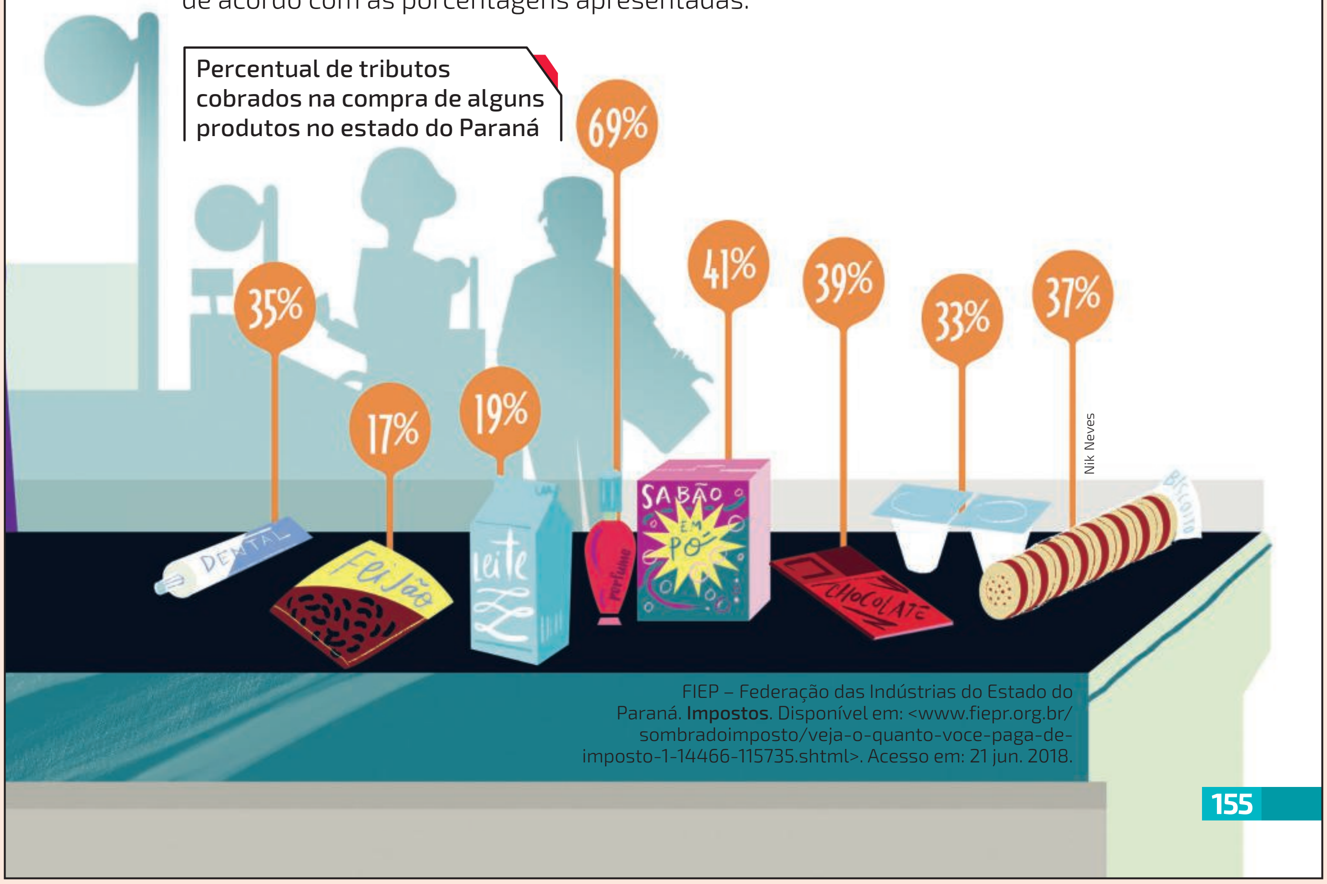
1. Por quais motivos devemos exigir a emissão da nota ou do cupom fiscal quando compramos um produto ou contratamos um serviço?
2. Entre os produtos comprados pela família na cena, qual tem o menor e qual tem o maior percentual de tributos no preço? O que determina essa diferença de percentual de tributação?
3. De acordo com o texto, qual é a finalidade dos tributos arrecadados ao realizarmos uma compra?

Analisando com a Matemática

Anote no caderno

4. Observe no cupom fiscal, destacado na cena, o valor aproximado do tributo e a porcentagem correspondente ao valor total da compra. Qual é o valor total aproximado dessa compra?
5. Escolha, entre os produtos que aparecem abaixo, um que seja necessário e um supérfluo. Depois, pesquise os respectivos preços em um supermercado. Feito isso, calcule o valor aproximado pago em tributos nesses produtos de acordo com as porcentagens apresentadas.

Percentual de tributos cobrados na compra de alguns produtos no estado do Paraná



FIEP – Federação das Indústrias do Estado do Paraná. **Impostos**. Disponível em: <www.fiepr.org.br/sombradoimposto/veja-o-quanto-voce-paga-de-imposto-1-14466-115735.shtml>. Acesso em: 21 jun. 2018.

Respostas

1. Espera-se que os alunos respondam que devemos exigir para garantir os direitos do consumidor e assegurar que os tributos sejam arrecadados.
2. Maior: perfume; menor: feijão. O perfume não é considerado um produto prioritário quando comparado ao feijão, que é um produto necessário na alimentação.
3. Espera-se que os alunos respondam que os tributos arrecadados são revertidos em benefícios para a população, como serviços nos setores da saúde, educação, segurança, entre outros.
4. R$ 106,55
5. Resposta pessoal.

- Avalie a possibilidade de levar uma nota fiscal para a sala de aula, ou pedir para os alunos levarem, a fim de que possam identificar como as mercadorias estão descritas e como os tributos estão referenciados.
- Na realização da questão **5**, promova uma discussão a fim de que os alunos possam identificar melhor os produtos considerados mais necessários e os considerados mais supérfluos.

- Ao final, questione-os sobre o fato de alguns produtos terem uma taxação maior do que outros, conforme o nível de necessidade. Pergunte se eles consideram um modo justo de se pensar os tributos ou se consideram uma política irrelevante. Deixe que exprimam suas opiniões, sem julgá-las como certas ou equivocadas.

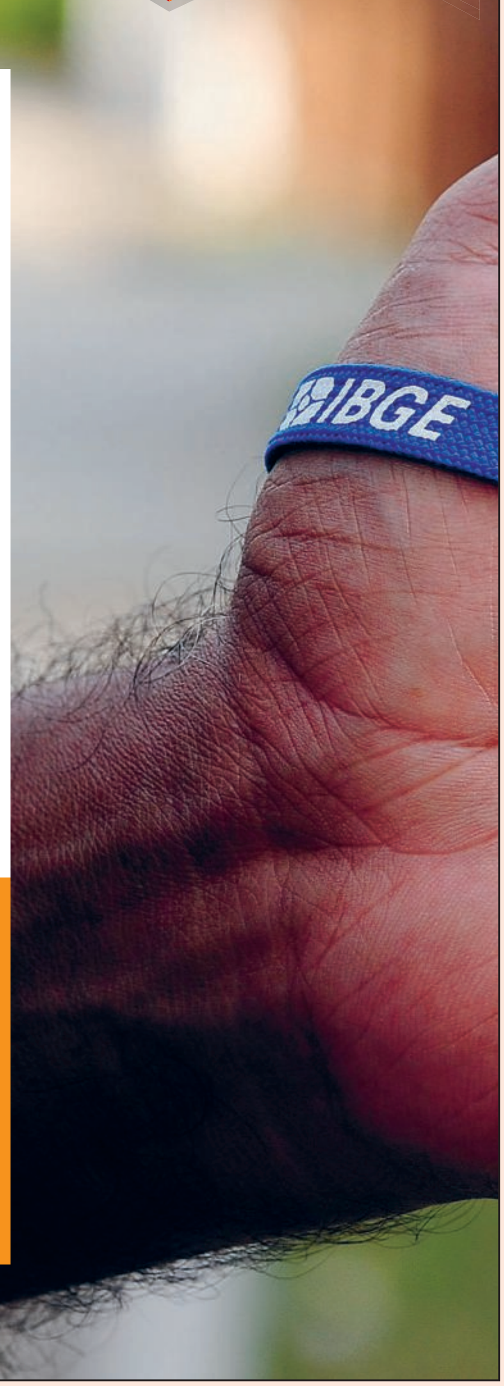
Esse capítulo ampliará os conhecimentos dos alunos quanto aos conceitos relacionados à Estatística, como as variáveis, frequências, organização de dados em rol, histogramas, gráficos, tabelas, e os auxiliará tanto na interpretação quanto a ponderar sobre qual ferramenta utilizar na representação de determinados conjuntos de dados.

Serão estimulados também a compreender e calcular média aritmética, moda e mediana, compreender a amplitude total de um conjunto de dados, diferenciar pesquisa censitária e amostral, estabelecer o conceito de possibilidade relacionando-o com o princípio multiplicativo e o conceito de probabilidade. Ainda serão levados a resolver e elaborar problemas inseridos em diversos contextos reais, possibilitando uma interação entre os saberes e o mundo.

- Essas páginas de abertura buscam apresentar aos alunos algumas informações sobre como são realizadas pesquisas estatísticas. Tendo em vista que, no texto, há um breve comentário sobre o que é amostra, enfatize a importância de que esta seja parte representativa da população que se quer pesquisar. Diga, como exemplo, que, caso a direção da escola queira fazer uma pesquisa estatística para saber a opinião dos alunos sobre certo tema, é possível sortear alguns alunos de cada turma para compor uma amostra. No texto também são apresentadas informações sobre o uso de recursos tecnológicos na realização de pesquisas. Diga aos alunos que, além dos computadores portáteis utilizados na coleta de dados, em diversas outras etapas faz-se uso da tecnologia, como na organização dos dados e na divulgação dos resultados. Uma sugestão de condução do trabalho com essas páginas é propor uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos.

Capítulo 8

Estatística e probabilidade



Periodicamente, são feitas pesquisas de opinião referentes a tendências de mercado e mapeamento de características da população. Algumas delas são encomendadas pelos governos, outras são para fins particulares ou comerciais.

Em muitos casos, quando se deseja obter rapidamente resultados em uma pesquisa, opta-se por não entrevistar toda a população de interesse. Para isso, é escolhida uma parte da população, denominada amostra, que represente de modo satisfatório os indivíduos da área de interesse da pesquisa. Se a amostra não for bem escolhida, corre-se o risco de gerar informações tendenciosas, dando preferência a um ou a outro resultado.

Atualmente, a fim de viabilizar as pesquisas estatísticas, são utilizados diversos recursos tecnológicos. Por exemplo, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) disponibiliza computadores portáteis aos entrevistadores, possibilitando, posteriormente, a transferência remota das informações coletadas para um banco de dados centralizado.

Pensando nisso... Respostas nas orientações ao professor.

A Algumas empresas contratam institutos especializados de pesquisa para fazer uma consulta popular antes de lançar um produto inédito no mercado. Em sua opinião, qual é o objetivo dessas pesquisas?

B Cite uma vantagem e uma desvantagem ao optar por entrevistar apenas uma amostra da população em uma pesquisa.

C Se você trabalhasse em um instituto de pesquisa, que recursos poderia utilizar para organizar os resultados?

156

Lucas Lacaz Ruiz/Folhapress

Recenseador com um computador de mão, usado para a coleta de dados do Censo 2010, do IBGE.

Pensando nisso...

A Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que o objetivo é conhecer a necessidade e a aceitação do produto entre as pessoas entrevistadas.

B Possíveis respostas: vantagens: maior rapidez e menor custo na pesquisa; desvantagem: risco de o resultado obtido não representar a população.

C Possíveis respostas: tabelas, listas, gráficos, pictogramas, diagramas.

- Para complementar o item **C**, proponha aos alunos que identifiquem e recortem de jornais e revistas elementos que apresentem resultados de pesquisas estatísticas, como gráficos e tabelas. Os recortes podem ser organizados por tipo, colados em cartolinas e fixados em murais.

Objetivos do capítulo

- Identificar variáveis estatísticas.
- Classificar as variáveis em quantitativa (discreta ou contínua) ou qualitativa (nominal ou ordinal).
- Calcular a frequência absoluta, a frequência relativa, a frequência acumulada e a frequência acumulada relativa.
- Organizar dados em rol.
- Distribuir os dados em intervalos de classes.
- Interpretar histogramas.
- Reconhecer os gráficos e as tabelas como fonte de informação.
- Identificar diferentes tipos de gráficos e tabelas.
- Interpretar dados representados em gráficos e tabelas.
- Construir diferentes tipos de gráficos e tabelas e avaliar qual é adequado à representação de determinado conjunto de dados.
- Calcular a média aritmética, a moda e a mediana de um conjunto de valores.
- Compreender e determinar a amplitude total de conjuntos de dados.
- Reconhecer pesquisa censitária e amostral, bem como tipos de amostragem.
- Estabelecer o conceito de possibilidades e elaborar diagrama de árvore e quadro de possibilidades.
- Compreender o conceito de probabilidade.
- Realizar cálculos de probabilidade.

Variáveis estatísticas

As pesquisas estatísticas são úteis em nosso cotidiano em diversas situações. Órgãos como o IBGE utilizam pesquisas para diagnosticar características da população e fazer projeções, que auxiliam no planejamento do país.

Nessas pesquisas, cada elemento investigado é chamado **variável estatística** ou, simplesmente, **variável**.

Veja o exemplo.

Certa loja fez uma pesquisa para obter algumas informações a respeito dos funcionários e, com os resultados obtidos, elaborou a seguinte tabela.

Informações a respeito dos funcionários

Nome	Nível de escolaridade	Estado civil	Quantidade de filhos	Medida da altura (m)	Medida da massa (kg)
Andréa	Ensino Fundamental	solteira	0	1,62	65,8
Carlos	Ensino Médio	casado	1	1,74	73,5
Danieli	Ensino Médio	casada	1	1,53	61,1
Fátima	Ensino Médio	solteira	1	1,58	54,7
Jéssica	Ensino Fundamental	casada	1	1,56	53,2
Júlio	Ensino Superior	solteiro	0	1,79	83,2
Pedro	Ensino Médio	casado	2	1,82	79,6
Ricardo	Ensino Fundamental	solteiro	0	1,69	63,5
Sérgio	Ensino Superior	casado	2	1,87	84,7

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

As variáveis que podem ser descritas por números são as chamadas **variáveis quantitativas**. Sendo assim, na pesquisa acima, as variáveis "quantidade de filhos", "medida da altura" e "medida da massa" são quantitativas. Elas podem ser classificadas em **discretas** ou **contínuas**.

As variáveis quantitativas discretas são obtidas por meio de contagem, como a variável "quantidade de filhos". Já as variáveis quantitativas contínuas, em geral, são obtidas por meio de mensuração, como as variáveis "medida da altura" e "medida da massa".

As variáveis que apresentam qualidade ou atributo como resposta são chamadas **qualitativas**, que podem ser classificadas em **nominal** ou **ordinal**. As variáveis qualitativas nominais são aquelas que, de início, não apresentam uma ordenação entre as possíveis respostas, como a variável "estado civil". Já as variáveis qualitativas ordinais têm certa ordenação, como a variável "nível de escolaridade".

Podemos indicar a possível classificação de uma variável estatística por meio de um esquema.

Variável
- Quantitativa
  - Discreta
  - Contínua
- Qualitativa
  - Nominal
  - Ordinal

Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **7**, **8** e **9** do 3º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

Atividades

Anote no caderno

1. Classifique cada variável em quantitativa ou qualitativa.

a) Quantidade de veículos vendidos. quantitativa

b) Dias da semana. qualitativa

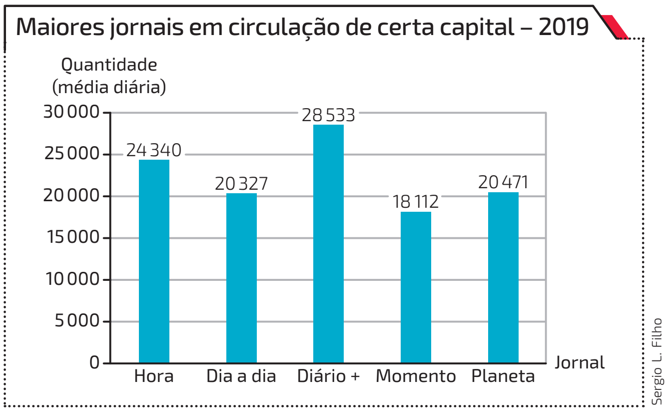
c) Medida da distância entre duas cidades. quantitativa

d) Local de nascimento. qualitativa

2. Classifique as grandezas quantitativas da atividade anterior em discreta ou contínua, e as qualitativas em nominal ou ordinal. a: quantitativa discreta; b: qualitativa ordinal; c: quantitativa contínua; d: qualitativa nominal

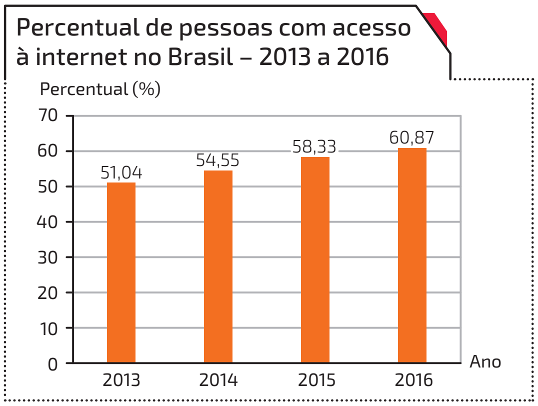
3. Observe no gráfico de barras a circulação média diária de alguns jornais de certa capital.

Qual das variáveis apresentadas no gráfico é quantitativa? E qual é qualitativa?
quantidade média de circulação diária; nome do jornal

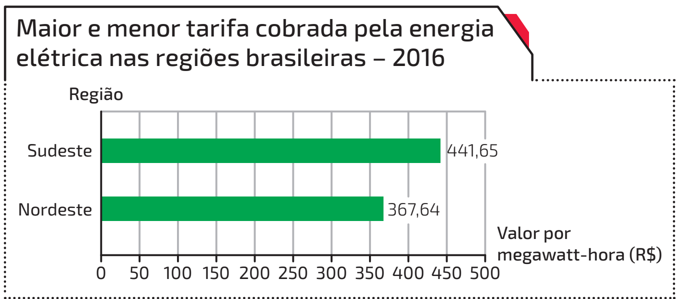


Elaborado pelo autor com dados fictícios.

4. Observe os gráficos.



ITU – International Telecommunication Union. Disponível em: <www.itu.int/en/ITU-D/Statistics/Documents/statistics/2018/Individuals_Internet_2000-2016%20Jan2018.xls>. Acesso em: 14 ago. 2018.



EPE – Empresa de Pesquisa Energética. **Anuário estatístico de energia elétrica 2017**. Disponível em: <www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-160/topico-168/Anuario2017vf.pdf>. Acesso em: 2 jul. 2018.

Ilustrações: Sergio L. Filho

Identifique e classifique as variáveis apresentadas em cada um dos gráficos.
qualitativa ordinal: ano; quantitativa discreta: percentual de pessoas com acesso à internet; qualitativa nominal: região; quantitativa contínua: valor por megawatt-hora.

- Na atividade **3**, questione os alunos se eles têm o hábito de ler jornal impresso ou se alguém da família lê. Explique que o advento da internet reduziu significativamente a circulação impressa de jornais.
- Na atividade **4**, a fonte dos dados do gráfico que apresenta o percentual de pessoas com acesso à internet no Brasil remete a uma planilha com informações em inglês. Se julgar conveniente, apresente aos alunos a tabela com os dados juntamente com a tradução dos nomes de outros países. Aproveite o contexto dessa atividade para criar um momento de reflexão comentando que, mesmo a internet sendo tão popularizada hoje em dia, muitas pessoas ainda não têm acesso a esse recurso. Se julgar conveniente, leve para a sala de aula dados atualizados sobre esse percentual ou peça para que os alunos façam uma pesquisa sobre o assunto.

- A exemplo do conteúdo dessa página, realize com a turma uma distribuição de frequência referente à idade e ao total de alunos da sala de aula. Possibilite que eles mesmos efetuem a pesquisa e conduzam a atividade, auxiliando-os sempre que necessário e fazendo anotações na lousa.

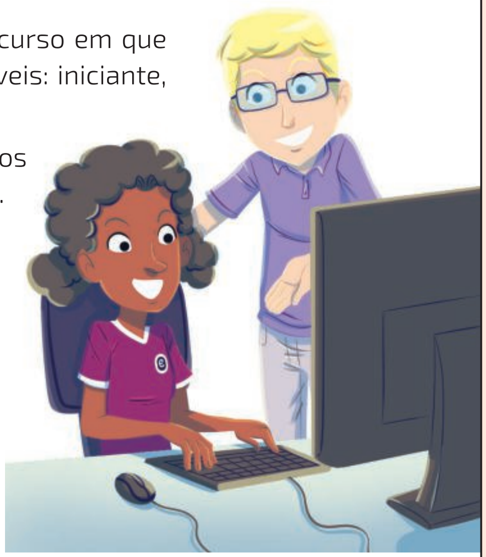
Distribuição de frequência

Em uma escola de informática, é ofertado um curso em que os alunos devem concluir sucessivamente três níveis: iniciante, intermediário e avançado.

A tabela a seguir apresenta a quantidade de alunos matriculados nesse curso em cada nível de estudo.

Alunos do curso de informática em março de 2019	
Nível	Quantidade de alunos
Iniciante	27
Intermediário	21
Avançado	12
Total	60

Elaborado pelo autor com dados fictícios.


Rafael Lam

Nessa tabela, a 2ª coluna apresenta a quantidade de alunos matriculados por nível de estudo. Cada quantidade corresponde à **frequência absoluta** ou, simplesmente, **frequência** (f).

Para que possamos visualizar a participação de cada frequência absoluta em relação ao todo, podemos calcular a **frequência relativa** (fr), que em geral é dada em porcentagem e calculada da seguinte maneira: $fr = \frac{f}{n}$, em que **n** indica a quantidade total de ocorrências.

Nesse caso, temos:

- nível iniciante: $fr = \frac{27}{60} = 0{,}45 = 45\%$
- nível intermediário: $fr = \frac{21}{60} = 0{,}35 = 35\%$
- nível avançado: $fr = \frac{12}{60} = 0{,}20 = 20\%$

Alunos do curso de informática em março de 2019		
Nível	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)
Iniciante	27	45%
Intermediário	21	35%
Avançado	12	20%
Total	60	100%

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Também podemos incluir nessa tabela a **frequência acumulada** (fa), que é dada pela soma das frequências absolutas até um determinado dado, e a **frequência acumulada relativa** (far), que é dada pela soma das frequências relativas até um determinado dado.

- Nível iniciante:
  fa = 27 far = 45%
- Nível intermediário:
  fa = 27 + 21 = 48 far = 45% + 35% = 80%
- Nível avançado:
  fa = 27 + 21 + 12 = 60 far = 45% + 35% + 20% = 100%

Alunos do curso de informática em março de 2019				
Nível	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada (fa)	Frequência acumulada relativa (far)
Iniciante	27	45%	27	45%
Intermediário	21	35%	48	80%
Avançado	12	20%	60	100%
Total	60	100%		

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

A tabela ao lado apresenta a distribuição de frequências da variável quantidade de alunos.

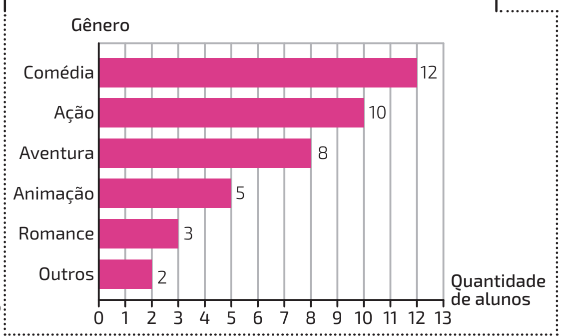
Analisando a frequência acumulada e a frequência acumulada relativa, podemos concluir, por exemplo, que 48 alunos, ou 80% do total, estão cursando o nível iniciante ou intermediário.

Atividades

Anote no caderno

5. Observe o resultado de uma pesquisa feita com os alunos de uma turma de 8º ano sobre o gênero de filme preferido.

Gênero de filme preferido pelos alunos de uma turma de 8º ano – 2019



Sergio L. Filho

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Rafael Lam

a) Qual o total de alunos dessa turma? 40 alunos

b) Determine a frequência relativa para cada gênero de filme.
comédia: 30%; ação: 25%; aventura: 20%; animação: 12,5%; romance: 7,5%; outros: 5%

c) Qual porcentagem obtemos ao adicionar a frequência relativa de todos os gêneros? Converse com um colega a respeito do significado dessa porcentagem. 100%

d) Você costuma assistir a filmes? De qual gênero de filme você mais gosta?
Resposta pessoal.

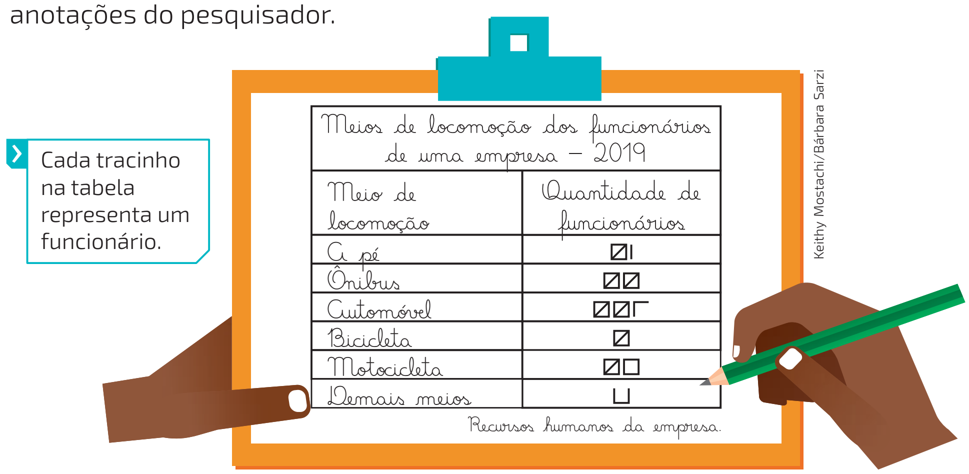
- Verifique se os alunos compreenderam a diferença entre frequência absoluta e frequência acumulada.
- Explique a eles que o último valor calculado para frequência acumulada deve ser igual à quantidade total de elementos da variável analisada.
- Aproveite a pergunta formulada no item **d** da atividade **5** para fazer uma pesquisa com os alunos e, em seguida, propor a construção de uma tabela e um gráfico para organizar os dados coletados.

BNCC em foco

- As atividades dessa página procuram levar os alunos a enfrentar situações-problemas em diversos contextos, expressar suas respostas e sintetizar conclusões utilizando diferentes registros e linguagens, como tabelas. Dessa forma, contempla-se a **Competência específica de Matemática 6**. Essa competência também será desenvolvida em diversas outras atividades durante o capítulo.

- Na resolução do item **b** da atividade **6** e do item **c** da atividade **7**, quando necessário, arredonde para o inteiro mais próximo os valores calculados para as frequências relativas.

6. Foi realizada uma pesquisa para identificar o meio de locomoção utilizado pelos funcionários de uma empresa para chegar ao trabalho. Observe as anotações do pesquisador.



Keithy Mostachi/Bárbara Sarzi

a) Qual foi o total de funcionários entrevistados? 45 funcionários

b) Construa uma tabela indicando a frequência e a frequência relativa de cada meio de locomoção utilizado pelos funcionários. Resposta nas orientações ao professor.

c) Qual o meio de locomoção mais usado pelos funcionários dessa empresa? automóvel

7. Veja como a direção de uma escola registrou a idade dos alunos da turma do 8º ano de 2019.

13	12	12	14	13
15	12	13	13	14
14	12	12	13	13
15	13	15	12	13
14	13	12	12	13
14	13	12	12	14

a) Quantos alunos há nessa turma? 30 alunos

b) Qual é a idade do aluno mais novo? E do mais velho? 12 anos; 15 anos

c) Construa uma tabela de distribuição de frequências com os dados apresentados, contendo frequência, frequência relativa, frequência acumulada e frequência acumulada relativa de cada idade. Resposta nas orientações ao professor.

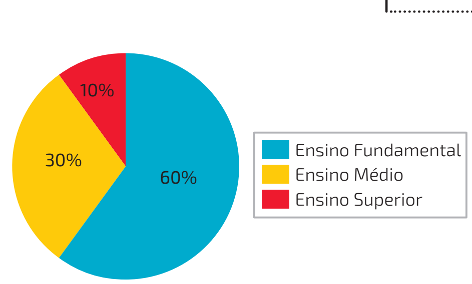
8. Observe o gráfico.

a) Sabendo que essa indústria tem 70 funcionários, quantos pertencem a cada nível de escolaridade?

8. a) Ensino Fundamental: 42 funcionários; Ensino Médio: 21 funcionários; Ensino Superior: 7 funcionários

b) Construa uma tabela que represente a frequência, a frequência relativa, a frequência acumulada e a frequência acumulada relativa da escolaridade dos funcionários dessa indústria. Resposta nas orientações ao professor.

Escolaridade dos funcionários de uma indústria – 2019



Sergio L. Filho

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

162

Respostas

6. b)

Meios de locomoção dos funcionários de uma empresa – 2019		
Meio de locomoção	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)
A pé	6	13%
Ônibus	10	22%
Automóvel	12	27%
Bicicleta	5	11%
Motocicleta	9	20%
Demais meios	3	7%
Total	45	100%

Recursos humanos da empresa.

7. c)

Idade dos alunos de uma turma do 8º ano – 2019				
Idade	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada (fa)	Frequência acumulada relativa (far)
12	10	33%	10	33%
13	11	37%	21	70%
14	6	20%	27	90%
15	3	10%	30	100%
Total	30	100%		

Direção da escola.

Intervalo de classes

O colesterol é uma substância que desempenha um papel importante em nosso organismo e pode ser classificado em "bom" (HDL) e "ruim" (LDL). No entanto, é necessário que os níveis desses dois tipos de colesterol estejam sempre controlados.

Ilustrações: Débora Kamogawa

Considera-se um nível de colesterol LDL alto quando a pessoa apresenta 130 mg ou mais a cada decilitro de sangue, ou seja, LDL maior ou igual a 130 mg/dL. Isso aumenta os riscos de infarto, derrame cerebral etc.

Observe os níveis de colesterol LDL, em miligramas por decilitro de sangue, de 48 pessoas examinadas em uma campanha.

131	128	148	134	118	113	119	126	105	136	121	124
143	115	104	111	122	133	101	128	117	129	115	92
126	139	91	122	141	119	111	136	98	114	112	107
138	116	131	127	116	122	113	125	104	135	102	114

Para facilitar a observação dos resultados obtidos, podemos organizar esses valores em ordem crescente ou decrescente. Em estatística, essa ordenação é chamada **rol**.

91	92	98	101	102	104	104	105	107	111	111	112
113	113	114	114	115	115	116	116	117	118	119	119
121	122	122	122	124	125	126	126	127	128	128	129
131	131	133	134	135	136	136	138	139	141	143	148

Podemos construir uma tabela com a distribuição de frequências da variável nível de colesterol LDL. Como há poucos valores que se repetem, é conveniente fazer agrupamentos em faixas de níveis de colesterol, chamadas **intervalos de classe**. Esses intervalos devem ser definidos para facilitar a análise dos dados. A diferença entre o maior e o menor valor de cada intervalo de classe é chamada **amplitude** e deve ser igual em todos os intervalos.

BNCC em foco

- O assunto abordado nessa página permite o trabalho com os temas contemporâneos **Saúde** e **Educação alimentar e nutricional**, por explorar o tema colesterol de um modo informativo, explicando do que se trata e quais são os riscos. Pesquise, com os alunos, quais são os hábitos alimentares recomendados para o controle do colesterol e incentive-os a adotar tais hábitos, alertando-os para o fato de que até mesmo pessoas na infância ou na adolescência já podem apresentar alteração nos níveis de colesterol. Mais informações podem ser obtidas no *site* <http://www.fpcardiologia.pt/alimentacao-e-colesterol/>. Acesso em: 4 jul. 2019.

- Na situação apresentada, explique que os intervalos de classes podem ser determinados da maneira a seguir.
  - Calculamos a amplitude total dos valores, ou seja, a diferença entre o maior e o menor valor dos dados.

$$\underbrace{148}_{\text{maior valor}} - \underbrace{91}_{\text{menor valor}} = 57$$

  - Por conveniência, escolhemos um número maior ou igual à amplitude total calculada. Nesse caso, o número escolhido foi 60.
  - Dividimos o número escolhido por 10, isto é, $60 : 10 = 6$, obtendo, desse modo, 6 intervalos de classe, cada um com amplitude igual a 10 mg/dL.
  - As classes devem conter todos os valores apresentados, tendo a primeira classe o menor valor, e a última classe, o maior.

8. b)

Escolaridade dos funcionários de uma indústria – 2019				
Nível	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada (fa)	Frequência acumulada relativa (far)
Ensino Fundamental	42	60%	42	60%
Ensino Médio	21	30%	63	90%
Ensino Superior	7	10%	70	100%
Total	70	100%		

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

- Explique aos alunos que a distribuição dos valores em intervalos de classes é muito utilizada para representar variáveis quantitativas contínuas e conjuntos de dados com poucos valores repetidos. A organização em rol facilita a visualização dos valores e auxilia na determinação da quantidade de elementos que pertencem a cada intervalo.
- O histograma é uma maneira de apresentar os valores distribuídos em intervalos de classes. No eixo horizontal, são marcados os intervalos e, no eixo vertical, é indicada a frequência relativa de cada intervalo.

BNCC em foco

- Aproveite a atividade de **9** para prosseguir com as discussões sobre o colesterol e reforçar o trabalho com o tema contemporâneo **Saúde**, alertando os alunos quanto à necessidade de ter hábitos saudáveis para a manutenção da saúde. Verifique a pesquisa sobre os hábitos alimentares proposta anteriormente e explique que alguns dos hábitos que auxiliam a regulação dos níveis de colesterol passam pela redução da ingestão de alimentos ricos em colesterol e gorduras saturadas, pelo aumento da ingestão de alimentos ricos em fibras alimentares e pela prática de atividade física.

Utilizaremos intervalos de classes de 10 mg/dL, ou seja, a amplitude é igual 10.

Nível de colesterol LDL de 48 pessoas em uma campanha – 2019

Nível de colesterol (mg/dL)	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada (fa)	Frequência acumulada relativa (far)
90 ⊢ 100	3	6,25%	3	6,25%
100 ⊢ 110	6	12,5%	9	18,75%
110 ⊢ 120	15	31,25%	24	50%
120 ⊢ 130	12	25%	36	75%
130 ⊢ 140	9	18,75%	45	93,75%
140 ⊢ 150	3	6,25%	48	100%
Total	48	100%		

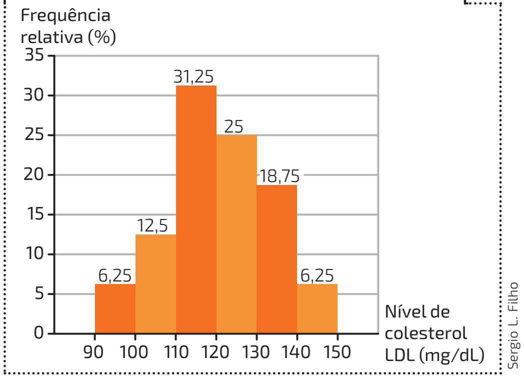
Elaborado pelo autor com dados fictícios.

A notação 90 ⊢ 100, por exemplo, indica que nessa classe constarão os valores maiores ou iguais a 90 e menores que 100.

Também podemos representar as informações pesquisadas por meio de um gráfico chamado **histograma**. Veja ao lado.

Um histograma é um gráfico composto de retângulos justapostos, cuja medida da altura de cada um é proporcional à frequência relativa que ele representa. Os vértices das bases desses retângulos coincidem com os extremos de cada intervalo de classe.

Nível de colesterol LDL de 48 pessoas em uma campanha – 2019



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Atividades

Anote no caderno

9. Em relação às pessoas examinadas na campanha citada anteriormente, responda às questões a seguir.

a) Quantas pessoas apresentaram nível de colesterol LDL menor que 110 mg/dL? 9 pessoas

b) Quantos por cento apresentaram nível de colesterol LDL maior ou igual a 140 mg/dL? 6,25%

c) Caso mais de 20% das pessoas examinadas apresentem um alto nível de colesterol LDL, os organizadores da campanha vão realizar um projeto para acompanhá-las. Esse projeto vai acontecer? Se sim, será necessário abranger todas as pessoas examinadas ou apenas uma parte delas?

c) Sim, pois 25% das pessoas examinadas apresentam um alto nível de colesterol LDL. Espera-se que os alunos citem que apenas uma parte das pessoas examinadas vai participar do projeto, pois 12 pessoas apresentaram alto nível de colesterol LDL.

d) Junte-se a três colegas e pesquisem hábitos saudáveis que auxiliam na redução do nível de colesterol LDL. Depois, construam um cartaz incentivando e orientando as pessoas a controlar o nível de colesterol. Resposta pessoal.

Respostas

10. a)

Nota dos alunos de uma turma de 8º ano na prova de Ciências – 2019

Notas	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada (fa)	Frequência acumulada relativa (far)
3 ⊢ 4,5	1	3,7%	1	3,7%
4,5 ⊢ 6	2	7,41%	3	11,11%
6 ⊢ 7,5	5	18,52%	8	29,63%
7,5 ⊢ 9	12	44,44%	20	74,07%
9 ⊢ 10,5	7	25,93%	27	100%
Total	27	100%		

Professora de Ciências do 8º ano.

10. De acordo com as notas obtidas pelos alunos de uma turma de 8º ano em uma prova de Ciências, em 2019, a professora vai decidir se realiza uma oficina de reforço. Veja a seguir as notas obtidas pelos alunos.

8,2	7,6	8,9	9,5	7,8	6,2	8,3	7,0	6,0
8,0	10,0	8,0	9,2	9,0	5,1	3,0	6,7	8,1
4,8	6,3	8,1	9,5	10,0	7,8	7,6	7,6	10,0

a) Distribua a nota dos alunos, em intervalos de classe, e construa uma tabela no caderno indicando a frequência, a frequência relativa, a frequência acumulada e a frequência acumulada relativa de cada intervalo. A tabela deverá ter 5 intervalos, e o primeiro deverá ser 3 ⊢ 4,5.
Resposta nas orientações ao professor.

b) Com base na tabela construída no item anterior, o que podemos concluir em relação ao desempenho da turma nessa prova? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos concluam que aproximadamente 88,9% dos alunos obtiveram nota maior ou igual a 6, o que demonstra um bom desempenho nessa prova.

c) Em sua opinião, a professora deve aplicar a oficina de reforço? Justifique.
Resposta pessoal.

d) A professora decidiu que faria a oficina de reforço caso $\frac{1}{5}$ dos alunos obtivessem nota inferior a 7,5. Nesse caso, ela vai realizar a oficina? Justifique.

10. d) Sim, pois $\frac{1}{5} = 20\%$ e 29,63% dos alunos obtiveram nota inferior a 7,5.

e) Você acha o critério adotado pela professora adequado? Justifique.
Resposta pessoal.

f) Se você tivesse que decidir quais critérios adotar para que a oficina fosse realizada, quais seriam? Resposta pessoal.

11. Um empresário pretende abrir uma escola de idiomas em determinado bairro. A fim de avaliar a aceitação da população desse lugar, ele contratou uma empresa especializada em pesquisas. Entre as várias perguntas feitas, uma delas foi:

Em uma escala de 0 a 10, como você classifica a relevância de ter uma nova escola de idiomas no bairro?

Nessa escala, temos:
- 0: "nenhuma relevância"
- 10: "muita relevância"

Observe a nota atribuída pelas 50 pessoas entrevistadas em 2019.

1	9	8	9	9	8	5	3	9	8
7	9	8	5	4	3	9	9	9	9
9	5	4	3	1	0	1	8	9	9
4	5	5	9	8	9	9	9	8	1
1	2	6	8	9	9	9	8	7	2

a) Distribua as notas atribuídas em intervalos de classe e construa uma tabela indicando a frequência, a frequência relativa, a frequência acumulada e a frequência acumulada relativa de cada intervalo. A tabela deverá ter 5 intervalos, e o primeiro deverá ser 0 ⊢ 2. Resposta nas orientações ao professor.

b) De acordo com a tabela construída no item **a**, em sua opinião, qual decisão esse empresário deve tomar em relação à abertura da escola de idiomas? Justifique. Resposta pessoal.

BNCC em foco

- As atividades **10** e **11** permitem que os alunos classifiquem as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para tomar decisões. Dessa forma, a habilidade **EF08MA24** é contemplada.

- No item **b** da atividade **11**, os alunos podem julgar que o empresário abrirá a escola, pois a maioria das notas obtidas é maior ou igual a 8, o que pode ser considerado relevante para o empresário na tomada de decisão.

11. a)

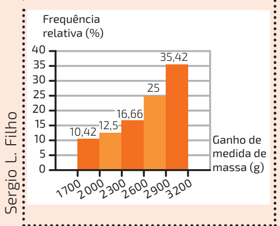
Relevância em ter uma escola de idiomas no bairro de 0 a 10 – 2019

Nota	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada (fa)	Frequência acumulada relativa (far)
0 ⊢ 2	6	12%	5	12%
2 ⊢ 4	5	10%	11	22%
4 ⊢ 6	8	16%	19	38%
6 ⊢ 8	3	6%	22	44%
8 ⊢ 10	28	56%	50	100%
Total	50	100%		

Empresa especializada em pesquisas.

- Se julgar conveniente solicite aos alunos que, com base na tabela apresentada na atividade **14**, construam um histograma que represente o ganho de medida de massa das aves. Oriente-os nessa construção.

Ganho de medida de massa de aves – 2019



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

12. Durante a campanha de vacinação contra a gripe, um posto de saúde vacinou as pessoas por grupos de idade, conforme a tabela ao lado.

a) Quantas pessoas de 20 a 39 anos foram vacinadas nesse posto de saúde? 200 pessoas

b) Qual a amplitude de cada intervalo de classe da tabela? 4 anos

c) Copie a tabela ao lado em seu caderno e inclua as frequências relativa, acumulada e acumulada relativa. Resposta nas orientações ao professor.

Quantidade de pessoas vacinadas contra a gripe em um posto de saúde – 2019

Idade (em anos)	Frequência (f)
20 ⊢ 24	36
24 ⊢ 28	40
28 ⊢ 32	45
32 ⊢ 36	35
36 ⊢ 40	44

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

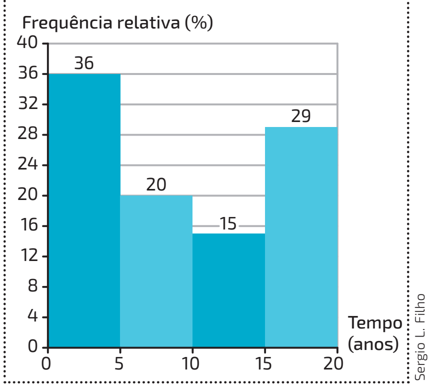
13. O departamento de recursos humanos de uma empresa realizou um levantamento para saber há quantos anos cada funcionário trabalhava na empresa. Veja o histograma ao lado.

a) Qual a amplitude de cada intervalo de classe utilizado na construção desse histograma? 5 anos

b) Quantos por cento dos funcionários trabalham nessa empresa há menos de 5 anos? 36%

c) Sabendo que essa empresa tem 75 funcionários, quantos trabalham nela há 10 anos ou mais? 33 funcionários

Tempo de serviço dos funcionários de uma empresa – 2019



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

14. Um **zootecnista** realizou certo experimento para testar uma nova composição de ração oferecida a frangos de corte. Para isso, algumas aves foram alimentadas com essa ração e pesadas, individualmente, no início e no fim do experimento. Veja na tabela alguns dados obtidos por esse zootecnista.

a) Quantas aves foram selecionadas para o experimento? 48 aves

b) Qual a porcentagem das aves que tiveram aumento da medida de massa menor que 2 300 g? aproximadamente 22,92%

c) Qual a amplitude de cada intervalo de classe utilizado para indicar o ganho de medida de massa das aves? 300 g

Ganho de medida de massa das aves – 2019

Ganho de medida de massa (g)	Frequência (f)
1 700 ⊢ 2 000	5
2 000 ⊢ 2 300	6
2 300 ⊢ 2 600	8
2 600 ⊢ 2 900	12
2 900 ⊢ 3 200	17

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Zootecnista › profissional que trabalha com pesquisas relacionadas à genética de animais domésticos ou domesticáveis.

Respostas

12. c)

Quantidade de pessoas vacinadas contra a gripe em um posto de saúde – 2019

Idade (em anos)	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada (fa)	Frequência acumulada relativa (far)
20 ⊢ 24	36	18%	36	18%
24 ⊢ 28	40	20%	76	38%
28 ⊢ 32	45	22,5%	121	60,50%
32 ⊢ 36	35	17,5%	156	78%
36 ⊢ 40	44	22%	200	100%
Total	200	100%		

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Tabelas e gráficos

Atualmente, as notícias são transmitidas por diversos meios de comunicação, como televisão, jornais impressos, rádio, revistas e internet. Com o surgimento de novas tecnologias, as notícias passaram a ser transmitidas mais rapidamente, algumas quase instantaneamente.

Com isso, os meios de comunicação passaram a utilizar cada vez mais recursos nessas transmissões, como gráficos, tabelas e infográficos. Veja alguns exemplos deles.

Tabelas

Nas tabelas, as informações são apresentadas em linhas e colunas, o que auxilia na leitura e na interpretação.

Toda tabela deve conter **título**, utilizado para apresentar a informação principal, e **fonte das informações**, a qual mostra a origem dos dados e a data em que foram publicados ou acessados.

Na tabela a seguir, por exemplo, são apresentados quantos quilogramas, em média, cada habitante brasileiro gerou de resíduos sólidos urbanos, diariamente e por região, em 2016.

Delfim Martins/Tyba

Coleta de lixo no centro de São Sebastião (SP), em 2018.

Quantidade de resíduo sólido urbano, *per capita*, gerado no Brasil, por região – 2016

Região	Quantidade (kg/dia)
Norte	0,871
Nordeste	0,967
Centro-Oeste	1,085
Sudeste	1,213
Sul	0,752

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2016**. Disponível em: <www.abrelpe.org.br/pdfs/panorama/panorama2016.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2018.

> Os resíduos sólidos urbanos, de maneira geral, são aqueles gerados pelas atividades domésticas ou comerciais, como matérias orgânicas, papel e papelão, plásticos, vidros e metais.

Analisando a tabela, podemos chegar a algumas conclusões, como:

- a maior produção *per capita* de resíduos sólidos urbanos ocorreu na região Sudeste, enquanto a menor ocorreu na região Sul;
- cada pessoa que mora na região Nordeste gerou, em média, cerca de 1 kg de resíduos sólidos urbanos por dia.

Note que, para chegarmos às conclusões acima, temos que observar a tabela horizontalmente, ou seja, analisar as suas linhas.

Quais são o título e a fonte de pesquisa da tabela? Quantidade de resíduo sólido urbano, *per capita*, gerado no Brasil, por região – 2016; Fonte: ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2016**. Disponível em: <www.abrelpe.org.br/Panorama/panorama2016.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2018.

BNCC em foco

- A imagem que representa a coleta de lixo é uma boa oportunidade para conversar com os alunos no sentido de contemplar a **Competência geral 9**, que promove a empatia, a cooperação e o respeito ao outro, sem preconceito de qualquer tipo. Fale da importância de se tratar o lixo antes de descartá-lo, sobretudo se contiver elementos cortantes, de modo que não haja perigo para os coletores. Ressalte que isso é uma maneira de se comprometer com a coletividade e se reconhecer como parte dela, valorizando todos os grupos sociais. Nesse sentido, ainda é possível contemplar o tema contemporâneo **Trabalho**, falando sobre a valorização e a remuneração desses profissionais da limpeza, que muitas vezes são desvalorizados.

- Diga aos alunos que utilizamos uma tabela de dupla entrada para nela apresentar duas variáveis, sendo uma na horizontal (linha) e outra na vertical (coluna). A leitura das informações nesse tipo de tabela se dá pelo cruzamento da linha com a coluna, identificando a célula da tabela correspondente à informação desejada.
- Explique aos alunos que os veículos comerciais leves são veículos com medida de massa total de até 3 856 kg, projetados para o transporte de carga ou para o transporte de mais de 12 passageiros, ou ainda com características especiais para uso fora de estrada.

BNCC em foco

- Aproveite o assunto abordado no gráfico do tópico **Gráfico de barras** e promova uma discussão para informar aos alunos como é realizada a doação de órgãos no Brasil. Peça que eles exponham suas opiniões acerca do tema e avalie como eles recebem as opiniões dos colegas, destacando a importância do respeito mútuo, de modo a contemplar a **Competência específica de Matemática 7**.

Outro tipo de tabela é a chamada **tabela de dupla entrada**, utilizada para apresentar dois ou mais tipos de dados sobre um mesmo assunto. Nela, devemos analisar simultaneamente as linhas e as colunas. Observe um exemplo.

Licenciamento total de automóveis e comerciais leves no Brasil por tipo de combustível de julho a dezembro – 2017

	Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro	Total
Gasolina	5 609	6 746	6 065	5 812	5 961	6 987	37 180
Elétrico	268	627	384	243	240	350	2 112
Flex	157 115	186 474	173 628	174 369	175 425	178 653	1 045 664
Diesel	16 046	16 295	13 729	16 518	16 021	19 328	97 937
Total	179 038	210 142	193 806	196 942	197 647	205 318	1 182 893

ANFAVEA – Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores. **Estatísticas**. Disponível em: <www.anfavea.com.br/estatisticas-2017.html>. Acesso em: 13 jun. 2018.

Na tabela apresentada, para verificar quantos foram os licenciamentos de automóveis e comerciais leves, com motor a gasolina, no mês de novembro de 2017, temos que observar o valor correspondente à coluna "Novembro" e à linha "Gasolina". Nesse caso, a quantidade foi de 5 961 unidades.

Qual é a informação principal apresentada na tabela?

Licenciamento total de automóveis e comerciais leves no Brasil por tipo de combustível de julho a dezembro de 2017.

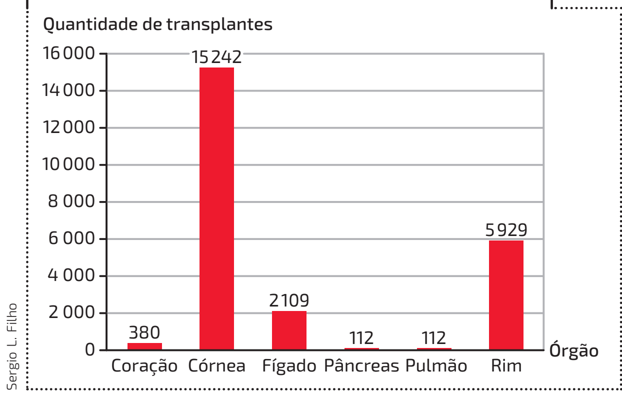
Gráficos

Existem diferentes tipos de gráfico, com características específicas. A escolha por um determinado tipo depende da natureza dos dados que se quer representar.

Asssim como as tabelas, os gráficos devem conter **título** e **fonte de informações**.

Gráfico de barras

Quantidade de transplantes de alguns tipos de órgãos realizados no Brasil – 2017



O gráfico de barras é muito utilizado para comparar os dados obtidos entre si. Nesse tipo de gráfico, as barras, que podem ser horizontais ou verticais, têm a mesma medida de largura e o mesmo espaçamento entre elas. A medida do comprimento de cada barra deve ser proporcional ao valor representado por ela.

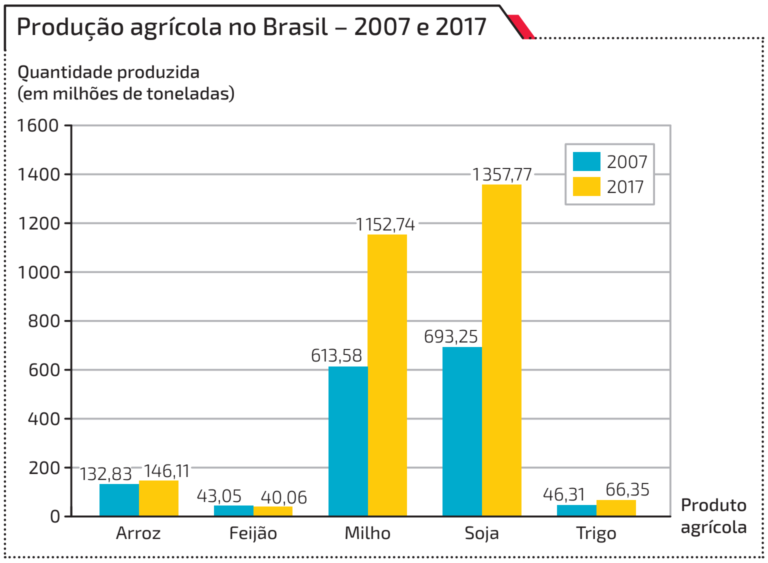
ABTO – Associação Brasileira de Transplante de Órgãos. **Registro brasileiro de transplantes 2017**. Disponível em: <www.abto.org.br/abtov03/Upload/file/RBT/2017/rbt-imprensa-leitura-compressed.pdf>. Acesso em: 15 ago. 2018.

Analisando esse gráfico, percebemos, por exemplo, que no ano de 2017 os transplantes de córnea foram os que mais ocorreram, já os de pâncreas e de pulmão foram os que menos ocorreram.

Escreva o título do gráfico e os títulos dos eixos horizontal e vertical.

Quantidade de transplantes de alguns tipos de órgãos realizados no Brasil – 2017; Órgão; Quantidade de transplantes

O exemplo a seguir apresenta um **gráfico de barras múltiplas**. Para cada tipo de produto agrícola há duas barras, uma representando a produção correspondente ao ano 2007 e outra, ao ano 2017. A legenda indica a que ano as barras de cada cor correspondem.



IBGE. **Sidra**. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/6588>. Acesso em: 13 jun. 2018.

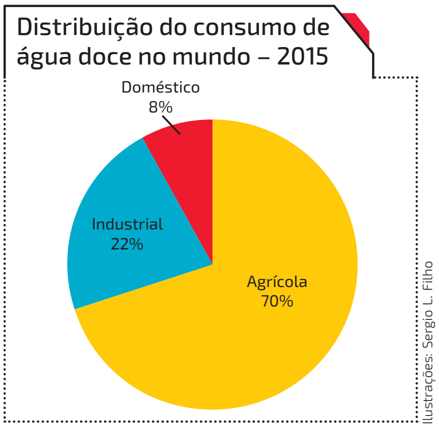
Nesse gráfico, considerando os produtos apresentados, concluímos que:

- no ano de 2007, assim como em 2017, a maior produção foi de soja;
- a produção de feijão teve redução no período apresentado, enquanto houve aumento na produção dos demais produtos.

Gráfico de setores

O **gráfico de setores** é apropriado para comparar os dados da pesquisa em relação ao universo pesquisado, o que, de maneira geral, é realizado utilizando porcentagem.

Cada setor desse tipo de gráfico tem que ser proporcional à parte dos dados que ele representa, de maneira que o total corresponda a 100%.



SAVEH – Sistema de Autoavaliação da Eficiência Hídrica. **A disponibilidade de água no mundo e no Brasil**. Disponível em: <https://saveh.com.br/artigos/a-disponibilidade-de-agua-no-mundo-e-no-brasil/>. Acesso em: 10 maio 2018.

O gráfico acima apresenta a distribuição do consumo de água doce no mundo em 2015. Nele, há três setores que representam o consumo: industrial, agrícola e doméstico. Analisando esse gráfico, podemos concluir, por exemplo, que o consumo de água na agricultura corresponde a 70% do consumo total.

- Antes de trabalhar com a construção dos gráficos de setores, revise com os alunos cálculos que envolvam porcentagem.

Relacionando saberes

- O gráfico que apresenta a produção agrícola em determinado período relaciona-se ao componente curricular **Geografia**. Conte com o auxílio do respectivo professor para conversar com os alunos sobre o aumento na produção de soja e milho, discutindo os motivos desse acréscimo, que vão além do aumento do consumo interno e têm relação com o volume de exportação. Falem também sobre as consequências negativas e positivas desse tipo de cultura. Aproveite para valorizar, em detrimento do monocultivo, a agricultura familiar, que produz a maioria dos alimentos que consumimos, não priorizando mercados externos. Além disso, na agricultura familiar, costuma-se utilizar menos agrotóxicos em sua produção, fator de grande importância para a saúde dos consumidores.

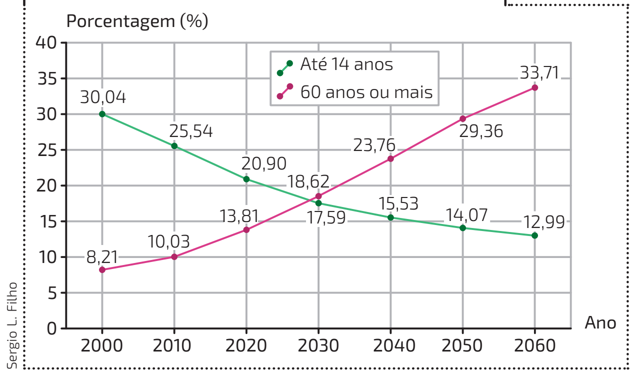
Relacionando saberes

- Relacione o assunto que explicita a evolução da proporção da população por idade no Brasil com o componente curricular **Geografia**, sugerindo que os alunos realizem uma pesquisa e uma discussão acerca do fato de a proporção da população jovem estar diminuindo enquanto a idosa vem aumentando. Inicie dizendo que os avanços na medicina e nas condições de acesso a bens elementares, como saneamento básico e educação, são responsáveis pelo aumento da expectativa de vida, ao mesmo tempo que se registra uma diminuição da quantidade de filhos por mulher. Aliados, esses fatores contribuem com a diferença na proporção.

Gráfico de linhas

O **gráfico de linhas** costuma ser utilizado para representar a evolução dos dados pesquisados no decorrer de certa medida de tempo. Nesse tipo de gráfico, são indicados pontos em um plano cartesiano, representando os dados da pesquisa, os quais são ligados por segmentos de reta, que indicam crescimento, decrescimento ou constância entre períodos consecutivos.

Evolução da proporção da população por idade no Brasil – 2000 a 2060



IBGE. **Projeção da população do Brasil por sexo e idade**: 2000-2060. Disponível em: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2013/default.shtm>. Acesso em: 11 ago. 2018.

Na análise desse gráfico, podemos perceber que:

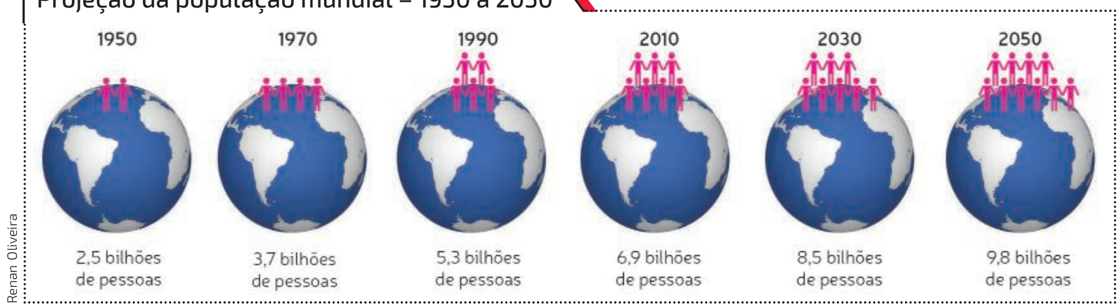
- a proporção da população brasileira com até 14 anos vem diminuindo no decorrer dos anos, enquanto a de 60 anos ou mais vem aumentando;
- próximo ao ano de 2030, a proporção de pessoas com 60 anos ou mais ultrapassará a de pessoas com até 14 anos.

Os dados apresentados no gráfico referem-se a quais anos?
2000, 2010, 2020, 2030, 2040, 2050 e 2060

Pictograma

Os **pictogramas**, ou **gráficos pictóricos**, são muito utilizados em meios de comunicação, como revistas e jornais, a fim de apresentar informações de uma pesquisa de maneira mais atraente ao leitor. Em sua composição são utilizadas figuras, fotografias ou outros recursos visuais. Observe o exemplo.

Projeção da população mundial – 1950 a 2050



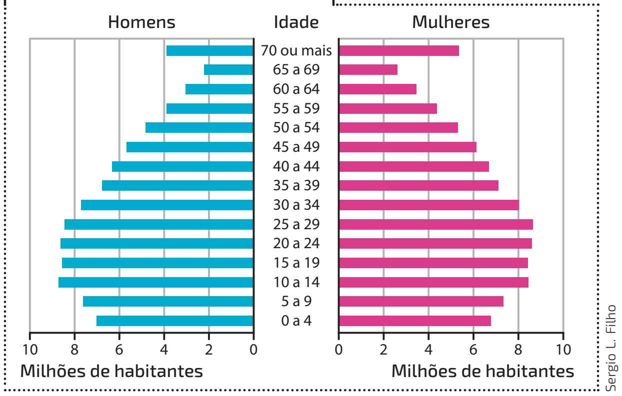
ONU. **World Population Prospects**: the 2017 revision. Disponível em: <https://esa.un.org/unpd/wpp/DVD/Files/1_Indicators%20(Standard)/EXCEL_FILES/1_Population/WPP2017_POP_F07_1_POPULATION_BY_AGE_BOTH_SEXES.xlsx>. Acesso em: 13 jun. 2018.

Neste pictograma, os bonecos ilustrados sobre o globo terrestre representam a população mundial, e cada boneco corresponde a, aproximadamente, 1 bilhão de habitantes.

Pirâmide etária

As **pirâmides etárias** são um tipo de gráfico utilizado para representar uma população cuja distribuição está disposta em faixas etárias. Em geral, nesse tipo de gráfico, costuma-se organizar os dados de maneira que na parte inferior (base) estejam as faixas etárias dos mais jovens e, na parte superior (topo), as faixas etárias dos mais idosos.

População no Brasil por sexo e faixa etária – 2010



IBGE. **População**. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/panorama>. Acesso em: 18 jul. 2018.

Na pirâmide etária acima, além das faixas etárias, a população também está organizada por gênero: homens e mulheres.

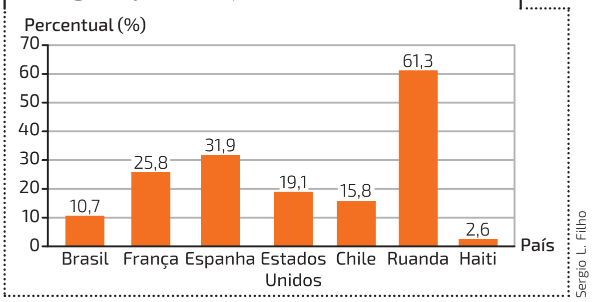
Atividades

Anote no caderno

15. Embora o direito igualitário ao voto entre homens e mulheres atualmente pareça algo natural, é importante sabermos que nem sempre foi assim. Para poder participar efetivamente nas decisões políticas do país, as mulheres tiveram de lutar muito. No Brasil, as mulheres conquistaram o direito de votar e de serem votadas em 1932.

Observe o gráfico que representa a participação das mulheres nos parlamentos de alguns países, em janeiro de 2017.

Percentual de mulheres nos parlamentos de alguns países – janeiro de 2017



IPU – Inter-Parliamentary Union. **Women in national parliaments**. Disponível em: <http://archive.ipu.org/wmn-e/arc/classif010117.htm>. Acesso em: 6 jun. 2018.

a) Como é chamado o tipo de gráfico acima? Por que nele as barras têm medidas de comprimento diferentes? gráfico de barras; Porque devem ser proporcionais aos percentuais por elas representados.

b) Qual dos países indicados no gráfico tinha mais da metade de seu parlamento ocupado por mulheres? Ruanda

c) Que percentual do parlamento brasileiro era ocupado por mulheres? E por homens? 10,7%; 89,3%

d) De acordo com as respostas do item anterior, a distribuição do parlamento brasileiro entre homens e mulheres era igualitária? Em sua opinião, o que pode ser feito para ampliar a participação das mulheres entre os candidatos eleitos no Brasil? não; Resposta pessoal.

- Explique aos alunos que a pirâmide etária representa como a população de uma determinada região está distribuída de acordo com o sexo e a idade dos habitantes. O formato da pirâmide revela informações importantes que auxiliam os governantes a planejar políticas sociais que melhor se adaptem às necessidades etárias da população. Se a pirâmide etária de certa região apresentar base "larga", por exemplo, ela indica que essa população é composta por grande quantidade de crianças, alertando quanto à necessidade de abertura de novas vagas escolares.

Relacionando saberes

- A atividade **15** é uma oportunidade de destacar o valor da mulher na sociedade e apresentar algumas de suas contribuições no estabelecimento do processo democrático brasileiro. Aproveite para propor um trabalho em conjunto com o professor do componente curricular **História**, a fim de apresentar mais informações sobre movimentos feministas no Brasil, como a fundação da Liga para a Emancipação Internacional da Mulher, na década de 1920, que consistia em um grupo de estudos com o objetivo de lutar pela igualdade política das mulheres.

- No item **d** da atividade **15**, proponha um debate para que os alunos reflitam sobre estratégias para o aumento de mulheres entre os candidatos eleitos no Brasil, como a realização de campanhas publicitárias estimulando a candidatura, o estudo de uma lei de cotas para candidatas mulheres, entre outras possibilidades. Para complementar a atividade, proponha que construam uma tabela com as informações apresentadas no gráfico e conversem com um colega sobre qual das representações – gráfico ou tabela – deixou as informações mais bem organizadas. Aproveite para comentar que a médica paulista Carlota Pereira de Queirós (1892-1982) foi a primeira deputada federal eleita no Brasil, em 1934.

- Na atividade **16**, verifique se os alunos perceberam que a população urbana brasileira ultrapassou a rural entre os anos de 1960 e 1970.
- Na resolução da atividade **17**, explique aos alunos que, com exceção do mês de janeiro, é possível verificar a quantidade de chuva registrada em determinado mês calculando a diferença entre a quantidade de chuvas acumulada até esse mês e a quantidade acumulada até o mês anterior.

BNCC em foco

- As atividades dessa e da próxima página procuram desenvolver nos alunos a capacidade de avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa, conforme orienta a habilidade **EF08MA23**.

16. Observe a tabela e resolva as questões.

População rural e urbana no Brasil, em milhões de habitantes – 1960 a 2010

	1960	1970	1980	1991	2000	2010
Rural	39	41,6	39,1	36	31,9	29,8
Urbana	32	52,9	82	110,9	138	160,9

IBGE. **Sinopse do Censo Demográfico 2010**. Disponível em: <https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=8>. Acesso em: 13 set. 2018.

a) Como esse tipo de tabela é chamado? tabela de dupla entrada

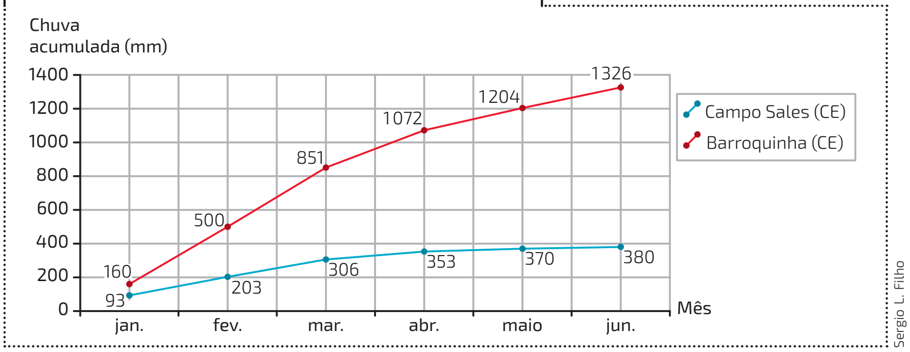
b) Qual era a população brasileira rural em 1970? E a população urbana? 41,6 milhões de habitantes; 52,9 milhões de habitantes

c) Em determinado local da tabela aparece o número 138. O que esse número representa? A população urbana brasileira, em milhões, no ano 2000.

d) Que tipo de gráfico melhor representaria os dados da tabela? gráfico de barras múltiplas

17. O gráfico a seguir apresenta informações sobre a quantidade de chuva acumulada em dois municípios cearenses.

Quantidade de chuva acumulada de janeiro a junho em dois municípios do Ceará – 2017



FUNCEME – Fundação Cearense de Meteorologia e Recursos Hídricos. **Calendário das chuvas no estado do Ceará**. Disponível em: <www.funceme.br/app/calendario/produto/municipios/media/mensal>. Acesso em: 22 jun. 2018.

a) O que representa cada linha do gráfico? A linha vermelha indica a quantidade acumulada de chuva, em milímetros, no município de Barroquinha e a linha azul, de Campos Sales.

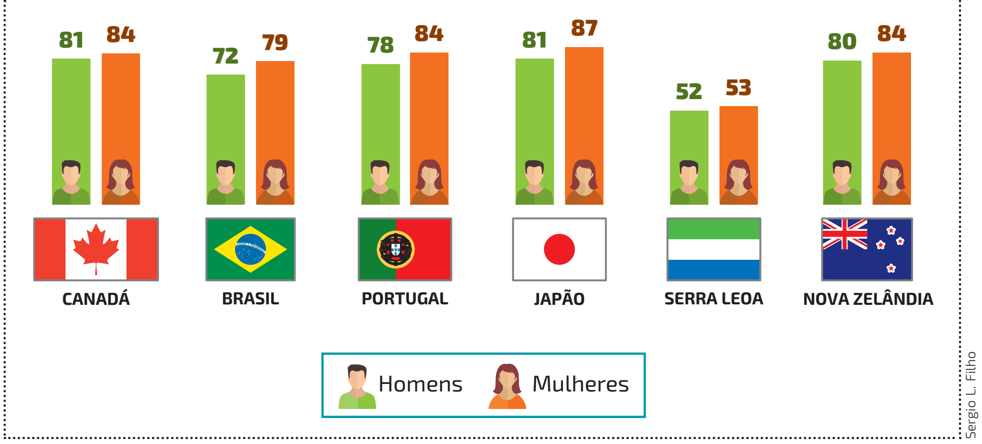
b) Em relação ao município de Barroquinha, se subtrairmos da quantidade acumulada de chuva correspondente a abril (1 072 mm) a quantidade correspondente a março (851 mm), obteremos 221 mm. O que essa medida significa? significa a quantidade de chuva ocorrida em Barroquinha no mês de abril

c) No mês de maio, choveu quantos milímetros em Barroquinha? E em Campos Sales? 132 mm; 17 mm

d) Essas informações poderiam ser representadas por outro tipo de gráfico? Se a resposta for afirmativa, por qual tipo de gráfico? sim; gráfico de barras múltiplas

18. A **esperança de vida**, ou **expectativa de vida**, é a estimativa da quantidade de anos que uma pessoa poderá viver ao nascer, em determinado país ou região.

Esperança de vida de homens e mulheres (em anos) em alguns países – 2017



UNFPA – United Nations Population Fund. **World population dashboard**. Disponível em: <www.unfpa.org/data/world-population-dashboard>. Acesso em: 8 set. 2018.

a) Como é chamado esse tipo de gráfico? pictograma

b) Qual era a esperança de vida para o homem português? E para a mulher? 78 anos; 84 anos

c) Qual país, entre os que aparecem no gráfico, apresentava a menor esperança de vida para a mulher? De quantos anos era essa esperança de vida? Serra Leoa; 53 anos

d) Em sua opinião, por que há, entre alguns países, grande diferença de expectativa de vida de seus habitantes? Resposta pessoal.

e) Em sua opinião, seria adequado representar a esperança de vida de homens e mulheres utilizando um gráfico de setores para cada um desses países? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que não.

f) Com base nas informações apresentadas, elabore uma pergunta e dê para um colega responder. Em seguida, verifique se a resposta está correta. Resposta pessoal.

19. Observe o gráfico ao lado.

a) Como é chamado esse tipo de gráfico? Qual é a função da legenda nele? gráfico de setores; Identificar a qual região brasileira corresponde cada setor.

b) Qual porcentagem da área do território nacional as regiões Norte e Centro-Oeste ocupam juntas? 64%

c) Qual das regiões possui a maior área territorial? E a menor área territorial? Norte; Sul

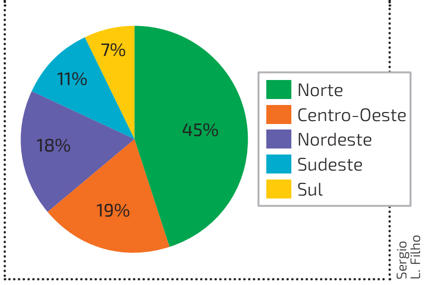
d) Sabendo que a medida da área territorial do Brasil é cerca de 8,5 milhões de quilômetros quadrados, qual a medida da área aproximada da região:

- Norte?
- Sudeste?
- Nordeste?

e) Essas informações poderiam ser representadas por outro tipo de gráfico? Caso a resposta seja afirmativa, qual seria a opção? sim; gráfico de barras

d) Norte: 3,825 milhões de quilômetros quadrados
Sudeste: 0,935 milhão de quilômetros quadrados
Nordeste: 1,53 milhão de quilômetros quadrados

Ocupação aproximada da área total do território do Brasil por região – 2017



IBGE. **Anuário estatístico do Brasil 2016**. Rio de Janeiro, 2016. v. 76. Disponível em: <http://servicodados.ibge.gov.br/Download/Download.ashx?http=1&u=biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/20/aeb_2016.pdf>. Acesso em: 11 maio 2018.

- Ao trabalhar a atividade de **18**, diga aos alunos que não há diferença entre expectativa de vida e esperança de vida. Apresente-lhes o texto a seguir, que traz algumas explicações a respeito.

Expectativa de vida

A expectativa ou esperança de vida é o número médio de anos que se espera que uma pessoa viva no momento de seu nascimento. É um índice influenciado, sobretudo, pelas condições de saúde existentes nos países (padrão de atendimento médico, saneamento básico, alimentação), bem como pelo perfil educacional da população e pela qualidade de vida. Desde 1950, a expectativa no mundo aumentou mais de 20 anos. Nas nações desenvolvidas vive-se mais do que nos países em desenvolvimento e nos pobres, pois as condições gerais de vida são melhores. Enquanto em Mônaco os homens vivem, em média, 86 anos, as mulheres, 94, e no Japão vivem entre 80 e 87 anos, nações da África apresentam os piores indicadores, como é o caso de Serra Leoa, onde os homens e as mulheres vivem em média entre 45 e 46 anos, e da Botsuana, em que homens vivem em média 48 anos e mulheres vivem 47 anos [...].

ALMANAQUE Abril 2015. São Paulo: Abril, 2015. p. 121.

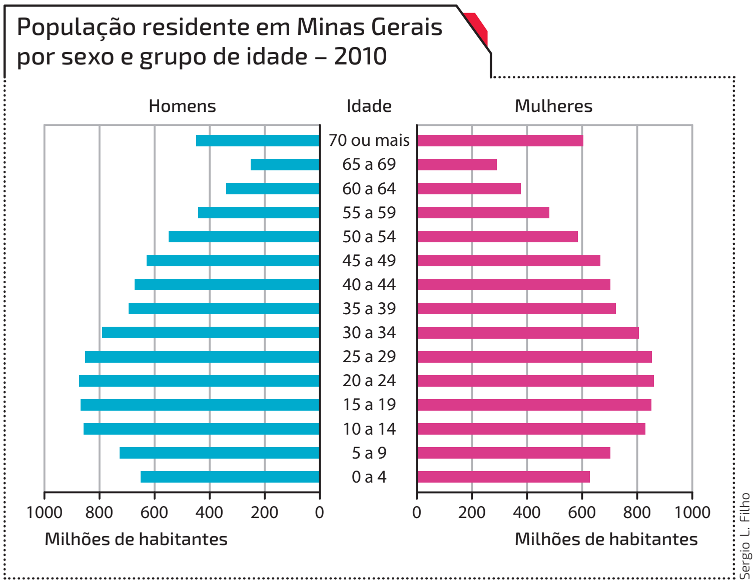
- No item **d** da atividade **18**, estimule os alunos a exporem suas respostas aos demais. Verifique se eles sabem que a expectativa de vida de uma população está relacionada a diversos fatores, como as condições do sistema público de saúde, o acesso a uma alimentação adequada e o nível de violência de onde vivem.

- Eis uma possível questão que pode ser elaborada pelos alunos no item **f** da atividade **18**:
  - Em média, quantos anos a mais vivem as mulheres em relação aos homens nos países apresentados?

  R Em média 4 anos e meio a mais que os homens.

- Ressalte aos alunos que, para comparar valores de uma ou mais categorias, é conveniente utilizar um gráfico de barras; já para comparar partes de um todo, é conveniente usar um gráfico de setores. Verifique se eles perceberam que as informações apresentadas em um gráfico de setores podem ser exibidas em um gráfico de barras, mas nem sempre informações apresentadas em um gráfico de barras podem ser exibidas em um gráfico de setores.
- Na atividade **21**, os alunos podem elaborar questões como:
  - Qual a produção aproximada de sacas de café do Brasil em 2017?
    R 55,3 milhões de sacas de café.
  - Qual a produção aproximada de sacas de café dos demais produtores?
    R 102,7 milhões de sacas de café.

20. Com base na pirâmide etária, resolva as questões.



IBGE. **População**. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/mg/panorama>. Acesso em: 26 jun. 2018.

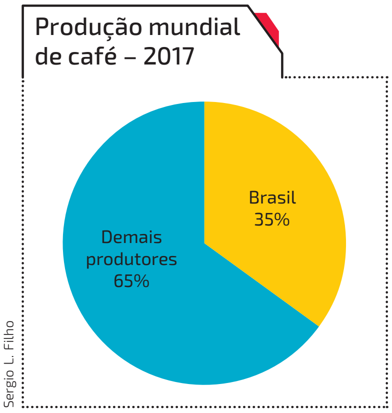
a) Qual a população aproximada de mulheres desse estado com idades de 20 a 24 anos? E de 40 a 44 anos? Espera-se que os alunos respondam números próximos a 859 000 e 702 000.

b) Entre os homens, qual faixa etária possui maior população? de 20 a 24 anos

c) Quantas pessoas aproximadamente são da mesma faixa etária que você? Resposta pessoal.

d) Caso seja realizada uma campanha de vacinação contra a gripe, na qual todas as pessoas com 60 anos ou mais devem receber uma dose da vacina, cerca de quantas doses serão necessárias? Espera-se que os alunos respondam um número próximo à 2 311 000.

21. Junte-se a um colega e elaborem duas questões acerca das informações apresentadas no gráfico abaixo. Em seguida, troque essas questões com as de outros colegas para que possam resolvê-las. Resposta pessoal.



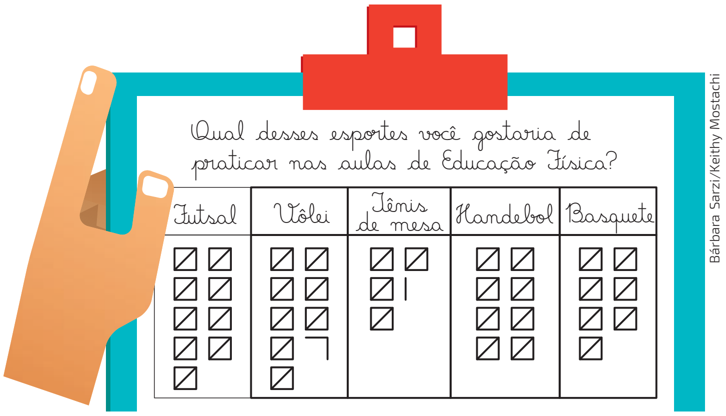
Em 2017, a produção mundial foi de aproximadamente 158 milhões de sacas.

ICO – International Coffee Organization. **Dados históricos**. Disponível em: <www.ico.org/pt/new_historical_p.asp?section=Estat%EDstica>. Acesso em: 6 jun. 2018.

Construção de gráficos

Gráfico de barras

Para saber qual esporte os 90 alunos do 8º ano de uma escola gostariam de praticar nas aulas de Educação Física, no ano de 2019, a direção fez uma pesquisa e organizou o resultado em uma tabela.



Bárbara Sarzi/Keithy Mostachi

Esporte que os alunos do 8º ano gostariam de praticar – 2019

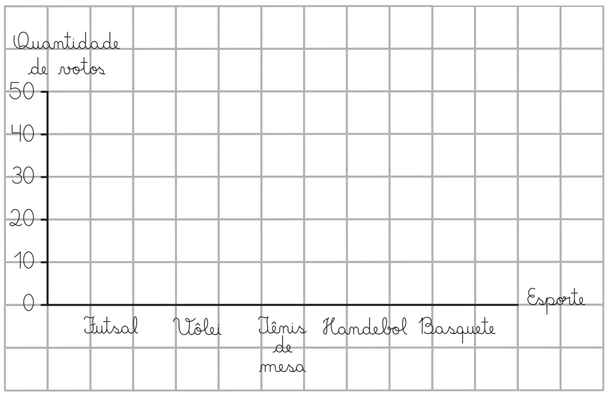
Esporte	Quantidade de votos
Futsal	45
Vôlei	43
Tênis de mesa	21
Handebol	40
Basquete	35
Total	184

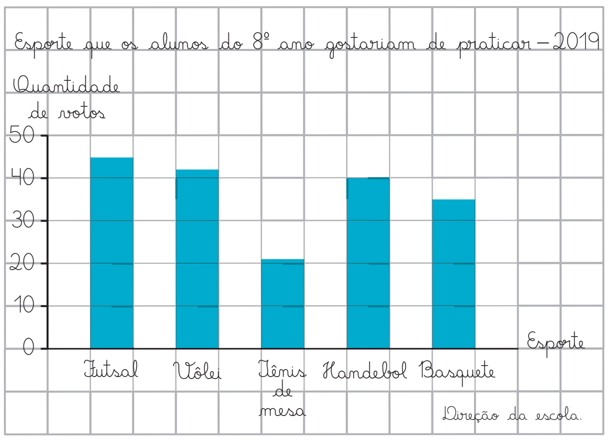
Direção da escola.

Podemos notar que a quantidade total de votos é maior do que a de alunos entrevistados. Isso mostra que alguns alunos votaram em mais de um esporte. Assim, para representar os dados da tabela, podemos construir um gráfico de barras ou um pictograma.

Para construir um gráfico de barras, em uma malha quadriculada, traçaremos dois eixos: um horizontal, para representar o **esporte**, e outro vertical, para representar a **quantidade de votos**. No eixo horizontal, escrevemos os nomes dos esportes. Já no eixo vertical, marcamos a escala escolhida. Nesse caso, considerou-se 1 cm para cada 10 votos.

Em seguida, construímos as barras correspondentes à quantidade de votos, que devem ser proporcionais, de acordo com a escala escolhida. Por fim, escrevemos o título e a fonte de informação do gráfico.





Ilustrações: Sergio L. Filho

- Os dados apresentados na tabela e no gráfico são fictícios.
- Verifique a possibilidade de realizar uma pesquisa com os alunos da sala, de modo que desenvolvam uma atividade parecida à apresentada.

[...] os conteúdos de estatística possuem como finalidade que o aluno construa procedimentos de coleta, organização, comunicação e interpretação de dados, por meio de tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia a dia. Sendo que torna-se cada vez mais comum encontrarmos essas informações nos meios de comunicação (revistas, jornais, canais de televisão, e principalmente, a internet) e como forma de sintetizar dados, como por exemplo, pesquisas de opinião.

[...]

BARBOSA, Jozeildo Kleberson. Tratamento da Informação e Prova Brasil de Matemática: ensino e avaliação. **Revista BoEM**, Joinville, Editora UDESC, v. 2, n. 3, p. 60, ago./dez. 2014. Disponível em: <www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/4528/3923>. Acesso em: 10 set. 2018.

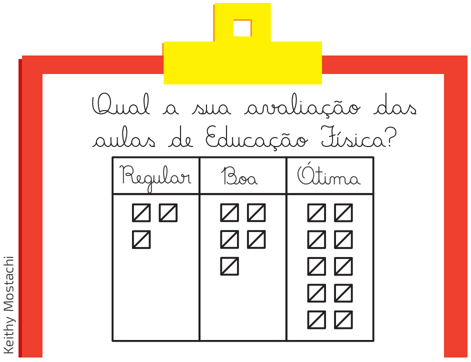
Material digital

- Para complementar o trabalho com o tópico **Construção de gráficos**, no material digital dessa coleção disponibilizamos a **Sequência didática 8**, elaborada com objetivo de desenvolver a habilidade **EF08MA23**. As atividades propostas nessa sequência possibilitam reconhecer qual o gráfico mais adequado para representar um determinado conjunto de dados, assim como identificar os elementos pertencentes aos diferentes tipos de gráficos e construí-los, com base em dados apresentados em uma tabela.

- Os dados apresentados na tabela e no gráfico são fictícios.
- Explique aos alunos que, em alguns casos, as medidas dos ângulos encontrados não são medidas inteiras. Para indicar esses ângulos, arredonda-se a medida à unidade mais próxima.
- Se julgar necessário, peça para os alunos que construam um gráfico de setores referente à pesquisa apresentada na página **175**.

Gráfico de setores

Observe outra pesquisa feita com esses mesmos 90 alunos.



Keithy Mostachi

Avaliação das aulas de Educação Física das turmas de 8º ano – 2019	
Avaliação	**Quantidade de votos**
Regular	15
Boa	25
Ótima	50
Total	90

Direção da escola.

Note que a quantidade total de votos é 90, isto é, cada aluno escolheu somente uma das opções.

Podemos construir um gráfico de setores para comparar a quantidade de alunos que votaram em cada opção e a quantidade total de alunos entrevistados.

Para isso, inicialmente, calculamos quantos graus correspondem a cada setor do gráfico. O círculo tem 360° e corresponde a todos os alunos entrevistados, ou seja, 90 alunos. Assim, cada setor representará a quantidade de alunos e suas opções.

- Regular

Quantidade de alunos	Ângulo (em graus)
90	360
15	x

$$\frac{90}{15} = \frac{360}{x}$$
$$90 \cdot x = 15 \cdot 360$$
$$\frac{90x}{90} = \frac{5\,400}{90}$$
$$x = 60 \rightarrow 60°$$

- Boa

Quantidade de alunos	Ângulo (em graus)
90	360
25	x

$$\frac{90}{25} = \frac{360}{x}$$
$$90 \cdot x = 25 \cdot 360$$
$$\frac{90x}{90} = \frac{9\,000}{90}$$
$$x = 100 \rightarrow 100°$$

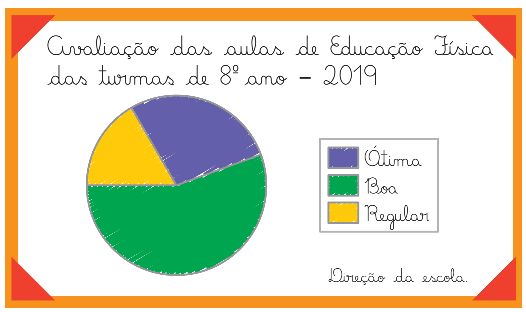
- Ótima

Quantidade de alunos	Ângulo (em graus)
90	360
50	x

$$\frac{90}{50} = \frac{360}{x}$$
$$90 \cdot x = 50 \cdot 360$$
$$\frac{90x}{90} = \frac{18\,000}{90}$$
$$x = 200 \rightarrow 200°$$

Para construirmos o gráfico de setores, traçamos uma circunferência com o compasso e, com o transferidor, determinamos os ângulos obtidos cujo vértice é o centro da circunferência.

Em seguida, pintamos cada setor do gráfico com uma cor e compomos a legenda de acordo com as cores selecionadas. Por fim, escrevemos o título e a fonte de informação do gráfico.



Sergio L. Filho

176

Gráficos de linhas

Os alunos do 8º ano de uma escola fizeram uma pesquisa durante 5 semanas consecutivas com os funcionários e com os pais de alunos sobre a intenção de votos nas eleições para diretor em 2019. Observe na tabela os resultados obtidos.

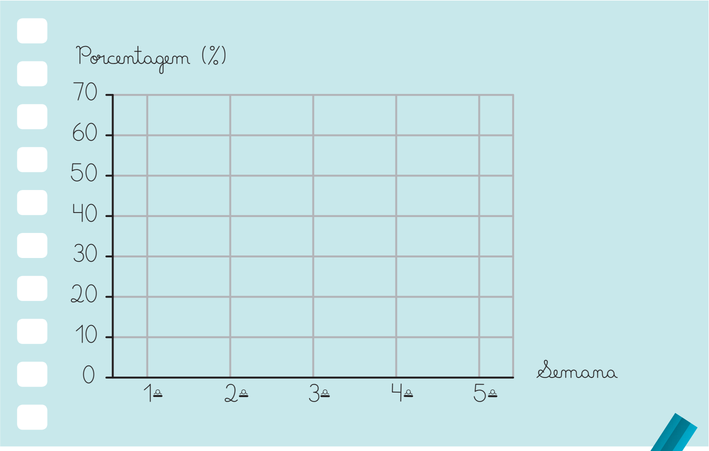
Porcentagem da intenção de votos nas eleições para diretor em uma escola – 2019					
Candidatos	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana	5ª semana
Professora Joice	35	40	42	49	58
Professor Manoel	60	55	55	49	40
Indecisos	5	5	3	2	2

Elaborado pelos alunos do 8º ano.

A pesquisa foi realizada durante 5 semanas e, em cada uma delas, a quantidade de pessoas entrevistadas foi a mesma.

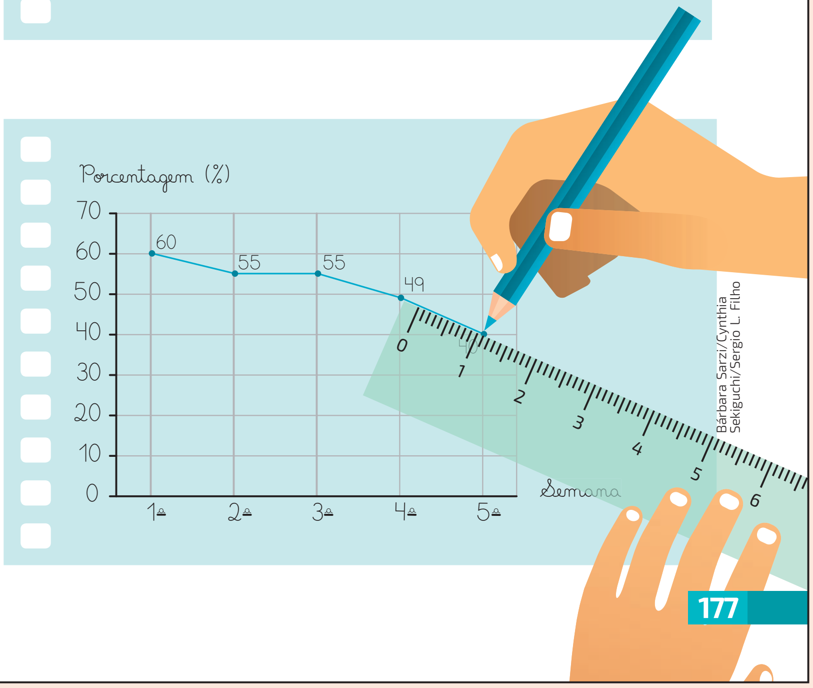
Podemos construir um gráfico de linhas que represente a evolução da intenção de votos para cada candidato no decorrer das semanas.

Para construir um gráfico de linhas, traçamos dois eixos perpendiculares: um horizontal, para representar as **semanas**, e outro vertical, representando a **porcentagem**. Depois, traçamos algumas linhas como indicado, que servirão de referência para marcar os pontos. No eixo horizontal, indicamos as cinco semanas. Já no vertical, marcamos a escala escolhida, nesse caso, 1 cm para cada 10%.



Sergio L. Filho

Em seguida, localizamos os pontos correspondentes à porcentagem da intenção de votos que os candidatos receberam em cada semana. Com o auxílio de uma régua, ligamos os pontos por segmentos de retas, utilizando uma cor para cada candidato.



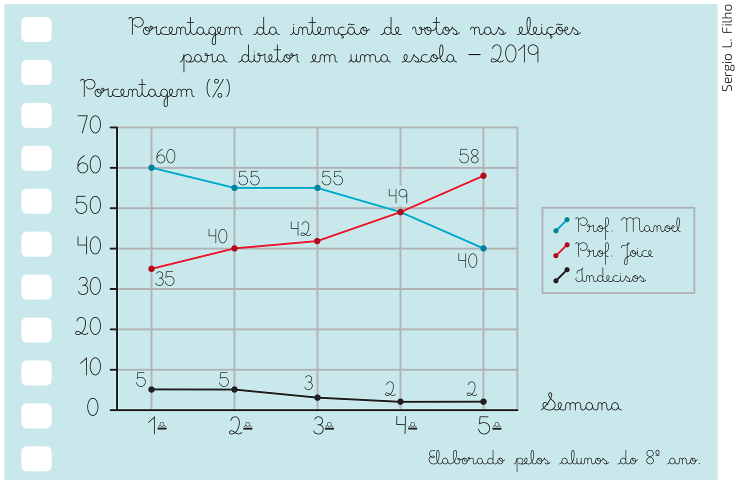
Bárbara Sarzi/Cynthia Sekiguchi/Sergio L. Filho

177

- Comente com os alunos que o gráfico de linhas pode ser construído em uma malha quadriculada de 1 cm × 1 cm, considerando a medida do comprimento de cada lado do quadradinho de 1 cm como 10%.
- Veja se os alunos perceberam que, ao se considerar 1 cm para cada 10%, a medida de 1 mm vai valer 1%.
- Questione os alunos sobre os gráficos construídos nessa página e nas páginas **175** e **176**, a fim de verificar quais dos dados apresentados poderiam ser organizados em gráficos diferentes dos que foram utilizados.

- No item **b** da atividade **22**, os alunos podem optar por construir um gráfico de barras; nesse caso, também será possível ver a evolução ao longo dos anos. Ressalte a eles, portanto, a importância de verificar os dados que se pretende analisar para saber qual o melhor gráfico a ser utilizado.
- Na atividade **23**, verifique a possibilidade de os alunos construírem também o gráfico de linhas, de modo que eles se certifiquem de que algumas informações podem ser interpretadas em diferentes tipos de gráficos.

Por fim, compomos a legenda de acordo com as cores selecionadas para as linhas e escrevemos o título e a fonte de informações do gráfico.



Atividades

Anote no caderno

Esperança de vida ao nascer no Brasil – 1940 a 2016	
Ano	**Esperança de vida (em anos)**
1940	46
1960	53
1980	63
2000	70
2012	74
2016	76

IBGE. **Tábuas completas de mortalidade para o Brasil 2016**: breve análise da evolução da mortalidade no Brasil. Disponível em: <ftp://ftp.ibge.gov.br/Tabuas_Completas_de_Mortalidade/Tabuas_Completas_de_Mortalidade_2016/tabua_de_mortalidade_2016_analise.pdf>. Acesso em: 1 jun. 2018.

22. A tabela ao lado apresenta a esperança de vida ao nascer no Brasil, de 1940 a 2016.

a) Construa um gráfico que represente as informações apresentadas na tabela. Resposta nas orientações ao professor.

b) Que tipo de gráfico você construiu no item **a**? Por que você o escolheu?

c) A esperança de vida do brasileiro em 1980 era quantos anos maior do que em 1960? 10 anos

d) No decorrer dos anos, a esperança de vida do brasileiro aumentou ou diminuiu? Por que você acha que isso ocorreu? aumentou; Resposta pessoal.

22. b) Possível resposta: gráfico de linhas; Possível resposta: esse tipo de gráfico possibilita comparar a evolução na esperança de vida ao nascer no Brasil.

23. Os planos de telefonia móvel podem ser divididos em duas modalidades: pré-pagos e pós-pagos. De acordo com as informações da tabela, construa um gráfico de barras múltiplas. Resposta nas orientações ao professor.

Porcentagem de planos de telefonia móvel pré-pagos e pós-pagos no Brasil – 2008 a 2016						
Ano		**2008**	**2010**	**2012**	**2014**	**2016**
Plano	**Pré-pago**	81,47	82,34	80,55	75,85	67,48
	Pós-pago	18,53	17,66	19,45	24,15	32,52

ANATEL – Agência Nacional de Telecomunicações. **Relatório anual 2016**. Disponível em: <http://anatel.gov.br/Portal/verificaDocumentos/documento.asp?numeroPublicacao=347175&assuntoPublicacao=null&caminhoRel=null&filtro=1&documentoPath=347175.pdf>. Acesso em: 5 jun. 2018.

- É possível representar essas informações em outro tipo de gráfico? Converse com os colegas. sim; Espera-se que os alunos percebam que podemos representar essas informações em um gráfico de linhas, pois assim analisamos a evolução dos dados no decorrer de certo período.

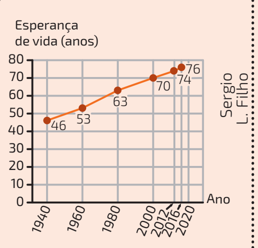
Para a construção do gráfico, aproxime os valores da tabela para a unidade mais próxima.

178

Respostas

22. a)

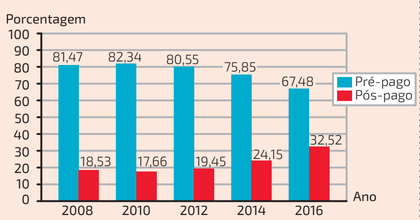
Esperança de vida ao nascer no Brasil – 1940 a 2016



IBGE. **Tábuas completas de mortalidade para o Brasil 2016**: breve análise da evolução da mortalidade no Brasil. Disponível em: <ftp://ftp.ibge.gov.br/Tabuas_Completas_de_Mortalidade/Tabuas_Completas_de_Mortalidade_2016/tabua_de_mortalidade_2016_analise.pdf> Acesso em: 1 jun. 2018.

23.

Porcentagem de planos de telefonia móvel pré-pagos e pós-pagos no Brasil – 2008 a 2016



Sergio L. Filho

ANATEL – Agência Nacional de Telecomunicações. **Relatório anual 2016**. Disponível em: <http://anatel.gov.br/Portal/verificaDocumentos/documento.asp?numeroPublicacao=347175&assuntoPublicacao=null&caminhoRel=null&filtro=1&documentoPath=347175.pdf>. Acesso em: 5 jun. 2018.

24. Além de ser um crime, o trote telefônico traz muitos transtornos a serviços de atendimento como dos Bombeiros, da Polícia Militar e do Serviço de Atendimento Móvel de Urgência (Samu).

Na tirinha, o super-herói Overman fala sobre a quantidade de trotes que recebe.

LAERTE. Overman. **Folha de Londrina**, Londrina, 23 jan. 2003.

a) Construa um gráfico de setores que representa as informações contidas na tirinha. Resposta nas orientações ao professor.

b) Quantos por cento das ligações recebidas por Overman não são trotes ou engano? 0%

c) Se o super-herói recebeu 120 ligações, quantas foram trotes? 102 ligações

d) Converse com seus colegas sobre os transtornos causados pelo trote telefônico e anotem suas ideias. Resposta pessoal.

25. Observe na tabela as medidas das temperaturas máxima e mínima registradas na cidade de Campo Grande (MS) durante alguns dias do mês de agosto de 2018.

Medidas das temperaturas registradas em Campo Grande (MS) em alguns dias de agosto de 2018

Dia	Medida da temperatura mínima (°C)	Medida da temperatura máxima (°C)
6/8	14,9	22,7
7/8	16	29
8/8	19,8	31,4
9/8	11,9	23,3
10/8	7,2	23,5

INMET – Instituto Nacional de Meteorologia. **Condições de tempo registradas nas capitais**. Disponível em: <www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=tempo/condicoesTempoCapitais>. Acesso em: 17 ago. 2018.

a) Quanto mediu a temperatura máxima no dia 8/8? E a temperatura mínima? máxima: 31,4 °C; mínima: 19,8 °C

b) Em que dia foi registrada a menor medida de temperatura mínima? Qual foi essa medida? no dia 10/8; 7,2 °C

c) Construa um gráfico de linhas que represente as informações apresentadas na tabela. Resposta nas orientações ao professor.

> Na construção do gráfico, aproxime os valores da tabela para a unidade mais próxima.

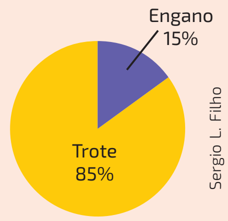
d) Pesquise as medidas de temperatura máxima e mínima registradas na cidade onde você mora, ou em outra cidade, nos últimos cinco dias. Depois, organize os dados obtidos em uma tabela e elabore perguntas para que um colega as responda. Resposta pessoal.

- Na realização da atividade **24**, complemente as informações acerca do "trote telefônico" explicando que se trata de um ato criminoso, previsto no Código Penal brasileiro. Quem comete essa infração sofre penalidade de um a três anos de detenção, além de multa. Caso o infrator seja menor de idade, os pais ou responsáveis legais responderão por ele.
- No item **d** da atividade **25**, os alunos podem elaborar perguntas com base na tabela organizada por eles, como:
  - Qual a maior medida de temperatura máxima registrada?
  - Qual a menor medida de temperatura mínima registrada?
  - Em qual dia foi registrada a maior medida de temperatura máxima?

Respostas

24. a)

Porcentagem de chamadas telefônicas recebidas por Overman

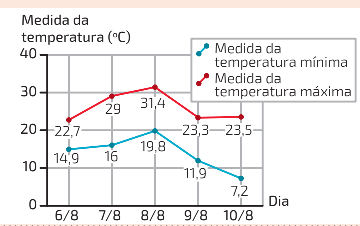


Sergio L. Filho

LAERTE, Overman. **Folha de Londrina**, Londrina, 23 jan. 2003.

25. c)

Medidas das temperaturas registradas em Campo Grande (MS) em alguns dias de agosto de 2018



Sergio L. Filho

INMET – Instituto Nacional de Meteorologia. **Condições de tempo registradas nas capitais**. Disponível em: <www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=tempo/condicoesTempoCapitais>. Acesso em: 17 ago. 2018.

26. Observe as informações da tabela.

Quantidade de pessoas analfabetas com 15 anos ou mais de idade no Brasil – 2017	
Região	**Quantidade de pessoas (em milhares)**
Centro-Oeste	645
Nordeste	6 427
Norte	1 043
Sudeste	2 503
Sul	848

IBGE. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua - PNAD Contínua**. Disponível em: <www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/sociais/educacao/17270-pnad-continua.html?edicao=21073&t=downloads>. Acesso em: 5 jun. 2018.

Para esta pesquisa do IBGE, são considerados analfabetos os indivíduos que não sabem ler ou escrever a partir dos 15 anos de idade.

a) Quantas pessoas analfabetas, aproximadamente, havia no Brasil em 2017? 11 466 000

b) Sabendo que em 2017 a população no Brasil com 15 anos ou mais de idade era aproximadamente 167 700 000 habitantes, determine quantos por cento dessa população representavam as pessoas analfabetas. aproximadamente 6,84%

c) Construa um gráfico de setores que represente a porcentagem de pessoas analfabetas em cada região em relação ao total de analfabetos no Brasil em 2017. Resposta nas orientações ao professor.

d) Em sua opinião, que providências devem ser tomadas para reduzir a quantidade de pessoas analfabetas no Brasil? Resposta pessoal.

27. Veja na tabela algumas informações sobre o Ensino Fundamental em alguns estados brasileiros.

Taxa de aprovação, reprovação e abandono no Ensino Fundamental nos anos iniciais – 2014/2015			
Estado	**Aprovação**	**Reprovação**	**Abandono**
Alagoas	84%	12%	4%
Amazonas	87%	10%	3%
São Paulo	96%	3%	1%
Rio Grande do Sul	92%	7%	1%
Mato Grosso do Sul	87%	11%	2%

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Indicadores de fluxo escolar da educação básica**. Brasília, 2017. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/apresentacao/2017/apresentacao_indicadores_de_fluxo_escolar_da_educacao_basica.pdf>. Acesso em: 6 jun. 2018.

27. b) Possível resposta: gráfico de setores; Possível resposta: esse tipo de gráfico possibilita comparar as taxas de aprovação, de reprovação e de abandono no Ensino Fundamental, no estado de Alagoas.

a) Construa um gráfico que represente as informações contidas na linha da tabela referente ao estado de Alagoas. Resposta nas orientações ao professor.

b) Que tipo de gráfico você construiu no item **a**? Por que você o escolheu?

c) Com base no gráfico que você construiu e na tabela apresentada, elabore uma questão e troque com um colega. Em seguida, verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal.

BNCC em foco

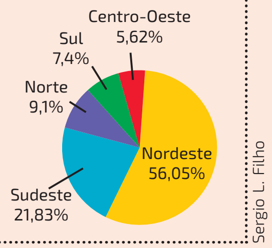
- A atividade **27** proporciona aos alunos identificar qual tipo de gráfico é adequado para representar as informações contidas na tabela, conforme orienta a habilidade **EF08MA23**.

- Veja uma possível questão elaborada pelos alunos no item **c** da atividade **27**:
  - Qual a taxa média de reprovação no Ensino Fundamental desses estados?
    R 8,6%

Respostas

26. c)

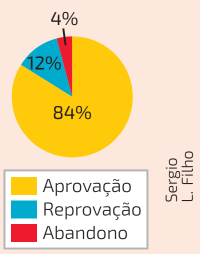
Porcentagem de pessoas analfabetas com 15 anos ou mais de idade no Brasil – 2017



IBGE. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílio Contínua - PNAD Contínua**. Disponível em: <www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/sociais/educacao/17270-pnad-continua.html?edicao=21073&t=downloads>. Acesso em: 5 jun. 2018.

27. a)

Taxa de aprovação, reprovação e abandono no Ensino Fundamental nos anos iniciais em Alagoas – 2014/2015



INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Indicadores de Fluxo Escolar da Educação Básica**. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/apresentacao/2017/apresentacao_indicadores_de_fluxo_escolar_da_educacao_basica.pdf>. Acesso em: 6 jun. 2018.

Média aritmética

Observe no esquema a quantidade diária de acessos a um *site* em certa semana.

Domingo	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Sábado
85 acessos	**62** acessos	**58** acessos	**42** acessos	**55** acessos	**60** acessos	**93** acessos

Rafael L. Gaion

Podemos calcular a **média aritmética** de acessos diários ao *site* durante essa semana adicionando a quantidade de acessos em cada dia e dividindo o resultado obtido pela quantidade de dias.

$$\text{Ma} = \frac{85 + 62 + 58 + 42 + 55 + 60 + 93}{7} = \frac{455}{7} = 65$$

Assim, a quantidade média diária de acessos a esse *site* durante a semana foi de 65 acessos.

Média aritmética (Ma), ou simplesmente **média**, é a soma de dois ou mais valores dividida pela quantidade de valores adicionados.

A média, em geral, tem como objetivo representar de maneira resumida um conjunto de dados.

Mediana e moda

Em um hospital, foram feitos 11 partos em certo dia. A seguir, estão indicadas as medidas das massas, em gramas, dos bebês nascidos, organizadas em ordem decrescente.

4 100	3 925	3 860	3 685	3 680	3 670	3 650	3 650	3 650	3 120	2 875

Podemos notar que o valor que ocorre com maior frequência é 3 650 g. Esse valor é chamado **moda**.

Percebemos também que o valor 3 670 g ocupa a posição central do conjunto de dados. Esse valor é chamado **mediana**.

Nesse caso, obtemos a mediana para um conjunto com uma quantidade ímpar de valores. Quando a quantidade de valores do conjunto é par, a mediana é obtida calculando a média aritmética dos dois valores centrais do rol.

A seguir, estão representadas as idades dos oito funcionários de uma empresa, organizadas em ordem crescente.

Para calcular a mediana dessas idades, primeiro identificamos aquelas que ocupam as posições centrais.

valores centrais

31	32	34	34	37	38	38	41

- Diga aos alunos que a média aritmética, a mediana e a moda são medidas de tendência central que representam um conjunto de dados de maneira resumida.

181

- Verifique se os alunos perceberam que, para se obter a mediana de um conjunto de valores, os dados devem ser organizados em ordem crescente ou decrescente, ou seja, em rol.
- Verifique a possibilidade de levar alguns conjuntos de dados com quantidades pares e ímpares de valores para os alunos organizarem em rol, a fim de identificarem a mediana, a moda e calcularem a amplitude total.

Calculando a média aritmética dos valores centrais, obtemos a mediana.

$$Md = \frac{34 + 37}{2} = \frac{71}{2} = 35{,}5$$

Assim, a mediana das idades dos funcionários dessa empresa é 35,5 anos.

Nesse conjunto de valores há duas modas: 38 anos e 34 anos. Dizemos que esse é um conjunto de valores **bimodal**.

- Em um conjunto de valores, a moda (Mo) é o valor que ocorre com maior frequência, isto é, que aparece mais vezes. Quando ocorrerem duas modas, o conjunto de valores é chamado **bimodal**, três modas, **trimodal**, quatro modas, **quadrimodal**, e assim por diante.
- Existem conjuntos que não possuem moda. Nesses casos, dizemos que o conjunto é **amodal**.
- O valor que ocupa a posição central de um conjunto com uma quantidade ímpar de valores, dispostos em ordem crescente ou decrescente, é chamado mediana (Md). Nos casos em que a quantidade de valores for par, a mediana será obtida ao calcular a média aritmética dos dois valores centrais do rol.

Amplitude total

Uma maneira de analisar a dispersão (variabilidade) dos valores de um conjunto de dados é calculando a **amplitude total**.

A amplitude total ajuda a compreender melhor o conjunto de dados, auxiliando na verificação do modo como os dados estão distribuídos em torno do termo central.

Para exemplificar, vamos considerar a situação da campanha de exame do nível de colesterol LDL, apresentada na página **163**, porém organizando os dados coletados em dois grupos. Observe os valores de cada grupo apresentados em ordem crescente.

Grupo A

91	92	98	101	102	111
114	114	115	116	116	117
118	121	124	125	128	128
131	133	134	141	143	148

Grupo B

104	104	105	107	111	112
113	113	115	119	119	122
122	122	126	126	127	129
131	135	136	136	138	139

Para determinar a amplitude total de cada grupo, subtraímos o menor do maior valor do conjunto de dados. No quadro **A**, o menor valor é 91 e o maior é 148.

$$148 - 91 = 57$$

Portanto, a amplitude do nível de colesterol LDL no grupo **A** é 57.

Calculando a média, a moda e a mediana do conjunto **A**, temos:

- a média aritmética (Ma) é aproximadamente 119,2;
- as modas (Mo) são 114, 116 e 128;
- a mediana (Md) é 117,5.

Note que, em relação às medidas de tendência central, a amplitude calculada é grande. Assim, os dados do grupo **A**, coletados na campanha, apresentaram uma grande dispersão, ou seja, os valores dos níveis de colesterol se distanciam tanto entre si como das medidas de tendência central.

No quadro **B**, o menor valor é 104 e o maior é 139.

$$139 - 104 = 35$$

Portanto, a amplitude do nível de colesterol LDL no grupo **B** é 35.

> A média, a moda e a mediana são medidas de tendência central.

Calculando a média, a moda e a mediana do conjunto **B**, temos:

- a média aritmética (Ma) é aproximadamente 121,3;
- a moda (Mo) é 122;
- a mediana (Md) é 122.

Observe que a amplitude calculada no grupo **B** é menor que a calculada no grupo **A**, ou seja, os dados do grupo **B**, coletados na campanha, apresentaram menor dispersão, ou seja, os valores dos níveis de colesterol são mais próximos entre si e das medidas de tendência central.

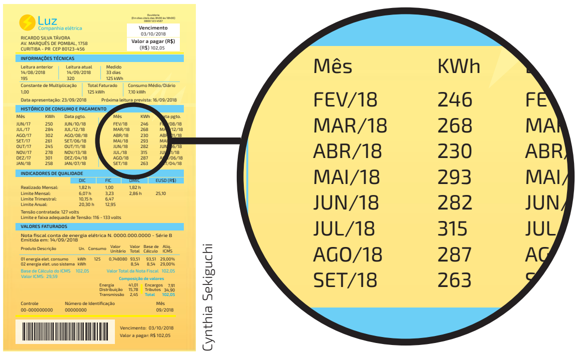
Quanto maior a amplitude total, mais afastados os valores estarão uns dos outros e também das medidas de tendência central (média, moda e mediana). Quanto menor a amplitude, mais próximos os valores do conjunto estarão uns dos outros e, consequentemente, mais próximos das medidas de tendência central.

> Para calcular a amplitude total (A_t) de um conjunto de dados, temos que realizar a subtração entre o maior e o menor valor.
>
> A_t = maior valor − menor valor

Atividades

Anote no caderno

28. Observe a parte em destaque da fatura de energia elétrica da casa de Ricardo.



Cynthia Sekiguchi

a) Qual o consumo médio mensal de energia elétrica, em quilowatt-hora (kWh), na casa de Ricardo no período de fevereiro a setembro de 2018? 273 kWh

b) Em quais meses o consumo de energia elétrica ficou acima da média? maio, junho, julho e agosto

29. Observe ao lado a idade, em anos, dos alunos matriculados no 1º ano do curso de História de uma universidade.

17	17	17	17	17	17	17
17	18	18	18	18	18	18
18	18	19	19	19	19	19
19	20	20	20	20	21	21
21	22	22	24	24	27	44

a) Qual a mediana, a moda e a média dessas idades? Md = 19 anos; Mo = 17 anos e Mo = 18 anos; Ma = 20 anos

b) Classifique esse conjunto de valores de acordo com a quantidade de modas. bimodal

c) Calcule a amplitude total das idades dos alunos. A_t = 27 anos

- O nome do estabelecimento que aparece na atividade **28** é fictício.
- Ao abordar a atividade **28**, peça para os alunos levarem uma fatura de energia elétrica para a sala de aula e calcularem a média de consumo mensal.
- Na atividade **29**, peça para os alunos analisarem a dispersão do conjunto de dados de acordo com as medidas de tendência central calculadas no item **a** e amplitude total calculada no item **c**.

BNCC em foco

- A atividade **31** possibilita aos alunos obterem os valores de medidas de tendência central com base em uma pesquisa das medidas das alturas dos jogadores de futebol da seleção francesa na final da Copa do Mundo de 2018, de modo a compreender seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicado pela amplitude. Assim, contempla-se a habilidade **EF08MA25**.

30. Em certa escola, para que o aluno seja aprovado em uma disciplina, é necessário que a média das notas dos quatro bimestres seja maior ou igual a 6,5. Nessa escola, a nota máxima que se pode obter é 10.

Observe na tabela as notas em Ciências do 1º, 2º e 3º bimestres de alguns alunos.

Nota de alguns alunos em Ciências – 2019

Nome	Bimestre		
	1º	2º	3º
Patrícia	5,7	6,3	6,8
Daniele	5,0	7,6	4,2
Lucas	6,7	6,6	6,7
Fabiana	9,2	8,3	4,1

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

a) Caso todos os alunos obtenham nota 6,0 no 4º bimestre, qual será a média final de cada um? Quais alunos seriam aprovados com essa nota? Patrícia: 6,2, Daniele: 5,7, Lucas: 6,5 e Fabiana: 6,9; Lucas e Fabiana

b) Qual a nota mínima que deve obter cada aluno no 4º bimestre para que seja aprovado? Patrícia: 7,2, Daniele: 9,2, Lucas: 6, Fabiana: 4,4

31. b) $A_t = 23$. Espera-se que os alunos respondam que o valor obtido na amplitude é pequeno em relação às medidas de tendência central, o que significa que as medidas da altura dos jogadores estão próximas tanto entre si como das medidas de tendência central.

31. A seleção da França foi campeã na Copa do Mundo de futebol realizada na Rússia em 2018.

Veja, ao lado, as medidas da altura dos jogadores escalados para a partida final contra a seleção da Croácia.

Medidas da altura dos jogadores da seleção francesa escalados para a partida final da Copa do Mundo – 2018

Nome	Medida da altura (cm)
Hugo Lloris	188
Benjamin Pavard	186
Raphael Varane	191
Samuel Umtiti	182
Paul Pogba	191
Antoine Griezmann	175
Olivier Giroud	192
Kylian Mbappe	178
N Golo Kante	169
Blaise Matuidi	180
Lucas Hernandez	183

FIFA. 2018 FIFA World Cup Russia: line-ups. Disponível em: <www.fifa.com/worldcup/matches/match/300331552/#match-lineups>. Acesso em: 23 ago. 2018.

a) Determine a média, a mediana e a moda das medidas da altura dos jogadores da seleção da França. 183 cm, 183 cm e 191 cm

b) Calcule a amplitude total das medidas da altura dos jogadores. O que se pode dizer a respeito do valor obtido, em relação aos valores das medidas de tendência central?

32. O gráfico ao lado apresenta a variação mensal da quantidade de visitas domiciliares realizadas por certo agente comunitário de saúde em relação ao mês anterior. Em fevereiro, por exemplo, foram feitas três visitas a menos que em janeiro.

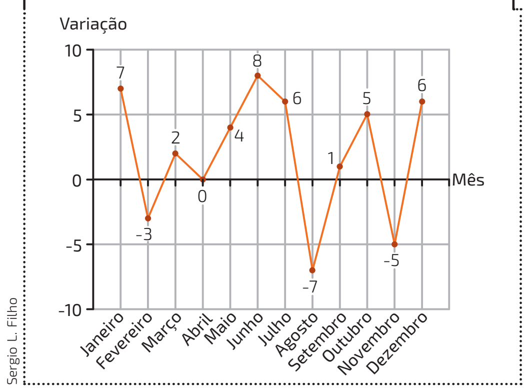
Em relação à variação da quantidade de visitas no período apresentado, determine a:

a) média mensal. 2 visitas

b) mediana. 3 visitas

c) moda. 6 visitas

Variação da quantidade de visitas por certo agente comunitário de saúde – 2019



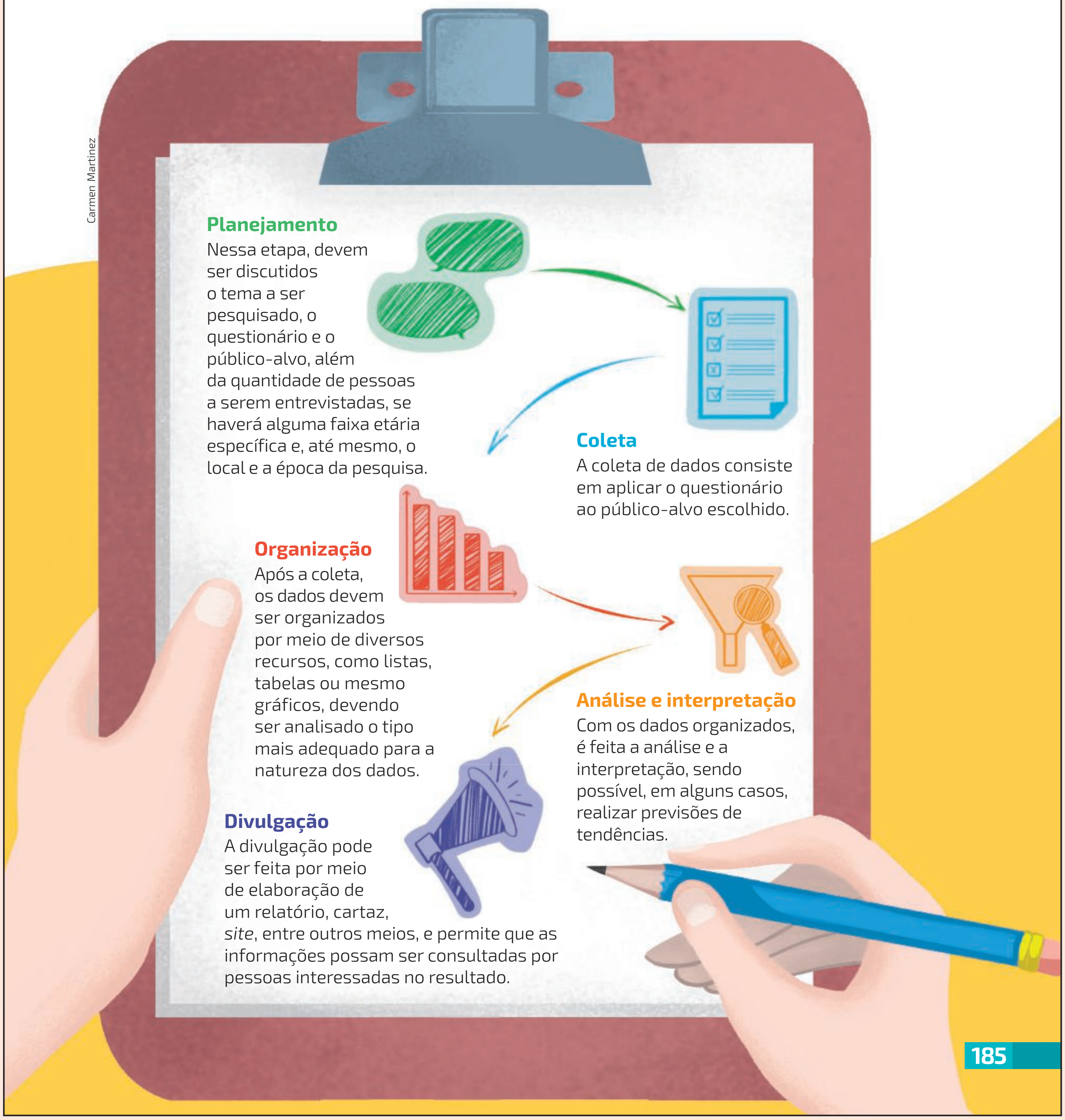
Elaborado pelo autor com dados fictícios.

184

Pesquisas estatísticas

As pesquisas estatísticas são úteis para informar as características de uma população ou suas preferências, como o Censo demográfico realizado periodicamente pelo IBGE e as pesquisas eleitorais. O resultado dessas pesquisas é importante para a tomada de decisões públicas e privadas.

Observe algumas etapas para a realização de uma pesquisa estatística.



Carmen Martinez

- Verifique a possibilidade de realizar e orientar uma pesquisa seguindo as etapas apresentadas nessa página. Se for necessário, lembre-os de poder utilizar uma amostra se a pesquisa for realizada na escola. Nesse caso, enfatize a necessidade de se obter uma amostra representativa da população.
- Explique aos alunos que existem algumas pesquisas que podem ser realizadas consultando documentos de registros, como os livros mais emprestados da biblioteca, cujos dados ficam armazenados no próprio banco de dados. Se possível, leve os alunos ao laboratório de informática ou à biblioteca para efetuarem as pesquisas.

Avaliação

- Durante a execução da pesquisa, em que os alunos deverão seguir os passos citados na página, procure avaliá-los com a intenção de observar como estão compreendendo os conceitos envolvidos em uma pesquisa estatística.
Dessa forma, é possível identificar dificuldades e definir novas estratégias para prosseguir com o trabalho nesse capítulo, procurando sempre dar atenção a essas dificuldades apresentadas pelos alunos.

BNCC em foco

- O trabalho com o tópico **Pesquisas estatísticas** permite desenvolver a **Competência específica de Matemática 8**, pois possibilita aos alunos trabalhar de forma coletiva e cooperativa para o planejamento e o desenvolvimento de pesquisas que busquem soluções para problemas, colocando em discussão diferentes temas, de modo que possam identificar pontos consensuais ou não, presando sempre pelo respeito às ideias dos colegas.

- Explique aos alunos que há outros tipos de amostragem que não foram citadas, como amostragem por conglomerados, por conveniência e por quotas. Peça para pesquisarem sobre os outros tipos de amostragens e levarem para a sala de aula uma breve apresentação contendo informações sobre como são feitas e em quais situações são comumente utilizadas. Possibilite também que pesquisem as amostragens citadas nessa página e na próxima página, de maneira a identificar situações em que são utilizadas e, até mesmo, realizá-las.

Pesquisa censitária e pesquisa amostral


Lucas Lacaz Ruiz/Folhapress

Recenseador do IBGE, em São José dos Campos (SP), no Censo 2010.

O **Censo demográfico** é uma pesquisa realizada a cada dez anos pelo IBGE cujo objetivo é descrever características da população brasileira relacionadas a educação, trabalho, moradia, composição dos domicílios e economia. Como envolve toda a **população**, dizemos que se trata de uma **pesquisa censitária**.

> A população não precisa necessariamente ser um conjunto de pessoas. O termo também pode se referir, por exemplo, a um conjunto de objetos ou informações, a peças produzidas por um equipamento, a um grupo de animais de certa espécie, entre outros elementos.

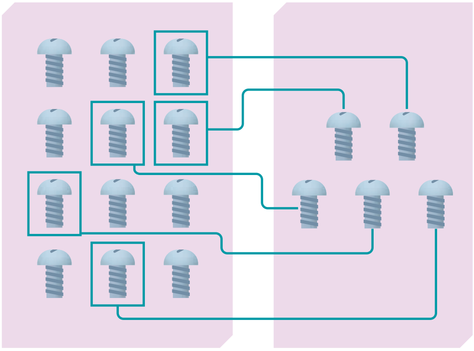
No entanto, em razão de acesso limitado, tempo ou custo, muitas vezes não é possível obter os dados de toda a população, sendo necessário ou vantajoso escolher parte da população que a representará como um todo. A essa parcela populacional damos o nome de **amostra** e, nesses casos, dizemos que se trata de uma **pesquisa amostral**.

A escolha da amostra é uma etapa de grande importância, pois ela representará o que ocorre com o total da população, de maneira que os apontamentos da pesquisa feita podem ser generalizados. Assim, a amostra deve representar de maneira proporcional a diversidade da população, independentemente da quantidade de dados que ela possui. Para isso, existem algumas maneiras de selecionar amostras convenientes e que estejam de acordo com os objetivos da pesquisa.

Estudaremos agora três tipos de amostragem: a **amostragem aleatória**, a **amostragem sistemática** e a **amostragem estratificada**.

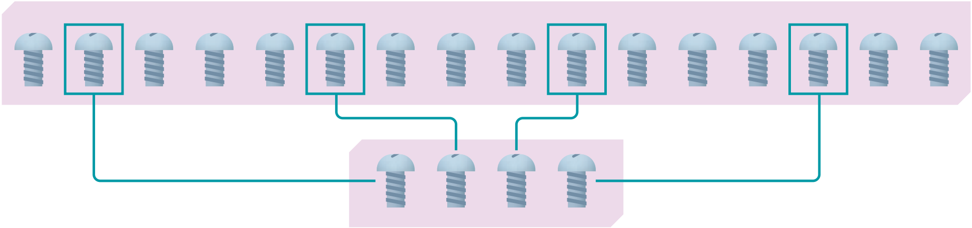
Para exemplificar esses três tipos, considere uma pesquisa feita por uma empresa para saber a qualidade dos parafusos fabricados em cada lote. Nesse caso, a população é o conjunto de todos os parafusos fabricados.

- **Amostragem aleatória**: também conhecida por amostragem simples, é aquela em que os elementos são sorteados procurando garantir a cada elemento da população a mesma chance de pertencer à amostra. Na situação apresentada, seria como colocar todos os parafusos produzidos em uma caixa e realizar um sorteio.

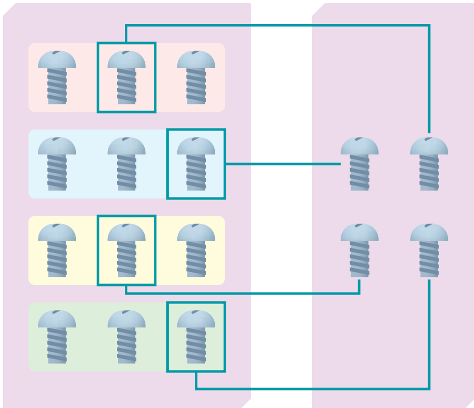


Sergio L. Filho

- **Amostragem sistemática**: é quando os elementos da população estão organizados seguindo uma ordem ou listagem e são escolhidos conforme um critério ou fator de repetição, por exemplo, na ordem de produção dos parafusos, escolher um a cada quatro produzidos.



- **Amostragem estratificada**: é aquela na qual se divide a população em subgrupos ou **estratos**, atendendo a critério estabelecido pelo estudo, realizando em cada subgrupo outro tipo de amostragem, como a aleatória. Um exemplo é sortear parafusos de cada máquina de produção ou lote.



Ilustrações: Sergio L. Filho

33. b) Possível resposta: pesquisa amostral, pois nem sempre é possível ter acesso a todos os clientes da lanchonete.
c) Pesquisa censitária, pois é possível consultar todos os funcionários, ou seja, envolver toda a população.

Atividades

Anote no caderno

33. Classifique cada pesquisa a seguir em **censitária** ou **amostral**. Justifique suas respostas.

a) A coordenação de uma escola vai fazer uma pesquisa estatística para saber de quais esportes os alunos do 8º ano mais gostam. Pesquisa censitária, pois nesse caso é possível pesquisar todos os alunos, ou seja, envolver toda a população.

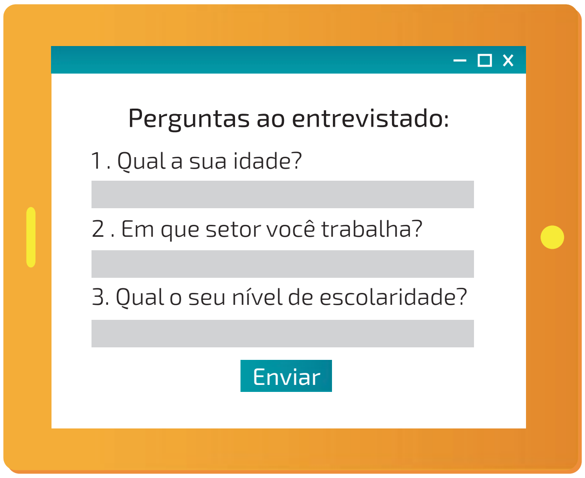
b) Uma lanchonete vai realizar uma pesquisa para saber qual o tipo de lanche preferido de seus clientes.

c) Uma empresa vai fazer uma pesquisa com seus funcionários sobre o nível de satisfação em relação ao trabalho.

d) Um instituto fará uma pesquisa de intenção de votos para prefeito de uma cidade. Possível resposta: pesquisa amostral, pois geralmente não é possível ter acesso a toda a população.

- Ao abordar a atividade de **33**, verifique a possibilidade de levar para a sala de aula recortes de jornais ou revistas que apresentem informações a respeito de pesquisas para os alunos classificarem em censitária ou amostral, ou, então, leve-os ao laboratório de informática para buscarem na internet exemplos de pesquisas censitárias e pesquisas amostrais.

34. Uma empresa fará uma pesquisa para saber o nível de escolaridade de seus funcionários. Para isso, elaborou o seguinte questionário.



Cynthia Sekiguchi/Sergio L. Filho

a) A pesquisa será censitária ou amostral? pesquisa censitária

b) Quem serão os entrevistados nessa pesquisa? os funcionários da empresa

c) Quais informações serão obtidas?
Idade, setor em que trabalham e nível de escolaridade.

35. Na escola em que Marcela estuda existe um projeto de incentivo à leitura. Veja no quadro ao lado o resultado de uma pesquisa a respeito da quantidade de alunos atendidos por esse projeto nas sete primeiras semanas de aula de 2019.

Semana	Quantidade de alunos
1ª	25
2ª	27
3ª	31
4ª	27
5ª	32
6ª	28
7ª	33

a) Qual foi a média de alunos atendidos por semana? 29 alunos

b) Calcule a mediana, a moda e a amplitude total da quantidade de alunos atendidos nas semanas.
$Ma = 28$; $Mo = 27$; $A_t = 8$

c) Construa um gráfico de barras que represente as informações apresentadas no quadro. Resposta nas orientações ao professor.

d) Escreva um relatório com o objetivo de divulgar a pesquisa, apresentando o tema, a representação das informações por meio de um gráfico e suas conclusões a respeito da pesquisa, considerando as medidas de tendência central e a amplitude total do conjunto de dados. Resposta pessoal.

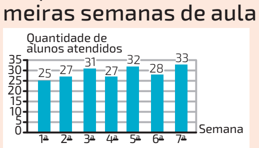
36. Junte-se a três colegas e, de acordo com as etapas apresentadas na página **185**, façam uma pesquisa estatística amostral na escola. Para isso, escolham um tema interessante e um dos tipos de amostragem apresentados. Depois, escrevam um relatório com o objetivo de divulgar a pesquisa, apresentando o tema, a representação das informações por meio de um gráfico e suas conclusões a respeito da pesquisa, considerando as medidas de tendência central e a amplitude total do conjunto de dados. Resposta pessoal.

BNCC em foco

- Para a atividade **36**, sugira aos alunos alguns temas para pesquisa, como estilo musical preferido, esportes praticados, medida de tempo em que acessa a internet, profissão que pretende seguir, filme preferido e tantos outros possíveis. Oriente-os a, após obter os dados da pesquisa, elaborar um relatório conclusivo que contenha um gráfico apropriado para representar os dados coletados, os cálculos das medidas de tendência central (média, moda e mediana) e a amplitude total dos dados. Se possível, promova uma exposição com os materiais produzidos pelas equipes de pesquisa. Dessa maneira, as habilidades **EF08MA26** e **EF08MA27** são contempladas.

Resposta

35. c) Projeto de incentivo à leitura nas primeiras semanas de aula – 2019



Sergio L. Filho

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

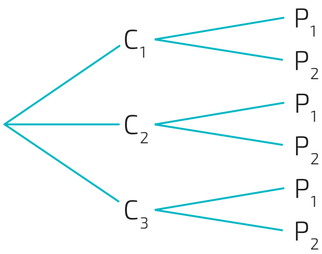
Possibilidades

Edde Aguiar

Márcio foi a uma loja de informática comprar um computador. Nessa loja há três opções de configuração de computador e duas formas de pagamento, à vista ou a prazo.

Quantas possibilidades diferentes Márcio tem para comprar o computador nessa loja?

Para responder a essa questão, podemos construir um diagrama mostrando todas as possibilidades. Representando as configurações dos computadores por C_1, C_2 e C_3 e as formas de pagamento por P_1 e P_2, temos o diagrama ao lado.



Observe no quadro outra maneira de representar todas as possibilidades:

	Forma de pagamento	
Configuração	P_1	P_2
C_1	C_1P_1	C_1P_2
C_2	C_2P_1	C_2P_2
C_3	C_3P_1	C_3P_2

O diagrama e o quadro apresentados são conhecidos respectivamente como **diagrama de árvore** ou **árvore de possibilidades** e **quadro de possibilidades.**

Com base no diagrama e no quadro, podemos representar a quantidade de possibilidades pela seguinte multiplicação.

quantidade de formas de pagamento

$$3 \cdot 2 = 6$$

quantidade de opções de configurações

quantidade de possibilidades

Assim, Márcio tem 6 possibilidades de comprar um computador nessa loja.

A situação apresentada ilustra o **princípio multiplicativo**, que diz:

> Se a decisão d_1 pode ser tomada de **a** maneiras e, após tomada essa decisão, a decisão d_2 puder ser tomada de **b** maneiras, então a quantidade de maneiras de tomar as decisões d_1 e d_2 é $a \cdot b$.

Veja outro exemplo.

O time de vôlei da escola onde Amanda estuda vai compor um novo uniforme. Para isso, o time deve escolher entre 4 opções de camiseta, 3 opções de bermuda e 2 opções de par de meias. De quantas maneiras diferentes o novo uniforme do time pode ser composto, sabendo que ele deve ser formado por 1 camiseta, 1 bermuda e 1 par de meias?

BNCC em foco

- Com base no tópico **Possibilidades**, os alunos serão levados a resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo, contemplando, desse modo, a habilidade **EF08MA03**.

- Solicite aos alunos que construam um diagrama de árvore ou um quadro de possibilidades para verificarem o resultado obtido no exemplo apresentado no fim da página **189** e início da página **190**.
- No item **c** da atividade **37**, os alunos deverão elaborar um problema de acordo com o esquema desenhado por eles. Um possível problema é questionar sobre as possibilidades de se deslocar de uma cidade para a outra, conforme apresentado no item **b**. Peça para alguns exporem seus esquemas na lousa, a fim de discutir com a turma outras perguntas a serem elaboradas.

Podemos responder a essa questão utilizando o princípio multiplicativo.

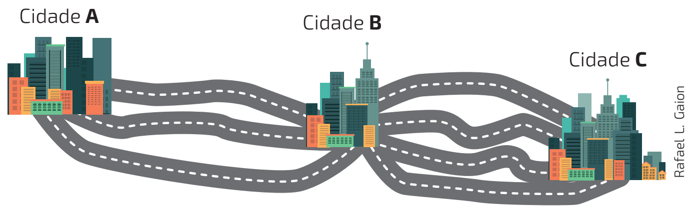
$$\underbrace{4}_{\text{quantidade de opções de bermudas}} \cdot \underbrace{3}_{\text{quantidade de opções de camisetas}} \cdot \underbrace{2}_{\text{quantidade de opções de pares de meias}} = \underbrace{24}_{\text{quantidade de possibilidades}}$$

Portanto, há 24 maneiras diferentes de compor o uniforme do time.

Atividades

Anote no caderno

37. Janaína está na cidade **A** e vai até a cidade **C**, passando pela cidade **B**. Para ir da cidade **A** até a cidade **B** há 3 rodovias e da cidade **B** até a **C**, 4 rodovias, como no esquema.



a) Construa um diagrama de árvores e um quadro de possibilidades para representar a situação acima. Resposta nas orientações ao professor.

b) Janaína pode ir da cidade **A** até a cidade **C** de quantas maneiras diferentes, passando pela cidade **B**? 12 maneiras

c) Crie um esquema que apresente rodovias interligando três cidades. Em seguida, elabore um problema envolvendo possibilidades e peça a um colega que o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal.

38. Certa loja fez uma promoção em que seus clientes ganhariam desconto caso comprassem *kits* com uma camiseta, uma bermuda e um boné, a serem escolhidos entre os modelos abaixo.

a) Quantas possibilidades diferentes de *kits* podem ser formadas? 48 possibilidades

b) Do total de *kits* que podem ser formados, quantos:

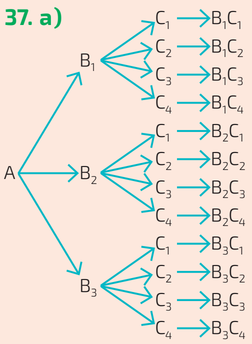
- têm uma bermuda vermelha? 12 *kits*
- têm uma bermuda azul e um boné amarelo? 4 *kits*

39. Um instituto de pesquisa aplicou um questionário com 4 perguntas, cada uma das quais com 3 alternativas de resposta. Sabendo que para cada pergunta deveria ser assinalada apenas uma resposta, escreva uma potência que corresponde à quantidade de possibilidades de responder a esse questionário. Depois, calcule a potência. $3^4 = 81$

2^3 4^3 3^4 3^2

Respostas

37. a)

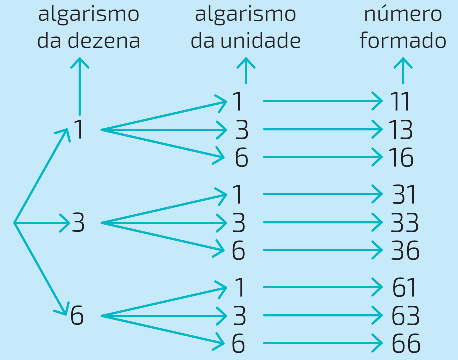


		Rodovias de **B** até **C**			
		C_1	C_2	C_3	C_4
Rodovias de **A** até **B**	B_1	B_1C_1	B_1C_2	B_1C_3	B_1C_4
	B_2	B_2C_1	B_2C_2	B_2C_3	B_2C_4
	B_3	B_3C_1	B_3C_2	B_3C_3	B_3C_4

40. Observe duas maneiras pelas quais podemos determinar a quantidade de números de dois algarismos que podem ser formados por 1, 3 e 6.

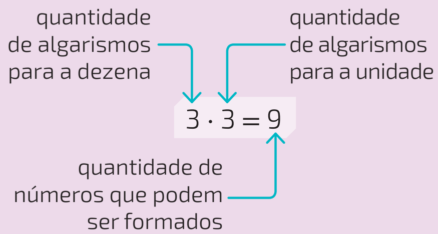
1ª maneira

Utilizando um diagrama de árvores.



2ª maneira

Utilizando o princípio multiplicativo.



Portanto, com os algarismos 1, 3 e 6 podem ser formados nove números de dois algarismos.

Utilizando a maneira que preferir, determine a quantidade de números de:

a) dois algarismos que podem ser formados com os algarismos 7, 3, 2 e 5. 16 números

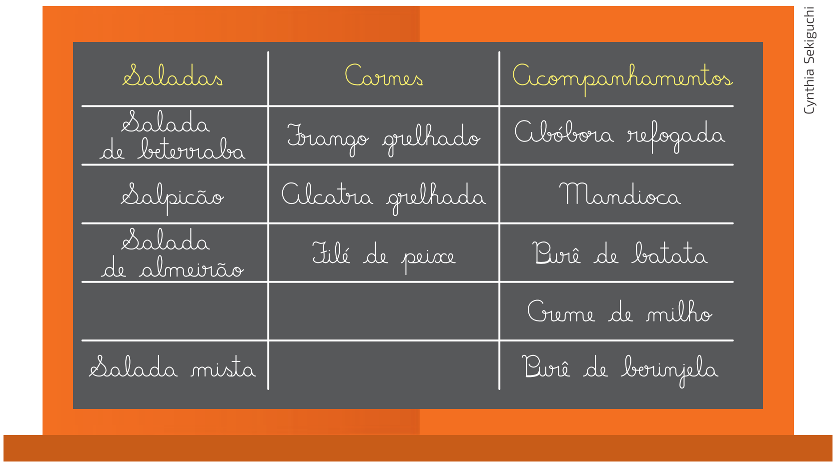
b) três algarismos que podem ser formados com os algarismos 4, 9 e 1. 27 números

c) quatro algarismos que podem ser formados com os algarismos 2, 8 e 6. 81 números

41. Para se cadastrar em um *site*, o usuário deve compor uma senha de acesso de 4 caracteres, dos quais os dois primeiros devem ser vogais e os dois últimos, algarismos de 0 a 9.

Tempos depois de realizar o cadastro, Laís esqueceu a sua senha de acesso. Sabendo que para testar cada possível senha Laís gasta em média 2 minutos, quantos minutos no máximo ela vai gastar até digitar a senha correta?
5 000 minutos

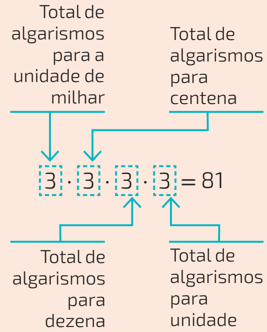
42. De acordo com a imagem a seguir, elabore um problema envolvendo possibilidades e peça a um colega que o resolva. Em seguida, verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal.



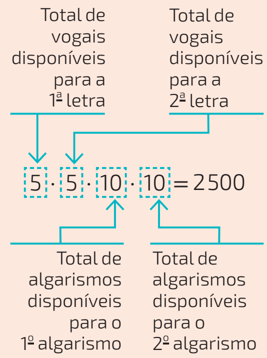
Saladas	Carnes	Acompanhamentos
Salada de beterraba	Frango grelhado	Abóbora refogada
Salpicão	Alcatra grelhada	Mandioca
Salada de almeirão	Filé de peixe	Purê de batata
		Creme de milho
Salada mista		Purê de berinjela

Cynthia Sekiguchi

- Caso os alunos tenham dificuldade na resolução do item **c** da atividade **40**, apresente-lhes o esquema a seguir e dê as explicações necessárias, auxiliando-os na compreensão.



- Para resolver a atividade **41**, inicialmente é necessário determinar a quantidade de senhas distintas que se podem formar e, depois, multiplicar o resultado por 2 (2 minutos). Se necessário, apresente aos alunos o esquema a seguir, que determina a quantidade de senhas distintas.



Explique também que, para resolver essa atividade, devem considerar correta a última senha digitada, sem repetir alguma tentativa.

- Na atividade **42**, os alunos podem elaborar problemas como:
  - Em um restaurante, para preparar uma refeição, os clientes podem escolher uma salada, uma carne e um acompanhamento entre as opções oferecidas no quadro. Quantas possibilidades um cliente tem para compor a refeição?
    R 60 possibilidades

BNCC em foco

- A atividade dessa página permite o trabalho com a **Competência geral 5**, pois detalha alguns aspectos da elaboração de senhas de maneira que os alunos possam formulá-las com segurança, estimulando o uso de tecnologias de comunicação e informação de maneira crítica, significativa e ética. Converse com os alunos sobre a importância de se levar a sério a segurança no meio digital, pois invasores podem roubar informações e cometer crimes contra a pessoa ou em nome dela.
- Essa página procura desenvolver nos alunos o raciocínio lógico e o espírito de investigação, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo, contemplando, dessa forma, a **Competência específica de Matemática 2**.

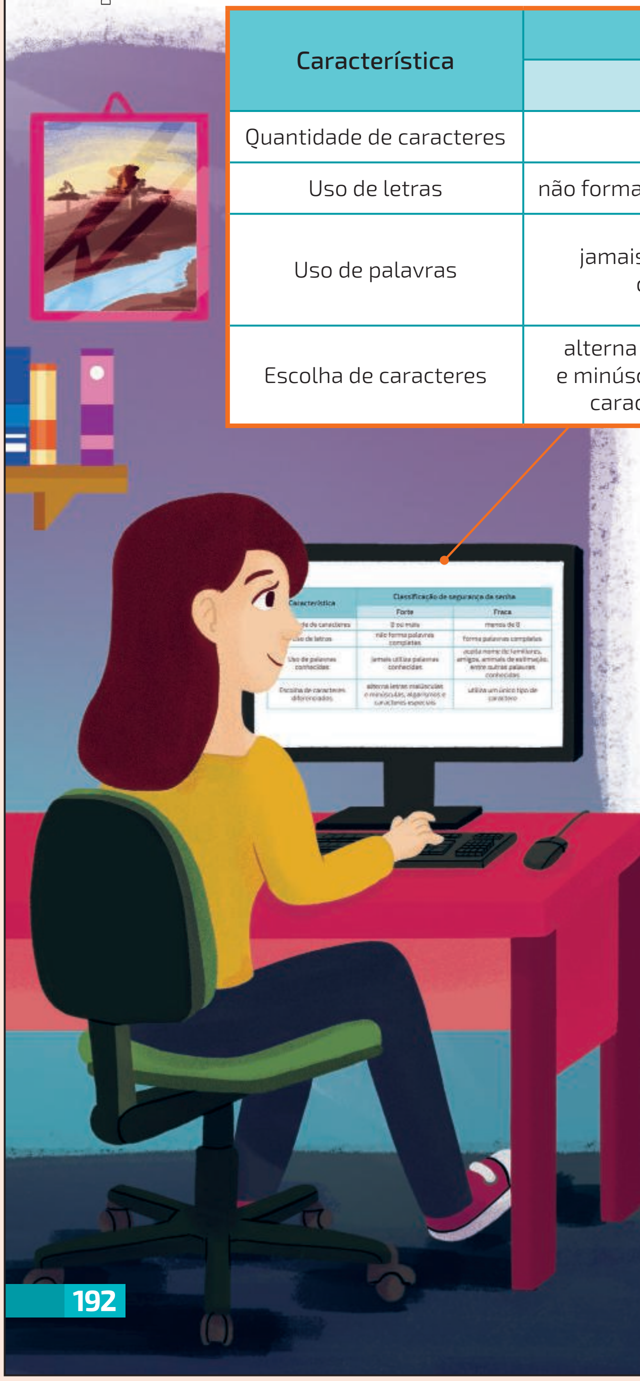
Matemática em destaque

43. No dia a dia, utilizamos senhas em diversas situações, como em transações no caixa eletrônico e ao fazer compras com cartão de crédito, seja em lojas, seja em *sites* na internet. Por isso, é importante criar senhas difíceis de serem descobertas, chamadas senhas fortes, as quais garantem segurança e sigilo às informações.

Observe algumas características que podem definir a segurança de uma senha.

Característica	Classificação de segurança da senha	
	Forte	Fraca
Quantidade de caracteres	8 ou mais	menos de 8
Uso de letras	não forma palavras completas	forma palavras completas
Uso de palavras	jamais utiliza palavras conhecidas	aceita nome de familiares, amigos, animais de estimação, entre outras palavras conhecidas
Escolha de caracteres	alterna letras maiúsculas e minúsculas, algarismos e caracteres especiais	utiliza um único tipo de caractere

Débora Kamogawa



a) Elabore uma senha de até 7 caracteres que seja considerada fraca. Depois, modifique-a alterando ou acrescentando caracteres para torná-la uma senha forte. Resposta pessoal.

b) Mauro tem de criar para sua conta de *e-mail* uma senha com 8 caracteres. De quantas maneiras ele pode incluir o número **349** entre os demais caracteres, sem separar ou mudar a ordem dos algarismos? 6 posições

c) Para fortalecer uma senha, Camila pretende acrescentar 3 caracteres em posições específicas, conforme segue:

Senha anterior: Camila

Senha alterada: _Cam_ila_

Acrescentando apenas algarismos, quantas possibilidades há para formar a senha alterada utilizando somente:

- algarismos iguais? 10 possibilidades
- algarismos diferentes? 720 possibilidades

192

Probabilidade

Em uma prova de gincana, um integrante de cada equipe deve sortear uma bola de uma caixa de papelão que contém 15 bolas iguais numeradas de 1 a 15 e, em seguida, devolvê-la na caixa. Vence a prova a equipe que sortear a bola com o maior número.

Qual é a probabilidade de sortear uma bola com um número maior do que 9?

Embora não possamos prever com certeza o resultado desse experimento, conhecemos o conjunto de todos os resultados possíveis. Esse conjunto é chamado **espaço amostral** do experimento, e o nomeamos pela letra **S**.

Débora Kamogawa

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Estudamos em anos anteriores que, se todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, a probabilidade **P** de um evento ocorrer é:

$$P = \frac{\text{quantidade de resultados favoráveis}}{\text{quantidade de resultados possíveis}}$$

Nesse caso, como há 6 bolas com números maiores do que 9 de um total de 15 bolas, temos:

$$P = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$$

Portanto, a probabilidade de sortear uma bola com um número maior do que 9 é 2 em 5, $\frac{2}{5}$ ou 40%.

> Lembre-se: cada objeto de um conjunto é chamado **elemento** do conjunto.

- **Qual é a probabilidade de cada um dos elementos desse espaço amostral?** $\frac{1}{15}$
- **Adicione as probabilidades de todos os elementos desse espaço amostral. Qual foi a soma obtida?** 1

> A soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral de um experimento é igual a 1.

- **Sabendo que para certa equipe vencer essa prova é necessário que seu integrante sorteie um número maior ou igual a 12, determine a probabilidade de essa equipe vencer a prova.** $\frac{4}{15}$

- Após trabalhar o conceito de probabilidade, verifique se os alunos compreenderam a diferença entre possibilidade e probabilidade. Possibilidade é o conjunto de resultados que podemos obter em determinado experimento, e probabilidade é a chance de acontecimento de uma das possibilidades. Alguns exemplos que podem ilustrar essa diferença são:
  - No lançamento de uma moeda honesta, as possibilidades são as faces cara ou coroa. Por exemplo, a probabilidade de a face coroa ficar voltada para cima é de uma em duas possibilidades, ou seja, a probabilidade é $\frac{1}{2}$ ou 50%.
  - As possibilidades no lançamento de um dado honesto são seis, ou seja, os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Por exemplo, a probabilidade de a face com o número 3 ficar voltada para cima após um lançamento é uma em seis possibilidades, ou seja, a probabilidade é $\frac{1}{6}$ ou aproximadamente 16,7%.

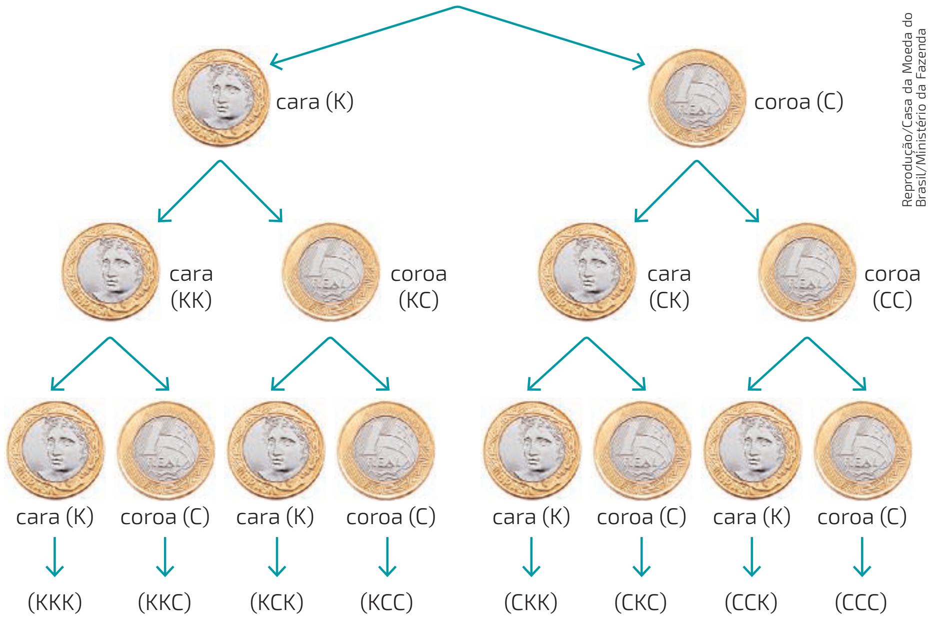
Material digital

- Para complementar o trabalho com o tópico **Probabilidade**, no material digital dessa coleção disponibilizamos a **Sequência didática 9**, elaborada com objetivo de desenvolver as habilidades **EF08MA03** e **EF08MA22**. Essa sequência apresenta atividades que visam ao reconhecimento do princípio multiplicativo da contagem e problemas que sejam resolvidos utilizando esse princípio, além de abordar o cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento.

- Se for conveniente, diga aos alunos que a sistematização dos estudos das probabilidades iniciou-se no século XV, com a obra **Summa**, do frade italiano Luca Pacioli (c. 1445-1509). No entanto, considera-se o início das bases da teoria das probabilidades somente o ano de 1654, quando houve uma correspondência entre os matemáticos Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665). A princípio, essa teoria tratava de assuntos relacionados a jogos de azar, contudo, no decorrer dos anos, foram dadas a ela muitas outras aplicações. Em 1657, o matemático holandês Christiaan Huygens (1629-1695) escreveu o primeiro tratado formal da teoria das probabilidades, com base na correspondência entre Pascal e Fermat. No século XVIII, com o crescimento dos negócios envolvendo seguros, outros diversos matemáticos foram atraídos à aplicação da teoria das probabilidades nesse campo. Destacam-se as contribuições dos matemáticos Leonhard Euler (1707-1783), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Jakob Bernoulli (1654-1705), Abraham De Moivre (1667-1754), entre outros.
- Diga aos alunos que um acontecimento é certo quando a quantidade de resultados favoráveis é igual à de resultados possíveis (probabilidade de 100%), e impossível quando a quantidade de resultados favoráveis é igual a zero (probabilidade de 0%).

Em outra prova dessa gincana, um integrante de cada equipe deve lançar, simultaneamente, três moedas. Qual é a probabilidade de uma equipe obter exatamente duas caras?

Para responder a essa pergunta, inicialmente, vamos construir uma árvore de possibilidades, a fim de determinar o espaço amostral desse experimento.



Desse modo, o espaço amostral é:

$$S = \{(K\,K\,K), (K\,K\,C), (K\,C\,K), (K\,C\,C), (C\,K\,K), (C\,K\,C), (C\,C\,K), (C\,C\,C)\}$$

Assim, temos 8 resultados possíveis.

> Outra maneira de determinar a quantidade de resultados possíveis é utilizando o princípio multiplicativo, ou seja, efetuando: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Portanto, a probabilidade de obter exatamente duas caras é:

$$P = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Atividades

Anote no caderno

44. No lançamento de um dado comum, qual a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um número:

a) menor do que 4? $\frac{1}{2}$ ou 50%

b) múltiplo de 3? $\frac{1}{3}$ ou, aproximadamente, 33,33%

c) maior do que 2? $\frac{2}{3}$ ou, aproximadamente, 66,67%

d) divisor de 7? $\frac{1}{6}$ ou, aproximadamente, 16,67%

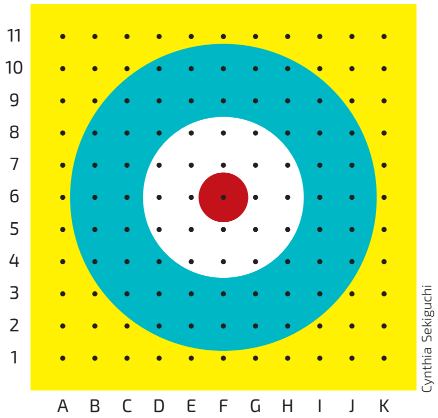
45. Em uma urna há bolinhas enumeradas de 1 a 30, e uma delas será sorteada.

a) Qual a probabilidade de o número sorteado dessa bolinha ser múltiplo de 6?

b) Qual a probabilidade de o número sorteado da bolinha ser ímpar? $\frac{1}{2}$ ou 50%

45. a) $\frac{1}{6}$ ou, aproximadamente, 16,67%

46. Para cada ponto em destaque no esquema, foi produzida uma ficha com suas coordenadas. As coordenadas do ponto pertencente à região vermelha, por exemplo, são indicadas na ficha (F, 6).



> Nos itens **b** e **d** desta atividade, indique a resposta na forma fracionária.

a) Quantas fichas foram confeccionadas? 121 fichas

b) Ao sortearmos uma dessas fichas, qual a probabilidade de ela indicar as coordenadas de um ponto pertencente à região:

- vermelha? $\frac{1}{121}$
- branca? $\frac{20}{121}$
- azul? $\frac{48}{121}$
- amarela? $\frac{52}{121}$

c) Qual a soma das probabilidades calculadas no item **b**? 1

d) No sorteio de uma ficha, qual a probabilidade de ela não indicar um ponto da região amarela? $\frac{69}{121}$

e) Qual a probabilidade de, ao sortearmos uma ficha, ela não indicar um dos pontos do esquema? 0 ou 0% (evento impossível)

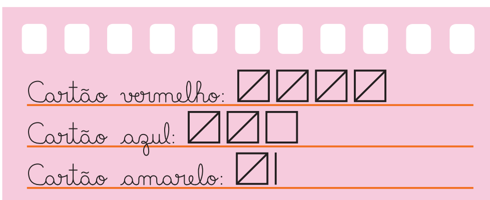
47. Renato confeccionou alguns cartões e os colocou em uma urna. Observe a quantidade de cartões de cada cor.

a) Quantos cartões Renato confeccionou? 125 cartões

b) Ao sortear um cartão, qual a probabilidade de ele ser:

- vermelho? $\frac{14}{25}$ ou 56%
- azul? $\frac{8}{25}$ ou 32%
- amarelo? $\frac{3}{25}$ ou 12%

c) Em um experimento, Renato realizou 40 sorteios com reposição, ou seja, ele anotava a cor do cartão sorteado e o devolvia para a urna. Veja as anotações de Renato.



Calcule o percentual da quantidade de cartões de cada cor sorteada em relação à quantidade de sorteios realizados. cartão vermelho: 50%; cartão azul: 35%; cartão amarelo: 15%

d) Compare os resultados das probabilidades calculadas no item **b** com os resultados obtidos no experimento realizado no item **c**.

Esses valores são iguais ou próximos? Em sua opinião, por que isso ocorreu? próximos; Resposta pessoal.

- Para o item **c** da atividade **47**, verifique se os alunos perceberam que os valores obtidos no experimento são próximos aos valores das probabilidades calculadas.
- Verifique a possibilidade de realizar a **Atividade complementar** proposta a seguir, a fim de verificar como os alunos estão realizando cálculos envolvendo probabilidade.

Atividade complementar

Calculando probabilidades

Materiais

- cartolinas de quatro cores (verde, vermelha, branca e amarela)
- caixa de papelão
- tesoura com pontas arredondadas

Desenvolvimento

- Organize os alunos em grupos e peça para construírem cartões com as mesmas dimensões usando as cartolinas, sendo:
  - 10 cartões verdes
  - 80 cartões vermelhos
  - 25 cartões brancos
  - 45 cartões amarelos

  Peça para fazerem um orifício na caixa pelo qual seja possível retirar um cartão. Em seguida, oriente-os a colocar os cartões no interior da urna e agitá-la a fim de misturá-los. Antes de iniciar os sorteios, peça para calcularem e anotarem a probabilidade de retirar determinado cartão no sorteio.
  - verde: R $\frac{10}{160}$ ou 6,25%
  - vermelho: R $\frac{80}{160}$ ou 50%
  - branco: R $\frac{25}{160}$ ou 15,625%
  - amarelo: R $\frac{45}{160}$ ou 28,125%

- Após os cálculos, cada aluno deve fazer 20 sorteios com reposição e anotar a quantidade de cartões sorteados de cada cor. Em seguida, cada grupo deve calcular a razão entre a quantidade de cartões de cada cor sorteada e a quantidade total de sorteios realizados e comparar com as respectivas probabilidades calculadas antes dos sorteios. Oriente os alunos para que também calculem essas razões considerando todos os sorteios feitos na turma.
- Verifique se os alunos perceberam que, de modo geral, a probabilidade prevista não é igual ao resultado obtido no experimento. Porém, quanto maior a quantidade de sorteios, mais as probabilidades prevista e calculada se aproximam.

- Proponha o jogo da **Atividade complementar** a seguir aos alunos, a fim de verificar se são capazes de avaliar quando um evento é mais provável do que outro de acontecer.

Atividade complementar

Jogo das probabilidades

Materiais

- dois dados
- tabuleiro
- cartolina
- tesoura com pontas arredondadas
- cola

Desenvolvimento

- Organize os alunos em grupos de até 4 integrantes. Reproduza o tabuleiro e a planificação do dado, disponíveis nas **Páginas para reprodução**.
- Distribua para cada grupo duas cópias do tabuleiro e duas cópias das planificações dos dados e oriente-os a montá-los, colando as planificações na cartolina antes, para torná-las mais resistentes.
- Uma rodada do jogo começa com cada participante escolhendo um dos números do tabuleiro e marcando seu nome na linha correspondente à jogada e coluna do número escolhido. Dois jogadores não podem escolher o mesmo número. Assim, é importante definir uma ordem para escolherem e alterná-la em cada rodada.
- O jogador que escolher o número por último lança os dois dados, e vence a rodada aquele que tiver escolhido o número igual à soma dos resultados dos dados.
- Vence o jogo aquele que tiver vencido mais rodadas.

48. Em uma fábrica de sapatos, foi constatado que, a cada 80 pares produzidos, 3 pares apresentavam algum tipo de defeito.

a) Ao retirar aleatoriamente um par de sapatos de um lote de 80 pares, qual a probabilidade de ele apresentar algum tipo de defeito? $\frac{3}{80}$ ou 3,75%

b) A probabilidade de retirar aleatoriamente um par de sapatos de um lote de 160 pares e ele apresentar algum defeito é maior, menor ou igual do que se ele fosse retirado de um lote de 80 pares? Justifique sua resposta.
Igual, pois $\frac{6}{160} = \frac{3}{80}$.

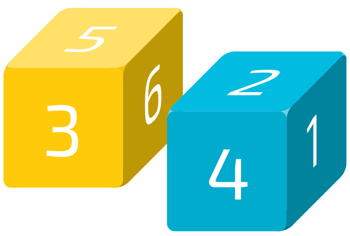
49. Em uma caixa foram colocadas bolas nas cores preta, verde, branca e azul. Ao retirar ao acaso uma dessas bolas, a probabilidade de a bola ser preta é 20% e de ser verde, 10%. Na caixa, foram colocadas 15 bolas azuis, e a quantidade de bolas verdes é $\frac{1}{4}$ da quantidade de bolas brancas.

a) Quantas bolas foram colocadas na caixa? 50 bolas

b) Quantas bolas de cada cor foram colocadas na caixa?
10 bolas pretas, 5 bolas verdes, 20 bolas brancas e 15 bolas azuis

50. As faces de dois dados foram numeradas de 1 a 6.

Ao lançarmos esses dois dados e calcularmos o produto dos números obtidos, determinamos valores que podem ser organizados em um quadro.



×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4				
3	3	6				
4						
5						
6						

Ilustrações: Sergio L. Filho

a) Construa um quadro parecido com o apresentado e registre os resultados que podem ser obtidos nesses lançamentos.
Resposta nas orientações ao professor.

b) Calcule a probabilidade de o resultado obtido ser:

- igual a 21. $\frac{0}{36}$ ou 0%
- menor que 12. $\frac{19}{36}$ ou, aproximadamente, 52,78%
- múltiplo de 3. $\frac{20}{36}$ ou, aproximadamente, 55,55%
- igual a 25. $\frac{1}{36}$ ou, aproximadamente, 2,78%
- igual a 10. $\frac{2}{36}$ ou, aproximadamente, 5,55%
- múltiplo de 2. $\frac{27}{36}$ ou 75%

196

- Após realizar o jogo, sistematize a estratégia principal envolvida, que se dá pela escolha do número (sempre que possível) mais provável de ser igual à soma dos resultados dos dados. Isso pode ser feito por meio de um quadro com todas as possibilidades de soma dos resultados dos dados e os cálculos das probabilidades de sair cada um desses números.

Resposta

50. a)

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Sergio L. Filho

51. Um restaurante decidiu fazer uma promoção em que o cliente participante era beneficiado com uma refeição. Para compor essa refeição, o cliente sorteava um tipo de salada, um de carne e um de acompanhamento. No quadro a seguir estão apresentadas as opções que poderão compor a refeição sorteada.

Saladas	Carnes	Acompanhamentos
Salada de brócolis	Filé de frango	Creme de milho
Salada de agrião	Alcatra grelhada	Purê de batata
Salada mista	Filé de peixe	Mandioca frita
		Abobrinha refogada

Qual a probabilidade de um cliente sortear uma refeição contendo como acompanhamento o purê de batata?

Veja como Lucas resolveu esse problema.

Primeiro, calculei a quantidade de possibilidades de uma refeição ser composta a partir das opções apresentadas no quadro.

quantidade de tipos de carne

quantidade de tipos de salada $\rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36 \leftarrow$ quantidade de possibilidades

quantidade de tipos de acompanhamento

Depois, determinei quantas possibilidades de refeições podem ser compostas com o purê de batata.

quantidade de tipos de carne

quantidade de tipos de salada $\rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9 \leftarrow$ quantidade de possibilidades

quantidade de tipos de acompanhamento

Ilustrações: Débora Kamogawa

Para calcular a probabilidade de um cliente sortear uma refeição com o purê de batata como acompanhamento, divido a quantidade de possibilidades de refeições com o purê de batata pela quantidade total de possibilidades de compor uma refeição.

quantidade de possibilidades de refeições com o purê de batata

$$P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

quantidade total de possibilidades

Portanto, a probabilidade de um cliente sortear uma refeição com o purê de batata como acompanhamento é 25%.

a) Calcule a probabilidade de um cliente sortear uma refeição composta de:

- salada de brócolis. $\frac{1}{3}$ ou, aproximadamente, 33,33%
- alcatra grelhada. $\frac{1}{3}$ ou, aproximadamente, 33,33%

b) Determine o espaço amostral desse sorteio.
Resposta nas orientações ao professor.

BNCC em foco

- A atividade **51** contribui para que os alunos calculem a probabilidade de eventos com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo. Conforme orienta a habilidade **EF08MA22**.

- No item **b** da atividade **51**, se julgar necessário, peça que os alunos construam uma árvore de possibilidades para auxiliá-los a determinar o espaço amostral do sorteio.

Resposta

51. b) Vamos indicar com:

- **SB**: salada de brócolis
- **SA**: salada de agrião
- **SM**: salada mista
- **FF**: filé de frango
- **AG**: alcatra grelhada
- **FP**: filé de peixe
- **CM**: creme de milho
- **PB**: purê de batata
- **MF**: mandioca frita
- **AR**: abobrinha refogada

O espaço amostral é:

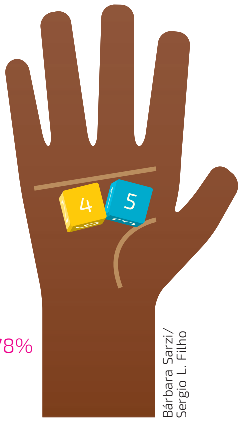
S = {(SB FF CM), (SB FF PB), (SB FF MF), (SB FF AR), (SB AG CM), (SB AG PB), (SB AG MF), (SB AG AR), (SB FP CM), (SB FP PB), (SB FP MF), (SB FP AR), (SA FF CM), (SA FF PB), (SA FF MF), (SA FF AR), (SA AG CM), (SA AG PB), (SA AG MF), (SA AG AR), (SA FP CM), (SA FP PB), (SA FP MF), (SA FP AR), (SM FF CM), (SM FF PB), (SM FF MF), (SM FF AR), (SM AG CM), (SM AG PB), (SM AG MF), (SM AG AR), (SM FP CM), (SM FP PB), (SM FP MF), (SM FP AR)}

BNCC em foco

- As atividades **52** e **54** proporcionam aos alunos calcularem a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecerem que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1, o que contempla a habilidade **EF08MA22**.

- No item **a** da atividade **53**, se necessário, peça aos alunos que construam a árvore de possibilidades para determinarem o espaço amostral.

52. Karina formará um número de dois algarismos com os números obtidos no lançamento de dois dados enumerados de 1 a 6. O dado amarelo representará o algarismo da dezena e o dado azul, o algarismo da unidade.



Bárbara Sarzi/ Sergio L. Filho

a) Nesse experimento, quantos são os resultados possíveis? 36 resultados possíveis

b) Determine o espaço amostral desse experimento.

53. b) S = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66}

c) Qual a probabilidade de Karina obter cada um dos elementos do espaço amostral? $\frac{1}{36}$ ou, aproximadamente, 2,78%

d) Qual a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral? 1

e) Ao lançar os dados, qual a probabilidade de Karina conseguir formar um número cujo algarismo da dezena seja 2? $\frac{1}{6}$ ou, aproximadamente, 16,67%

f) Qual a probabilidade de Karina obter um número par no lançamento dos dados? $\frac{1}{2}$ ou 50%

g) Ao lançar os dados, qual a probabilidade de Karina conseguir formar um número ímpar em que o algarismo da dezena seja 4? $\frac{1}{12}$ ou, aproximadamente, 8,33%

53. Uma escola oferece a seus alunos três tipos de atividade extracurricular: esporte, cultura e idioma. No tipo "esporte", eles podem escolher entre vôlei, basquete e atletismo; no tipo "cultura", entre clube de teatro e clube de literatura; já no tipo "idioma", a escolha fica entre inglês, espanhol e francês. Cada aluno deve escolher um tipo de esporte, um de cultura e um de idioma. De acordo com essas informações, resolva as questões a seguir.

a) Determine quantas possibilidades de escolha tem cada aluno. 18 possibilidades

b) Para realizar uma atividade, o professor de Matemática registrou todas as possibilidades de escolha de um aluno em fichas e as colocou em uma urna. Qual a probabilidade de, ao sortear uma dessas fichas, estar registrado:

- inglês como idioma? $\frac{1}{3}$ ou, aproximadamente, 33,33%
- vôlei como esporte? $\frac{1}{3}$ ou, aproximadamente, 33,33%
- clube de literatura como atividade cultural? $\frac{1}{2}$ ou 50%

54. Escreva o espaço amostral de um sorteio em que serão considerados todos os números naturais de três algarismos distintos que podem ser formados pelos algarismos indicados a seguir:

S = {135, 138, 153, 158, 183, 185, 315, 318, 351, 358, 381, 385, 513, 518, 531, 538, 581, 583, 813, 815, 831, 835, 851, 853}

3 8 5 1

a) Ao realizarmos um sorteio, qual a probabilidade de obtermos cada um dos elementos do espaço amostral? Qual a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral? $\frac{1}{24}$ ou, aproximadamente, 4,17%; 1

b) Ao sortearmos um desses números, qual a probabilidade de ele ser:

- par? $\frac{6}{24}$ ou 25%
- ímpar? $\frac{18}{24}$ ou 75%
- maior do que 825? $\frac{4}{24}$ ou, aproximadamente, 16,7%
- menor do que 137? $\frac{1}{24}$ ou, aproximadamente, 4,2%
- múltiplo de 3? $\frac{12}{24}$ ou 50%

55. Junte-se a um colega e elaborem um problema envolvendo o cálculo de possibilidades e de probabilidade, baseado na imagem abaixo. Em seguida, troquem esse problema com o de outros colegas e resolvam-no. Ao final, confiram as respostas. Resposta pessoal.

Rafael L. Gaion

Explorando o que estudei

Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? gráficos e tabelas, média aritmética, mediana, moda, amplitude total, pesquisa estatística, possibilidades e probabilidade

2. Quais são as vantagens de utilizar gráficos e tabelas para representar os dados de uma pesquisa? Espera-se que os alunos respondam que neles os dados coletados são apresentados de maneira organizada e simplificada, facilitando a leitura e a interpretação.

3. Para representar os dados de uma pesquisa e comparar as partes com o todo, é utilizado, em geral, qual tipo de gráfico? Justifique sua resposta. gráfico de setores; Espera-se que os alunos respondam que o ângulo de cada setor deve ser proporcional ao valor por ele representado.

4. O que caracteriza um pictograma? Os dados apresentados sob a forma de figuras relacionadas ao contexto das informações.

5. Para que servem a média, a mediana e a moda de um conjunto de valores? Espera-se que os alunos respondam que essas medidas servem para representar um conjunto de valores de maneira resumida.

6. O que permite dizer que um conjunto de valores é trimodal? Quando o conjunto possui três modas.

7. Para calcularmos a mediana, como devem estar dispostos os valores do conjunto? Explique os procedimentos que você utiliza para calcular a mediana de um conjunto com quantidade par de valores. em ordem crescente ou decrescente (rol); Espera-se que os alunos respondam que se calcula a média aritmética dos dois valores centrais.

8. Qual a diferença entre uma pesquisa censitária e amostral? A pesquisa censitária envolve toda a população, e a pesquisa amostral é quando é escolhida uma parte da população para ser pesquisada.

9. Quais são as maneiras apresentadas no capítulo para selecionar uma amostra? amostragem aleatória, amostragem sistemática e amostragem estratificada

10. Qual a diferença entre possibilidade e probabilidade? Possibilidade é a quantidade de possíveis resultados que podemos obter. Probabilidade é a chance que uma possibilidade tem de ocorrer.

11. Leia a notícia de um jornal.

Segundo o Instituto de Meteorologia, a probabilidade de chuva no dia do desfile é de 80%.

Rafael L. Gaion

De acordo com a notícia, é possível afirmar que vai chover no dia do desfile? Justifique sua resposta. não; Possível resposta: a notícia indica uma probabilidade menor do que 100%, logo existe a chance de não ocorrer chuva no dia do desfile (20%).

- Veja alguns exemplos de problemas que podem ser elaborados pelos alunos na atividade **55**:
  - Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar com os algarismos das bolinhas? Se escrevermos todos esses números em fichas e fizermos um sorteio, qual a probabilidade de o número ser maior do que 90?
    R 90 números; 10%
  - Todas as bolinhas foram colocadas dentro da urna, em seguida foram retiradas duas. Respeitando a ordem em que foram retiradas, qual a probabilidade de o número formado por elas ser par?
    R 50%

Avaliação

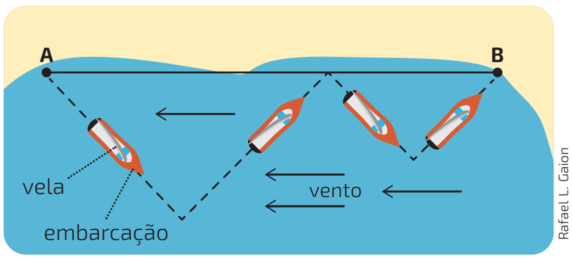
- Aproveite a seção **Explorando o que estudei** para realizar uma avaliação com os alunos. Para tanto, observe e faça anotações referentes às dificuldades ao responderem às questões propostas. Verifique a possibilidade de realizar um resumo do conteúdo estudado com os alunos para que possam esclarecer possíveis dúvidas que ainda restaram. Além disso, é importante refletir sobre as estratégias adotadas no decorrer do trabalho com o capítulo com o intuito de confirmá-las ou modificá-las para os próximos estudos.

Capítulo 9

Triângulos

O brasileiro Amyr Klink é famoso por realizar difíceis expedições a bordo de veleiros. Em 1998, com seu veleiro Paratii, navegou sozinho pelos três oceanos, dando a volta ao redor da Antártica, façanha repetida anos mais tarde com outros tripulantes, a bordo do Paratii 2, por uma rota um pouco diferente da anterior. Em suas expedições, o que chama a atenção é a escolha da embarcação movida a velas triangulares, que exploram a força do vento.

As velas latinas, com formato triangular, permitem mudar o curso da embarcação rapidamente e velejar até mesmo contra o vento, em zigue-zague (bordejar), versatilidade que não era possível para as antigas caravelas portuguesas na época das expedições de Cabral, que utilizavam o formato retangular.



Nesse capítulo, os alunos serão levados a aprofundar os conhecimentos com relação aos triângulos, relembrando seus elementos e como classificá-los de acordo com as medidas do comprimento dos lados e as medidas dos ângulos internos, relacionando-as ao estudo dos ângulos externos.

A consequência das figuras será abordada, a fim de auxiliar na compreensão dos casos de congruência de triângulos, além disso, serão apresentados os pontos notáveis de um triângulo.

- No tema abordado nas páginas de abertura, os alunos reconhecerão o formato triangular nas velas de embarcações. Com essa abordagem, procura-se despertar o interesse para os conceitos que serão estudados, tornando o aprendizado mais significativo.

  Complemente o texto explicando aos alunos que as velas retangulares, como as das caravelas, funcionam como guarda-chuvas e servem para aproveitar ventos que venham de trás ou das laterais do barco. Já as triangulares funcionam como asas de avião e servem para navegar em ângulos de até 40° em relação ao vento.

  Uma sugestão de condução do trabalho com essas páginas é realizar uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. As questões propostas podem ser escritas na lousa, de acordo com as respostas dadas. Nesse momento, é importante que a turma seja incentivada a participar.

  Para complementar o estudo do tema, proponha que os alunos se reúnam em grupos de três ou quatro integrantes para pesquisarem imagens e vídeos de diferentes tipos de veleiros. Oriente-os a observar as características, como a quantidade de velas e o formato delas.

Barco Paratii 2, em Paraty, no Rio de Janeiro, em 2005.

Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

A Qual é o formato das velas latinas? Qual é a vantagem desse tipo de vela?

B Qual era o formato das velas utilizadas nas caravelas que navegavam na época do descobrimento do Brasil?

C Em seu caderno, desenhe um veleiro com velas triangulares.

Pensando nisso...

A triangular; Permite mudar o curso rapidamente e velejar até mesmo contra o vento, em zigue-zague (bordejar).

B retangulares

C Resposta pessoal.

- Aproveite o trabalho com os itens **A** e **B** para avaliar a leitura e interpretação de textos dos alunos.
- Providencie régua para os alunos realizarem o desenho solicitado no item **C**.

Relacionando saberes

- Aproveite o tema das páginas de abertura e faça uma relação com o componente curricular **Educação Física** conversando com os alunos sobre o esporte que envolve os barcos movidos por propulsão à vela. Pergunte se algum deles já assistiu a uma competição de velas e diga que a modalidade é chamada de iatismo ou vela olímpica, e cada volta recebe o nome de regata. As regras variam conforme o tipo de competição, já que há diferenças, por exemplo, na quantidade de tripulantes e na quantidade de velas. Os movimentos são baseados na relação das velas com o vento e recebem o nome de mareações.

Objetivos do capítulo

- Identificar os elementos de um triângulo.
- Classificar triângulos quanto à medida de seus lados e de seus ângulos internos.
- Construir triângulos.
- Compreender a relação entre as medidas dos ângulos internos e externos de um triângulo.
- Identificar figuras congruentes.
- Reconhecer os casos de congruência de triângulos.
- Reconhecer e construir mediana, mediatriz, altura e bissetriz de um triângulo.
- Identificar pontos notáveis de um triângulo.
- Resolver problemas aplicando os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos.

Avaliação

- Antes de iniciar o trabalho com essa página, desenhe alguns triângulos na lousa para avaliar o conhecimento prévio dos alunos. Para isso, peça que identifiquem e nomeiem os elementos, como vértices, lados e ângulos internos.

- Ao trabalhar com o tópico **Os triângulos**, faça questionamentos que levem os alunos a citarem objetos que, em sua construção, contam com figuras que lembram triângulos, como pontes, telhados, entre outros.

Os triângulos

Orlando realizou uma pesquisa a fim de obter bandeiras de países em que é possível identificar figuras que lembram **triângulos**. Veja algumas das bandeiras encontradas por ele.


Bandeira de Cuba.


Bandeira da Jordânia.


Bandeira do Timor-Leste.

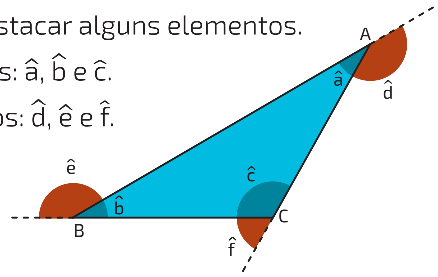
Ilustrações: Rafael L. Gaion

Estudamos em anos anteriores os triângulos e seus elementos. Vamos relembrar?

Triângulos são polígonos que possuem três lados.

No triângulo ABC (ou ΔABC), podemos destacar alguns elementos.

- Vértices: A, B e C.
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.
- Ângulos internos: $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$.
- Ângulos externos: $\hat{d}$, $\hat{e}$ e $\hat{f}$.

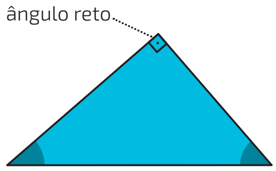


No ΔABC, $\overline{AB}$ é oposto ao ângulo $\hat{c}$, $\overline{BC}$ é oposto ao ângulo $\hat{a}$ e $\overline{AC}$ é oposto ao ângulo $\hat{b}$.

Vimos, também, que podemos classificar os triângulos quanto à medida:

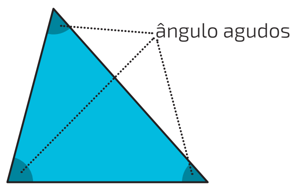
- de seus ângulos internos.

Triângulo retângulo



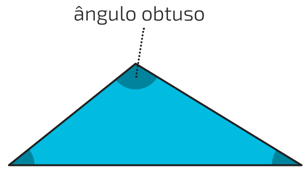
Triângulo que possui um ângulo interno reto.

Triângulo acutângulo



Triângulo que possui todos os ângulos internos agudos.

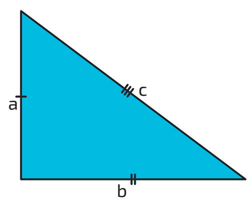
Triângulo obtusângulo



Triângulo que possui um ângulo interno obtuso.

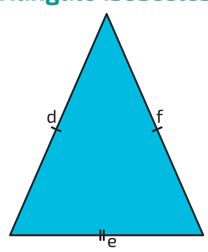
- do comprimento de seus lados.

Triângulo escaleno



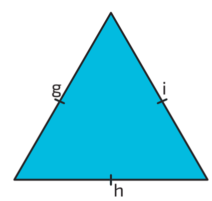
Triângulo que possui todos os lados com medidas de comprimento diferentes.
$a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$

Triângulo isósceles



Triângulo que possui pelo menos dois lados com medidas de comprimento iguais.
$d = f$

Triângulo equilátero



Triângulo que possui todos os lados com medidas de comprimento iguais.
$g = h = i$

Ilustrações: Ronaldo Lucena

202

Material digital

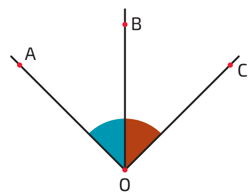
- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **7**, **8** e **9** do **3º** bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

Ângulos em um triângulo

Estudamos em anos anteriores que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Agora, vamos estudar uma relação entre os ângulos internos e externos de um triângulo.

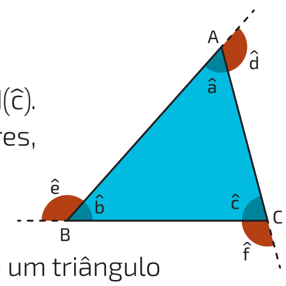
Em um triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Quando dois ângulos têm um lado comum e determinam duas regiões que não possuem pontos em comum, dizemos que eles são **adjacentes**. Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes.



Sergio L. Filho

Considere o ΔABC. Vamos mostrar que $med(\hat{d}) = med(\hat{b}) + med(\hat{c})$. Como os ângulos internos e externos adjacentes são suplementares, temos:



Ronaldo Lucena

$$med(\hat{a}) + med(\hat{d}) = 180°$$

Sabemos ainda que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, assim:

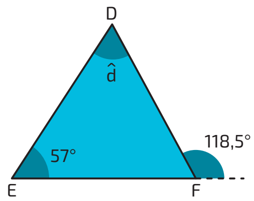
$$\underbrace{med(\hat{a}) + med(\hat{d})}_{180°} = \underbrace{med(\hat{a}) + med(\hat{b}) + med(\hat{c})}_{180°}$$

$$med(\hat{a}) - med(\hat{a}) + med(\hat{d}) = med(\hat{a}) - med(\hat{a}) + med(\hat{b}) + med(\hat{c})$$

$$med(\hat{d}) = med(\hat{b}) + med(\hat{c})$$

Deste modo, temos que a medida do ângulo externo adjacente ao ângulo $\hat{a}$ é igual à soma das medidas dos demais ângulos internos. Ao repetirmos esse procedimento para cada um dos ângulos externos, concluímos que a medida de qualquer ângulo externo em um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

No triângulo DEF, determine a medida do ângulo $\hat{d}$. Em seguida, explique a um colega os procedimentos utilizados por você. 61,5°; Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que resolveram a equação $118,5° = med(\hat{d}) + 57°$, pois, em um triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.



Sergio L. Filho

- Se julgar conveniente, peça para os alunos verificarem a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo de maneira prática, com desenho e recorte, conforme a apresentada no capítulo **9** do **7º** ano dessa coleção.
- Estimule os alunos a deduzirem as igualdades sugeridas abaixo, análogas à apresentada na página, pois é importante que eles se expressem matematicamente.
  - $med(\hat{e}) = med(\hat{a}) + med(\hat{c})$
  - $med(\hat{f}) = med(\hat{a}) + med(\hat{b})$

  Após concluírem, peça para conversarem com os colegas sobre os resultados obtidos, de modo a verificarem que, em um triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
- Para explicar como procederam na resolução da questão proposta na teoria, os alunos podem descrever os seguintes procedimentos:

  1º) Determinei a medida do ângulo $D\hat{F}E$:

  $180° - 118,5° = 61,5°$

  2º) Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°:

  $180° - (57° + 61,5°) = 61,5°$

  Peça que alguns alunos exponham suas resoluções para a turma na lousa e, em seguida, promova uma discussão sobre os diferentes procedimentos utilizados.

- Ao abordar a atividade **3**, caso julgue necessário, apresente aos alunos a demonstração abaixo, que mostra o fato de a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo ser igual a 360°. Para isso, considere o triângulo apresentado na atividade. Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos que:

$med(\hat{a}) + med(\hat{b}) +$
$+ med(\hat{c}) = 180°$

A soma da medida de um ângulo interno e um ângulo externo em cada vértice também é 180°, desse modo:

$med(\hat{a}) + med(\hat{f}) = 180°$

$med(\hat{b}) + med(\hat{d}) = 180°$

$med(\hat{c}) + med(\hat{e}) = 180°$

Adicionando essas três sentenças, temos:

$\underbrace{med(\hat{a}) + med(\hat{b}) + med(\hat{c})}_{180°} +$
$+ med(\hat{f}) + med(\hat{d}) +$
$+ med(\hat{e}) = \underbrace{3 \cdot 180°}_{540°}$

$180° + med(\hat{f}) + med(\hat{d}) +$
$+ med(\hat{e}) = 540°$

$180° + med(\hat{f}) + med(\hat{d}) +$
$+ med(\hat{e}) - 180° =$
$= 540° - 180°$

$med(\hat{f}) + med(\hat{d}) +$
$+ med(\hat{e}) = 360°$

Portanto, a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360°.

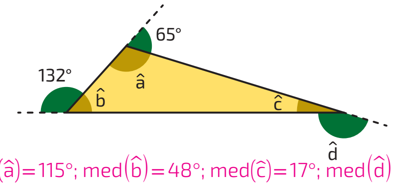
- A atividade **4** propõe um desafio aos alunos. A seguir, apresentamos uma maneira de resolver tal desafio.
  - $6x + 14° = 7x + 5°$
    $x = 9°$
  - $\hat{A} + 16x - 4° = 180°$
    $\hat{A} + 16 \cdot 9° - 4° = 180°$
    $\hat{A} = 40°$
  - $\hat{C} + 15x + 5° = 180°$
    $\hat{C} + 15 \cdot 9° + 5° = 180°$
    $\hat{C} = 40°$
  - $\underbrace{\hat{A}}_{40°} + \hat{B} + \underbrace{\hat{C}}_{40°} = 180°$
    $40° + \hat{B} + 40° = 180°$
    $\hat{B} = 100°$

Atividades

Anote no caderno

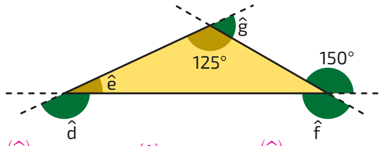
1. Determine a medida de cada ângulo em destaque nos triângulos.

a)



$med(\hat{a}) = 115°$; $med(\hat{b}) = 48°$; $med(\hat{c}) = 17°$; $med(\hat{d}) = 163°$

b)

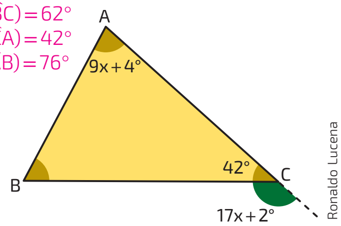


Ilustrações: Ronaldo Lucena

$med(\hat{d}) = 155°$; $med(\hat{e}) = 25°$; $med(\hat{g}) = 55°$; $med(\hat{f}) = 150°$

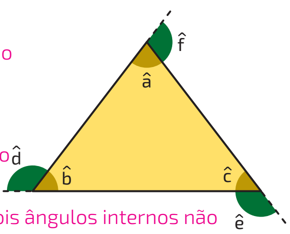
2. Calcule o valor de **x** e, depois, determine a medida dos ângulos internos do triângulo.

$x = 8°$
$med(A\hat{B}C) = 62°$
$med(B\hat{C}A) = 42°$
$med(C\hat{A}B) = 76°$



Ronaldo Lucena

3. No triângulo abaixo, $med(\hat{f}) = 105°$.



Ronaldo Lucena

3. b) A afirmação é verdadeira, pois, em um triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

a) Qual é a soma das medidas dos ângulos externos deste triângulo? E dos ângulos internos? 360°; 180°

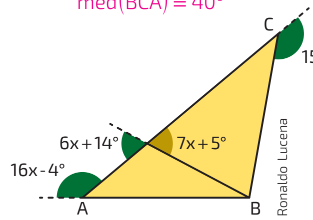
b) Verifique se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

> A soma das medidas dos ângulos $\hat{b}$ e $\hat{c}$ é igual a 105°.

c) Sabendo que $med(\hat{b}) = med(\hat{c})$, determine a medida dos ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$ e $\hat{e}$.

ângulos internos: $med(\hat{a}) = 75°$, $med(\hat{b}) = 52{,}5°$ e $med(\hat{c}) = 52{,}5°$;
ângulos externos: $med(\hat{d}) = 127{,}5°$ e $med(\hat{e}) = 127{,}5°$

4. Calcule a medida dos ângulos internos do ΔABC. $med(A\hat{B}C) = 100°$; $med(C\hat{A}B) = 40°$; $med(B\hat{C}A) = 40°$

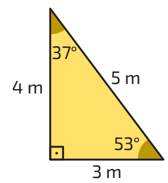


Ronaldo Lucena

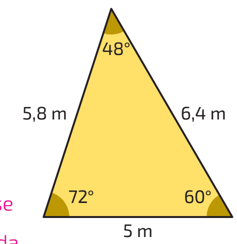
Classifique o triângulo ABC quanto à medida de seus ângulos internos.
triângulo obtusângulo

5. Observe os triângulos.

I)

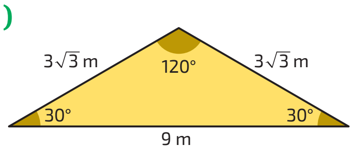


II)



5. b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que o lado do triângulo de maior medida de comprimento é oposto ao ângulo interno de maior medida.

III)



Ilustrações: Ronaldo Lucena

a) Para cada um dos triângulos, escreva a medida do ângulo interno oposto ao maior lado. I: 90°; II: 72°; III: 120°

b) Nos triângulos apresentados, que relação podemos perceber entre as medidas do comprimento de seus lados e as medidas de seus ângulos internos opostos? Converse com um colega a relação que vocês perceberam e anote-a em seu caderno.

c) Utilizando régua e transferidor, construa outros dois triângulos e verifique se a relação que você percebeu é válida. Resposta pessoal.

Portanto, o triângulo ABC é obtusângulo.

- Na atividade **5**, caso não haja réguas e transferidores para todos os alunos, reúna-os em grupos ou, então, verifique a possibilidade de levar alguns desses instrumentos para a sala de aula.

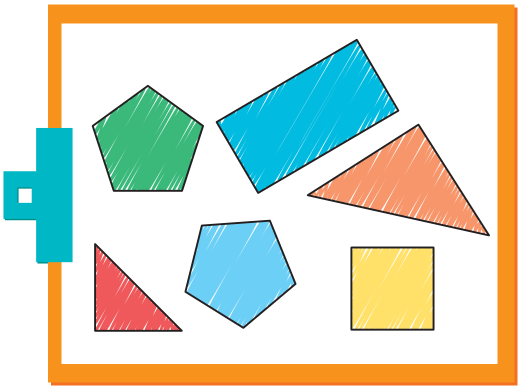
No item **b**, se os alunos observarem outras relações, explore-as junto com eles.

Caso necessário, oriente os alunos a realizarem as construções sugeridas no item **c**, conforme apresentado a seguir, pedindo para utilizarem outras medidas:

- Trace um segmento AB medindo 5 cm.
- Posicione o centro do transferidor em **A**, alinhado com o lado $\overline{AB}$, marque um ângulo de 75° e, em seguida, realize o mesmo procedimento no vértice **B**, marcando um ângulo de 35°.
- Por fim, conclua o desenho determinando o vértice **C**, sendo a interseção dos lados dos ângulos construídos.

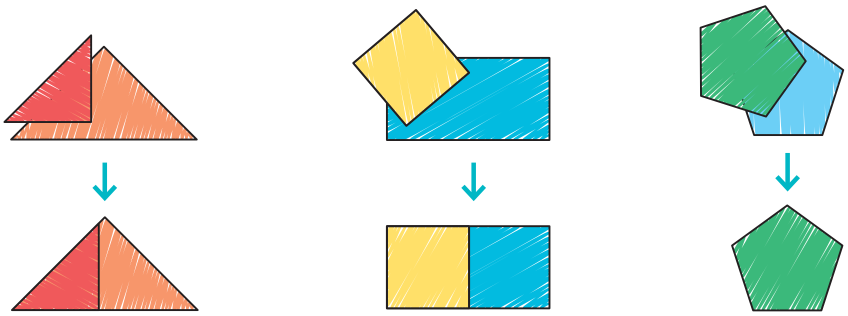
Congruência de figuras

Renata construiu alguns polígonos utilizando um programa de computador. Em seguida, ela imprimiu esses polígonos em uma folha de papel e os pintou.



Keithy Mostachi/Ronaldo Lucena

Após recortar esses polígonos e organizá-los de acordo com a quantidade de lados, Renata verificou que dois deles se sobrepuseram de maneira que coincidiram.

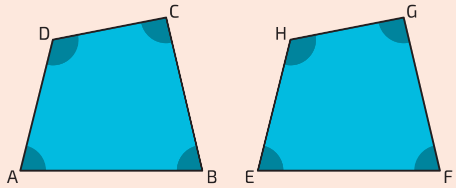


Os polígonos que coincidiram são chamados **congruentes**. Nesse caso, dizemos que os pentágonos construídos por Renata são congruentes.

Dois segmentos de reta são congruentes quando possuem a mesma medida de comprimento.

De maneira parecida, dois ângulos são congruentes quando possuem a mesma medida.

Para que dois ou mais polígonos sejam congruentes, os lados correspondentes devem ser congruentes e os ângulos internos correspondentes devem ser congruentes.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

Os polígonos ABCD e EFGH ao lado são congruentes.

Assim:

$$\overline{AB} \equiv \overline{EF},\ \overline{BC} \equiv \overline{FG},\ \overline{CD} \equiv \overline{GH} \text{ e } \overline{AD} \equiv \overline{EH}$$

$$\hat{A} \equiv \hat{E},\ \hat{B} \equiv \hat{F},\ \hat{C} \equiv \hat{G} \text{ e } \hat{D} \equiv \hat{H}$$

O símbolo ≡ indica congruência.

- Explique aos alunos que a palavra congruente é de origem grega e significa "de mesma medida", algo que seja coincidente ou correspondente em características e propriedades.
- Para complementar o conteúdo dessa página, forneça aos alunos a malha quadriculada que se encontra nas **Páginas para reprodução**. Solicite que construam nela alguns polígonos e passem para um colega construir polígonos que sejam congruentes aos desenhados inicialmente.

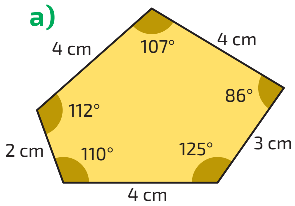
- Na atividade **7**, caso não haja transferidores para todos os alunos, reúna-os em grupos ou, então, verifique a possibilidade de levar alguns desses instrumentos para a sala de aula.
- Na atividade **8**, se necessário, lembre os alunos de que a medida do perímetro de um polígono é dada pela soma das medidas do comprimento de todos os seus lados.

Atividades

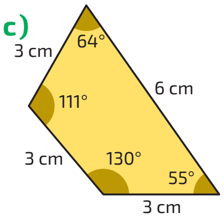
Anote no caderno

6. A seguir, há três pares de figuras congruentes. Identifique-os. a, e; b, d; c, f

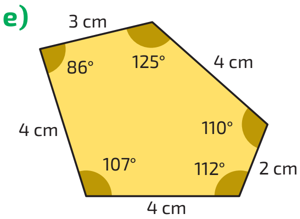
a)



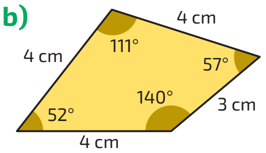
c)



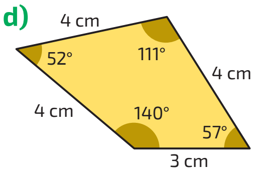
e)



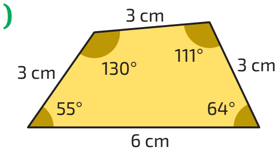
b)



d)



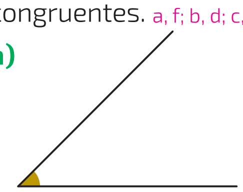
f)



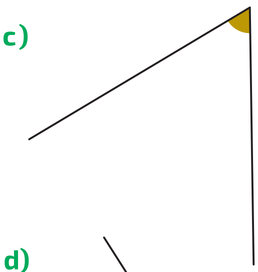
Ilustrações: Ronaldo Lucena

7. Utilizando um transferidor, meça os ângulos e identifique os pares de ângulos congruentes. a, f; b, d; c, e

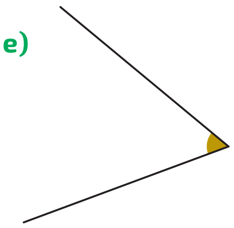
a)



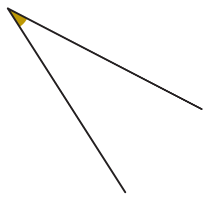
c)



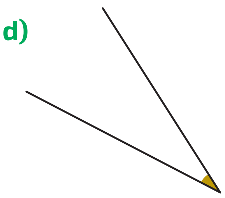
e)



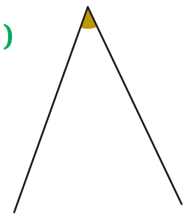
b)



d)



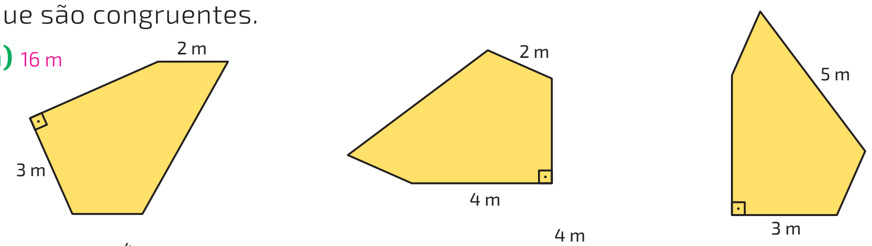
f)



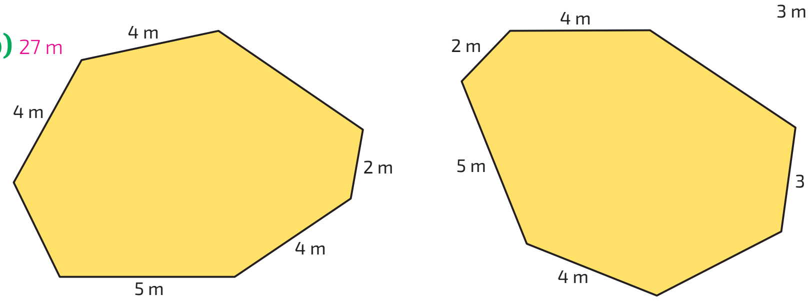
Ilustrações: Ronaldo Lucena

8. Determine a medida do perímetro dos polígonos em cada item sabendo que são congruentes.

a) 16 m



b) 27 m



Ilustrações: Ronaldo Lucena

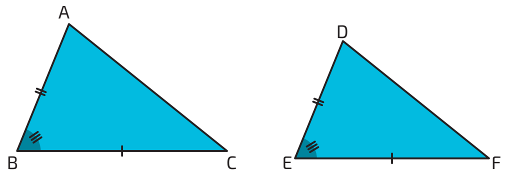
Casos de congruência de triângulos

Para verificar se dois triângulos são congruentes, não é necessário analisar a medida dos três ângulos internos e do comprimento dos três lados. Basta analisar três dessas medidas, segundo os casos a seguir.

1º caso: lado, ângulo, lado (LAL)

Quando dois triângulos têm dois lados e o ângulo formado por esses lados respectivamente congruentes, esses triângulos são congruentes.

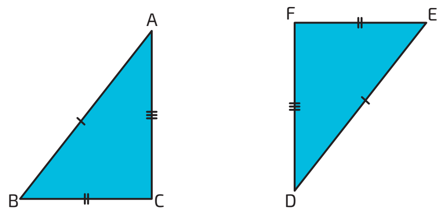
> Os lados dos triângulos indicados com a mesma quantidade de marcações são congruentes. O mesmo vale para os ângulos.



- lado: $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$
- ângulo: $\hat{B} \equiv \hat{E}$
- lado: $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$
- $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$

2º caso: lado, lado, lado (LLL)

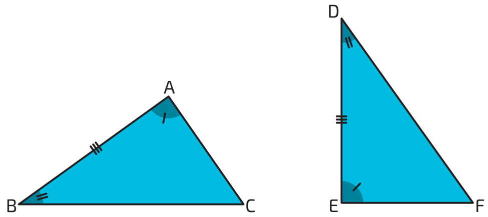
Quando dois triângulos têm os três lados respectivamente congruentes, esses triângulos são congruentes.



- lado: $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$
- lado: $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$
- lado: $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$
- $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$

3º caso: ângulo, lado, ângulo (ALA)

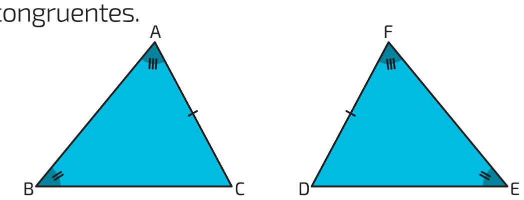
Quando dois triângulos têm dois ângulos internos e o lado adjacente a esses ângulos respectivamente congruentes, esses triângulos são congruentes.



- ângulo: $\hat{A} \equiv \hat{E}$
- lado: $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$
- ângulo: $\hat{B} \equiv \hat{D}$
- $\Delta ABC \equiv \Delta EDF$

4º caso: lado, ângulo, ângulo oposto (LAA_0)

Quando dois triângulos têm um lado, um ângulo interno adjacente e um ângulo interno oposto a esse lado respectivamente congruentes, esses triângulos são congruentes.



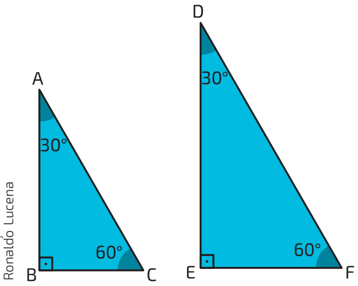
Ilustrações: Ronaldo Lucena

- lado: $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$
- ângulo adjacente: $\hat{A} \equiv \hat{F}$
- ângulo oposto: $\hat{B} \equiv \hat{E}$
- $\Delta ABC \equiv \Delta FED$

- Explique aos alunos que o caso de congruência LAA_0 é um caso particular do caso ALA, pois neste caso há dois ângulos internos congruentese um lado congruente.
- Após o trabalho com essa página, apresente exemplos de pares de triângulos e indique algumas medidas dos comprimentos dos lados e dos ângulos internos. Depois, peça aos alunos que verifiquem se são congruentes, identificando o caso de congruência.

207

- Explique aos alunos que, no caso apresentado, apesar de os triângulos ABC e DEF não serem congruentes, eles são semelhantes. Contudo, esse assunto será tratado no volume do **9º** ano dessa coleção.
- Na atividade **10**, caso não haja réguas e transferidores para todos os alunos, reúna-os em grupos ou, então, verifique a possibilidade de levar alguns desses instrumentos para a sala de aula.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

É importante observarmos que o fato de dois triângulos terem os três ângulos internos congruentes não garante que esses triângulos sejam congruentes.

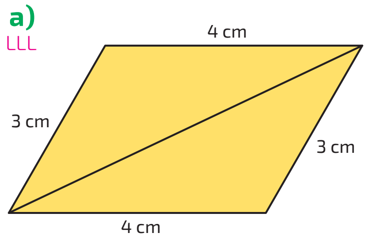
Os triângulos ABC e DEF ao lado têm os ângulos internos congruentes, porém esses triângulos não são congruentes, pois não possuem lados correspondentes congruentes.

Atividades

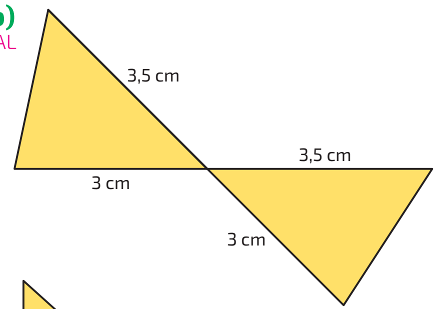
Anote no caderno

9. Os triângulos de cada item são congruentes. Observe as medidas indicadas e verifique qual caso garante a congruência desses triângulos.

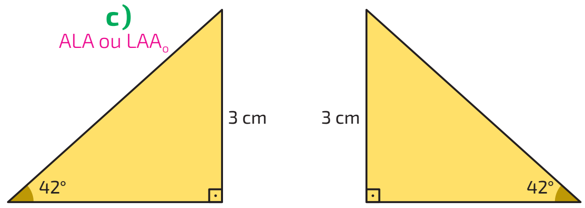
a) LLL



b) LAL



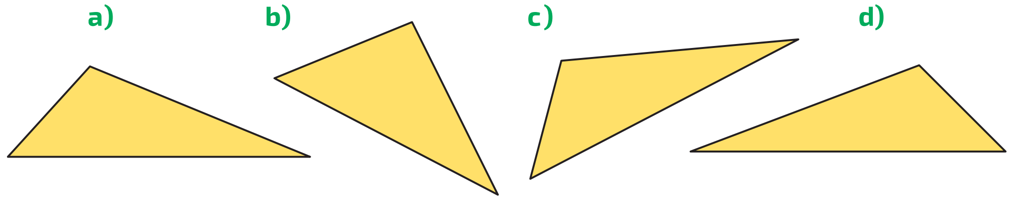
c) ALA ou LAA_o



Ilustrações: Ronaldo Lucena

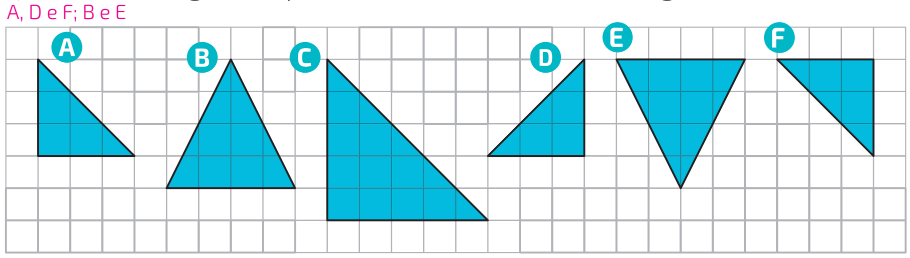
10. Com auxílio de instrumentos de medida, identifique o par de triângulos congruentes. a e c

a) **b)** **c)** **d)**



Ilustrações: Ronaldo Lucena

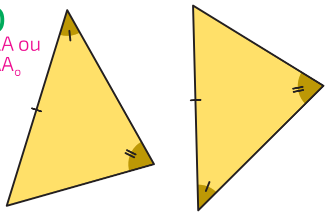
11. Quais dos triângulos representados na malha são congruentes?
A, D e F; B e E



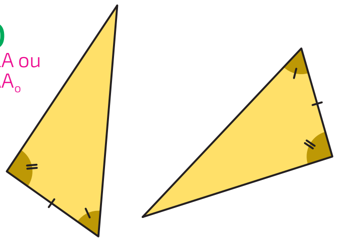
Sergio L. Filho

12. Sabendo que os triângulos representados em cada item são congruentes, identifique o caso que garante essa congruência.

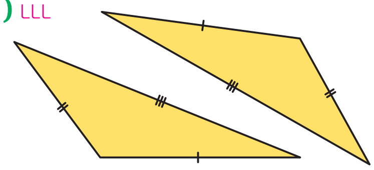
a) ALA ou LAA$_o$



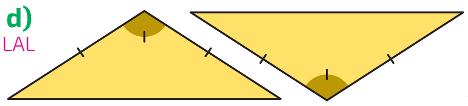
b) ALA ou LAA$_o$



c) LLL



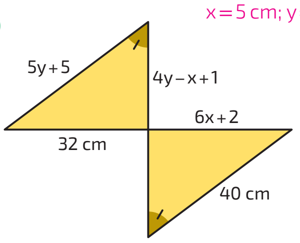
d) LAL



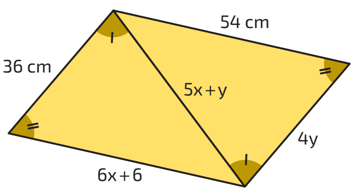
Ilustrações: Ronaldo Lucena

13. Os triângulos representados em cada item são congruentes. Calcule o valor, em centímetros, de **x** e **y** e determine a medida do perímetro de cada um deles.

a) $x = 5$ cm; $y = 7$ cm; 96 cm



b)



Ilustrações: Ronaldo Lucena

$x = 8$ cm; $y = 9$ cm; 139 cm

14. Verifique se cada afirmativa é verdadeira (V) ou falsa (F).

a) Todos os triângulos retângulos são congruentes. F

b) Dois triângulos congruentes possuem ângulos correspondentes com mesma medida. V

c) Todos os triângulos equiláteros são congruentes. F

d) A razão entre a medida dos perímetros de dois triângulos congruentes é 1. V

Agora, para cada afirmativa falsa, dê um exemplo que justifique essa classificação. Resposta pessoal.

15. Observe as informações que o professor escreveu na lousa.

Cynthia Sekiguchi

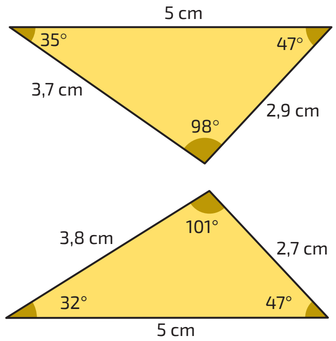
Todos os triângulos construídos de acordo com as medidas do:

a) ΔABC serão congruentes? sim; Espera-se que os alunos respondam que pelo caso de congruência ALA.

b) ΔDEF serão congruentes? não; Espera-se que os alunos respondam que não há um caso que garanta a congruência.

Justifique cada item.

16. No ΔMNO, $MN = 5$ cm, $med(M\hat{N}O) = 35°$ e $med(O\hat{M}N) = 47°$. Determine a medida do comprimento dos demais lados e do terceiro ângulo interno desse triângulo, sabendo que ele é congruente a um dos triângulos a seguir.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

$MO = 2,9$ cm; $NO = 3,7$ cm e $med(M\hat{O}N) = 98°$

- Na atividade **13**, caso necessário, peça aos alunos que consultem o capítulo **6** desse volume e retome com eles como resolver equações do 1º grau, a fim de auxiliá-los em suas resoluções.
- Ao abordar a atividade **14**, os alunos podem justificar as afirmativas falsas com os seguintes exemplos:
  a) Os comprimentos dos lados do triângulo ABC medem 3 cm, 4 cm e 5 cm, e do triângulo DEF medem 6 cm, 8 cm e 10 cm. Apesar de os dois serem triângulos retângulos, eles não são congruentes.
  c) Os comprimentos dos lados do triângulo equilátero LMN medem 8 cm, e do triângulo equilátero PQR medem 12 cm. Apesar de os dois triângulos serem equiláteros, eles não são congruentes.
  Se necessário, peça que justifiquem os itens julgados como falsos desenhando os triângulos.
- Para auxiliar os alunos na atividade **15**, peça que desenhem os triângulos e indiquem as medidas apresentadas na atividade, a fim de verificar a congruência, de acordo com os casos estudados. Lembre os alunos de que AB indica a medida do segmento, nesse caso, a medida de $\overline{AB}$.

Pontos notáveis de um triângulo

Estudaremos a seguir alguns pontos que estão associados aos triângulos. Esses pontos, que apresentam características particulares, são chamados **pontos notáveis**.

Medianas e baricentro de um triângulo

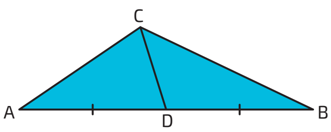
O segmento de reta em que uma das extremidades é um vértice do triângulo e a outra é o **ponto médio** do lado oposto a esse vértice é chamado **mediana**.

Um triângulo possui três medianas, cada uma relativa a um de seus lados.

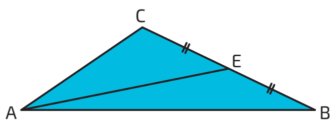
Observe as medianas relativas aos lados do ΔABC.

> O ponto médio **M** divide o segmento AB em dois segmentos congruentes.
>
> 
>

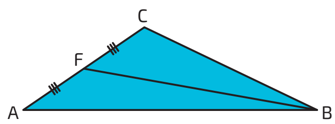
Sergio L. Filho



D é o ponto médio de $\overline{AB}$. Assim, $\overline{CD}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$.



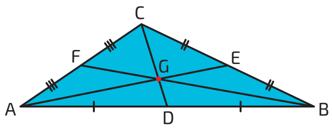
E é o ponto médio de $\overline{BC}$. Assim, $\overline{AE}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.



F é o ponto médio de $\overline{AC}$. Assim, $\overline{BF}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{AC}$.

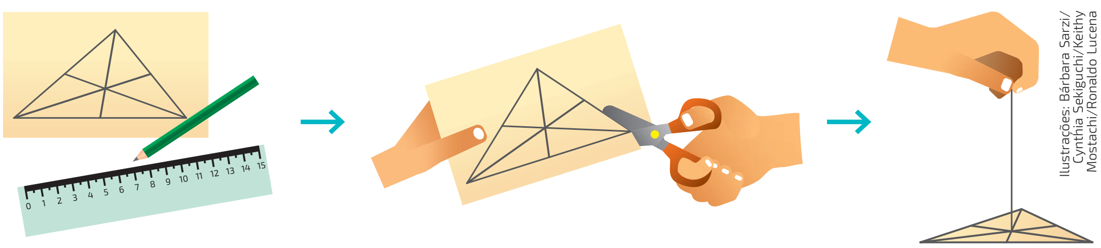
As três medianas de um triângulo sempre se encontram em um único ponto. Esse ponto notável é chamado **baricentro** do triângulo.

Ilustrações: Ronaldo Lucena



G: baricentro do ΔABC.

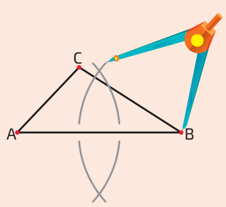
O baricentro é o ponto de equilíbrio do triângulo. Para verificar essa propriedade, podemos desenhar um triângulo qualquer em uma cartolina, determinar seu baricentro e em seguida recortá-lo. Se passarmos um barbante pelo baricentro, podemos suspender a representação do triângulo e deixá-lo em equilíbrio.



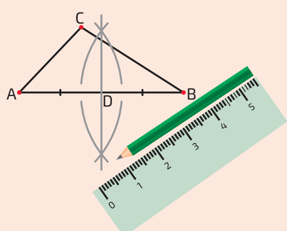
Ilustrações: Bárbara Sarzi/Cynthia Sekiguchi/Keithy Mostachi/Ronaldo Lucena

- Ao abordar o tópico **Medianas e baricentro de um triângulo**, caso necessário, apresente aos alunos a maneira de traçar uma mediana de um triângulo com régua e compasso. As imagens referentes a cada passo se encontram no rodapé dessa página.
  1º) Com a ponta-seca do compasso em **A** e a abertura maior que metade da medida do comprimento de $\overline{AB}$, traçamos dois arcos. Com essa mesma abertura e com a ponta-seca em **B**, traçamos outros dois arcos que cruzem aqueles feitos anteriormente.
  2º) Traçamos um segmento auxiliar cujas extremidades são os pontos de interseção dos arcos, determinando **D** como ponto médio de $\overline{AB}$.
  3º) Traçamos $\overline{CD}$, que é a mediana do triângulo relativa ao lado $\overline{AB}$.
  As demais medianas podem ser traçadas de maneira parecida.
- Verifique a possibilidade de realizar na prática a construção do ponto de equilíbrio (baricentro) de um triângulo, como apresentado nessa página. Para isso, organize os alunos em duplas e providencie os materiais necessários. Atividades como esta tornam a aprendizagem mais significativa.

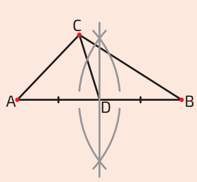
1º)



2º)



3º)



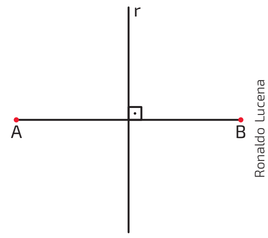
Ilustrações: Keithy Mostachi/Sergio L. Filho

Mediatrizes e circuncentro de um triângulo

Dizemos que certa reta é **mediatriz** de um segmento de reta se ela for perpendicular ao segmento cruzando-o em seu ponto médio.

Vamos mostrar que qualquer ponto da mediatriz de um segmento de reta é equidistante dos extremos desse segmento.

> A distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que liga esses pontos.



Ronaldo Lucena

r é mediatriz de $\overline{AB}$.

Considere um ponto **E**, sobre a mediatriz de $\overline{AB}$. Vamos analisar dois casos.

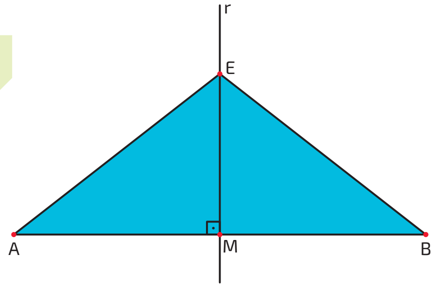
1º **E** é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Nesse caso, $\overline{AE} \equiv \overline{BE}$ e, consequentemente, **E** é equidistante dos extremos de $\overline{AB}$.

2º **E** não é ponto médio de $\overline{AB}$.

Nesse caso, trace os segmentos AE e BE. Dado **M** o ponto médio de $\overline{AB}$, note que os triângulos AME e BME são congruentes pelo caso de congruência **LAL**, pois:

- $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ — **M** é ponto médio de $\overline{AB}$.
- $\overline{EM} \equiv \overline{EM}$ — Lado comum aos triângulos.
- $A\hat{M}E \equiv B\hat{M}E$ — Ângulos retos.



Sergio L. Filho

r é mediatriz de $\overline{AB}$.

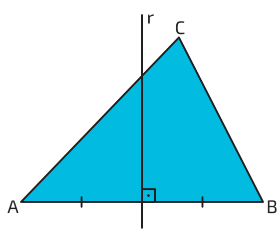
Assim, $\overline{AE} \equiv \overline{BE}$ e, consequentemente, o ponto **E** é equidistante dos extremos de $\overline{AB}$.

Portanto, qualquer que seja o ponto sobre a mediatriz de um segmento, ele será equidistante dos extremos do segmento. Nenhum outro ponto do plano possui essa propriedade.

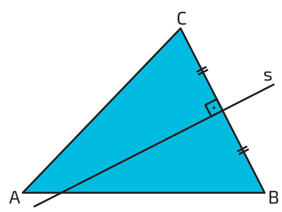
> O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de dois pontos **A** e **B** dados é a mediatriz de $\overline{AB}$.

> O **lugar geométrico** é o conjunto de todos os pontos do plano que possuem uma dada propriedade.

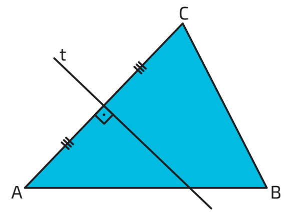
Observe as mediatrizes relativas aos lados do ΔABC.



r é a mediatriz relativa ao lado $\overline{AB}$.



s é a mediatriz relativa ao lado $\overline{BC}$.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

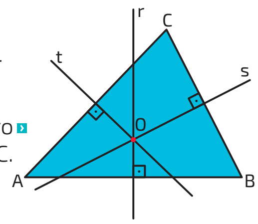
t é a mediatriz relativa ao lado $\overline{AC}$.

- Caso necessário, lembre os alunos de que dois segmentos de reta são perpendiculares quando a medida do ângulo formado entre eles for igual a 90°.

Material digital

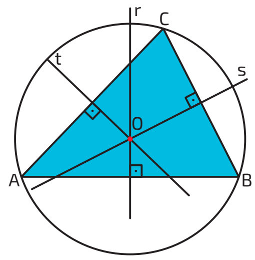
- O material digital dessa coleção apresenta o projeto **Os triângulos presentes nas construções**, que possibilita um trabalho com os componentes curriculares **Arte** e **Língua Portuguesa**, além de alguns temas contemporâneos destacados na BNCC, sobretudo, **Educação ambiental**. Esse projeto tem os objetivos de explorar os conceitos de mediatriz e bissetriz no triângulo e de observar a rigidez dessa figura geométrica.

As mediatrizes relativas a cada um dos lados do triângulo sempre se encontram em um único ponto. Esse ponto notável é chamado **circuncentro** do triângulo.



O: circuncentro do ΔABC.

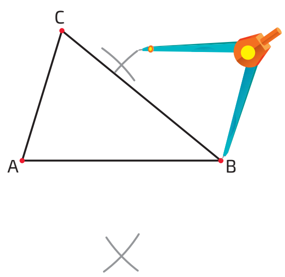
O circuncentro está a uma mesma medida de distância dos três vértices do triângulo. Se traçarmos uma circunferência cujo centro é o circuncentro do triângulo e a medida do raio é igual à medida da distância do circuncentro a um dos vértices, essa circunferência conterá os três vértices do triângulo, ou seja, obteremos uma circunferência circunscrita ao triângulo.

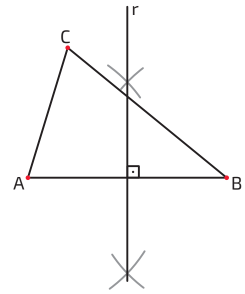


Veja como podemos traçar a mediatriz relativa a um dos lados de um triângulo utilizando régua e compasso.

- Com a ponta-seca do compasso em **A** e abertura maior do que metade da medida do comprimento de $\overline{AB}$, traçamos dois arcos, como na imagem. Com essa mesma abertura e com a ponta-seca em **B**, traçamos outros dois arcos cruzando aqueles traçados anteriormente.
- Traçamos uma reta **r** passando pelos pontos de interseção dos arcos. A reta **r** é a mediatriz relativa ao lado $\overline{AB}$.

Na seção **Explorando tecnologias**, na página **287**, veja como utilizar um *software* de geometria para construir mediatrizes de um triângulo e obter seu circuncentro.





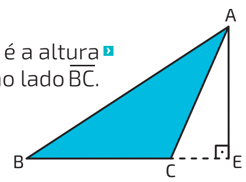
Ilustrações: Keithy Mostachi/Ronaldo Lucena

- As demais mediatrizes podem ser traçadas de maneira parecida.

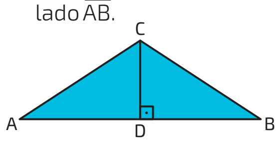
Alturas e ortocentro de um triângulo

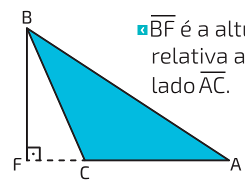
Até o momento e, também, em nosso cotidiano, geralmente utilizamos a palavra "altura" para indicar um comprimento vertical. Porém, nos triângulos, **altura** é um segmento de reta que une um vértice ao lado oposto ou a seu prolongamento, de tal maneira que esses sejam perpendiculares. Nesse caso, esse lado oposto é chamado **base** do triângulo.

$\overline{AE}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.



$\overline{CD}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.





$\overline{BF}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AC}$.

Ilustrações: Ronaldo Lucena

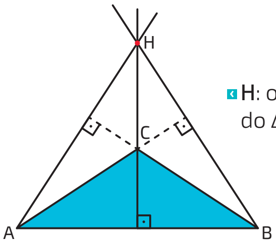
212

- A mediatriz é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam das extremidades de um determinado segmento. Podemos justificar que a reta **r** traçada na construção apresentada é a mediatriz do segmento AB, pois, se marcarmos os vértices **E** e **F** na interseção dos arcos construídos e os unirmos aos vértices **A** e **B**, teremos o losango AEBF, e um losango possui suas diagonais perpendiculares que se cruzam em seu ponto médio.
- Na seção **Explorando tecnologias**, na página **287**, apresentamos uma maneira de construir mediatrizes em um triângulo e obter seu circuncentro utilizando o *software* GeoGebra. Veja a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para utilizarem essa ferramenta para fazer tal construção.

BNCC em foco

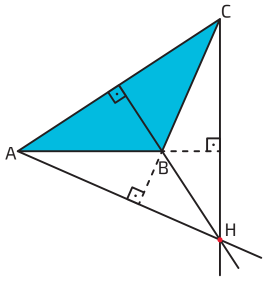
- No final do tópico **Mediatrizes e circuncentro de um triângulo** é apresentada a construção com régua e compasso da mediatriz de um segmento, como solicitado pela habilidade **EF08MA15**.
- A construção e as atividades propostas na seção **Explorando tecnologias** possibilitam que os alunos utilizem ferramentas tecnológicas para resolver problemas, de modo que validem estratégias e resultados. Assim, é possível contemplar a **Competência específica de Matemática 5.**

Ao prolongarmos as três alturas de um triângulo, elas se encontram em um único ponto. Esse ponto notável é chamado **ortocentro** do triângulo.

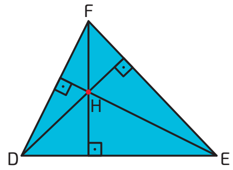


H: ortocentro do ΔABC.

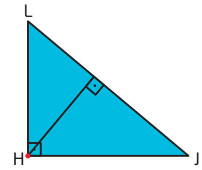
Observe o ortocentro **H** de alguns triângulos.



Quando um triângulo for obtusângulo, o ortocentro será exterior ao triângulo.



Quando um triângulo for acutângulo, o ortocentro será interior ao triângulo.



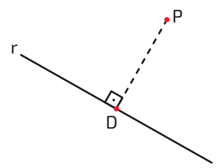
Ilustrações: Ronaldo Lucena

Quando um triângulo for retângulo, o ortocentro coincidirá com o vértice correspondente ao ângulo reto.

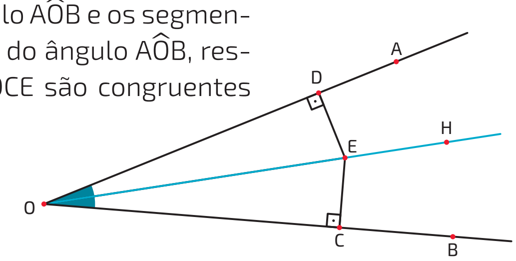
Bissetrizes e incentro de um triângulo

Já estudamos que a **bissetriz** de um ângulo é uma semirreta de origem no vértice do ângulo que o divide em dois ângulos congruentes. Agora, vamos mostrar que qualquer ponto da bissetriz de um ângulo é equidistante dos lados desse ângulo.

A distância de um ponto **P** a uma reta **r** é o comprimento do segmento de reta perpendicular à **r** que liga **P** a um ponto de **r**.



Considere o ponto **E** sobre a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ e os segmentos DE e CE, perpendiculares aos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ do ângulo $A\hat{O}B$, respectivamente. Note que os triângulos ODE e OCE são congruentes pelo caso de congruência LAA_O, pois:



Ilustrações: Sergio L. Filho

$\overline{EO} \equiv \overline{EO}$ — Lado comum aos triângulos.

$E\hat{O}D \equiv E\hat{O}C$ — $\overrightarrow{OH}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

$E\hat{D}O \equiv E\hat{C}O$ — Ângulos retos.

Assim, $\overline{EC} \equiv \overline{ED}$ e, consequentemente, o ponto **E** é equidistante dos lados do ângulo $A\hat{O}B$.

Portanto, qualquer que seja o ponto sobre a bissetriz de um ângulo, esse ponto será equidistante dos lados desse ângulo. Nenhum outro ponto do plano possui essa propriedade.

O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de duas semirretas, OA e OB, de mesma origem é a bissetriz de $A\hat{O}B$.

- No trabalho com tópico **Alturas e ortocentro de um triângulo**, diga aos alunos que, em alguns casos, é necessário prolongar o lado do triângulo para que a altura possa ser traçada. Se julgar necessário, apresente o modo de traçar uma altura do triângulo com régua e compasso. As imagens referentes a cada passo se encontram no rodapé dessa página.

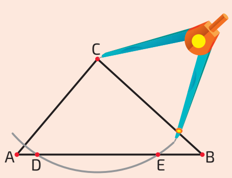
1º) Com a ponta-seca do compasso em **C**, traçamos um arco que cruze $\overline{AB}$ em dois pontos e nomeamos de **D** e **E**.

2º) Com a ponta-seca do compasso em **D** e a abertura maior que metade da medida do comprimento de $\overline{DE}$, traçamos um arco. Com essa mesma abertura e ponta-seca em **E**, traçamos outro arco que cruze aquele feito anteriormente.

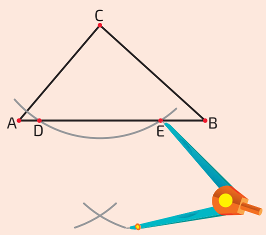
3º) Posicionando a régua de tal maneira que alinhe **C** e o ponto de interseção dos arcos, traçamos $\overline{CG}$, que é a altura do triângulo relativa ao lado $\overline{AB}$. As demais alturas podem ser traçadas de maneira parecida.

Ilustrações: Keithy Mostachi/ Sergio L. Filho

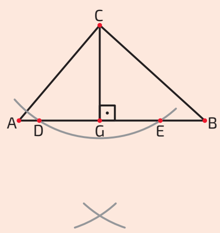
1º)



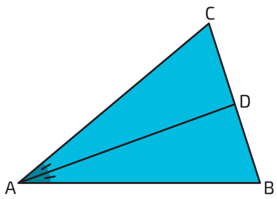
2º)



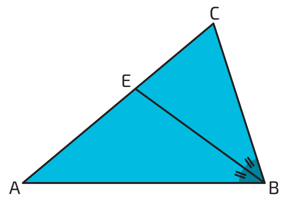
3º)



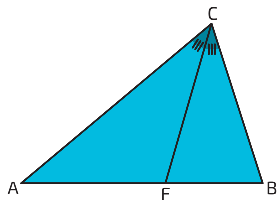
Em um triângulo, a **bissetriz** é um segmento de reta que une um vértice ao seu lado oposto, de maneira que esse segmento divida o ângulo correspondente ao vértice em dois ângulos congruentes.



$\overline{AD}$ é a bissetriz relativa a $\hat{A}$.

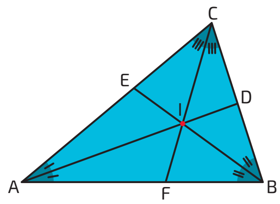


$\overline{BE}$ é a bissetriz relativa a $\hat{B}$.



$\overline{CF}$ é a bissetriz relativa a $\hat{C}$.

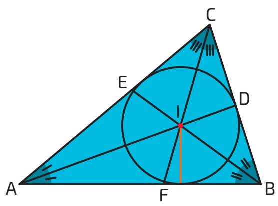
As três bissetrizes de um triângulo sempre se encontram em um único ponto. Esse ponto notável é chamado **incentro** do triângulo.



I: incentro do ΔABC.

O incentro está a uma mesma medida de distância dos lados do triângulo. Assim, ao traçarmos uma circunferência com centro no incentro e medida do raio igual à medida da distância do incentro a um dos lados do triângulo, obteremos uma circunferência inscrita no triângulo.

Na seção **Explorando tecnologias**, na página **288**, veja como utilizar um *software* de geometria para construir retas que contêm as bissetrizes de um triângulo e obter seu incentro.



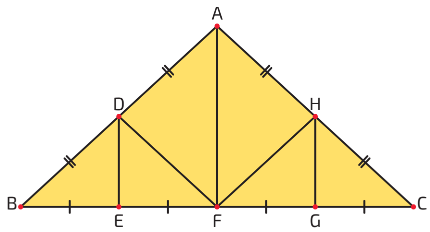
Ilustrações: Ronaldo Lucena

A linha laranja representa o raio da circunferência.

Atividades

Anote no caderno

17. O esquema representa a estrutura de sustentação de um telhado, em que as vigas de madeira estão representadas por segmentos de reta.



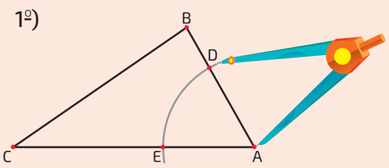
Sergio L. Filho

Entre os segmentos de reta que compõem a imagem, determine qual representa a mediana do:

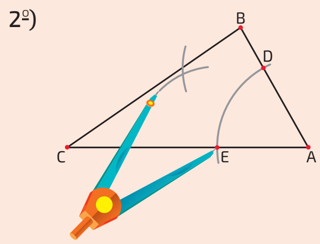
a) ΔABC. $\overline{AF}$ **b)** ΔABF. $\overline{DF}$ **c)** ΔAFC. $\overline{HF}$ **d)** ΔDBF. $\overline{DE}$ **e)** ΔHFC. $\overline{GH}$

- Antes de apresentar o incentro do triângulo, mostre aos alunos como traçar uma bissetriz com régua e compasso, conforme o passo a passo abaixo. As imagens referentes a cada passo se encontram no rodapé dessa página.
1º) Com a ponta-seca do compasso em **A**, traçamos um arco que cruze $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, determinando os pontos **D** e **E**.
2º) Com a ponta-seca do compasso em **D**, traçamos um arco. Com a mesma abertura e ponta-seca em **E**, traçamos outro arco que cruze aquele feito anteriormente.
3º) Traçamos um segmento de reta que ligue **A** ao lado $\overline{BC}$ e que passe pelo ponto de interseção dos arcos. Esse segmento de reta é a bissetriz do triângulo relativa ao ângulo $\hat{A}$.
As demais bissetrizes podem ser traçadas de maneira parecida.
- A bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados de um ângulo; assim, ao considerarmos um triângulo, temos que esses pontos estão a uma mesma distância de cada lado, pois são lados do ângulo. Portanto, o incentro está equidistante dos lados do triângulo.
- Veja a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática e trabalhar com a proposta da seção **Explorando tecnologias**, na página **288**, a qual apresenta a construção de retas que contêm as bissetrizes de um triângulo para obter seu incentro utilizando o *software* GeoGebra.

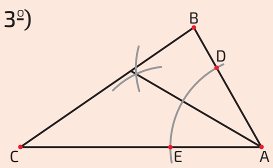
1º)



2º)



3º)



Ilustrações: Keithy Mostachi/ Sergio L. Filho

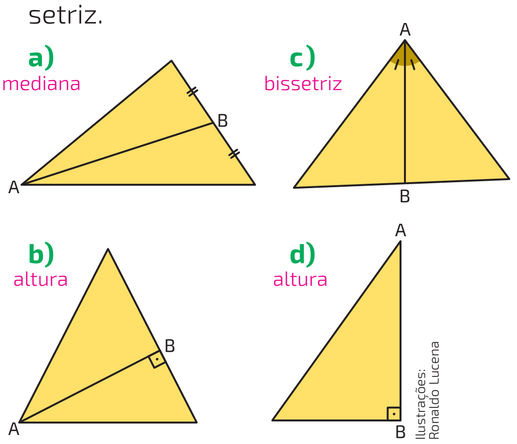
18. Para cada triângulo, verifique se $\overline{AB}$ é uma mediana, uma altura ou uma bissetriz.

a) mediana

b) altura

c) bissetriz

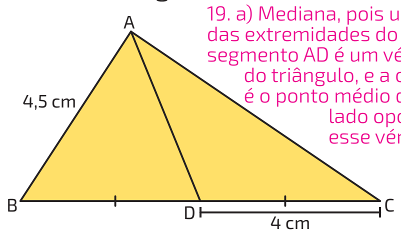
d) altura



Ilustrações: Ronaldo Lucena

19. Observe o triângulo ABC.

19. a) Mediana, pois uma das extremidades do segmento AD é um vértice do triângulo, e a outra é o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

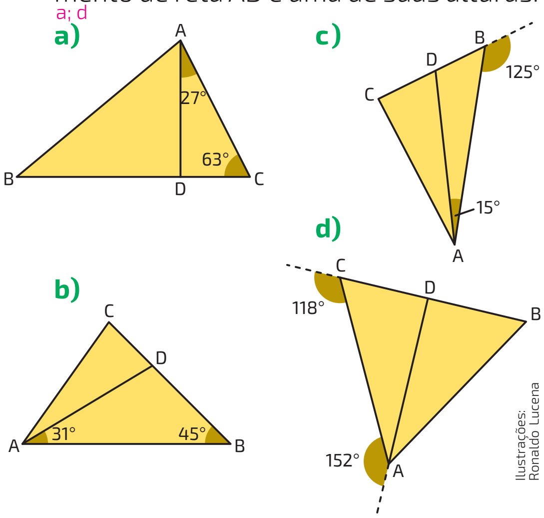


Ronaldo Lucena

a) O segmento de reta AD é uma mediana, uma altura ou uma bissetriz? Por quê?

b) Sabendo que a medida do perímetro do ΔABC é 19,2 cm, qual é a medida do comprimento de $\overline{AC}$? 6,7 cm

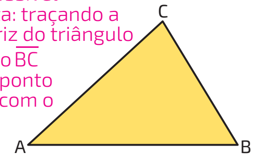
20. Verifique em quais triângulos o segmento de reta AD é uma de suas alturas. a; d



Ilustrações: Ronaldo Lucena

21. Observe o ΔABC.

21. a) Possível resposta: traçando a mediatriz do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$ e marcando o ponto de interseção com o lado $\overline{AB}$.



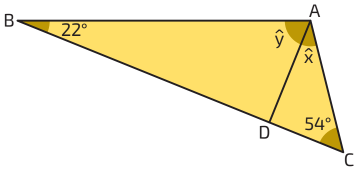
Ronaldo Lucena

a) Como você faria para determinar um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ que seja equidistante dos vértices **B** e **C** do triângulo, utilizando régua e compasso?

b) Em seu caderno, desenhe um triângulo ABC e marque sobre o lado $\overline{AB}$ ou sobre o lado $\overline{AC}$ um ponto **E** equidistante dos vértices **B** e **C** do triângulo utilizando régua e compasso.

Resposta pessoal.

22. Calcule a medida dos ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$, sabendo que $\overline{AD}$ é a altura do ΔABC em relação a $\overline{BC}$. $med(\hat{x}) = 36°$ e $med(\hat{y}) = 68°$



Ronaldo Lucena

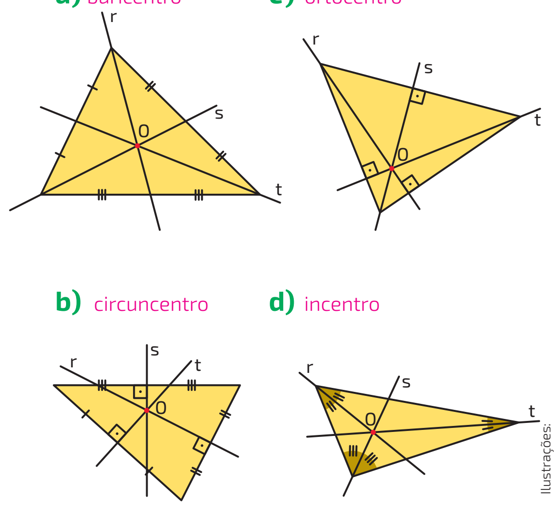
23. Em cada triângulo, classifique o ponto **O** em baricentro, ortocentro, circuncentro ou incentro.

a) baricentro

b) circuncentro

c) ortocentro

d) incentro



Ilustrações: Ronaldo Lucena

BNCC em foco

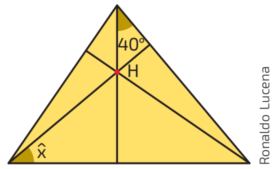
- A seção de atividades que inicia na página **214** e termina na página **217** apresenta alguns problemas que exploram a interpretação de desafios, contemplando o que postula a **Competência geral 2**, pois estimula os alunos a exercitar a curiosidade intelectual para solucionar problemas por meio de abordagens atrativas. Dessa forma, desenvolve-se o pensamento científico, criativo e crítico.
- Na atividade **21**, os alunos devem utilizar o conceito de mediatriz como lugar geométrico para resolver o problema proposto no item **a**, e realizar a construção para solucionar o item **b**. Desse modo, contempla-se as habilidades **EF08MA15** e **EF08MA17** da BNCC.

- Na atividade **26**, caso não haja régua e compasso para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade proposta ou, então, verifique a possibilidade de levar alguns desses instrumentos para a sala de aula.
  Caso necessário, oriente-os na construção do triângulo equilátero, que pode ser feita da seguinte maneira:
  1º) Trace um segmento AB de 4 cm. Em seguida, com a ponta-seca do compasso em **A** e abertura igual a 4 cm, trace um arco.
  2º) Com a ponta-seca do compasso em **B** e a mesma abertura do compasso, trace outro arco que cruze o que foi traçado anteriormente.
  3º) Marque o ponto **C** na interseção dos arcos e trace os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

BNCC em foco

- A atividade **26** propõe a construção de um triângulo, assim como os pontos notáveis baricentro, circuncentro, ortocentro e incentro. Com isso, os alunos serão levados a construir mediana, mediatriz, altura e bissetriz, contemplando a habilidade **EF08MA15** da BNCC.
- Na atividade **28** os alunos devem utilizar o conceito de mediatriz como lugar geométrico para resolver o proposto, contemplando as habilidades **EF08MA15** e **EF08MA17** da BNCC.

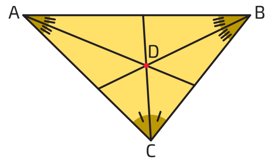
24. No triângulo, **H** é o ortocentro. Qual é a medida do ângulo $\hat{x}$? med($\hat{x}$) = 40°



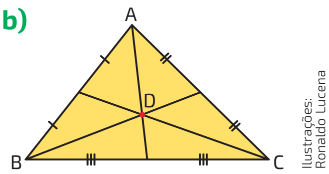
25. Uma cobertura triangular será instalada próximo de um quiosque na praia. Para isso, serão colocados quatro pontos de apoio nessa cobertura, um em cada vértice e outro em seu ponto de equilíbrio.

Em qual dos esquemas os pontos **A**, **B**, **C** e **D** correspondem aos pontos de apoio da cobertura? Justifique. b; O ponto **D** corresponde ao baricentro do ΔABC.

a)



b)

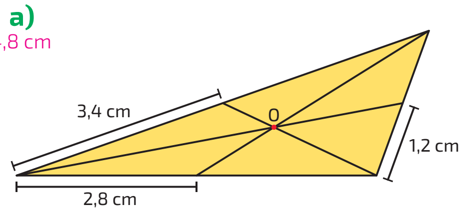


26. Construa um triângulo equilátero e nele determine o baricentro, o circuncentro, o ortocentro e o incentro.

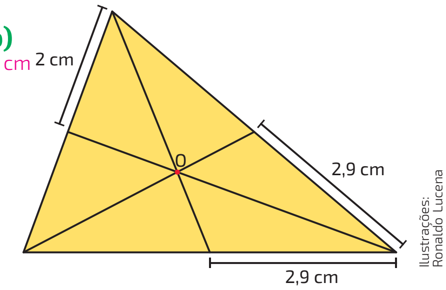
O que você pôde observar em relação aos pontos notáveis determinados?
Resposta pessoal: Espera-se que os alunos respondam que os pontos notáveis são coincidentes.

27. Determine a medida do perímetro de cada triângulo, sabendo que **O** é o baricentro.

a) 14,8 cm



b) 15,6 cm



28. Uma emissora de televisão pretende construir três torres de transmissão de sinal digital, que enviem o sinal às antenas já existentes nas cidades **A** e **B**, representadas no esquema a seguir.

28. a) Possível resposta: as torres estarão localizadas na mediatriz do segmento AB, de maneira que uma estará no ponto médio de $\overline{AB}$ e as outras duas, a 5 km dela.

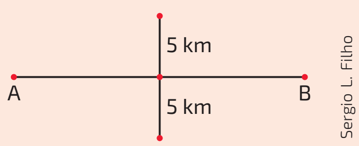
As torres devem estar situadas em locais equidistante das duas cidades, e a uma medida de distância de 5 km uma da outra em linha reta.

a) Qual será a possível localização das torres em relação às cidades?

b) Em seu caderno, represente o esquema das cidades e marque possíveis localizações das torres. Resposta nas orientações ao professor.

Resposta

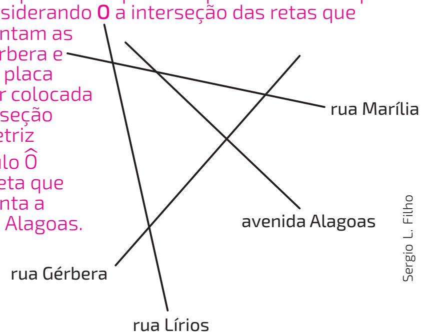
28. b) Possível resposta:



29. Na avenida Alagoas será colocado um *outdoor* para divulgar certa campanha de vacinação. Observe, a seguir, as retas que representam a avenida Alagoas e algumas ruas próximas a ela.

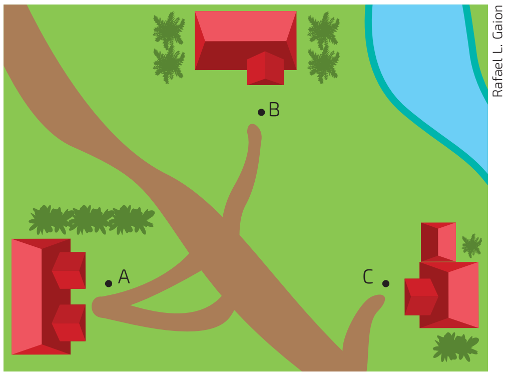
Sabendo que esse *outdoor* será instalado de maneira que ele fique a uma mesma medida de distância das ruas Lírios e Gérbera, como você faria para colocá-lo obedecendo a essa condição?

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que considerando **O** a interseção das retas que representam as ruas Gérbera e Lírios, a placa deve ser colocada na interseção da bissetriz do ângulo $\hat{O}$ com a reta que representa a avenida Alagoas.



30. Em um sítio moram três famílias, que ocupam as casas indicadas no esquema por **A**, **B** e **C**. Pretende-se construir um poço artesiano que fique à mesma medida de distância de cada uma das casas.

Em que local o poço artesiano deve ser construído? Junte-se a um colega e conversem acerca dos procedimentos utilizados para resolver essa questão.



30. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que o poço artesiano deve ser construído no circuncentro do triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C.

Explorando o que estudei

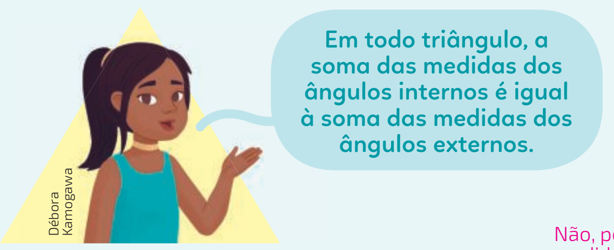
Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? triângulos, ângulos nos triângulos, congruência de figuras e de triângulos e pontos notáveis de um triângulo

2. Apresente dois exemplos de triângulos que sejam:

- isósceles e acutângulos ao mesmo tempo. Resposta pessoal.
- isósceles e obtusângulos ao mesmo tempo. Resposta pessoal.

3. Leia o que Renata está dizendo.



A afirmação feita por Renata está correta? Justifique. Não, pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e a dos externos, 360°.

4. Quais procedimentos podemos utilizar para verificar se dois polígonos quaisquer são congruentes? E para verificar se dois triângulos são congruentes? Verificando se seus lados correspondentes são congruentes e se seus ângulos internos correspondentes são congruentes. Verificando os casos de congruência de triângulos.

5. De que maneira são obtidos os pontos notáveis de um triângulo? baricentro: ponto de encontro das medianas do triângulo; circuncentro: ponto de encontro das mediatrizes do triângulo; ortocentro: ponto de encontro das alturas do triângulo; incentro: ponto de encontro das bissetrizes do triângulo

BNCC em foco

- Na atividade **29**, os alunos devem utilizar o conceito de bissetriz como lugar geométrico para resolver o problema proposto. Desse modo, contempla-se, as habilidades **EF08MA15** e **EF08MA17** da BNCC.
- Tendo em vista que a atividade **30** trata da construção de um poço artesiano, faça uma relação com o tema contemporâneo **Educação ambiental** e converse com os alunos sobre as vantagens de captar água por esse veículo, que retira o líquido com mais pureza e maior quantidade de sais minerais. Diga a eles que são necessários estudos prévios, feitos por profissionais capacitados, antes de concretizar a construção de um poço artesiano.

Material digital

- Antes de prosseguir com os estudos e, se julgar oportuno, avalie a aprendizagem dos alunos com relação a algumas habilidades trabalhadas no decorrer desse bimestre. O material digital apresenta uma proposta de avaliação para o 3º bimestre que pode ser utilizada nesse momento como ferramenta auxiliar do processo de ensino e aprendizagem.

Avaliação

- Aproveite as perguntas propostas na seção **Explorando o que estudei** para avaliar o conhecimento dos alunos com relação aos conteúdos abordados no decorrer do capítulo. Para isso, peça que eles resolvam as questões individualmente e, após isso, promova uma discussão para que todos exponham suas interpretações e opiniões acerca do tema.
- Na questão **2**, peça para os alunos construírem os triângulos sugeridos e depois compararem com os de um colega.
- Explique aos alunos, na questão **3**, que a soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono é 360°. Pergunte a eles qual é o polígono em que a soma das medidas dos ângulos internos é igual à dos ângulos externos.

Nesse capítulo, os alunos serão levados a identificar os elementos de um quadrilátero e classificá-los em paralelogramo ou trapézio, bem como a identificar as propriedades dos paralelogramos e classificá-los em retângulo, losango ou quadrado, a construir paralelogramos utilizando régua, compasso e transferidor e a identificar trapézios e classificá-los em retângulo, escaleno ou isósceles.

Prosseguindo com os estudos, serão abordadas as formas circulares presentes em situações do dia a dia e em objetos, levando os alunos a reconhecerem seus elementos. Do mesmo modo, serão capacitados a construir circunferências e círculos usando o compasso, diferenciá-los e compreender as posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e entre circunferências.

- As páginas de abertura colocam o aluno em contato com a possibilidade de observar imagens tridimensionais com a ajuda da tecnologia de realidade aumentada. A utilização dos marcadores que possibilitam essa visualização permite ao aluno reconhecer o uso de quadriláteros de maneira contextualizada. Isso torna o aprendizado mais estimulante e, consequentemente, mais interessante e significativo. Uma sugestão de condução do trabalho é realizar uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. As questões propostas podem ser respondidas individualmente ou em grupos de dois ou três integrantes. Ao final, é importante que as respostas sejam discutidas pela turma. Para complementar o estudo do tema, sugira a visualização de imagens tridimensionais na prática. Para isso, providencie um marcador, ou peça para os alunos providenciarem, e faça a atividade com eles.

Capítulo 10

Quadriláteros e formas circulares

Realidade aumentada na tela de um *smartphone*.

Para tornar seus produtos mais interativos e interessantes, algumas empresas têm utilizado uma ferramenta tecnológica que permite a integração em tempo real do mundo material com elementos e conteúdos virtuais: a realidade aumentada (RA).

Os marcadores ficam disponíveis como um código discreto em um canto do produto, em geral no formato quadrado de fundo preto e com símbolos brancos em seu interior. O usuário posiciona o código diante de uma câmera, que pode ser do *smartphone*, por exemplo, para que ela detecte os vértices do quadrado e transmita o código para um aplicativo que fará a interpretação dos símbolos para transformá-lo no objeto virtual. Na tela, surge uma imagem tridimensional que dá a impressão de estar na mão do observador para ser manipulada por ele.

218

Código em um marcador.

Imagens: Freer/Shutterstock.com e Nerthuz/Shutterstock.com

Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

A Como funciona a realidade aumentada?

B Em geral, qual é a forma do marcador que compõe o código detectado pela câmera, na realidade aumentada? Nesse caso, quantos vértices são detectados?

C Você já utilizou realidade aumentada? Em caso afirmativo, comente sua experiência com os colegas e com o professor.

Pensando nisso...

A O usuário posiciona o código diante de uma câmera, para que ela detecte os vértices do quadrado e transmita o código para um aplicativo que fará a interpretação dos símbolos para transformá-lo no objeto virtual.

B quadrado; 4 vértices

C Resposta pessoal.

- Após a discussão das questões, verifique a possibilidade de apresentar aos alunos algum aplicativo de realidade aumentada, dentre os vários gratuitos existentes, para que possam vivenciar tal experiência.

Material digital

- No material digital, é apresentado um **Plano de desenvolvimento** para o 4º bimestre capaz de auxiliar nos planejamentos e desenvolvimentos das aulas, em que são descritos em um quadro os objetivos específicos, os objetos de conhecimento e as habilidades específicas **EF08MA14**, **EF08MA15**, **EF08MA16**, **EF08MA19**, **EF08MA20** e **EF08MA21**, previstas para os capítulos **10**, **11** e **12** sugeridos para esse período.
Além disso, são elencadas as principais práticas didático-pedagógicas e atividades recorrentes previstas para o conteúdo abordado nesse bimestre.

Objetivos do capítulo

- Identificar os elementos de um quadrilátero.
- Classificar quadriláteros em paralelogramo ou trapézio.
- Verificar as propriedades dos paralelogramos.
- Classificar paralelogramos em retângulo, losango ou quadrado.
- Construir paralelogramos utilizando régua, compasso e transferidor.
- Identificar os elementos de um trapézio.
- Classificar os trapézios em trapézio retângulo, trapézio escaleno ou trapézio isósceles.
- Observar as propriedades de um trapézio isósceles.
- Identificar formas circulares presentes em situações do dia a dia e em objetos.
- Identificar os elementos de uma circunferência.
- Compreender a diferença entre circunferência e círculo.
- Construir circunferências e círculos utilizando o compasso.
- Observar a posição relativa entre ponto e circunferência, reta e circunferência e entre duas circunferências.

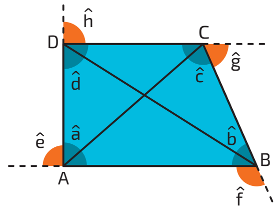
Os quadriláteros

Nas páginas anteriores, vimos que, de maneira geral, os marcadores de realidade aumentada têm formato de um quadrado, que é um caso particular de quadrilátero.

Os quadriláteros são polígonos que possuem 4 vértices, 4 lados, 4 ângulos internos, 4 ângulos externos e 2 diagonais.

No quadrilátero ABCD a seguir, podemos destacar os seguintes elementos:

- vértices: A, B, C e D.
- lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$.
- ângulos internos: $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$.
- ângulos externos: $\hat{e}$, $\hat{f}$, $\hat{g}$ e $\hat{h}$.
- diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

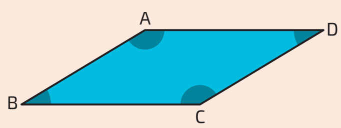


No quadrilátero, a soma das medidas dos ângulos internos ou dos externos é 360°.

Podemos classificar alguns quadriláteros em:

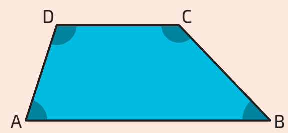
- Paralelogramo

Quadrilátero que possui dois pares de lados opostos paralelos. Neste caso, $\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} // \overline{BC}$.



- Trapézio

Quadrilátero que possui apenas um par de lados opostos paralelos. Neste caso, $\overline{AB} // \overline{CD}$.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Há quadriláteros que não são paralelogramos nem trapézios.

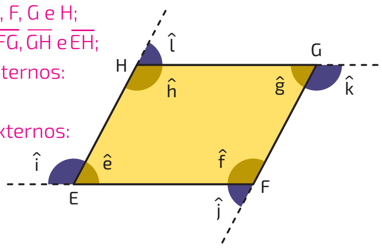
O losango é um quadrilátero? Ele pode ser classificado como um paralelogramo ou trapézio? sim; paralelogramo

Atividades

Anote no caderno

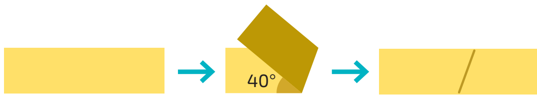
1. Nomeie os vértices, os lados, os ângulos internos e externos e as diagonais do quadrilátero.

vértices: E, F, G e H;
lados: $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{EH}$;
ângulos internos: $\hat{e}$, $\hat{f}$, $\hat{g}$ e $\hat{h}$;
ângulos externos: $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ e $\hat{l}$;
diagonais: $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$



Sergio L. Filho

2. Uma tira retangular de papel foi dobrada como mostra a figura.



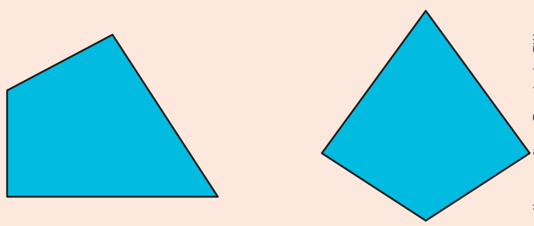
Sergio L. Filho

a) A marca do vinco da dobra determina na tira dois paralelogramos ou trapézios? trapézios

b) Determine a medida de cada ângulo interno das figuras obtidas.
70°, 90°, 90° e 110°

220

- Após trabalhar os conteúdos propostos nessa página, explique aos alunos que há quadriláteros que não podem ser classificados em paralelogramo ou trapézio. Uma sugestão para assimilarem esse assunto é solicitar que desenhem quadriláteros desse tipo.
Veja ao lado alguns exemplos.



Ilustrações: Sergio L. Filho

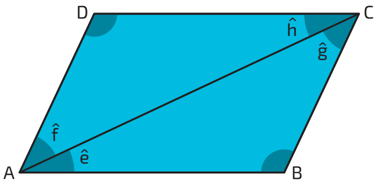
Paralelogramos

Estudamos que o paralelogramo possui dois pares de lados paralelos. Agora, verificaremos três propriedades dos paralelogramos.

- **1ª propriedade**:

> Em todo paralelogramo, dois lados opostos são congruentes.

Para verificar essa propriedade, vamos mostrar que ao traçar a diagonal $\overline{AC}$ no paralelogramo ABCD obtemos dois triângulos congruentes, ΔABC e ΔCDA.



Temos que $\hat{e} \equiv \hat{h}$ e $\hat{f} \equiv \hat{g}$, pois são pares de ângulos alternos internos, e $\overline{AC}$ é o lado comum do ΔABC e do ΔCDA.

Então, pelo caso de congruência ALA, temos $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$.

Portanto, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, isto é, os lados opostos são congruentes.

- **2ª propriedade**:

> Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos são congruentes.

Para verificar essa propriedade, consideramos o paralelogramo ABCD visto na 1ª propriedade.

Como $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$ temos $A\hat{B}C \equiv A\hat{D}C$.

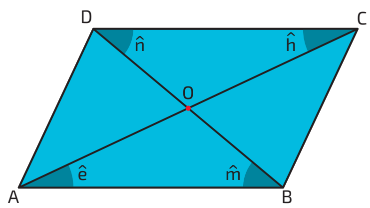
De maneira parecida, se traçarmos a diagonal $\overline{BD}$, verificaremos que $B\hat{A}D \equiv B\hat{C}D$.

Portanto, os ângulos opostos são congruentes.

- **3ª propriedade**:

> Em todo paralelogramo, as diagonais cruzam-se no ponto médio.

Para verificar essa propriedade, vamos mostrar que os triângulos ABC e COD, obtidos ao traçarmos as diagonais do paralelogramo ABCD, são congruentes.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Temos que $\hat{e} \equiv \hat{h}$ e $\hat{m} \equiv \hat{n}$, pois são pares de ângulos alternos internos, e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, pois são lados opostos do paralelogramo.

Então, pelo caso de congruência ALA, temos $\Delta AOB \equiv \Delta COD$.

Portanto, $\overline{DO} \equiv \overline{OB}$ e $\overline{AO} \equiv \overline{OC}$, isto é, o ponto **O** em que as diagonais se cruzam é o ponto médio dessas diagonais.

Dois dos ângulos de um paralelogramo EFGH medem 75° e 105°. Quais as medidas dos outros dois ângulos? 75° e 105°

BNCC em foco

- Os conteúdos abordados nessa página e nas páginas seguintes propiciam que os alunos demonstrem as propriedades dos quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos, contemplando, assim, a habilidade **EF08MA14**.

- Para os alunos acompanharem as demonstrações das propriedades dos paralelogramos, dos retângulos e dos losangos, retome os casos de congruência de triângulos, conteúdo estudado no capítulo **9** desse volume.

Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital desta coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **10**, **11** e **12** do 4º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiram o resultado esperado.

Material digital

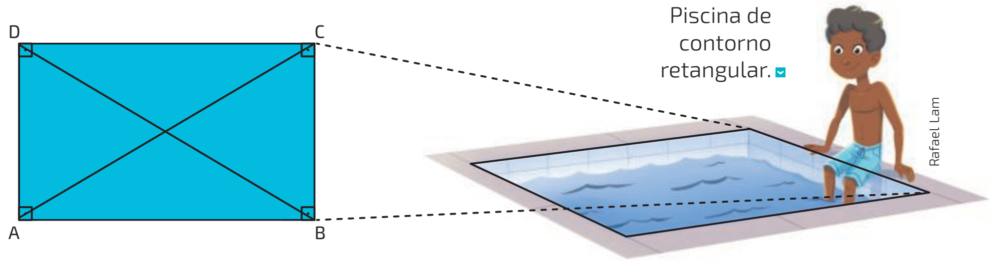
Para complementar o trabalho com o tópico **Paralelogramos**, no material digital dessa coleção disponibilizamos a **Sequência didática 10**, elaborada com o objetivo de desenvolver a habilidade **EF08MA14**. As atividades propostas nessa sequência possibilitam verificar as propriedades dos quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

- Os conteúdos trabalhados nessa página procuram levar os alunos a desenvolverem o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes por meio da verificação de propriedades dos quadriláteros, em que relações geométricas são articuladas de maneira a comprovar a validade de determinada propriedade. Sendo assim, contempla-se a **Competência específica de Matemática 2.**

Classificação dos paralelogramos

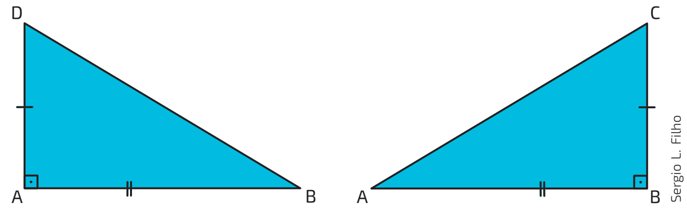
Os paralelogramos podem ser classificados de acordo com a medida do comprimento dos lados e dos ângulos internos.

Retângulo



O retângulo é um paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos. Nele, temos a propriedade de que as diagonais são congruentes.

Para verificar essa propriedade, consideramos o ΔABD e o ΔBAC, obtidos ao traçarmos as diagonais do retângulo ABCD.

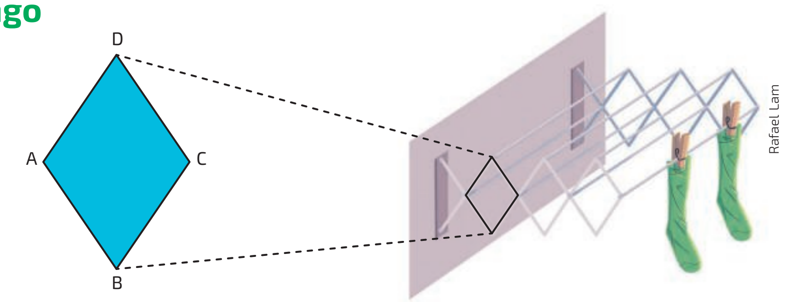


Temos que $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, pois são lados opostos do retângulo, $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$ são retos, e $\overline{AB}$ é lado comum desses triângulos.

Então, pelo caso de congruência LAL, temos $\Delta ABD \equiv \Delta BAC$.

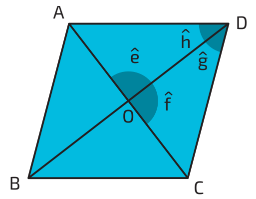
Portanto, $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, isto é, as diagonais do retângulo são congruentes.

Losango



O losango é um paralelogramo que possui os quatro lados com a mesma medida de comprimento. Nele, podemos destacar as seguintes propriedades:
- as diagonais são perpendiculares entre si.
- as diagonais estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.

Para verificar essas propriedades, consideramos o ΔAOD e o ΔCOD, obtidos ao traçarmos as diagonais do losango ABCD.

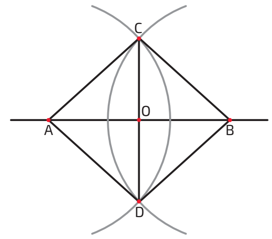


Temos que $\overline{AD} \equiv \overline{CD}$, pois são lados do losango, $\overline{AO} \equiv \overline{OC}$, pois **O** é o ponto médio da diagonal $\overline{AC}$, e $\overline{OD}$ é lado comum desses triângulos. Então, pelo caso de congruência LLL, temos $\Delta AOD \equiv \Delta COD$. Logo, $\hat{h} \equiv \hat{g}$.

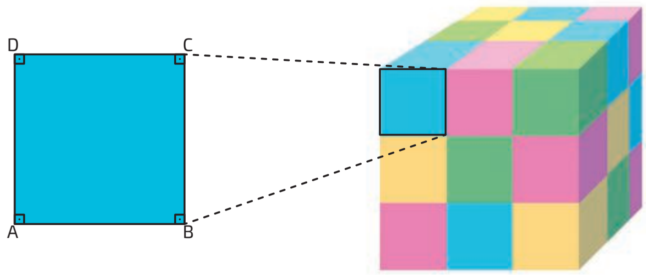
Portanto, a diagonal $\overline{BD}$ está contida na bissetriz do ângulo $A\hat{D}C$.

De maneira parecida, podemos verificar que a diagonal $\overline{AC}$ está contida na bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$.

De acordo com essa mesma figura, temos que $\hat{e}$ e $\hat{f}$ são retos, pois são congruentes e suplementares. Assim, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, ou seja, as diagonais são perpendiculares.

> Na construção realizada na página **16** do capítulo **1**, traçando $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{AD}$, obtemos o losango ACBD, pois, por construção, esses segmentos são congruentes. Logo as diagonais $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares. Portanto, $A\hat{O}C$, $B\hat{O}C$, $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}D$ são retos.
>
> 
>

Quadrado

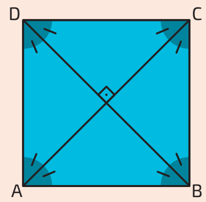


Rafael Lam

O quadrado é um paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos e os quatro lados com a mesma medida de comprimento.

Por possuir essas características, ele é um caso particular de retângulo e de losango e, por consequência, tem as seguintes propriedades:

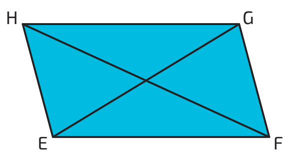
- as diagonais são congruentes.
- as diagonais são perpendiculares entre si.
- as diagonais estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.



Vale lembrar que há paralelogramos que não são retângulos, losangos ou quadrados.

Veja um exemplo.

- $EG \neq FH$.
- $\overline{EG}$ não está contida na bissetriz dos ângulos $F\hat{E}H$ ou $F\hat{G}H$.
- $\overline{FH}$ não está contida na bissetriz dos ângulos $E\hat{F}G$ ou $E\hat{H}G$.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Avaliação

- Durante o trabalho com essa página, propicie um momento de avaliação para identificar possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos no decorrer da verificação das propriedades dos paralelogramos. Avalie se eles se lembram dos casos de congruência de triângulos estudados no capítulo anterior e se recordam das propriedades dos ângulos suplementares e da bissetriz. Após essa avaliação, procure ter sempre em mente as dificuldades evidenciadas pelos alunos e, no decorrer das aulas, contribua para ameniza-las.

223

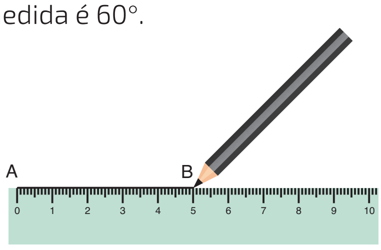
Construção de um paralelogramo

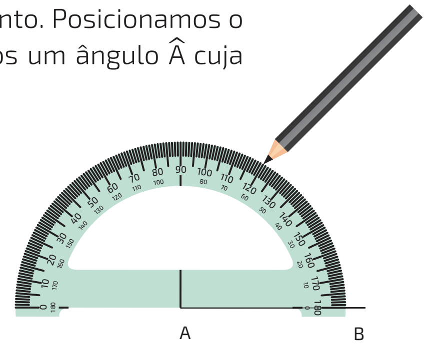
Podemos construir um paralelogramo com régua, compasso e transferidor.

Com as informações a seguir, construiremos o paralelogramo ABCD.

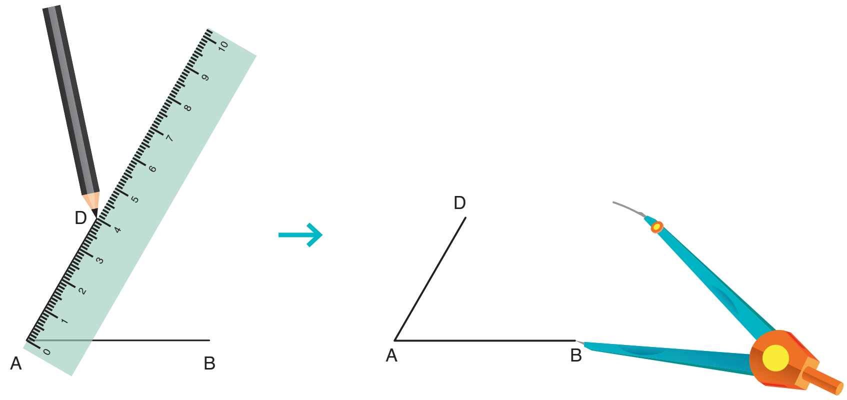
- AB = 5 cm
- AD = 4 cm
- med$(\hat{A})$ = 60°

Traçamos $\overline{AB}$ medindo 5 cm de comprimento. Posicionamos o transferidor com o centro em **A** e marcamos um ângulo $\hat{A}$ cuja medida é 60°.

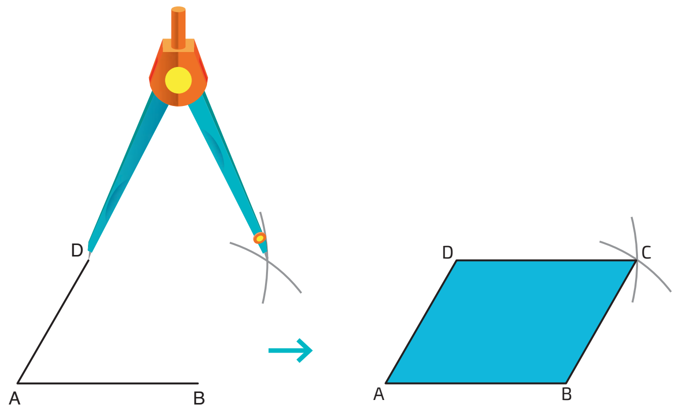




A partir do ângulo marcado, traçamos $\overline{AD}$ medindo 4 cm de comprimento. Com a ponta-seca do compasso em **B**, traçamos um arco com abertura igual a AD.



Com a ponta-seca do compasso em **D** e abertura igual a AB, traçamos um arco cruzando o arco construído anteriormente, obtendo assim o ponto **C**. Por fim, traçamos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, obtendo o paralelogramo ABCD.

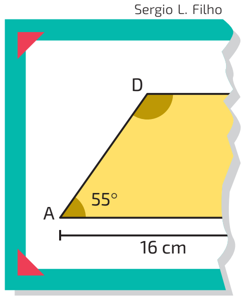


Ilustrações: Cynthia Sekiguchi/ Keithy Mostachi/Sergio L. Filho

Atividades

Anote no caderno

3. A figura ao lado representa parte do paralelogramo ABCD.



Neste paralelogramo $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AD}//\overline{BC}$.

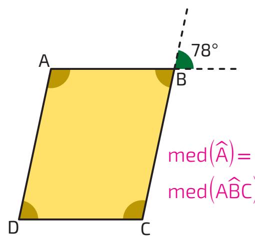
a) Sabendo que a medida do perímetro do paralelogramo é 54 cm, qual é a medida do comprimento de $\overline{AD}$? 11 cm

b) Determine a soma das medidas dos ângulos externos desse paralelogramo. 360°

c) Qual é a medida de cada ângulo interno desse paralelogramo?
$med(\hat{A}) = med(\hat{C}) = 55°$ e $med(\hat{B}) = med(\hat{D}) = 125°$

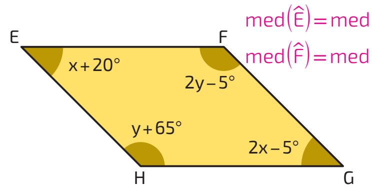
4. Determine a medida de cada ângulo interno dos paralelogramos.

a)



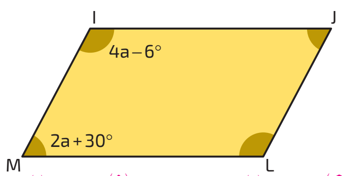
$med(\hat{A}) = med(\hat{C}) = 102°$ e
$med(A\hat{B}C) = med(\hat{D}) = 78°$

b)



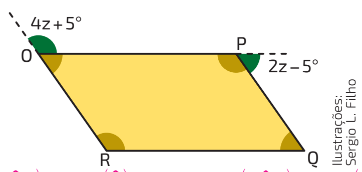
$med(\hat{E}) = med(\hat{G}) = 45°$ e
$med(\hat{F}) = med(\hat{H}) = 135°$

c)



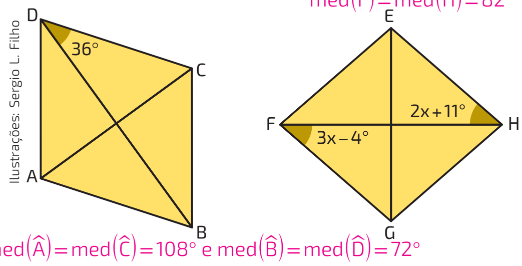
$med(\hat{I}) = med(\hat{L}) = 98°$ e $med(\hat{J}) = med(\hat{M}) = 82°$

d)



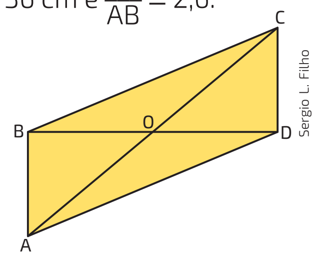
$med(P\hat{O}R) = med(\hat{Q}) = 55°$ e $med(O\hat{P}Q) = med(\hat{R}) = 125°$

5. Para cada losango, determine a medida dos ângulos internos.
$med(\hat{E}) = med(\hat{G}) = 98°$ e
$med(\hat{F}) = med(\hat{H}) = 82°$



$med(\hat{A}) = med(\hat{C}) = 108°$ e $med(\hat{B}) = med(\hat{D}) = 72°$

6. O perímetro do paralelogramo ABCD mede 36 cm e $\frac{AD}{AB} = 2{,}6$.



a) Calcule as medidas dos comprimentos dos lados deste paralelogramo.
AB = DC = 5 cm e AD = BC = 13 cm

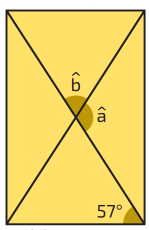
b) Determine a medida do comprimento da diagonal $\overline{BD}$, sabendo que OD = 6 cm. 12 cm

c) Sabendo que AC = 15,62 cm, calcule a medida do perímetro do triângulo:

- COD. 18,81 cm
- AOD. 26,81 cm
- ABC. 33,62 cm

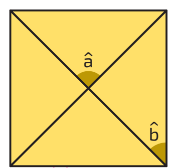
7. Determine as medidas dos ângulos em destaque em cada quadrilátero.

a) Retângulo.



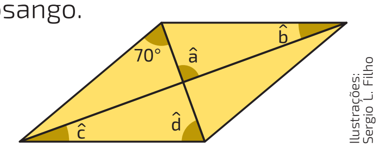
$med(\hat{a}) = 114°$ e $med(\hat{b}) = 66°$

c) Quadrado.



$med(\hat{a}) = 90°$ e
$med(\hat{b}) = 45°$

b) Losango.

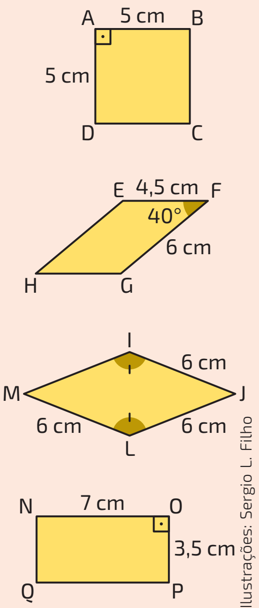


$med(\hat{a}) = 90°$, $med(\hat{b}) = med(\hat{c}) = 20°$ e $med(\hat{d}) = 70°$

- Na resolução da atividade **3**, é importante que os alunos percebam que os 16 cm indicados na imagem referem-se à medida do comprimento do lado $\overline{AB}$.
- Oriente os alunos na resolução da atividade **4**, de modo que utilizem os conceitos já estudados, como ângulos opostos pelo vértice, ângulo suplementar e resolução de equação do 1º grau, na obtenção das medidas dos ângulos internos de cada figura.

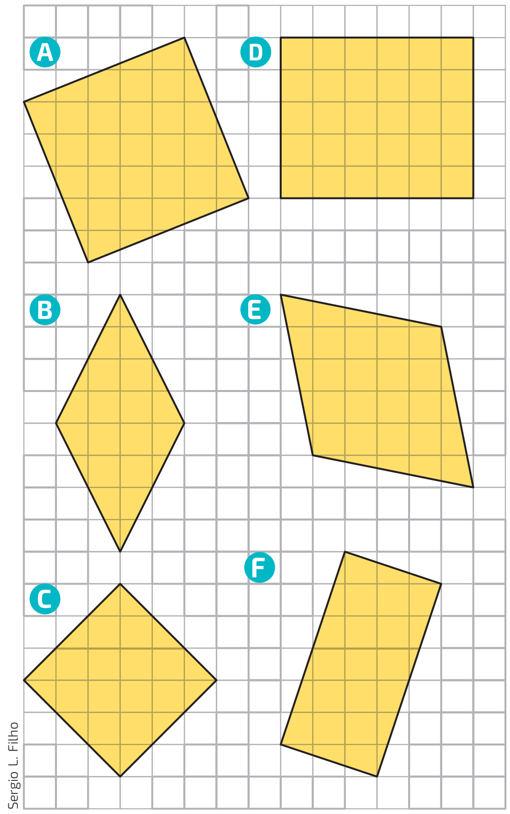
Respostas

9. retângulo: ABCD e NOPQ; quadrado: ABCD; losango: ABCD e IJLM



12. Para demonstrar essa propriedade, consideramos o ΔABD e o ΔBAC, obtidos ao traçarmos as diagonais do quadrado ABCD. Temos que $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, pois são lados do quadrado, $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$ são retos, e $\overline{AB}$ é lado comum desses triângulos. Então, pelo caso de congruência LAL, temos $\Delta ABD \equiv \Delta BAC$. Portanto, $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, isto é, as diagonais do quadrado são congruentes.

8. Classifique os paralelogramos em retângulo, quadrado ou losango.



retângulo: A, C, D e F; quadrado: A e C; losango: A, B, C e E

9. Utilizando régua, compasso e transferidor, construa os paralelogramos de acordo com as medidas indicadas. Depois, classifique-os em retângulo, quadrado ou losango. Resposta nas orientações ao professor.

ABCD
AB = 5 cm
AD = 5 cm
$med(\hat{A}) = 90°$
$\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} // \overline{BC}$

EFGH
EF = 4,5 cm
$med(\hat{F}) = 40°$
FG = 6 cm
$\overline{EF} // \overline{GH}$ e $\overline{EH} // \overline{FG}$

IJLM
IJ = 6 cm
JL = 6 cm
$med(\hat{I}) = med(\hat{L})$
$\overline{IJ} // \overline{ML}$ e $\overline{IM} // \overline{JL}$

NOPQ
$med(\hat{O}) = 90°$
NO = 7 cm
OP = 3,5 cm
$\overline{OP} // \overline{NQ}$ e $\overline{NO} // \overline{PQ}$

10. Verifique se cada afirmativa é verdadeira (V) ou falsa (F). Depois, reescreva as falsas corrigindo-as.

a) Em todo quadrilátero, dois lados opostos são congruentes.

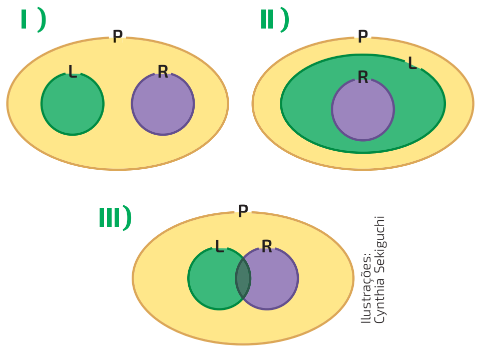
b) O retângulo, o losango e o quadrado são paralelogramos. V

c) As diagonais de um quadrado são perpendiculares em si. V

d) Em todo losango, as diagonais possuem comprimentos com medidas iguais e são perpendiculares entre si.

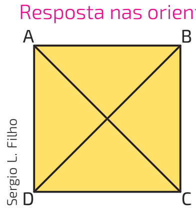
11. Podemos representar as relações entre os paralelogramos por meio de um diagrama de Venn. Considerando **P** o conjunto dos paralelogramos, **L** o conjunto dos losangos e **R** o conjunto dos retângulos, responda.

a) Qual dos diagramas representa a relação entre esses conjuntos? III



b) Neste caso, como são chamados os paralelogramos pertencentes, simultaneamente, aos conjuntos **L** e **R**? quadrados

12. Podemos afirmar que as diagonais de um quadrado são congruentes? Se sim, demonstre essa propriedade.
Resposta nas orientações ao professor.



Utilize um caso de conguência de triângulos para realizar essa demonstração.

10. a) F; Em todo paralelogramo, dois lados opostos são congruentes.
d) F; Em todo quadrado, as diagonais possuem medidas iguais e são perpendiculares entre si.

BNCC em foco

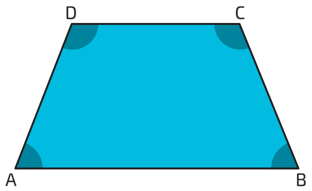
- A atividade **12** leva os alunos a demonstrarem propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos, contemplando, assim, a habilidade **EF08MA14**.

Trapézio

Como vimos anteriormente, o trapézio é um quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos, chamados **bases**.

No trapézio ABCD:

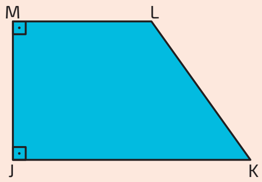
- os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, isto é, $\overline{AB} // \overline{CD}$.
- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases, sendo $\overline{AB}$ a **base maior** e $\overline{CD}$ a **base menor**.



De acordo com algumas características, um trapézio pode ser classificado em:

- Trapézio retângulo

  Trapézio que tem um dos lados opostos não paralelos perpendicular às bases.

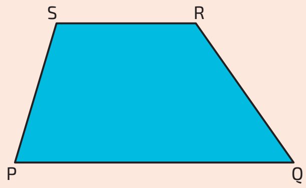


$\overline{JM} \perp \overline{JK}$ e $\overline{JM} \perp \overline{LM}$

- Trapézio escaleno

  Trapézio que tem os lados opostos não paralelos com diferentes medidas de comprimento.

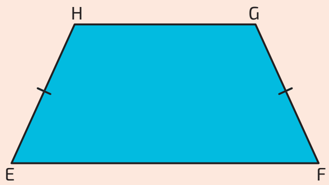
Note que o trapézio retângulo é um caso particular de trapézio escaleno.



$PS \neq QR$

- Trapézio isósceles

  Trapézio que tem os lados opostos não paralelos com a mesma medida de comprimento.



$EH = FG$

Em relação ao trapézio isósceles, podemos destacar as seguintes propriedades:

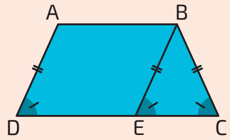
› os ângulos internos da mesma base são congruentes.

› as diagonais são congruentes.

Ilustrações: Sergio L. Filho

- No trabalho com trapézios, apresente aos alunos as demonstrações das propriedades do trapézio isósceles, presentes nessa página e na página seguinte.
- Propriedade: os ângulos internos da mesma base de um trapézio isósceles são congruentes.

Para verificarmos essa propriedade, traçamos $\overline{BE}$ paralelo a $\overline{AD}$, obtendo o paralelogramo ABED, como mostra a figura.



Sergio L. Filho

Temos que:

- $\overline{BE} \equiv \overline{AD}$, pois são lados opostos do paralelogramo ABED.
- $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, pois o trapézio ABCD é isósceles.

Assim, $\overline{BE} \equiv \overline{BC}$ e $B\hat{E}C \equiv B\hat{C}E \equiv B\hat{C}D$.

Como $\overline{AD} // \overline{BE}$, temos que $B\hat{E}C \equiv A\hat{D}C$, pois são ângulos correspondentes.

Portanto, $A\hat{D}C \equiv B\hat{C}E$.

Temos; $med(A\hat{B}C) + med(B\hat{C}D) = 180°$ e $med(B\hat{A}D) + med(A\hat{D}C) = 180°$.

Segue que:

$med(A\hat{B}C) + \cancel{med(B\hat{C}D)} = med(B\hat{A}D) + \cancel{med(A\hat{D}C)} \Rightarrow med(A\hat{B}C) = med(B\hat{A}D)$

Portanto, $A\hat{B}C \equiv B\hat{A}D$.

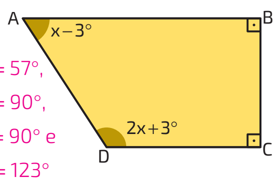
- Na atividade **13**, oriente os alunos a determinarem a medida dos ângulos internos de cada trapézio, utilizando para isso a resolução de equações do 1º grau, lembrando-os de que a soma da medida dos ângulos internos de um trapézio é igual a 360°. Caso apresentem dificuldades, peça que consultem o capítulo **6** desse volume e retome com eles os conceitos necessários para resolver esse tipo de equação.
- Complemente a atividade **14** pedindo para os alunos identificarem e nomearem a base maior, a base menor e os lados não paralelos dos trapézios.

Atividades

Anote no caderno

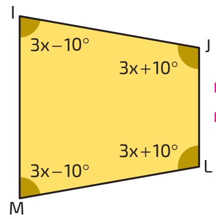
13. Calcule a medida dos ângulos internos de cada trapézio.

a)



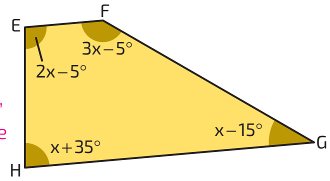
med$(\hat{A})$ = 57°,
med$(\hat{B})$ = 90°,
med$(\hat{C})$ = 90° e
med$(\hat{D})$ = 123°

c)



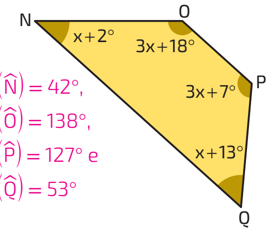
med$(\hat{I})$ = med$(\hat{M})$ = 80° e
med$(\hat{J})$ = med$(\hat{L})$ = 100°

b)



med$(\hat{E})$ = 95°,
med$(\hat{F})$ = 145°,
med$(\hat{G})$ = 35° e
med$(\hat{H})$ = 85°

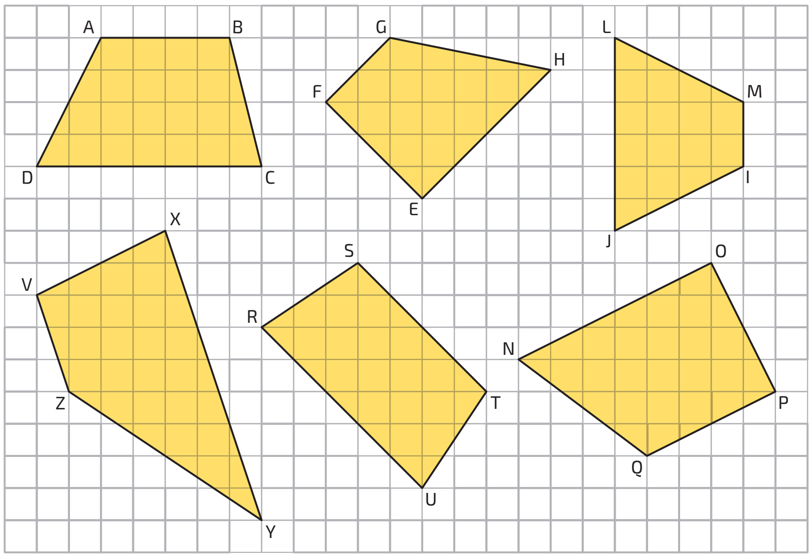
d)



med$(\hat{N})$ = 42°,
med$(\hat{O})$ = 138°,
med$(\hat{P})$ = 127° e
med$(\hat{Q})$ = 53°

Ilustrações: Sergio L. Filho

14. Observe os trapézios.



Sergio L. Filho

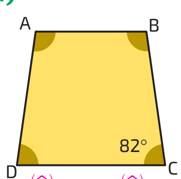
a) Classifique cada trapézio em retângulo, escaleno ou isósceles.
trapézio retângulo: EFGH e NOPQ; trapézio escaleno: ABCD, EFGH, NOPQ e VXYZ; trapézio isósceles: IJLM e RSTU

b) Em relação ao trapézio RSTU, identifique e nomeie:

- a base maior. $\overline{RU}$
- a base menor. $\overline{ST}$
- os lados não paralelos. $\overline{SR}$ e $\overline{TU}$

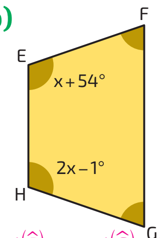
15. Determine as medidas dos ângulos internos de cada trapézio isósceles.

a)



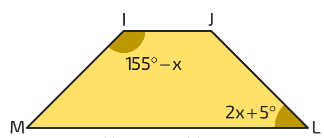
med$(\hat{A})$ = med$(\hat{B})$ = 98° e
med$(\hat{C})$ = med$(\hat{D})$ = 82°

b)



med$(\hat{F})$ = med$(\hat{G})$ = 71° e
med$(\hat{E})$ = med$(\hat{H})$ = 109°

c)

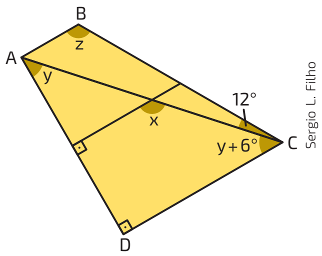


med$(\hat{I})$ = med$(\hat{J})$ = 135° e
med$(\hat{L})$ = med$(\hat{M})$ = 45°

Ilustrações: Sergio L. Filho

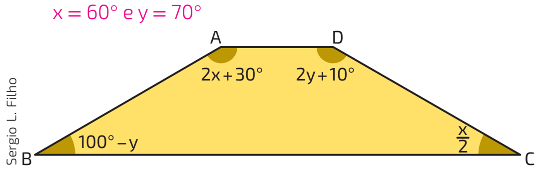
16. Em certo trapézio isósceles, cuja medida do perímetro é 29 cm, a base menor mede 5 cm de comprimento e a base maior, 12 cm. Quais as medidas dos comprimentos dos outros dois lados desse trapézio?
6 cm

17. O quadrilátero ABCD é um trapézio retângulo. Determine, em graus, as medidas **x**, **y** e **z**. $x = 132°$, $y = 42°$ e $z = 120°$



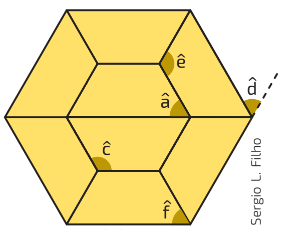
18. Os ângulos internos da base maior de um trapézio são congruentes, e o maior ângulo interno desse trapézio mede 144°. Quais as medidas dos ângulos internos desse trapézio? 144° e 36°

19. Calcule, em graus, os valores de **x** e **y**, sabendo que o trapézio ABCD é isósceles.
$x = 60°$ e $y = 70°$



Junte-se a um colega e conversem acerca dos procedimentos que vocês utilizaram para resolver esta atividade. Depois, anotem esses procedimentos. Resposta pessoal.

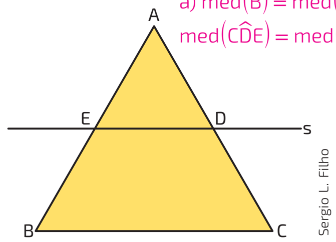
20. O hexágono regular a seguir é composto de oito trapézios congruentes. Determine a medida dos ângulos indicados nessa figura.



$med(\hat{a}) = med(\hat{d}) = med(\hat{f}) = 60°$,
$med(\hat{c}) = med(\hat{e}) = 120°$

21. A imagem é composta do triângulo equilátero ABC e da reta **s**, paralela a $\overline{BC}$, que divide o triângulo em duas partes, um trapézio e um triângulo menor.

a) $med(\hat{B}) = med(\hat{C}) = 60°$ e $med(C\hat{D}E) = med(B\hat{E}D) = 120°$

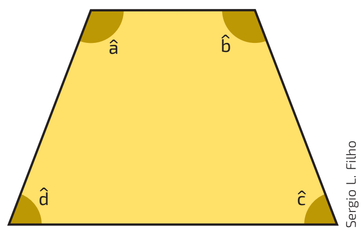


a) Determine a medida dos ângulos internos do trapézio BCDE.

b) Sabendo que a medida do perímetro do ΔABC é 36 cm e que **s** passa pelos pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, calcule a medida do comprimento de cada lado do trapézio BCDE. Em seguida, classifique o trapézio BCDE em trapézio retângulo, escaleno ou isósceles.

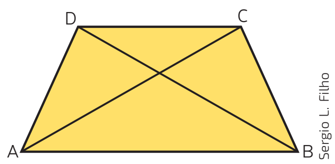
BC = 12 cm; CD = BE = DE = 6 cm; trapézio isósceles

22. Escreva os procedimentos que você utilizaria para determinar as medidas dos ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ do trapézio isósceles a seguir, conhecendo a medida do ângulo $\hat{d}$.



Possível resposta: $med(\hat{c}) = med(\hat{d})$ e $med(\hat{a}) = med(\hat{b}) = 180° - med(\hat{d})$

23. Junte-se a um colega e demonstrem que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes. Resposta nas orientações ao professor.



> Utilize um dos casos de congruência de triângulos para realizar essa demonstração.

- Na resolução da atividade **21**, caso os alunos tenham dificuldades com o item **b**, diga-lhes que o triângulo AED obtido é equilátero.

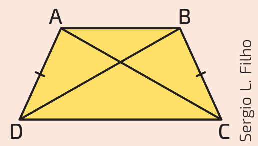
BNCC em foco

- A atividade **23** propicia que os alunos demonstrem propriedades de quadriláteros por meio da identificação de congruência de triângulos, contemplando, assim, a habilidade **EF08MA14**.

- Na resolução da atividade **23**, oriente os alunos a decomporem o trapézio em triângulos e utilizarem os casos de congruência de triângulos para demonstrar que os triângulos são congruentes, concluindo o que se pede.

Resposta

23. Para demonstrarmos essa propriedade, consideramos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, formando os triângulos ACD e BCD conforme a figura.



Temos que:

- $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, pois o trapézio ABCD é isósceles.
- $\overline{DC}$ é comum aos triângulos ACD e BDC.
- $A\hat{D}C \equiv B\hat{C}D$ (demonstrado na propriedade da página **227**).

Com isso, pelo caso de congruência LAL, temos que $\Delta ACD \equiv \Delta BCD$. Desse modo, $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

Relacionando saberes

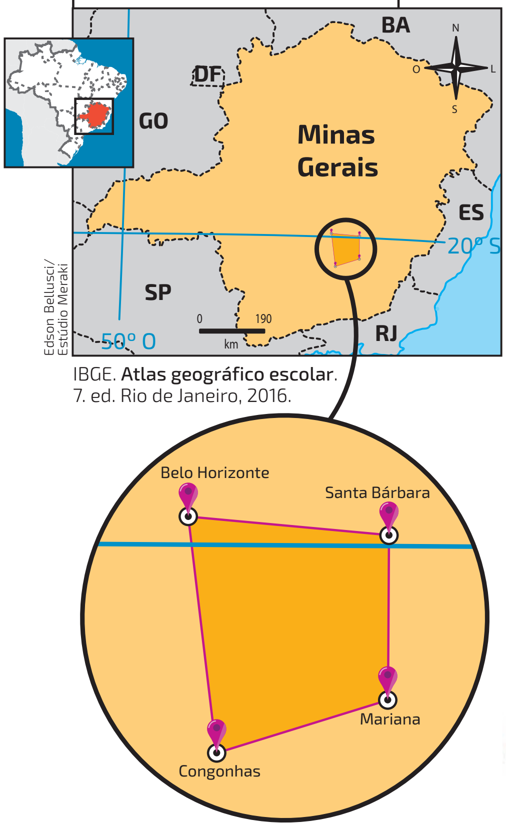
- A atividade **24** possibilita um trabalho conjunto com o componente curricular **Geografia**, pois possibilita o conhecimento das características geográficas e geológicas do quadrilátero ferrífero. Proponha aos alunos que realizem uma pesquisa, que pode ser auxiliada pelo professor responsável pelo componente, com o objetivo de obterem mais informações sobre os minérios destacados na página, como a finalidade de cada um deles na indústria. O resultado dessa pesquisa pode ser organizado em cartazes e divulgado em murais da escola. Para complementar a atividade, leve para a sala de aula um mapa do Brasil e peça para os alunos identificarem a região do quadrilátero ferrífero.
- O *site* do Serviço Geológico do Brasil traz informações que podem ajudar na pesquisa: <www.cprm.gov.br>. Acesso em: 16 out. 2018.

- Diga aos alunos que diversos municípios mineiros ganharam destaque na época do ciclo do ouro e, até hoje, contam com economia diversificada e bastante industrializada devido à exploração mineral da região.

Matemática em destaque

24. No estado de Minas Gerais, atualmente, estão localizados os mais importantes e produtivos depósitos minerais do país. A maior concentração urbana nas regiões mineradoras está delimitada pelas cidades de Belo Horizonte, Congonhas, Mariana e Santa Bárbara. Nessa região, conhecida como "Quadrilátero ferrífero", encontra-se uma importante jazida de minério de ferro.

Quadrilátero ferrífero – Minas Gerais – 2016



Edson Bellusci/Estúdio Meraki

IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 7. ed. Rio de Janeiro, 2016.

Veja a seguir alguns minérios encontrados no Quadrilátero ferrífero.

Sunshine Seeds/Shutterstock.com

Manganês: importante na fabricação do aço e de vários produtos químicos.

www.sandatlas.org/Shutterstock.com

Bauxita: matéria-prima do alumínio utilizado em utensílios domésticos.

Aleksandr Pobedimskiy/Shutterstock.com

Ferro: minério mais abundante no Quadrilátero ferrífero.

Bjoern Wylezich/Shutterstock.com

Nióbio: fundamental na construção de peças de alta tecnologia, como turbinas de aviões e aparelhos de ressonância magnética.

a) Em sua opinião, por que a principal região mineradora de Minas Gerais recebe o nome de "Quadrilátero ferrífero"?

a) Espera-se que os alunos respondam que é devido à configuração que se forma no perímetro delimitado pelos municípios de Belo Horizonte, Congonhas, Mariana e Santa Bárbara.

b) Qual minério é mais encontrado na região do "Quadrilátero ferrífero"? minério de ferro

c) O quadrilátero em destaque na imagem pode ser classificado como trapézio? Por quê? não; Espera-se que os alunos respondam que ele não possui lados opostos paralelos.

d) Com uma régua, meça o comprimento dos segmentos que unem os municípios destacados na imagem. Depois, calcule a medida da distância real aproximada entre esses municípios, sabendo que a distância entre Santa Bárbara e Mariana mede 45 km. medida da distância real aproximada: Belo Horizonte--Congonhas: 64 km; Congonhas-Mariana: 48 km; Mariana-Santa Bárbara: 45 km; Santa Bárbara--Belo Horizonte: 55 km

BNCC em foco

- Atividades como a apresentada nessa página possibilitam o desenvolvimento da **Competência geral 2**, pois se valem de um assunto curioso para estimular nos alunos a vontade de aprender e se aprofundar nos conhecimentos das diferentes áreas. Por meio de uma abordagem atrativa, eles são levados a refletir sobre o conteúdo e ainda se certificam da presença dos conceitos matemáticos nos fatos e elementos da realidade cotidiana.

Circunferência e círculo

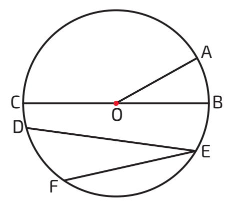
Nas imagens apresentadas ao lado, é possível identificar formas que podem ser associadas a circunferências e círculos.

Roda de bicicleta.

Relógio.

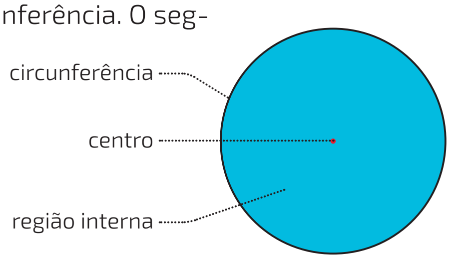
Circunferência é uma linha fechada em um plano, na qual todos os seus pontos estão a uma mesma medida de distância de um ponto fixo, chamado **centro**.

Em uma circunferência, podemos destacar alguns elementos.



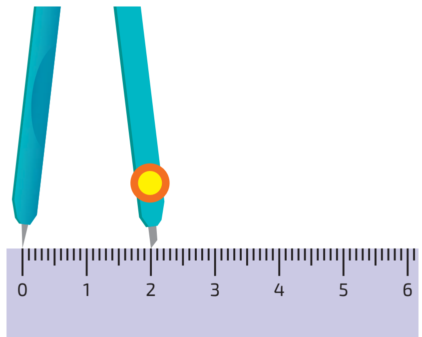
- **Raio**: segmento de reta que liga o centro **O** a um ponto qualquer da circunferência. Os segmentos OA, OB e OC, por exemplo, são raios da circunferência.
- **Corda**: segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência. Os segmentos CB, DE e EF são exemplos de cordas.
- **Diâmetro**: corda que passa pelo centro da circunferência. O segmento CB é um exemplo de diâmetro.

Círculo é a união da circunferência com todos os pontos que estão em seu interior.

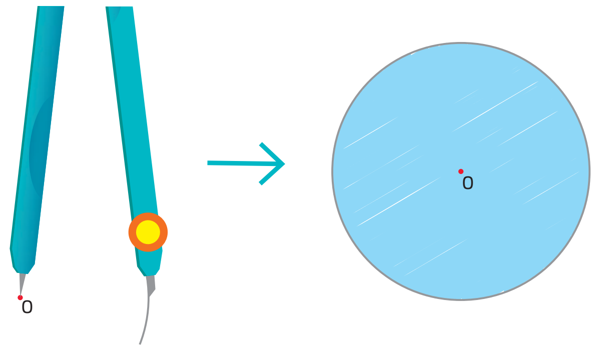


Veja como podemos construir, com régua e compasso, um círculo com raio cujo comprimento mede 2 cm.

- Abra o compasso com a medida de 2 cm.



- Marque o centro **O**, fixe a ponta-seca do compasso nele e gire-o traçando a circunferência. Depois, pinte a região interna.



Ilustrações: Cynthia Sekiguchi/ Keithy Mostachi/Sergio L. Filho

Qual é a relação existente entre a medida do comprimento do diâmetro e a medida do comprimento do raio da circunferência?

A medida do comprimento do diâmetro é o dobro da medida do comprimento do raio da circunferência.

- Explique aos alunos que muitos conceitos referentes a circunferências e círculos já eram mencionados em textos e documentos da Antiguidade. No livro III da obra **Os elementos**, do matemático Euclides de Alexandria, constam teoremas acerca de círculos, cordas, posições relativas entre retas e circunferências etc.

  Leia para os alunos o trecho abaixo, sobre a obra **Os elementos**, de Euclides.

[...] Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos *Elementos* já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

É lamentável que não se tenha descoberto nenhuma cópia dos *Elementos* de Euclides que date verdadeiramente da época de seu autor. As edições modernas da obra se baseiam numa revisão preparada pelo comentador grego Têon de Alexandria que viveu quase 700 anos depois do tempo de Euclides. Essa revisão foi, até o começo do século XIX, a mais antiga edição dos *Elementos* que se conhecia. Porém, em 1808, quando Napoleão ordenou que fossem tomados de bibliotecas italianas e enviados a Paris os manuscritos de valor, F. Peyrard encontrou, na biblioteca do Vaticano, uma cópia do século X de uma edição da obra que é anterior à revisão de Têon. [...]

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 167-168.

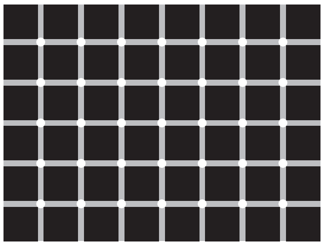
- Explique aos alunos que as imagens apresentadas na atividade **25** podem ser observadas de maneira diferente do que realmente são. Esse efeito visual, chamado ilusão de ótica, é causado por figuras ou objetos que, em algumas situações, confundem momentaneamente o cérebro ao serem visualizados.
- Explique aos alunos que uma circunferência possui infinitos raios, diâmetros e cordas.

Atividades

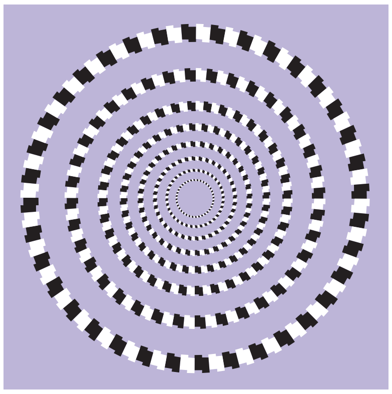
Anote no caderno

25. Veja algumas imagens que envolvem formas circulares e responda às questões.

a) Quantos círculos brancos é possível observar? E quantos círculos pretos? 35 círculos brancos; nenhum círculo preto

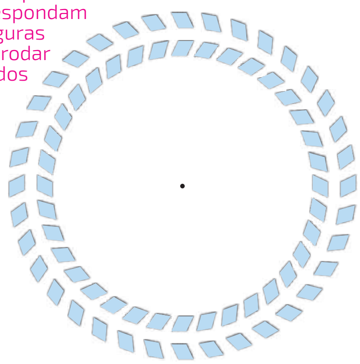


b) A figura representa uma espiral ou vários círculos com um centro em comum? Vários círculos com um centro comum.



c) Fixe os olhos no ponto central e depois aproxime e afaste os olhos da figura. O que é possível notar de interessante?

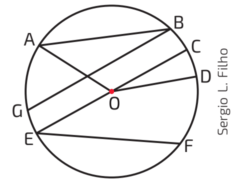
Espera-se que os alunos respondam que as figuras parecem rodar em sentidos opostos.



Ilustrações: Sergio L. Filho

26. Classifique os segmentos de reta traçados na circunferência de centro **O** em corda, raio ou diâmetro.

cordas: $\overline{AB}$, $\overline{GB}$, $\overline{EC}$ e $\overline{EF}$; raios: $\overline{AO}$, $\overline{DO}$, $\overline{CO}$ e $\overline{EO}$; diâmetro: $\overline{EC}$

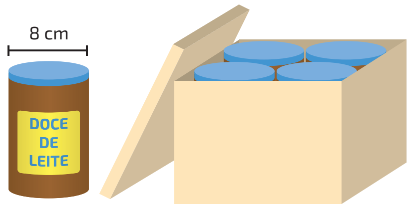


Sergio L. Filho

27. Quantos centímetros mede o comprimento do raio de uma circunferência cuja maior corda possível tem 15 cm de medida de comprimento? 7,5 cm

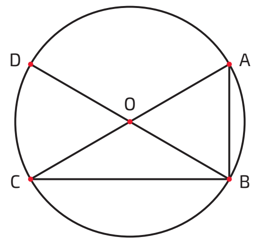
28. Os doces produzidos por uma pequena fábrica são embalados em latas e acondicionados em caixas de madeira como mostra a imagem.

Qual deverá ser a medida da área da base interna da caixa, no mínimo? 256 cm²



Rafael L. Gaion

29. Na circunferência de centro **O** estão traçadas algumas cordas.



Sergio L. Filho

a) Quais segmentos de reta são raios da circunferência? E diâmetros? $\overline{DO}$, $\overline{AO}$, $\overline{CO}$ e $\overline{BO}$; $\overline{DB}$ e $\overline{CA}$

b) Os triângulos AOB e BOC são isósceles? Por quê? Sim, pois ambos têm dois lados com medidas de comprimento iguais à do raio da circunferência.

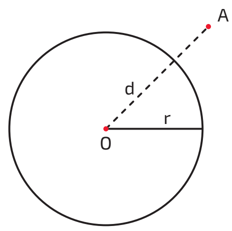
c) Podemos afirmar que $\Delta AOB \equiv \Delta BOC$? Justifique. Não, pois eles possuem apenas dois lados congruentes.

Posições relativas

Posição relativa entre ponto e circunferência

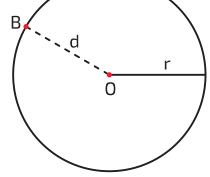
Em relação a uma circunferência, um ponto qualquer pode estar posicionado de diferentes maneiras.

- A medida da distância **d** de **A** ao centro **O** é maior do que a medida do comprimento do raio. Neste caso, **A** é **externo** à circunferência.



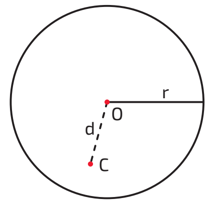
d > r

- A medida da distância **d** de **B** ao centro **O** é igual à medida do comprimento do raio. Neste caso, **B** **pertence** à circunferência.



d = r

- A medida da distância **d** de **C** ao centro **O** é menor do que a medida do comprimento do raio. Neste caso, **C** é **interno** à circunferência.

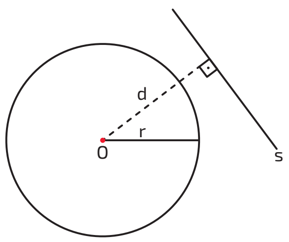


d < r

Posição relativa entre reta e circunferência

Em relação a uma circunferência, uma reta qualquer pode estar posicionada de diferentes maneiras.

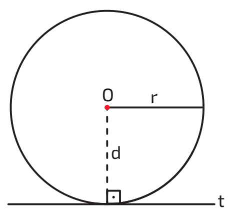
- A reta **s** não tem pontos em comum com a circunferência. Neste caso, **s** é **externa** à circunferência.



A medida da distância **d** entre a reta externa e o centro da circunferência é maior do que a medida do comprimento do raio.

d > r

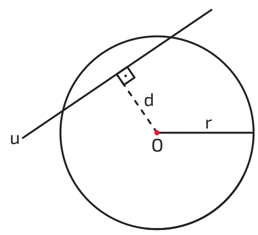
- A reta **t** tem um único ponto em comum com a circunferência. Neste caso, **t** é **tangente** à circunferência.



A medida da distância **d** entre a reta tangente e o centro da circunferência é igual à medida do comprimento do raio.

d = r

- A reta **u** tem dois pontos em comum com a circunferência. Neste caso, **u** é **secante** à circunferência.



Ilustrações: Sergio L. Filho

A medida da distância **d** entre a reta secante e o centro da circunferência é menor do que a medida do comprimento do raio.

d < r

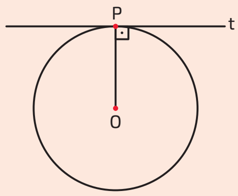
- No trabalho com essa página, peça para os alunos desenharem outras circunferências e indicarem outros pontos externos, pertencentes e internos a elas. Dessa forma, contribui-se para que eles compreendam que existem infinitos pontos que podem ser representados, e não apenas os indicados na teoria dessa página. Da mesma maneira, peça para que também desenhem retas externas, tangentes e secantes à circunferência para verificarem que há infinitas retas que podem ser representadas, levando em consideração tais classificações.

233

Observe duas propriedades em relação às retas tangente e secante a uma circunferência.

- **Reta tangente**

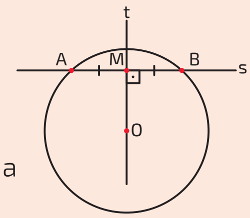
  Uma reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio da circunferência no ponto de tangência.



t: reta tangente
P: ponto de tangência
$\overline{OP}$: raio da circunferência

- **Reta secante**

  Uma reta que passa pelo centro da circunferência e é perpendicular a uma secante passa pelo ponto médio da corda determinada pela secante.



O: centro da circunferência
s: reta secante
t: reta que passa por **O** e é perpendicular à **s**
$\overline{AB}$: corda
M: ponto médio de $\overline{AB}$

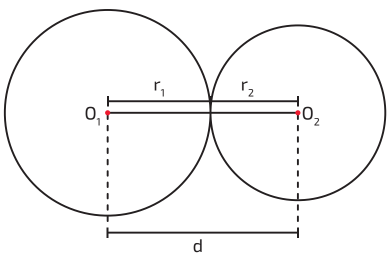
Posição relativa entre duas circunferências

Duas circunferências podem estar posicionadas, uma em relação à outra, de diferentes maneiras.

> Em todos os casos consideramos $r_1 > r_2$.

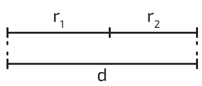
- Quando as circunferências têm apenas um ponto comum, dizemos que elas são **tangentes**.

  › As circunferências a seguir são **tangentes externas**.

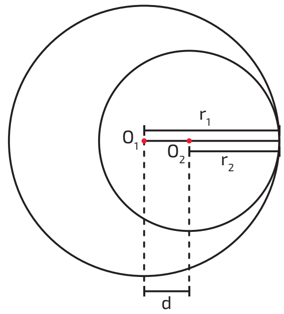


A medida da distância **d** entre os centros de duas circunferências tangentes externas é igual à soma das medidas dos comprimentos dos raios dessas circunferências.

$$d = r_1 + r_2$$

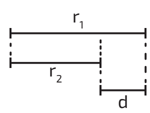


  › As circunferências a seguir são **tangentes internas**.



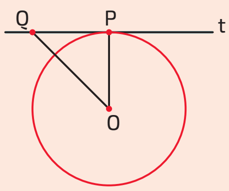
A medida da distância **d** entre os centros de duas circunferências tangentes internas é igual à diferença das medidas dos comprimentos dos raios dessas circunferências.

$$d = r_1 - r_2$$

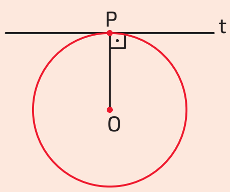


Ilustrações: Sergio L. Filho

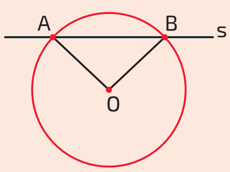
- Para justificar as propriedades acerca de retas tangentes e secantes em uma circunferência, apresente aos alunos as verificações a seguir.
- Propriedade: uma reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio da circunferência no ponto de tangência.
  Para verificar essa propriedade, consideramos um ponto qualquer **Q** pertencente à reta tangente **t** e não pertencente à circunferência, um segmento que une esse ponto ao centro da circunferência, e outro que une o centro ao ponto de tangência **P**.



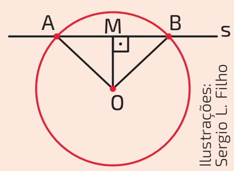
Como o ponto **Q** é externo à circunferência, temos $\overline{OQ} > \overline{OP}$, para qualquer ponto **Q** escolhido. Assim, o raio de medida OP é a menor medida de distância entre a reta tangente e o centro da circunferência. Como a medida da distância entre um ponto e uma reta é dada por um segmento que une esse ponto à reta perpendicularmente, a reta tangente é perpendicular ao raio da circunferência.



- Propriedade: uma reta que passa pelo centro da circunferência e é perpendicular a uma secante passa pelo ponto médio da corda determinada pela secante.
  Para verificar essa propriedade, traçamos $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$, obtendo o ΔAOB.
  Temos que $\overline{AO} \equiv \overline{OB}$, pois são raios da circunferência.



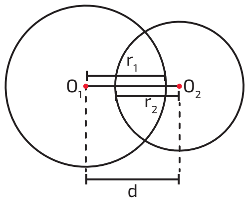
Assim, o ΔAOB é isósceles. Agora, traçamos a altura relativa à base $\overline{AB}$.
Como o ΔAOB é isósceles, o segmento OM também é a mediana. Então, **M** é o ponto médio da corda $\overline{AB}$.



Ilustrações: Sergio L. Filho

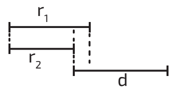
- Quando as circunferências têm dois pontos comuns, dizemos que elas são **secantes**.

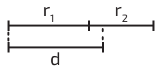
As circunferências a seguir são secantes.



A medida da distância **d** entre os centros de duas circunferências secantes é dada pela desigualdade:

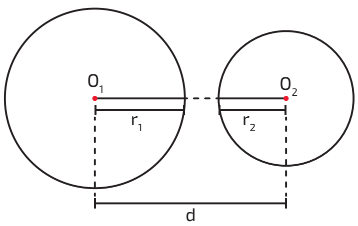
$$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$$





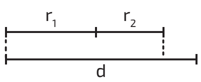
- Quando as circunferências não têm pontos comuns, elas podem estar em posições **externas** ou **internas**.

› As circunferências a seguir são externas.

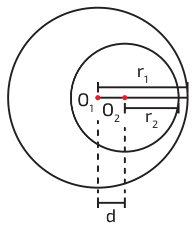


A medida da distância **d** entre os centros de duas circunferências externas é maior do que a soma das medidas dos comprimentos dos raios dessas circunferências.

$$d > r_1 + r_2$$

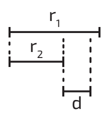


› As circunferências a seguir são internas.

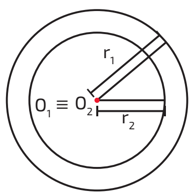


A medida da distância **d** entre os centros de duas circunferências internas é menor do que a diferença das medidas dos comprimentos dos raios dessas circunferências:

$$d < r_1 - r_2$$



Caso duas circunferências sejam internas e possuam centros coincidentes, dizemos que elas são **concêntricas**. Nesse caso, a medida da distância **d** entre os centros dessas circunferências é igual a zero, isto é, $d = 0$.



Ilustrações: Sergio L. Filho

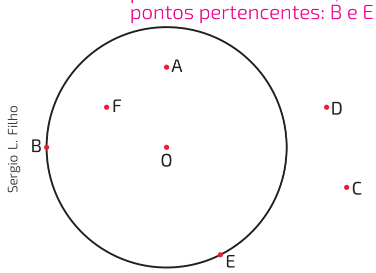
- Complemente o estudo dessa página pedindo que os alunos, em duplas, desenhem, utilizando compasso, uma circunferência de centro **A** com raio qualquer e algumas outras circunferências com outros raios e centros distintos, podendo ser secantes, tangentes internas ou externas ou ainda apenas externas ou internas. Em seguida, peça para que troquem com seus colegas a fim de que eles possam classificá-las de acordo com sua posição relativa à circunferência **A**.

- Caso não haja compassos e réguas para todos os alunos na atividade **32**, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, verifique a possibilidade de levar alguns compassos e réguas para a sala de aula. Verifique se os alunos percebem que há infinitas respostas para essa atividade.

Atividades

Anote no caderno

30. Determine a posição relativa dos pontos indicados em relação à circunferência de centro **O**. pontos internos: A, F e O; pontos externos: C e D; pontos pertencentes: B e E



31. Um ponto **P** é interno a uma circunferência cujo comprimento do raio mede 11 cm.

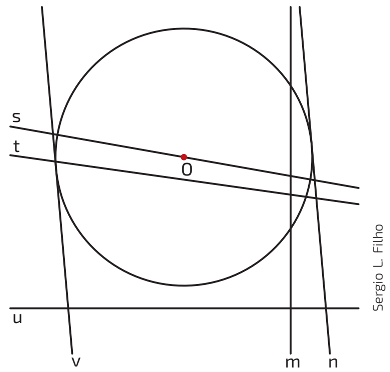
a) A medida da distância de **P** ao centro da circunferência é maior, menor ou igual a 11 cm? menor

b) Em relação a essa circunferência, qual é a posição relativa de um ponto **A** que está a 11 cm do seu centro? pertencente

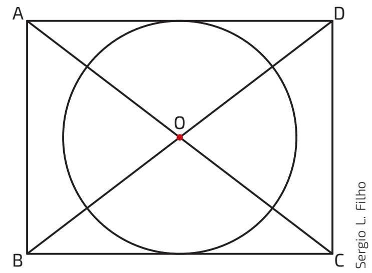
32. Trace uma circunferência, marque um ponto **A** que seja interno, um **B** que seja externo e um **C** que pertença à circunferência.

Compare o desenho que você fez com o de um colega e registrem as semelhanças e as diferenças que podem ser observadas. Resposta pessoal.

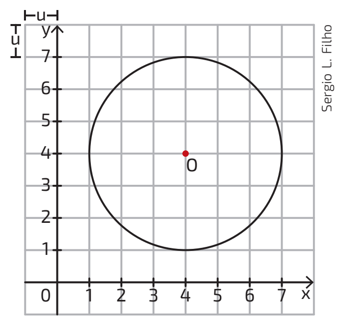
33. Determine a posição relativa entre cada reta indicada e a circunferência de centro **O**. tangentes: n, v; secantes: s, t, m; externa: u



34. Em relação à figura, classifique cada segmento de reta $(\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{AD})$ em tangente, secante ou externo à circunferência. secantes: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$; tangentes: $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$; externos: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$



35. Observe a circunferência de centro **O** representada em um plano cartesiano.



a) Qual é a medida do comprimento do raio da circunferência? E a medida do comprimento do diâmetro? 3 u; 6 u

b) Determine a posição relativa de cada ponto em relação à circunferência.

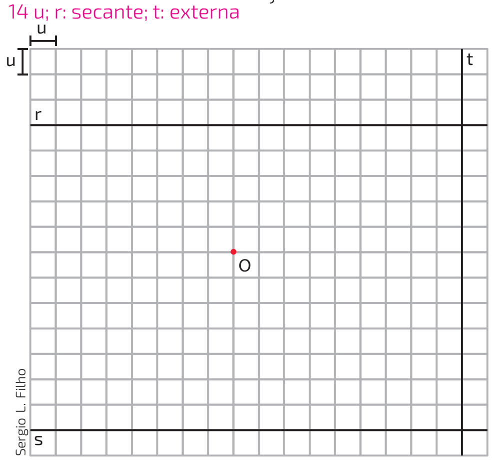
- A (7, 6) externo
- B (1, 4) pertencente
- C (3, 5) interno
- D (4, 7) pertencente
- E (5, 2) interno
- F (6, 1) externo

c) Qual a posição relativa das retas que passam pelos pares de pontos indicados abaixo em relação à circunferência?

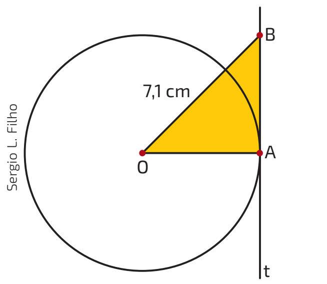
- (0, 0) e (7, 1) externa
- (1, 2) e (3, 7) secante
- (7, 0) e (7, 7) tangente

36. Com o auxílio de uma régua e um compasso, trace uma circunferência e três retas de maneira que uma seja secante, uma seja tangente e uma seja externa à circunferência. Resposta pessoal.

37. Na imagem, qual deve ser a medida do comprimento do diâmetro da circunferência de centro **O** que pode ser traçada, de maneira que seja tangente a **s**? Quais as posições relativas entre as retas **r** e **t** e a circunferência traçada?
14 u; r: secante; t: externa



38. A reta **t** na imagem é tangente à circunferência de centro **O** no ponto **A**.

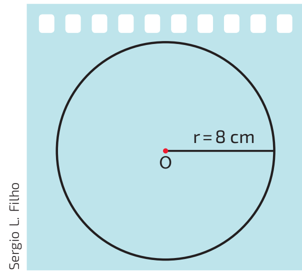


a) Qual é a medida do ângulo $O\hat{A}B$? 90°

b) Podemos afirmar que o ΔOAB é retângulo? Por quê? Sim, pois tem um ângulo que mede 90°.

c) Sabendo que $\overline{AO} = \overline{AB}$ e que a medida do perímetro do ΔOAB é 17,1 cm, qual é a medida do comprimento do diâmetro da circunferência? 10 cm

39. Em uma folha de papel, Fernanda traçou a circunferência de centro **O**.



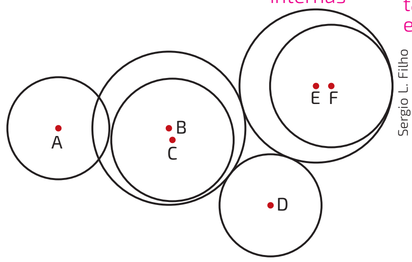
r: medida do comprimento do raio da circunferência

Depois, Fernanda traçou a reta **s**, a 7 cm de **O**, a reta **t**, a 8,1 cm de **O**, e a reta **u**, a 8 cm de **O**.

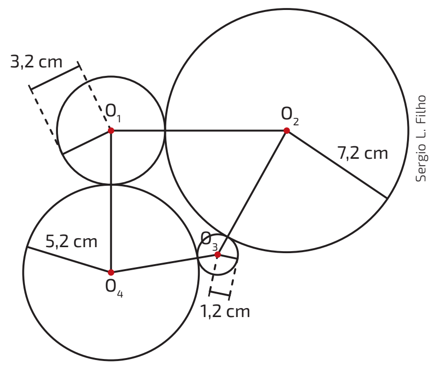
Qual é a posição relativa entre cada reta e a circunferência? s: secante; t: externa; u: tangente

40. De acordo com a imagem, escreva a posição relativa entre as circunferências de centros:

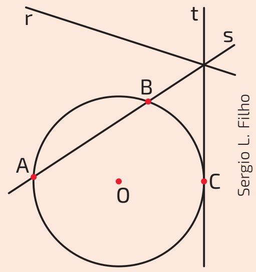
a) A e B. secantes
b) B e C. internas
c) C e D. externas
d) E e F. tangentes internas
e) A e E. externas
f) D e E. tangentes externas



41. As circunferências de centros O_1 e O_2, O_2 e O_3, O_3 e O_4, O_1 e O_4 são tangentes. Calcule a medida do perímetro do quadrilátero cujos vértices são os centros dessas circunferências. 33,6 cm



- Caso não haja réguas e compassos para todos os alunos, verifique a possibilidade de reuni-los em grupos para fazerem a atividade **36**. Certifique-se de que os alunos percebam que há infinitas respostas para essa atividade. Veja uma possível resposta à questão:



- Oriente os alunos a utilizarem uma desigualdade para indicar os possíveis valores de **x** no item **d** da atividade **42**.
- Veja uma possível solução do desafio **43**.
  - Sendo **x** o raio da circunferência menor e **y** o raio da circunferência maior, temos que $3x = y$, ou seja, $x = \frac{y}{3}$. Assim:

$$12 = y - x$$

$$12 = y - \frac{y}{3}$$

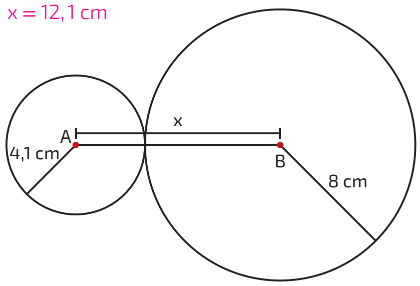
$$\frac{2y}{3} = 12$$

$$y = 18$$

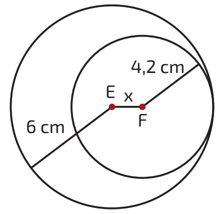
Logo, como $x = \frac{y}{3}$, então $x = 6$.

42. Em cada item, determine a medida **x** indicada, sabendo que as circunferências:

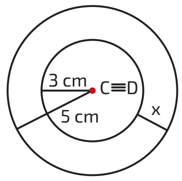
a) de centros **A** e **B** são tangentes.
$x = 12{,}1$ cm



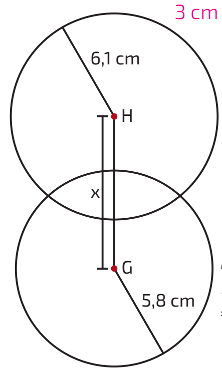
c) de centros **E** e **F** são tangentes.
$x = 1{,}8$ cm



b) de centros **C** e **D** são concêntricas.
$x = 2$ cm



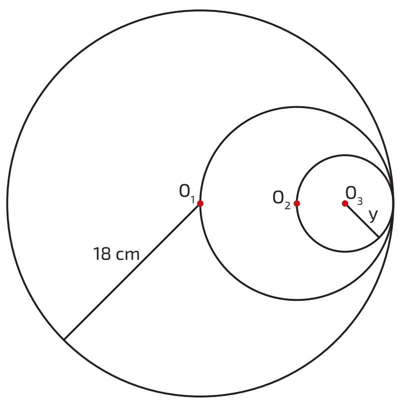
d) de centros **H** e **G** são secantes.
$3\text{ cm} < x < 11{,}9\text{ cm}$



Ilustrações: Sergio L. Filho

43. A distância entre os centros de duas circunferências tangentes internas mede 12 cm. Qual é a medida do comprimento do raio de cada uma dessas circunferências, sabendo que a medida do comprimento do raio da maior delas é igual ao triplo da outra? raio da circunferência maior: 18 cm; raio da circunferência menor: 6 cm

44. As circunferências de centros O_1 e O_2, O_1 e O_3, O_2 e O_3 são tangentes internas. Calcule a medida **y** indicada. $y = 4{,}5$ cm

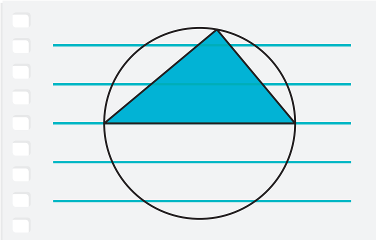


Sergio L. Filho

45. Duas circunferências de centro O_1 e O_2 têm raios cujos comprimentos medem 8,9 cm e 10,2 cm, respectivamente. Sabendo que essas circunferências são secantes, qual é a menor medida inteira, em centímetros, que pode ter o comprimento de $\overline{O_1O_2}$? E a maior? 2 cm; 19 cm

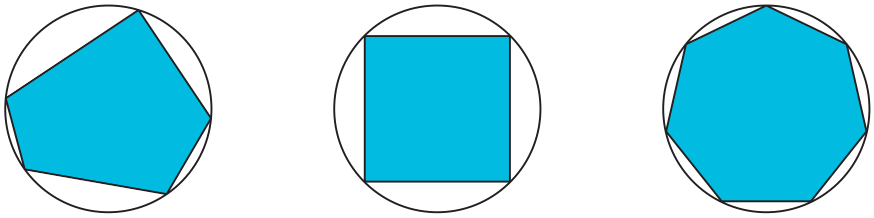
Polígonos inscritos e circunscritos na circunferência

Clóvis desenhou um triângulo e, em seguida, traçou uma circunferência que contém os três vértices desse triângulo.

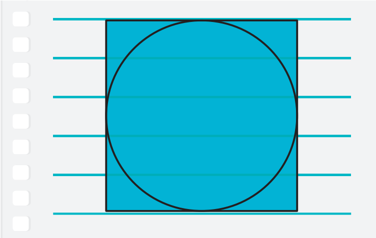


Dizemos que um polígono está **inscrito** numa circunferência se todos os seus vértices pertencem à circunferência.

Veja alguns exemplos de polígonos inscritos em uma circunferência.



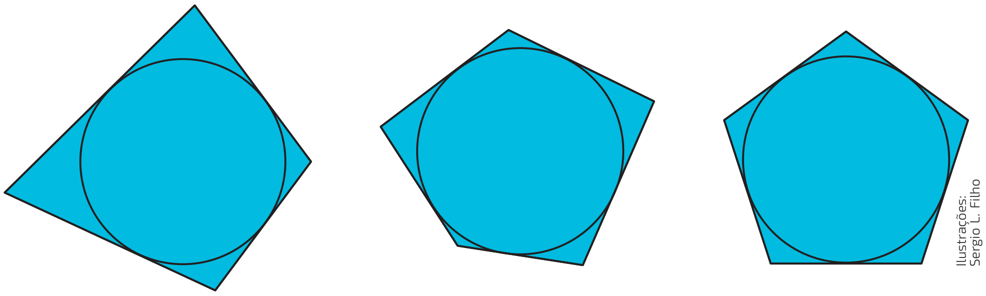
Em outra folha de papel, Clóvis desenhou um quadrado, cujos lados são tangentes a uma circunferência.



Note que, no desenho feito por Clóvis, a circunferência está contida no quadrado.

Dizemos que um polígono está **circunscrito** numa circunferência se todos os seus lados são tangentes à circunferência.

Veja alguns exemplos de polígonos circunscritos em uma circunferência.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Estudamos em anos anteriores os **polígonos regulares**, ou seja, os polígonos que possuem todos os lados com a mesma medida de comprimento e todos os ângulos internos com a mesma medida.

O quadrado é um polígono regular? Justifique.
Sim, pois um quadrado possui todos os lados com a mesma medida de comprimento e todos os ângulos internos com a mesma medida.

BNCC em foco

- O tópico que se inicia nessa página permitirá, por meio dos estudos teóricos e das atividades, que os alunos construam polígonos regulares utilizando instrumentos de desenho e um *software* de geometria dinâmica, o que propõe a habilidade **EF08MA15**.

- Verifique a possibilidade de traçar na lousa algumas circunferências e pedir para alguns alunos desenharem polígonos de maneira que cada polígono fique inscrito numa circunferência.

- Após o trabalho com a atividade **46**, proponha aos alunos a construção de um hexágono regular inscrito em uma circunferência, utilizando régua e compasso, conforme indicado no passo a passo abaixo.
Passo 1: Com o compasso, construa uma circunferência de raio qualquer.
Passo 2: Em qualquer lugar da circunferência, faça uma marcação.
Passo 3: Com a ponta-seca do compasso na marcação feita no passo anterior e mesma abertura utilizada no passo 1, faça outra marcação; repita esse processo até completar 6 marcações na circunferência.
Passo 4: Por fim, ligue com segmentos de reta os pontos de encontro das marcações com a circunferência consecutivos para obter o hexágono regular inscrito na circunferência.

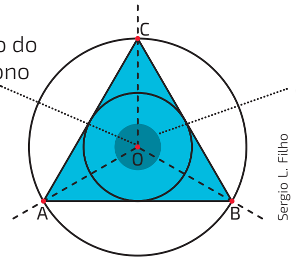
Dado um polígono regular, sempre é possível:

- traçar uma circunferência que contenha todos os seus vértices, assim, todo **polígono regular** pode ser **inscrito em uma circunferência**.
- traçar uma circunferência tangenciando todos os seus lados, assim, todo **polígono regular** pode ser **circunscrito em uma circunferência**.

Essas propriedades podem ser demonstradas, porém não o faremos neste momento.

Em um polígono regular, podemos destacar, dentre outros elementos o:

- **centro do polígono**, que é o centro comum da circunferência inscrita e da circunferência circunscrita ao polígono.
- **ângulo central**, que é o ângulo cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados contêm vértices consecutivos do polígono.



Para obtermos a medida do ângulo central de um polígono regular, dividimos 360° pela quantidade de lados desse polígono. Veja ao lado, por exemplo, como podemos calcular a medida do ângulo central do pentágono regular.

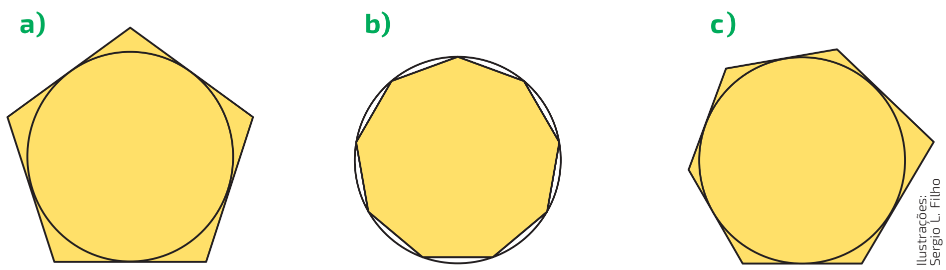
$$\frac{360°}{\underbrace{5}_{\text{quantidade de lados do pentágono regular}}} = 72°$$

Portanto, a medida do ângulo central do pentágono regular é 72°.

Atividades

Anote no caderno

46. Em quais dos itens o polígono está circunscrito à circunferência? a e c

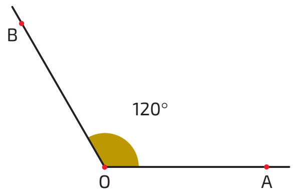


47. Determine a medida do ângulo central do:

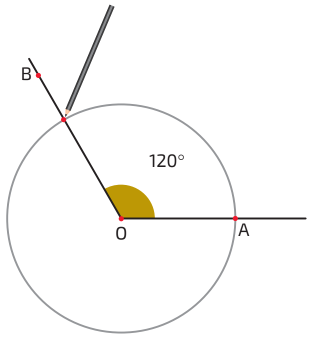
a) triângulo equilátero. 120°
b) quadrado. 90°
c) hexágono regular. 60°
d) octógono regular. 45°

48. Veja como Luciana construiu um triângulo equilátero utilizando régua e compasso.

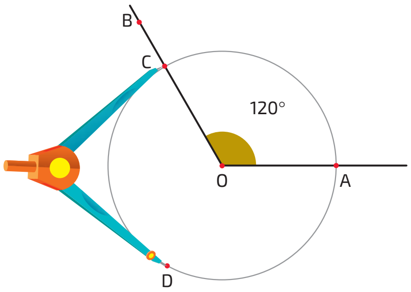
1º Construo, utilizando régua e compasso, o ângulo $A\hat{O}B$ com medida igual à do ângulo central de um triângulo equilátero, ou seja, 120°.



2º Com o compasso, traço uma circunferência de centro **O** e raio $\overline{OA}$. Em seguida, na interseção entre a semirreta OB e a circunferência, marco o ponto **C**.

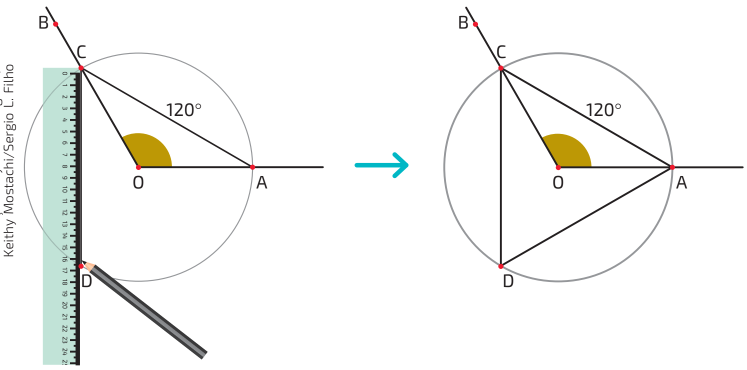


3º Com a ponta-seca do compasso em **C** e abertura igual a AC, marco, sobre a circunferência, o ponto **D**.



Na página **19** do capítulo **1**, foi solicitada a construção de um ângulo cuja medida é 120°, utilizando régua e compasso.

4º Por fim, com o auxílio de uma régua, traço $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, obtendo, assim, o triângulo equilátero ACD.



Ilustrações: Cynthia Sekiguchi/ Keithy Mostachi/Sergio L. Filho

Na seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **289** e **290**, veja como utilizar um *software* de geometria para construir polígonos regulares.

a) A construção realizada por Luciana está correta, ou seja, o triângulo construído é equilátero? Justifique.
Resposta nas orientações ao professor.

b) Utilizando régua e compasso, construa um quadrado.
Resposta nas orientações ao professor.

Para justificar o item **a**, utilize a congruência de triângulos.

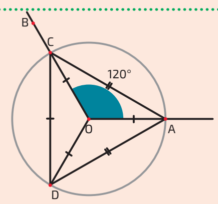
- No passo **4**, é importante ressaltar aos alunos que, por construção, os segmentos de reta AC e CD são congruentes.
- Na seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **289** e **290**, apresentamos como utilizar o *software* GeoGebra na construção de polígonos regulares. Veja a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para realizarem algumas construções com essa ferramenta.

Respostas

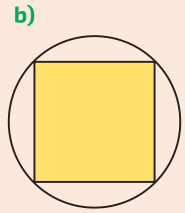
48. a) sim; Resposta pessoal. Inicialmente, note que $\overline{AO}$, $\overline{CO}$ e $\overline{OD}$ são congruentes, pois são raios da circunferência de centro **O**. Além disso, por construção, os lados $\overline{AC}$ e $\overline{DC}$ do ΔACD possuem a mesma medida; desse modo, ΔAOC e ΔCOD são congruentes pelo caso LLL.

Assim, $med(A\hat{O}C) = med(C\hat{O}D) = 120°$ e, consequentemente, $A\hat{O}D$ mede 120°, pois $med(A\hat{O}D) = 360° - \underbrace{med(A\hat{O}C)}_{120°} - \underbrace{med(C\hat{O}D)}_{120°} = 120°$.

Logo, pelo caso LAL, o ΔAOC e o ΔAOD são congruentes. Portanto, $med(\overline{AC}) = med(\overline{CD}) = med(\overline{AD})$, ou seja, o ΔACD é equilátero.



b)



Ilustrações: Sergio L. Filho

BNCC em foco

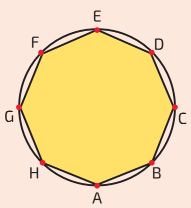
- A atividade **53** possibilita que os alunos construam um hexágono regular a partir da medida do ângulo central utilizando esquadro e compasso, e descrevam, por escrito e por meio de um fluxograma, o algoritmo utilizado para tal tarefa, o que contempla a habilidade **EF08MA16**.

- Na página **16** desse volume foi apresentada a construção do ângulo de 90°, e as páginas **21** e **22** apresentaram a construção da bissetriz de um ângulo. Caso julgue necessário, retome essas construções com os alunos a fim de contribuir com a resolução das atividades propostas.
- Na atividade **50**, a medida do ângulo central é 45°. Peça para que os alunos descrevam no caderno o passo a passo utilizado na resolução da atividade.

No material audiovisual dessa coleção, disponibilizamos um vídeo com instruções para a construção de um hexágono regular, utilizando esquadro e compasso, sem fazer medições com régua. As orientações de uso desse recurso estão disponíveis no material digital.

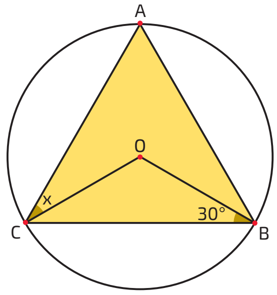
Respostas

50.

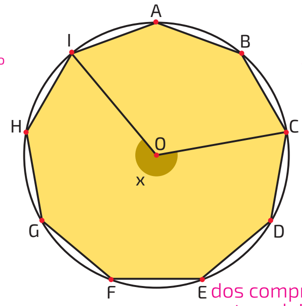


49. Determine o valor de **x** em cada um dos polígonos regulares inscritos nas circunferências de centro **O**.

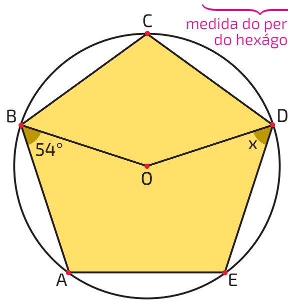
a) 30°



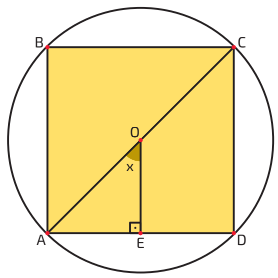
b) 240°



c) 54°



d) 45°



Ilustrações: Sergio L. Filho

52. Hexágono. Considerando **x** a medida do comprimento dos lados do hexágono e **y** a medida do comprimento dos lados do triângulo, espera-se que os alunos percebam que $2x > y$, pois em um triângulo qualquer a medida de um dos lados é sempre menor do que a soma das medidas dos comprimentos dos outros dois lados. Assim,

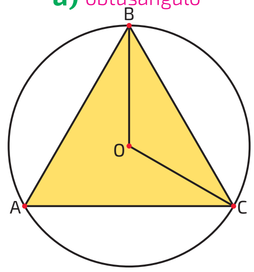
$$\underbrace{2x+2x+2x}_{\text{medida do perímetro do hexágono}} > \underbrace{y+y+y}_{\text{medida do perímetro do triângulo}},$$

ou seja, a medida do perímetro do hexágono é maior do que a do triângulo.

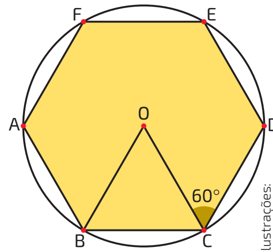
50. Em atividades anteriores, construímos polígonos regulares utilizando régua e compasso. Agora, junte-se a um colega e construam um octógono regular utilizando régua e compasso.
Resposta nas orientações ao professor.

51. Observe os polígonos regulares inscritos na circunferência de centro **O** e, em cada item, classifique o ΔBOC quanto à medida de seus ângulos internos.

a) triângulo obtusângulo

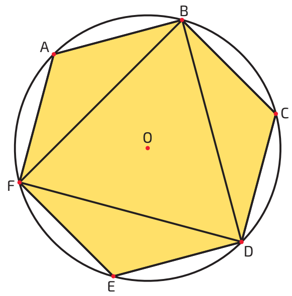


b) triângulo acutângulo



Ilustrações: Sergio L. Filho

52. Observe os polígonos regulares inscritos na circunferência de centro **O**.



Ilustrações: Sergio L. Filho

> Lembre-se de que em um triângulo qualquer a medida do comprimento de um dos lados é sempre menor do que a soma das medidas do comprimento dos outros dois lados.

Qual dos polígonos possui o perímetro de maior medida? Justifique.

53. Marcela deseja construir um hexágono regular utilizando esquadro e compasso.

a) Sabendo que a medida do ângulo central de um hexágono regular é 60°, escreva um passo a passo que possibilite a Marcela fazer essa construção. Em seguida, organize-o em um fluxograma. Respostas nas orientações ao professor.

b) De acordo com o procedimento escrito por você no item anterior, construa um hexágono regular.
Resposta nas orientações ao professor.

242

53. a) Resposta pessoal. Possível resposta:

1º) Com o auxílio do esquadro, trace uma reta e marque um ponto **O** sobre ela.

2º) Com a ponta-seca do compasso em **O** e abertura qualquer, trace dois arcos, marcando sobre a reta os pontos **A** e **B**.

3º) Com a ponta-seca do compasso em **A** e abertura igual à medida do comprimento $\overline{AB}$, trace, no sentido anti-horário, um arco. Em seguida, com a ponta-seca em **B** e mesma abertura, trace, no sentido horário, outro arco cruzando o feito anteriormente, determinando, assim, o ponto **C**.

4º) Trace, com o auxílio do esquadro, a semirreta AC, obtendo o ângulo $B\hat{A}C$, cuja medida é 60º (ângulo central do hexágono regular).

5º) Com o auxílio do compasso, trace uma circunferência de centro **A** e raio $\overline{AB}$.

Medida do comprimento da circunferência

Ao dividir a medida do comprimento de uma circunferência (**C**) pela medida do comprimento de seu diâmetro (**d**), obtemos um número próximo de 3,14. Utilizando alguns objetos com formato circular e fita métrica, podemos verificar isso na prática.

Objetos de formato circular sendo medidos com uma fita métrica.

Veja os resultados obtidos para alguns objetos.

- DVD de um filme.

$C = 37{,}7$ cm

$d = 12$ cm

$\frac{C}{d} = \frac{37{,}7}{12} \simeq 3{,}1417$

- Tampa de recipiente.

$C = 32$ cm

$d = 10{,}2$ cm

$\frac{C}{d} = \frac{32}{10{,}2} \simeq 3{,}1373$

- Prato de vidro.

Fotos: José Vitor Elorza/ASC Imagens

$C = 60{,}4$ cm

$d = 19{,}2$ cm

$\frac{C}{d} = \frac{60{,}4}{19{,}2} \simeq 3{,}1458$

O número obtido em cada caso é uma aproximação do número irracional **pi**, indicado pela letra grega π (lê-se pi). A razão entre a medida do comprimento da circunferência e a medida do comprimento de seu diâmetro é igual a π em todas as circunferências. Sendo assim:

$$\pi = \frac{\text{medida do comprimento da circunferência}}{\text{medida do comprimento do diâmetro}}$$

$$\pi = \frac{C}{d}$$

$$C = d \cdot \pi$$

Temos que $\pi = 3{,}14159265...$, porém utilizaremos $\pi = 3{,}14$, ou seja, uma aproximação com duas casas decimais.

Como a medida do comprimento do diâmetro é o dobro da medida do comprimento do raio ($d = 2r$), essa fórmula pode ser escrita da seguinte maneira:

$$C = 2 \cdot r \cdot \pi \text{ ou } C = 2\pi r$$

Utilizando essa fórmula e considerando $\pi = 3{,}14$, podemos, por exemplo, obter a medida aproximada do comprimento de uma circunferência cujo raio mede 6 cm de comprimento.

$$C = 2\pi r$$

$$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 = 37{,}68$$

Logo, a medida do comprimento dessa circunferência é aproximadamente 37,68 cm.

Nesse caso, o valor obtido é aproximado, pois o valor atribuído a π é uma aproximação.

- Realize a **Atividade complementar** a seguir para que os alunos possam, na prática, observar a regularidade presente na divisão da medida do comprimento da circunferência pela medida do comprimento de seu diâmetro, reconhecendo-a assim como o número π.

Atividade complementar

O número π

Materiais

- fita métrica
- régua
- calculadora
- objetos cilíndricos (circulares)

Desenvolvimento

- Peça para que os alunos, em grupos, meçam com a fita métrica a medida do comprimento da circunferência dos objetos e anotem na coluna de uma tabela; em seguida, peça para medirem o diâmetro dos mesmos objetos e anotarem em outra coluna dessa tabela. Após feito isso, utilizando uma calculadora, deverão efetuar a divisão da medida do comprimento pela medida do diâmetro e anotar os resultados em outra coluna da tabela, para que, dessa maneira, possam identificar a regularidade do quociente e identificar o número π.

Em seguida, na interseção entre a semirreta AC e a circunferência, marque o ponto **D**.

6º) Com a ponta-seca do compasso em **D** e abertura igual à medida do comprimento $\overline{BD}$, marque, sobre a circunferência, o ponto **E**.

7º) Com a ponta-seca do compasso em **E** e mesma abertura do passo anterior, marque, sobre a circunferência, o ponto **F**.

8º) Com a ponta-seca do compasso em **F** e mesma abertura do passo anterior, marque, sobre a circunferência, o ponto **G**.

9º) Com a ponta-seca do compasso em **G** e mesma abertura do passo anterior, marque, sobre a circunferência, o ponto **H**.

10º) Por fim, com o auxílio do esquadro, trace $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{HB}$.

Continuação da resposta no rodapé das páginas **244** e **245**.

BNCC em foco

- Aproveite que a atividade **58** apresenta algumas informações sobre a bicicleta para relacionar com o tema contemporâneo **Saúde**. Converse com os alunos sobre os benefícios que o uso da bicicleta pode trazer ao indivíduo, pois contribui com a saúde e com a qualidade de vida e auxilia na preservação do meio ambiente, já que não emite gases poluentes, como ocorre com os veículos motorizados. Pergunte quais deles utilizam a bicicleta como meio de transporte e incentive os demais a utilizarem, ressaltando não só a economia e o bem-estar proporcionado por ela, mas também a necessidade do uso de equipamentos de proteção.

Atividades

Anote no caderno

Nas atividades deste capítulo, aproxime o π até a 2ª casa decimal, ou seja, considere $\pi = 3{,}14$.

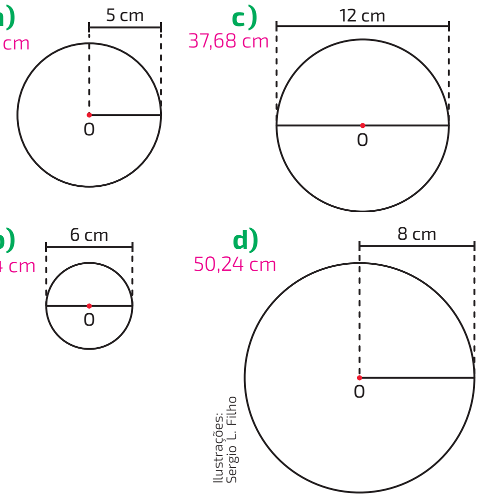
54. Calcule a medida aproximada do comprimento de cada circunferência de centro **O**.

a) 31,4 cm

b) 18,84 cm

c) 37,68 cm

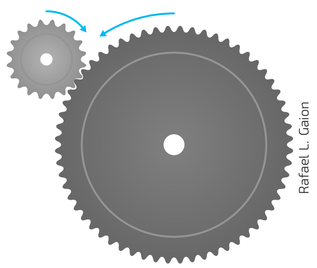
d) 50,24 cm



55. A medida do comprimento de uma circunferência é de aproximadamente 314 cm. Calcule a medida do comprimento do raio dessa circunferência. aproximadamente 50 cm

56. A medida do comprimento do raio das rodas de um automóvel é igual a 32 cm. Quantos quilômetros, aproximadamente, o automóvel percorreu depois que as rodas deram 8 000 voltas? 16 km

57. Na engrenagem a seguir, uma roda dentada gira em sentido contrário à outra, e um giro da maior corresponde a 3 giros da menor. Sabendo que a medida do comprimento do raio da roda dentada menor é 0,95 cm, qual é a medida aproximada do comprimento do raio da maior? 2,85 cm



58. Alguns modelos de bicicleta possuem marchas, que possibilitam ao ciclista realizar menor esforço nas subidas e atingir maior medida de velocidade nas descidas ou em terrenos planos. A mudança de marcha ocorre em virtude das diferentes relações existentes entre as coroas e as catracas.

Na imagem **A** indica as coroas e **B**, as catracas.

a) Considerando uma marcha cuja medida do comprimento do diâmetro da coroa é 10,5 cm e da catraca é 5,5 cm, quando a coroa der 11 voltas, quantas voltas dará a catraca? 21 voltas

b) Considerando uma bicicleta cuja medida do comprimento do diâmetro do pneu é 65 cm e uma marcha cuja medida do comprimento do diâmetro da coroa é 11,5 cm e da catraca é 8 cm, responda.

- Quando a coroa der 16 voltas, quantas voltas dará a catraca? 23 voltas
- Se o pneu der 20 voltas, quantos metros a bicicleta vai percorrer? aproximadamente 40,82 m
- Para que a bicicleta percorra 20,41 km, quantas voltas o pneu terá de girar? aproximadamente 10 mil voltas

Respostas

Referente à atividade **53** da página **242**.
Continuação do item **a**.

Início. → Com o auxílio do esquadro, trace uma reta e marque um ponto **O** sobre ela. → Com a ponta-seca do compasso em **O** e abertura qualquer, trace dois arcos, marcando sobre a reta os pontos **A** e **B**. → Com a ponta-seca do compasso em **A** e abertura igual à medida do comprimento $\overline{AB}$, trace, no sentido anti-horário, um arco. Em seguida, com a ponta-seca em **B** e mesma abertura, trace, no sentido horário, outro arco cruzando o feito anteriormente, determinando, assim, o ponto **C**. → Trace, com o auxílio do esquadro, a semirreta $\overrightarrow{AC}$, obtendo o ângulo $B\hat{A}C$, cuja medida é 60° (ângulo central do hexágono regular). → Com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência de centro **A** e raio $\overline{AB}$. Em seguida, na interseção entre a semirreta $\overrightarrow{AC}$ e a circunferência, marque o ponto **D**. →

59. Dois atletas estão treinando nas pistas circulares e concêntricas representadas abaixo. Se o atleta que está na pista externa der 5 voltas completas, quantas voltas, aproximadamente, deverá dar o atleta da pista interna para que ambos tenham percorrido a mesma distância? 7,5 voltas

1. quadriláteros, paralelogramos, retângulos, losangos, quadrados, trapézios, formas circulares, posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências, e medida do comprimento da circunferência

2. Espera-se que os alunos respondam que ambos são quadriláteros, porém, o paralelogramo possui dois pares de lados paralelos e o trapézio possui apenas um par de lados paralelos.

6. Espera-se que os alunos respondam que a circunferência é uma linha fechada em um plano, na qual todos os seus pontos estão a uma mesma medida de distância de um ponto fixo, chamado centro. O círculo é a união de todos os pontos da circunferência com a sua região interna.

Sergio L. Filho

Explorando o que estudei

Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo?

2. Que semelhanças e diferenças há entre paralelogramos e trapézios?

3. Se todos os lados de um paralelogramo tiverem comprimentos com medidas iguais, podemos afirmar que ele é um quadrado? Justifique.
Não, pois para ser um quadrado o paralelogramo também deverá ter todos os ângulos internos retos.

4. Como pode ser classificado um paralelogramo? E um trapézio?
retângulo, quadrado ou losango; trapézio retângulo, trapézio escaleno ou trapézio isósceles

5. A afirmação a seguir é verdadeira? Justifique.
sim; Possível resposta: há losangos que não possuem os quatro ângulos internos retos.

> Todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é um quadrado.

6. Qual é a diferença entre circunferência e círculo?

7. A partir da medida da distância de um ponto a uma circunferência, como podemos verificar se esse ponto é interno, externo ou pertencente a essa circunferência?

7. Espera-se que os alunos respondam que se a distância desse ponto ao centro da circunferência for maior do que a medida do comprimento do raio, ele é externo, se for igual, é pertencente e, se for menor, é interno.

8. Cite as posições relativas que você conhece entre uma reta e uma circunferência. Faça desenhos, em seu caderno, para representar essas posições relativas.
Espera-se que os alunos respondam externa, secante e tangente; Resposta pessoal.

9. É possível que duas circunferências não tenham pontos comuns? E exatamente três pontos comuns? sim; não

10. Escreva, com suas palavras, como determinar a medida do ângulo central de um polígono regular. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que basta dividir 360° pela quantidade de lados do polígono

11. Se a medida do comprimento do raio de uma circunferência aumentar 1 m, quanto aumentará a medida do comprimento da circunferência? 2π m

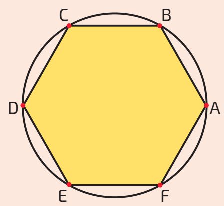
Avaliação

- Utilize a seção **Explorando o que estudei** para avaliar os alunos quanto aos conteúdos estudados no capítulo. Verifique se eles apresentam alguma dificuldade na resolução das questões propostas. Caso demonstrem dificuldades, avalie a possibilidade de fazer um resumo do conteúdo trabalhado, de modo a retomar alguns conceitos.

- Na questão **9**, é importante que os alunos verifiquem, ao construir imagens, que não é possível definir duas circunferências que tenham exatamente três pontos comuns. Há quatro possibilidades de quantidades de pontos comuns entre duas circunferências: zero (internas ou externas), um (tangentes), dois (secantes) e infinitos (coincidentes).

→ Com a ponta-seca do compasso em **D** e abertura igual à medida do comprimento de $\overline{BD}$, marque, sobre a circunferência, o ponto **E**. → Com a ponta--seca do compasso em **E** e mesma abertura do passo anterior, marque, sobre a circunferência, o ponto **F**. → Com a ponta--seca do compasso em **F** e mesma abertura do passo anterior, marque, sobre a circunferência, o ponto **G**. → Com a ponta--seca do compasso em **G** e mesma abertura do passo anterior, marque, sobre a circunferência, o ponto **H**. → Por fim, com o auxílio do esquadro, trace $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{HB}$. → Fim.

b)



Sergio L. Filho

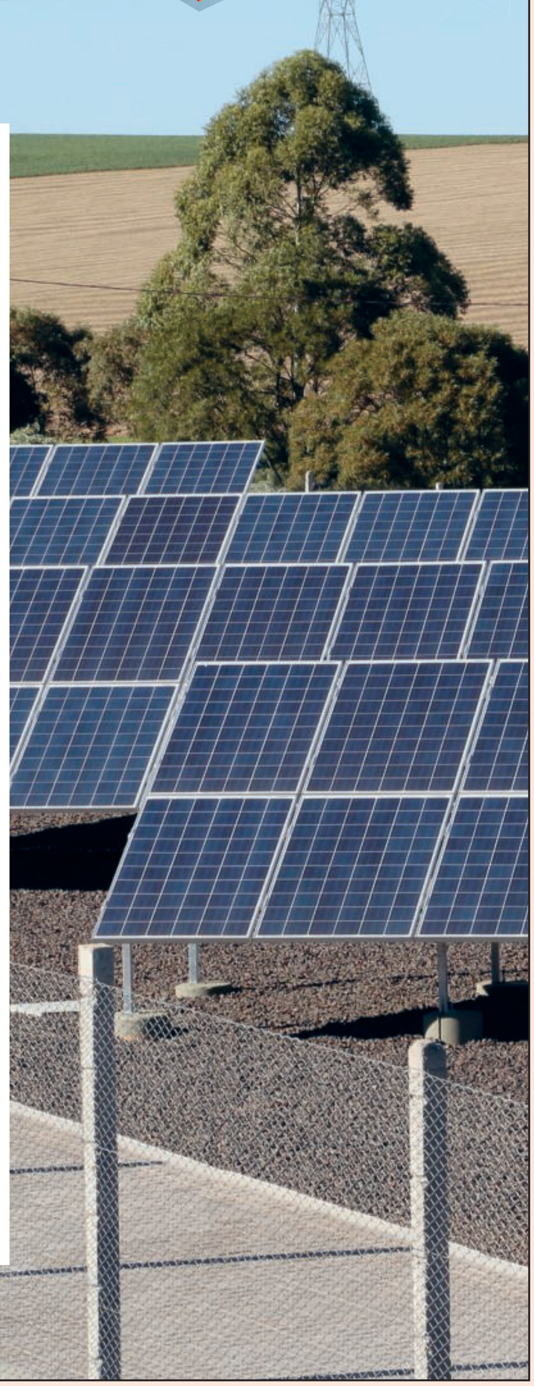
Esse capítulo proporcionará a ampliação dos conhecimentos dos alunos a respeito do cálculo da medida de área de polígonos como os paralelogramos, triângulos, trapézios, losangos e círculos.

Com base nisso, serão estimulados a utilizar os conceitos estudados para resolver e elaborar problemas oriundos, sempre que possível, de contextos reais.

- A contextualização da abertura apresenta aos alunos a energia solar como fonte renovável. Com base no tema, eles poderão perceber que o conceito de medida de área está presente ao tratar da superfície dos coletores de energia solar. Isso contribui para a associação dos conceitos estudados no capítulo às situações da realidade. Uma sugestão de condução do trabalho é realizar uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. As questões propostas podem ser escritas na lousa, de acordo com as respostas dadas pelos alunos e, nesse momento, é importante que a turma seja incentivada a participar. Para complementar o estudo do assunto, pergunte se já observaram alguma residência que possui coletores de energia solar. Peça a eles que pesquisem a relação entre a medida da área de coletores, em metros quadrados, e a quantidade de moradores em uma residência, a fim de calcular quantos metros quadrados de coletores seriam necessários para a instalação em sua casa. Sugira que realizem também uma pesquisa sobre usinas de energia solar no Brasil.

Capítulo 11

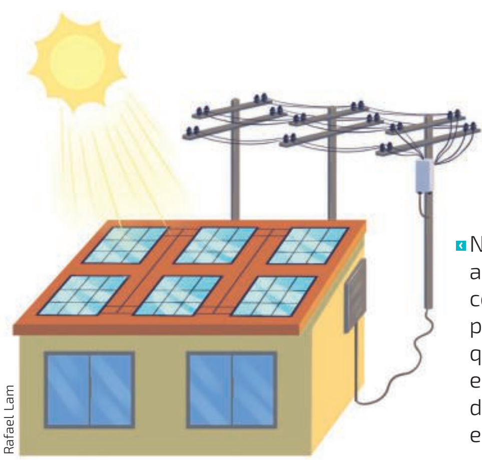
Medidas de área



A energia solar é uma opção ecológica, pois é renovável e não emite gás carbônico na atmosfera. Ela pode ser aproveitada diretamente como energia térmica para aquecer líquidos e ambientes ou ser convertida em energia elétrica. A capacidade de captação da radiação solar depende do tamanho da superfície coletora das placas. No caso da conversão em energia elétrica em larga escala, um dos sistemas mais utilizados é o fotovoltaico (veja no esquema).

Apesar de haver desvantagens na energia solar, como a disponibilidade da radiação, que depende da localização e das condições atmosféricas, a irradiação na superfície terrestre tem grande potencial para suprir o consumo mundial de energia elétrica e, portanto, substituir fontes energéticas poluentes e não renováveis, sempre que possível.

Sistema fotovoltaico



Rafael Lam

Nesse sistema, a radiação é coletada em um painel fotovoltaico, que converte a energia solar diretamente em energia elétrica.

246

Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

A De acordo com o texto, quais as principais vantagens no uso da energia solar? De que maneira a energia solar pode ser aproveitada?

B Além das usinas solares, que outras usinas de produção de energia elétrica você conhece ou de quais já ouviu falar?

C Em certa usina fotovoltaica, cada metro quadrado de painel gera cerca de 0,7 kWh de energia elétrica. Nessa usina, um painel quadrado, cujo comprimento do lado mede 4 m, gera quanta energia elétrica?

Gerson Gerloff/
Pulsar Imagens

Usina solar fotovoltaica em Boa Vista das Missões, no Rio Grande do Sul, em 2017.

BNCC em foco

- No decorrer do capítulo, os alunos serão levados a resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas utilizando, sobretudo, expressões de cálculo de área para quadriláteros, triângulos e círculos, em situações como a de determinar medida de terrenos, contemplando, assim, a habilidade **EF08MA19**.

Pensando nisso...

A É uma opção ecológica, pois é renovável e não emite gás carbônico na atmosfera. Ela pode ser aproveitada diretamente como energia térmica para aquecer líquidos e ambientes ou ser convertida em energia elétrica.

B Resposta pessoal. Possíveis respostas: usinas hidroelétricas, termelétricas, eólicas, nucleares etc.

C 11,2 kWh

- Estimule os alunos a pesquisarem sobre os tipos de usinas citadas no item **B**, a fim de saber se utilizam fontes renováveis, sustentáveis e econômicas. Para isso, verifique a possibilidade de levá-los ao laboratório de informática e, em seguida, realize uma discussão com a turma a respeito dos prós e contras das usinas pesquisadas.
  A Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) disponibiliza um arquivo com diversas informações sobre as diferentes maneiras de uso de energia solar e como ela é aproveitada no Brasil, no *site*: <www2.aneel.gov.br/aplicacoes/atlas/pdf/03-energia_solar(3).pdf>. Acesso em: 24 out. 2018.
- Comente com os alunos que o kWh (quilowatt-hora) é uma unidade de medida de energia elétrica que representa a energia consumida ou gerada por determinado aparelho durante um determinado período de funcionamento.

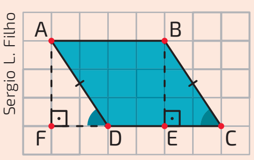
Objetivos do capítulo

- Calcular a medida de área de paralelogramos, triângulos, trapézios, losangos e círculos.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo medida da área de paralelogramos, triângulos, trapézios, losangos e círculos.

Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **10**, **11** e **12** do 4º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

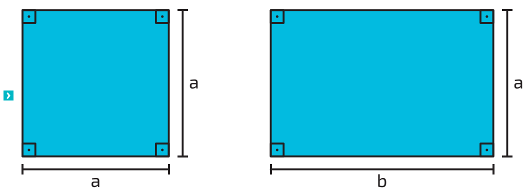
- No tópico **Medida da área do paralelogramo**, peça para que os alunos demonstrem que os triângulos formados na decomposição do paralelogramo são congruentes utilizando os casos de congruência de triângulos já estudados. Veja como pode ser demonstrado:



Medida da área de polígonos

Vimos, anteriormente, como calcular a medida da área de um quadrado e de um retângulo.

Medida da área do quadrado: $A = a \cdot a = a^2$.



Medida da área do retângulo: $A = a \cdot b$.

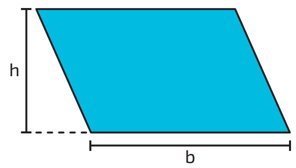
Neste capítulo, estudaremos como calcular a medida da área de outros polígonos, como o paralelogramo, o triângulo, o trapézio e o losango.

Qual é a medida da área de um quadrado cujo comprimento do lado mede 5,6 cm? 31,36 cm²

Medida da área do paralelogramo

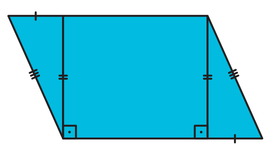
O paralelogramo é um quadrilátero que possui dois pares de lados opostos paralelos e cujas medidas dos comprimentos dos lados opostos são congruentes.

Veja como podemos calcular a medida da área de um paralelogramo.

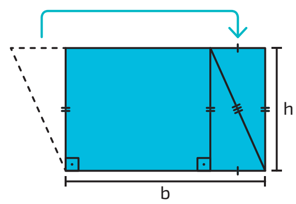


No paralelogramo ao lado, **b** é a medida do comprimento da base e **h**, a da altura.

- Podemos decompor esse paralelogramo em um retângulo e dois triângulos retângulos congruentes.

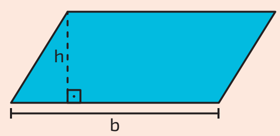


- Deslocando um desses triângulos conforme indicado, obteremos um retângulo cujas medidas do comprimento da base e da altura são iguais às do paralelogramo inicial.



- Como o retângulo obtido e o paralelogramo inicial têm as medidas das áreas iguais, podemos calcular a medida da área do paralelogramo multiplicando as medidas do comprimento da base e da altura.

Calculamos a medida da área de um paralelogramo multiplicando as medidas do comprimento de sua base e de sua altura.



Fórmula da medida da área do paralelogramo: $A = b \cdot h$.

A: medida da área do paralelogramo.

b: medida do comprimento da base.

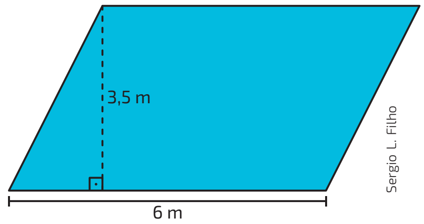
h: medida da altura.

Ilustrações: Sergio L. Filho

- Dado o paralelogramo ABCD, construímos um retângulo ABEF, sendo **F** o ponto de interseção do prolongamento de $\overline{CD}$ com a reta perpendicular que passa por **A**, formando o segmento AF, e **E**, a extremidade do segmento BE que é perpendicular a $\overline{CD}$. Assim, temos os triângulos ADF e BCE. Neles, os segmentos AD e BC são lados do paralelogramo, então são congruentes, os ângulos $\hat{E}$ e $\hat{F}$ são retos e os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{C}$ são correspondentes, logo têm a mesma medida. Portanto, pelo caso de congruência LAA_o, temos que os triângulos ADF e BCE são congruentes.

Utilizando a fórmula, podemos calcular a medida da área do paralelogramo ao lado.

$$A = b \cdot h = 6 \cdot 3{,}5 = 21 \longrightarrow 21\ m^2$$



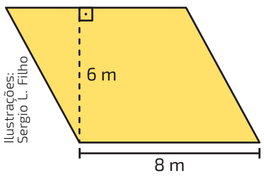
Qual é a medida da altura de um paralelogramo com medida do comprimento da base igual a 2 cm e medida da área igual a 16 m^2? 8 m

Atividades

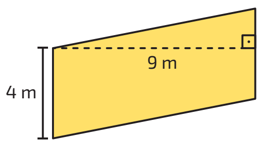
Anote no caderno

1. Calcule a medida da área de cada paralelogramo.

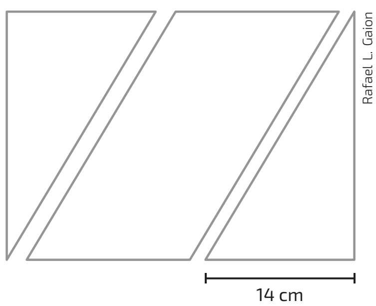
a) 48 m^2



b) 36 m^2



2. Beatriz recortou dois triângulos congruentes de uma folha de papel retangular cujos comprimentos dos lados mediam 21 cm e 29,5 cm e obteve um paralelogramo.



a) Qual é a medida da área da folha de papel? E do paralelogramo que Beatriz obteve? 619,5 cm^2; 325,5 cm^2

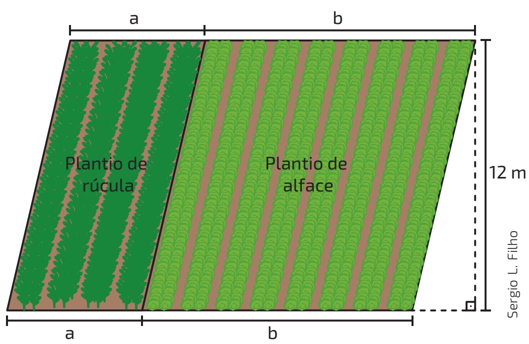
b) A medida da área do paralelogramo é maior, menor ou igual à soma das medidas das áreas dos dois triângulos? maior

c) Elabore uma questão parecida com as propostas nos itens anteriores e troque com um colega para que ele a resolva. Após a resolução, verifique se a resposta está correta. Resposta pessoal.

3. Qual é a medida da altura de um paralelogramo cuja área mede 290 dm^2 e o comprimento da base, 20 dm? 14,5 dm

4. Um terreno com formato de paralelogramo foi disponibilizado para a criação de uma horta comunitária. De maneira coletiva, os moradores do bairro decidiram que:

- $\frac{2}{3}$ da medida da área total do terreno seria destinada ao plantio de alface;
- $\frac{1}{3}$ da medida da área total do terreno seria destinada ao plantio de rúcula.



Sabendo que a medida da área total é 216 m^2 e que a divisão será feita conforme a indicação na imagem acima, responda às questões.

a) Qual é a medida da área destinada ao plantio de rúcula? E a medida da área destinada ao plantio de alface? 72 m^2; 144 m^2

b) Qual é o valor de **a** e de **b**? $a = 6$ m, $b = 12$ m

BNCC em foco

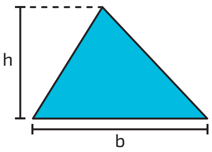
- Aproveite que a atividade **4** apresenta uma horta comunitária e pergunte aos alunos se eles já estiveram em uma horta com essa característica coletiva. Diga que essas ações são excelentes para aproximar os membros de uma comunidade e valorizar a região em que moram, além, é claro, de ser uma atitude positiva para o meio ambiente, sobretudo dentro das cidades, de fornecer alimento saudável, gerar renda e promover o bem-estar dos indivíduos. Dessa maneira, contempla-se a **Competência geral 10**, pois estimula decisões baseadas em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários.
- O trabalho com esse capítulo possibilita que os alunos utilizem fórmulas para calcular áreas de algumas figuras geométricas planas, permitindo que compreendam as relações entre conceitos e procedimentos de diferentes campos da Matemática, nesse caso a Geometria, a Aritmética e a Álgebra. Desse modo, contempla-se a **Competência específica de Matemática 3**.

- A atividade **2** pode ser realizada na prática, o que traz mais significado ao estudo da medida de área do retângulo e do paralelogramo. Para isso, peça que os alunos providenciem um pedaço de papel retangular e façam os recortes como indicado na atividade. Veja uma possível questão que pode ser elaborada no item **c**:
  - Qual é a medida total da área dos triângulos obtidos no recorte que Beatriz fez? R 294 cm^2 cada

- Diga aos alunos que, no triângulo, é utilizada a "medida do comprimento da altura", pois a altura de um triângulo é um segmento de reta. Já nos demais polígonos, utilizamos a "medida da altura", pois a altura é uma distância.

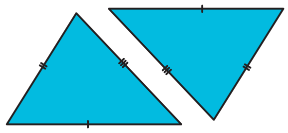
Medida da área do triângulo

Observe como podemos calcular a medida da área do triângulo ao lado.

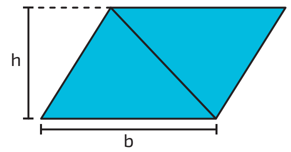


> Nesse triângulo, **b** é a medida do comprimento da base e **h**, é a medida do comprimento da altura.

- Inicialmente, consideramos um triângulo congruente ao triângulo acima.



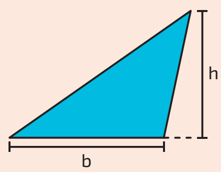
- Com esses triângulos, podemos compor um paralelogramo conforme indicado.



- As medidas do comprimento da base e do comprimento da altura do paralelogramo obtido são iguais às do triângulo original, e a medida da área desse triângulo é igual à metade da medida da área do paralelogramo.

Portanto, a medida da área do triângulo original é dada por: $A = \dfrac{\overbrace{b \cdot h}^{\text{medida da área do paralelogramo}}}{2}$.

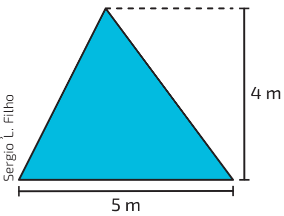
Calculamos a medida da área de um triângulo dividindo por dois o produto das medidas do comprimento de sua base e do comprimento de sua altura.



Fórmula da medida da área do triângulo: $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$.
A: medida da área do triângulo.
b: medida do comprimento da base.
h: medida do comprimento da altura.

Utilizando a fórmula, podemos calcular a medida da área do triângulo ao lado.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \longrightarrow 10\ m^2$$



Ilustrações: Sergio L. Filho

Também podemos calcular a medida da área de um triângulo quando desconhecemos a medida do comprimento de sua altura, mas conhecemos as medidas dos comprimentos de seus lados. Uma fórmula para esse cálculo é:

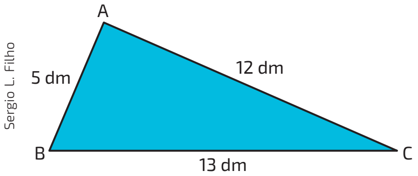
$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

A: medida da área do triângulo.
a, b e c: medidas dos comprimentos dos lados do triângulo.
s: medida do semiperímetro do triângulo, ou seja, metade da medida do perímetro do triângulo.

Essa fórmula foi deduzida por Herão de Alexandria no livro **A métrica** e, por isso, ficou conhecida como fórmula de Herão.

- No trabalho com a medida da área do triângulo, verifique se os alunos perceberam que a escolha da fórmula a ser utilizada, $A = \frac{b \cdot h}{2}$ ou $A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$, depende das medidas conhecidas desse triângulo. Caso sejam dadas apenas as medidas dos comprimentos da base e da altura, utilizamos $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Se forem conhecidas apenas as medidas dos comprimentos dos lados, podemos utilizar $A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$.
- Comente com os alunos que a fórmula de Herão de Alexandria pode ser demonstrada, porém exige alguns conceitos que ainda não foram estudados.
- O *site* a seguir apresenta uma demonstração para a fórmula de Herão. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-para-leitura_023-formula-de-herao/>. Acesso em: 7 nov. 2018.

Veja como é possível utilizar a fórmula de Herão para calcular a medida da área do ΔABC a seguir.



$$s = \frac{13 + 12 + 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$A = \sqrt{15 \cdot (15 - 13) \cdot (15 - 12) \cdot (15 - 5)} =$$

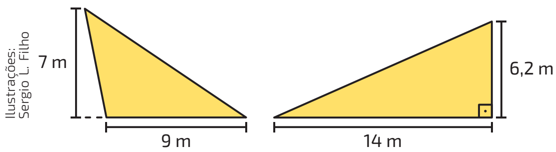
$$= \sqrt{15 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10} = \sqrt{900} = 30 \longrightarrow 30 \text{ dm}^2$$

Atividades

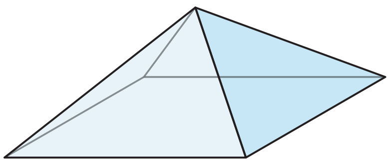
Anote no caderno

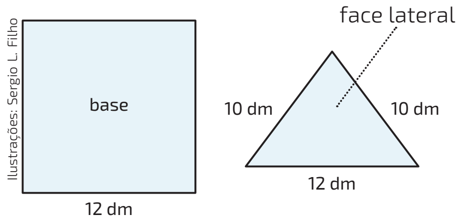
5. Calcule a medida da área de cada triângulo.

a) $31{,}5 \text{ m}^2$ **b)** $43{,}4 \text{ m}^2$



6. Um artesão vai construir uma pirâmide reta de base quadrada utilizando chapas de vidro, como indicado no esquema.





a) Qual será a medida da área total das faces e da base dessa pirâmide? 336 dm^2

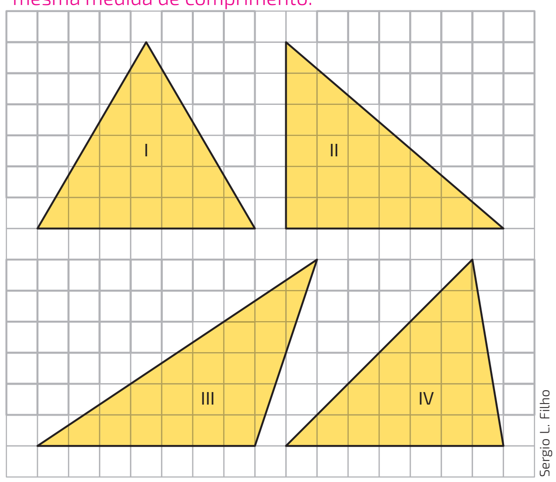
b) Sabendo que 1 dm^2 do vidro utilizado tem 0,05 kg, qual será a medida da massa dessa pirâmide em quilogramas? 16,8 kg

7. Utilizando a fórmula de Herão e com o auxílio de uma calculadora, determine a medida da área de um triângulo cujos comprimentos dos lados medem:

a) 5 cm, 9 cm e 10 cm. aproximadamente $22{,}45 \text{ cm}^2$

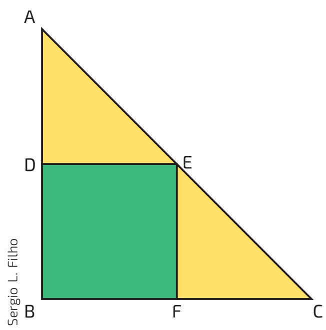
b) 4,9 cm, 9,1 cm e 13,6 cm. aproximadamente $10{,}74 \text{ cm}^2$

8. Os triângulos indicados na malha quadriculada têm medidas das áreas iguais? Justifique. sim; Possível resposta: porque todos os triângulos têm bases e alturas com mesma medida de comprimento.



Agora, escreva o enunciado de um problema que envolva a medida da área de um ou mais triângulos apresentados na malha. Em seguida, troque com um colega e resolvam. Resposta pessoal.

9. Escreva a razão entre as medidas das áreas do triângulo ABC e do quadrado BDEF, sabendo que AD = DB e BF = FC. 2



- Na resolução da atividade **7**, caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, verifique a possibilidade de levar algumas calculadoras para a sala de aula.
- Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos na atividade **8**:
  - Considere cada quadradinho da malha quadriculada como 1 unidade de medida de área. Qual a medida da área de cada um desses triângulos?
    R 21 unidades de medida de área
- Na atividade **9**, oriente os alunos a atribuírem uma letra para representar a medida do comprimento do lado do quadrado ou até mesmo um valor numérico. Sabemos que os segmentos BF e DB têm a mesma medida de comprimento, pois são lados do quadrado, e que AD = DB e BF = FC. Então, se chamarmos de **a** a medida do comprimento do lado do quadrado, temos:

$a = DB = AD = BF = FC$

Logo, $A_{\text{triângulo}} = 2a^2$, $A_{\text{quadrado}} = a^2$, e a razão entre as duas é:

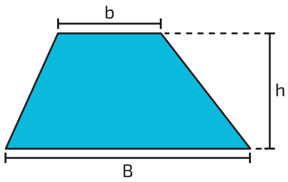
$$\frac{A_{\text{triângulo}}}{A_{\text{quadrado}}} = \frac{2a^2}{a^2} = 2$$

- Proporcione um momento de discussão com a turma ao iniciar o trabalho com essa página. Antes de apresentar aos alunos a dedução da fórmula para calcular a medida da área de trapézios, desenhe na lousa um trapézio e peça que comentem estratégias para calcular a medida da área. Para isso, peça para fecharem o livro momentaneamente e realizarem suas conjecturas. Em seguida, peça para que abram o livro e, em conjunto, formalizem o conteúdo, procurando sempre referenciar as ideias provindas durante a discussão.

Medida da área do trapézio

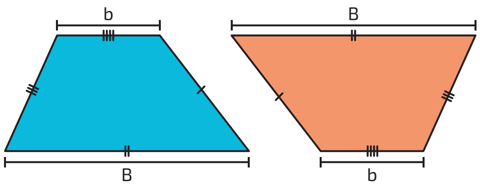
Vimos que o trapézio é um quadrilátero que possui apenas um par de lados opostos paralelos, chamados bases.

Observe como podemos calcular a medida da área do trapézio.

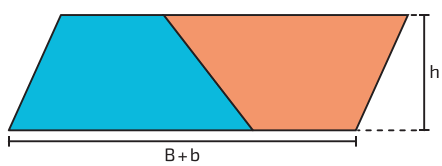


No trapézio ao lado, **b** é a medida do comprimento da base menor, **B**, do comprimento da base maior e **h**, da altura.

- Inicialmente, consideramos um trapézio congruente ao trapézio acima.



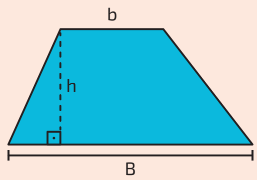
- Em seguida, compomos um paralelogramo com esses trapézios.



- A medida da altura do paralelogramo obtido é igual à do trapézio original, e a medida do comprimento da base no paralelogramo é igual à soma das medidas do comprimento das bases do trapézio original (B + b). Assim, a medida da área do trapézio original é igual à metade da medida da área do paralelogramo obtido.

Portanto, a medida da área do trapézio original é dada por: $A = \dfrac{\overbrace{(B + b) \cdot h}^{\text{medida da área do paralelogramo}}}{2}$.

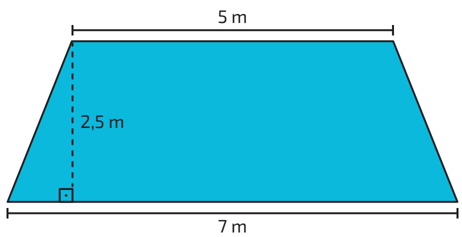
Calculamos a medida da área de um trapézio dividindo por dois o produto da medida da altura pela soma das medidas do comprimento de suas bases.



Fórmula da medida da área do trapézio: $A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$.

A: medida da área do trapézio.
B: medida do comprimento da base maior.
b: medida do comprimento da base menor.
h: medida da altura.

Observe como podemos calcular a medida da área do trapézio a seguir.



Ilustrações: Sergio L. Filho

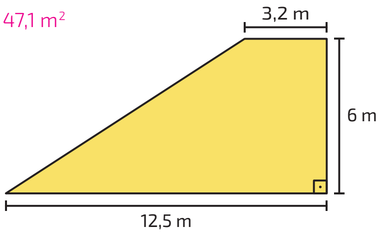
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(7 + 5) \cdot 2,5}{2} = \frac{12 \cdot 2,5}{2} = 15 \rightarrow 15 \text{ m}^2$$

Atividades

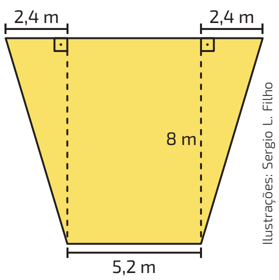
Anote no caderno

10. Calcule a medida da área de cada trapézio.

a) 47,1 m²



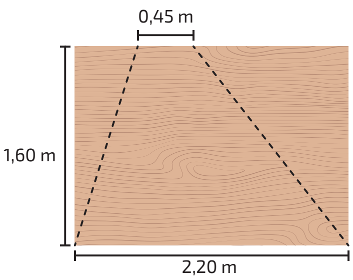
b) 60,8 m²



Ilustrações: Sergio L. Filho

11. Elabore uma questão para o enunciado a seguir. Resposta pessoal.

> Para obter uma peça com formato de trapézio, um marceneiro cortou uma chapa de madeira retangular conforme indicado.

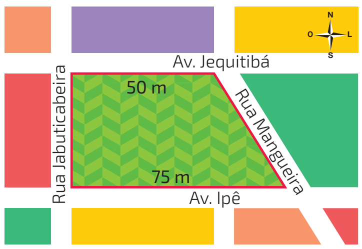


Rafael L. Gaion

12. Determine a medida da altura **h** no trapézio a seguir, sabendo que a medida do seu perímetro é 26 cm e de sua área é 27 cm². h = 3 cm

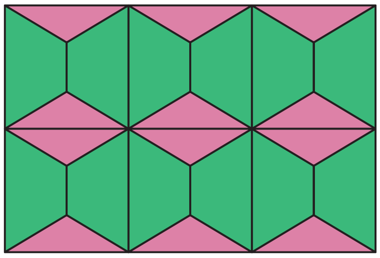
Sergio L. Filho

13. O terreno em destaque no mapa tem o formato de um trapézio retângulo e a medida da área igual a 2 500 m². Qual é a medida, em metros, do comprimento do lado desse terreno que fica voltado para a Rua Jabuticabeira? 40 m

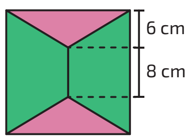


Ingridhi Borges

14. Uma região pode ser pavimentada com peças em formato de triângulos e trapézios, da seguinte maneira:



a) Determine a medida da área de cada uma das peças, sabendo que a figura ao lado tem formato quadrado.



Ilustrações: Sergio L. Filho

b) Quantas peças de cada formato serão necessárias para pavimentar uma região plana quadrada com comprimento do lado medindo 3 m?

c) Elabore um enunciado para a pergunta a seguir e dê para um colega responder. Resposta pessoal.

> Quantas peças com formato de trapézio serão utilizadas?

14. a) medida da área da peça com formato de triângulo: 60 cm²; medida da área da peça com formato de trapézio: 140 cm²

14. b) 450 peças com formato de triângulo e 450 peças com formato de trapézio.

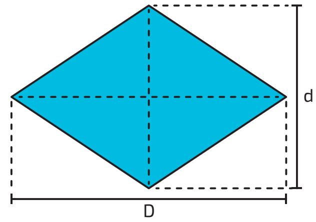
- As atividades **11** e **14** dessa página e outras que constam no capítulo proporcionam aos alunos a elaboração de problemas. O objetivo é que eles pensem em como combinar os dados a serem inventados, que utilizem melhor a linguagem materna e busquem se desafiar. A seguir, é apresentada uma questão que pode ser formulada por eles na atividade **11**:
  - Quantos metros quadrados foram retirados dessa chapa de madeira?
    R 1,4 m²
- Para resolver o item **a** do desafio proposto na atividade **14**, note que a base maior do trapézio mede 20 cm (pois $6 + 8 + 6 = 20$) e, por formar um quadrado, a base da peça triangular também mede 20 cm. Portanto, a altura do trapézio mede 10 cm. Assim, a medida da área da peça com formato de trapézio é 140 cm², pois $\frac{(20+8)\cdot 10}{2} = 140$, e a medida das peças com formato de triângulo é 60 cm², pois $\frac{20 \cdot 6}{2} = 60$.
  Para o item **b**, como cada composição é formada por um quadrado de lado medindo 20 cm, e 3 m = 300 cm, temos que $\frac{300}{20} = 15$ e $15 \cdot 15 = 225$. Assim, são 225 peças quadradas que são formadas por 2 triângulos e 2 trapézios. Logo, serão necessárias 450 peças com formato triangular e 450 com formato de trapézio.

- Veja um possível enunciado elaborado pelos alunos para a pergunta apresentada no item **c** da atividade **14**:
  - Utilizando as mesmas peças apresentadas nessa atividade, certo azulejista pretende revestir a parede de um banheiro que mede 3 m por 1 m. Quantas peças com formato de trapézio serão utilizadas?
    R 150 peças

Inicie o trabalho com essa página desenhando o losango na lousa conforme apresentado. Depois, peça para que os alunos comentem maneiras de calcular a medida da área dessa figura. Sugira que fechem o livro momentaneamente para não conferirem o modo de calcular e, assim, possam fazer conjecturas e desenvolver o espírito investigativo.

Medida da área do losango

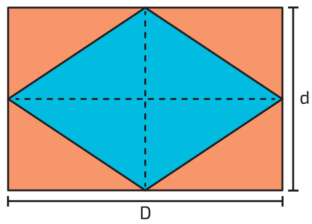
Vimos que o losango é um quadrilátero que possui os quatros lados congruentes. Vimos também que o losango é um paralelogramo que possui diagonais perpendiculares.



No losango ao lado, **d** é a medida do comprimento da diagonal menor e **D**, do comprimento da diagonal maior.

Observe como podemos calcular a medida da área do losango.

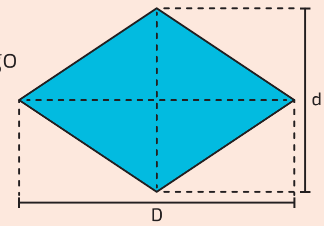
- Inicialmente, compomos um retângulo com comprimentos dos lados medindo **D** e **d**, conforme indicado a seguir.



- Observe que o retângulo é formado por 8 triângulos congruentes, e 4 deles formam o losango.
- Assim, a medida da área do losango é a metade da medida da área do retângulo, cujos comprimentos dos lados medem **D** e **d**.

Portanto, a medida da área do losango é dada por: $A = \dfrac{\overbrace{D \cdot d}^{\text{medida da área do retângulo}}}{2}$.

Calculamos a medida da área de um losango dividindo por dois o produto das medidas do comprimento de suas diagonais.



Fórmula da medida da área do losango: $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$.

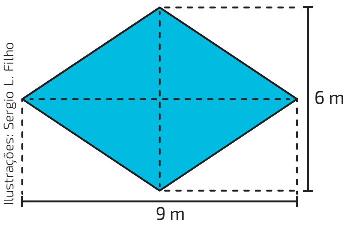
A: medida da área do losango.

D: medida do comprimento da diagonal maior.

d: medida do comprimento da diagonal menor.

Observe como podemos calcular a medida da área do losango a seguir.

Ilustrações: Sergio L. Filho



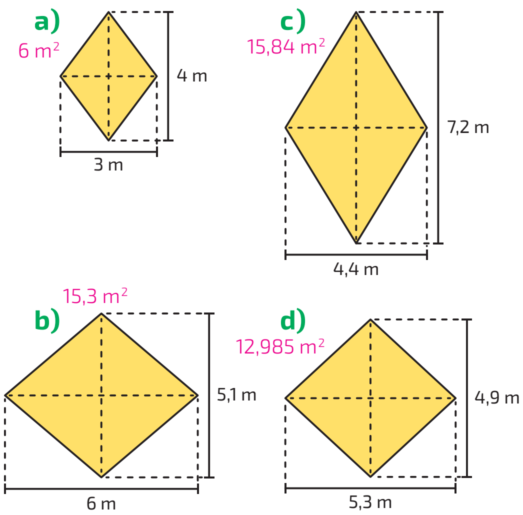
$A = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{9 \cdot 6}{2} = \dfrac{54}{2} = 27 \rightarrow 27\ m^2$

Qual é a medida do comprimento do lado de um quadrado cuja medida do comprimento da diagonal é $2\sqrt{2}$ cm? 2 cm

Atividades

Anote no caderno

15. Calcule a medida da área de cada losango.

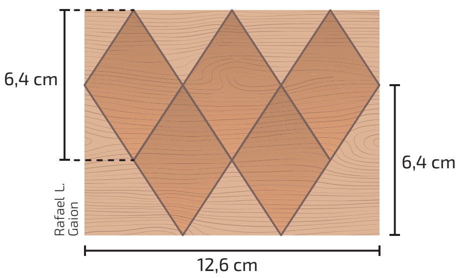


16. A marchetaria é uma arte na qual se aplicam diferentes tipos de madeira, madrepérola e metal em peças de marcenaria, com o objetivo de obter um desenho, um mosaico etc.

nazarovsergey/ Shutterstock.com

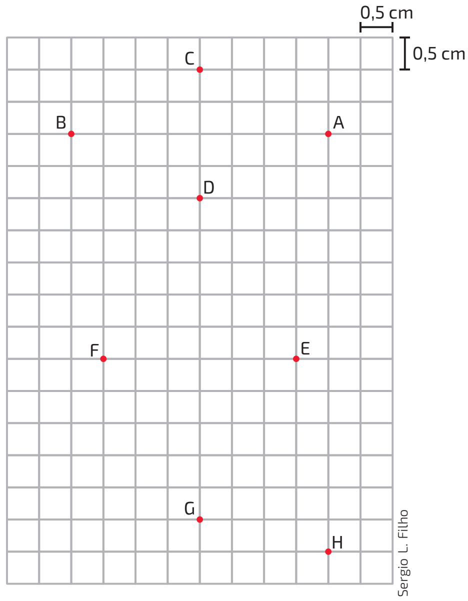
Detalhes da produção de uma peça em marchetaria.

Determine a medida da área da parte mais escura na marchetaria representada a seguir, sabendo que ela é formada por losangos congruentes. 67,2 cm²



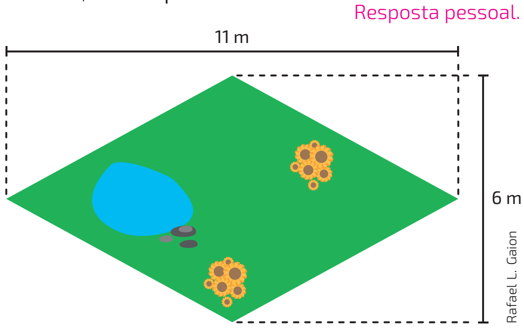
17. Bia pretende desenhar um losango na malha quadriculada.

Entre os pontos indicados na malha, escreva no caderno aqueles que ela pode utilizar como vértices do losango para que sua área tenha medida igual a 7,5 cm².
D, E, G e F



Junte-se a um colega e discutam as soluções obtidas e as estratégias utilizadas na resolução desta atividade.

18. De acordo com a imagem, elabore, em seu caderno, o enunciado de um problema que envolva medida de área. Em seguida, dê para um colega resolver e, por fim, verifique se ele o fez corretamente.
Resposta pessoal.

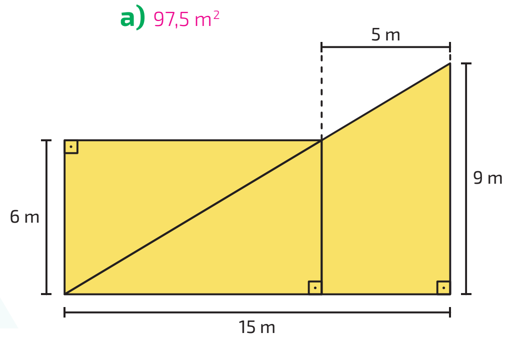


- Veja um possível problema elaborado pelos alunos a partir da imagem contida na atividade **18**:
  - Para calcular o custo da construção de certo jardim, uma arquiteta precisa saber qual a medida da área a ser utilizada. Sabendo que o metro quadrado de jardim simples custa R$ 42,00, quanto custará o jardim apresentado na figura?
    R: R$ 1 386,00

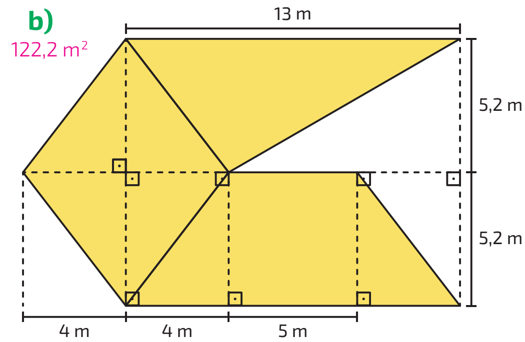
- Na atividade **19**, oriente os alunos a calcularem a medida de área de cada figura que compõe a imagem.
- Ao trabalhar a atividade **20**, reproduza o tangram disponível nas **Páginas para reprodução** e entregue-o aos alunos para que realizem outras composições, além das sugeridas, efetuando o cálculo da medida da área de cada uma delas. Para isso, peça que considerem as medidas do tangram apresentadas na atividade.
- Verifique a possibilidade de complementar a atividade **21** apresentando outros prismas e também pirâmides cujas faces sejam figuras geométricas abordadas nesse capítulo, para que os alunos calculem a medida de área das superfícies.

19. Calcule a medida da área de cada figura.

a) 97,5 m²

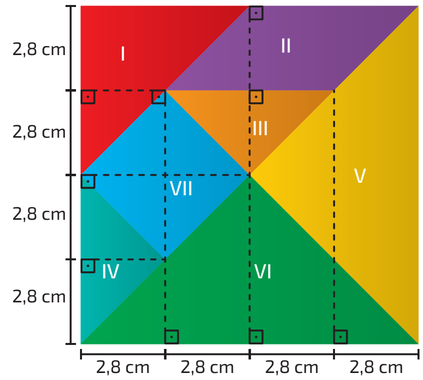


b) 122,2 m²



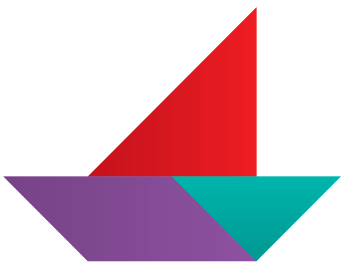
Ilustrações: Sergio L. Filho

20. De acordo com as medidas indicadas, calcule a medida da área de cada peça do tangram. I: 15,68 cm²; II: 15,68 cm²; III: 7,84 cm²; IV: 7,84 cm²; V: 31,36 cm²; VI: 31,36 cm²; VII: 15,68 cm²

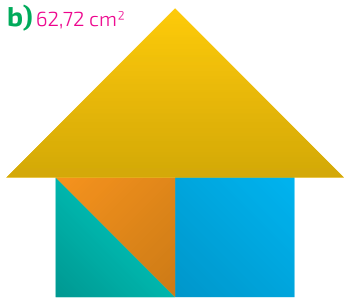


Agora, determine a medida da área de cada figura, sabendo que elas foram obtidas usando algumas peças desse tangram.

a) 39,2 cm²



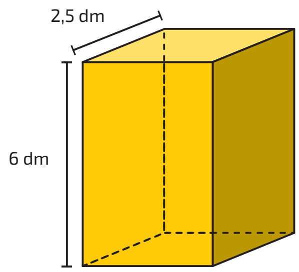
b) 62,72 cm²



c) 47,04 cm²

Ilustrações: Rafael L. Gaion

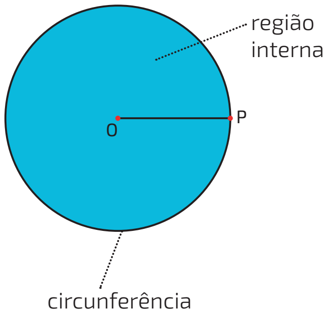
21. A figura ao lado representa um prisma reto cujas bases são losangos com comprimento das diagonais medindo 3 dm e 4 dm. Qual é a medida da área da superfície desse prisma? 72 dm²



Sergio L. Filho

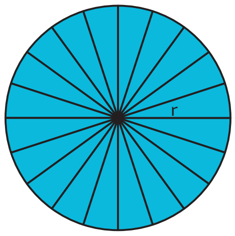
Medida da área do círculo

Sabemos que se reunirmos a circunferência e todos os seus pontos internos, obteremos uma figura chamada **círculo**.

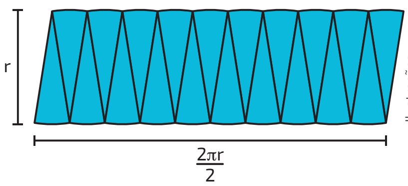


No círculo ao lado podemos destacar alguns elementos, como a região interna, a circunferência, o raio $\overline{OP}$ e o centro **O**, conforme indicado.

Para se ter uma ideia de como calcular a medida da área de um círculo, podemos dividi-lo em 20 partes iguais da seguinte maneira:



Em seguida, organizamos cada uma dessas partes para obter uma figura que lembre um paralelogramo cuja medida da altura é aproximadamente a do comprimento do raio do círculo, **r**, e a medida do comprimento da base é aproximadamente metade da medida do comprimento da circunferência, isto é, $\frac{2\pi r}{2}$.



Ilustrações: Sergio L. Filho

> Quanto maior a quantidade de partes em que o círculo for dividido, mais o formato obtido será aproximado ao de um paralelogramo.

Calculamos a medida da área do paralelogramo pelo produto das medidas de sua base e de sua altura.

$$A = \frac{2\pi r}{2} \cdot r$$
$$A = \pi r \cdot r$$
$$A = \pi r^2$$

Como a figura que lembra o paralelogramo foi obtida por todas as partes do círculo, temos que a medida da área do círculo é dada por: $A = \pi r^2$.

Considerando $\pi = 3{,}14$, calcule a medida da área de um círculo cujo comprimento do raio mede 5 m. aproximadamente 78,5 m^2

- De maneira parecida com a utilizada para a medição da área do losango, peça que os alunos fechem o livro momentaneamente e, em seguida, desenhe na lousa o círculo conforme apresentado nessa página, conduzindo-os na realização de conjecturas para determinar a medida da área de tal círculo. Faça perguntas que guiem o raciocínio dos alunos, porém evite conduzir o pensamento deles ao resultado esperado, fornecendo oportunidades de exporem suas ideias. Valorize a diversidade de pensamentos e aproveite para contribuir com a comunicação e a interação entre eles.

Material digital

- Para complementar o trabalho com o tópico **Medida da área do círculo**, no material digital dessa coleção disponibilizamos a **Sequência didática 11**, elaborada com o objetivo de desenvolver a habilidade **EF08MA19**. As atividades propostas nessa sequência possibilitam reconhecer, identificar e diferenciar círculo e circunferência, assim como calcular a medida do comprimento de uma circunferência e a medida da área do círculo.

- Na atividade **23**, se necessário, lembre os alunos de que podemos calcular a medida do comprimento de uma circunferência utilizando a fórmula $C = 2\pi r$, a fim de obter a medida do comprimento do raio.
- Na atividade **25**, lembre os alunos de que a medida do comprimento do diâmetro é igual ao dobro da medida do comprimento do raio.
- Proponha a **Atividade complementar** a seguir como um desafio aos alunos, instigando-os a resolvê-la.

Atividade complementar

- Eduardo possui um canteiro com uma horta em formato circular cujo comprimento do raio mede 8 m. Qual é a medida desse canteiro? Considere $\pi = 3{,}14$.

R aproximadamente 200,96 m²

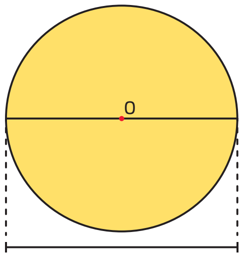
Atividades

Anote no caderno

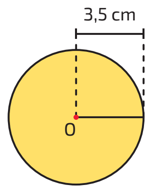
Nas atividades desta seção, aproxime o π até a 2ª casa decimal, ou seja, considere $\pi = 3{,}14$.

22. Calcule a medida da área de cada círculo de centro O.

a) aproximadamente 113,04 cm²

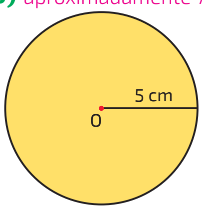


d)

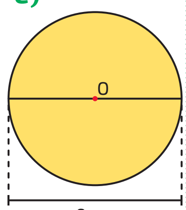


aproximadamente 38,47 m²

b) aproximadamente 78,5 cm²

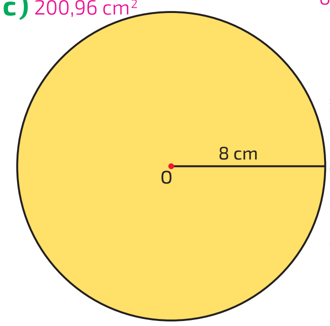


e)



aproximadamente 63,59 cm²

c) aproximadamente 200,96 cm²



Ilustrações: Sergio L. Filho

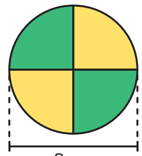
23. Qual é a medida da área de um círculo cujo comprimento de sua circunferência mede 50,24 cm? aproximadamente 200,96 cm²

24. Qual é a medida do comprimento do raio do círculo cuja área mede 530,66 cm²? aproximadamente 13 cm

25. Determine a medida do comprimento do diâmetro de uma praça com formato circular cuja medida da área é 1 256 m². aproximadamente 40 m

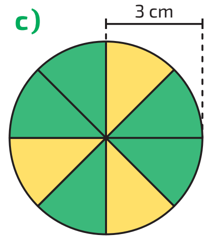
26. Os círculos de cada item foram divididos em partes iguais. Determine a medida da área da região amarela em cada caso e arredonde os resultados para a 2ª casa decimal, quando necessário.

a)



aproximadamente 25,12 cm²

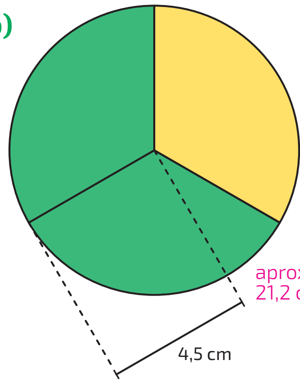
c)



aproximadamente 10,6 cm²

Ilustrações: Sergio L. Filho

b)



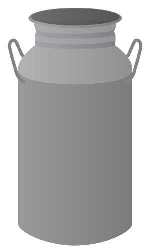
aproximadamente 21,2 cm²

27. Determine a medida do comprimento do diâmetro da base de cada objeto.

a) aproximadamente 50 cm

Medida da área da base: 1 962,5 cm².

c) aproximadamente 34 cm



Medida da área da base: 907,46 cm².

Ilustrações: Rafael L. Gaion

b) aproximadamente 40 cm

Medida da área da base: 1 256 cm².

28. Uma operadora de telefonia móvel deseja instalar uma antena em determinado local da cidade de maneira que o sinal cubra uma região formada por cinco bairros. Observe as relações entre as medidas das distâncias dos bairros ao local onde será instalada a antena e os modelos de antena disponíveis para instalação.

Bairro	Medida da distância ao local de instalação (km)*
A	3
B	4,5
C	7
D	6,5
E	5

*Medida da distância entre o ponto mais distante do bairro e a antena.

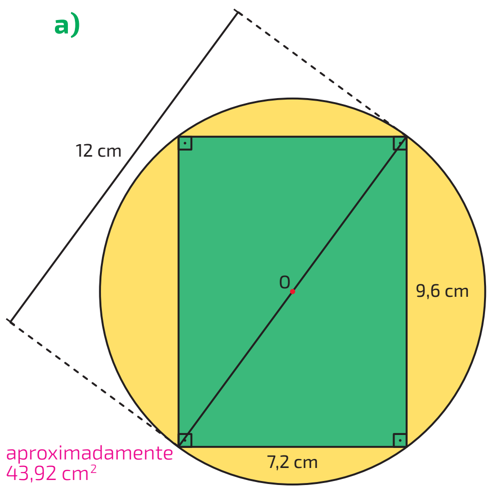
Modelo da antena	Medida da área de cobertura (km^2)	Custo de instalação (em mil reais)
I	48	60
II	108	85
III	192	120
IV	243	200

Admitindo que o sinal gerado por qualquer um desses modelos de antena cobre uma região circular, determine qual é o modelo de antena mais indicado para ser instalado, visto que a operadora deseja oferecer o sinal de telefonia aos cinco bairros gastando o mínimo possível. modelo III

Nesta atividade, considere $\pi = 3$.

29. Calcule a medida da área da parte amarela de cada figura.

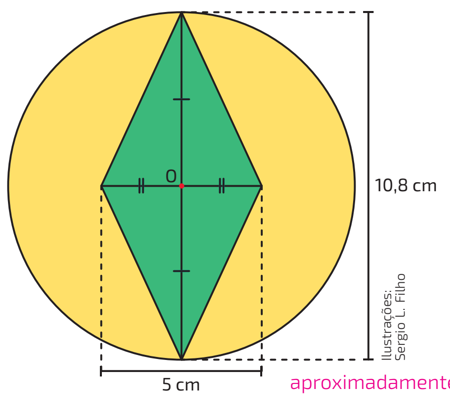
a)



aproximadamente 43,92 cm²

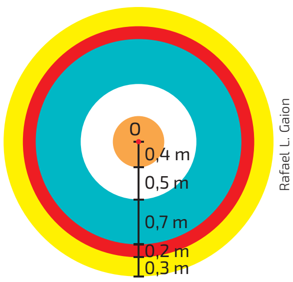
b)

Em cada item, **O** é o centro da circunferência em que o polígono está inscrito.



aproximadamente 64,56 cm²

30. Com base na imagem ao lado, elabore em seu caderno o enunciado de um problema que envolva medida da área do círculo. Em seguida, troque o problema com um colega, resolvendo e corrigindo a solução apresentada.
Resposta pessoal.



- Na atividade **28**, verifique se os alunos compreenderam que o bairro **C** é o mais distante do local de instalação da torre e que, ao atender esse bairro com sinal de telefonia, os demais também serão atendidos.
- Um dos enunciados que podem ser elaborados pelos alunos na atividade **30** é o que segue:
  - Qual a quantidade de tinta necessária para pintar a parte amarela do alvo sabendo que cada litro de tinta cobre 2 m² de medida de área?

    R aproximadamente 1,84

BNCC em foco

- No trabalho com essa página, promova o reconhecimento, por parte dos alunos, de que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções. Dessa maneira, contempla-se a **Competência específica de Matemática 1**.

Relacionando saberes

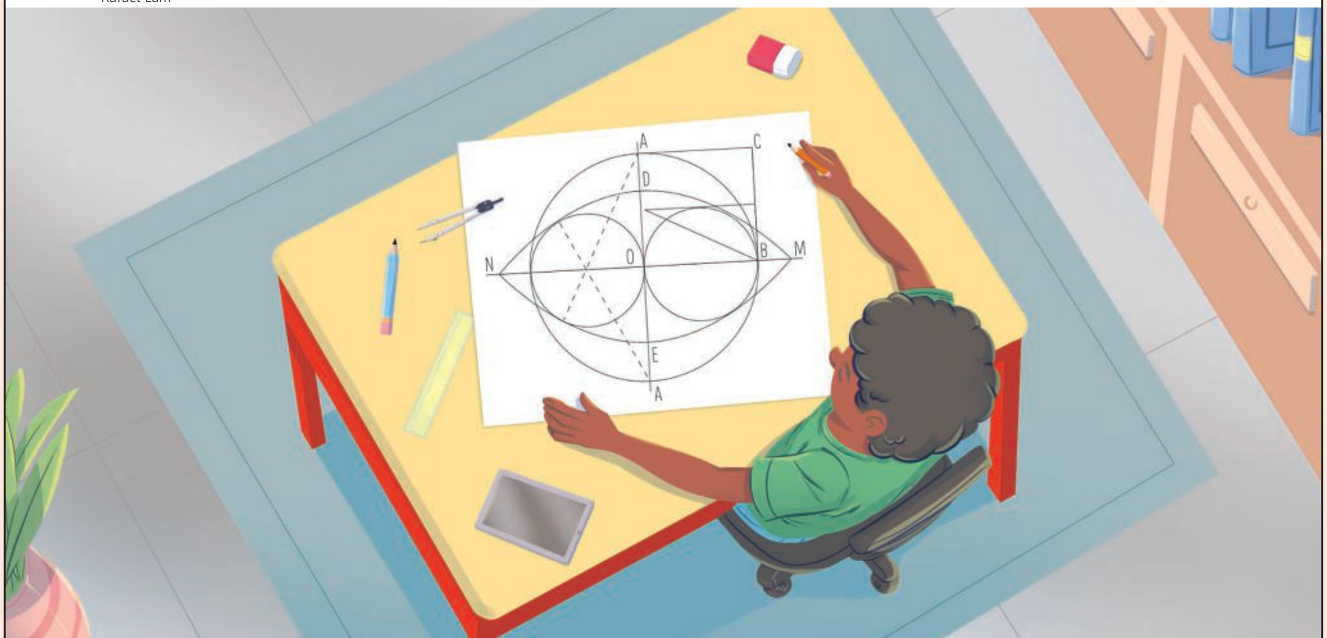
- Estabeleça uma relação com o componente curricular **História** e, se necessário, solicite auxílio do professor responsável pelo componente para conversar um pouco mais com os alunos sobre a civilização egípcia, que é citada na atividade. Diga, por exemplo, que é um povo que se instalou na região nordeste da África, em um local árido, embora próximo ao rio Nilo. No período citado, denominado Médio Império, os faraós detinham o poder e havia muitas minas de ouro e cobre. A evolução matemática dos egípcios ocorreu mesmo com a ausência de recursos para a resolução de problemas, e a necessidade de se desenvolver técnicas para a construção civil foi preponderante para que alcançassem tamanho desenvolvimento científico.

Matemática em destaque

31. Na Matemática, alguns problemas foram discutidos por muitos anos, exigindo a dedicação de diversos estudiosos ao longo da história. Um desses problemas é o chamado **quadratura do círculo**. Esse problema, que já se demonstrou matematicamente impossível de ser resolvido, consiste em construir um quadrado com a mesma área de um determinado círculo usando instrumentos euclidianos, isto é, régua não graduada e compasso.

Buscando encontrar solução para a quadratura do círculo, os egípcios, por volta de 1800 a.C., chegaram a uma aproximação na qual se tomava a medida do comprimento do lado do quadrado igual a $\frac{8}{9}$ da medida do comprimento do diâmetro do círculo.

Rafael Lam



a) Em que consiste o problema matemático da quadratura do círculo? Esse problema tem solução? O problema consiste em construir um quadrado com a mesma medida da área de um círculo dado, utilizando apenas régua não graduada e compasso. Esse problema não tem solução.

b) De acordo com a aproximação apresentada pelos egípcios, qual deve ser a medida do comprimento do lado de um quadrado cuja medida da área é, aproximadamente, igual à de um círculo com comprimento do diâmetro medindo 18 cm? 16 cm

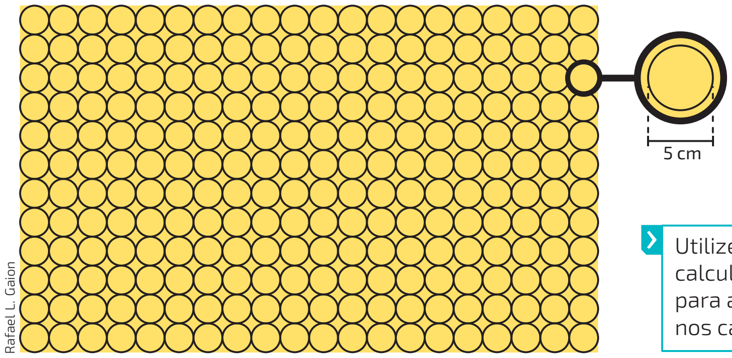
c) Em relação ao item **b**, calcule a medida da área do círculo e do quadrado. Em seguida, compare os resultados obtidos.

c) medida da área do círculo: aproximadamente 254,34 cm^2; medida da área do quadrado: 256 cm^2; Resposta pessoal. Espera-se que os alunos observem, no item **c**, que as medidas das áreas são diferentes, porém próximas.

d) Junte-se a um colega, escolham a medida do comprimento do diâmetro de um círculo e calculem a medida de sua área. Em seguida, utilizando a aproximação apresentada pelos egípcios, determinem a medida do comprimento do lado do quadrado correspondente à medida de sua área. Resposta pessoal.

- Para complementar essa atividade, sugira que os alunos construam um círculo com um raio qualquer para trocarem com um colega e, com base na aproximação egípcia da quadratura do círculo, construam um quadrado com medida de área aproximada à do círculo recebido. Espera-se que eles utilizem régua na obtenção da medida do raio do círculo para, na sequência, realizarem o cálculo.

32. Para fazer forminhas de doces, uma empresa de produção de embalagens utiliza uma máquina que recorta círculos com comprimento do diâmetro medindo 5 cm, de placas retangulares de papel com 100 cm de medida de comprimento por 60 cm de medida de largura, conforme indicado a seguir.



Utilize uma calculadora para auxiliá-lo nos cálculos.

Observe que a placa não é aproveitada inteiramente, sobrando uma parte, que é reciclada. Qual é a medida aproximada da área da placa que é reaproveitada para reciclagem? $1\,290\ cm^2$

Explorando o que estudei

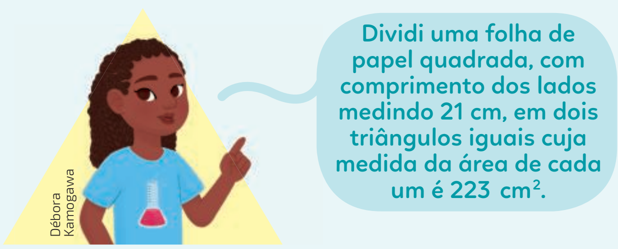
Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? medida da área de polígonos e de círculos

2. Além das situações apresentadas neste capítulo, cite outras em que são necessários conhecimentos acerca de medida da área. Resposta pessoal.

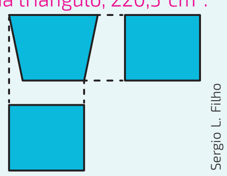
3. A medida da área do retângulo pode ser obtida calculando-se o produto das medidas dos comprimentos dos dois lados não paralelos. Podemos utilizar o mesmo procedimento para calcular a medida da área de qualquer paralelogramo? Justifique. não; Possível resposta: esse procedimento é válido somente para paralelogramos que são retângulos.

4. Leia o que Sabrina está dizendo.



A afirmação feita por Sabrina é verdadeira ou falsa? Justifique.
falsa; Possível resposta: a medida da área do quadrado é $441\ cm^2$ e de cada triângulo, $220{,}5\ cm^2$.

5. Sabendo que os retângulos são congruentes e que o trapézio é isósceles, podemos afirmar que a medida da área do trapézio é igual à medida da área de cada um dos retângulos? sim



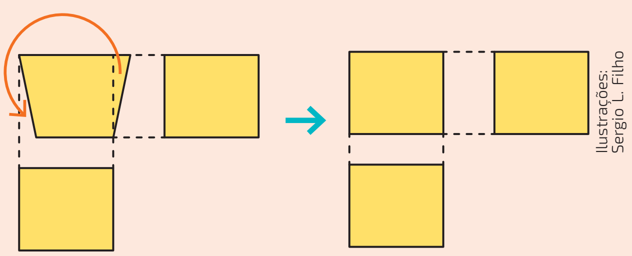
6. Como pode ser obtida a medida da área do círculo?
Espera-se que os alunos respondam que realizando a multiplicação da medida do comprimento do raio do círculo pela metade da medida do comprimento da circunferência.

- Caso não haja calculadoras para todos os alunos, verifique a possibilidade de formar duplas para resolver a atividade **32** ou leve mais calculadoras para a sala de aula. Veja uma possível resolução desse desafio:
  - Cada forminha possui 5 cm de diâmetro, logo cabem $\frac{100}{5} = 20$ forminhas no comprimento e $\frac{60}{5} = 12$ na largura, ou seja, $20 \cdot 12 = 240$ no total. Cada forminha possui $\pi(2{,}5)^2 = 3{,}14\ (6{,}25) = 19{,}625\ cm^2$ de medida de área, e a placa inteira possui $100 \cdot 60 = 6\,000\ cm^2$. Sendo assim, a parte reaproveitada será de $6\,000 - (240 \cdot 19{,}625) = 1\,290\ cm^2$.

Avaliação

- Utilize a seção **Explorando o que estudei** para realizar uma avaliação informal com os alunos. Observe e faça anotações enquanto eles respondem às questões propostas e procure identificar habilidades e dificuldades apresentadas. Com base nas observações e anotações, reflita sobre suas ações durante o trabalho com esse capítulo, com a intenção de confirmá-las ou, se necessário, modificá-las, a fim de contribuir com a aprendizagem dos alunos.

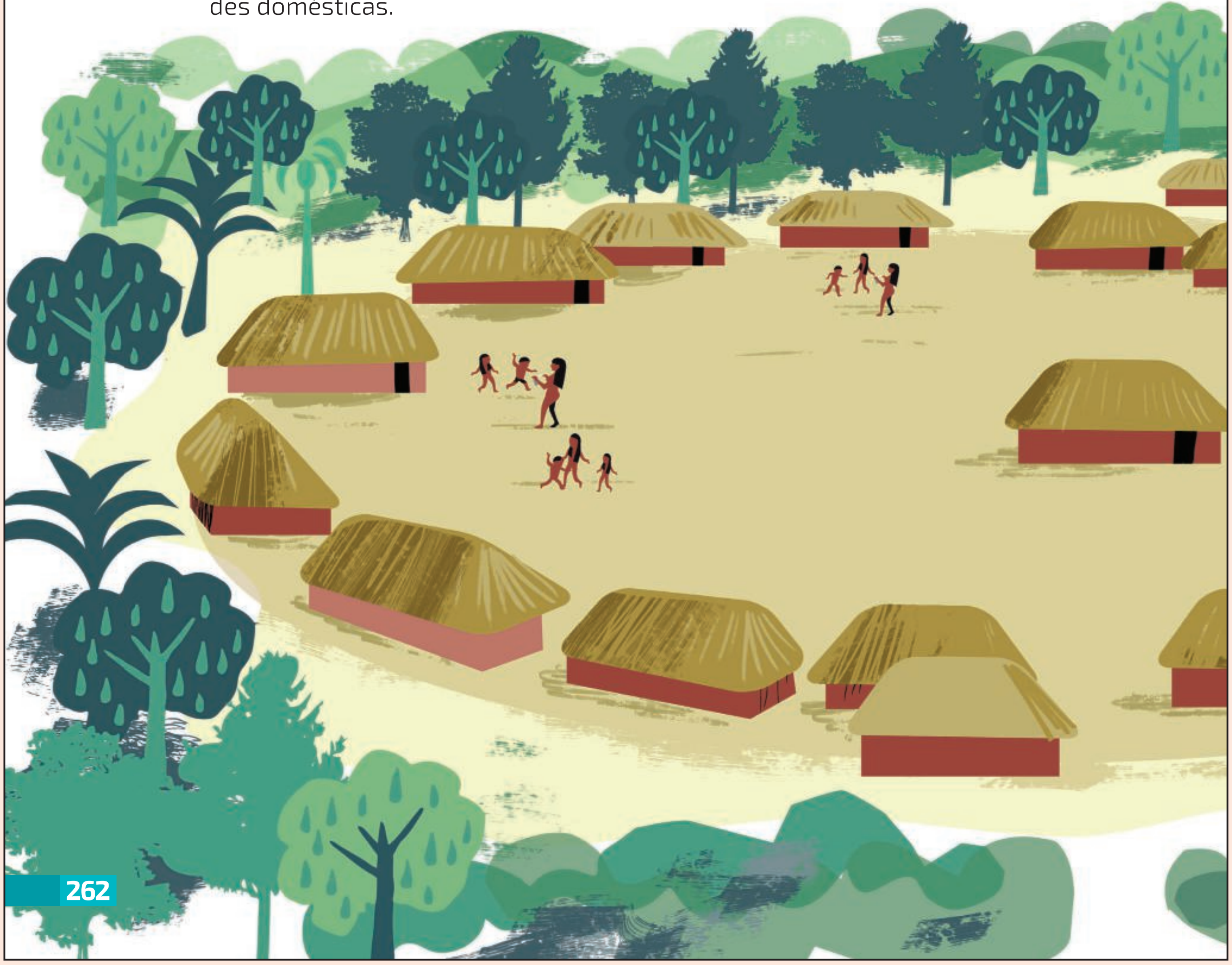
- Na questão **5**, verifique se os alunos perceberam que parte do trapézio pode ser decomposta de maneira que se obtenha um retângulo congruente aos apresentados, conforme segue:



Aldeia Aiha

Alguns povos indígenas vivem em casas chamadas ocas, que juntas formam as aldeias. A aldeia Aiha, dos indígenas Kalapalo, tem o formato parecido com o de um grande círculo cuja região interna é descampada e funciona como uma praça pública para as atividades comunitárias ou como um palco central para os rituais. Próximo ao centro há uma construção chamada *kwakutu*, onde são guardados os materiais utilizados nesses rituais, por exemplo, as flautas sagradas *kagutu*, tocadas exclusivamente pelos homens.

As ocas estão posicionadas sobre uma figura que lembra uma circunferência, facilitando o trajeto entre elas e o *kwakutu*, além de promover a cooperação entre vizinhos com laços de parentesco. Esse formato manifesta ainda uma distinção cultural fundamental entre homens e mulheres na vida dos Kalapalo: a praça predominantemente masculina e as ocas, espaço feminino e de atividades domésticas.



BNCC em foco

- A seção apresentada nessas páginas desenvolve o tema contemporâneo **Diversidade cultural**, pois destaca elementos do modo de vida de populações nativas e, com isso, auxilia na valorização das minorias étnicas brasileiras, que ainda sofrem com o preconceito e a discriminação historicamente demarcados, como é o caso dos indígenas. Além desse, outro tema contemplado é **Educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena**, importante para valorizar a riqueza das cultura indígena. Fale sobre a necessidade de respeitar os direitos dessa população, que deve ter seu território demarcado e livre dos anseios de grandes corporações exploratórias.
Junto aos alunos, realize uma leitura das cenas e questione se eles já tiveram contato com comunidades indígenas e se já viram uma oca. Aproveite para estabelecer uma conexão com a **Competência geral 6** que propõe a valorização da diversidade de saberes e vivências culturais que compõem o Brasil.

- A leitura do texto pode ser realizada coletivamente. Instigue os alunos a expressarem suas opiniões sobre o tema, sempre tomando cuidado para que haja respeito mútuo. Explique que as construções das ocas variam conforme a tribo, e, se possível, conduza uma pesquisa sobre outros tipos de habitação indígena. Verifique se são usados materiais diferentes, se a disposição das ocas é distinta e outras informações que considerar relevantes e que forem suscitadas pelos alunos. Ao final, saliente que essas construções têm por princípio integrarem-se ao ambiente e preservar o sentido de comunidade.

Analisando com cidadania

Anote no caderno

Respostas nas orientações ao professor.

1. O espaço descampado no centro da aldeia é utilizado para quais finalidades?

2. Como a disposição circular das ocas na aldeia facilita o modo de vida dos Kalapalo?

Analisando com a Matemática

Anote no caderno

3. No texto aparecem as palavras “círculo” e “circunferência” em momentos distintos. Explique a diferença entre essas duas figuras geométricas planas.

4. Supondo que a maior medida de distância entre duas ocas na circunferência dessa aldeia seja de 300 m, qual é a área da região circular? Considere $\pi = 3{,}14$.

Representação artística da aldeia Aihа, localizada no parque indígena Xingu, no estado do Mato Grosso.

Respostas

1. É utilizado como praça pública para as atividades comunitárias ou como palco central para os rituais.

2. A disposição das ocas facilita o trajeto entre elas e o *kwakutu* que está disposto próximo ao centro, além de promover a cooperação entre os vizinhos.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos expliquem que o círculo compreende toda a região interna, inclusive o contorno, enquanto a circunferência, apenas o contorno.

4. aproximadamente 70 650 m^2

Nesse capítulo, será retomado com os alunos o estudo das unidades de medida de volume, a fim de auxiliá-los no cálculo da medida do volume do paralelepípedo retângulo e do cilindro. Para tanto, o estudo das medidas de capacidade será trabalhado com o intuito de que sejam capazes de relacioná-las às medidas de volume.

- As páginas de abertura apresentam informações acerca das chuvas, principalmente sobre como é realizada a medição da quantidade de chuva ocorrida em certa localidade. Também é mostrado um exemplo de pluviômetro e como pode ser interpretada a unidade de medida milímetros quando utilizada para medir quantidade de chuva. Essa abordagem fará com que o aluno perceba algumas aplicações práticas de conceitos relacionados a volume e capacidade, que serão tratados nesse capítulo.
- Uma sugestão de condução do trabalho com a abertura é organizar a turma em duplas para a leitura do texto e para responder às questões. Em seguida, promova um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. Além disso, converse também com os alunos sobre as consequências da falta ou do excesso de chuvas em uma região.
- Para complementar o estudo do tema, é possível trabalhar a construção de pluviômetros utilizando materiais recicláveis. É importante que todo o processo de construção seja analisado e discutido com os alunos, como a definição da graduação do pluviômetro. Supervisione toda a construção.

Capítulo 12

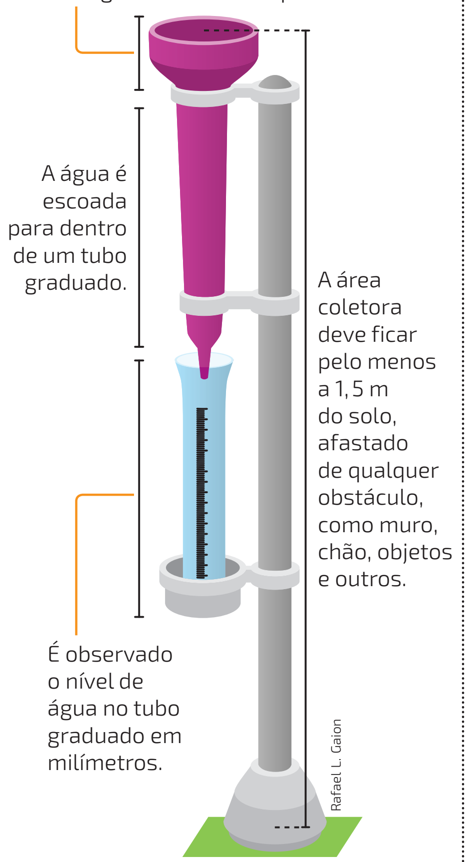
Medidas de volume e de capacidade

Jim Cummins/Image Bank/ Getty Images

Você sabe por que medimos a precipitação de chuva em milímetros, já que essa é uma unidade de medida de comprimento? A explicação é simples: como a chuva é líquida, precisamos comparar a medida do volume de precipitação com base em um recipiente de armazenamento. Nesse caso, a medida em milímetros representa o nível que a água da chuva atingiria em um recipiente, em forma de paralelepípedo retângulo, cuja medida da área da base é 1 m ^{2}. Assim, se em uma localidade a previsão indica precipitação de 3 mm de chuva no dia, significa que a água atingirá uma medida de altura de 3 mm no recipiente imaginário, o que representa 3 L de chuva por metro quadrado.

Na prática, porém, usamos instrumentos que realizam essas medições. O mais comum deles é o pluviômetro, composto basicamente de um funil, um tubo e um medidor em milímetros. Depois de uma chuva, a medida em milímetros que o nível da água coletada no aparelho atingir indicará "quanto choveu".

Como funciona o pluviômetro



Rafael L. Gaion

Previsão do tempo

Veja mais informações sobre as chuvas em sua região no *site*:
<www.cptec.inpe.br>
(acesso em: 20 ago. 2018)

Meninos embaixo de um guarda-chuva, em um dia de chuva.

Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

A Na região em que você mora, já houve algum problema relacionado a chuvas irregulares? Quais foram os efeitos?

B Se em um dia chuvoso o pluviômetro marcar 10 mm, isso significa que choveu, em média, quantos litros por metro quadrado?

C Pesquise na internet ou em jornais a quantidade de chuva prevista para o mês atual na cidade em que você mora.

265

Pensando nisso...

A Resposta pessoal.

B 10 L

C Resposta pessoal.

- No item **A**, explique aos alunos que a irregularidade nas chuvas pode ser caracterizada pelo excesso ou pela escassez.
- Ao abordar o item **B**, pergunte aos alunos qual será a marcação no pluviômetro se em certo dia chover, em média, 25 L por metro quadrado.
- No item **C**, verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática ou levar alguns jornais para a sala de aula, a fim de que realizem a pesquisa solicitada.

Relacionando saberes

- Pergunte aos alunos se eles sabem explicar como se formam as chuvas, estabelecendo uma relação com o componente curricular **Ciências**. É provável que já tenham estudado algo relacionado a esse conteúdo, então aproveite para relembrá-los pedindo que façam um esquema na lousa mostrando as principais etapas da formação, como o aquecimento da água seguido da evaporação, a formação de nuvens, o encontro com massas de ar frio, que condensam o vapor e fazem ele se transformar em água e cair em forma de chuva.

BNCC em foco

- O assunto tratado nas páginas de abertura dá margem para o desenvolvimento da **Competência geral 2**, já que incentiva o pensamento científico por meio de uma abordagem criativa que estimula a vontade de aprender sobre outras áreas, e permite também o trabalho com o tema contemporâneo **Educação ambiental**, sobretudo no que tange às mudanças climáticas e seus efeitos na ocorrência de chuvas.

Objetivos do capítulo

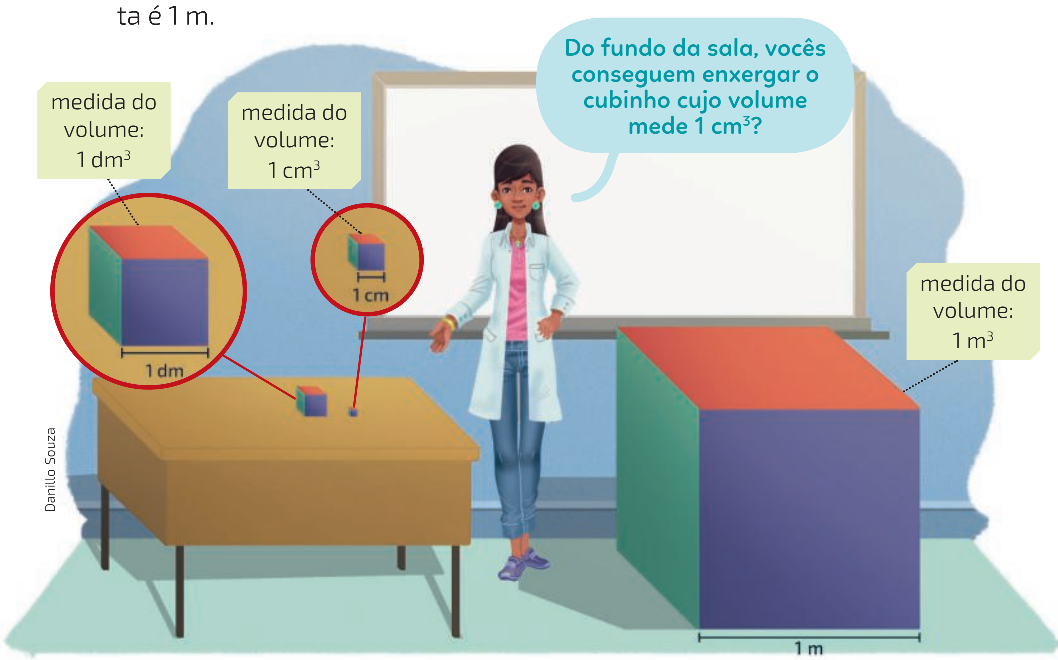
- Reconhecer unidades de medida de volume e de capacidade.
- Transformar unidades de medida de volume.
- Calcular a medida do volume de paralelepípedos retângulos e de cilindros.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo cálculo da medida de volume.
- Estabelecer relações entre as unidades de medida de volume e de capacidade.

- Para que os alunos lembrem e compreendam melhor o conceito de volume, leve para a sala de aula o material dourado, a fim de que eles manipulem e construam pilhas compostas de cubinhos, de modo a determinar a medida do volume dessas pilhas considerando cada cubinho uma unidade de medida de volume.

Medidas de volume

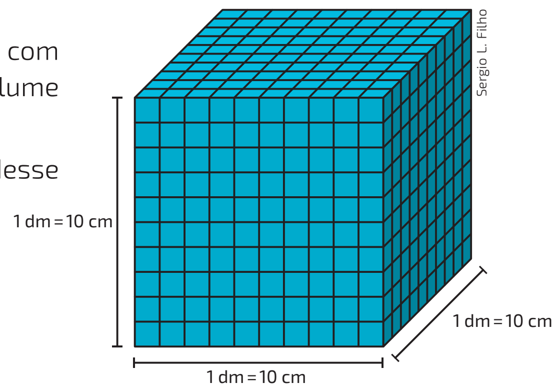
Entre as principais unidades de medida de volume podemos destacar o **centímetro cúbico** (cm^3), o **decímetro cúbico** (dm^3) e o **metro cúbico** (m^3).

- 1 cm^3 é a medida do volume de um cubo cuja medida do comprimento da aresta é 1 cm.
- 1 dm^3 é a medida do volume de um cubo cuja medida do comprimento da aresta é 1 dm.
- 1 m^3 é a medida do volume de um cubo cuja medida do comprimento da aresta é 1 m.



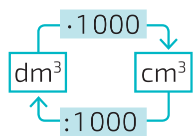
O cubo ao lado foi construído com 1 000 cubinhos cuja medida do volume de cada um é 1 cm^3.

Note que a medida do volume desse cubo é 1 000 cm^3 ou 1 dm^3.



$$1\ dm^3 = 1\,000\ cm^3$$

Para convertermos uma medida em centímetros cúbicos em decímetros cúbicos, devemos dividi-la por 1 000. Já para convertermos uma medida em decímetros cúbicos em centímetros cúbicos, devemos multiplicá-la por 1 000.



266

Material digital

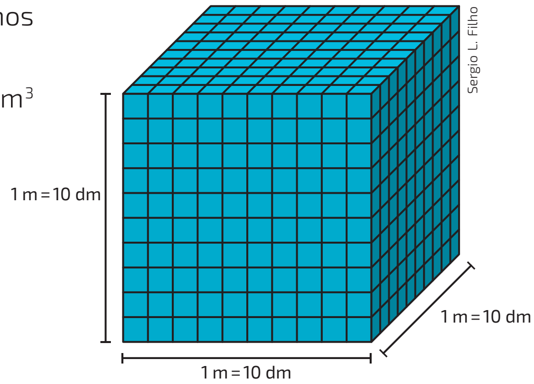
- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **10**, **11** e **12** do 4º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

O cubo ao lado é formado por 1 000 cubinhos cuja medida do volume de cada um é 1 dm^3.

A medida do volume desse cubo é 1 000 dm^3 ou 1 m^3.

Para convertermos uma medida em decímetros cúbicos em metros cúbicos, devemos dividi-la por 1 000. Já para convertermos uma medida em metros cúbicos em decímetros cúbicos, devemos multiplicá-la por 1 000.

$$m^3 \xrightarrow{\cdot 1000} dm^3 \qquad dm^3 \xrightarrow{:1000} m^3$$



1 m^3 = 1 000 dm^3

Observe alguns exemplos de conversão de unidades de medida de volume.

$2,6\ dm^3 \xrightarrow{\cdot 1000} 2\,600\ cm^3$ $\qquad$ $3\ m^3 \xrightarrow{\cdot 1000} 3\,000\ dm^3$ $\qquad$ $512\ cm^3 \xrightarrow{:1000} 0,512\ dm^3$ $\qquad$ $1\,200\ dm^3 \xrightarrow{:1000} 1,2\ m^3$

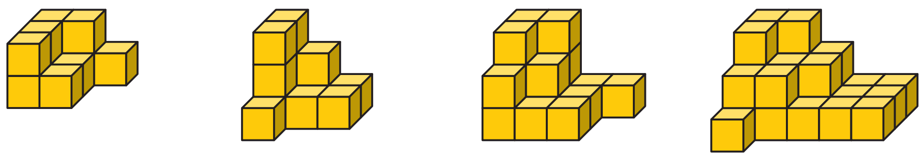
Atividades

Anote no caderno

1. Determine, em centímetros cúbicos, a medida do volume de cada pilha formada por cubos cuja medida do comprimento da aresta é 1 cm.

Não há cubos ocultos atrás das pilhas.

a) 11 cm^3 **b)** 12 cm^3 **c)** 18 cm^3 **d)** 27 cm^3



Ilustrações: Sergio L. Filho

2. Copie as igualdades substituindo cada ■ pelo número adequado.

a) 1,2 dm^3 = ■ cm^3 1 200

b) ■ m^3 = 125 000 cm^3 0,125

c) 4 000 cm^3 = ■ dm^3 4

d) ■ dm^3 = 0,275 m^3 275

3. Um caminhão está sendo carregado com caixas cúbicas iguais.

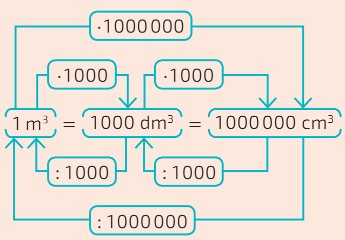
a) No máximo, quantas caixas iguais a essas podem ser colocadas no caminhão? 54 caixas

b) Junte-se a um colega e verifiquem se há uma maneira de organizar essas caixas no caminhão de modo que caiba uma quantidade maior de caixas. não há

Rafael L. Gaion

• Explique aos alunos que os cubos apresentados nessa pilha e na pilha da página anterior não estão em verdadeira grandeza nem proporcionais entre si.

• Para auxiliar na resolução de atividades em que são necessárias conversões de unidades de medida de volume, sugira aos alunos que construam um esquema parecido com o apresentado ao lado.



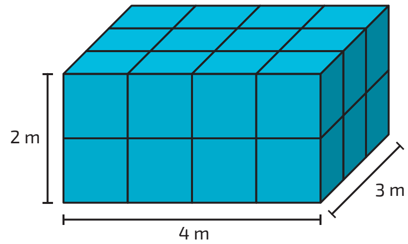
• Ao trabalhar com a atividade **3**, diga aos alunos que as caixas não podem ultrapassar a altura da carroceria do caminhão.

BNCC em foco

- Com base no trabalho com o tópico **Medida do volume do paralelepípedo retângulo**, espera-se que os alunos sejam capazes de resolver e elaborar problemas que sejam solucionados utilizando cálculo da medida do volume de recipientes com formato de um bloco retangular, de modo a contemplar a habilidade **EF08MA21** da BNCC.

- É importante destacar aos alunos que a medida do volume de um paralelepípedo pode ser determinada calculando a medida da área da base e multiplicando o resultado obtido pela medida da altura do paralelepípedo. A compreensão desse conceito auxiliará no cálculo da medida do volume do cilindro.

Medida do volume do paralelepípedo retângulo



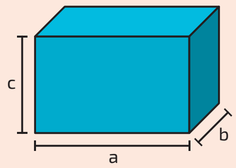
O paralelepípedo retângulo ao lado foi construído com cubos cuja medida do volume de cada um é 1 m^3.

Temos que a medida **V** do volume desse paralelepípedo retângulo é igual à soma das medidas dos volumes dos cubos que o formam. Para obtermos a quantidade total de cubos, multiplicamos a quantidade de cubos em cada camada pela quantidade de camadas.

$$V = \underbrace{4 \cdot 3}_{\text{quantidade de cubos em cada camada}} \cdot \underbrace{2}_{\text{quantidade de camadas}} = 24$$

Portanto, a medida do volume desse paralelepípedo retângulo é 24 m^3.

- A medida **V** do volume de um paralelepípedo retângulo é dada pela fórmula:



$$V = a \cdot b \cdot c$$

em que **a**, **b** e **c** são as medidas de suas dimensões.

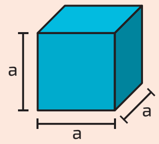
> É possível demonstrar que essa fórmula é válida para quaisquer medidas dadas por números reais positivos. Porém, não apresentaremos essa demonstração neste momento.

Desse modo, dado um paralelepípedo retângulo cuja medida do comprimento é **a**, da largura é **b** e da altura é **c**, podemos escrever:

$$V = \underbrace{a \cdot b}_{\text{Medida da área da base } (A_B)} \cdot c = A_B \cdot c$$

> Lembre-se de que as faces de um paralelepípedo retângulo são retângulos.

- O cubo é um caso particular de paralelepípedo retângulo, em que as dimensões têm medidas iguais. Assim, a medida **V** do volume do cubo é dada pela fórmula:



$$V = a \cdot a \cdot a \text{ ou } V = a^3$$

em que **a** é a medida do comprimento da aresta do cubo.

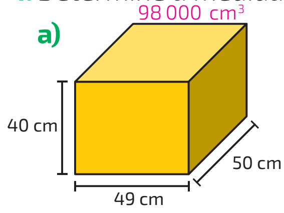
Ilustrações: Sergio L. Filho

Atividades

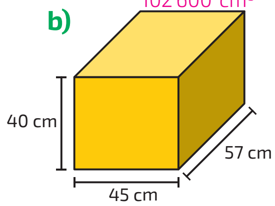
Anote no caderno

4. Determine a medida do volume de cada paralelepípedo retângulo.

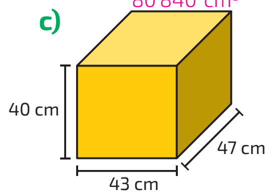
a) 98 000 cm^3



b) 102 600 cm^3



c) 80 840 cm^3

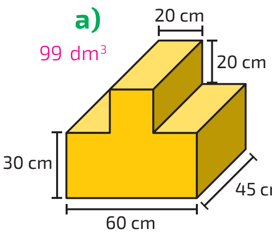


Ilustrações: Sergio L. Filho

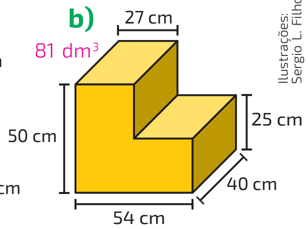
5. A medida do comprimento de um paralelepípedo retângulo é o triplo da medida de sua largura e o dobro da medida de sua altura. Sabendo que a medida do volume desse paralelepípedo é 36 cm³, determine, em centímetros, a medida de suas dimensões. medida do comprimento: 6 cm; medida da largura: 2 cm; medida da altura: 3 cm

6. Calcule, em decímetros cúbicos, a medida do volume de cada figura, sabendo que elas são compostas de paralelepípedos retângulos.

a) 99 dm³



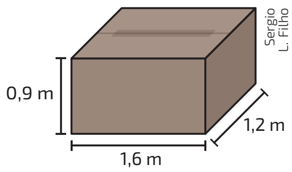
b) 81 dm³



Ilustrações: Sergio L. Filho

7. Determine a medida das dimensões de outras duas caixas com formato de paralelepípedo retângulo que tenham volume com medida igual ao da caixa apresentada a seguir.

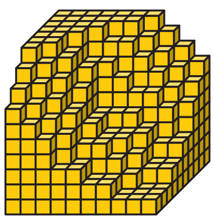
> A caixa apresentada tem formado de paralelepípedo retângulo.



Sergio L. Filho

7. Possível resposta: caixa **A**: medida do comprimento: 0,3 m; medida da largura: 1,6 m; medida da altura: 3,6 m; caixa **B**: medida do comprimento: 0,9 m; medida da largura: 4,8 m; medida da altura: 0,4 m.

8. A pilha possui 625 cubos. Cada um desses cubos tem aresta com medida de comprimento igual a 2 cm.



Sergio L. Filho

a) Qual é, em centímetros cúbicos, a medida do volume dessa pilha? 5 000 cm³

b) Quantos cubos idênticos a esses devem ser acrescentados à pilha para que ela fique com volume medindo 7 dm³? 250 cubos

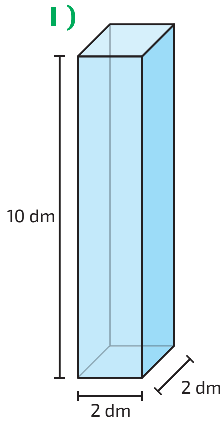
9. Um paralelepípedo retângulo cuja medida do volume é 48 m³ possui largura com medida igual ao dobro da medida da altura.

a) Escreva a medida do volume desse paralelepípedo retângulo em decímetros cúbicos. 48 000 dm³

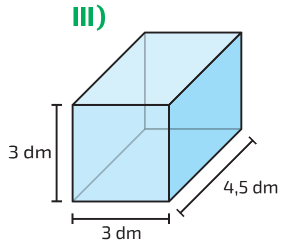
b) Sabendo que a medida do comprimento desse paralelepípedo retângulo é 6 m, determine, em metros, a medida de sua largura e de sua altura. medida da largura: 4 m; medida da altura: 2 m

10. Estime qual dos recipientes com formato de paralelepípedo retângulo possui o volume interno de maior medida. Em seguida, realize os cálculos e verifique se sua estimativa está correta. III

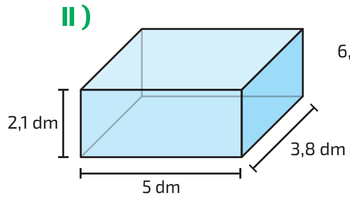
I)



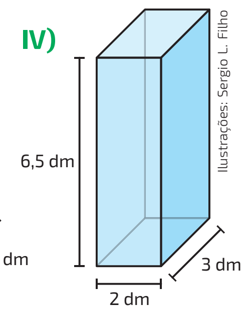
III)



II)



IV)



Ilustrações: Sergio L. Filho

Agora, de acordo com os recipientes apresentados, escreva um problema envolvendo volume e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal.

- Caso os alunos tenham dificuldade em resolver a atividade **6**, sugira que decomponham as figuras geométricas espaciais em paralelepípedos retângulos e calculem a medida do volume de cada parte obtida, adicionando os resultados.
- Na atividade **7**, peça aos alunos que exponham as estratégias utilizadas em suas resoluções, como, por exemplo, a de escrever uma expressão como $x \cdot y \cdot z = 1{,}728$, atribuir valores para duas variáveis e calcular o valor da terceira. Desse modo, é possível utilizar o conhecimento adquirido com o trabalho realizado no capítulo **4** desse volume.
- Na atividade **8**, diga aos alunos que não há cubos atrás das pilhas.
- Aproveite o trabalho com a atividade **10** para avaliar o conhecimento dos alunos em fazer estimativas. A medida do volume interno dos recipientes I, II, III e IV são, respectivamente, 40 dm³, 39,9 dm³, 40,5 dm³ e 39 dm³. Avalie também a leitura e interpretação dos alunos com relação à imagem e ao modo como organizam suas ideias utilizando o conhecimento matemático na produção do texto. Eles podem elaborar problemas como:
  - Em qual dos recipientes é possível colocar 5 cubos cuja medida do comprimento da aresta é 2 dm, sem que sobre espaço?

    R recipiente I

BNCC em foco

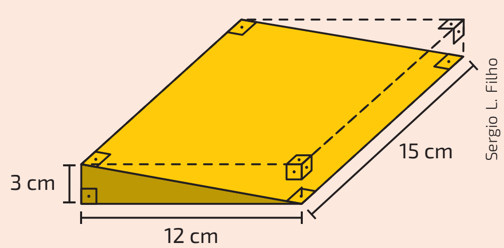
- Aproveite o trabalho com a atividade **11** para conversar com os alunos sobre a importância da Matemática no dia a dia, em situações que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio lógico, utilizando os conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo, contemplando a **Competência específica de Matemática 2**.

- Na resolução do item **a** da atividade **11**, se julgar necessário, peça aos alunos que consultem o capítulo **2** desse volume e retome com eles o conceito de raiz cúbica.
O item **b** é oportuno para avaliar como os alunos realizam a leitura e interpretação das informações para elaborarem a questão. Eis uma possível questão:
  - Qual deveria ser, no máximo, a medida da largura da bolsa **III** para que ela pudesse ser transportada como bagagem de mão de acordo com as normas apresentadas? Qual seria a medida do seu volume?
  R 25 cm; 50 625 cm³

- Na atividade **12**, é importante os alunos perceberem que o sólido pode ser decomposto em duas partes: um paralelepípedo retângulo com dimensões de medidas 4 cm, 2 cm e 3 cm e outro sólido com medida do volume correspondente à metade da medida do volume de um paralelepípedo retângulo com dimensões de medidas 4 cm, 3 cm e 3 cm. Assim, a solução será dada por:

$V = 4 \cdot 2 \cdot 3 + \dfrac{4 \cdot (5-2) \cdot 3}{2} = 42$; 42 cm³

- Veja a seguir uma possível figura que os alunos poderão construir na atividade **13**.

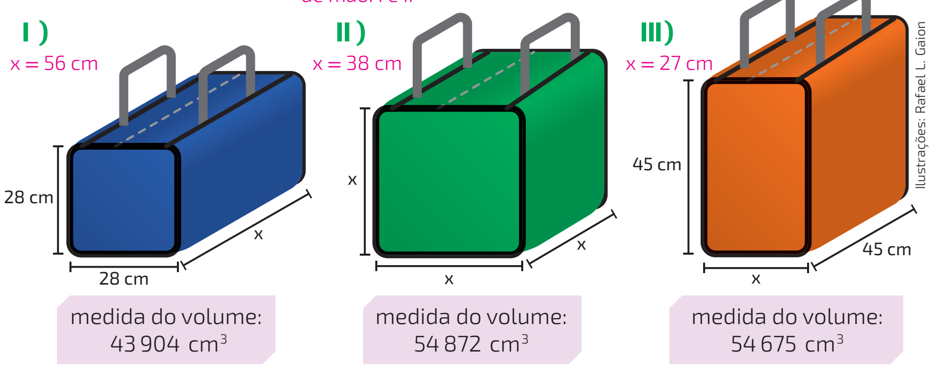


R 270 cm³

11. Em determinada companhia área, com exceção de crianças de até 2 anos pagando 10% da tarifa, todo passageiro de voos em aeronaves com mais de 50 assentos tem o direito de levar, entre os itens de bagagem de mão, uma bolsa, uma maleta ou um equipamento. Essa bagagem pode ter, no máximo, 10 kg e dimensão total com medida inferior ou igual a 115 cm.

> A dimensão total é obtida adicionando a medida da largura, da altura e do comprimento da bagagem transportada.

a) Considerando que as bolsas tenham forma aproximada de paralelepípedos retângulos, determine o valor de **x** em cada uma delas e verifique quais podem ser transportadas como bagagem de mão de acordo com as normas apresentadas. bolsas que podem ser levadas como bagagem de mão: I e II

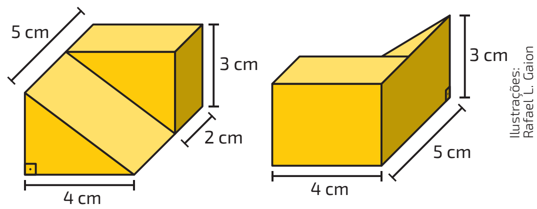


b) De acordo com as informações apresentadas nesta atividade, elabore uma questão envolvendo medida de volume e peça a um colega que a resolva. Em seguida, verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal.

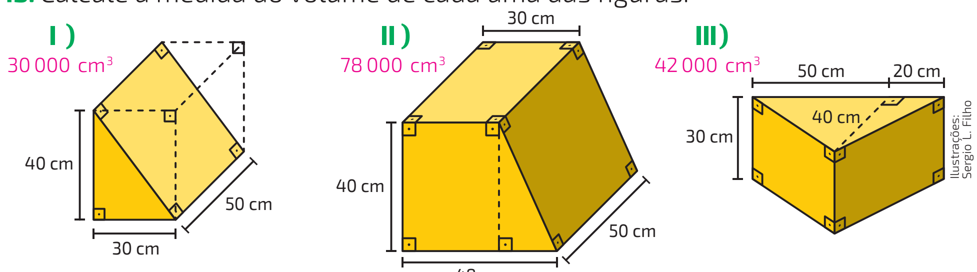
c) Junte-se a um colega e determinem a medida das dimensões e do volume de outras bolsas, com formato que lembre paralelepípedos retângulos, que possam ser transportadas como bagagem de mão.

11. c) Possíveis respostas: 33 cm, 47 cm e 33 cm, V = 51 183 cm³; 42 cm, 39 cm e 32 cm, V = 52 416 cm³; 30 cm, 46 cm e 39 cm, V = 53 820 cm³

12. Observe uma mesma peça em duas posições diferentes. Em seguida, calcule a medida de seu volume. 42 cm³



13. Calcule a medida do volume de cada uma das figuras.



Desenhe uma figura como as apresentadas acima e indique a medida das dimensões. Em seguida, peça a um colega que calcule a medida do volume dessa figura. Por fim, confira o resultado obtido por ele. Resposta pessoal.

Medida do volume do cilindro

Ao observamos à nossa volta, podemos notar que diversos objetos lembram cilindros. Em muitos casos é importante saber determinar a medida de seu volume.


Ken Wolter/Shutterstock.com

Reservatório.

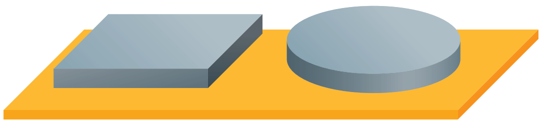

David Tadevosian/Shutterstock.com

Latas de tinta.

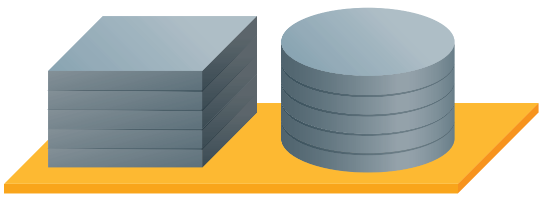

Gerisima/Shutterstock.com

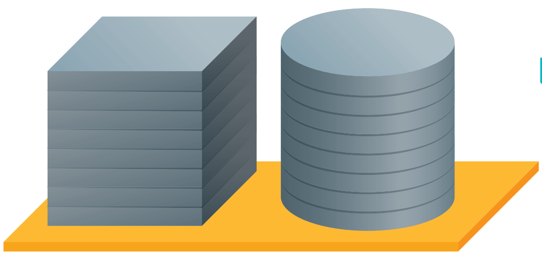
Extintor de incêndio.

Para obtermos uma fórmula para calcular a medida do volume do cilindro, vamos considerar algumas chapas metálicas em forma de cilindro e de paralelepípedo retângulo que possuam a mesma medida de altura e a mesma medida de volume.



Se construirmos “cilindros” e “paralelepípedos retângulos” de mesma medida de altura, formados ao empilharmos essas chapas, eles terão a mesma medida de volume.





Os pares de pilhas possuem alturas de mesma medida e volumes de mesma medida.

Dessa maneira, assim como o paralelepípedo retângulo, a medida **V** do volume do cilindro é dada por:

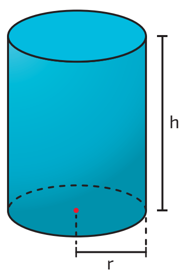
$$V = A_B \cdot h$$

em que A_B é a medida da área da base do cilindro e **h** é a medida de sua altura.

Como a base do cilindro é um círculo, podemos escrever essa fórmula da seguinte maneira:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

em que **r** é a medida do comprimento do raio do cilindro.



Ilustrações: Sergio L. Filho

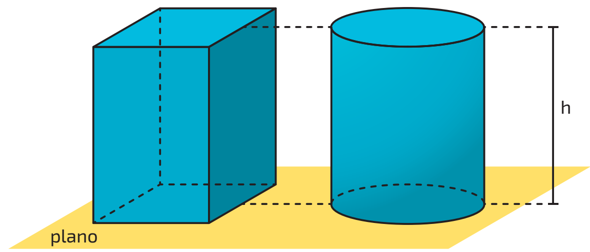
- Ao iniciar o trabalho com o tópico **Medida do volume do cilindro**, converse com os alunos para que eles citem exemplos de outros objetos que lembram cilindros.
- Se julgar necessário, peça para os alunos consultarem o capítulo **10** desse volume e retome com eles alguns conceitos de círculo, como raio, área e diâmetro, que serão utilizados no cálculo da medida do volume do cilindro.

Material digital

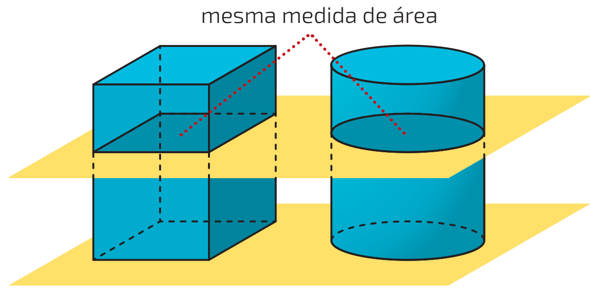
- O material digital dessa coleção apresenta o projeto **Funcionalidade das embalagens**, que possibilita um trabalho com o componente curricular **Língua Portuguesa**, além de alguns temas contemporâneos destacados na BNCC, sobretudo **Educação para o consumo**. Esse projeto busca promover a compreensão do conceito de medida de volume por meio da confecção de embalagens e propõe uma melhoria no formato de embalagens de produtos encontradas em supermercados, de modo que a medida do volume não se altere.

• No item **c** da atividade **15**, auxilie os alunos para que lembrem que a medida do comprimento do diâmetro é o dobro da medida do comprimento do raio.

De maneira geral, considere duas figuras geométricas espaciais quaisquer com a mesma medida de altura **h**, apoiadas em um mesmo plano.



Se todo plano que é paralelo ao plano em que as figuras estão apoiadas e que cruza essas figuras determina regiões planas de mesma medida de área, então essas figuras possuem a mesma medida de volume.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Essa propriedade baseia-se no princípio de Cavalieri, que recebe esse nome em homenagem ao matemático italiano Bonaventura Cavaliere (1598-1647).

Bonaventura Cavalieri.

De Agostini Picture Library/Album/Fotoarena/Coleção particular

Atividades

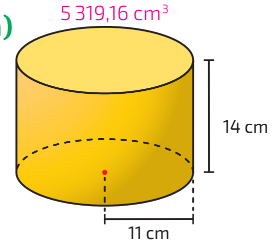
Anote no caderno

Nas atividades dessa seção, as medidas indicadas nos cilindros ou nos objetos que lembram cilindros referem-se à medida do comprimento do raio ou do diâmetro de sua base e, também, à medida de sua altura. Além disso, quando necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

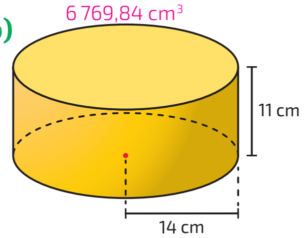
14. Qual é a medida do volume de um cilindro cuja medida da altura é 12 cm e a medida da área da base é $23{,}25\ \text{cm}^2$? $279\ \text{cm}^3$

15. Calcule a medida aproximada do volume de cada cilindro.

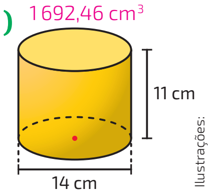
a) $5\,319{,}16\ \text{cm}^3$



b) $6\,769{,}84\ \text{cm}^3$

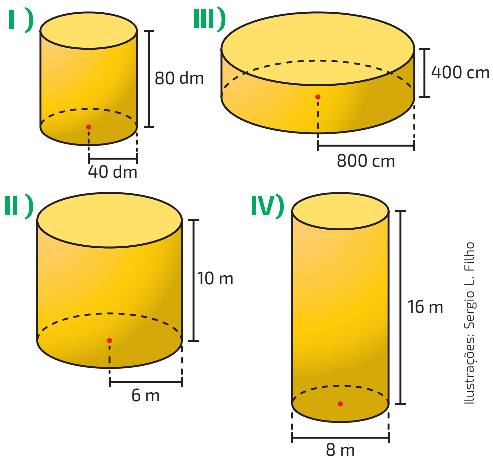


c) $1\,692{,}46\ \text{cm}^3$



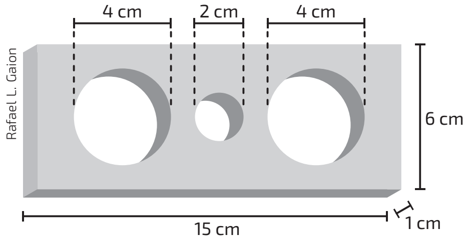
Ilustrações: Sergio L. Filho

16. Quais cilindros têm a mesma medida de volume? III e IV



17. Qual é a medida da altura de um cilindro cujo volume mede 2 041 cm³ e o comprimento do raio da base mede 10 cm? aproximadamente 6,5 cm

18. Em uma chapa de ferro com forma de paralelepípedo retângulo, um torneiro mecânico fez três furos circulares obtendo a peça a seguir.

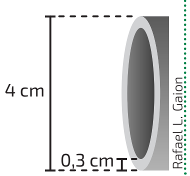


Na imagem estão indicadas as medidas das dimensões da chapa e, também, a medida do comprimento do diâmetro de cada um dos furos circulares.

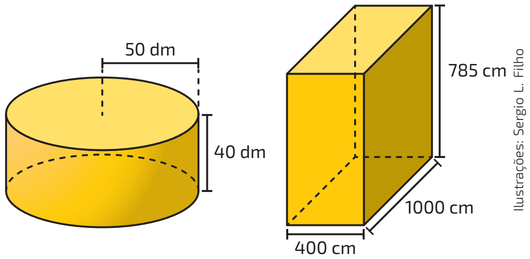
a) Qual é a medida aproximada do volume de material retirado da chapa de ferro para confeccionar essa peça? 28,26 cm³

b) Qual é a medida aproximada do volume dessa peça? 61,74 cm³

19. Qual é a medida aproximada do volume de PVC usado para fabricar o tubo representado ao lado, cujo comprimento mede 3 m? 1 045,62 cm³

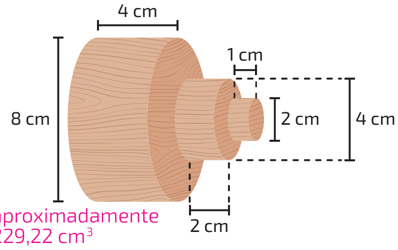


20. De acordo com as figuras a seguir, elabore um problema envolvendo volume e dê para um colega resolver. Depois, confira se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal.



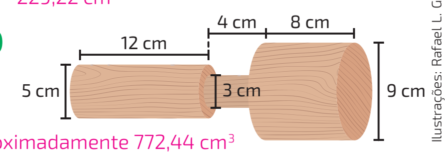
21. Calcule a medida do volume de cada peça.

a)



aproximadamente 229,22 cm³

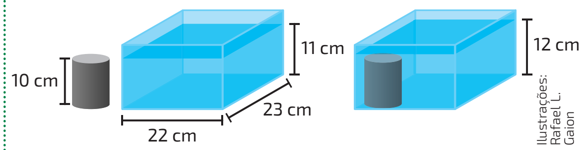
b)



aproximadamente 772,44 cm³

Note que as peças podem ser decompostas em partes que lembram cilindros.

22. Em um aquário com forma de paralelepípedo retângulo foi colocado um objeto de formato cilíndrico cuja medida da altura é 10 cm.



Antes Depois

a) Qual é a medida do volume de água no aquário? 5 566 cm³

b) Qual é a medida do volume desse objeto de formato cilíndrico? 506 cm³

c) Calcule a medida aproximada do comprimento do raio da base desse objeto de formato cilíndrico. 4,01 cm

- Na atividade **16**, a medida aproximada do volume dos cilindros **I**, **II**, **III** e **IV**, em metros cúbicos, é, respectivamente, 401,92 m³, 1103,4 m³, 803,84 m³ e 803,84 m³.
- Aproveite o trabalho com a atividade **20** para avaliar a elaboração de problemas por parte dos alunos. Eis um dos problemas que eles podem formular:
  - As figuras apresentadas possuem a mesma medida de volume? Justifique sua resposta.

    R Sim, pois a medida do volume do cilindro é 314 000 dm³ e a medida do volume do paralelepípedo retângulo é 314 000 000 cm³. Como 1 dm³ = 1 000 cm³, temos que o paralelepípedo retângulo também possui medida de volume igual a 314 000 dm³.
- A atividade **22** apresenta uma oportunidade para realizar a **Atividade complementar** do rodapé, que possibilita uma experiência prática relacionada ao estudo da medida do volume do cilindro.

Atividade complementar

Meida do volume do cilindro

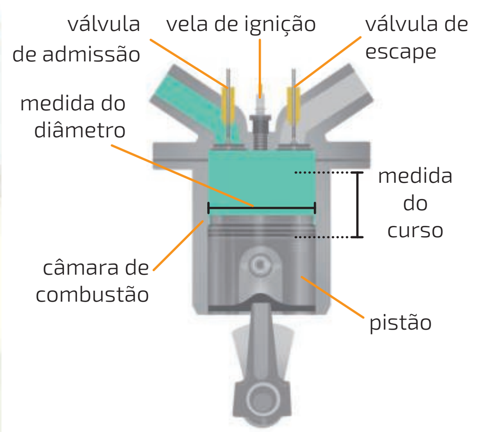
Materiais
- recipiente com formato de paralelepípedo retângulo
- embalagens lacradas com formato cilíndrico cheias de areia (a água não pode entrar nas embalagens)
- água

Desenvolvimento
- Com o auxílio dos alunos, coloque água no recipiente em quantidade suficiente para cobrir a embalagem cilíndrica que será inserida dentro dele.
- Calculem a medida do volume interno do recipiente ocupado pela água.
- Em seguida, introduzam a embalagem no recipiente de maneira que ela fique totalmente submersa.
- Calculem a medida do volume interno do recipiente ocupado pela água e pela embalagem.
- Calculem a diferença entre os resultados obtidos e determinem a medida do volume da embalagem cilíndrica.

- Na atividade **23**, a ideia de volume do cilindro é abordada com base em informações sobre os motores de combustão interna. Oriente os alunos a lerem o texto e, individualmente, responderem às questões propostas. Em seguida, faça comentários sobre a resolução das questões; caso haja dúvidas, peça para um aluno explicar ou expor sua resolução na lousa. Verifique se eles percebem que a quantidade e a capacidade do cilindro, no motor de combustão interna, são quem determinam as cilindradas (cc), e complete as informações do texto dizendo que o automóvel como é conhecido hoje é resultado de uma longa evolução, haja vista que até mesmo durante a Renascença, no século XV, o italiano Leonardo da Vinci já havia projetado um triciclo movido a corda, como alguns relógios, porém esse projeto nunca saiu do papel. Os automóveis surgiram três séculos depois, com o aperfeiçoamento da máquina a vapor, sendo que, em 1769, o engenheiro francês Nicolas-Joseph Cugnot criou uma carruagem a vapor e, em 1800, já existiam ônibus a vapor circulando pelas ruas de Paris. Já por volta de 1850 o inventor belga Étienne Lenoir criou um motor de explosão que utilizava gás como combustível, o que substituiria o motor a vapor e seria fundamental para a evolução dos automóveis. O alemão Karl Benz é considerado um dos pais da versão moderna do automóvel, pois foi o primeiro a patentear um carro com motor de explosão, que era movido a gás ou petróleo, em 1886.

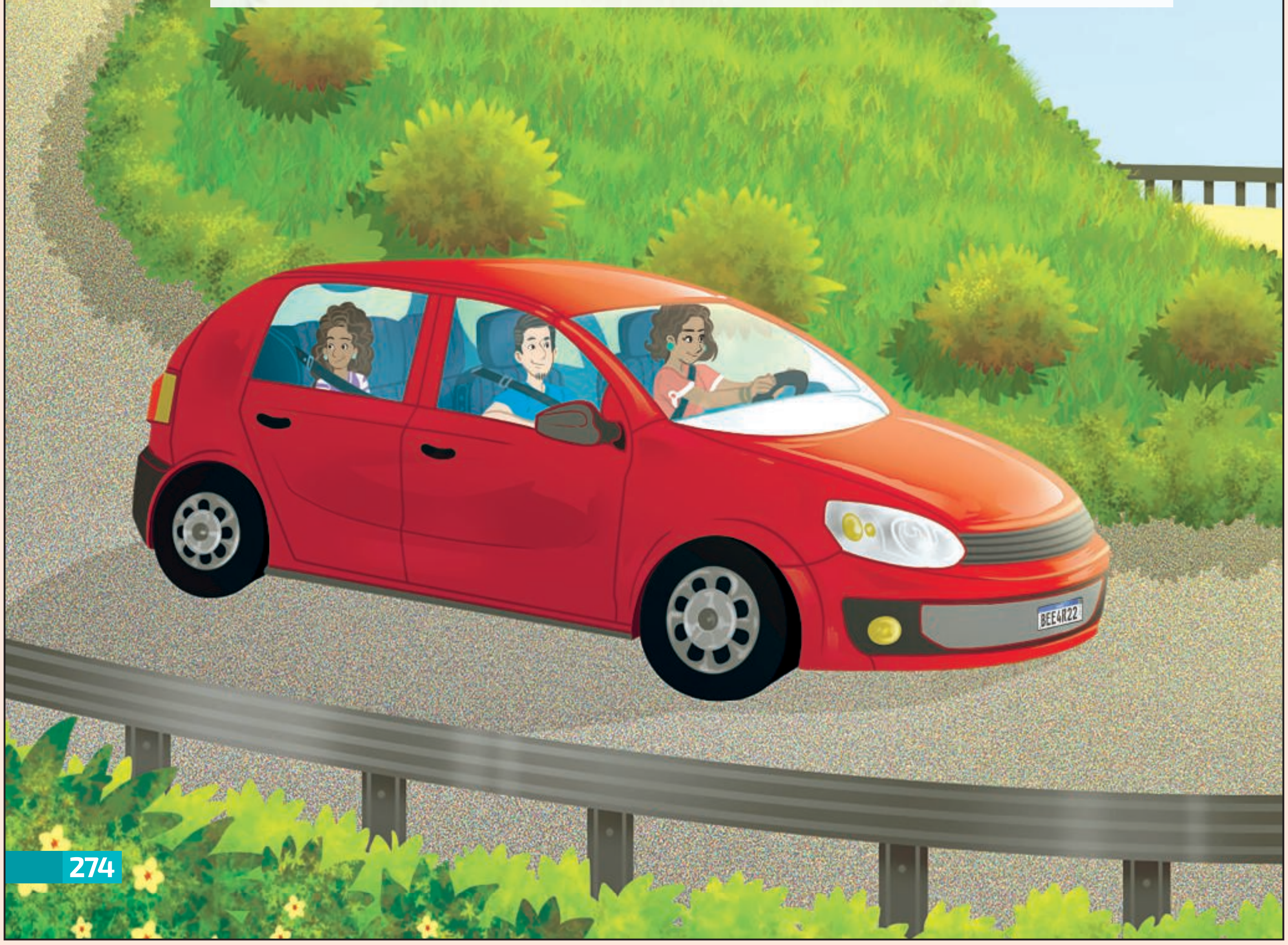
Matemática em destaque

23. A maior parte dos automóveis produzidos possui motores de combustão interna, gerando movimento por meio de queima de combustíveis. Além de ser rápido e preciso, o processo de funcionamento de um pistão, que faz a queima dentro do motor, ocorre em harmonia com os demais pistões, de modo que não ocorram explosões simultâneas.



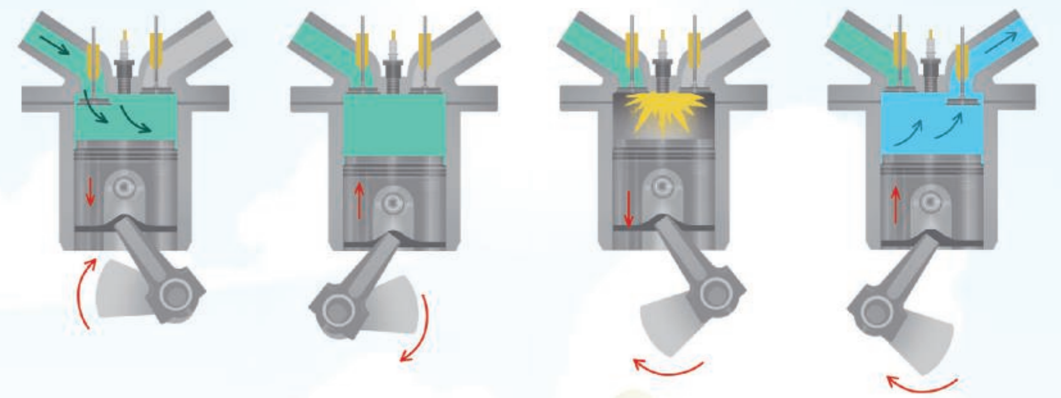
- A medida do volume interno de cada câmara de combustão, em centímetros cúbicos, é aproximadamente igual à medida do volume de um cilindro, cuja medida:
  - do comprimento do diâmetro é igual à medida do comprimento do diâmetro da câmara;
  - da altura é igual à medida do curso do pistão.

É a soma da medida do volume interno das câmaras de combustão que determina a cilindrada do motor. Normalmente, essa medida é expressa em litros. Se um motor tem 2 000 cilindradas, por exemplo, corresponde a 2 litros ou, simplesmente, 2.0.



Peça aos alunos que façam uma pesquisa sobre outros tipos de motor a fim de conhecerem diversas fontes de energia mecânica. Além disso, proponha a eles a seguinte questão:

- Quantas cilindradas, aproximadamente, tem um motor de 8 cilindros, cada um com a medida do comprimento do diâmetro igual a 9,7 cm e a medida do comprimento do curso igual a 8,8 cm?
  R: aproximadamente 5 200 cilindradas



Ilustrações: Danillo Souza

Admissão
Quando o motor está em funcionamento, a câmara de combustão recebe uma mistura de combustível e ar.

Compressão
A mistura de combustível e ar é comprimido pelo pistão.

Explosão
A vela de ignição produz uma faísca que causa a combustão dessa mistura. Isso empurra o pistão, fazendo o motor girar.

Expulsão
O gás produzido na combustão é expulso da câmara, que novamente recebe a mistura de combustível e ar, completando um ciclo.

a) No funcionamento de um pistão, qual é a função da vela de ignição?
Produzir uma faísca a fim de causar a combustão da mistura de ar e combustível.

b) Considerando um motor de 1800 cilindradas, com quatro pistões, resolva.

- Qual é a medida aproximada do volume, em centímetros cúbicos, de cada câmara de combustão desse motor? 450 cm^3
- Sabendo que a medida do curso de cada pistão desse motor é igual a 8,31 cm, calcule a medida do comprimento do diâmetro da câmara de combustão. aproximadamente 8,3 cm

c) Junte-se a um colega e pesquisem a respeito da emissão de gás carbônico pelos veículos movidos por motores de combustão interna, bem como as consequências dessa emissão ao meio ambiente. Depois, construam um cartaz informativo sobre atitudes que pode contribuir para a diminuição desse impacto ambiental.
Resposta pessoal.

275

BNCC em foco

- As questões propostas nessa página fortalecem o desenvolvimento do pensamento crítico, científico e criativo, como solicita a **Competência geral 2**, pois capacitam os alunos a utilizarem metodologias de investigação para a solução de problemas e elaboração de hipóteses sobre as propriedades de um motor de automóvel, e ainda suscitam o trabalho com o tema contemporâneo **Ciência e tecnologia**, já que as páginas esmiúçam o funcionamento de algumas partes do motor, como as câmaras de combustão e seus elementos (velas, pistões e válvulas), e as etapas desse funcionamento.
O item **c**, por solicitar uma pesquisa sobre a emissão de gás carbônico pelos automóveis, pode ser relacionado ao componente curricular **Ciências** e ao tema contemporâneo **Educação ambiental**. Auxilie-os nessa pesquisa, destacando os males do efeito estufa, por exemplo, e na construção do cartaz informativo, em que devem ser destacadas atitudes que contribuam com a diminuição do impacto, como o uso de transportes públicos, a preferência por combustíveis menos poluentes, a prática da carona, entre outras. Essa tarefa ainda possibilita o desenvolvimento da **Competência geral 10**, uma vez que sugere uma ação coletiva que exige autonomia e responsabilidade com base em princípios sustentáveis.

Medidas de capacidade

Para indicar, por exemplo, a quantidade de líquido ou de gás que cabe em um recipiente, geralmente, usam-se medidas de capacidade. As unidades de medida de capacidade mais utilizadas são o **litro** (L) e o **mililitro** (mL).

Vladimiroquai/ Shutterstock.com

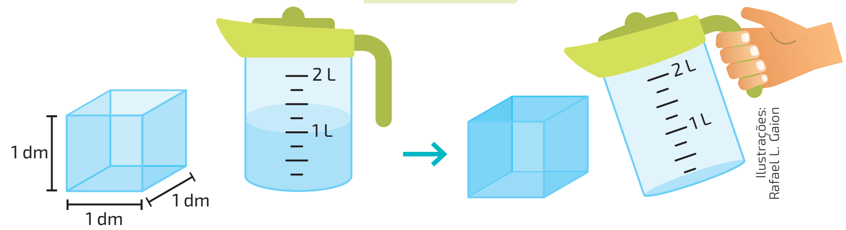
Em um automóvel, em geral, a medida da capacidade do tanque de combustível e do porta-malas é indicada em litros.

Andrea Nissotti/ Shutterstock.com

A medida da capacidade de armazenamento de um frasco de perfume, em geral, é indicada em mililitros.

Podemos relacionar as unidades de medida de volume e de capacidade. Temos, por exemplo, que um recipiente cuja medida do volume interno é 1 dm^3 tem medida de capacidade de 1 L.

$1\text{ dm}^3 = 1\text{ L}$



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Com base nessa igualdade, podemos estabelecer outras relações entre as unidades de medida de volume e as de capacidade.

- Como $1\text{ m}^3 = 1000\text{ dm}^3$, temos que $1\text{ m}^3 = 1000\text{ dm}^3 = 1000\text{ L}$.

$1\text{ m}^3 = 1000\text{ L}$

- Como $1\text{ dm}^3 = 1000\text{ cm}^3$ e $1\text{ L} = 1000\text{ mL}$, temos que $1000\text{ cm}^3 = 1\text{ dm}^3 = 1\text{ L} = 1000\text{ mL}$.

$1\text{ dm}^3 = 1000\text{ mL}$ e $1\text{ cm}^3 = 1\text{ mL}$

Observe algumas conversões.

- $12\text{ dm}^3 = 12\text{ L}$
- $3{,}5\text{ m}^3 = 3\,500\text{ L}$ ($\cdot 1000$)
- $810\text{ L} = 0{,}81\text{ m}^3$ ($:1000$)
- $1{,}25\text{ dm}^3 = 1\,250\text{ mL}$ ($\cdot 1000$)

Escreva os procedimentos utilizados para converter em litros uma medida expressa em metros cúbicos. Possível resposta: basta multiplicar a medida em metros cúbicos por 1000.

BNCC em foco

- O trabalho com o tópico **Medidas de capacidade** proporciona aos alunos reconhecerem a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, a fim de resolverem problemas calculando a capacidade de recipientes, o que contempla a habilidade **EF08MA20** da BNCC.
- Se julgar conveniente, após trabalhar com o conteúdo apresentado nessa página, peça para os alunos calcularem a medida da capacidade, em litros, de cada recipiente apresentado na atividade **10** da página **269**, a fim de avaliar como estão lidando com os cálculos.

Material digital

- Para complementar o trabalho com o tópico **Medida de capacidade**, no material digital dessa coleção disponibilizamos a **Sequência didática 12**, elaborada com objetivo de desenvolver as habilidades **EF08MA20** e **EF08MA21**. As atividades propostas nessa sequência possibilitam identificar a relação entre as unidades de medida de volume centímetro cúbico, decímetro cúbico e metro cúbico e as unidades de medida de capacidade litro e mililitro, além de identificar unidades adequadas para medir volume e capacidade e também calcular a medida de volume do paralelepípedos retângulos e cilindros.

Atividades

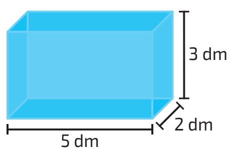
Anote no caderno

Nas atividades dessa seção, as medidas indicadas nos cilindros ou nos objetos que lembram cilindros referem-se à medida do comprimento do raio ou do diâmetro de sua base e, também, à medida de sua altura. Além disso, quando necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

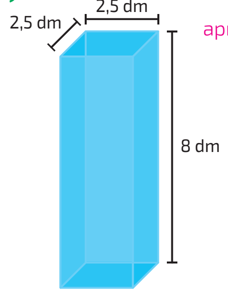
24. A seguir estão apresentados alguns recipientes que lembram paralelepípedos retângulos ou cilindros. Considerando que estão completamente cheios, calcule, em litros, a quantidade de um líquido contido em cada um deles.

Em cada imagem está indicada a medida das dimensões internas dos recipientes.

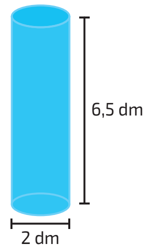
a) 30 L



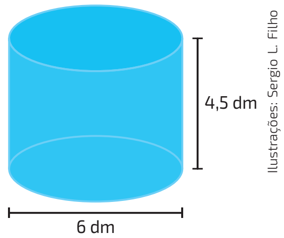
b) 50 L



c) aproximadamente 20,41 L

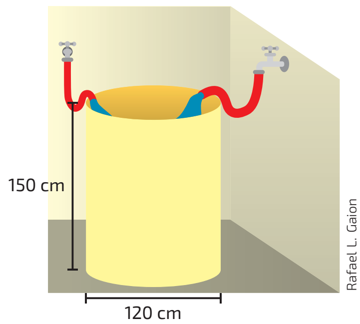


d) aproximadamente 127,17 L

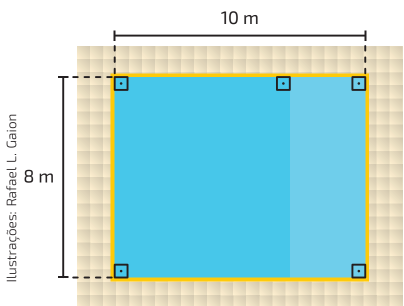


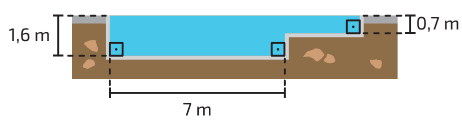
25. Para encher um tanque cilíndrico foram utilizadas duas torneiras. A cada minuto, uma delas despeja 24 L de água e a outra, 36,5 L. De acordo com as medidas indicadas, quantos minutos aproximadamente serão necessários para encher esse tanque? 28 min

Na imagem está indicada a medida das dimensões internas do tanque.



26. Observe a medida das dimensões internas de uma piscina.





a) Quantos metros cúbicos de água são necessários para encher essa piscina? 106,4 m³

b) Determine, em litros, a medida da capacidade dessa piscina. 106 400 L

- Oriente os alunos, nas atividades dessa e da próxima página, a fazerem as transformações das unidades de medida necessárias para a obtenção das medidas em mL ou L.

BNCC em foco

- Aproveite que a atividade **27** destaca o etanol e faça uma relação com o tema contemporâneo **Educação ambiental** conversando sobre o etanol enquanto biocombustível. No Brasil, sua produção advém principalmente da cana-de-açúcar, mas pode ser produzido por outras diferentes matérias-primas, como o milho, a mandioca, a batata-doce, a beterraba, e é considerado uma fonte de energia limpa e renovável.
- Tendo em vista que a atividade **29** aborda um assunto de urgência social, o desperdício de água, aproveite para contemplar a **Competência específica de Matemática 7** e promova uma discussão com os alunos, de modo que eles exponham suas opiniões sobre o tema. Esse momento também é oportuno para referenciar a **Competência geral 7**, que estimula a capacidade de argumentação com base em dados e fontes confiáveis e impulsiona a consciência socioambiental, e o tema contemporâneo **Educação para o consumo**, uma vez que as atitudes com relação à economia de água vão ao encontro do compromisso ambiental de cada um e de sua relação com o meio ambiente. Aproveite ainda para avaliar a interação entre os alunos e como interpretam e acolhem outras opiniões.

27. Para armazenar o etanol que produz, uma usina possui alguns reservatórios cilíndricos, entre eles um com medida de capacidade de 500 000 L e altura interna medindo aproximadamente 8,6 m. Qual é a medida aproximada do comprimento do diâmetro interno da base desse reservatório? 8,6 m


Mario Friedlander/Pulsar Imagens

Reservatórios cilíndricos em uma usina, em 2016.

28. Nas faturas de água geralmente consta o histórico mensal de consumo, que é medido em metros cúbicos. Observe parte da fatura de água da casa de Renato.

HISTÓRICO DE CONSUMO/m³

jan. 19	fev. 19	mar. 19	abr. 19	maio 19	jun. 19	jul. 19
21	22	19	17	18	20	18

Caio Tanaka

Quantos litros de água, em média, foram consumidos na casa de Renato nos sete primeiros meses do ano? aproximadamente 19 500 L

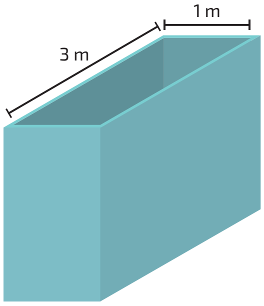
29. Certa torneira gotejando desperdiça 36 mL de água por minuto.

a) Quantos mililitros essa torneira desperdiçará em 1 h? 2 160 mL

b) Em um dia, quantos litros de água serão desperdiçados? 51,84 L

c) Converse com os colegas a respeito da importância de não desperdiçar água e sobre ações que podem ser realizadas para evitar seu desperdício.
Resposta pessoal.

30. Observe a medida das dimensões internas de um reservatório em forma de paralelepípedo retângulo.



Rafael L. Gaion

a) Qual é a medida da capacidade, em litros, desse reservatório? 6 000 L

b) Se dobrarmos a medida das dimensões internas desse reservatório, a medida de sua capacidade também dobrará? Justifique.

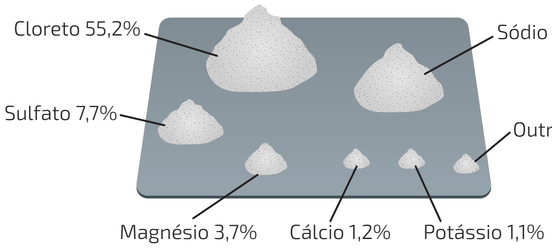
30. b) não; Espera-se que os alunos respondam que se dobrarmos a medida das dimensões internas do reservatório, a medida de sua capacidade será de 48 000 L, equivalente a oito vezes a medida de sua capacidade atual.

31. Escreva os procedimentos utilizados para converter em:

a) litros uma medida expressa em mililitros.
Possível resposta: dividir a medida em mililitros por 1 000.

b) centímetros cúbicos uma medida expressa em litros.
Possível resposta: multiplicar a medida em litros por 1 000.

32. Quem já provou a água do mar deve ter percebido quanto ela é salgada. Em média, em cada 1 L de água marinha há cerca de 35 g de sal. É importante destacar que, mesmo o cloreto de sódio (sal de cozinha) sendo predominante, há diversos outros sais na composição da água do mar. Observe.



Rafael L. Gaion

De acordo com as informações acima, resolva.

a) Em um litro de água do mar, há cerca de quantos gramas de cloreto? 19,32 g

b) Uma amostra de água do mar foi coletada, enchendo um recipiente cilíndrico cujo comprimento do diâmetro da base e a altura medem 24 cm. Espera-se que a amostra tenha quantos gramas de sódio? aproximadamente 115 g

Explorando o que estudei

Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? medidas de volume, medida do volume do paralelepípedo retângulo, do cubo e do cilindro e unidades de medida de capacidade

2. Quais unidades de medida de volume você conhece? Resposta pessoal.

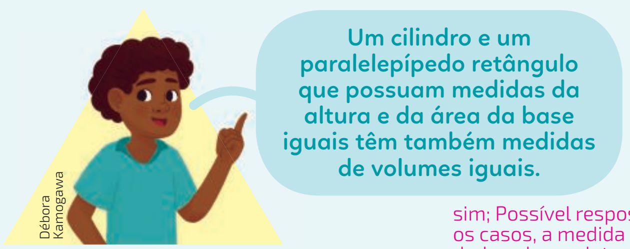
3. Alguns produtos são comercializados em metros cúbicos, como madeira e areia para construção.

Que outros produtos que você conhece são vendidos de acordo com unidades de medida de volume? Resposta pessoal.

4. Conhecendo a medida do volume de um cubo, como você faz para determinar a medida do comprimento de sua aresta? Possível resposta: calculando a raiz cúbica da medida do volume.

5. Descreva os procedimentos que você utiliza para calcular a medida do volume de um cilindro. Possível resposta: calcula-se a medida da área da base e multiplica-se o resultado obtido pela medida da altura do cilindro.

6. Leia o que Caio está dizendo.



Débora Kamogawa

A afirmativa feita por Caio é verdadeira? Justifique. sim; Possível resposta: em ambos os casos, a medida do volume é dada pelo produto da medida da área da base pela medida da altura, que nesse caso são iguais.

7. Cite alguns produtos que têm indicada na embalagem uma medida de capacidade. Resposta pessoal.

Avaliação

- Aproveite as questões apresentadas na seção **Explorando o que estudei** para avaliar o conhecimento dos alunos com relação aos conteúdos abordados no capítulo. Para isso, peça que eles resolvam as perguntas em uma folha separada e, em seguida, troquem com um colega para corrigi-las. Por fim, promova uma discussão para que todos exponham suas interpretações a respeito do tema.

- Ao trabalhar a questão **7**, solicite aos alunos que levem para a sala de aula embalagens com rótulo contendo a medida do volume ou a medida da capacidade interna. Em algumas dessas embalagens, pode-se realizar medições e calcular a medida do volume aproximado para compararem com as informações dos rótulos.

Relacionando saberes

- Estabeleça uma relação entre o tema abordado na atividade **32** com o componente curricular **Ciências**, agregando, se possível, o auxílio do professor responsável pelo componente. Pergunte aos alunos se eles sabem de onde provém o sal da água do mar e sugira uma pesquisa para recolher algumas curiosidades sobre o assunto, como o fato de o sal não surgir no mar, mas ser decorrente das rochas. Um dado curioso é que os rios são os que mais depositam sal nos mares, pois o desgaste das rochas que os margeiam desemboca nos oceanos.

Material digital

- Antes de prosseguir com os estudos e se julgar oportuno, avalie a aprendizagem dos alunos com relação a algumas habilidades trabalhadas no decorrer desse bimestre. O material digital apresenta uma proposta de avaliação para o 4º bimestre que pode ser utilizada nesse momento como ferramenta auxiliar do processo de ensino e aprendizagem.

BNCC em foco

- Na seção **Explorando tecnologias**, propomos algumas construções que envolvem a resolução de problemas por meio de tecnologias digitais, conforme a **Competência específica de Matemática 5**. Com isso, espera-se que os alunos compreendam as tecnologias apresentadas e as utilizem de forma crítica e significativa .

- Nessa seção, são utilizados *softwares* livres, que podem ser baixados em qualquer computador, sendo um deles de geometria dinâmica, o GeoGebra, e uma planilha eletrônica, o Calc, do pacote LibreOffice.
- Durante o trabalho com essa seção, os conteúdos de Matemática que podem ser trabalhados são: transformações de figuras geométricas, sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, mediatrizes e circuncentro, bissetrizes e incentro, polígonos regulares, potências e raízes, valor numérico de um polinômio e regra de três envolvendo porcentagem.
- Oriente os alunos a abrirem uma nova janela do programa ao iniciar cada tópico.

Explorando tecnologias

Os constantes avanços tecnológicos são notados pelas versões de equipamentos eletrônicos lançadas praticamente todos os dias, além das novas linguagens e programas computacionais.

As gerações atuais, já inseridas na cultura digital, de modo geral, lidam facilmente com esses avanços. Entretanto, é necessário que desenvolvam habilidades cada vez mais refinadas e específicas para destacarem-se no mundo do trabalho, que também tem sido muito influenciado pela tecnologia.

Compreender e utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) é imprescindível para se comunicar por meio das diferentes linguagens e mídias, produzir conhecimentos, resolver problemas e desenvolver projetos autorais e coletivos.

Nesta seção, indicamos possibilidades de utilização de alguns programas computacionais que contribuem para a visualização e a verificação de propriedades matemáticas, uma vez que permitem construções e efeitos pouco viáveis de serem realizados apenas com lápis, papel e instrumentos físicos de medição e desenho. Com isso, esperamos ampliar o repertório de utilização das tecnologias digitais, a fim de favorecer a capacidade de se comunicar e resolver problemas por meio de alguns recursos tecnológicos disponíveis gratuitamente.

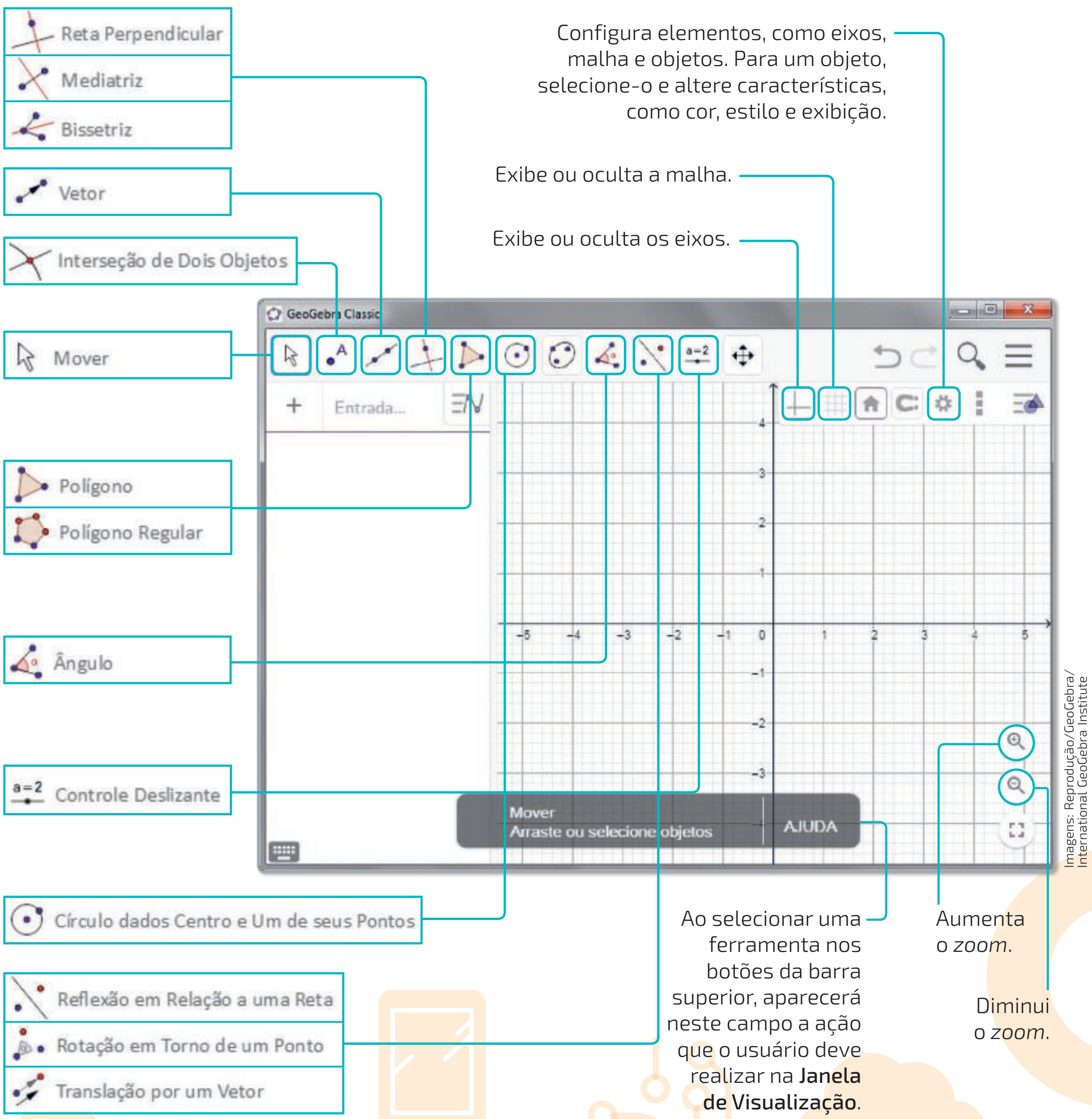
Convidamos você para conhecer e explorar o uso de tais recursos computacionais e experimentar, de diferentes maneiras, os conteúdos matemáticos presentes em seu livro, o que torna o estudo mais interessante e dinâmico.

Sumário

GeoGebra

GeoGebra é um programa computacional gratuito que combina recursos de construções geométricas, algébricas, gráficos, tabelas e cálculos. Sua interface é simples e exibe comandos para realizar diferentes tipos de construções. Para fazer o *download* e instalá-lo, basta acessar o endereço eletrônico <www.geogebra.org>. Acesso em: 24 ago. 2018. O *site* também possui informações e materiais de apoio para a utilização do programa.

Veja algumas ferramentas do GeoGebra que serão úteis nesta seção.



Imagens: Reprodução/GeoGebra/ International GeoGebra Institute

- As construções dos tópicos das páginas **282** a **290**, que apresentam imagens obtidas do GeoGebra, foram realizadas utilizando a versão **6.0.487.0-offline** do programa.
- A janela do programa apresentada nessa página está dividida em duas partes principais, a **Janela de Álgebra**, em que são indicadas as representações aritméticas e algébricas, como coordenadas de pontos e equações, e a **Janela de Visualização**, onde aparecem as representações gráficas dos objetos.
- Nas construções previstas para o GeoGebra nesse volume, em alguns tópicos utilizamos apenas a **Janela de Visualização**, em outros apenas a **Janela de Álgebra** ou ainda ambas as janelas. Assim, para desabilitar alguma dessas janelas, clique sobre o botão ☰ e, em **Exibir**, deixe marcadas apenas as opções desejadas.
- Se possível, realize uma leitura dessa página com os alunos. Comente com eles que, na imagem apresentada do programa, como a ferramenta **Mover** está selecionada, o comando que o usuário deve realizar está descrito na parte inferior da **Janela de Visualização**: "Arraste ou selecione objetos". Para verificar como eles podem utilizar as demais ferramentas, oriente-os a selecionar as ferramentas desejadas e ler as informações que são exibidas.
- Ressalte também que é preciso clicar no botão para que seja aberta a aba em que aparecem as configurações de malha, eixos e objetos.

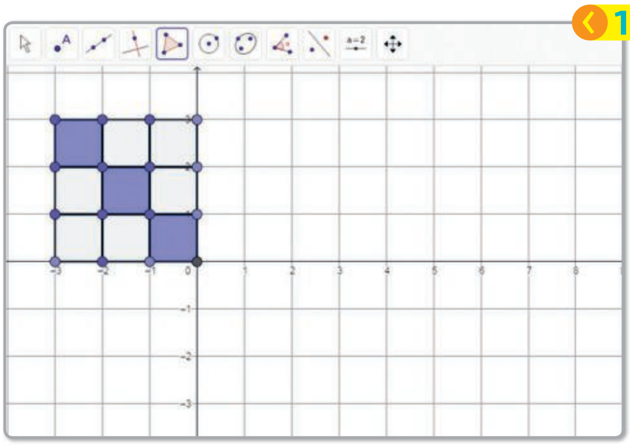
BNCC em foco

- Ao realizar os passos desse tópico, os alunos poderão construir figuras por composições de transformações (rotação, reflexão e translação), conforme a habilidade **EF08MA18** da BNCC.

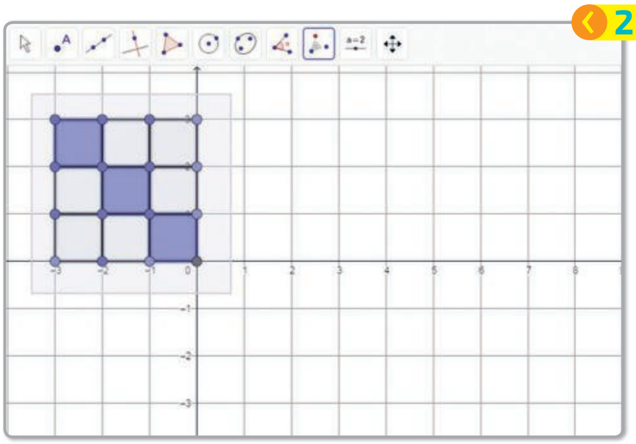
- Antes da realização do passo **1**, oriente os alunos a configurarem a malha quadriculada da seguinte maneira: clique no botão ⚙ e, na aba **Malha**, selecione a opção **Malha Principal** em **Tipo de malha**. Além disso, oriente-os a habilitar a opção que exibe os eixos, como indicado na página **281**, caso eles não estejam exibidos.
- Para construir um polígono, deve-se selecionar todos os vértices consecutivos e, então, o vértice inicial novamente.

Transformação de figuras geométricas

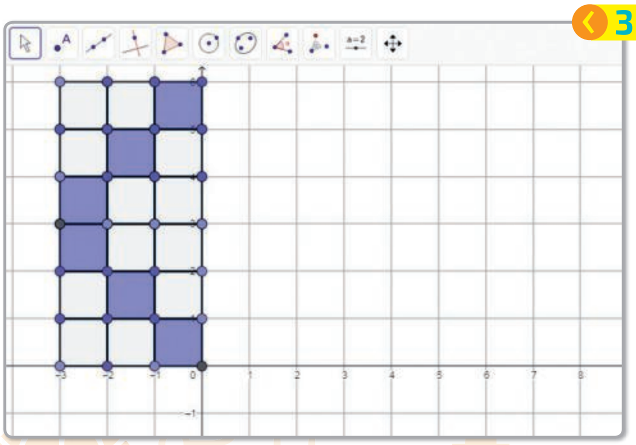
A seguir, você aprenderá como utilizar o GeoGebra para construir uma figura parecida com a da página **104** por meio de transformações geométricas.



1 Com a malha quadriculada e os eixos exibidos, utilize a ferramenta **Polígono** para construir nove quadrados no plano cartesiano, conforme indicado na imagem ao lado. Para alterar a cor dos quadrados de maneira parecida com a apresentada, clique com o botão direito do *mouse* na região interna de cada um deles, abra a opção **Configurações** e, na aba **Cor**, selecione a cor desejada.



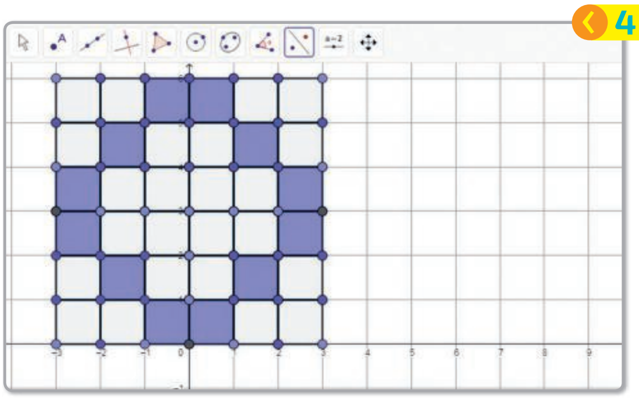
2 A fim de rotacionar os nove quadrados construídos em torno do ponto (0, 3), selecione a ferramenta **Rotação em Torno de um Ponto**. Em seguida, selecione uma região que inclua todos os quadrados, conforme indicado ao lado, clicando com o botão direito do *mouse*, segurando o clique e arrastando o ponteiro.



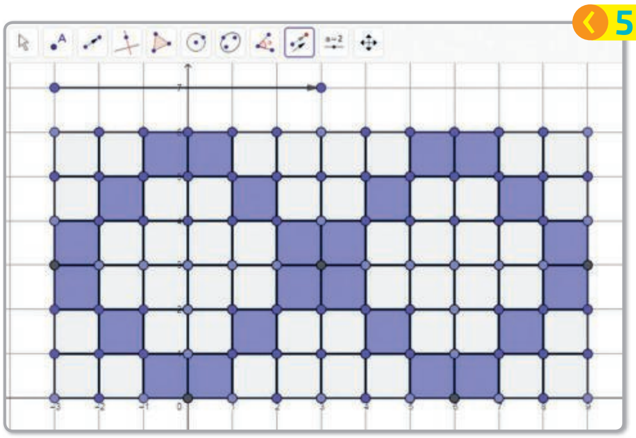
Imagens: Reprodução/GeoGebra/ International GeoGebra Institute

3 Clique no ponto (0, 3) e, na janela que será exibida, insira a medida 90°, marque a opção **sentido horário** e clique em **OK**.

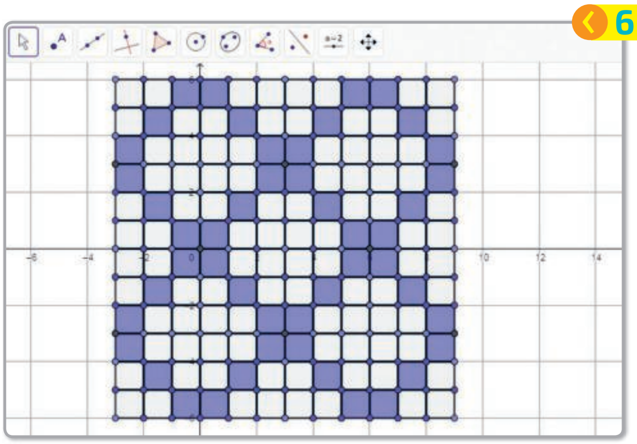
> Se necessário, selecione a opção **Mover** e arraste a **Janela de Visualização** de forma que todos os quadrados fiquem visíveis.



4 Com a ferramenta **Reflexão em Relação a uma Reta** selecionada, e da mesma maneira que no passo **2**, selecione os 18 quadrados construídos até o passo anterior. Em seguida, clique sobre o eixo **y**. Com isso, a figura será refletida em relação a esse eixo, aumentando o total de quadrados para 36, como na imagem ao lado.



5 Selecione a ferramenta **Vetor** e clique nos pontos (−3, 7) e (4, 7), criando um segmento de reta orientado na direção horizontal, para a direita, com 6 unidades da malha de medida de comprimento, como indicado na imagem ao lado. Então, com a ferramenta **Translação por um Vetor**, selecione todos os quadrados construídos até o momento e, em seguida, clique sobre o segmento orientado.



Imagens: Reprodução/GeoGebra/ International GeoGebra Institute

6 Agora, utilize novamente a ferramenta **Reflexão em Relação a uma Reta** para refletir todos os quadrados construídos até o passo anterior, em relação ao eixo **x**, repetindo o processo apresentado no passo **4**.

Se necessário, modifique o *zoom* da **Janela de Visualização** ou arraste-a para que seja possível visualizar toda a construção.

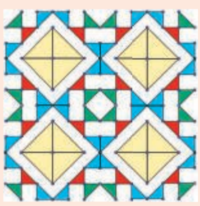
Respostas nas orientações ao professor.

1. No passo **5**, os quadrados obtidos poderiam ter sido construídos por meio de reflexão em relação a um eixo? Justifique.
2. Com a ferramenta **Mover**, clique sobre o ponto (−1, 1) e arraste-o. A figura obtida tem simetria de reflexão? E simetria de rotação?
3. Elabore um mosaico utilizando as mesmas ferramentas apresentadas nessa construção.

- No passo **6**, oriente os alunos a clicarem nos botões destacados na página **281** para aumentar ou diminuir o *zoom* da **Janela de Visualização**. Outra possibilidade é utilizar as ferramentas **Ampliar** e **Reduzir** do programa.
- Para ocultar a malha e os eixos, basta clicar nos botões destacados na página **281**. No caso dos pontos, para ocultar todos de uma só vez, oriente os alunos a selecionarem a opção que exibe a **Janela de Álgebra**, clicando no botão . Nessa janela, eles deverão clicar em , depois em , e selecionar a opção **Tipo do Objeto**. Então, oriente-os a selecionar toda a lista de pontos clicando sobre o título **Pontos** dessa lista. Por fim, eles deverão clicar com o botão direito do *mouse* sobre a lista e desmarcar a opção **Exibir Objeto**.
- Na questão **2**, comente com os alunos que as transformações por rotação, por reflexão e por translação são mantidas, conforme a construção.

Respostas

1. sim; Possível resposta: pois eles são simétricos em relação à reta que passa pelos pontos (3, 0) e (3, 1).
2. sim; sim
3. Possível resposta:



Reprodução/GeoGebra/ International GeoGebra Institute

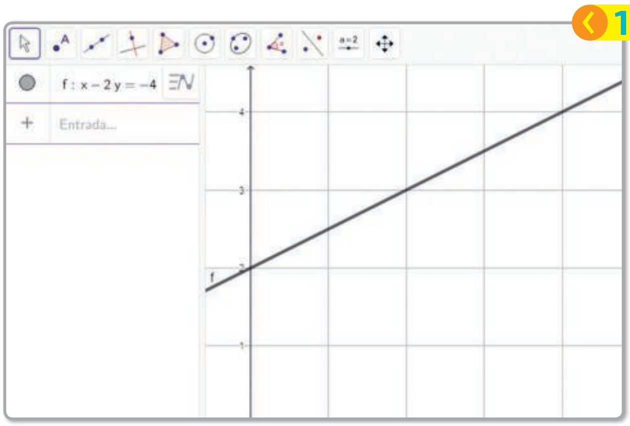
BNCC em foco

- Propomos nesse tópico a resolução, no GeoGebra, de sistemas que têm solução única, nenhuma solução ou infinitas soluções, referente à habilidade **EF08MA08** da BNCC, que orienta a resolução de problemas que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas utilizando o plano cartesiano como recurso.

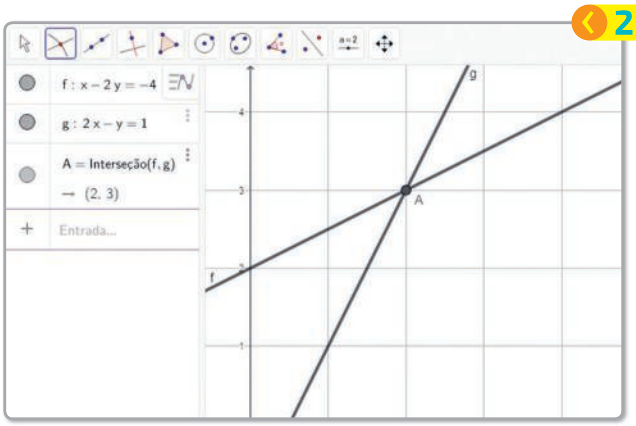
- Antes da realização do passo **1**, oriente os alunos a configurarem a malha quadriculada da seguinte maneira: clique no botão e, na aba **Malha**, selecione a opção **Malha Principal** em **Tipo de malha**. Além disso, oriente-os a habilitar a opção que exibe os eixos, como indicado na página **281**, caso eles não estejam exibidos.
- No passo **2**, a solução do sistema $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ tem valores inteiros, porém isso nem sempre ocorrerá, de modo que, nesses casos, o programa exibirá aproximações da solução.
- No passo **2**, após digitar a equação $2x - y = 1$, aparecerá o botão **RESOLVER** na **Janela de Álgebra**. Para resolver o sistema associado às retas **f** e **g**, o que é feito no passo seguinte, basta clicar nesse botão.

Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

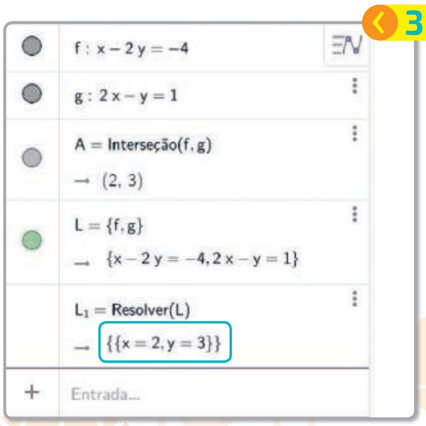
Veja a seguir como podemos representar graficamente as soluções de equações do 1º grau e, com base nessas representações, visualizar as soluções de sistemas de equações do 1º grau, caso existam.



1 Selecione a opção que habilita a exibição dos eixos e da malha quadriculada. No campo **Entrada...**, localizado na **Janela de Álgebra**, digite a equação $x - 2y = -4$ e pressione **Enter**. A reta que representa as soluções dessa equação aparecerá na **Janela de Visualização** e, nesse caso, foi nomeada por **f**.

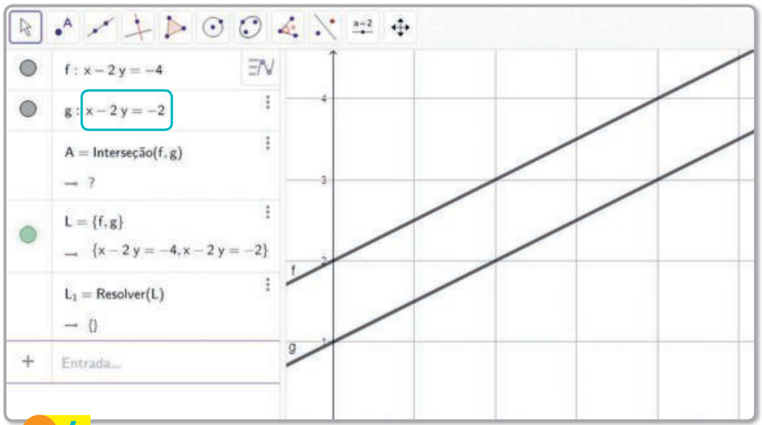


2 Agora, novamente no campo **Entrada...**, insira a equação $2x - y = 1$, e pressione **Enter**. A reta que representa as soluções dessa equação aparecerá e, nesse caso, foi nomeada por **g**. Selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** e clique sobre **f** e **g** para marcar a interseção entre essas duas retas. O par ordenado do ponto de interseção **A** é solução do sistema $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.

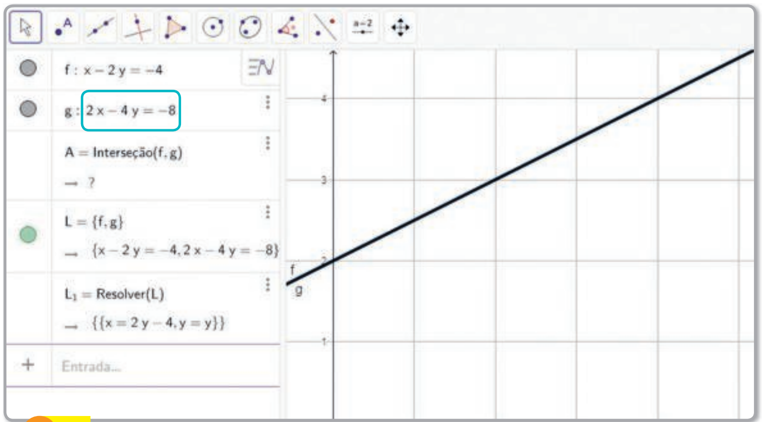


Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

3 Para resolver o sistema do passo anterior, vamos inserir uma lista de equações, nomeada por **L**, e utilizar um comando para resolver o sistema associado. Para isso, a partir das equações inseridas anteriormente, digite **L = {f, g}** no campo **Entrada...** e pressione **Enter**. Depois, digite o comando **Resolver (L)** no campo **Entrada...** e pressione **Enter**. Será exibida a solução ($x = 2$ e $y = 3$) do sistema.



4 Agora, mude a equação $2x - y = 1$ para $x - 2y = -2$ na **Janela de Álgebra**. Nesse caso, podemos observar que não há um ponto **A** de interseção entre as retas **f** e **g**, por elas serem paralelas, e que o campo relativo ao comando **Resolver (L)** não indica solução alguma. Logo, podemos concluir, nesse caso, que o sistema $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ não tem solução.



Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

5 Ao mudar a equação $x - 2y = -2$ para $2x - 4y = -8$, observamos que **f** e **g**, nesse caso, são coincidentes. Podemos constatar essa afirmação verificando que o campo relativo ao comando **Resolver (L)** indica as infinitas soluções do sistema $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$. Note que o ponto **A** de interseção entre essas retas também não é indicado, pois existem infinitos pontos que são solução do sistema.

Respostas nas orientações ao professor.

1. Qual a posição relativa entre as retas **f** e **g** no passo **2**, no passo **4** e no passo **5**?

2. Utilizando o GeoGebra, escreva a posição relativa entre as retas que representam as soluções das equações dos sistemas a seguir e verifique se eles têm solução.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 6x + 9y = 24 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

- Após a realização do passo **4**, comente com os alunos que o ponto de interrogação que aparece no lugar das coordenadas do ponto **A** significa que ele não está marcado na **Janela de Visualização**. Além disso, a solução da lista **L** aparece como { }, que significa conjunto vazio, ou seja, não existe solução para o sistema.
- No passo **5**, a solução do sistema $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$ também é dada no campo **Resolver(L)**, sendo que a expressão $x = 2y - 4$ significa que x deve ser tomado dessa forma, em função de y, e a expressão $y = y$ significa que pode ser tomado um y qualquer real. Assim, as soluções do sistema são dadas pelos pares $(\underbrace{2y - 4}_{x}, \underbrace{y}_{y})$.

Respostas

1. passo **2**: concorrentes; passo **4**: paralelas; passo **5**: coincidentes

2. a) retas coincidentes; Possui infinitas soluções.

b) retas concorrentes; Possui uma única solução.

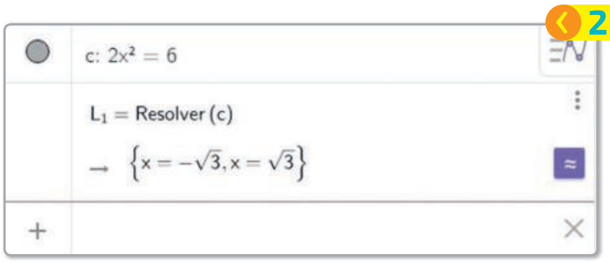
c) retas paralelas; Não possui solução.

Equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$

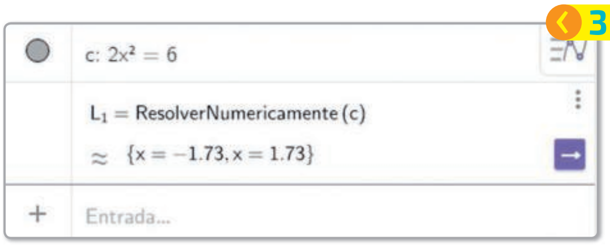
A seguir, veremos como resolver equações do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra. Para isso, vamos utilizar apenas a **Janela de Álgebra**, sem considerar a **Janela de Visualização**.

1 Para resolver a equação $2x^2 = 6$, por exemplo, digite **2x^2 = 6** no campo **Entrada...**.

No GeoGebra, x^2 é representado por **x^2**. Ao digitar essa expressão, você deverá pressionar a tecla com a seta para a direita do teclado após a tecla com o número 2.



2 Clique no botão **RESOLVER**, como mostra a imagem do passo anterior. Com isso, as duas soluções da equação, $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$, aparecerão na linha de baixo.



Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

3 Clique no botão com o símbolo de aproximação (≈), que aparece na imagem do passo anterior. Fazendo isso, aparecerá uma aproximação das soluções da equação inserida, que são $-1,73$ e $1,73$.

A aproximação, em geral, por padrão, ocorre até a casa dos centésimos, porém pode ser alterada no campo **Configurações**.

Respostas nas orientações ao professor.

1. Escreva o enunciado de um problema que pode ser resolvido por meio da equação resolvida acima.

2. Utilize o GeoGebra para resolver e determinar as soluções exatas das equações a seguir. Depois, indique os valores aproximados das soluções no item **a**.

a) $5x^2 = 25$ **b)** $4x^2 = 16$ **c)** $x^2 = 81$

286

BNCC em foco

- Conforme a habilidade **EF08MA09**, propomos, nesse tópico, a elaboração e resolução de um problema que pode ser representado por uma equação polinomial do tipo $ax^2 = b$ usando o GeoGebra. Com base nas instruções, os alunos serão capacitados a obter a solução exata e a solução aproximada desse tipo de equação para resolver problemas.

- Inicialmente, oriente os alunos a deixarem apenas a **Janela de Álgebra** sendo exibida. Para isso, veja o comentário da página **281**, nas orientações ao professor.
- No passo **1**, oriente os alunos a inserirem o símbolo **^**, caso eles tenham dificuldade. Para isso, em geral, deve-se pressionar a tecla **Shift** e, sem soltá-la, pressionar a tecla em que aparece o símbolo **^**.
- Em vez de digitar a expressão $2x\hat{}2 = 6$ na **Janela de Álgebra**, como foi feito no passo **1**, é possível utilizar os botões que aparecem na parte inferior da janela, após clicar no campo **Entrada...**. Para inserir a equação $2x^2 = 6$, como no exemplo, clique nos botões:

2 → x → $\square^2$ → = → 6

- Após os alunos resolverem a questão **2**, verifique se eles perceberam que o símbolo de aproximação, como na imagem do passo **2**, não aparece no caso das equações dos itens **b** e **c**, pois elas possuem soluções inteiras.
- Sugira que os alunos resolvam alguns problemas propostos no capítulo **6** desse volume, usando o GeoGebra.

Respostas

1. Resposta pessoal. Possível resposta: o dobro da medida da área de um quadrado é igual a 6. Qual a medida do comprimento do lado desse quadrado?

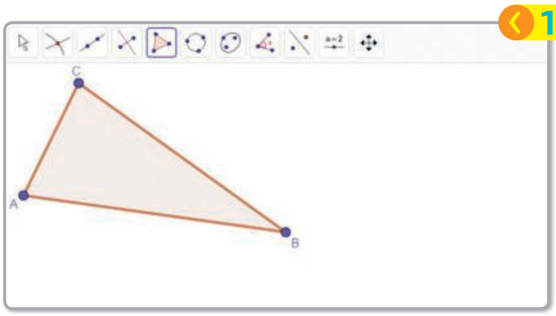
2. a) $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$; valores aproximados: $-2,24$ e $2,24$

b) $x = -2$ ou $x = 2$

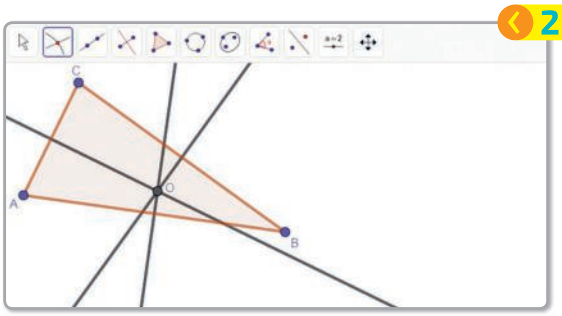
c) $x = -9$ ou $x = 9$

Mediatrizes e circuncentro de um triângulo

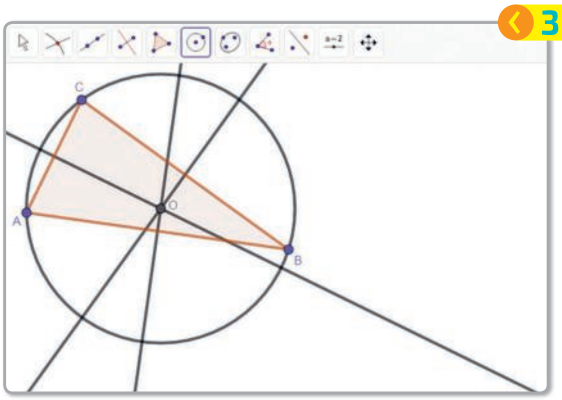
No GeoGebra, é possível construir a mediatriz de um segmento de reta utilizando uma ferramenta própria para essa finalidade. A seguir, a utilizaremos para obter o circuncentro de um triângulo.



1 Utilizando a ferramenta **Polígono**, construa um triângulo ABC qualquer.



2 Agora, trace as mediatrizes dos lados desse triângulo utilizando a ferramenta **Mediatriz**. Para isso, basta selecionar essa opção e clicar em cada lado do triângulo. Para indicar o circuncentro **O**, selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, clique em uma das mediatrizes e, depois, em outra.



Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

3 O ponto **O** é o circuncentro do triângulo ABC, ou seja, está a uma mesma medida de distância dos três vértices do triângulo. Para verificar essa propriedade, selecione a ferramenta **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**, clique em **O** e, em seguida, em um dos vértices do triângulo, **A**, **B** ou **C**.

Note que a circunferência construída contém os três vértices do triângulo, ou seja, é a circunferência circunscrita a ele.

Respostas nas orientações ao professor.

1. É correto afirmar que, para determinar o circuncentro de um triângulo, é suficiente obter a interseção das mediatrizes relativas a apenas dois de seus lados? Por quê?
2. Com a ferramenta **Mover** selecionada, clique sobre um dos vértices do triângulo construído, segure o clique e arraste-o. O que você pode observar em relação ao ponto **O** e a circunferência construída?
3. Obtenha o circuncentro e a circunferência circunscrita a um triângulo equilátero, que pode ser construído a partir da ferramenta **Polígono Regular**.

BNCC em foco

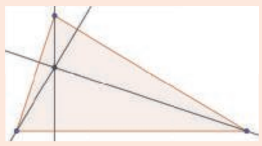
- O objetivo desse tópico é que os alunos utilizem o GeoGebra para construir mediatrizes, conforme orienta a habilidade **EF08MA15** da BNCC. Para isso, propomos a construção das mediatrizes dos lados de um triângulo e o seu circuncentro.

- Inicialmente, oriente os alunos a ocultarem os eixos e a malha, conforme indicado na página **281**.
- Após a realização do passo **3**, se julgar conveniente, oriente os alunos a utilizarem a ferramenta **Relação** para verificar que a circunferência construída contém os três vértices do triângulo. Para isso, basta selecionar essa ferramenta, clicar na circunferência e em determinado ponto para verificar se esse ponto pertence ou não à circunferência.

Atividade complementar

- No GeoGebra, construa um triângulo, as retas que contêm suas três alturas, por meio da ferramenta **Reta Perpendicular**, e marque o ortocentro desse triângulo.

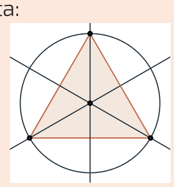
R Possível resposta:



- Na **Atividade complementar** acima, espera-se que os alunos construam: um triângulo qualquer; a reta que contém a altura relativa a um dos lados, clicando neste lado e no vértice oposto a ele; as outras duas retas que contêm as alturas relativas aos outros lados, da mesma maneira; e, por fim, a interseção entre as três retas que contêm as alturas, que é o ortocentro do triângulo.

Respostas

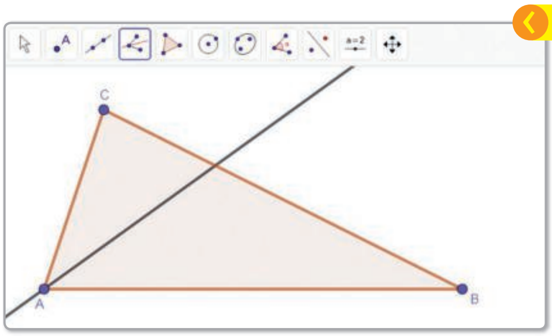
1. Sim, porque o ponto de interseção entre as três mediatrizes é único.
2. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que o ponto **O** continua sendo o circuncentro do triângulo e, portanto, os vértices do triângulo continuam pertencendo à circunferência com centro **O**.
3. Possível resposta:



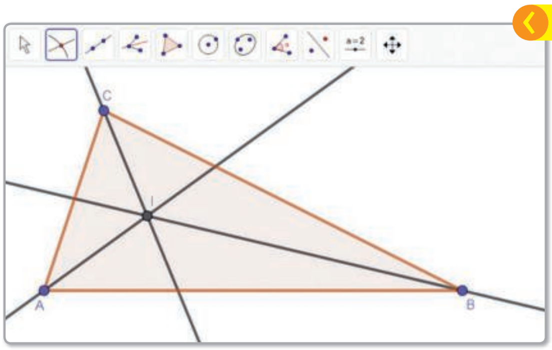
Ilustrações: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

Bisssetrizes e incentro de um triângulo

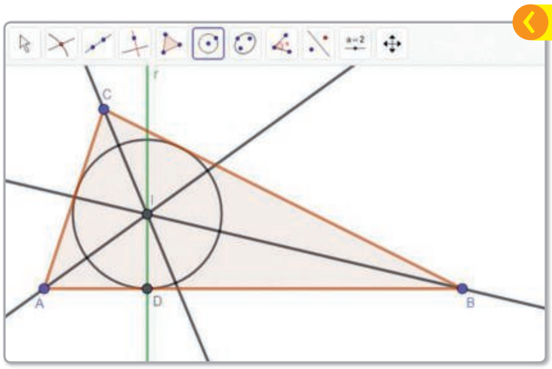
A seguir, utilizaremos uma ferramenta disponível no GeoGebra para obter o incentro de um triângulo e uma circunferência inscrita nele.



1 Utilizando a ferramenta **Polígono**, construa um triângulo ABC qualquer. Selecione a ferramenta **Bissetriz** e clique em **C**, **A** e **B**, nessa ordem, ou em **B**, **A** e **C**, também nessa ordem. Com isso, construímos a reta que contém a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$.



2 Da mesma maneira que no passo anterior, construa as retas que contêm as bissetrizes relativas aos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, utilizando a ferramenta **Bissetriz**. Para obter o incentro **I**, selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** e clique em duas das retas construídas.



Imagens: Reprodução/GeoGebra/ International GeoGebra Institute

3 Agora, vamos construir a circunferência inscrita nesse triângulo. Para isso, selecione a opção **Reta Perpendicular**, clique em **I** e em AB para traçar uma reta **r** perpendicular a AB, passando por **I**. Depois, com a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, marque o ponto de interseção **D** entre **r** e AB. Por fim, selecione a opção **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**, clique em **I** e, em seguida, em **D**.

Respostas nas orientações ao professor.

1. É correto afirmar que, para determinar o incentro de um triângulo, é suficiente obter a interseção das bissetrizes relativas a apenas dois de seus ângulos? Por quê?

2. Com a ferramenta **Mover** selecionada, clique sobre um dos vértices do triângulo, segure o clique e arraste o ponto. O que você pode observar em relação ao ponto **I** e à circunferência construída?

3. Construa um triângulo retângulo e, em seguida, obtenha seu incentro e a circunferência inscrita nele. Utilize a ferramenta **Reta Perpendicular** para obter o ângulo reto.

BNCC em foco

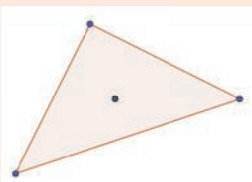
- Conforme orienta a habilidade **EF08MA15** da BNCC, nesse tópico, os alunos poderão construir, no GeoGebra, as bissetrizes de um triângulo. Além disso, propomos a construção do incentro desse triângulo.

- Inicialmente, oriente os alunos a ocultarem os eixos e a malha, conforme indicado na página **281**.
- Se julgar conveniente, oriente-os a utilizar a ferramenta **Ângulo** para medir os ângulos CÂI e IÂB, por exemplo, para verificar que eles têm a mesma medida, pelo fato de a reta que passa por **A** e **I** ser a bissetriz de BÂC.

Atividade complementar

- Construa um triângulo qualquer e o seu baricentro selecionando a ferramenta **Ponto Médio ou Centro** e clicando na região interna do triângulo.

  Ⓡ Possível resposta:

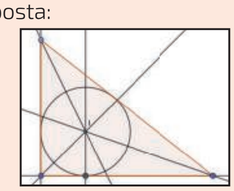


Respostas

1. Sim, porque o ponto de inteseção entre as três bissetrizes é único.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que o ponto I continua sendo o incentro do triângulo e a circunferência com centro em I continua inscrita no triângulo.

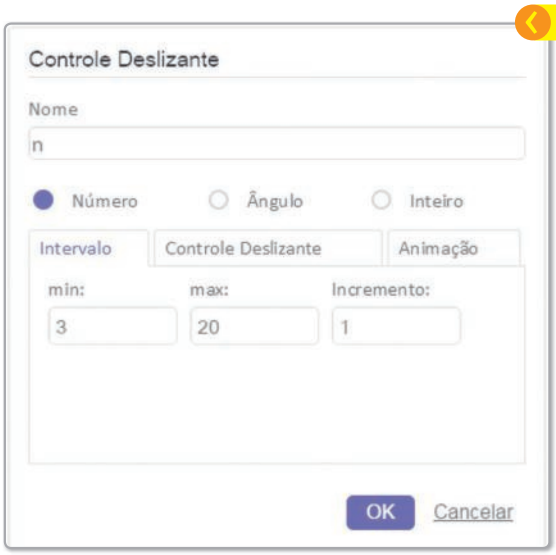
3. Possível resposta:



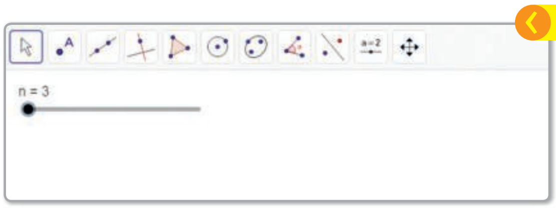
Ilustrações: Reprodução/ GeoGebra/ International GeoGebra Institute

Polígonos regulares

A seguir, vamos construir um polígono regular no GeoGebra. Conforme você já estudou, alguns exemplos de polígonos regulares são o triângulo equilátero, o quadrado e o pentágono regular. Na construção abaixo, veja como construir um polígono regular com uma quantidade de lados variável e que pode ser modificada por um controle deslizante.

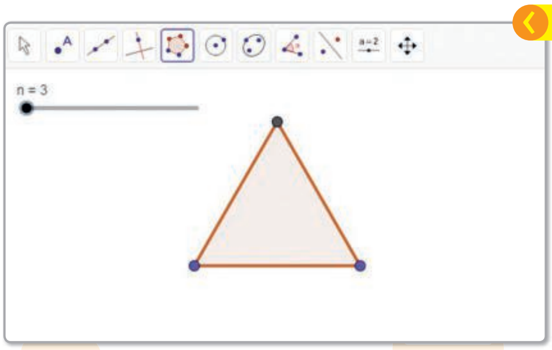


1 Para construir um polígono regular de **n** lados, sendo **n** um número natural, inicialmente selecione a ferramenta **Controle Deslizante** e clique em algum ponto da **Janela de Visualização**. Na janela que será exibida, digite **n** no campo **Nome** e defina o intervalo com o valor mínimo 3, valor máximo 20 e incremento 1, conforme indicado na imagem ao lado. Então, clique em **OK**.



2 Com a opção **Mover**, se necessário, clique sobre o controle deslizante, segure o clique e arraste-o para um dos cantos da **Janela de Visualização**.

Para aumentar o valor no controle deslizante **n**, clique sobre o ponto marcado no segmento que representa esse controle e arraste-o para a direita. Para diminuí-lo, basta arrastar o ponto para a esquerda.



Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

3 Utilizando a ferramenta **Polígono Regular**, clique em dois pontos diferentes na **Janela de Visualização**. Na janela que será exibida, devemos inserir a quantidade de vértices que o polígono terá. Nesse caso, essa quantidade será igual a **n**, variando de acordo com o valor do controle deslizante construído no passo **1**. Assim, digite **n** no campo **Vértices** e clique em **OK**.

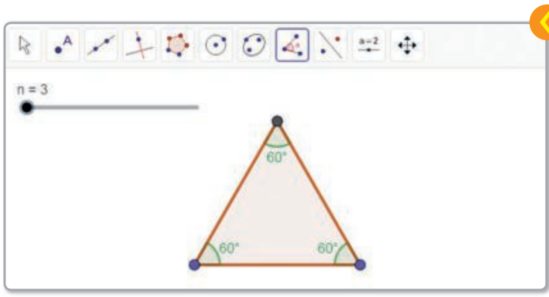
BNCC em foco

- Conforme orienta a habilidade **EF08MA15**, nesse tópico, os alunos serão levados a construir polígonos regulares utilizando um *software* de geometria.

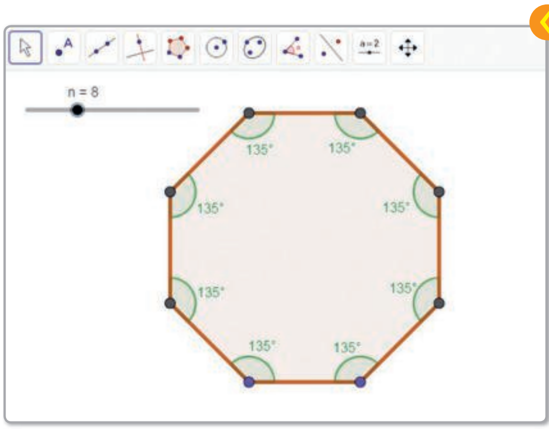
- Inicialmente, oriente os alunos a ocultarem os eixos e a malha, conforme indicado na página **281**.
- Ao realizar o passo **1**, comente com os alunos que o valor mínimo para **n**, neste caso, é 3, pois não existe polígono com uma quantidade de vértices menor do que 3.
- O incremento de um controle deslizante corresponde a “de quanto em quanto” ele vai deslizar. No caso dessa construção, como **n** é um número natural, o incremento escolhido foi 1, ou seja, **n** varia de um em um.

289

- No passo **5**, oriente os alunos a clicarem nos botões destacados na página **281** para aumentar ou diminuir o *zoom* da **Janela de Visualização**. Outra possibilidade é utilizar as ferramentas **Ampliar** e **Reduzir** do programa.
- Para alterar os elementos inseridos na configuração do controle deslizante, como o intervalo e o incremento, basta selecioná-lo e clicar no botão , em .
- Se julgar conveniente, oriente os alunos a animar o controle deslizante a fim de que o observem deslizar automaticamente. Para isso, basta selecionar a opção **Animar**, em , ou então clicar em , na **Janela de Álgebra**. Com isso, eles poderão observar o que ocorre com o polígono conforme a quantidade de vértices aumenta ou diminui.

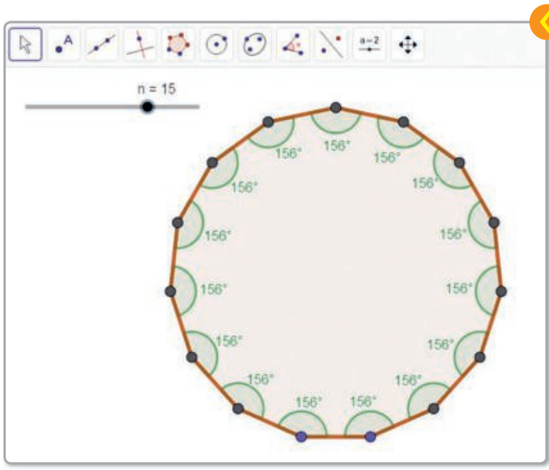


4 Para medir os ângulos internos do polígono regular construído, selecione a ferramenta **Ângulo** e clique em sua região interna. Caso o controle deslizante esteja indicando o número 3, o polígono regular é um triângulo equilátero cuja medida de cada ângulo interno é 60°.



5 Aumente o valor de **n** gradativamente. Para isso, também é possível utilizar a seta para a direita do teclado para ir aumentando a quantidade de vértices do polígono, de um em um. Na imagem ao lado, temos um octógono, pois n = 8, cuja medida de cada ângulo interno é 135°.

Se necessário, modifique o *zoom* da **Janela de Visualização** ou arraste-a para que seja possível visualizar todo o polígono.



Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

6 Continue aumentando o valor de **n** e observe que as medidas dos ângulos internos do polígono também vão sendo modificadas. Na imagem ao lado, o polígono construído tem 15 lados.

Respostas nas orientações ao professor.

1. Ao aumentar a quantidade de lados de um polígono regular, de qual figura geométrica plana ele se aproxima?

2. Quando **n** se torna maior, o que acontece com a medida dos ângulos internos do polígono?

3. A partir de um controle deslizante, construa um polígono regular com **m** lados, de modo que a quantidade de lados possa variar de 3 a 30, e tal variação ocorra de 3 em 3 unidades.

Respostas

1. Possíveis respostas: círculo; circunferência.

2. A medida de cada ângulo interno do polígono também aumenta.

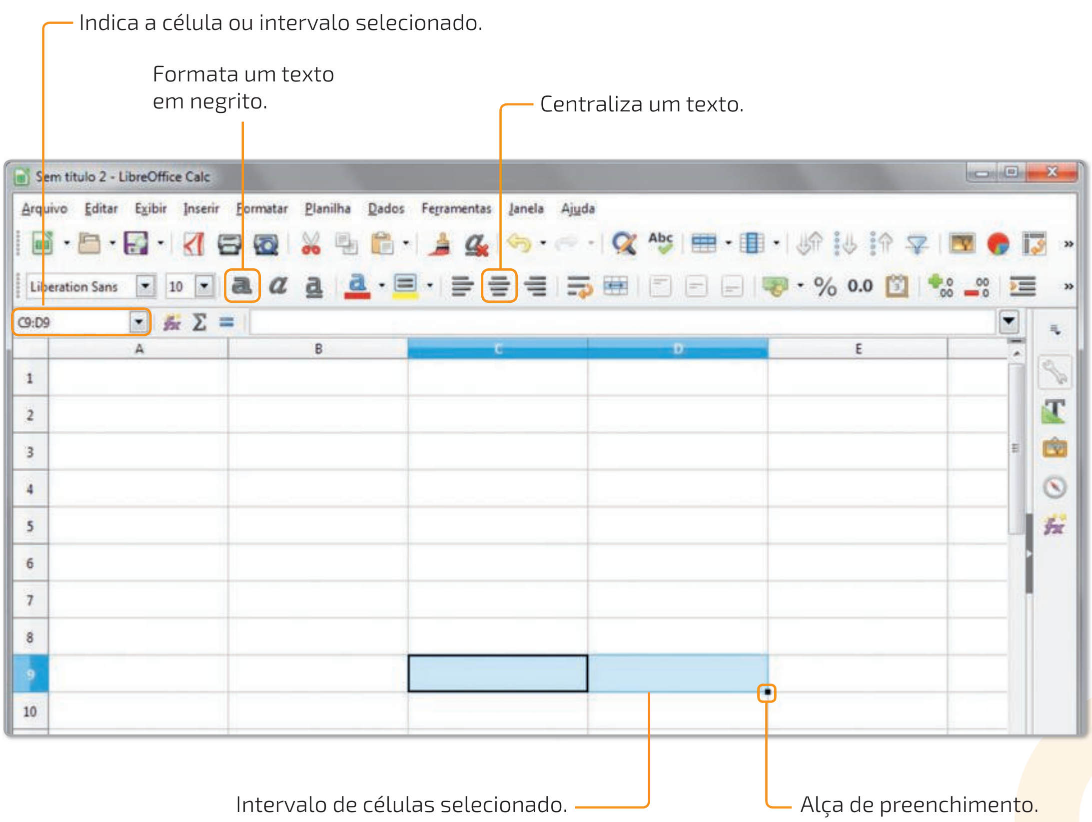
3. Espera-se que os alunos criem, inicialmente, um controle deslizante **m** com mínimo 3, máximo 30 e incremento 3, e, depois, construam um polígono regular com **m** lados.

Planilha eletrônica

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversos tipos de informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Elas facilitam a organização dos dados e possuem recursos para realizar cálculos e construir gráficos. Uma planilha é dividida em regiões retangulares, denominadas células, indicadas pelo cruzamento de uma linha (representada por um número) com uma coluna (representada por uma letra).

Calc é a planilha eletrônica do LibreOffice, uma versão gratuita de aplicações que inclui, além da planilha, editores de textos, de apresentações, de desenhos e banco de dados. Para fazer o *download* e instalá-la, basta acessar o *site* <https://pt-br.libreoffice.org>. Acesso em: 25 ago. 2018.

No esquema a seguir, são apresentados alguns recursos da planilha eletrônica do LibreOffice, que serão utilizados nos exemplos e nas atividades propostas nesta seção.



Imagens: Reprodução/Calc/The Document Foundation

- Os tópicos das próximas páginas, que descrevem como realizar alguns procedimentos e apresentam imagens obtidas do Calc, foram realizados por meio da versão 5.4.7.2 do programa.
- Inicialmente, leia com os alunos a descrição das ferramentas destacadas nessa página, que serão utilizadas nos tópicos seguintes.
- Lembre os alunos de que, em uma planilha eletrônica, o encontro entre uma linha e uma coluna é chamado **célula**. Verifique se eles percebem como localizar cada célula, utilizando uma letra, referente à coluna, e um número, referente à linha.

291

- No passo **3**, caso não seja possível utilizar o atalho **Ctrl+1**, oriente os alunos a selecionarem a opção **Células...** no menu **Formatar**.
- Para resolver a questão **1**, sugerimos que os alunos utilizem a linha **2** da planilha, que permite a inserção de números decimais, e não a linha **3**.
- Após os alunos resolverem a questão **2**, comente com eles sobre a possibilidade de se usar a fórmula **=raiz(x)** para calcular a raiz de um número. Para calcular $\sqrt{196}$, por exemplo, basta digitar **=raiz(196)** em uma célula e pressionar **Enter**.

Respostas

1. $0,5^2 = 0,25$

2. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que iriam inserir, na linha 3, a potência $196^{\frac{1}{2}}$, cujo resultado é 14.

3. a) $\frac{9}{49}$

b) 0,0256

c) 0,28

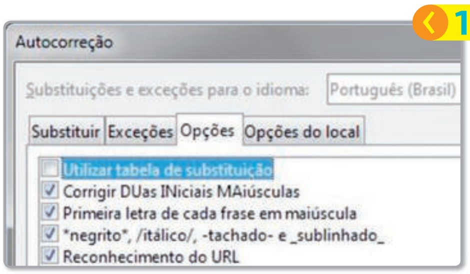
d) $-\frac{1}{32}$

e) 0,49

f) 1

Potências e raízes

No Calc, é possível realizar cálculos envolvendo potências e raízes, utilizando comandos específicos. Além disso, também podemos verificar algumas propriedades de potenciação estudadas até o momento.



1 Inicialmente, altere uma configuração no Calc de modo que algumas frações, que serão utilizadas, não sejam inseridas por um único caractere. Para isso, no menu **Ferramentas**, selecione **Opções de autocorreção...** e, na aba **Opções**, desmarque a opção **Utilizar tabela de substituição** e clique em **OK**.

Base	Expoente	Resultado
2	3	8

No Calc, x^y é dado por **x^y**.

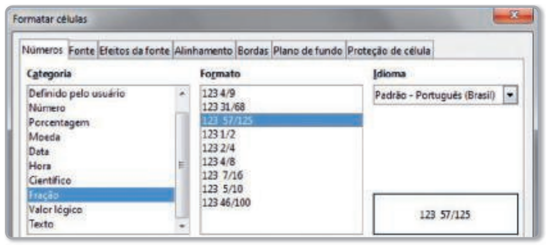
=A2^B2

2 Insira os textos indicados ao lado nas células **A1**, **B1** e **C1**. A fim de calcular a potência 2^3, insira os valores correspondentes à base (2 em **A2**) e ao expoente (3 em **B2**). Então, insira a fórmula indicada na célula **C2** e pressione **Enter**, para obter nela o número 8 como resultado da potenciação.

3 Agora, selecione o intervalo de células **A3:C3**, clicando na célula **A3** e arrastando o clique até a célula **C3**. Pressione **Ctrl + 1** e, na aba **Números**, selecione a categoria **Fração**, clique em **123 57/125** e em **OK**.

Base	Expoente	Resultado
2	3	8

→



Base	Expoente	Resultado
2	3	8
1/3	-1	3

Lembre-se de que: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

=A3^B3

Imagens: Reprodução/Calc/The Document Foundation

4 Insira na célula **A3** o valor **1/3** e em **B3**, o valor **–1**, correspondentes à base e ao expoente da potência $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$. Em seguida, insira a fórmula indicada na célula **C3**. Com isso, verificamos que $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{1} = 3$.

Respostas nas orientações ao professor.

1. Utilize a planilha eletrônica e calcule $0,5^2$.

2. Como você utilizaria essa planilha do Calc para calcular $\sqrt{196}$?

3. Resolva, no Calc, a atividade **5** da página **38**.

Valor numérico de um polinômio

No capítulo **4**, estudamos algumas situações que podem ser representadas algebricamente por meio de polinômios. Agora, veremos como organizar, no Calc, o cálculo do valor numérico de um polinômio de acordo com os valores atribuídos às variáveis.

1

x	y	z	2x + 3,5y + 10z

Considere o polinômio $2x + 3{,}5y + 10z$. A fim de calcular o valor numérico desse polinômio, dados os valores de **x**, de **y** e de **z**, digite no Calc os textos conforme ao lado.

2

x	y	z	2x + 3,5y + 10z
			0

=2*A2+3,5*B2+10*C2

Na célula **D2**, digite a fórmula indicada. Com isso, o valor numérico do polinômio, que aparecerá nessa célula, será calculado a partir dos valores de **x** (inserido em **A2**), **y** (inserido em **B2**) e **z** (inserido em **C2**).

O valor zero na célula **D2** é calculado considerando o valor zero nas células **A2**, **B2** e **C2**.

3

x	y	z	2x + 3,5y + 10z
11	0,3	19,95	222,55

Imagens: Reprodução/Calc/The Document Foundation

Para obter o valor numérico do polinômio para $x = 11$, $y = 0{,}3$ e $z = 19{,}95$, por exemplo, digite esses valores nas células **A2**, **B2** e **C2**, respectivamente, conforme a imagem ao lado.

Respostas nas orientações ao professor.

1. Obtenha o valor numérico do polinômio do exemplo, para $x = 7{,}1$, $y = 5$ e $z = 0{,}1$.

2. Pesquise o preço por quilograma de três frutas e escreva um polinômio para representar o valor a ser pago pela compra de **x** kg da primeira, **y** kg da segunda e **z** kg da terceira. Em seguida, represente essa situação no Calc e calcule o valor a ser pago para $x = 5$, $y = 2{,}5$ e $z = 1{,}4$.

3. Junte-se a um colega e elaborem uma situação que possa ser representada por um polinômio. Em seguida, organizem, na planilha eletrônica, o cálculo do valor numérico desse polinômio de acordo com os valores atribuídos às variáveis. Interprete o significado dos coeficientes do polinômio, do valor atribuído a cada variável e do valor numérico do polinômio.

- No passo **2**, comente com os alunos que o asterisco (*) indica a operação de multiplicação, no Calc.

Respostas

1. 32,7

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

293

BNCC em foco

- Nesse tópico, propomos a resolução de um problema envolvendo porcentagem utilizando o Calc, contemplando a habilidade **EF08MA04**. A fim de que os alunos também elaborem problemas envolvendo porcentagem e que possam ser resolvidos no Calc, propomos a **Atividade complementar** a seguir.

Atividade complementar

- Escreva o enunciado de um problema envolvendo porcentagem que possa ser resolvido utilizando o Calc. Em seguida, entregue-o para um colega e verifique a resposta dada por ele.

R Possível resposta: Considerando que 7% da medida de uma distância **x** corresponde a 1,4 m, calcule a medida dessa distância.

Respostas

1. Espera-se que os alunos respondam que temos a seguinte proporção entre os valores inseridos nas células: $\frac{A2}{A3}=\frac{B2}{B3}$. Logo, $B3=\frac{A3 \cdot B2}{A2}$.
2. aproximadamente 7%
3. =A3*B2/B3

Porcentagem e regra de três

A seguir, vamos utilizar o Calc para resolver uma regra de três simples, com grandezas diretamente proporcionais, envolvendo porcentagens. Para isso, resolveremos o seguinte problema: “Em uma compra no valor de R$ 425,00, o comprador obteve um desconto de R$ 34,00. Qual foi o desconto da compra, em porcentagem?”.

	A	B
1	Valor (R$)	Porcentagem (%)
2		
3		
4		

1 Digite, nas células **A1** e **B1**, os títulos **Valor (R$)** e **Porcentagem (%)**, respectivamente.

	A	B
1	Valor (R$)	Porcentagem (%)
2	425	100
3	34	8
4		

=A3*B2/A2

2 Então, insira o valor 425 em **A2**, 100 em **B2** e 34 em **A3**. Em seguida, digite a fórmula indicada na célula **B3** e pressione **Enter**, para obter o desconto da compra, em porcentagem. Assim, obtemos, nesse caso, o desconto de 8%.

A fórmula inserida em **B3** indica que o programa multiplicará o valor inserido em **A3** pelo valor inserido em **B2** e dividirá o resultado por **A2**.

	A	B
1	Valor (R$)	Porcentagem (%)
2	75	100
3	30	40
4		

Imagens: Reprodução/Calc/The Document Foundation

3 Após inserir a fórmula, é possível utilizar a mesma planilha para realizar outros cálculos. Para verificar isso, troque os valores das células **A2** e **A3** conforme indicado ao lado. O resultado, nesse caso, indica que R$ 30,00 correspondem a 40% de R$ 75,00.

Respostas nas orientações ao professor.

1. Por que a fórmula inserida em **B3** deve indicar a multiplicação do valor inserido em **A3** pelo valor inserido em **B2** e a divisão desse resultado por **A2**?
2. Utilizando essa planilha, resolva o seguinte problema: “Sabendo que o preço da gasolina em determinado dia num posto era R$ 4,65 e, no dia seguinte, aumentou para R$ 4,98, qual foi a porcentagem aproximada do aumento?”.
3. Para que o valor desconhecido seja obtido na célula **A2**, qual deve ser a fórmula inserida nessa célula? Realize essa operação no Calc.

Sugestões de livros e *sites*

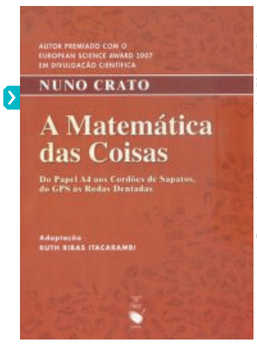
Livros

- **Incríveis passatempos Matemáticos**, de Ian Stewart. Rio de Janeiro: Zahar.
- **Para entender o mundo**: os grandes desafios de hoje e de amanhã, de Odile Gandon. São Paulo: SM.
- **Atlas da situação mundial**, de Dan Smith. Tradução de Mário Vilela. São Paulo: Companhia Editora Nacional.
- **Você precisa de quê?**: A diferença entre consumo e consumismo, de Silmara Franco. São Paulo: Moderna.
- **Sustentabilidade planetária, onde eu entro nisso?**, Fabio Feldmann. São Paulo: Terra Virgem.
- **Dinheiro público: o que é, de onde vem, para onde vai**, de Edson Gabriel Garcia. São Paulo: FTD. (Conversas sobre cidadania).
- **Se...**: Uma nova maneira de enxergar grandes conceitos, de David J. Smith. São Paulo: Companhia das Letrinhas.
- **O que você vai ser quando crescer?**, de Dinah Sales de Oliveira. São Paulo: Moderna
- **Os olímpicos**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **A matemática das coisas**: do papel A4 aos cordões de sapatos, do GPS às rodas dentadas, de Nuno Crato. São Paulo: Livraria da Física.
- **Os peregrinos**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **101 Ilusões de óptica**, de Sam Taplin. São Paulo: Edições Usborne.
- **A profecia**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **A história dos números**, de Hélio Gordon. São Paulo: FTD. (História-ciência, técnica, invenções e profissões).

Reprodução/Editora Zahar

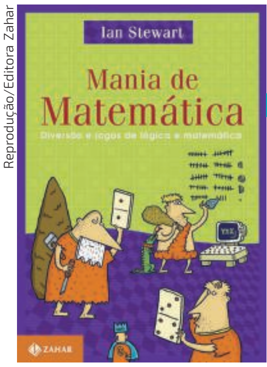
Reprodução/Editora Moderna

Reprodução/Editora FTD



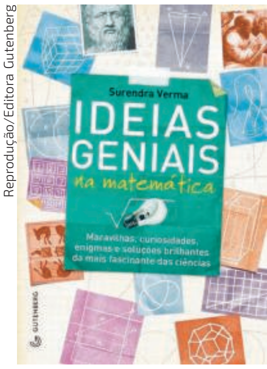
Reprodução/Livraria da Física Editora

295



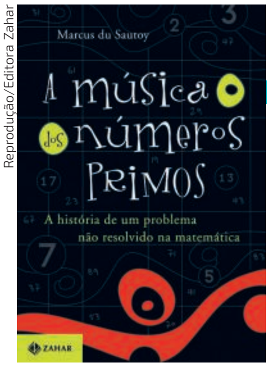
Reprodução/Editora Zahar

- **Mania de Matemática**: diversão e jogos de lógica e Matemática, de Ian Stewart. Rio de Janeiro: Zahar.
- **Jogos de Matemática e de raciocínio lógico**, de Juan Diego Sánchez Torres. Petrópolis: Vozes.
- **Ideias geniais na Matemática**: maravilhas, curiosidades, enigmas e soluções brilhantes da mais fascinante das ciências, de Suderna Verma. Belo Horizonte: Gutenberg.



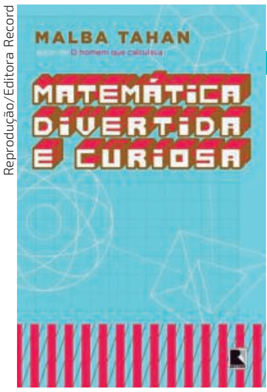
Reprodução/Editora Gutenberg

- **Uma proporção ecológica**, de Luzia Faraco Ramos. São Paulo: Ática. (A descoberta da Matemática).
- **Como encontrar a medida certa**, de Carlos Alberto Marcondes dos Santos e Nelson Gentil. São Paulo: Ática. (A descoberta da Matemática).
- **Contando a História da Matemática**: A invenção dos números, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática.
- **Os números (não) mentem**: como a Matemática pode ser usada para enganar, de Charles Selfie. Rio de Janeiro: Zahar.
- **A música dos números primos**: a história de um problema não resolvido na Matemática, de Marcus du Sautoy. Rio de Janeiro: Zahar.



Reprodução/Editora Zahar

- **Os mistérios dos números**: uma viagem pelos grandes enigmas da Matemática, de Marcus du Sautoy. Rio de Janeiro: Zahar.
- **O aprendiz**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **Uma raiz diferente**, de Luzia Faraco Ramos. São Paulo: Ática. (A descoberta da Matemática).
- **Matemática divertida e curiosa**, de Malba Tahan. Rio de Janeiro: Record.



Reprodução/Editora Record

- **História de potências e raízes**, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática. (Contando a história da Matemática).
- **Proporções**, de Luiz Márcio Imenes e outros. São Paulo: Atual. (Pra que serve Matemática?).
- **O enigma de Einstein**, de Jeremy Stangroom. São Paulo: Marco Zero.
- **A matemática no Museu de Arte**, de Majungmul. São Paulo: Callis.

- **Tecendo Matemática com arte**, de Estela Kaufman Fainguelernt e Katia Regina Ashton Nunes. Porto Alegre: Artmed.
- **Descobrindo matemática na arte**: atividades para o ensino fundamental e médio, de Estela Kaufman Fainguelernt e Katia Regina Ashton Nunes. Porto Alegre: Artmed.

Reprodução/Editora Artmed

- **O Fantasma do Espelho**, de Karen Dolby. São Paulo: Editora Scipione.
- **Como encontrar a medida certa**, de Carlos Marcondes. São Paulo: Atual. (Pra que serve Matemática?).

Sites

- Arte & Matemática: **<www2.tvcultura.com.br/artematematica/home.html>**. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Domínio Público: **<www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.do>**. Acesso em: 3 nov. 2018.
- IBGE educa: **<https://educa.ibge.gov.br>**. Acesso em: 3 nov. 2018.
- iMática: **<www.matematica.br>**. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Disponível em: **<www.inep.gov.br>**. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Jornal da USP Especial Matemática **<http://jornal.usp.br/especial/matematica/>**. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Khan Academy: **<https://pt.khanacademy.org/math>**. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Malba Tahan: **<www.malbatahan.com.br>**. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Olimpíada Brasileira de Matemática: **<www.obm.org.br>**. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas: **<www.obmep.org.br>**. Acesso em: 3 nov. 2018.
- ProEnem **<www.proenem.com.br>**. Acesso em: 3 nov. 2018
- Tv Escola: **<https://tvescola.org.br>**. Acesso em: 3 nov. 2018.

297

Respostas

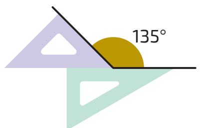
capítulo 1 Ângulos e polígonos

1. a) 27°
b) 90°
c) 7°
d) 99°
e) 116°
f) 101°

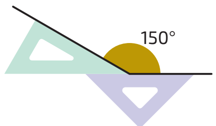
2. a) 45°; agudo
b) 135°; obtuso
c) 90°; reto

3. Possíveis respostas:

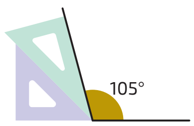
a)



b)



c)



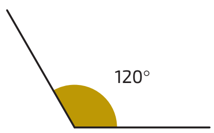
Ilustrações: Cynthia Sekiguchi/Sergio L. Filho

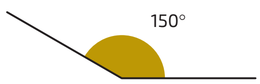
4. a) 48°; 138° **c)** 11°; 101° **e)** 0°; 90°
b) 42°; 132° **d)** 27°; 117° **f)** 61°; 151°

5. a) Sim, pois os ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ possuem um lado em comum e as regiões determinadas por esses ângulos não possuem pontos em comum.

b) não; Apesar de os ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ possuírem um lado em comum, essa construção não atende ao requisito de que as regiões determinadas por esses ângulos não possuam pontos em comum.

c) sim; não

d)
- 

- 

Ilustrações: Sergio L. Filho

6. 70°

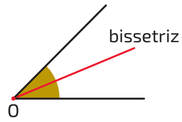
7. I) $x = 118°$
II) $x = 52°$

8. a) $med(E\hat{O}F) = 30°$; $med(F\hat{O}G) = 60°$
b) $med(E\hat{O}H) = 70°$; $med(H\hat{O}D) = 110°$
c) $med(E\hat{O}I) = 65°$; $med(D\hat{O}J) = 25°$

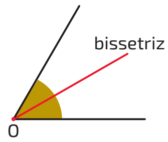
9. $x = 5°$; 48°

10. 45°

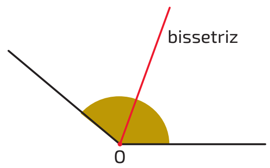
11. a)



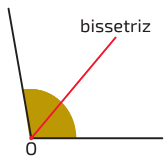
b)



c)



d)



Ilustrações: Sergio L. Filho

12. a) 39°
b) 70°
c) 35°
d) 148°

14. a) 44°
b) 62°
c) 126°
d) 70°

15. I) $x = 6°$; $med(A\hat{O}B) = 64°$; $med(A\hat{O}C) = 32°$
II) $x = 7°$; $med(A\hat{O}B) = 122°$; $med(A\hat{O}C) = 61°$

16. $med(B\hat{C}D) = 96°$; $med(C\hat{F}D) = 86°$ e $med(D\hat{E}A) = 130°$

17. • a; c • b; d

18. a) 3 lados; 3 vértices; triângulo
b) 4 lados; 4 vértices; quadrilátero
c) 8 lados; 8 vértices; octógono
d) 6 lados; 6 vértices; hexágono

19. convexo: b, d, e; não convexo: a, c

20. a) I: pentágonos e quadriláteros; II: quadriláteros; III: heptágonos e quadriláteros; IV: hexágonos e quadriláteros
b) I: 7 faces; II: 6 faces; III: 9 faces; IV: 8 faces
c) 2 faces; 5 faces

21. a) 2 diagonais
b) nenhuma diagonal
c) 11 diagonais
d) 6 diagonais

22. a) 10 lados
b) 16 lados
c) 25 lados

23. a) Duas diagonais, pois a quantidade de diagonais que partem de um único vértice nesse polígono é dada por 12 – 3 = 9 e estão traçadas apenas 7 delas.
b) 54 diagonais

24. a) 5 diagonais
b) 20 diagonais
c) 44 diagonais
d) 90 diagonais
e) 104 diagonais
f) 135 diagonais

25. a) 29 diagonais
b) 16 diagonais

26. a) I: octógono; II: pentágono; III: eneágono
b) I: 5 diagonais; II: 2 diagonais; III: 6 diagonais
c) I: 20 diagonais; II: 5 diagonais; III: 27 diagonais

27. 17 vértices; 119 diagonais

28. 5 diagonais

29. A: 5; B: 2; C: 5; D: eneágono convexo; E: 9; F: 27; G: octógono convexo; H: 5; I: 20; J: 8; K: 44

30. triângulo: 0; quadrilátero: 2; octógono: 20

31. a) 360°
b) 1 080°
c) 1 260°
d) 1 980°

32. a) 900°; 14 diagonais
b) 1 440°; 35 diagonais
c) 720°; 9 diagonais
d) 1 800°; 54 diagonais

33. 125°

34. a) 2 340°
b) 2 880°
c) 4 140°
d) 5 040°

35. a) 6 diagonais
b) 12 diagonais
c) 17 diagonais

36. $med(\hat{a}) = 97°$; $med(\hat{b}) = 105°$; $med(\hat{c}) = 57°$; $med(\hat{d}) = 30°$; $med(\hat{e}) = 24°$

37. a) $med(\hat{A}) = 100°$; $med(\hat{B}) = 45°$; $med(\hat{C}) = 120°$; $med(\hat{D}) = 95°$
b) $med(\hat{E}) = 150°$; $med(\hat{F}) = 80°$; $med(\hat{G}) = 130°$; $med(\hat{H}) = 140°$; $med(\hat{I}) = 95°$; $med(\hat{J}) = 125°$

38. a) 14 lados
b) 16 lados
c) 19 lados
d) 21 lados

39. 1 620°

40. $med(\hat{a}) = 70°$; $med(\hat{b}) = 45°$; $med(\hat{c}) = 60°$; $med(\hat{d}) = 65°$; $med(\hat{e}) = 40°$; $med(\hat{f}) = 80°$

41. $x = 107°$; $med(\hat{A}) = 107°$; $med(\hat{B}) = 120°$; $med(\hat{C}) = 167°$

42. b) hexágono regular; 720°; 360°

43. a) F; A soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360°.
b) V
c) V
d) F; A medida de cada ângulo externo de um pentadecágono regular é 24°.

capítulo 2 Potências e raízes

1. a) 125
b) 89
c) 1
d) 16
e) 7 776
f) 1
g) 13
h) 81
i) 1

2. a) três elevado ao quadrado ou três elevados à segunda potência; 9
b) dois elevado à quarta potência; 16
c) seis elevado à sexta potência; 46 656
d) dez elevado ao cubo ou dez elevado à terceira potência; 1 000
e) oito elevado à quarta potência; 4 096
f) quatro elevado à quinta potência; 1 024

3. a) 3^0; 3^1; 3^2; 3^3
b) 3^4; 3^8

299

4. a) 17^3

b) $\left(\frac{5}{7}\right)^4$

c) $(-3)^5$

d) 10^7

5. a) $\frac{9}{49}$

b) 0,0256

c) 0,28

d) $-\frac{1}{32}$

e) 0,49

f) 1

6. Não, pois $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$ e $-7^2 = -(7 \cdot 7) = -49$

a) 9

b) –9

c) $-\frac{1}{8}$

d) $-\frac{1}{8}$

e) 0,4096

f) –0,4096

7. a) 3^2 ou $(-3)^2$

b) 7^2 ou $(-7)^2$

c) 15^2 ou $(-15)^2$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ou $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

8. 1 080 m^2

9. a) $\frac{1}{32}$

b) $\frac{1}{125}$

c) 4

d) $\frac{27}{8}$

10. a) >

b) <

c) <

d) =

e) >

f) =

11. A: 4^3; B: 4^5; C: 10^9; D: 10^{12}

12. • 7 • 17 • 27
• 11 • 19 • 33

13. a) 12^2 **b)** 7^8 **c)** $\left(\frac{9}{2}\right)^5$ **d)** $\frac{1}{6^3}$

14. a) 320 **b)** 51 **c)** $\frac{87}{4}$ **d)** $\frac{10}{9}$

15. a) 537 824

b) 1 640,25

c) 389,017

d) 9 150 625

e) 274 576

f) 10 077 696

16. a) 1 000 000

b) 20 000 000 000

c) 1 000 000 000

d) 10 000 000

e) 0,004

f) 10

17. a) $1{,}99 \cdot 10^{30}$ t

b) $5{,}5 \cdot 10^{-8}$ m

18. a) $1{,}08 \cdot 10^8$; $2{,}28 \cdot 10^8$; $7{,}78 \cdot 10^8$; $1{,}429 \cdot 10^9$; $4{,}504 \cdot 10^9$

b) Mercúrio: $5{,}8 \cdot 10^7$ km; Terra: $1{,}5 \cdot 10^8$ km; Urano: $2{,}871 \cdot 10^9$ km

19. a) –7 000 **e)** –3 987 000 000

b) 4 800 **f)** –30

c) 4 850 000 **g)** –128 590 000

d) 37 000 **h)** 70 400

20. A: $2{,}2 \cdot 10^8$; B: 45 700; C: $1{,}9 \cdot 10^7$; D: $8{,}7 \cdot 10^{-4}$; E: 0,008473

21. a) Pará: 8 000 000 e $8 \cdot 10^6$; Bahia: 15 000 000 e $15 \cdot 10^6$; São Paulo: 45 000 000 e $45 \cdot 10^6$; Rio Grande do Sul: 11 000 000 e $11 \cdot 10^6$; Goiás: 7 000 000 e $7 \cdot 10^6$

b) $8{,}6 \cdot 10^7$

22. a) $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ m **b)** menor

23. a) 8,3 min

b) $4{,}73 \cdot 10^{15}$ km; $8{,}135 \cdot 10^{15}$ km

24. a) 2

b) 6

c) 17

d) $\frac{1}{3}$

e) 0,6

f) $\frac{2}{5}$

4; 36; 289

25. **a)** 7 cm
b) 9 cm
c) 10 cm
d) 14 cm

26. **a)** 1
b) 25
c) 38,44
d) 18,49
e) 0,49
f) 9,61

27. **a)** 14 cm
b) 25,2 cm

28. **a)** 1,8
b) 2,1
c) 0,4
d) 2,5

29. **a)** 9,4
b) 18,7
c) 32,5
d) 4,37
e) 49,1
f) 66,3

30. **a)** 2
b) 5
c) –3
d) $\frac{1}{2}$
e) $-\frac{3}{5}$
f) $\frac{1}{3}$

31. **a)** 6 cm
b) 8 cm
c) 11 cm

32. A: 4,5 cm; B: 3,5 cm

33. **a)** $17^{\frac{9}{2}}$
b) $6^{\frac{2}{3}}$
c) $13^{\frac{11}{2}}$
d) $4^{\frac{4}{3}}$
e) $12^{\frac{20}{2}}$ ou 12^{10}
f) $7^{\frac{12}{3}}$ ou 7^{4}

34. **a)** $\sqrt[2]{6^8}$
b) $\sqrt{47}$
c) $\sqrt[3]{9^{13}}$
d) $\sqrt{59^7}$
e) $\sqrt[3]{15^{17}}$
f) $\sqrt{100^{11}}$

35. a, c

36. **a)** 1
b) 22

37. **a)** Sim, pois todas as peças encaixadas apresentam resultados iguais.
b) Não, pois $125^{\frac{2}{3}} \neq \sqrt{125}$

38. **a)** 23 **b)** 55 **c)** 32 **d)** 49 **e)** 81 **f)** 12 **g)** 22 **h)** 18 **i)** 27 **j)** 30

39. 18 cm

40. **a)** 20 e 21 **b)** 27,9 e 28

41. 18, $\sqrt{270}$, 14, 12, $135^{\frac{1}{2}}$, 6, $125^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt[3]{27}$

42. **a)** 5,92
b) 4,24
c) 2,65
d) 6,32

43. 20,74 cm

44. d

45. **a)** 2 e 3
b) 4 e 5
c) 4 e 5
d) –7 e –6
e) 7 e 8
f) –13 e –12

46. 45 cm

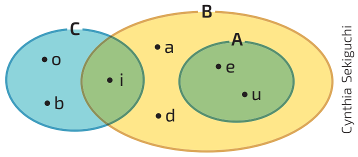
48. 18 e 19

capítulo 3 Conjuntos numéricos

1. Possíveis respostas: conjunto dos objetos escolares: {transferidor, caneta, caderno, lápis, borracha, calculadora}; conjunto dos objetos que começam com a letra c: {calculadora, caderno, caneta}; conjunto dos objetos confeccionados com papel: {caderno, revista}.
a) Possíveis respostas: conjunto dos objetos escolares: 6 elementos; conjunto dos objetos que começam com a letra c: 3 elementos; conjunto dos objetos confeccionados com papel: 2 elementos.
b) sim; Possível resposta: o caderno, nas possíveis respostas, pertence ao conjunto dos objetos escolares, ao conjunto dos objetos que começam com a letra c e ao conjunto dos objetos confeccionados com papel.

2. **a)** pertencem a **C**: 1, 12, 17;
não pertencem a **C**: 2, 4, 5, 7, 9, 18
b) • $\notin$ • $\in$ • $\notin$ • $\notin$ • $\in$ • $\notin$
c) • $\subset$ • $\not\subset$ • $\subset$ • $\not\subset$ • $\not\subset$ • $\subset$

3. a)



b) A e B

c) sim; Espera-se que os alunos respondam que todos os elementos do conjunto **A** são também elementos do conjunto **B**.

4. a) A = {9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33}

b) B = {8, 10, 12, 14}

c) C = {15, 16, 17, 18...}

d) D = { }

5. a) 42
b) 15
c) 10
d) 60

6. a) • 4, 1, 6, 95 e 10 • 4, –7, 1, –23, 6, 95, 10 e –1
b) sim

7. a) $\in$
b) $\in$
c) $\notin$
d) $\in$
e) $\notin$
f) $\in$
g) $\notin$
h) $\in$

8. a) infinitos
b) 5
c) infinitos
d) nenhum
e) 11
f) nenhum

9. a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7
b) Possível resposta: –6, –5 e –4.
c) Possível resposta: –11, –12, –13 e –14.

10. a) 1 267
b) 296
c) 16

11. a) • 79 e 128 • –3, 79, –4 000 e 128
b) –4 000; 128
c) –3: –4 e –2; 79: 78 e 80; 128: 127 e 129; –4 000: –4 001 e –3 999

12. menor: 100; maior: 999; 99 e 101; 998 e 1 000

13. sim; não

14.

Antecessor	Número	Sucessor
–16	–15	–14
21	22	23
4	5	6
39	40	41
–100	–99	–98
0	1	2
–2	–1	0
2	3	4
–11	–10	–9
55	56	57
–62	–61	–60

15. a) $x + 1$
b) $y - 1$

16. sim

17. I) 97
II) 1
III) –1

18: constante mágica: –6; A: –5; B: 0; C: 5; D: –8; E: –3; F: 4; G: 2

19. sim; Possível resposta: 3 – 11 = –8

20. a) sim; sim; Possível resposta: 8:4 = 2; (–27):(–3) = 9
b) não

21. a) O oposto do número escolhido.
b) –15; 8
c) sim

22. a) F
b) V
c) V
d) F
e) V
f) F
g) F
h) V

23. a) 4,75
b) 0,125
c) 1,333... ou $1,\overline{3}$
d) 2,125

302

24. **a)** 2,666... ou $2,\overline{6}$

b) 2,090909... ou $2,\overline{09}$

c) 0,369369... ou $0,\overline{369}$

d) 065625

Dízimas periódicas	Período
2,666...	6
2,090909...	09
0,369369	369

25. **a)** $\frac{9}{25}$ **c)** $\frac{11}{5}$

b) $\frac{39}{4}$ **d)** $\frac{13}{8}$

26. $\frac{1}{8} = 0,125$; $2 = \frac{10}{5}$; $0,5 = \frac{-1}{-2}$; $-6 = \frac{6}{-1}$; $\frac{16}{25} = 0,64$;
$3 = \frac{36}{12}$

27. **a)** $\frac{5}{9}$

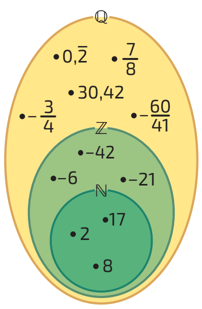
b) $\frac{22}{9}$

c) $\frac{118}{99}$

d) $\frac{384}{99}$

28. A: $-\frac{2}{6}$; B: -4; C: $\frac{14}{5}$; D: 0,25; E: $-\frac{9}{4}$; F: $1,3\overline{6}$;
G: 4,07; H: $-\frac{7}{2}$

29. Possível resposta:



Cynthia Sekiguchi

30. **a)** $\frac{151}{6}$

b) $\frac{23}{6}$

c) $\frac{46}{90}$

d) $\frac{1\,725}{990}$

31. **a)** $\mathbb{Q}$

b) $\mathbb{I}$

c) $\mathbb{Q}$

d) $\mathbb{Q}$

e) $\mathbb{Q}$

f) $\mathbb{Q}$

g) $\mathbb{Q}$

h) $\mathbb{Q}$

i) $\mathbb{I}$

j) $\mathbb{I}$

sim

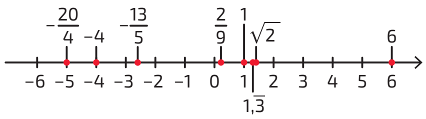
32. **a)** V

b) V

c) F

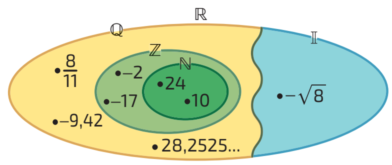
d) F

33.



Sergio L. Filho

34.



Cynthia Sekiguchi

35. **a)** 8

b) Sim, pois 62 pertence a $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

36. $-\sqrt{17}; -\sqrt{9}; -\frac{1}{4}; -0,2; 0; \sqrt{3}; 2,\overline{941}; \pi; \frac{23}{7}; \frac{10}{3}$

37. aproximadamente 854 m

38. **a)** mais que uma unidade; Possível resposta: pois $4:3 > 1$

b) $\frac{4}{3}$; $1\frac{1}{3}$; $1,\overline{3}$ ou 1,333...

c) $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

capítulo 4 Polinômios, produtos notáveis e fatoração

1. a-III; b-I; c-IV; d-II; e-V

2. **a)** 12

b) 76

c) −8

d) 8

3. **a)** $\frac{(x - 28)}{5}$

b) $x + \frac{2}{9}x$

303

4. R$ 1 408,00

5. a) $12x$
b) $x + 3z$
c) $2x + 3z$
d) $2x + 3y$
a: R$ 129,60; b: R$ 20,40; c: R$ 31,20; d: R$ 59,10

6. Possível resposta: $2x + 2$

7. a) 3; xy
b) $\frac{1}{6}$; x^2
c) 1; x^3yz^2
d) $3\sqrt{5}$; x
e) -15; w^2
f) 1; a

8. a) $4a$
b) $4x + 6y$
$4a$

9. a) 6
b) 5
c) 1; 8
d) 4; 7

10. a) 1º grau
b) 3º grau
c) 3º grau
d) 6º grau
e) 9º grau
f) 7º grau

11. a) $3x$
b) $4y$
c) $8ab^2c$
d) $15x^2$
e) $17xy^3z$

12. a) $5{,}25xy$ b) $11{,}45xy$

14. a) $31{,}9\ mn$
b) $\frac{2}{7}y^5$
c) $3{,}4ab^2$

15. a) $6xy$
b) $15x^3y$
c) $10ab^2c$
d) $28a^2$
e) $2x$
f) $5a^2b^2c$
g) $3y$
h) $4ab$

16. $4x^2y^4$

17. a) $8x^6$
b) $125x^3y^3$
a: 6º grau; b: 6º grau

18. a) $324x^3$
b) $192y^3$

19. $8x^3y^3$

20. Possível resposta:
a) $6x^3 : 2x$
b) $16x^4y^2z : 4x$

21. a) $2x^2$
b) $3ab$
c) $8x^2y$
d) $2xy$

22. A: $4x^2$; B: $6x^4y^2$; C: $9x^3y^2$; D: $8xy^3$; E: $10x^2y^3$; F: $2y$

23. a) $27x^6$
b) $16a^8b^{12}$
c) $\frac{1}{4}y^{10}$
d) $125a^{12}$
e) $243t^{10}u^5$
f) $64y^{15}z^9$

24. a) $(6ab^2)^2$; $36a^2b^2$
b) $\left(\frac{2}{3}x^4y^2\right)^2$; $\frac{4}{9}x^8y^4$
c) $(10t^3)^2$; $100t^6$

25. a) $6a^4$
b) $\frac{1}{2}a$
c) $27a^3$
d) $24a^4$
e) $900a^4$

26. a) 19, 23, 27
b) 20, 24, 28
c) 34, 42, 50

27. a) Possível resposta: $a_n = n^2 + 1$
b) Possível resposta: $a_n = (n + 1) \cdot n$

28. 10, 50, 250, 1 250, 6 250, 31 250

29. a) Possível resposta: de um monômio para o seguinte, o coeficiente dobra e o expoente da variável aumenta três unidades.
b) $48x^{14}$ e $96x^{17}$
d) $a_1 = 3x^2$ e $a_n = a_{n-1} \cdot 2x^3$, para $n > 1$

30. $a_n = 3n + 1$

31. **a)** $32x^5$, $64x^6$, $128x^7$

b) $x^{48}y^{32}$; $x^{96}y^{64}$; $x^{192}y^{128}$

32. **a)** binômio

b) monômio

c) trinômio

d) monômio

e) trinômio

f) binômio

33. **a)** $11xy$

b) $2a^3 + 2b^5 + c^2 - 2$

c) $14a + 2b - 6$

d) $4x^2 - 8xy - 22y$

34. $3{,}90x + 6{,}10y + 3{,}20z$

35. $50x + 48y + 82z$

36. **a)** $2x$

b) $\frac{5}{2}xy - 4z$

37. **a)** $30a^3 + 8b^3 + 70c^3$

b) 3º grau

c) 882,75 cm^3

38. Possível resposta:

a) a^2b

b) $4a^3 - 3a^2b^3 + 2b$

39. **a)** $30x^2$

b) $18y^5$

40. **a)** 25

b) 48

c) 105

d) 72

41. $\frac{x}{2} - 9$

42. **a)** $x^3 - x^2 + 8x + 3$

b) $-3x^3 - 3x^2 + 7x + 7$

c) $5x^3 - x^2 + 9x - 11$

d) $3x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

43. **a)** $-4x^3 - 5$

b) $-\frac{2}{3}a^2 + a + 30$

c) $\frac{2}{11}t^7 - 18t^6 + 3t^5 - t^3 + 14$

44. **a)** $4x^4 + 12xy^2$

b) $16x^4 + 22xy^2$

45. **a)** $6x^2 - 5x + 10$

b) $15a^3 + 6a^2 - 9a + 7$

46. **a)** $2y + 3$

b) $2x^2 + x + 5$

c) $x^5 - 2x^3 + 4x - 7$

47. $14x^2y^2 + 12x^2y + 16y^2 + 2$

48. **a)** $2x^2 + 11x + 12$

b) $3y^2 + 16y + 5$

49. **a)** $2x^2 - 3x$

b) $8ab^2 + 2b^3$

c) $-x^3y + 2x^2y^2 - xy^3$

d) $3a^2b^2 - 15ab^3 - 21a^2b^3$

e) $-4x^2y - 12xy + 4xy^2$

f) $a^3b^2c^2 - 3a^2c + 2a^2bc$

50. b; 150 cm^2

51. **a)** $x^3 + 2x^2 + x + 18$

b) $-a^3b^3 - a^2b^2 + 23ab - 12$

c) $x^3y + x^2y^2 - 2xy^3 - 6x^2y + 6xy^2$

53. $54x^2 + 29x$; 12 585

55. **a)** $4x^2 - x - 2$

b) $a^5 + 3a^2 - 2$

c) $6x^3 - 4x$

d) $x^2y^3 - 2x$

56. **a)** I:$4x + 1$; II: $x^4 - 2x^3 + x$

b) I: 13 cm e 6 cm; II: 30 cm e 9 cm

c) I: 36 cm^2; II: 12 cm^2

57. **a)** $x + 2$

b) $a^5 + a^4 - 2a$

c) $2b^2 - 9b - 5$

58. $20x^3 + 50x^2 - 5x$

59. 4º grau

60. $3y^2 + 2y$

61. **a)** $2s - 7$

b) $2u$

62. **a)** $9a^2 + 6ab + b^2$; $(3a + b)^2$

b) $4x^2 + 6xy + 9y^2$; $(2x + 3y)^2$

63. **a)** $8x$

b) $12a$

c) $3x^2$

64. $81x^2$

65. **a)** $2a^2$

b) $-6y^2 - 8yx - 4x^2$

c) $3z$

305

66. **a)** $4x^2$
b) $4x^2 - 20x + 25$

67. **a)** $x^2 - 4xy + 4y^2$
b) $36y^2 - 48xy + 16x^2$

68. **a)** $x^2 - y^2$
b) $4x^4 - 25y^2$
c) $x^2 - 4y^2$
d) $y^2 - \dfrac{x^2}{9}$

69. **a)** $36x^2 - 24xy + 4y^2$

70. **a)** $x^2 - y^2$ **b)** $900\ m^2$; $5\,500\ m^2$

71. **a)** $8a^3 + a^2 + 2a + 1$
b) $3a^2 + 6ab$
c) $b^2 - 6ab$
d) $-2a^2 - 6a - 12b + 12ab$
a: 12; b: 15; c: −8; d: −8

72. a-II; b-I; C-III

73. **a)** $x + y$ **b)** $2a - b$ **c)** $5 + k$

74. **a)** quadrado da diferença de dois termos
b)
- 225
- 9 604
- 4 096
- 1 296
- 441
- 7 921

75. **a)** $5 \cdot (x - 2)$
b) $7 \cdot (3y + 1)$

76. **a)** zy
b) x
c) zw^2
d) $2x^2y^2$

77. **a)** $2 \cdot (x^2 + 2y)$
b) $a \cdot \left(b^2 - 8c\right)$
c) $5zw \cdot (w + 5z)$
d) $3xy^2 \cdot (4 + 3x^4y)$
e) $2b^2 \cdot (2a^3c^5 - 3a^2b + 7c)$

78. **a)** $2 \cdot (x + y + z + a)$
b)
- ax
- ay
- az

c) $a \cdot (x + y + z)$

79. **a)** $x \cdot (5 - 7y)$
b) $5a \cdot (2b + 1)$
c) $4y \cdot (y - x^2)$
d) $2x^2y^3 \cdot (5y^3 - 2)$

80. **a)** $(2 + x) \cdot (1 + y)$
b) $\left(a + b^3\right) \cdot (x + y)$
c) $(2x - 3) \cdot (x + y)$
d) $(a^2 + 3b) \cdot \left(a - 4b^2\right)$

81. $x \cdot (2z - y)$

82. **a)** $(a + 8) \cdot (a - 8)$
b) $(3x - 5y) \cdot (3x + 5y)$
c) $\left(ab^2 + c^3\right) \cdot \left(ab^2 - c^3\right)$
d) $\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{4}y^4\right) \cdot \left(\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{4}y^4\right)$

83. **a)** $(x + 5y)^2$
b) $(6a + b)^2$
c) $(7x - 4y)^2$
d) $\left(a^3 + b^2\right)^2$

84. **a)** $4x$; $(x + 2)^2$ **b)** a^2; $(a + 6b)^2$

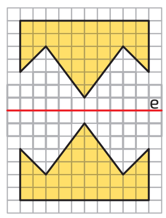
85. **a)** $4a - 7b^2$
b) $b + y$
c) $a + b^2$
d) $a + 5y$
e) $-bx + 2by$
f) $xy^2 + 4x - 2y$

86. **a)** $3 \cdot (x + 3y)$
b) $ab \cdot (a - 1)$
c) $a \cdot \left(3a^2 - 8b + ba^2\right)$
d) $(x^2 + y^2) \cdot (2x + 4y)$

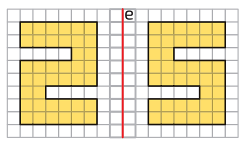
capítulo 5 Transformação de figuras

1. **a)** I: 3 eixos; II: 4 eixos; III: 5 eixos; IV: 6 eixos
b) Nos polígonos regulares, a qualidade de eixos de simetria é igual à quantidade de lados.

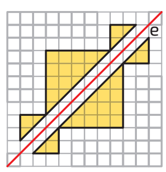
2. **a)**



b)



c)



Ilustrações: Sergio L. Filho

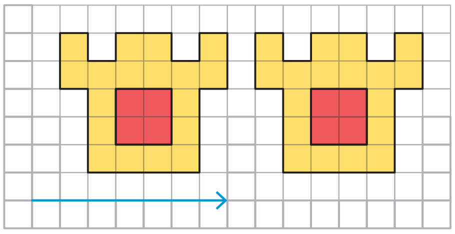
306

3. **a)** A(8, 6), B(2, 3) e C(6, 1)
   b) A(8, – 6), B(2, – 3) e C(6, – 1)

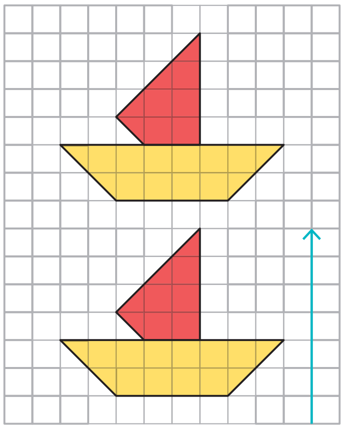
4. a; b

6. **a)** horizontal, 5 unidades para a direita
   b) horizontal, 10 unidades para a esquerda
   c) vertical, 8 unidades para baixo
   d) vertical, 7 unidades para cima

7. **a)**



b)



Ilustrações: Sergio L. Filho

9. **a)** Possível resposta: o menor elemento utilizado para compor a imagem foi o triângulo.
   b) Possível resposta: reflexão, rotação e translação.

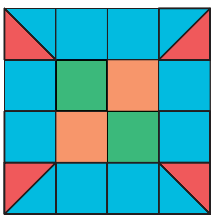
10. b

11. a e **c**

12. **a)** Caracteriza-se por padrões decorativos com traços gráficos simétricos e cores da decoração marajoara.
    b) reflexão, rotação e translação

13. **a)** 2 eixos
    b) III

15.



Sergio L. Filho

capítulo 6 Equações, sistemas de equações e inequações

1. **I)** 250 g
   II) 550 g

2. **a)** $x + (x + 1) = 25$; $x = 12$
   b) $32 + x = 86$; $x = 54 \longrightarrow$ R$ 54,00

3. **a)** $3x - 7 = 2x + 2$; $x = 9$
   b) $1 + 2x = 99$; $x = 49$
   c) $\frac{x}{5} = x - 12$; $x = 15$

4. $2x + 33{,}40 = 50$; $x = 8{,}30$

5. **a)** $b = 3$; $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$
   b) $y = \frac{1}{3}$; $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$
   c) $z = -8$; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$
   d) $a = -\frac{8}{3}$; $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

6. **a)** $x = 12$
   b) $x = \frac{13}{8}$
   c) $x = -\frac{9}{10}$
   d) $x = -\frac{15}{4}$
   e) $x = 1$

7. 36

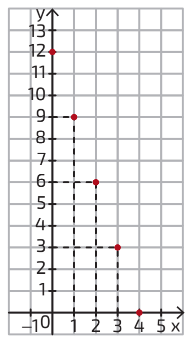
8. **a)** $2x + \frac{x}{2} = 315$
   b) calça: R$ 126,00; saia: R$ 63,00

9. **a)** III **b)** 84 anos **c)** 33 anos

10. **a)** $x - y = 3$
    b) $3x + y = 83$
    c) $5x + \frac{y}{2} = 78$

11. $(1, -3)$; $(-5{,}0)$; $(7, -6)$; $\left(-4, -\frac{1}{2}\right)$ e $(-15{,}5)$

12. **a)** Possíveis respostas:
    $3x + y = 12$; $(0{,}12)$, $(1{,}9)$, $(2{,}6)$, $(3{,}3)$, $(4{,}0)$
    b)

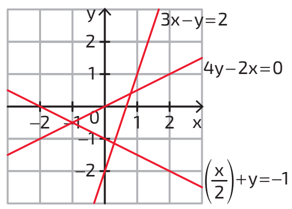


Sergio L. Filho

13. IV

307

14.



Sergio L. Filho

15. Possíveis respostas:

a) $x + y = 4$
b) $x - y = -7$
c) $x + y = 0$
d) $x - y = -5$

16. sim; Possível resposta: pois um mesmo par ordenado pode ser solução de diferentes equações.

17. Curitiba

18. 1

19. (4, 3)

20. **a)** II
b) quantidade de cédulas de 10 reais; quantidade de cédulas de 20 reais

21. b

22. $\begin{cases} x + y = 28 \\ x - y = 4 \end{cases}$

23. c

24. a-II; b-III; c-I; d-IV

25. **a)** (−4, 2)
b) Não, pois retas correntes se encontram em um único ponto.

27. **a)** (12, −8)
b) (1, −4)
c) (0, 3)
d) (2, 10)

28. 162 entradas e 54 meias-entradas

29. **a)** (5, −1)
b) (2, 6)
c) (7, 0)
d) (−3, 1)

30. R$ 27,35

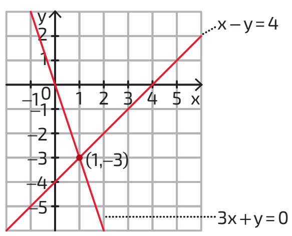
31. $\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 7 \end{cases}$; 16 meninos e 9 meninas

32. etanol: R$ 3,09; gasolina: R$ 4,90

33. 266 L

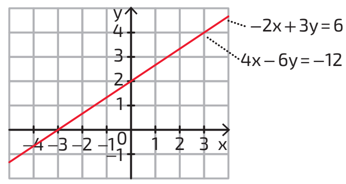
34. 8 vértices

35. **a)**

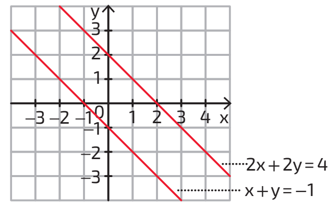


Sergio L. Filho

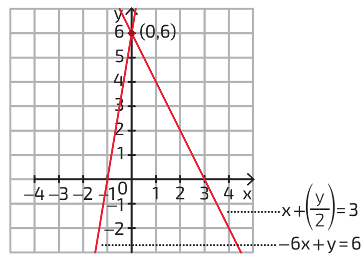
b)



c)



d)



Ilustrações: Sergio L. Filho

36. $x = 80°$; $y = 100°$

37. corrida: 2,5 h; natação: 2 h

40. II; 138 revistas de culinária e 212 revistas de esportes

42. a; c

43. a-IV; b-III; c-I; d-II

44. $2x + 42 \geq 50$

45. I: $x \leq 80$; II: $3x > 5$; III: $\frac{x}{2} \geq 21$
a) abaixo
b) não
c) sim; não

46. **a)** I: $2x > 3$; II: $4 < y + 1$; III: $5 > x + y$
b) caixa azul
c) maior
d) sim
e) caixa amarela: mais de 1,5 kg e menos de 2 kg; caixa azul: mais de 3 kg e menos de 3,5 kg
f) não

47. Possível resposta:
a) 0, 1, 2 e 3
b) 1, 0 −1 e −2
c) −1, 0, 1 e 2
d) 1, 0 −1 e −2

308

48. 5,3; 20; 9; $6\frac{2}{3}$; 59; a

49. **a)** $x < 1$

b) $x \geq 6$

c) $x > -\frac{4}{3}$

d) $x \leq \frac{3}{2}$

51. **a)** $300x + 450 \leq 1\,950$; 5 dias

b) $375x + 450 \leq 1\,950$; 4 dias

52. **b)** Não, pois o voto é um direito das pessoas com 16 anos de idade ou mais.

c)
- facultativo
- obrigatório
- facultativo
- obrigatório
- obrigatório
- facultativo

53. b, f

54. **a)** $x^2 = 64$; $x = 8$

b) $4x^2 = 100$; $x = 5$

c) $9x^2 = 324$; $x = 6$

- a: 8 cm; b: 10 cm; c: 18 cm

55. 9 m

57. **a)** $x^2 = 144$; $x = 12$ ou $x = -12$

b) $\frac{x^2}{2} = 32$; $x = 8$ ou $x = -8$

c) $3x^2 = 3\,888$; $x = 36$ ou $x = -36$

58. **a)** $x = -4$ ou $x = 4$

b) $x = -6$ ou $x = 6$

c) $x = -5$ ou $x = 5$

d) $x = -8$ ou $x = 8$

e) $x = -6$ ou $x = 6$

f) $x = -3$ ou $x = 3$

60. $x = 4$; 4 m

capítulo 7 Proporcionalidade

1. **a)** inversamente proporcionais

b) diretamente proporcionais

c) não proporcional

2. 3 horas

3. 81 kg

4. 38 lajotas

5. 3 dias

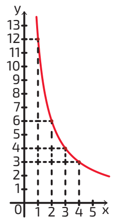
6. a-II

15 semanas; diretamente proporcionais

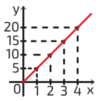
8. b

9. II

10. **a)** $y = \frac{12}{x}$, $x > 0$



b) $y = 5x$



Ilustrações: Sergio L. Filho

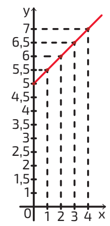
11. **a)** não proporcionais

b) R$ 14,00; 56 caixas

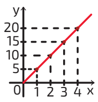
c) $y = 5 + x \cdot 0{,}5$; $y = 8 + x \cdot 6$

d)

I)



II)



Ilustrações: Sergio L. Filho

13. **a)** 3

b) 9

c) 5

d) 14

14. 5 mg

15. 18 L

17. 11 h

18. 26 min

21. 30 alunos

22. 6 viagens

23. 750 Kg

24. 16 costureiras

25. 3 600 habitantes

26. R$ 1 350,00

27. R$ 9,75

309

28. **a)** • 15° • 11° **b)** • 96° • 204°

29. 30%

30. **a)** Norte: 5%; Nordeste: 8%; Sudeste: 7%; Sul: 36%

31. **a)** R$ 765,00 **b)** R$ 135,00

32. 8%

33. **a)** R$ 855,00; R$ 209,00
b) 11%

34. O pacote de 2,2 kg, pois cada quilograma nesta embalagem custa R$ 10,50, ao passo que no pacote de 0,9 kg cada quilograma custa R$ 12,00.

35. **a)** 96 pedidos atendidos; 156 pedidos atendidos
b) 6 meses

capítulo 8 Estatística e probabilidade

1. **a)** quantitativa **c)** quantitativa
b) qualitativa **d)** qualitativa

2. a: quantitativa discreta; b: qualitativa ordinal; c: quantitativa contínua; d: quantitativa contínua

3. quantidade média de circulação diária; nome do jornal

4. qualitativa ordinal: ano; quantitativa discreta: percentual de pessoas com acesso à internet; qualitativa nominal: região; quantitativa contínua: valor por megawatt-hora

5. **a)** 40 alunos
b) comédia: 30%; ação: 25%; aventura: 20%; animação: 12,5%; romance: 7,5%; outros: 5%
c) 100%

6. **a)** 45 funcionários
b)

Meios de locomoção dos funcionários de uma empresa – 2019

Meio de locomoção	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)
A pé	6	13%
Ônibus	10	22%
Automóvel	12	27%
Bicicleta	5	11%
Motocicleta	9	20%
Demais meios	3	7%
Total	45	100%

Recursos humanos da empresa.

c) automóvel

7. **a)** 30 alunos
b) 12 anos; 15 anos
c)

Idade dos alunos de uma turma do 8º ano – 2019

Idade	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada (fa)	Frequência acumulada relativa (far)
12	10	33%	10	33%
13	11	37%	21	70%
14	6	20%	27	90%
15	3	10%	30	100%
Total	30	100%		

Direção da escola.

8. **a)** Ensino Fundamental: 42 funcionários;
Ensino Médio: 21 funcionários;
Ensino Superior: 7 funcionários

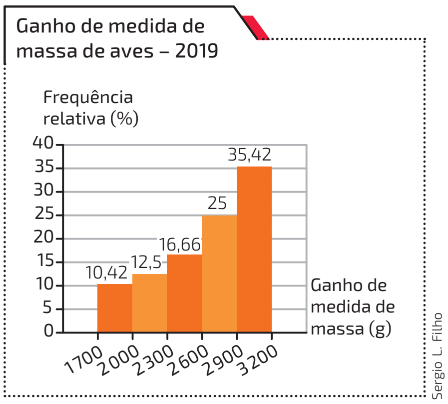
9. **a)** 9 pessoas
b) 6,25%
c) Sim, pois 25% das pessoas examinadas apresentam um alto nível de colesterol LDL.

10. **d)** Sim, pois $\frac{1}{5} = 20\%$ e 29,63% dos alunos obtiveram nota inferior a 7,5.

12. **a)** 200 pessoas **b)** 4 anos

13. **a)** 5 anos **b)** 36% **c)** 33 funcionários

14. **a)** 48 aves
b) aproximadamente 22,92%
c) 300 g
d)



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

15. **a)** gráfico de barras; Porque devem ser proporcionais aos percentuais por elas representados.
b) Ruanda
c) 10,7%; 89,3%
d) não

310

16. a) tabela de dupla entrada

b) 41,6 milhões de habitantes; 52,9 milhões de habitantes

c) A população urbana brasileira, em milhões, no ano 2000.

d) gráfico de barras múltiplas

17. a) A linha vermelha indica a quantidade acumulada de chuva, em milímetros, no município de Barroquinha e a linha azul, de Campos Sales.

b) significa a quantidade de chuva ocorrida em Barroquinha no mês de abril

c) 132 mm; 17 mm

d) sim; gráfico de barras múltiplas

18. a) pictograma

b) 78 anos; 84 anos

c) Serra Leoa; 53 anos

19. a) gráfico de setores; Identificar a qual região brasileira corresponde cada setor.

b) 64%

c) Norte; Sul

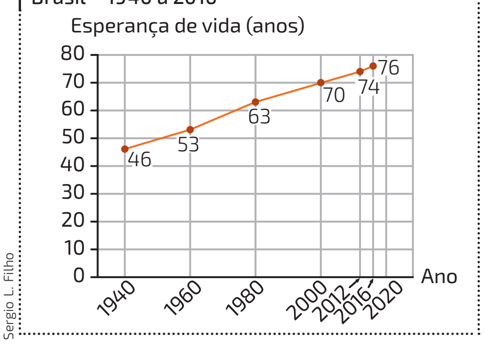
d)
- Norte: 3,825 milhões de quilômetros quadrados
- Sudeste: 0,935 milhão de quilômetros quadrados
- Nordeste: 1,53 milhão de quilômetros quadrados

e) sim; gráfico de barras

20. b) de 20 a 24 anos

22. a)

Esperança de vida ao nascer no Brasil – 1940 a 2016



IBGE. **Tábuas completas de mortalidade para o Brasil 2016**: breve análise da evolução da mortalidade no Brasil. Disponível em: <ftp://ftp.ibge.gov.br/Tabuas_Completas_de_Mortalidade/Tabuas_Completas_de_Mortalidade_2016/tabua_de_mortalidade_2016_analise.pdf>. Acesso em: 1 jun. 2018.

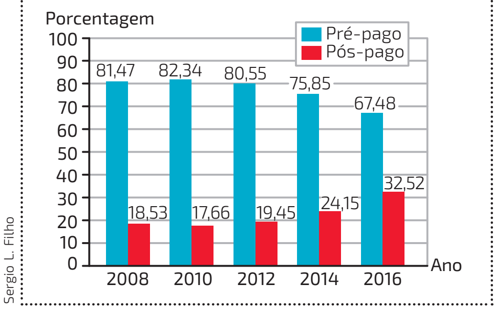
b) Possível resposta: gráfico de linhas; Possível resposta: esse tipo de gráfico possibilita comparar a evolução na esperança de vida ao nascer no Brasil.

c) 10 anos

d) aumentou

23. sim

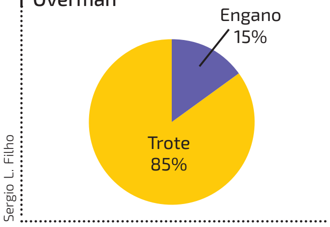
Porcentagem de planos de telefonia móvel pré-pagos e pós-pagos no Brasil – 2008 a 2016



ANATEL – Agência Nacional de Telecomunicações. **Relatório anual 2016**. Disponível em: <http://anatel.gov.br/Portal/verificaDocumentos/documento.asp?numeroPublicacao=347175&assuntoPublicacao=null&caminhoRel=null&filtro=1&documentoPath=347175.pdf>. Acesso em: 5 jun. 2018.

24. a)

Porcentagem de chamadas telefônicas recebidas por Overman



LAERTE, Overman. **Folha de Londrina**, Londrina, 23 jan. 2003.

b) 0%

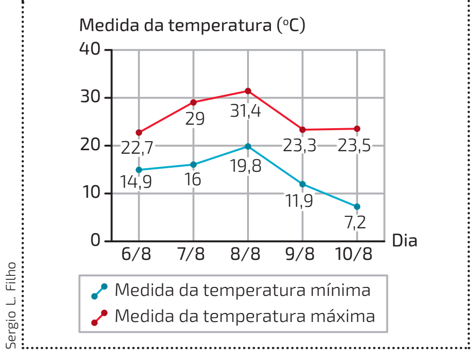
c) 102 ligações

25. a) máxima: 31,4 °C; mínima: 19,8 °C

b) no dia 10/8; 7,2 °C

c)

Medidas das temperaturas registradas em Campo Grande (MS) em alguns dias de agosto de 2018



INMET – Instituto Nacional de Meteorologia. **Condições de tempo registradas nas capitais**. Disponível em: <www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=tempo/condicoesTempoCapitais>. Acesso em: 17 ago. 2018.

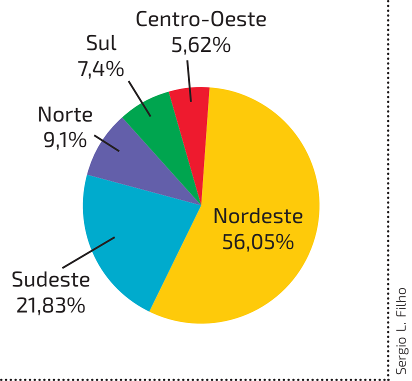
311

26. a) 11 466 000

b) aproximadamente 6,84%

c)

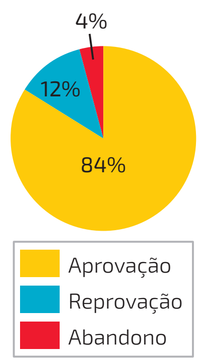
Porcentagem de pessoas analfabetas com 15 anos ou mais de idade no Brasil – 2017



IBGE. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua - PNAD Contínua**. Disponível em: <www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/sociais/educacao/17270-pnad-continua.html?edicao=21073&t=downloads>. Acesso em: 5 jun. 2018.

27. a)

Taxa de aprovação, reprovação e abandono no Ensino Fundamental nos anos inicias em Alagoas – 2014/2015



INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Indicadores de Fluxo Escolar da Educação Básica**. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/apresentacao/2017/apresentacao_indicadores_de_fluxo_escolar_da_educacao_basica.pdf>. Acesso em: 6 jun. 2018.

b) Possível resposta: gráfico de setores; Possível resposta: esse tipo de gráfico possibilita comparar as taxas de aprovação, de reprovação e de abandono no Ensino Fundamental no estado de Alagoas.

28. a) 273 kWh

b) maio, junho, julho e agosto

29. a) Md = 19 anos;
Mo = 17 anos e Mo = 18 anos;
Ma = 20 anos

b) bimodal

c) $A_t = 27$ anos

30. a) Patrícia: 6,2, Daniele: 5,7, Lucas: 6,5 e Fabiana: 6,9; Lucas e Fabiana

b) Patrícia: 7,2, Daniele: 9,2, Lucas: 6, Fabiana: 4,4

31. a) 183 cm, 183 cm e 191 cm

b) $A_t = 23$

32. a) 2 visitas

b) 3 visitas

c) 6 visitas

33. a) Pesquisa censitária, pois nesse caso é possível pesquisar todos os alunos, ou seja, envolver toda a população.

b) Possível resposta: pesquisa amostral, pois nem sempre é possível ter acesso a todos os clientes da lanchonete.

c) Pesquisa censitária, pois é possível consultar todos os funcionários, ou seja, envolver toda a população.

d) Possível resposta: pesquisa amostral, pois geralmente não é possível ter acesso a toda a população.

34. a) pesquisa censitária

b) Os funcionários da empresa.

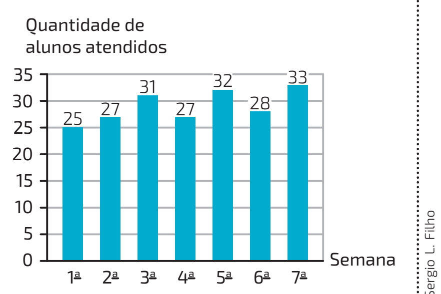
c) Idade, setor em que trabalham e nível de escolaridade.

35. a) 29 alunos

b) Ma = 28;
Mo = 27, $A_t = 8$

c)

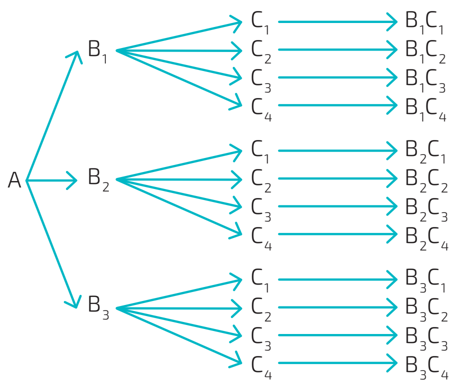
Projeto de incentivo à leitura nas primeiras semanas de aula – 2019



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

312

37. a)



		Rodovias de **B** até **C**			
		C_1	C_2	C_3	C_4
Rodovias de **B** até **C**	B_1	B_1C_1	B_1C_2	B_1C_3	B_1C_4
	B_2	B_2C_1	B_2C_2	B_2C_3	B_2C_4
	B_3	B_3C_1	B_3C_2	B_3C_3	B_3C_4

b) 12 maneiras

38. a) 48 possibilidades

b) • 12 *kits*

• 4 *kits*

39. $3^4 = 81$

40. a) 16 números

b) 27 números

c) 81 números

41. 5 000 minutos

43. b) 6 posições

c) • 10 possibilidades

• 720 possibilidades

44. a) $\frac{1}{2}$ ou 50%.

b) $\frac{1}{3}$ ou, aproximadamente, 33,33%

c) $\frac{2}{3}$ ou, aproximadamente, 66,67%

d) $\frac{1}{6}$ ou, aproximadamente, 16,67%

45. a) $\frac{1}{6}$ ou, aproximadamente, 16,67%

b) $\frac{1}{2}$ ou 50%

46. a) 121 fichas

b) • $\frac{1}{121}$

• $\frac{20}{121}$

• $\frac{48}{121}$

• $\frac{52}{121}$

c) 1

d) $\frac{69}{121}$

e) 0 ou 0% (evento impossível)

47. a) 125 cartões

b) • $\frac{14}{25}$ ou 56%

• $\frac{8}{25}$ ou 32%

• $\frac{3}{25}$ ou 12%

c) cartão vermelho: 50%; cartão azul:35%; cartão amarelo: 15%

d) próximos

48. a) $\frac{3}{80}$ ou 3,75%

b) Igual, pois $\frac{6}{160} = \frac{3}{80}$.

49. a) 50 bolas

b) 10 bolas pretas, 5 bolas verdes, 20 bolas brancas e 15 bolas azuis

50. a)

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Sergio L. Filho

b) • $\frac{0}{36}$ ou 0%

• $\frac{19}{36}$ ou, aproximadamente, 52,78%

• $\frac{20}{36}$ ou, aproximadamente, 55,55%

• $\frac{1}{36}$ ou, aproximadamente, 2,78%

• $\frac{2}{36}$ ou, aproximadamente, 5,55%

• $\frac{27}{36}$ ou 75%

51. a) • $\frac{1}{3}$ ou, aproximadamente, 33,33%

• $\frac{1}{3}$ ou, aproximadamente, 33,33%

b) Vamos indicar com:

- **SB**: salada de brócolis
- **SA**: salada de agrião
- **SM**: salada mista
- **FF**: filé de frango
- **AG**: alcatra grelhada
- **FP**: filé de peixe
- **CM**: creme de milho
- **PB**: purê de batata
- **MF**: mandioca frita
- **AR**: abobrinha refogada.

O espaço amostral é:

S = {(SB FF CM), (SB FF PB),(SB FF MF), (SB FF AR), (SB AG CM), (SB AG PB), (SB AG MF), (SB AG AR), (SB FP CM), (SB FP PB), (SB FP MF), (SB FP AR), (SA FF CM), (SA FF PB), (SA FF MF), (SA FF AR), (SA AG CM), (SA AG PB), (SA AG MF), (SA AG AR), (SA FP CM), (SA FP PB), (SA FP MF), (SA FP AR), (SM FF CM), (SM FF PB), (SM FF MF), (SM FF AR), (SM AG CM), (SM AG PB), (SM AG MF), (SM AG AR), (SM FP CM), (SM FP PB), (SM FP MF), (SM FP AR)}

52. a) 36 resultados possíveis

b) S = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66}

c) $\frac{1}{36}$ ou, aproximadamente, 2,78%

d) 1

e) $\frac{1}{6}$ ou, aproximadamente, 16,67%

f) $\frac{1}{2}$ ou 50%

g) $\frac{1}{12}$ ou, aproximadamente, 8,33%

53. a) 18 possibilidades

b) • $\frac{1}{3}$ ou, aproximadamente, 33,33%

• $\frac{1}{2}$ ou 50%

• $\frac{1}{3}$ ou, aproximadamente, 33,33%

54. a) S = {135, 138, 153, 158, 183, 185, 315, 318, 351, 358, 381, 385, 513, 518, 531, 538, 581, 583, 813, 815, 831, 835, 851, 853}

b) • $\frac{6}{24}$ ou 25%

• $\frac{4}{24}$ ou, aproximadamente, 16,7%

• $\frac{12}{24}$ ou 50%

• $\frac{18}{24}$ ou 75%

• $\frac{1}{24}$ ou, aproximadamente, 4,2%

capítulo 9 Triângulos

1. a) $med(\hat{a}) = 115°$

$med(\hat{b}) = 48°$

$med(\hat{c}) = 17°$

$med(\hat{d}) = 163°$

b) $med(\hat{d}) = 155°$

$med(\hat{e}) = 25°$

$med(\hat{g}) = 55°$

$med(\hat{f}) = 150°$

2. $x = 8°$

$med(A\hat{B}C) = 62°$

$med(B\hat{C}A) = 42°$

$med(C\hat{A}B) = 76°$

3. a) 360°; 180°

c) ângulo internos: $med(\hat{a}) = 75°$, $med(\hat{b}) = 52,5°$ e $med(\hat{c}) = 52,5°$

ângulos externos: $med(\hat{d}) = 127,5°$ e $med(\hat{e}) = 127,5°$

4. $med(A\hat{B}C) = 100°$

$med(C\hat{A}B) = 40°$

$med(B\hat{C}A) = 40°$

triângulo obtusângulo

5. a) I: 90°; II: 72°; III: 120°

6. a, e; b, d; c, f

7. a, f; b, d; c, e

8. a) 16 m

b) 27 m

9. a) LLL

b) LAL

c) ALA ou LAA_o

10. a e c

11. A, D e F; B e E

12. **a)** ALA ou LAA_o
b) ALA ou LAA_o
c) LLL
d) LAL

13. **a)** $x = 5$ cm; $y = 7$ cm; 96 cm.
b) $x = 8$ cm; $y = 9$ cm; 139 cm.

14. **a)** F **b)** V **c)** F **d)** V

15. **a)** sim
b) não

16. $MO = 2{,}9$ cm; $NO = 3{,}7$ cm e $\text{med}(M\hat{O}N) = 98°$.

17. **a)** $\overline{AF}$
b) $\overline{DF}$
c) $\overline{HF}$
d) $\overline{DE}$
e) $\overline{GH}$

18. **a)** mediana **c)** bissetriz
b) altura **d)** altura

19. **a)** Mediana, pois uma das extremidades do segmento AD é um vértice do triângulo, e a outra é o ponto médio do lado oposto a esse vértice.
b) 6,7 cm

20. a; d

21. **a)** Possível resposta: traçando a mediatriz do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$ e marcando o ponto de interseção com o lado $\overline{AB}$.

22. $\text{med}(\hat{x}) = 36°$ e $\text{med}(\hat{y}) = 68°$

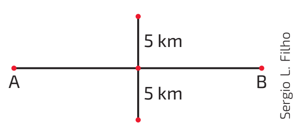
23. **a)** baricentro
b) circuncentro
c) ortocentro
d) incentro

24. $\text{med}(\hat{x}) = 40°$

25. b; O ponto **D** corresponde ao baricentro de ΔABC.

27. **a)** 14,8 cm **b)** 15,6 cm

28 **a)** Possível resposta: as torres estarão localizadas na mediatriz do segmento AB, de maneira que uma estará no ponto médio de $\overline{AB}$ e as outras duas a 5 km dela.
b)



capítulo 10 Quadriláteros e formas circulares

1. vértices: E, F, G e H;
lados: $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{EH}$;
ângulos internos: $\hat{e}$, $\hat{f}$, $\hat{g}$ e $\hat{h}$;
ângulos externos: $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ e $\hat{l}$;
diagonais: $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$

2. **a)** trapézios
b) 70°, 90°, 90° e 110°

3. **a)** 11 cm
b) 360°
c) $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{C}) = 55°$ e
$\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{D}) = 125°$

4. **a)** $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{C}) = 102°$ e
$\text{med}(A\hat{B}C) = \text{med}(\hat{D}) = 78°$
b) $\text{med}(\hat{E}) = \text{med}(\hat{G}) = 45°$ e
$\text{med}(\hat{F}) = \text{med}(\hat{H}) = 135°$
c) $\text{med}(\hat{I}) = \text{med}(\hat{L}) = 98°$ e
$\text{med}(\hat{J}) = \text{med}(\hat{M}) = 82°$
d) $\text{med}(P\hat{O}R) = \text{med}(\hat{Q}) = 55°$ e
$\text{med}(O\hat{P}Q) = \text{med}(\hat{R}) = 125°$

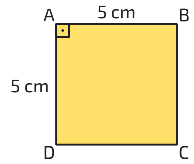
5. $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{C}) = 108°$ e $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{D}) = 72°$;
$\text{med}(\hat{E}) = \text{med}(\hat{G}) = 98°$ e $\text{med}(\hat{F}) = \text{med}(\hat{H}) = 82°$

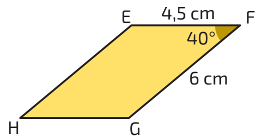
6. **a)** $AB = DC = 5$ cm e $AD = BC = 13$ cm
b) 12 cm
c)
- 18,81 cm
- 26,81 cm
- 33,62 cm

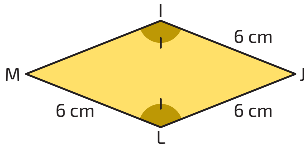
7. **a)** $\text{med}(\hat{a}) = 114°$ e $\text{med}(\hat{b}) = 66°$
b) $\text{med}(\hat{a}) = 90°$, $\text{med}(\hat{b}) = \text{med}(\hat{c}) = 20°$ e
$\text{med}(\hat{d}) = 70°$
c) $\text{med}(\hat{a}) = 90°$ e $\text{med}(\hat{b}) = 45°$

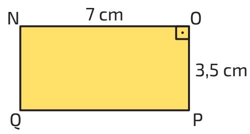
8. retângulo: A, C, D e F
quadrado: A e C
losango: A, B, C e E

9. retângulo: ABCD e NOPQ;
quadrado: ABCD;
losango: ABCD e IJLM









Ilustrações: Sergio L. Filho

10. a) F; Em todo paralelogramo, dois lados opostos são congruentes.

b) V

c) V

d) F; Em todo quadrado, as diagonais possuem medidas iguais e são perpendiculares entre si.

11. a) III

b) quadrados

12. Para demonstrar essa propriedade, consideramos o ΔABD e o ΔBAC, obtidos ao traçamos as diagonais do quadrado ABCD. Temos que $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, pois são lados do quadrado, $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$ são retos, e $\overline{AB}$ é lado comum desses triângulos. Então, pelo caso de congruência LAL, temos $\Delta ABD \equiv \Delta BAC$. Portanto, $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, isto é, as diagonais do quadrado são congruentes.

13. a) $med(\hat{A}) = 57°$, $med(\hat{B}) = 90°$, $med(\hat{C}) = 90°$ e $med(\hat{D}) = 123°$

b) $med(\hat{E}) = 95°$, $med(\hat{F}) = 145°$, $med(\hat{G}) = 35°$ e $med(\hat{H}) = 85°$

c) $med(\hat{I}) = med(\hat{M}) = 80°$ e $med(\hat{J}) = med(\hat{L}) = 100°$

d) $med(\hat{N}) = 42°$, $med(\hat{O}) = 138°$, $med(\hat{P}) = 127°$ e $med(\hat{H}) = 53°$

14. a) trapézio retângulo: EFGH e NOPQ;
trapézio escaleno: ABCD, EFGH, NOPQ e VXYZ;
trapézio isósceles: IJLM e RSTU

b)
- $\overline{RU}$
- $\overline{ST}$
- $\overline{SR}$ e $\overline{TU}$

15. a) $med(\hat{A}) = med(\hat{B}) = 98°$ e $med(\hat{C}) = med(\hat{D}) = 82°$

b) $med(\hat{F}) = med(\hat{G}) = 71°$ e $med(\hat{E}) = med(\hat{H}) = 109°$

c) $med(\hat{I}) = med(\hat{J}) = 135°$ e $med(\hat{L}) = med(\hat{M}) = 45°$

16. 6 cm

17. $x = 132°$, $y = 42°$ e $z = 120°$

18. 144° e 36°

19. $x = 60°$ e $y = 70°$

20. $med(\hat{a}) = med(\hat{d}) = med(\hat{f}) = 60°$, $med(\hat{c}) = med(\hat{e}) = 120°$

21. a) $med(\hat{B}) = med(\hat{C}) = 60°$ e $med(C\hat{D}E) = med(B\hat{E}D) = 120°$

b) $BC = 12$ cm; $CD = BE = DE = 6$ cm; trapézio isósceles

22. Possível resposta: $med(\hat{c}) = med(\hat{d})$ e $med(\hat{a}) = med(\hat{b}) = 180° - med(\hat{d})$

24. b) minério de ferro
c) não
d) medida da distância real aproximada:
Belo Horizonte-Congonhas: 64 km;
Congonhas-Mariana: 48 km;
Mariana-Santa Bárbara: 45 km;
Santa Bárbara-Belo Horizonte: 55 km

25. a) 35 círculos brancos; nenhum círculo preto
b) Vários círculos com um centro em comum.

26. cordas: $\overline{AB}$, $\overline{GB}$, $\overline{EC}$ e $\overline{EF}$
raios: $\overline{AO}$, $\overline{DO}$, $\overline{CO}$ e $\overline{EO}$
diâmetro: $\overline{EC}$

27. 7,5 cm

28. 256 cm^2

29. a) $\overline{DO}$, $\overline{AO}$, $\overline{CO}$ e $\overline{BO}$;
$\overline{DB}$ e $\overline{CA}$
b) Sim, pois ambos têm dois lados com medidas de comprimento iguais à do raio da circunferência.
c) Não, pois eles possuem apenas dois lados congruentes.

30. pontos internos: A, F e O
pontos externos: C e D
pontos pertencentes: B e E

31. a) menor
b) pertencente

33. tangentes: n, v
secantes: s, t, m
externa: u

34. secantes: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$
tangentes: $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$
externos: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

35. a) 3 u; 6 u
b)
- externo
- pertencente
- interno
- pertencente
- interno
- externo

c)
- externa
- secante
- tangente

37. 14 u;
r: secante;
t: externa

38. a) 90°
b) Sim, pois tem um ângulo que mede 90°.
c) 10 cm

39. s: secante;
t: externa;
u: tangente

40. a) secantes
b) internas
c) externas
d) tangentes internas
e) externas
f) tangentes externas

41. 33,6 cm

42. a) $x = 12{,}1$ cm
b) $x = 2$ cm
c) $x = 1{,}8$ cm
d) $3 \text{ cm} < x < 11{,}9 \text{ cm}$

43. raio da circunferência maior: 18 cm; raio da circunferência: 6 cm

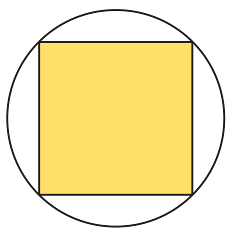
44. $y = 4{,}5$ cm

45. 2 cm; 19 cm

46. a e c

47. a) 120°
b) 90°
c) 60°
d) 45°

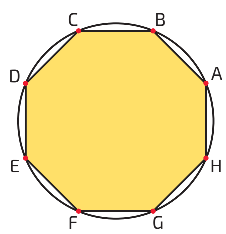
48. a) sim
b)



Sergio L. Filho

49. a) 30°
b) 240°
c) 54°
d) 45°

50.



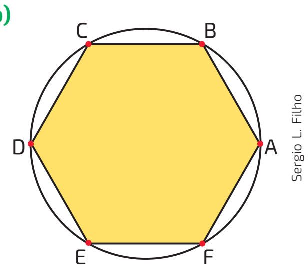
Sergio L. Filho

317

51. **a)** triângulo obtusângulo
b) triângulo acutângulo

52. Hexágono.

53. **b)**



54. **a)** 31,4 cm
b) 18,84 cm
c) 37,68 cm
d) 50,24 cm

55. aproximadamente 50 cm

56. 16 km

57. 2,85 cm

58. **a)** 21 voltas
b)
- 23 voltas
- aproximadamente 40,82 m
- aproximadamente 10 mil voltas

59. 7,5 voltas

capítulo 11 Medidas de área

1. **a)** 48 m²
b) 36 m²

2. **a)** 619,5 cm²; 325,5 cm²
b) maior

3. 14,5 dm

4. **a)** 72 m²; 144 m²
b) a = 6 m, b = 12 m

5. **a)** 31,5 m²
b) 43,4 m²

6. **a)** 336 dm²
b) 16,8 kg

7. **a)** aproximadamente 22,45 cm²
b) aproximadamente 10,74 cm²

8. sim; Possível resposta: porque todos os triângulos têm bases com mesma medida de comprimento e alturas com mesma medida de comprimento.

9. 2

10. **a)** 47,1 m²
b) 60,8 m²

12. h = 3 cm

13. 40 m

14. **a)** medida da área da peça com formato de triângulo: 60 cm²; medida da área da peça com formato de trapézio: 140 cm²
b) 450 peças com formato de triângulo e 450 peças com formato de trapézio.

15. **a)** 6 m²
b) 15,3 m²
c) 15,84 m²
d) 12,985 m²

16. 67,2 cm²

17. D, E, G e F

19. **a)** 97,5 m²
b) 122,2 m²

20. I: 15,68 cm²
II: 15,68 cm²
III: 7,84 cm²
IV: 7,84 cm²
V: 31,36 cm²
VI: 31,36 cm²
VII: 15,68 cm²
a) 39,2 cm²
b) 62,72 cm²
c) 47,04 cm²

21. 72 dm²

22. **a)** aproximadamente 113,04 cm²
b) aproximadamente 78,5 cm²
c) aproximadamente 200,96 cm²
d) aproximadamente 38,47 cm²
e) aproximadamente 63,59 cm²

23. aproximadamente 200,96 cm²

24. aproximadamente 13 cm

25. aproximadamente 40 m

26. **a)** aproximadamente 25,12 cm²
b) aproximadamente 21,2 cm²
c) aproximadamente 10,6 cm²

27. a) aproximadamente 50 cm
b) aproximadamente 40 cm
c) aproximadamente 34 cm

28. modelo **III**

29. a) aproximadamente 43,92 cm^2
b) aproximadamente 64,56 cm^2

31. a) O problema consiste em construir um quadrado com a mesma medida da área de um círculo dado, utilizando apenas régua não graduada e compasso. Esse problema não tem solução.
b) 16 cm
c) medida da área do círculo: aproximadamente 254,34 cm^2; medida da área do quadrado: aproximadamente 256 cm^2

32. 1 290 cm^2

capítulo 12 Medidas de volume e de capacidade

1. a) 11 cm^3
b) 12 cm^3
c) 18 cm^3
d) 27 cm^3

2. a) 1 200
b) 0,125
c) 4
d) 275

3. a) 54 caixas **b)** não há

4. a) 98 000 cm^3
b) 102 600 cm^3
c) 80 840 cm^3

5. medida do comprimento: 6 cm; medida da largura: 2 cm; medida da altura: 3 cm

6. a) 99 dm^3 **b)** 81 dm^3

7. Possível resposta: caixa **A**: medida do comprimento: 0,3 m; medida da largura: 1,6 m; medida da altura: 3,6 m; caixa **B**: medida do comprimento: 0,9 m; medida da largura: 4,8 m; medida da altura: 0,4 m.

8. a) 5 000 cm^3 **b)** 250 cubos

9. a) 48 000 dm^3
b) medida da largura: 4 m; medida da altura: 2 m

10. III

11. a) bolsas que podem ser levadas como bagagem de mão: I e II
c) Possíveis respostas: 33 cm, 47 cm e 33 cm, V = 51 183 cm^3; 42 cm, 39 cm e 32 cm, V = 52 416 cm^3; 30 cm, 46 cm e 39 cm, V = 53 820 cm^3

12. 42 cm^3

13. I) 30 000 cm^3
II) 78 000 cm^3
III) 42 000 cm^3

14. 279 cm^3

15. a) 5 319,16 cm^3
b) 6 769,84 cm^3
c) 1 692,46 cm^3

16. III e IV

17. aproximadamente 6,5 cm

18. a) 28,26 cm^3
b) 61,74 cm^3

19. 1 054,62 cm^3

21. a) aproximadamente 229,22 cm^3
b) aproximadamente 772,44 cm^3

22. a) 5 566 cm^3 **b)** 506 cm^3 **c)** 4,01 cm

23. a) Produzir uma faísca a fim de causar a combustão da mistura de ar e combustível.
b) • 450 cm^3
• aproximadamente 8,3 cm

24. a) 30 L
b) 50 L
c) aproximadamente 20,41 L
d) aproximadamente 127,17 L

25. 28 min

26. a) 106,4 m^3
b) 106 400 L

27. 8,6 m

28. aproximadamente 19 500 L

29. a) 2 160 mL
b) 51,84 L

30. a) 6 000 L
b) não

31. a) Possível resposta: dividir a medida em mililitros por 1 000
b) Possível resposta: multiplicar a medida em litros por 1 000

32. a) 19,32 g
b) aproximadamente 115 g

Bibliografia

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo padrões pitagóricos**: geométricos e numéricos. 4. ed. São Paulo: Atual, 2012.

BOYER, Carl; MERZBACH, Uta. **História da Matemática**. 3. ed. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 25 set. 2018.

CARDOSO, Virgínia Cardia. **Materiais didáticos para as quatro operações**. 3. ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 1996.

CENTURIÓN, Marília. **Conteúdo e metodologia da Matemática**: números e operações. 2. ed. São Paulo: Scipione, 1995.

COLL, César et al. **O construtivismo na sala de aula**. 6. ed. Tradução de Cláudia Schilling. São Paulo: Ática, 1999.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José. **Fundamentos de Matemática elementar**: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FREITAS, Ladir Souza de; GARCIA, Airton Alves. **Matemática passo a passo, com teorias e exercícios de aplicação**. São Paulo: Avercamp, 2011.

GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio**. Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

GUELLI, Oscar. **Jogando com a Matemática**. 8. ed. São Paulo: Ática, 1998. (Contando a História da Matemática).

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 2.

KENNEDY, Edward S. **História da Trigonometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula).

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 1.

______. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 2.

______. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 3.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Alberto P. (Org.). **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2012.

MACHADO, Nílson José. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MORGADO, Augusto et al. **Análise combinatória e probabilidade**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção do Professor de Matemática).

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo Matemática**. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artmed, 2004.

OCHI, Fusako Hori et al. **O uso de quadriculados no ensino da Geometria**. 3. ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 1997.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SCHLIEMANN, Analúcia; NUNES, Terezinha; CARRAMBER, David. **Na vida dez, na escola zero**. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

SMOLE, Kátia; DINIZ, Maria; CÂNDIDO, Patrícia. (Org.). **Resolução de problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2000. (Matemática de 0 a 6).

SOUZA, Eliane; DINIZ, Maria. **Álgebra**: das variáveis às equações e funções. 2. ed. São Paulo: IME-USP, 1996.

STAREPRAVO, Ana Ruth. **Jogando com a Matemática**: números e operações. Curitiba: Aymará, 2009.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 87. ed. Rio de Janeiro: Record, 2001.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Didática de Matemática**: como dois e dois. São Paulo: FTD, 1997.

ISBN 978-854740165-8