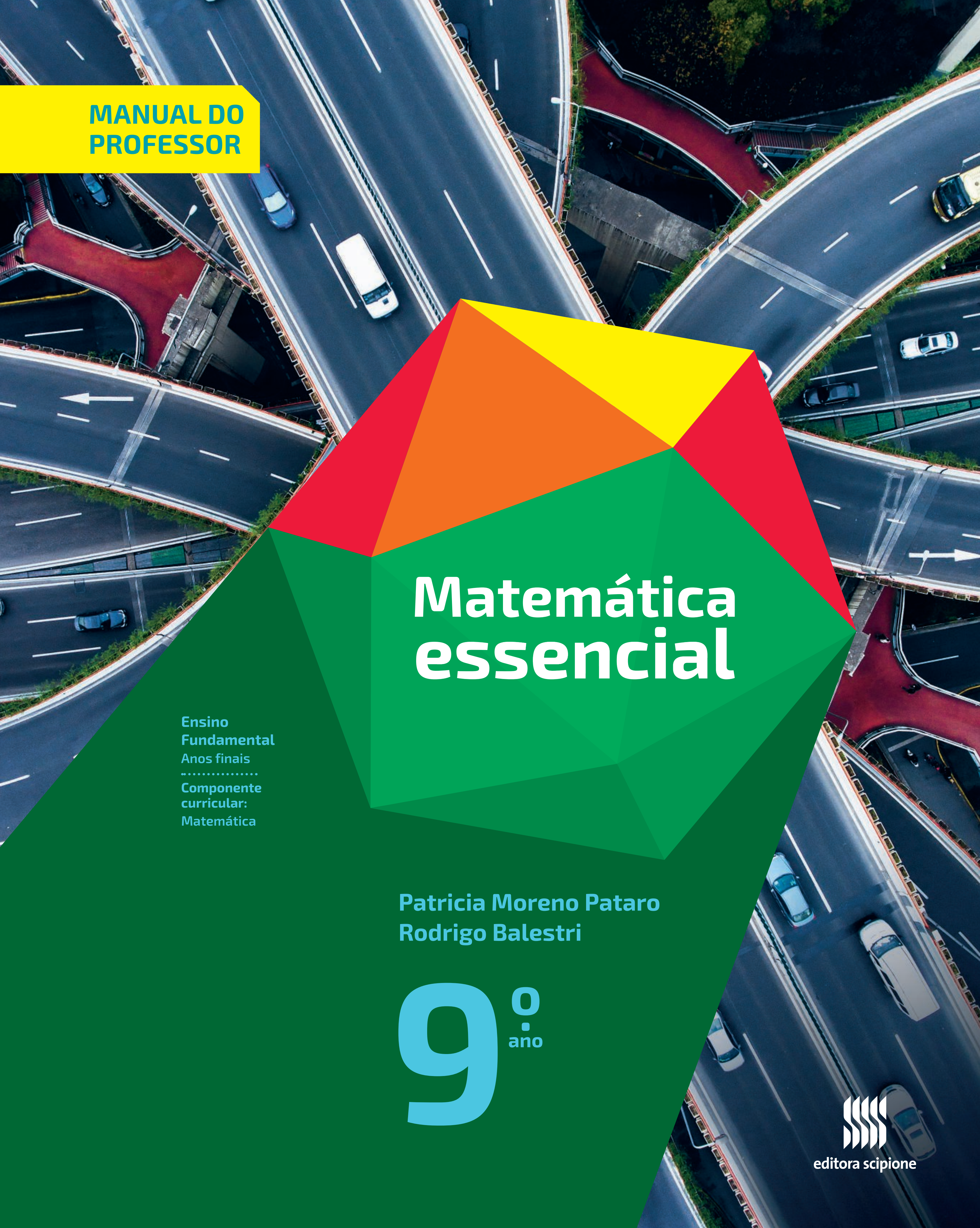


**MANUAL DO PROFESSOR**

# Matemática essencial

Ensino Fundamental
Anos finais

Componente curricular:
Matemática

Patricia Moreno Pataro
Rodrigo Balestri

## 9º ano

editora scipione

# Matemática essencial

**9º ano**

Ensino Fundamental
Anos finais

Componente curricular:
Matemática

## MANUAL DO PROFESSOR

**Patricia Rosana Moreno Pataro**

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Especialista em Estatística pela UEL-PR.

Atuou como professora da rede particular de ensino.

Autora de livros didáticos para o Ensino Fundamental.

**Rodrigo Dias Balestri**

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

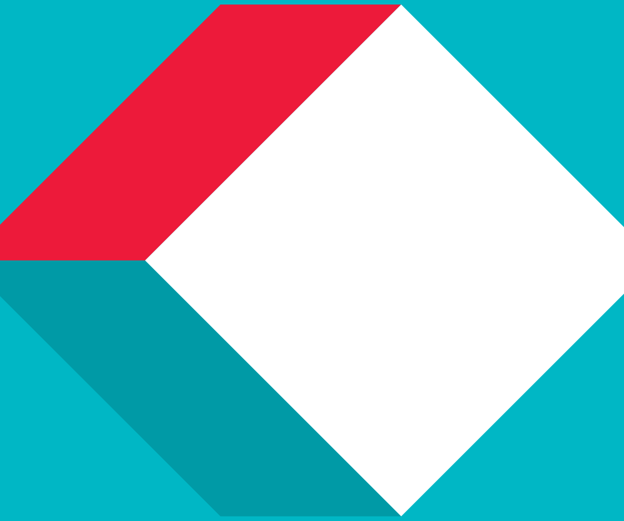
Especialista em Educação Matemática pela UEL-PR.

Especialista em Física para o Novo Ensino Médio pela UEL-PR.

Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.

Professor da rede pública de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Autor de livros didáticos para o Ensino Fundamental e Ensino Médio.



1ª edição • São Paulo • 2018

editora scipione

editora scipione

**Direção geral:** Guilherme Luz
**Direção editorial:** Renata Mascarenhas e Luiz Tonolli
**Gestão de projeto editorial:** Mirian Senra
**Projeto e produção editorial:** Scriba Soluções Editoriais
**Edição:** André Luiz Steigenberger, Denise Maria Capozzi, Fátima Gomes Machado Vizacaro, Janaina Soler Caldeira, Sheila Caroline Molina
**Assistência editorial:** Leandro Figueira Ferreira, Paulo Ricardo Mercadante Krzyzanowski
**Leitura técnica:** Eduardo Henrique Gomes Tavares
**Colaboração técnico-pedagógica:** Eduardo Wagner
**Supervisão de produção:** Lucília Franco Lemos dos Santos
**Revisão:** Amanda S. Santos
**Projeto gráfico:** Marcela Pialarissi
**Capa:** Marcela Pialarissi
**Imagem de capa:** Dkart/Getty Images
**Designer:** Janaina Oliveira
**Iconografia:** Alaíde Alves de França e Stein
**Tratamento de imagens:** José Vitor Elorza Costa
**Licenciamento de conteúdos de terceiros:** Erick Lopes de Almeida, Marissol Martins Maia
**Editoração eletrônica:** Luiz Roberto Lúcio Correa (superv.)

---

Avenida das Nações Unidas, 7221, 1º andar, Setor D
Pinheiros – São Paulo – SP – CEP 05425-902
Tel.: 4003-3061
www.scipione.com.br / atendimento@scipione.com.br

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

Pataro, Patricia Moreno
Matemática essencial 9º ano : ensino fundamental, anos finais / Patricia Moreno Pataro, Rodrigo Balestri. -- 1. ed. -- São Paulo : Scipione, 2018.

Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia.
ISBN: 978-85-474-0166-5 (aluno)
ISBN: 978-85-474-0167-2 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental). I. Balestri, Rodrigo. II. Título.

2018-0052 CDD: 372.7

Julia do Nascimento – Bibliotecária – CRB-8/010142

---

**2018**

Código da obra CL 713558

CAE 631771 (AL) / 631772 (PR)

1ª edição

1ª impressão

---

Impressão e acabamento

# Apresentação

O mundo sempre esteve em constantes transformações. No cenário atual, em que os avanços científicos e tecnológicos ocorrem a uma velocidade acelerada, essas transformações exigem e acarretam frequentes mudanças na educação. As informações são transmitidas e acessadas por diferentes meios, portanto, faz-se necessário formar cidadãos capazes de analisar e interpretar essas informações de maneira crítica e eficaz.

Nesse contexto, a Matemática destaca-se como fundamental, tendo em vista que oferece condições e ferramentas para que os alunos possam tomar decisões e desenvolver estratégias com base em princípios lógicos e criativos, além do estímulo a tantas outras competências.

Diante disso, esta coleção foi elaborada sob a luz de uma abordagem abrangente e integrada dos conteúdos, que foram desenvolvidos buscando relacionar, por meio de uma linguagem clara e acessível, os assuntos específicos a situações cotidianas. Aproximar o conteúdo matemático das circunstâncias do dia a dia é uma maneira de aguçar a criatividade e promover o interesse pela natureza prática de seus saberes.

O manual do professor foi pensado com o objetivo de auxiliar os docentes em seu trabalho em sala de aula, de modo a valorizar o papel ativo do professor na construção do conhecimento e estimular a participação dos alunos enquanto agentes do processo de aprendizagem. Nele, explicitamos pressupostos teóricos, tecemos comentários e sugestões e propomos atividades complementares que visam auxiliar o desenvolvimento dos conteúdos e das atividades presentes em cada volume desta coleção.

> “Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais...”

ALVES, Rubem. **A alegria de ensinar**. Campinas: Papirus, 2000.

# Sumário

## Estrutura da coleção

Esta coleção está organizada em quatro volumes destinados aos anos finais do Ensino Fundamental (6º, 7º, 8º e 9º anos). Os conteúdos de cada volume estão apresentados em capítulos organizados em tópicos e subtópicos, obedecendo às habilidades, aos objetos de conhecimento e às competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

## Livro do aluno

**Capítulo 1**

**Potências e raízes**

Em 1974, o professor húngaro Ernő Rubik (1944-) apresentou um protótipo de cubo, feito em madeira e com as faces de diferentes cores, para ilustrar o conceito de terceira dimensão aos seus alunos de arquitetura. Ao girar cada uma das 6 faces coloridas do cubo, o aluno podia visualizar o movimento realizado.

Nomeado de cubo mágico pelo seu inventor e depois popularizado como cubo de Rubik, na década de 1980, esse quebra-cabeça tridimensional, que exige raciocínio lógico e agilidade, continua desafiando as mentes mais criativas e agitando campeonatos. Após misturadas as peças das linhas e colunas, o objetivo do jogo é deixar novamente cada face com apenas uma cor. A versão mais conhecida tem cada face composta por 9 quadradinhos, dispostos em 3 linhas e 3 colunas.

**Pensando nisso...**

Ⓐ Em sua opinião, por que Ernő Rubik nomeou sua invenção de cubo mágico?

Ⓑ Na versão mais conhecida do cubo mágico, em quantas peças de sua superfície é possível observar 3 cores diferentes? Por que tais peças possuem essa característica?

Ⓒ Qual a medida do comprimento da aresta de um cubo mágico cuja medida do volume é 512 $cm^3$?

12

Cubo de Rubik sendo manipulado.

l0vE l0vE/Shutterstock.com

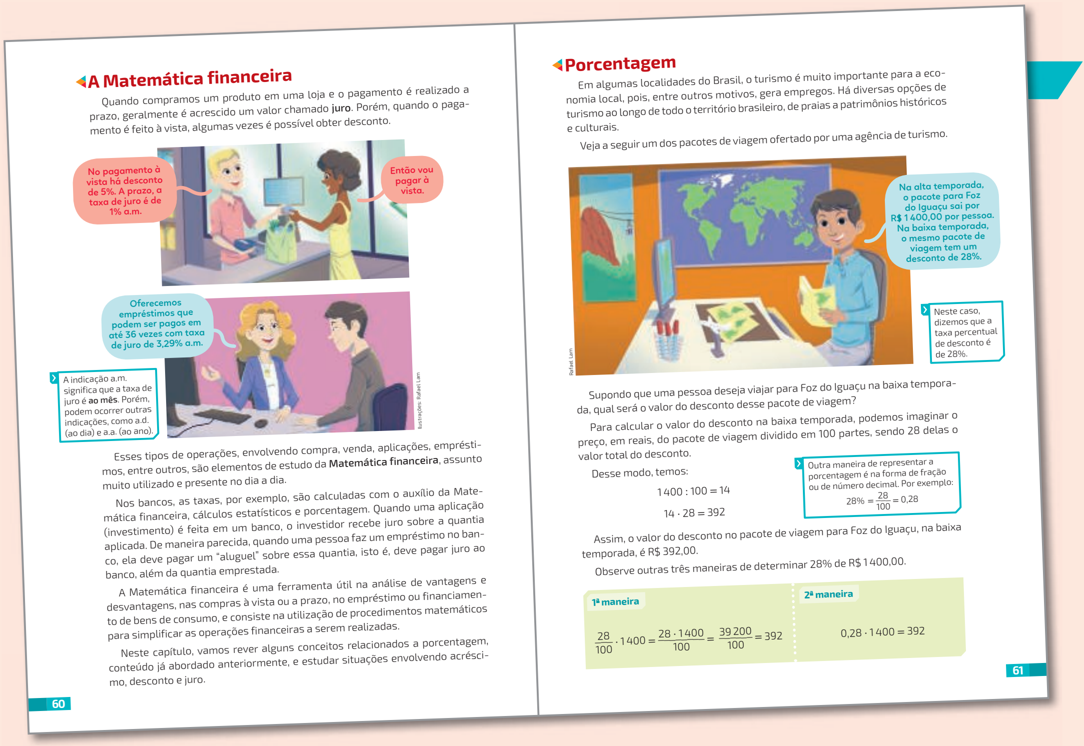
13

### Abertura do capítulo

No início de cada capítulo, duas páginas apresentam um assunto relacionado ao conteúdo que será estudado. Nelas, há informações que se referem a outras áreas do conhecimento, expostas por meio de textos, fotografias, gráficos, infográficos, esquemas, entre outros.

### Pensando nisso...

Nas páginas de abertura, são sugeridos questionamentos que objetivam resgatar o conhecimento prévio do aluno, assim como estabelecer intuitivamente relações entre o assunto abordado e alguns conteúdos matemáticos. Além disso, configuram-se como um importante momento de interação e troca de ideias, propiciando um ambiente em que os alunos desenvolvam a habilidade de argumentação e aprendam a ouvir e a respeitar a opinião dos colegas.



## A Matemática financeira

Quando compramos um produto em uma loja e o pagamento é realizado a prazo, geralmente é acrescido um valor chamado **juro**. Porém, quando o pagamento é feito à vista, algumas vezes é possível obter desconto.

Ilustrações: Rafael Lam

A indicação a.m. significa que a taxa de juro é **ao mês**. Porém, podem ocorrer outras indicações, como a.d. (ao dia) e a.a. (ao ano).

Esses tipos de operações, envolvendo compra, venda, aplicações, empréstimos, entre outros, são elementos de estudo da **Matemática financeira**, assunto muito utilizado e presente no dia a dia.

Nos bancos, as taxas, por exemplo, são calculadas com o auxílio da Matemática financeira, cálculos estatísticos e porcentagem. Quando uma aplicação (investimento) é feita em um banco, o investidor recebe juro sobre a quantia aplicada. De maneira parecida, quando uma pessoa faz um empréstimo no banco, ela deve pagar um "aluguel" sobre essa quantia, isto é, deve pagar juro ao banco, além da quantia emprestada.

A Matemática financeira é uma ferramenta útil na análise de vantagens e desvantagens, nas compras à vista ou a prazo, no empréstimo ou financiamento de bens de consumo, e consiste na utilização de procedimentos matemáticos para simplificar as operações financeiras a serem realizadas.

Neste capítulo, vamos rever alguns conceitos relacionados a porcentagem, conteúdo já abordado anteriormente, e estudar situações envolvendo acréscimo, desconto e juro.

60

## Porcentagem

Em algumas localidades do Brasil, o turismo é muito importante para a economia local, pois, entre outros motivos, gera empregos. Há diversas opções de turismo ao longo de todo o território brasileiro, de praias a patrimônios históricos e culturais.

Veja a seguir um dos pacotes de viagem ofertado por uma agência de turismo.

Rafael Lam

Neste caso, dizemos que a taxa percentual de desconto é de 28%.

Supondo que uma pessoa deseja viajar para Foz do Iguaçu na baixa temporada, qual será o valor do desconto desse pacote de viagem?

Para calcular o valor do desconto na baixa temporada, podemos imaginar o preço, em reais, do pacote de viagem dividido em 100 partes, sendo 28 delas o valor total do desconto.

Desse modo, temos:

$$1\,400 : 100 = 14$$

$$14 \cdot 28 = 392$$

Outra maneira de representar a porcentagem é na forma de fração ou de número decimal. Por exemplo:

$$28\% = \frac{28}{100} = 0{,}28$$

Assim, o valor do desconto no pacote de viagem para Foz do Iguaçu, na baixa temporada, é R$ 392,00.

Observe outras três maneiras de determinar 28% de R$ 1 400,00.

**1ª maneira**

$$\frac{28}{100} \cdot 1\,400 = \frac{28 \cdot 1\,400}{100} = \frac{39\,200}{100} = 392$$

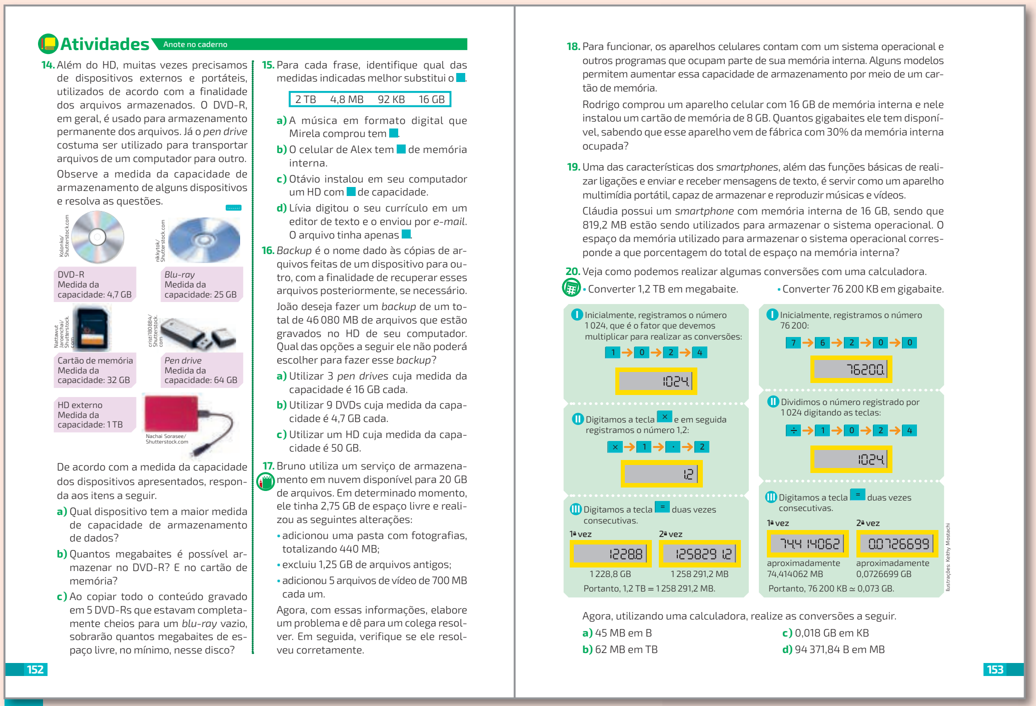
**2ª maneira**

$$0{,}28 \cdot 1\,400 = 392$$

61

## Conteúdos

Sempre que possível, abordamos uma situação contextualizada para iniciar o trabalho com um novo conteúdo. Também são propostas questões que encorajam os alunos a refletirem sobre a ideia, o conceito ou o procedimento que foi apresentado, e os incentivam a participar de forma mais dinâmica das aulas. Utilizamos ainda outros recursos, como ilustrações, fotografias e esquemas para tornar o estudo mais atrativo.



## Atividades

Anote no caderno

**14.** Além do HD, muitas vezes precisamos de dispositivos externos e portáteis, utilizados de acordo com a finalidade dos arquivos armazenados. O DVD-R, em geral, é usado para armazenamento permanente dos arquivos. Já o *pen drive* costuma ser utilizado para transportar arquivos de um computador para outro.

Observe a medida da capacidade de armazenamento de alguns dispositivos e resolva as questões.

Kolonko/Shutterstock.com
DVD-R
Medida da capacidade: 4,7 GB

nikkytok/Shutterstock.com
*Blu-ray*
Medida da capacidade: 25 GB

Nattawut Jaroenchai/Shutterstock.com
Cartão de memória
Medida da capacidade: 32 GB

cristi180884/Shutterstock.com
*Pen drive*
Medida da capacidade: 64 GB

HD externo
Medida da capacidade: 1 TB
Nachai Sorasee/Shutterstock.com

De acordo com a medida da capacidade dos dispositivos apresentados, responda aos itens a seguir.

**a)** Qual dispositivo tem a maior medida de capacidade de armazenamento de dados?

**b)** Quantos megabaites é possível armazenar no DVD-R? E no cartão de memória?

**c)** Ao copiar todo o conteúdo gravado em 5 DVD-Rs que estavam completamente cheios para um *blu-ray* vazio, sobrarão quantos megabaites de espaço livre, no mínimo, nesse disco?

**15.** Para cada frase, identifique qual das medidas indicadas melhor substitui o ■.

2 TB    4,8 MB    92 KB    16 GB

**a)** A música em formato digital que Mirela comprou tem ■.

**b)** O celular de Alex tem ■ de memória interna.

**c)** Otávio instalou em seu computador um HD com ■ de capacidade.

**d)** Lívia digitou o seu currículo em um editor de texto e o enviou por *e-mail*. O arquivo tinha apenas ■.

**16.** *Backup* é o nome dado às cópias de arquivos feitas de um dispositivo para outro, com a finalidade de recuperar esses arquivos posteriormente, se necessário.

João deseja fazer um *backup* de um total de 46 080 MB de arquivos que estão gravados no HD de seu computador. Qual das opções a seguir ele não poderá escolher para fazer esse *backup*?

**a)** Utilizar 3 *pen drives* cuja medida da capacidade é 16 GB cada.

**b)** Utilizar 9 DVDs cuja medida da capacidade é 4,7 GB cada.

**c)** Utilizar um HD cuja medida da capacidade é 50 GB.

**17.** Bruno utiliza um serviço de armazenamento em nuvem disponível para 20 GB de arquivos. Em determinado momento, ele tinha 2,75 GB de espaço livre e realizou as seguintes alterações:

- adicionou uma pasta com fotografias, totalizando 440 MB;
- excluiu 1,25 GB de arquivos antigos;
- adicionou 5 arquivos de vídeo de 700 MB cada um.

Agora, com essas informações, elabore um problema e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se ele resolveu corretamente.

152

**18.** Para funcionar, os aparelhos celulares contam com um sistema operacional e outros programas que ocupam parte de sua memória interna. Alguns modelos permitem aumentar essa capacidade de armazenamento por meio de um cartão de memória.

Rodrigo comprou um aparelho celular com 16 GB de memória interna e nele instalou um cartão de memória de 8 GB. Quantos gigabaites ele tem disponível, sabendo que esse aparelho vem de fábrica com 30% da memória interna ocupada?

**19.** Uma das características dos *smartphones*, além das funções básicas de realizar ligações e enviar e receber mensagens de texto, é servir como um aparelho multimídia portátil, capaz de armazenar e reproduzir músicas e vídeos.

Cláudia possui um *smartphone* com memória interna de 16 GB, sendo que 819,2 MB estão sendo utilizados para armazenar o sistema operacional. O espaço da memória utilizado para armazenar o sistema operacional corresponde a que porcentagem do total de espaço na memória interna?

**20.** Veja como podemos realizar algumas conversões com uma calculadora.

- Converter 1,2 TB em megabaite.

I Inicialmente, registramos o número 1 024, que é o fator que devemos multiplicar para realizar as conversões:

1 → 0 → 2 → 4

1024.

II Digitamos a tecla × e em seguida registramos o número 1,2:

× → 1 → . → 2

1.2

III Digitamos a tecla = duas vezes consecutivas.

1ª vez: 1228.8 — 1 228,8 GB

2ª vez: 1258291.2 — 1 258 291,2 MB

Portanto, 1,2 TB = 1 258 291,2 MB.

- Converter 76 200 KB em gigabaite.

I Inicialmente, registramos o número 76 200:

7 → 6 → 2 → 0 → 0

76200.

II Dividimos o número registrado por 1 024 digitando as teclas:

÷ → 1 → 0 → 2 → 4

1024.

III Digitamos a tecla = duas vezes consecutivas.

1ª vez: 74.414062 — aproximadamente 74,414062 MB

2ª vez: 0.0726699 — aproximadamente 0,0726699 GB

Portanto, 76 200 KB ≃ 0,073 GB.

Ilustrações: Keithy Mostachi

Agora, utilizando uma calculadora, realize as conversões a seguir.

**a)** 45 MB em B

**b)** 62 MB em TB

**c)** 0,018 GB em KB

**d)** 94 371,84 B em MB

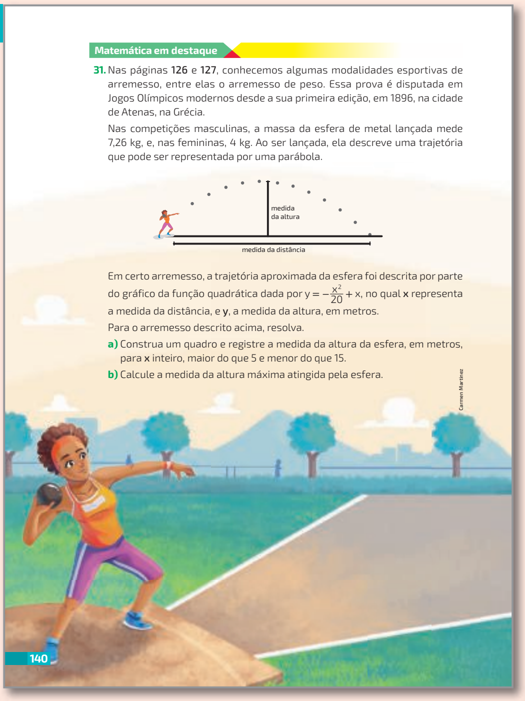
153

## Atividades

Nessa seção, são propostas atividades referentes aos conteúdos abordados no capítulo, dispostas de maneira organizada e em nível crescente de dificuldade. As atividades atendem às exigências da BNCC ao trabalharem com estimativa e aproximação, investigação e conjectura, elaboração de problemas, textos e relatórios, representação de fluxogramas etc. Sugerimos que sejam resolvidas, em sua maioria, na sala de aula, e aquelas que forem selecionadas para casa podem ser corrigidas na aula posterior, a fim de promover explanações e discussões sobre as diferentes estratégias de resolução.

## Matemática em destaque

Essas atividades trazem um texto e, por vezes, recursos gráficos que envolvem algum tema curioso relacionado à realidade do aluno e a outras áreas do conhecimento. A contextualização abordada nessas atividades privilegia tanto o desenvolvimento da competência leitora quanto a percepção de que a Matemática está presente em diversas situações fora da educação formal.



**Matemática em destaque**

**31.** Nas páginas **126** e **127**, conhecemos algumas modalidades esportivas de arremesso, entre elas o arremesso de peso. Essa prova é disputada em Jogos Olímpicos modernos desde a sua primeira edição, em 1896, na cidade de Atenas, na Grécia.

Nas competições masculinas, a massa da esfera de metal lançada mede 7,26 kg, e, nas femininas, 4 kg. Ao ser lançada, ela descreve uma trajetória que pode ser representada por uma parábola.

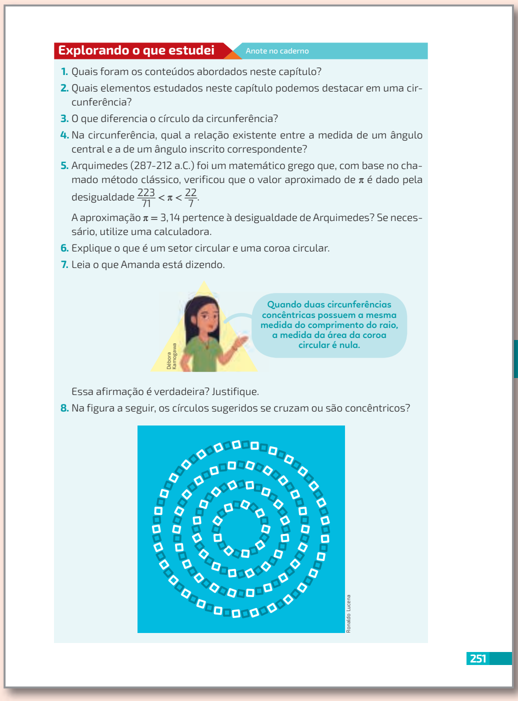
Em certo arremesso, a trajetória aproximada da esfera foi descrita por parte do gráfico da função quadrática dada por $y = -\frac{x^2}{20} + x$, no qual **x** representa a medida da distância, e **y**, a medida da altura, em metros.

Para o arremesso descrito acima, resolva.

**a)** Construa um quadro e registre a medida da altura da esfera, em metros, para **x** inteiro, maior do que 5 e menor do que 15.

**b)** Calcule a medida da altura máxima atingida pela esfera.

Carmen Martinez



**Explorando o que estudei** Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo?
2. Quais elementos estudados neste capítulo podemos destacar em uma circunferência?
3. O que diferencia o círculo da circunferência?
4. Na circunferência, qual a relação existente entre a medida de um ângulo central e a de um ângulo inscrito correspondente?
5. Arquimedes (287-212 a.C.) foi um matemático grego que, com base no chamado método clássico, verificou que o valor aproximado de $\pi$ é dado pela desigualdade $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

   A aproximação $\pi = 3,14$ pertence à desigualdade de Arquimedes? Se necessário, utilize uma calculadora.
6. Explique o que é um setor circular e uma coroa circular.
7. Leia o que Amanda está dizendo.

   Débora Kamogawa

   Essa afirmação é verdadeira? Justifique.
8. Na figura a seguir, os círculos sugeridos se cruzam ou são concêntricos?

Ronaldo Lucena

## Explorando o que estudei

Localizada após a última seção **Atividades** do capítulo, essa seção oferece aos alunos a oportunidade de refletir sobre o que aprendeu durante o trabalho com o conteúdo estudado. Ao responder às questões, eles terão a oportunidade de explicitar as principais ideias abordadas e fazer uma autoavaliação do seu processo de aprendizagem.

## Cidadania: explore essa ideia

Essa seção tem o objetivo de trabalhar os temas contemporâneos elencados na BNCC. As situações abordadas nessa seção são estruturadas por um texto e cenas ilustradas, gráficos e outros elementos que auxiliam e complementam a compreensão do texto. Ao final, são sugeridas questões que despertam no aluno o pensamento crítico sobre o tema e que envolvem conteúdo matemático com base na situação.

**Cidadania: explore essa ideia**

**Política**

Nik Neves

A política consiste em governar, tomar decisões e fixar regras destinadas a todos, sendo um meio eficaz para organizar a vida em sociedade e garantir o respeito e os direitos humanos. No Brasil, o regime político adotado atualmente é o regime democrata, no qual o povo elege seus representantes por meio do voto. Dessa forma, elegem-se prefeitos, governadores e presidente da república, com as funções de governar e administrar os interesses públicos, e vereadores, deputados e senadores, com as funções de elaborar leis e fiscalizar os gastos públicos.

De modo geral, os cargos políticos citados acima são ocupados pelos candidatos que tiverem as maiores quantidades de voto, exceto deputados e vereadores. O esquema a seguir apresenta o sistema de distribuição de vagas para deputados e vereadores.

| Dados da eleição | 1º passo | 2º passo | 3º passo | Resultado |
|---|---|---|---|---|
| Suponha que sejam 9 vagas e 2 700 votos válidos, assim divididos entre os partidos:<br>A: 400 votos<br>B: 1 100 votos<br>C: 1 200 votos | Calcular o **quociente eleitoral** (QE): divide-se a quantidade de votos válidos pela quantidade de vagas.<br>2 700 : 9 = 300<br>Para obter ao menos 1 vaga, o partido precisa alcançar o QE. | Vagas por partido*: divide-se a quantidade total de votos de cada partido pelo QE, e arredonda-se o resultado ao menor valor inteiro.<br>A: 400 : 300 ≈ 1<br>B: 1 100 : 300 ≈ 3<br>C: 1 200 : 300 = 4 | Vaga que sobrou: divide-se a quantidade de votos de cada partido pela quantidade de vagas já obtidas mais 1. Ganha a vaga quem tiver o maior resultado, nesse caso, o partido B.<br>A: 400 : (1+1) = 200<br>B: 1 100 : (3+1) = 275<br>C: 1 200 : (4+1) = 240 | As vagas são atribuídas aos candidatos de cada partido por ordem de votos.<br>A: 1 vaga<br>B: 4 vagas<br>C: 4 vagas |

*O candidato é eleito se tiver pelo menos 10% da quantidade de votos do QE.

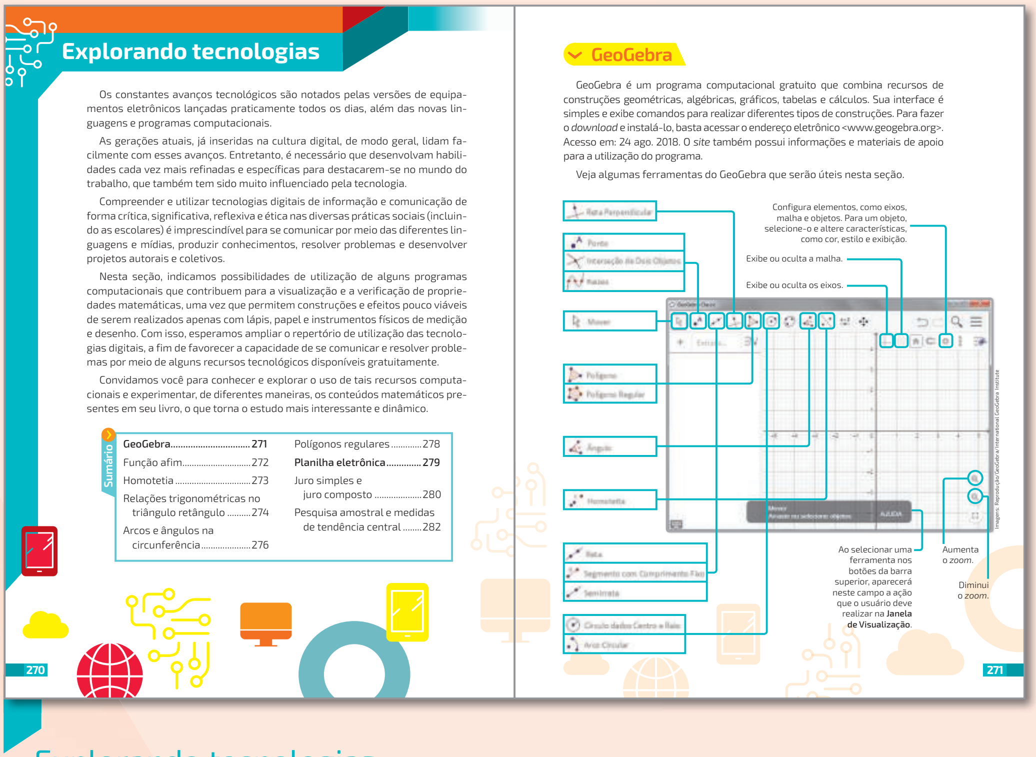
Nik Neves

**Analisando com cidadania** Anote no caderno

1. Quais são as principais características que devemos analisar antes de votar em um candidato?
2. Segundo as informações do texto, quais são os políticos eleitos para representar o povo? E quais são suas principais funções?
3. Você já participou de alguma eleição para representante de turma? Quais critérios você utilizou para escolher o candidato?

**Analisando com a Matemática** Anote no caderno

4. Suponha que em uma eleição para vereadores de certa cidade tenham sido validados 4 500 votos. Considerando que foram disponibilizadas 10 vagas e que o Partido **A** obteve 1 000 votos; o Partido **B**, 1 200 votos; e o Partido **C**, 2 300 votos, calcule quantas vagas cada partido obteve.
5. Se nessa eleição um partido obtiver 400 votos, ele consegue eleger algum candidato? Justifique.



Explorando tecnologias

Os constantes avanços tecnológicos são notados pelas versões de equipamentos eletrônicos lançadas praticamente todos os dias, além das novas linguagens e programas computacionais.

As gerações atuais, já inseridas na cultura digital, de modo geral, lidam facilmente com esses avanços. Entretanto, é necessário que desenvolvam habilidades cada vez mais refinadas e específicas para destacarem-se no mundo do trabalho, que também tem sido muito influenciado pela tecnologia.

Compreender e utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) é imprescindível para se comunicar por meio das diferentes linguagens e mídias, produzir conhecimentos, resolver problemas e desenvolver projetos autorais e coletivos.

Nesta seção, indicamos possibilidades de utilização de alguns programas computacionais que contribuem para a visualização e a verificação de propriedades matemáticas, uma vez que permitem construções e efeitos pouco viáveis de serem realizados apenas com lápis, papel e instrumentos físicos de medição e desenho. Com isso, esperamos ampliar o repertório de utilização das tecnologias digitais, a fim de favorecer a capacidade de se comunicar e resolver problemas por meio de alguns recursos tecnológicos disponíveis gratuitamente.

Convidamos você para conhecer e explorar o uso de tais recursos computacionais e experimentar, de diferentes maneiras, os conteúdos matemáticos presentes em seu livro, o que torna o estudo mais interessante e dinâmico.

Sumário

270

GeoGebra

GeoGebra é um programa computacional gratuito que combina recursos de construções geométricas, algébricas, gráficos, tabelas e cálculos. Sua interface é simples e exibe comandos para realizar diferentes tipos de construções. Para fazer o *download* e instalá-lo, basta acessar o endereço eletrônico <www.geogebra.org>. Acesso em: 24 ago. 2018. O *site* também possui informações e materiais de apoio para a utilização do programa.

Veja algumas ferramentas do GeoGebra que serão úteis nesta seção.

Configura elementos, como eixos, malha e objetos. Para um objeto, selecione-o e altere características, como cor, estilo e exibição.

Exibe ou oculta a malha.

Exibe ou oculta os eixos.

Ao selecionar uma ferramenta nos botões da barra superior, aparecerá neste campo a ação que o usuário deve realizar na **Janela de Visualização**.

Aumenta o zoom.

Diminui o zoom.

271

## Explorando tecnologias

Organizada ao final do volume, a seção **Explorando tecnologias** apresenta exemplos e propostas de atividades que desenvolvem conceitos estudados nos capítulos por meio do uso dos programas de computador GeoGebra e Calc. Essa seção busca estabelecer uma estratégia de ensino complementar fazendo o aluno se sentir estimulado a utilizar ferramentas tecnológicas computacionais para solucionar problemas, realizar construções geométricas, representar dados, entre outros. É importante destacar que os recursos computacionais apresentados nessa seção podem ser acessados e baixados gratuitamente.

## Sugestões de livros e *sites*

Encontrada ao fim de cada volume, essa seção traz sugestões de livros e *sites* que permitem aos alunos enriquecer e complementar o trabalho realizado com os conteúdos em sala de aula. É essencial que eles sejam estimulados a consultar essas fontes de informação que vão além do livro didático, incentivando-os, assim, a desenvolver o gosto pela leitura.

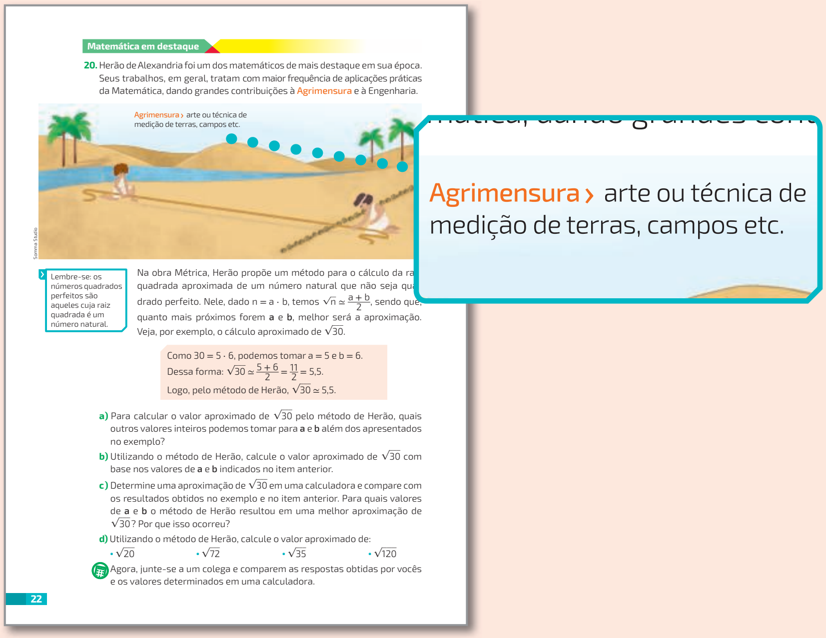
Sugestões de livros e *sites*

Livros

- **Atlas da situação mundial**, de Dan Smith. Tradução de Mário Vilela. São Paulo: Companhia Editoria Nacional.
- **Semelhança não é mera coincidência**, de Nílson José Machado. São Paulo: Scipione. (Vivendo a Matemática).
- **Como encontrar a medida certa**, de Carlos Alberto Marcondes dos Santos e Nelson Gentil. São Paulo: Ática. (A descoberta da Matemática).
- **A Matemática das coisas**: do papel A4 aos cordões de sapatos, do GPS às rodas dentadas, de Nuno Crato. São Paulo: Livraria da Física.
- **101 Ilusões de óptica**, de Sam Taplin. São Paulo: Edições Usborne.
- **Os peregrinos**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **Origami**: a divertida arte das dobraduras, de William Gilbert. São Paulo: Nobel.
- **Esporte, caminho de superação**, de Denise Pellegrini. São Paulo: Moderna.
- **O homem que calculava**, de Malba Tahan. Rio de Janeiro: Record.
- **Os olímpicos**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD.(O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **História da equação do 2º grau**, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática. (Contando a história da Matemática).
- **Você precisa de quê?**: A diferença entre consumo e consumismo, de Silmara Franco. São Paulo: Moderna.
- **As mil e uma equações**, de Ernesto Rosa. São Paulo: Ática. (A descoberta da Matemática).

283

Em toda a coleção, há diferentes tipos de quadros. Observe as informações sobre cada um deles.



**Matemática em destaque**

**20.** Herão de Alexandria foi um dos matemáticos de mais destaque em sua época. Seus trabalhos, em geral, tratam com maior frequência de aplicações práticas da Matemática, dando grandes contribuições à Agrimensura e à Engenharia.

Agrimensura › arte ou técnica de medição de terras, campos etc.

Somma Studio

Lembre-se: os números quadrados perfeitos são aqueles cuja raiz quadrada é um número natural.

Na obra Métrica, Herão propõe um método para o cálculo da raiz quadrada aproximada de um número natural que não seja quadrado perfeito. Nele, dado $n = a \cdot b$, temos $\sqrt{n} \simeq \frac{a+b}{2}$, sendo que, quanto mais próximos forem **a** e **b**, melhor será a aproximação. Veja, por exemplo, o cálculo aproximado de $\sqrt{30}$.

Como $30 = 5 \cdot 6$, podemos tomar $a = 5$ e $b = 6$.
Dessa forma: $\sqrt{30} \simeq \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$.
Logo, pelo método de Herão, $\sqrt{30} \simeq 5{,}5$.

a) Para calcular o valor aproximado de $\sqrt{30}$ pelo método de Herão, quais outros valores inteiros podemos tomar para **a** e **b** além dos apresentados no exemplo?

b) Utilizando o método de Herão, calcule o valor aproximado de $\sqrt{30}$ com base nos valores de **a** e **b** indicados no item anterior.

c) Determine uma aproximação de $\sqrt{30}$ em uma calculadora e compare com os resultados obtidos no exemplo e no item anterior. Para quais valores de **a** e **b** o método de Herão resultou em uma melhor aproximação de $\sqrt{30}$? Por que isso ocorreu?

d) Utilizando o método de Herão, calcule o valor aproximado de:

- $\sqrt{20}$
- $\sqrt{72}$
- $\sqrt{35}$
- $\sqrt{120}$

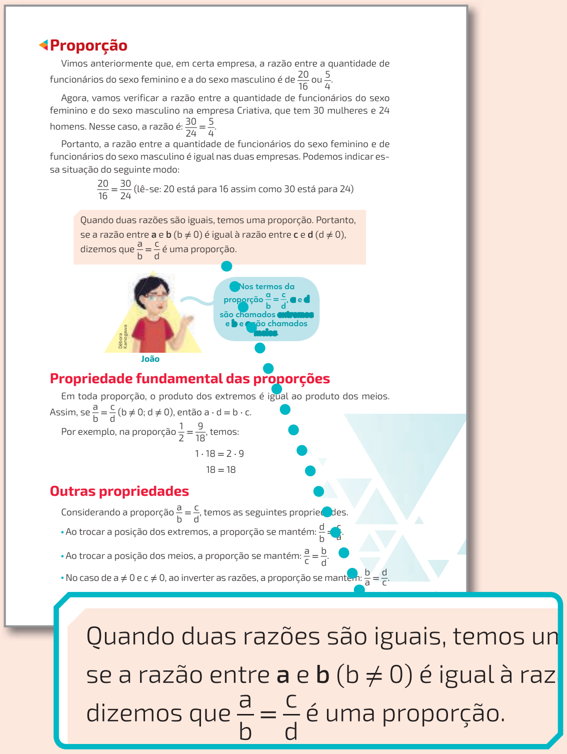
Agora, junte-se a um colega e comparem as respostas obtidas por vocês e os valores determinados em uma calculadora.

22

Agrimensura › arte ou técnica de medição de terras, campos etc.

## Vocabulário

O **Vocabulário** traz o significado de algumas palavras em destaque, geralmente pouco utilizadas ou desconhecidas por parte dos alunos. Em geral, aparece próximo ao texto no qual foi destacada.



**Proporção**

Vimos anteriormente que, em certa empresa, a razão entre a quantidade de funcionários do sexo feminino e a do sexo masculino é de $\frac{20}{16}$ ou $\frac{5}{4}$.

Agora, vamos verificar a razão entre a quantidade de funcionários do sexo feminino e do sexo masculino na empresa Criativa, que tem 30 mulheres e 24 homens. Nesse caso, a razão é: $\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$.

Portanto, a razão entre a quantidade de funcionários do sexo feminino e de funcionários do sexo masculino é igual nas duas empresas. Podemos indicar essa situação do seguinte modo:

$$\frac{20}{16} = \frac{30}{24} \text{ (lê-se: 20 está para 16 assim como 30 está para 24)}$$

Quando duas razões são iguais, temos uma proporção. Portanto, se a razão entre **a** e **b** ($b \neq 0$) é igual à razão entre **c** e **d** ($d \neq 0$), dizemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção.

**Propriedade fundamental das proporções**

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Assim, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0$; $d \neq 0$), então $a \cdot d = b \cdot c$.

Por exemplo, na proporção $\frac{1}{2} = \frac{9}{18}$, temos:

$$1 \cdot 18 = 2 \cdot 9$$
$$18 = 18$$

**Outras propriedades**

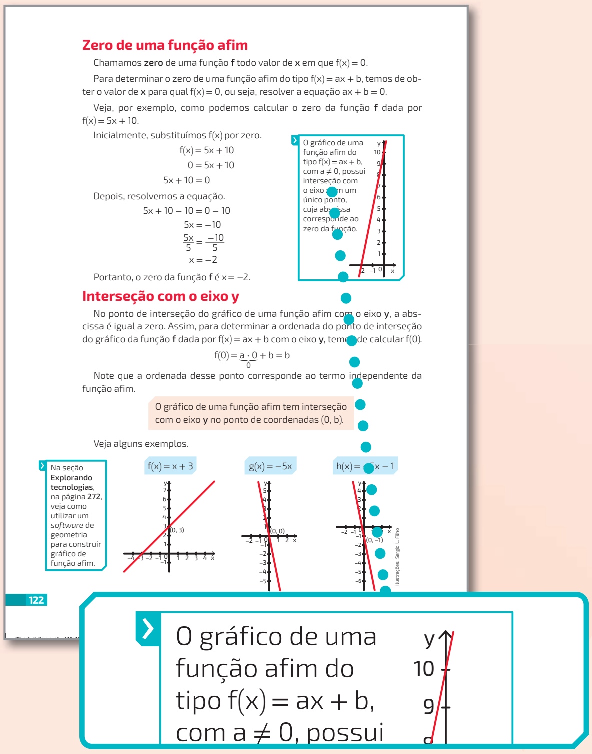
Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos as seguintes propriedades.

- Ao trocar a posição dos extremos, a proporção se mantém: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.
- Ao trocar a posição dos meios, a proporção se mantém: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
- No caso de $a \neq 0$ e $c \neq 0$, ao inverter as razões, a proporção se mantém: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Quando duas razões são iguais, temos un
se a razão entre **a** e **b** ($b \neq 0$) é igual à raz
dizemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção.

## Teoria

Na formalização de alguns conteúdos, encontra-se um quadro em destaque que apresenta definições, propriedades, conceitos e relações importantes sobre o conteúdo em estudo.



**Zero de uma função afim**

Chamamos **zero** de uma função **f** todo valor de **x** em que $f(x) = 0$.

Para determinar o zero de uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$, temos de obter o valor de **x** para qual $f(x) = 0$, ou seja, resolver a equação $ax + b = 0$.

Veja, por exemplo, como podemos calcular o zero da função **f** dada por $f(x) = 5x + 10$.

Inicialmente, substituímos f(x) por zero.

$$f(x) = 5x + 10$$
$$0 = 5x + 10$$
$$5x + 10 = 0$$

Depois, resolvemos a equação.

$$5x + 10 - 10 = 0 - 10$$
$$5x = -10$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{-10}{5}$$
$$x = -2$$

Portanto, o zero da função **f** é $x = -2$.

O gráfico de uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, possui interseção com o eixo x em um único ponto, cuja abscissa corresponde ao zero da função.

**Interseção com o eixo y**

No ponto de interseção do gráfico de uma função afim com o eixo **y**, a abscissa é igual a zero. Assim, para determinar a ordenada do ponto de interseção do gráfico da função **f** dada por $f(x) = ax + b$ com o eixo **y**, temos de calcular f(0).

$$f(0) = \underbrace{a \cdot 0}_{0} + b = b$$

Note que a ordenada desse ponto corresponde ao termo independente da função afim.

O gráfico de uma função afim tem interseção com o eixo **y** no ponto de coordenadas (0, b).

Veja alguns exemplos.

Na seção **Explorando tecnologias**, na página **272**, veja como utilizar um *software* de geometria para construir gráfico de função afim.

122

O gráfico de uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, possui

## Dica

Esse quadro contém informações complementares, lembretes ou dicas com o objetivo de auxiliar o aluno na resolução de atividades ou na compreensão da teoria.

A coleção também apresenta ícones que indicam informações importantes em diversos momentos do livro. A seguir, detalhamos o que cada um deles representa.

### Cálculo mental

Atividades que apresentam técnicas e procedimentos de cálculo mental. Muitas delas incentivam o aluno a perceber propriedades operatórias que facilitam o processo de cálculo.

### Construção geométrica

Atividades que propõem construções geométricas utilizando instrumentos como régua, compasso, esquadros, entre outros.

### Estimativa

Atividades que sugerem a realização de estimativas, arredondamentos e aproximações como estratégia de cálculo e verificação de sua razoabilidade.

### Desafio

Atividades que exigem a busca de estratégias próprias e variadas, que vão além do conteúdo estudado, estimulando os alunos a desenvolverem o raciocínio lógico.

### Calculadora

Atividades que buscam explorar técnicas e procedimentos para o uso da calculadora na execução de cálculos, bem como instruir o aluno em seu manuseio.

### Elaboração de textos

Atividades que exploram o desenvolvimento da escrita por meio da elaboração de problemas, relatórios, instruções, procedimentos, fluxogramas e outros tipos de textos.

### Proporção

Indica que as imagens não estão proporcionais entre si.

### Cor

Indica que as cores utilizadas não correspondem às reais.

### Internet

Apresenta endereços eletrônicos de *sites* com informações complementares que auxiliam na compreensão e ampliação dos assuntos tratados na página.

# Manual do professor

O manual do professor foi estruturado em duas partes principais. A primeira é composta pelas orientações didáticas e metodológicas da coleção e pelas contribuições da BNCC, com os conteúdos dos capítulos distribuídos em concordância com os objetos de conhecimento e as habilidades específicas de Matemática previstos para este ano na BNCC. Essa parte ainda conta com sugestões de livros e *sites*, páginas para reprodução e bibliografia.

A segunda parte é composta pela reprodução das páginas do livro do aluno de maneira espelhada e reduzida, com as orientações específicas de condução do trabalho ao professor indicadas nas partes lateral e inferior. Todas as respostas das atividades e seções são apresentadas nessa parte do manual, seja no livro do aluno ou nas orientações ao professor.

Veja, a seguir, como configuramos a segunda parte do manual, que corresponde às orientações ao professor página a página.

No início de cada capítulo é apresentado um texto inicial que explicita os principais conteúdos que serão abordados. Também são expostas informações complementares sobre as páginas de abertura e sugestões para trabalhá-las em sala de aula, como a realização de pesquisas adicionais e questionamentos dirigidos aos alunos.

Esse capítulo trabalhará com os alunos a compreensão do conceito de funções quadráticas e a identificação dos termos associados a elas, além de capacitá-los a escrever leis de formação.

Os estudos prosseguirão de modo a habilitar os alunos a construir gráficos, determinar os zeros de função quadrática e as coordenadas do vértice da parábola.

- Essas páginas de abertura buscam apresentar algumas informações sobre as modalidades olímpicas de lançamento e arremesso. O objetivo é discutir a trajetória descrita pelos objetos (dardo, peso, disco, martelo), que posteriormente será associada ao gráfico de uma função quadrática com a concavidade voltada para baixo. Com isso, os alunos poderão perceber relações entre o estudo da Matemática e de outras áreas, como o esporte. Uma sugestão de condução do trabalho é propor uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. Essas questões podem ser respondidas individualmente ou em grupos de dois ou três alunos. O tema tratado nessas páginas de abertura será retomado na atividade **31** da página **140**.

Capítulo 6

Função quadrática

Patrick Smith/Getty Images

Atleta alemão Thomas Rohler, no lançamento de dardo no Campeonato Mundial da Associação Internacional de Federações de Atletismo, em Londres, no Reino Unido, em 2017.

126

A prática do atletismo envolve de forma aprimorada as ações de correr, saltar e lançar, habilidades naturais do ser humano, sendo por esse motivo chamado de esporte-base. Presente desde os jogos da Grécia antiga, o atletismo permanece como o principal esporte olímpico dos tempos modernos.

Parte das competições olímpicas de atletismo é composta por modalidades de arremessos e lançamentos: peso, disco, martelo e dardo. Nessas modalidades, o princípio básico é lançar o objeto o mais longe possível, impulsionado apenas com os movimentos e a força do próprio corpo.

Provavelmente originados nos movimentos dos caçadores para abaterem suas presas, esses esportes requerem do atleta habilidades como impulso e força, dando ao objeto um movimento com aceleração progressiva e posterior desaceleração até a queda.

Rafael L. Gaion

**Pensando nisso...**

Respostas nas orientações ao professor.

Ⓐ Quais são as atuais modalidades olímpicas de arremesso? A trajetória dos objetos nesses lançamentos descreve uma reta ou uma curva?

Ⓑ Qual modalidade esportiva está retratada na fotografia?

Ⓒ Represente, no caderno, a possível trajetória do objeto em um arremesso olímpico, desde o momento do lançamento até sua queda no solo.

Atletismo

Veja mais informações sobre o atletismo no *site*: <www.cbat.org.br> (acesso em: 9 ago. 2018)

127

**Pensando nisso...**

Ⓐ arremesso de peso, lançamento de disco, lançamento de martelo e lançamento de dardo; uma curva

Ⓑ lançamento de dardo

Ⓒ Resposta pessoal.

- Ao abordar o item **A**, verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para pesquisarem as atuais modalidades olímpicas de arremesso.
- No item **C**, espera-se que a representação seja parecida com a de uma parábola.

**Relacionando saberes**

- O tema abordado nas páginas de abertura possibilita desenvolver um trabalho com o componente curricular **Educação Física**. Verifique a possibilidade de realizar uma atividade conjunta com o professor desse componente, na qual os alunos poderão fazer lançamentos de objetos em local apropriado, simulando os das modalidades olímpicas. Eles deverão observar e registrar a trajetória do objeto nesses lançamentos para, ao final, discutirem as semelhanças e diferenças entre as trajetórias. Outra possibilidade é, antes dos lançamentos, apresentar vídeos de atletas profissionais participando de competições dessa modalidade, a fim de que os alunos identifiquem os movimentos realizados pelos atletas para atingirem melhores resultados.

**BNCC em foco**

- As páginas de abertura, além de destacarem o conteúdo abordado no capítulo, colocam em evidência a prática esportiva. Dessa maneira, contempla-se, também, a **Competência geral 8**, habilitando-os a desenvolver o autoconhecimento e o autocuidado por meio de assuntos que promovem a saúde física e emocional, como é o caso da prática de atletismo.

126

127

**Relacionando saberes**

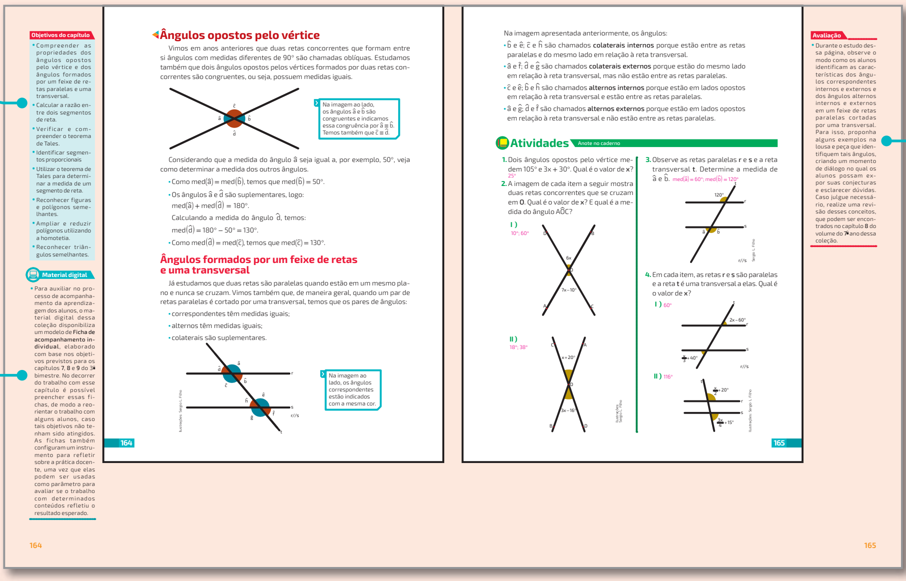
Destina-se a comentários que conectam a Matemática a outras áreas do conhecimento.

**Pensando nisso...**

Destaca as respostas das questões propostas na seção **Pensando nisso...**.

## Objetivos do capítulo

Localizado na página seguinte às páginas de abertura, indica os principais objetivos previstos para o trabalho com o capítulo.



**Objetivos do capítulo**

- Compreender as propriedades dos ângulos opostos pelo vértice e dos ângulos formados por um feixe de retas paralelas e uma transversal.
- Calcular a razão entre dois segmentos de reta.
- Verificar e compreender o teorema de Tales.
- Identificar segmentos proporcionais
- Utilizar o teorema de Tales para determinar a medida de um segmento de reta.
- Reconhecer figuras e polígonos semelhantes.
- Ampliar e reduzir polígonos utilizando a homotetia.
- Reconhecer triângulos semelhantes.

**Material digital**

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **7**, **8** e **9** do 3º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

### Ângulos opostos pelo vértice

Vimos em anos anteriores que duas retas concorrentes que formam entre si ângulos com medidas diferentes de 90° são chamadas oblíquas. Estudamos também que dois ângulos opostos pelos vértices formados por duas retas concorrentes são congruentes, ou seja, possuem medidas iguais.

Na imagem ao lado, os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são congruentes e indicamos essa congruência por $\hat{a} \equiv \hat{b}$. Temos também que $\hat{c} \equiv \hat{d}$.

Considerando que a medida do ângulo $\hat{a}$ seja igual a, por exemplo, 50°, veja como determinar a medida dos outros ângulos.

- Como $med(\hat{a}) = med(\hat{b})$, temos que $med(\hat{b}) = 50°$.
- Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{d}$ são suplementares, logo:
  $med(\hat{a}) + med(\hat{d}) = 180°$.
  Calculando a medida do ângulo $\hat{d}$, temos:
  $med(\hat{d}) = 180° - 50° = 130°$.
- Como $med(\hat{d}) = med(\hat{c})$, temos que $med(\hat{c}) = 130°$.

### Ângulos formados por um feixe de retas e uma transversal

Já estudamos que duas retas são paralelas quando estão em um mesmo plano e nunca se cruzam. Vimos também que, de maneira geral, quando um par de retas paralelas é cortado por uma transversal, temos que os pares de ângulos:

- correspondentes têm medidas iguais;
- alternos têm medidas iguais;
- colaterais são suplementares.

Ilustrações: Sergio L. Filho

Na imagem ao lado, os ângulos correspondentes estão indicados com a mesma cor.

Na imagem apresentada anteriormente, os ângulos:

- $\hat{b}$ e $\hat{e}$; $\hat{c}$ e $\hat{h}$ são chamados **colaterais internos** porque estão entre as retas paralelas e do mesmo lado em relação à reta transversal.
- $\hat{a}$ e $\hat{f}$; $\hat{d}$ e $\hat{g}$ são chamados **colaterais externos** porque estão do mesmo lado em relação à reta transversal, mas não estão entre as retas paralelas.
- $\hat{c}$ e $\hat{e}$; $\hat{b}$ e $\hat{h}$ são chamados **alternos internos** porque estão em lados opostos em relação à reta transversal e estão entre as retas paralelas.
- $\hat{a}$ e $\hat{g}$; $\hat{d}$ e $\hat{f}$ são chamados **alternos externos** porque estão em lados opostos em relação à reta transversal e não estão entre as retas paralelas.

**Atividades** Anote no caderno

1. Dois ângulos opostos pelo vértice medem 105° e $3x + 30°$. Qual é o valor de **x**? 25°
2. A imagem de cada item a seguir mostra duas retas concorrentes que se cruzam em **O**. Qual é o valor de **x**? E qual é a medida do ângulo $A\hat{O}C$?
   I ) 10°; 60°
   II ) 18°; 38°

Ilustrações: Sergio L. Filho

3. Observe as retas paralelas **r** e **s** e a reta transversal **t**. Determine a medida de $\hat{a}$ e $\hat{b}$. $med(\hat{a}) = 60°$; $med(\hat{b}) = 120°$

Sergio L. Filho

4. Em cada item, as retas **r** e **s** são paralelas e a reta **t** é uma transversal a elas. Qual é o valor de **x**?
   I ) 60°
   II ) 116°

Ilustrações: Sergio L. Filho

**Avaliação**

- Durante o estudo dessa página, observe o modo como os alunos identificam as características dos ângulos correspondentes internos e externos e dos ângulos alternos internos e externos em um feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal. Para isso, proponha alguns exemplos na lousa e peça que identifiquem tais ângulos, criando um momento de diálogo no qual os alunos possam expor suas conjecturas e esclarecer dúvidas. Caso julgue necessário, realize uma revisão desses conceitos, que podem ser encontrados no capítulo **8** do volume do **7º** ano dessa coleção.

## Material digital

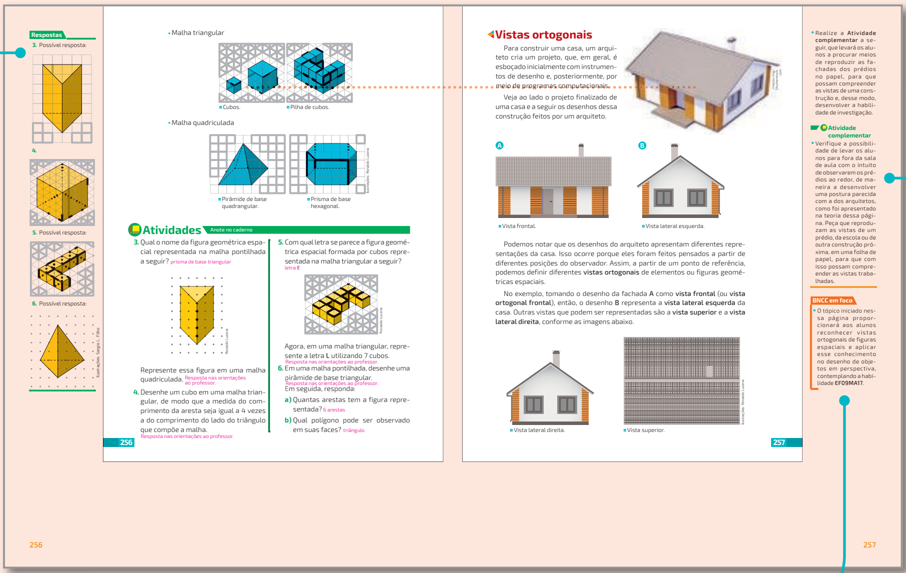
Aponta momentos oportunos para utilizar os recursos disponíveis no material digital, a fim de enriquecer o trabalho do professor.

## Avaliação

Traz sugestões para auxiliar o professor no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos.

## Atividade complementar

Propõe atividades adicionais, como jogos, construções, manipulação de materiais concretos, problemas, entre outras. Indicamos alguns momentos em que é possível utilizar tais atividades como instrumento de avaliação.



**Respostas**

3. Possível resposta:

4.

5. Possível resposta:

6. Possível resposta:

Ilustrações: Sergio L. Filho

- Malha triangular

Cubos.

Pilha de cubos.

- Malha quadriculada

Pirâmide de base quadrangular.

Prisma de base hexagonal.

Ilustrações: Ronaldo Lucena

**Atividades** Anote no caderno

3. Qual o nome da figura geométrica espacial representada na malha pontilhada a seguir? prisma de base triangular

Ronaldo Lucena

Represente essa figura em uma malha quadriculada. Resposta nas orientações ao professor.

4. Desenhe um cubo em uma malha triangular, de modo que a medida do comprimento da aresta seja igual a 4 vezes a do comprimento do lado do triângulo que compõe a malha. Resposta nas orientações ao professor.

5. Com qual letra se parece a figura geométrica espacial formada por cubos representada na malha triangular a seguir? letra **E**

Ronaldo Lucena

Agora, em uma malha triangular, represente a letra **L** utilizando 7 cubos. Resposta nas orientações ao professor.

6. Em uma malha pontilhada, desenhe uma pirâmide de base triangular. Resposta nas orientações ao professor. Em seguida, responda:
   a) Quantas arestas tem a figura representada? 6 arestas
   b) Qual polígono pode ser observado em suas faces? triângulo

### Vistas ortogonais

Para construir uma casa, um arquiteto cria um projeto, que, em geral, é esboçado inicialmente com instrumentos de desenho e, posteriormente, por meio de programas computacionais.

Veja ao lado o projeto finalizado de uma casa e a seguir os desenhos dessa construção feitos por um arquiteto.

maslov.mig/Shutterstock.com

Vista frontal.

Vista lateral esquerda.

Podemos notar que os desenhos do arquiteto apresentam diferentes representações da casa. Isso ocorre porque eles foram feitos pensados a partir de diferentes posições do observador. Assim, a partir de um ponto de referência, podemos definir diferentes **vistas ortogonais** de elementos ou figuras geométricas espaciais.

No exemplo, tomando o desenho da fachada **A** como **vista frontal** (ou **vista ortogonal frontal**), então, o desenho **B** representa a **vista lateral esquerda** da casa. Outras vistas que podem ser representadas são a **vista superior** e a **vista lateral direita**, conforme as imagens abaixo.

Vista lateral direita.

Vista superior.

Ilustrações: Ronaldo Lucena

- Realize a **Atividade complementar** a seguir, que levará os alunos a procurar meios de reproduzir as fachadas dos prédios no papel, para que possam compreender as vistas de uma construção e, desse modo, desenvolver a habilidade de investigação.

**Atividade complementar**

- Verifique a possibilidade de levar os alunos para fora da sala de aula com o intuito de observarem os prédios ao redor, de maneira a desenvolver uma postura parecida com a dos arquitetos, como foi apresentado na teoria dessa página. Peça que reproduzam as vistas de um prédio, da escola ou de outra construção próxima, em uma folha de papel, para que com isso possam compreender as vistas trabalhadas.

**BNCC em foco**

- O tópico iniciado nessa página proporcionará aos alunos reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento no desenho de objetos em perspectiva, contemplando a habilidade **EF09MA17**.

## Respostas

De modo geral, as respostas das atividades são preferencialmente apresentadas na reprodução do livro do aluno. Porém, em alguns casos, elas aparecerão nas orientações ao professor, indicadas como **Respostas**.

## BNCC em foco

Relaciona o conteúdo trabalhado no livro do aluno às competências gerais, às competências específicas, às habilidades específicas de Matemática e aos temas contemporâneos propostos pela BNCC.

# Manual do material digital

Como parte das ferramentas que auxiliam o trabalho do professor, esta coleção disponibiliza um **material digital** composto por recursos organizados em bimestres. Embora estruturados de acordo com o livro do aluno, esses recursos são um complemento e podem ser utilizados também por professores que não adotam a coleção.

Assim como este manual e o livro do aluno, o material digital foi produzido com base nos objetos de conhecimento, habilidades e competências propostos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Veja a seguir os recursos que compõem este material.

- **Plano de desenvolvimento**: apresenta a relação dos objetivos específicos de aprendizagem do livro do aluno com os objetos de conhecimento e as habilidades da BNCC. Para auxiliar o desenvolvimento das habilidades do bimestre são sugeridas práticas didático-pedagógicas seguidas de orientações para a gestão de sala de aula importantes para o desenvolvimento dessas práticas. Além disso, são elencadas algumas atividades recorrentes na sala de aula para desenvolver as habilidades desse período; orientações em relação ao acompanhamento contínuo das aprendizagens dos alunos alinhadas com os objetivos essenciais e respectivas habilidades da BNCC para que o aluno possa avançar em seus estudos; sugestões de outras fontes de pesquisa e consulta que podem ser úteis ao professor, tanto para sua formação quanto para o trabalho com os alunos; e projeto integrador. Cada bimestre apresenta um plano de desenvolvimento.
- **Projeto integrador**: é um item do plano de desenvolvimento que tem como objetivo trabalhar com objetos de conhecimento e habilidades de ao menos dois componentes curriculares de modo integrado. Com base em uma questão desafiadora alinhada a temas contemporâneos, as atividades propostas nesse item são organizadas em etapas que visam à apresentação de um produto final à comunidade escolar. Além disso, os projetos integradores são recursos propícios para trabalhar as competências gerais da BNCC. Cada plano de desenvolvimento apresenta um projeto integrador.
- **Sequência didática**: são atividades organizadas em etapas para abordar alguns conteúdos do bimestre, buscando desenvolver objetos de conhecimento e respectivas habilidades. Cada bimestre apresenta três sequências didáticas.
- **Proposta de acompanhamento das aprendizagens**: são ferramentas para auxiliar o acompanhamento das aprendizagens dos alunos em relação a alguns objetos de conhecimento e habilidades desenvolvidos no bimestre. Essa proposta é composta por três itens: avaliação, que propõe dez questões a serem aplicadas aos alunos; gabarito comentado das questões da avaliação, com

reorientações de planejamento e grade de correção; e ficha de acompanhamento individual das aprendizagens, que destaca de maneira organizada as expectativas de aprendizagem do bimestre, de modo que seja possível avaliar cada aluno individualmente, seguida de um formulário para registrar apontamentos que podem contribuir para reuniões do conselho de classe ou atendimento aos pais ou responsáveis. Cada bimestre apresenta uma proposta de acompanhamento das aprendizagens.

- **Material audiovisual**: material disponibilizado ao professor, voltado ao desenvolvimento das habilidades do aluno, esse material é composto por áudios e vídeos que podem contribuir para aprofundar, ampliar ou sintetizar conteúdos trabalhados no bimestre.

Neste manual há sugestões de momentos para aplicação de cada um desses itens. Fica a critério do professor trabalhá-los ou não nos momentos sugeridos.

## A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Em um país com dimensões continentais, como é o Brasil, faz-se importante uma unidade no que diz respeito aos conteúdos curriculares e suas propostas. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi pensada no sentido de promover essa unidade, dando subsídios para que os sistemas educacionais públicos e particulares possam estar em conformidade com as diretrizes curriculares e trabalhem os conhecimentos essenciais levando em conta não somente aspectos intelectuais, mas também culturais, emocionais e outros.

O alinhamento na educação que convergiu na BNCC é uma demanda que remonta à promulgação da Constituição Federal de 1988 e vem sendo trabalhado e discutido há tempos, com base em experiências bem-sucedidas e pautado pelas necessidades oriundas dos assuntos e contextos atuais.

Uma base é algo que não só fundamenta, mas também norteia. Nessa perspectiva, a BNCC atua como orientadora dos rumos para trabalhar os currículos e alcançar seus objetivos, primando pelo respeito às diferenças e pela preservação da diversidade que constitui o país. Por serem essencialmente plurais, as orientações ampliam-se para além do ambiente escolar e ecoam no ambiente familiar, de modo que a escola, os professores e a família tenham seus papéis ativados na formação integral do aluno.

Nesse contexto, a BNCC sugere a organização para o Ensino Fundamental (anos iniciais, 1º ao 5º, e finais, 6º ao 9º) a partir de diferentes **componentes curriculares**, agrupados em cinco **áreas do conhecimento**, que se inter-relacionam na formação dos alunos.

| Áreas do conhecimento | Linguagens | Matemática | Ciências da Natureza | Ciências Humanas | Ensino Religioso |
|---|---|---|---|---|---|
| **Componentes curriculares** | Língua Portuguesa | Matemática | Ciências | Geografia | Ensino Religioso |
| | Arte | | | | |
| | Educação Física | | | História | |
| | Língua Inglesa | | | | |

## Competências gerais

Tendo como mote a formação humana em suas múltiplas proporções e a construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva, a BNCC organizou algumas atribuições em dez **competências gerais** que descrevem objetivos a serem atingidos para o desenvolvimento integral do aluno, que orientam as aprendizagens em todas as áreas do conhecimento.

O conceito de competência, conforme entendido pela BNCC, é a mobilização e a articulação de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para a solução de circunstâncias do cotidiano e de demandas que evocam posicionamentos críticos, éticos e criativos no mundo do trabalho e das situações relacionadas ao exercício da cidadania. A respeito dessas competências, o documento assinala:

> [...] Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017. p. 13.
Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 16 set. 2018.

As competências, de maneira geral, buscam valorizar o conhecimento e estimular a curiosidade e a postura dialógica, além de prepararem os alunos para a aplicação dos saberes em seu dia a dia com consciência crítica, respeito a si e ao próximo, e incentivá-los a agir em favor da justiça social, dos direitos humanos e da sustentabilidade. Vale destacar, também, a valorização do desenvolvimento dos campos emocional, cultural e físico, que se articulam aos saberes intelectuais para complementar a formação. São estas as competências gerais:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e

a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017. p. 9-10.
Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 16 set. 2018.

O desenvolvimento dessas competências será estimulado em diversos momentos do trabalho com o livro do aluno, sendo referenciadas algumas vezes nas orientações ao professor.

## Competências específicas de Matemática

A BNCC assinala a articulação das competências gerais com as diferentes áreas do conhecimento, o que culmina em **competências específicas** para cada componente curricular do Ensino Fundamental.

As competências específicas são estabelecidas com base na área do conhecimento e, caso a área agrupe mais de um componente curricular, também são definidas competências específicas do componente. A seguir, destacamos as que são relativas à Matemática.

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questio-

> namentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017. p. 265. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 16 set. 2018.

As propostas apresentadas nas explicações teóricas, nas atividades e seções ao longo dos volumes da coleção foram desenvolvidas no sentido de encorajar o trabalho com as **competências específicas de Matemática**.

## Objetos de conhecimento e habilidades

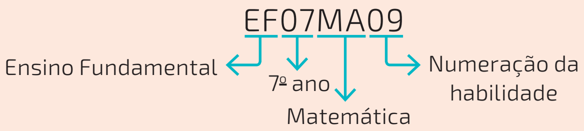
Com base na BNCC, a coleção traz os pressupostos teóricos e uma organização dos conteúdos pautada no que é apontado como referência para o ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental.

As competências específicas de Matemática e as habilidades propostas para cada ano foram, portanto, tomadas como norte para distribuir os conteúdos e auxiliar o professor no processo de aprendizagem dos alunos, de modo que ele atue como um agente facilitador da construção do conhecimento matemático.

Com o objetivo de garantir que essas competências sejam desenvolvidas, é apresentado um conjunto de **habilidades** para cada componente curricular, organizadas a partir de **objetos de conhecimento**, “entendidos como conteúdos, conceitos e processos” (BRASIL, 2017, p. 28), agrupados por **unidades temáticas**.

| Unidades temáticas | Objetos de conhecimento | Habilidades |
|---|---|---|

Para o componente curricular Matemática, por exemplo, cada uma das habilidades recebe um código alfanumérico que indica a etapa da educação (no caso, Ensino Fundamental), o ano, o componente e a numeração sequencial da habilidade.



Na primeira parte do manual do professor, no tópico **Distribuição de conteúdos**, serão descritos cada um dos objetos de conhecimento e das habilidades previstas para serem desenvolvidas em determinado capítulo e ano específico da coleção. Ressaltamos que essas propostas são sugestões, e portanto podem ser reorganizadas conforme a conveniência.

> Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017. p. 296. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 16 set. 2018.

Na segunda parte do manual, em que se encontram as orientações ao professor página a página, indicaremos de forma mais pontual em quais momentos o conteúdo previsto poderá auxiliar no desenvolvimento das habilidades, fazendo referência aos códigos que as representam.

Dessa maneira, a coleção fornece subsídios para o desenvolvimento de todas as habilidades previstas e estimula, sempre que possível, a articulação com as competências gerais e específicas.

## Temas contemporâneos

A relação das sociedades modernas com a dinâmica das transformações do mundo culmina em desafios de diferentes esferas. São temas que dizem respeito ao meio ambiente, ao consumo, à saúde, aos direitos humanos e tantas outras questões de urgência no panorama atual. Nesse contexto, a BNCC assinala a necessidade de que os currículos e as propostas pedagógicas contemplem, de uma maneira transversal e integradora, o que foi denominado como temas contemporâneos, para que favoreçam a participação social cidadã dos alunos com base em princípios e valores democráticos.

Muitos desses temas já constavam como necessários em orientações pedagógicas de outros documentos oficiais da área educacional, que também incentivavam uma abordagem contextualizada capaz de estimular nos alunos uma reflexão crítica.

No que diz respeito a essa coleção, a abordagem dos temas contemporâneos pode ser encontrada tanto no livro do aluno quanto nas orientações ao professor, e é estimulada não só no decorrer do trabalho com as atividades e as explanações teóricas por meio de diferentes recursos, mas também em uma seção específica, intitulada **Cidadania: explore essa ideia**, sempre com o intuito de auxiliar o professor no desenvolvimento dos temas.

Os temas contemporâneos e as questões a eles relacionadas são apresentados de uma maneira contextualizada, de forma a explorar a integração com os conteúdos estudados. Assim, a seção **Cidadania: explore essa ideia** tem como um dos principais objetivos proporcionar ao aluno condições de refletir sobre sua postura diante dos assuntos abordados e da realidade que o cerca, contribuindo para sua formação como cidadão. Por serem temas presentes em nosso cotidiano que suscitam discussões cabíveis a diversos componentes curriculares, proporcionam reflexões relevantes sobre assuntos que extrapolam esses conteúdos.

A seguir, os temas contemporâneos indicados pela BNCC e que serão trabalhados nesta coleção são apresentados sucedidos por uma breve explicação.

### Direitos da criança e do adolescente

O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), aprovado em 1990 pela lei nº 8.069, sistematizou e formalizou o conjunto dos direitos concernentes a essas faixas etárias (crianças até 12 anos incompletos e adolescentes de 12 a 18 anos). É um documento que prioriza a necessidade de conceder uma proteção integral à criança e ao adolescente, atribuindo-lhes prioridades integrais em diversos setores públicos e na destinação de recursos.

Com isso, crianças e adolescentes passaram a ser compreendidos como pessoas em estágio de desenvolvimento que necessitam de atenção e proteção da sociedade como um todo, de modo que a educação assume um papel fundamental na valorização desses direitos e na efetivação das perspectivas descritas no ECA.

No âmbito escolar, a valorização dos direitos da criança e do adolescente pode ser abordada por meio de temas como a prevenção do trabalho e a exploração infantil, o desenvolvimento do senso crítico quanto ao papel das mídias e das redes sociais no processo de crescimento cultural e pessoal dos jovens, além da valorização de atitudes de respeito à diversidade e do incentivo à ampliação do universo cultural de crianças e adolescentes.

## Educação para o trânsito

O trabalho com esse tema assume grande relevância na tarefa de promover a interação dos alunos com o meio social em que vivem, contribuindo para que a escola transcenda o conteúdo dos componentes curriculares. Uma maneira de desenvolvê-lo é com a proposição de dinâmicas que compreendam situações reais e contextualizadas e que permitam a reflexão a respeito do tema.

## Educação ambiental

Tendo em vista que os problemas que envolvem o ambiente estão constantemente nos meios de comunicação, esse tema incita importantes reflexões, por estar mais próximo à realidade dos alunos. Assim, é possível contemplar diversas discussões e troca de ideias em sala de aula, de forma que o aluno se identifique como parte integrante da natureza e da sociedade e se comprometa com a proteção e a conservação ambiental, tanto em âmbito local quanto global.

## Educação alimentar e nutricional

Com o intuito de afirmar comportamentos e hábitos saudáveis e que repercutam na qualidade de vida do aluno e da coletividade, esse tema promove abordagens que estimulam habilidades e práticas favoráveis à saúde, como a alimentação saudável. Além disso, ao colocar também em evidência alguns costumes alimentares das diferentes regiões do Brasil, o trabalho com o tema auxilia no desenvolvimento da tolerância e do respeito pela diversidade cultural brasileira.

## Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso

O Estatuto do Idoso, aprovado em 2003, foi um marco para a garantia de direitos relacionados ao bem-estar das pessoas com idade igual ou superior a 60 anos, já que se define por uma série de leis que buscam promover o respeito, a autonomia, a integração e a participação efetiva dos idosos na sociedade brasileira.

Além do Estatuto, a educação é mais um meio de conscientizar os alunos sobre a importância e o valor das pessoas idosas em nossa sociedade.

Para tanto, é necessário promover a sociabilização entre alunos e pessoas idosas, de modo que possam compartilhar conhecimentos e memórias, relatar suas experiências e, com isso, aprofundar o sentido do que foi estudado.

A participação de idosos na vida escolar é, portanto, uma questão fundamental, por isso os projetos pedagógicos devem esforçar-se para contemplar a participação de pessoas idosas da comunidade e de fora dela no processo de ensino-aprendizagem.

### Educação em direitos humanos

A abordagem desse tema é fundamental para o desenvolvimento dos sensos de justiça, igualdade e democracia nos alunos, estimulando a consciência crítica sobre a importância de garantias constitucionais para o desenvolvimento pleno dos indivíduos em sociedade. Entre os principais direitos que devem ser garantidos a todo cidadão estão os direitos à vida, à saúde, à alimentação, à moradia, à liberdade, à igualdade, à educação e à livre expressão de afeto. Nesse sentido, é importante promover debates para aproximar temas relacionados aos direitos humanos da realidade do aluno e do cotidiano escolar.

### Educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena

Esse tema configura-se de suma importância para a valorização cultural pluriétnica do país. É importante que os alunos reflitam a respeito da formação da sociedade brasileira, debatendo as arbitrariedades e injustiças nas relações étnico-raciais que se estabeleceram historicamente e que ainda ocorrem das mais diversas formas na sociedade. Assim, ao trabalhar esse tema, é importante promover a luta por uma sociedade igualitária, a preservação da memória, o respeito pelas diferentes culturas que contribuíram para a formação do país e o combate ao preconceito racial.

### Saúde

Trata-se de um tema amplo que engloba da conscientização para uma mudança de hábitos à interação entre o meio físico, social e cultural dos indivíduos. Sendo assim, questões como o saneamento básico, a qualidade do ar, o estilo de vida, a distribuição de renda, a segurança alimentar, entre outras, são abordadas por terem grande influência no bem-estar das pessoas.

Nesse sentido, a escola tem a oportunidade de estruturar e estimular os comportamentos e hábitos saudáveis dos alunos, fornecendo elementos que os capacitem a cuidar da saúde no âmbito pessoal e coletivo, como o incentivo ao autocuidado e à prevenção, fazendo-os compreender a saúde como direito e responsabilidade pessoal e social.

## Vida familiar e social

Este é um tema amplo que aborda as relações dos alunos com suas famílias, o respeito pelas diversas gerações, pelas diferentes estruturas familiares e a convivência com seus colegas, comunidade escolar e sociedade. Além disso, possibilita discutir as transformações no papel das mulheres nas famílias ao longo do tempo e desconstruir preconceitos relacionados aos espaços que elas ocupam.

## Educação para o consumo

O consumo consciente é uma preocupação global que se relaciona ao esgotamento de recursos do planeta. Partindo desse princípio, o trabalho com esse tema objetiva fazer com que os alunos reflitam sobre suas escolhas, de modo que se tornem cidadãos preparados para observar, argumentar e contribuir para uma sociedade mais igualitária, conscientes de seus direitos e deveres.

Tendo em vista sua transversalidade, é um tema que permeia toda a coleção, tanto nas atividades propostas como no desenvolvimento teórico dos conceitos, em situações relacionadas, por exemplo, à educação financeira, aos cuidados com o meio ambiente e com a saúde, entre outras.

## Educação financeira e fiscal

Este é um tema bastante relacionado com alguns conteúdos matemáticos, que permite que o aluno conheça o sistema tributário do país, o valor da moeda, a importância dos impostos e o modo como são utilizados pelas esferas governamentais. As abordagens também estimulam atitudes cidadãs que visam reivindicar a melhoria de produtos e serviços públicos ofertados com base nos impostos coletados pelo governo.

## Trabalho

Este tema abrange questões de vários âmbitos relacionadas às atividades profissionais, como as relações de dependência, a distribuição desigual da riqueza na maioria dos países e a importância e o valor de todas as profissões. Ao abordar esse tema, deve-se considerar sua importância para a vida das pessoas e o impacto que encontra ecos tanto na sociedade quanto na natureza.

É importante que os alunos sejam capazes de conceber o trabalho não apenas como o exercício de uma atividade e uma fonte de renda para o indivíduo custear suas necessidades, mas que também compreendam a complexidade das relações de trabalho.

## Ciência e tecnologia

O estudo desse tema, além de estar em consonância com os avanços no campo das pesquisas, possibilita compreender como o ser humano se relaciona com o ambiente ao seu redor e com os outros seres vivos por meio das técnicas que desenvolve, promovendo a reflexão sobre as complexidades e consequências dessas relações. Alguns dos assuntos abordados são os aspectos sociais e humanos da ciência e da tecnologia e a influência que ambas exercem sobre os campos social, cultural, econômico e ambiental, sempre de uma maneira crítica que permite perceber os impactos positivos e negativos na sociedade.

### Diversidade cultural

O trabalho com este tema é importante para o entendimento da multiplicidade etnocultural brasileira. Nesse sentido, o respeito às diferenças étnicas, religiosas, linguísticas e regionais somado ao repúdio a qualquer tipo de discriminação é fundamental para uma convivência harmoniosa e justa tanto no ambiente escolar quanto em sociedade.

# Orientações didáticas e metodológicas

## O ensino de Matemática

A Matemática desempenha um importante papel na formação de cidadãos capazes de compreender o mundo em que vivem e de se comunicar em sociedade, pois está relacionada a várias áreas do conhecimento e faz parte do cotidiano das pessoas. Diante disso, o conhecimento matemático constitui-se uma ferramenta de grande aplicabilidade e deve ser amplamente explorado.

Por ser uma ciência viva, em constante transformação, a Matemática não pode ser encarada como um conjunto de conhecimentos prontos e acabados, imutáveis. É importante que os estudantes a compreendam como fruto da criação humana ao longo da história, inclusive do presente. Um exemplo disso são os desenvolvimentos tecnológicos estreitamente associados aos tradicionais e aos novos conceitos matemáticos, como aqueles que relacionam a programação de computadores às ideias de lógica e de grafos.

Contar, mensurar, representar, compreender fenômenos, calcular e resolver problemas são alguns exemplos de conhecimentos desenvolvidos com a Matemática e que são essenciais na formação de um cidadão do século XXI. No mundo do trabalho, atualmente, são exigidas diversas características dos profissionais, como criatividade, trabalho cooperativo, autonomia, argumentação e construção de estratégias, que encontram terreno no campo da Matemática. Identificar um problema, compreendê-lo, elaborar uma estratégia e resolvê-lo adequadamente são habilidades que podem ser trabalhadas nas aulas de Matemática e que são extremamente valorizadas na formação de um profissional.

Além disso, o ensino da Matemática pode oferecer contribuições significativas para outros aspectos da formação social do cidadão, capacitando-o, por exemplo, a debates relacionados a questões ambientais, ao consumo, à ética e ao respeito à diversidade étnica e cultural.

O manual do professor norteia o trabalho com a coleção no sentido de valorizar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito de situações cotidianas, de outras áreas do conhecimento e da própria matemática, a fim de ampliá-los e enriquecê-los por meio de diversos recursos didáticos e estratégias de trabalho.

## Seleção de conteúdos para o Ensino Fundamental

Os conteúdos trabalhados nesta coleção propiciam ao aluno construir e organizar o raciocínio lógico-matemático e promover o desenvolvimento intelectual, criativo, crítico e intuitivo, entre outras competências. Essas atribuições possibilitam que os alunos sejam capazes de ler, compreender e inferir sobre fatos e fenômenos do cotidiano.

Em toda a coleção, os conteúdos matemáticos fundamentais estão organizados em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística.

### Números

O conhecimento acerca dos números é construído pelo aluno, ao longo do Ensino Fundamental, como um instrumento eficiente para quantificar, ordenar, medir, codificar e, consequentemente, resolver determinados tipos de problemas. Nesse contexto, outras ideias fundamentais associadas aos números incluem estratégias de aproximação, arredondamento e estimativa.

O trabalho ao longo da coleção levará os alunos a aprender sobre os números naturais, inteiros, racionais e irracionais, bem como seus diferentes significados, considerando suas relações, propriedades e questões ligadas à maneira como foram constituídos.

No que se refere às operações, os alunos serão capacitados a resolver e elaborar problemas utilizando diversas estratégias, como cálculos mentais e escritos, exatos ou aproximados, e instrumentos, como o ábaco, a calculadora, o material dourado e o computador. Além disso, serão estimulados a compreender as relações existentes entre determinadas operações e as propriedades operatórias.

Da mesma maneira, também serão encorajados a calcular porcentagens, porcentagem de porcentagem, acréscimos e decréscimos, especialmente em contextos que envolvem economia e finanças, com o intuito de desenvolver a educação para o consumo e financeira.

Ressaltamos que o desenvolvimento do pensamento numérico não se faz de maneira isolada, sendo comum relacionar esse campo às outras unidades temáticas.

### Álgebra

O desenvolvimento do pensamento algébrico trata essencialmente do esforço em dar significado para a álgebra, como ao modelar um problema representando-o por uma equação, ao estabelecer relação entre grandezas por meio de uma lei, ao descrever padrões de sequências, ou ainda ao perceber regularidades de propriedades operatórias.

Ao longo do Ensino Fundamental, espera-se que os alunos, nos anos iniciais, sejam capazes de raciocinar algebricamente, mas ainda de forma mais preliminar, sem utilizar a linguagem algébrica. Já nos anos finais, a proposta dessa unidade temática é a de que os alunos possam compreender o significado de uma variável numérica em uma expressão, generalizar propriedades, descrever regularidades de sequências, inclusive por meio de expressões algébricas, resolver equações, entre outras capacidades. Nessa fase é importante que percebam a relação entre variável e função e incógnita e equação, sabendo diferenciar o significado da representação da letra nesses casos.

Destacamos que a Álgebra está conectada às outras unidades temáticas, uma vez que o pensamento algébrico é útil para modelar problemas apresentados em língua materna para a linguagem matemática, com fórmulas, gráficos e outras representações.

## Geometria

O trabalho com a Geometria permite ao aluno interpretar e compreender melhor as formas que o cercam e o mundo em que vive. O conhecimento geométrico tem papel fundamental para a compreensão de conceitos vinculados à Matemática e a outras áreas do conhecimento. Um fator importante no ensino dessa unidade temática é promover valores culturais e estéticos, desenvolvendo a apreciação das formas encontradas na natureza e nas obras de arte. Assim, nesta coleção, procuramos trabalhar com base em objetos, obras de arte, desenhos, pinturas, esculturas, entre outros, a fim de possibilitar ao aluno estabelecer essas conexões.

O estudo da Geometria possibilita a visualização e a percepção do espaço, o reconhecimento e a abstração de formas, além de desenvolver a capacidade de representar essas formas por meio de desenhos ou construções. Também auxilia na aprendizagem de números e medidas, pois leva os alunos a identificarem regularidades e a observarem semelhanças e diferenças. Algumas ideias essenciais presentes nesse trabalho são construção, representação e interdependência.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, são destacadas as transformações de figuras geométricas planas, permitindo aos alunos desenvolverem conceitos de congruência e semelhança, e possibilitando realizar algumas demonstrações simples, como as que envolvem congruência de triângulos. Há também a aproximação entre a Geometria e a Álgebra, por meio dos estudos com o plano cartesiano. A geometria analítica é abordada em atividades que trabalham ideias de coordenadas, por exemplo, na representação da solução de sistemas de equações do 1º grau.

## Grandezas e medidas

Os conceitos relacionados às Grandezas e medidas são caracterizados pelo caráter prático. Nesse sentido, essa unidade temática permite a articulação com outras áreas do conhecimento, como Ciências, a partir do trabalho com temperatura, energia e grandezas e escalas do Sistema Solar, por exemplo, ou Geografia, como no trabalho com escalas de mapas e densidade demográfica. Envolver essas noções nos estudos faz com que os alunos percebam a utilidade desses conceitos em situações cotidianas.

A fim de ampliar o que já foi estudado sobre grandezas e medidas nos anos iniciais, os alunos serão levados a reconhecer comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas relacionadas a figuras geométricas, e a escrever e utilizar expressões algébricas para calcular medidas de área e de volume de figuras geométricas planas e espaciais.

Da mesma maneira, serão estimulados a utilizar instrumentos de medição associados a cada uma das grandezas estudadas, assim como resolver problemas que envolvem as unidades de medida padronizadas mais usuais.

Os contextos explorados nessa unidade temática possibilitam tratar de importantes conceitos referentes à Geometria, dar significado a elementos da unidade Números, explorar as ideias de proporcionalidade, além de permitirem uma rica abordagem histórica.

Cabe destacar que, com o advento da informática e seu grande alcance na atualidade, são exploradas, também, algumas unidades de medida relacionadas a esse tema, como velocidade de processamento e armazenamento de dados.

## Probabilidade e estatística

Diariamente as pessoas são expostas a uma grande quantidade de informações que, muitas vezes, exigem a leitura e a interpretação de gráficos e tabelas e o conhecimento de outros elementos estatísticos.

Nesta coleção, a unidade temática Probabilidade e estatística tem a finalidade de levar o aluno, de maneira gradual, a compreender procedimentos de coleta e organização de dados, comunicar os resultados obtidos utilizando tabelas, gráficos e outras representações, além de calcular algumas medidas estatísticas, como média, mediana, moda e amplitude, que constituem importantes ferramentas conceituais na interpretação de dados.

Os recursos da estatística desempenham um importante papel como instrumento na análise de várias questões, como as de âmbito social, por exemplo. O trabalho com diferentes contextos, vinculado ao uso do conhecimento matemático, auxilia na formação de um cidadão crítico, consciente e participativo na sociedade.

Em relação à probabilidade, a principal finalidade é levar o aluno a compreender a noção de acontecimentos de natureza aleatória com base na observação de fenômenos do dia a dia, explorando a ideia de acaso e incerteza de maneira inicialmente intuitiva e, posteriormente, procurando quantificar a chance de ocorrência de resultados incertos. Para isso, os alunos devem realizar experimentos e observar eventos, discutindo as ideias básicas de espaços equiprováveis. Ainda nesse campo, deve ser dada prioridade aos problemas de contagem, principalmente aos que apresentam situações em que ocorrem diferentes tipos de agrupamentos, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo. Deve-se enfatizar esse conteúdo como instrumento para o cálculo de probabilidade.

Nesta coleção, os conteúdos relacionados a essa unidade temática são trabalhados em todo o livro do aluno, sendo que cada volume conta com um capítulo para tratar desses assuntos específicos.

## O papel do professor

As questões que cercam o processo de ensino e aprendizagem têm recebido grande ênfase em decorrência das constantes mudanças ocorridas na sociedade. Consequentemente, a escola vem passando por uma transição de metodologia de ensino.

O professor, cada vez mais, assume o papel de mediador, facilitador, incentivador e avaliador do processo de construção do conhecimento pelo aluno.

Para desenvolver tais habilidades, o professor precisa ter conhecimento não apenas do conteúdo específico de sua área de atuação, mas também das práticas pedagógicas que colocam o aluno no centro do processo de aprendizagem, e também articular esses conhecimentos com as condições socioculturais, as expectativas e a competência cognitiva dos alunos.

Na função de mediador, o professor é responsável por pautar os procedimentos utilizados pelos alunos nos processos de resolução de problemas, promover debates e valorizar as soluções e o esforço pessoal de cada um, a fim de chegar a um consenso sobre maneiras mais adequadas ou mais eficientes de resolver determinados tipos de problemas.

Enquanto facilitador da aprendizagem, o professor deve propor questionamentos que norteiem os alunos na obtenção de informações e ferramentas que dificilmente teriam condições de obter sozinhos.

Na função de incentivador, não pode deixar de lado seu papel social no ambiente escolar. Ele deve estimular o trabalho coletivo entre os alunos, tão importante quanto a interação entre aluno e professor. Nesse sentido, deve primar por um ambiente de aprendizagem onde os alunos tenham a oportunidade de confrontar e argumentar ideias.

Como avaliador, o professor deve procurar identificar se sua prática pedagógica está adequada ou se necessita de reorganização, e também dar aos alunos a oportunidade de verificar conquistas e dificuldades na construção do conhecimento.

> [...] ao avaliar uma situação, o professor ou a professora não apenas constata e pontua determinada dificuldade do aluno. O professor ou a professora tam-

> bém decide que tipos de encaminhamentos e intervenções deve inserir em sua prática pedagógica para que o aluno supere a sua dificuldade inicial. Nesse caso, o professor ou a professora considera não apenas o que o aluno foi capaz de fazer, mas também aquilo que ele já sabe fazer, para, a partir disso, planejar as atividades seguintes.
>
> [...]

CHAMORRO, Carla Cristine Wittmann et al. Avaliação da Aprendizagem em Matemática nos Anos Iniciais. In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Pró-Letramento**: Matemática. Brasília: MEC/SEB, 2007. Fascículo 8. p. 9. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/fasciculo_mat.pdf>. Acesso em: 12 set. 2018.

Ao refletir sobre o acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o professor também faz uma autoavaliação sobre sua própria prática docente. Segundo Perez (2004), pode-se considerar que:

> A reflexão é vista como um processo em que o professor analisa sua prática, compila dados, descreve situações, elabora teorias, implementa e avalia projetos e partilha suas ideias com colegas e alunos, estimulando discussões em grupo.
>
> [...]

PEREZ, Geraldo. Prática reflexiva do professor de matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 252.

Esses múltiplos papéis assumidos pelo professor transformam-no em um agente na formação integral dos alunos, a fim de que estes se tornem cidadãos responsáveis que atuam na sociedade. Nesse sentido, Santaló (1996) afirma que:

> A missão dos educadores é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, com comodidade e eficiência, no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade.
>
> [...]

SANTALÓ, Luis A. Matemática para não matemáticos. In: PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 11.

## Planejamento

A promoção de condições para a aprendizagem é um fator de demasiada importância para o sucesso do trabalho com os conteúdos matemáticos. Desse modo, o planejamento das aulas adquire grande relevância, pois é o momento em que o professor pode refletir sobre como trabalhar as habilidades dos alunos e quais estratégias e materiais podem ser utilizados no ensino dos diferentes conteúdos. Os objetivos de cada capítulo são um ponto de partida para a orientação das aulas e do tempo necessário para o trabalho, e também para a criação de estratégias que visem suprir as necessidades e as expectativas dos alunos.

É importante considerar que o planejamento não é um registro estanque, pois deve proporcionar flexibilidade para ser ajustado. Ao planejar, o professor tem condições de aplicar suas aulas de maneira mais segura almejando um melhor resultado.

## Trabalho em grupo

O trabalho em grupo é um tipo de atividade que desenvolve nos alunos diferentes habilidades socioemocionais. Nesses momentos de aprendizagem coletiva, em que os alunos conversam entre si e discutem diferentes visões, a interação é ativada e eles têm a oportunidade de desenvolver, com a troca de ideias e os debates, entre tantas outras coisas, o sentido de organização e cooperação.

Vale destacar que, nesse tipo de abordagem, os alunos podem se expressar de modo espontâneo, colocando suas experiências pessoais com leveza, já que há espaço para a experimentação. O professor de Matemática torna-se um mediador do processo de aprendizagem e assume o papel de encorajador na busca de soluções, lançando mão de situações que suscitem um debate rico e construtivo, em que os alunos devem expor suas ideias sempre com vistas a estabelecer uma relação com as opiniões dos colegas, argumentando e ouvindo.

Por ser um trabalho de cooperação, a postura do professor adquire suma importância ao estimular e levar os alunos a se manifestarem e expressarem seus sentimentos e dúvidas de maneira agradável e harmoniosa. Assim, é recomendado que o professor acompanhe o desenvolvimento das ideias e dos argumentos dos alunos. A proposição de questões desafiadoras, capazes de levar o aluno a refletir com argumentos e contra-argumentos, proporciona o desenvolvimento de habilidades essenciais para o convívio humano, para a sociabilidade, para a produção do pensamento e para a aceitação da diversidade.

Nesse sentido, o professor deve estar sempre atento a fatores que, porventura, possam coibir as livres manifestações e causar algum tipo de constrangimento, como grupos que se formam e deixam algum aluno de fora, situações de opressão e bloqueio e discriminação.

## A importância da leitura e da escrita

### Competência leitora

A capacidade de compreender aquilo que lê é imprescindível para a participação efetiva na vida em sociedade, sobretudo em tempos de muita informação. Pesquisas realizadas nos últimos anos apontaram que uma parcela significativa dos brasileiros, apesar de saber ler e escrever, não consegue compreender adequadamente textos mais extensos ou complexos, o que significa uma defasagem na competência leitora.

A leitura não é um aprendizado fechado, com início e fim. Estamos constantemente aprendendo a ler, a interpretar, e cada texto e situação requer estratégias diferentes de leitura, como levantamento de hipóteses e suposições antes da leitura e a retomada ao final. Tais estratégias também serão sempre plurais conforme as experiências de cada um, ou seja, de acordo com o modo como cada pessoa reúne essas experiências e interpreta a realidade.

A competência se dá justamente na capacidade de empregar esses conhecimentos e as experiências no estabelecimento de relações com os problemas, ou seja, fazer interpretações, interpolações, inferências e associações. A competência leitora está, portanto, atrelada ao modo como a pessoa explora os diversos tipos de mensagens, que podem estar expressas em imagens, gráficos, formulários ou tabelas, publicidades e, sobretudo, com a prática de estratégias de leitura que possibilitam a decodificação de uma maneira mais crítica e autônoma.

É importante lembrar que o fato de um aluno saber ler e escrever, o que ocorre quando ele é alfabetizado, não é suficiente para que ele seja considerado um leitor fluente, isto é, pode ser que ele não tenha capacidades de utilizar estratégias e mobilizar recursos necessários para compreender o que está lendo e exercite uma leitura mecânica.

Ao se considerar a dinâmica de propagação das informações atualmente, vê-se que, na maioria das vezes, o contato com a leitura é feito de maneira rápida e fragmentada. Isso requer atenção e o professor precisa estar apto para desenvolver nos alunos a criticidade em relação ao que se lê.

As atividades desta coleção foram desenvolvidas com vistas à prática da competência leitora, estimulando os alunos com fontes de informação diversificadas, com o objetivo de auxiliá-los na compreensão dos textos de maneira crítica e reflexiva. Além disso, as atividades também visam à valorização das experiências pessoais e buscam a promoção da autonomia, tornando-os sujeitos mais ativos em seu próprio aprendizado.

### Leitura e prática da escrita

Na esteira do desenvolvimento da competência leitora, a escrita também deve ser constantemente encorajada, já que a produção de textos estimula os alunos a despertarem sua visão crítica e a refletirem sobre aquilo que estão escrevendo, decifrando ainda mais os conteúdos.

Com base nisso, todos os capítulos desta coleção contam com atividades que impulsionam a leitura e a prática da escrita por meio da elaboração de enunciados de problemas, do desenvolvimento de relatórios sobre pesquisas, da produção de argumentos convincentes sobre observações matemáticas, da síntese de conclusões, entre outros. Assim, espera-se que o aluno, com o auxílio da Matemática, compreenda a importância da leitura e da escrita em sua formação.

## Tecnologia e educação

A velocidade com que os avanços tecnológicos acontecem no cerne da sociedade contemporânea coloca em discussão a prática docente: como reorientar o trabalho na sala de aula para acompanhar as novas gerações?

As Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) permitem que qualquer tipo de informação seja processada em tempo real e a comunicação seja instantânea, independente das distâncias geográficas. Devemos considerar que a cultura digital tem provocado mudanças sociais e que os jovens

> [...] têm se engajado cada vez mais como protagonistas da cultura digital, envolvendo-se diretamente em novas formas de interação multimidiática e multimodal e de atuação social em rede, que se realizam de modo cada vez mais ágil. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão Final. Brasília: MEC, 2017. p. 59. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 16 set. 2018.

A partir desse contexto e sob a perspectiva de que o professor deve formar-se continuamente em busca de novos métodos de ensino, as TICs apresentam-se como uma possibilidade enriquecedora para o trabalho do professor.

> [...] é preciso que se construa uma nova concepção de uso, integração e apropriação das tecnologias e mídias digitais que vá além da utilização instrumental, marginal, disjunta e fragmentada – uma concepção que (re)ligue, que articule os recursos tecnológicos digitais aos conteúdos escolares, uma concepção que capture as linguagens implícitas nas mídias que estão presentes nos recursos tecnológicos digitais, uma concepção que incorpore a necessidade do letramento digital. [...]

LUIZ, Learcino dos Santos; SANTOS, Taís Wojciechowski; SÁ, Ricardo Antunes de. A integração das tecnologias e mídias digitais no processo de construção do conhecimento escolar. In: MASCHIO, Elaine Cátia Falcade; SOARES, Eliana Maria do Sacramento (Org.). **Cultura escolar, tecnologias e práticas**: perspectivas históricas e contemporâneas. Curitiba: Appris, 2017. E-Book.

Contudo, não podemos desconsiderar o fato de que o envolvimento inato dos jovens na cultura digital pode favorecer atitudes que coloquem em risco o trabalho com as TICs, se não for bem planejado e orientado. A busca por respostas imediatas e avaliações superficiais de informações são exemplos dessas atitudes, que devem ser reorientadas pelo professor. Pensando nisso, indicamos, a seguir, algumas possibilidades de abordagem com as tecnologias no ensino.

- **Tecnologia como recurso didático**: com o auxílio de um retroprojetor ou de um monitor, é possível tornar a aula mais dinâmica apresentando animações, vídeos, infográficos, entre outros recursos audiovisuais que facilitem a visualização e compreensão de conceitos, propriedades, construções ou procedimentos.
- **Trabalho extraclasse utilizando tecnologias**: essa abordagem propõe que os alunos utilizem as TICs como recurso para o desenvolvimento de algum tipo de projeto ou pesquisa realizados fora da sala de aula. A mediação e a orientação do professor devem ser precisas e detalhadas, principalmente se os alunos não estiverem acostumados a realizar trabalhos como estes que exigem mais autonomia. O tópico **A Pesquisa Escolar** deste manual pode auxiliar nesse processo.
- **Laboratório de informática**: caso haja esse espaço na escola, ele precisa ser previamente preparado pelo professor para que sua utilização seja adequa-

da. É preciso avaliar se os computadores dispõem de determinados recursos que serão utilizados, como internet e *softwares*. As possibilidades de trabalho nesse espaço são inúmeras: *softwares* de geometria dinâmica, que possibilitam construções e verificação de propriedades; planilhas eletrônicas, para organizar dados, construir gráficos e obter resultados a partir de fórmulas e funções; visitas virtuais a exposições e museus, por exemplo; utilização de simuladores; realização de pesquisas etc.

Ressaltamos que as tecnologias não diminuem o papel da escola e do professor na formação dos alunos, mas constituem mais um meio para o processo de construção do conhecimento e, por conta disso, entendemos que seu uso potencializa a interação entre professor, aluno e conhecimento.

Tendo em vista que os alunos lidam com o uso das tecnologias com mais facilidade, por estarem inseridos desde muito cedo nesse mundo, a troca de experiências com eles, por parte do professor, pode facilitar o enfrentamento do desafio de estar atento às constantes mudanças e aos acontecimentos em diversas áreas do conhecimento.

Além disso, ao utilizar as TICs, o professor muitas vezes precisa lidar com alunos em diferentes situações: alguns têm acesso às inovações tecnológicas e domínio de seu uso, e outros têm pouco ou nenhum contato com o universo digital. Nesse sentido, concordamos que:

> Assim como a tecnologia deve estar a serviço da sociedade no intuito de atender as necessidades humanas e reduzir as diferenças sociais, seu uso na educação deve ter o mesmo fim, em especial proporcionar condições aos mais necessitados de romper os limites impostos pela pobreza.

BATISTA, Sandra Aparecida; FREITAS, Carlos Cesar G. O uso da tecnologia na educação: um debate a partir da alternativa da tecnologia social. **Revista Tecnologia e Sociedade**, Curitiba, v. 14, n. 30, p. 123, jan./abr. 2018. Disponível em: <https://revistas.utfpr.edu.br/rts/article/view/5784/4723>. Acesso em: 29 set. 2018.

Para enfrentar mais esse desafio, o professor deve conhecer a realidade socioeconômica dos alunos, avaliando quais tecnologias estão disponíveis em seu cotidiano, por quais meios conseguem acessar a internet, como se comunicam com outras pessoas, entre outras. Esse conhecimento dará subsídios para orientar seu trabalho com as TICs, ampliando o repertório dos alunos que já lidam bem com esses recursos e dando oportunidades de inserção na cultura digital para aqueles que não têm tanto contato.

## Recursos didáticos

Nesta coleção, a construção dos conceitos é trabalhada de diversas maneiras, como por meio da resolução e da elaboração de problemas relacionados à realidade do aluno, à matemática ou outra área de conhecimento; por intermédio da utilização de recursos tecnológicos, como calculadoras e computadores, entre outras maneiras. A seguir, detalhamos propostas metodológicas para a utilização do livro e de outros recursos didáticos.

## Resolução de problemas

Um dos objetivos de educar é contribuir para o desenvolvimento da autonomia intelectual do aluno. É preciso que ele reconheça o saber escolar como uma forma de compreender e participar do mundo em que vive.

A capacidade de enfrentar os desafios do dia a dia, de superar obstáculos e de resolver problemas é inerente à natureza humana. Assim, diariamente somos surpreendidos por problemas a serem resolvidos em diferentes âmbitos. O matemático húngaro George Polya (1887-1985) afirmava que:

> [...] A maior parte de nosso pensamento consciente é sobre problemas; quando não nos entregamos à simples contemplação, ou devaneios, nossos pensamentos estão voltados para algum fim.
>
> [...]

POLYA, George. Sobre a resolução de problemas de matemática na *high school*. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues; Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 2.

Entendemos problema como algo que precisamos resolver, contudo não sabemos de antemão como fazer. O problema pode ser um ponto de partida para a formação de conceitos, antes de sua formalização, e a ação do aluno é tomada como foco: ele deve interpretar o enunciado, selecionar e refletir sobre os dados e criar uma ou mais estratégias para resolvê-lo. Nesse processo, esperamos que desenvolva espírito investigativo, raciocínio lógico e pensamento crítico, competências essenciais para desenvolver o seu papel como cidadão.

Diferentes estratégias sobre ensinar Matemática por meio da resolução de problemas são defendidas na área de Educação Matemática. Onuchic (1999) considera que:

> [...] O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com estes símbolos).
>
> [...]

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectiva. São Paulo: Editora Unesp, 1999. p. 207.

Portanto, concordamos que a Resolução de problemas deve ser considerada na prática pedagógica do professor, e o livro do aluno reúne diversos exemplos que podem ser utilizados como recurso dessa prática.

De acordo com Onuchic (1999), uma proposta para a aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas pode ser desenvolvida a partir de alguns pressupostos:

- Formação de grupos: os alunos são incentivados a trabalhar coletivamente em prol de um objetivo comum: a solução do problema. Eles têm a oportunidade de aprender uns com os outros em um processo cooperativo.
- O papel do professor: tem a função principal de mediador, propondo questões desafiadoras e instigando os alunos a se ajudarem para enfrentar os obstáculos.
- Resultados na lousa: são anotados todos os resultados na lousa, inclusive os incompletos ou errados.
- Plenária: cada grupo defende seu ponto de vista, de acordo com a resolução e o resultado obtidos.
- Análise dos resultados: abordam-se dificuldades enfrentadas pelos alunos e, se necessário, propõem-se novas explorações.
- Consenso: a turma busca obter um consenso sobre o resultado esperado.
- Formalização: junto com os alunos, o professor sintetiza o objetivo da aprendizagem, por meio dos conceitos, das definições, propriedades e demonstrações envolvidos.

O aluno, ao resolver problemas, torna-se um participante ativo de sua aprendizagem, inserindo-se em um contexto em que o uso da Matemática ocorre em um movimento que possibilita análises, discussões, conjecturas, construção de conceitos e formulação de ideias. É com esse movimento que ele se torna capaz de compreender o papel da Matemática no mundo.

## Atividades com jogos

Outro recurso didático de grande importância são as atividades com jogos, pois elas favorecem o desenvolvimento do conhecimento matemático do aluno de maneira lúdica e descontraída. Os jogos configuram uma ótima alternativa para estimular a aprendizagem, desenvolvendo habilidades como autoconfiança, organização, concentração, atenção, senso cooperativo e raciocínio lógico-dedutivo. Qualidades, inclusive, importantes não apenas na aprendizagem da Matemática, mas também na de outras áreas do conhecimento.

Os jogos são um recurso pedagógico eficaz na construção do conhecimento matemático, cujo objetivo principal é fazer o aluno gostar de aprender Matemática, despertando-lhe o interesse e mudando a rotina das aulas. Eles devem ser utilizados como um recurso facilitador para auxiliar nas dificuldades que o aluno porventura apresente em algum conteúdo.

Existe uma correspondência direta dos jogos com a Matemática, pois ambos contam com regras, instruções, definições, operações, deduções, desenvolvimento, utilização de normas e novos conhecimentos. Usar os jogos como recurso didático é uma oportunidade de vincular a teoria à prática, tendo em vista que eles podem ser trabalhados em sala como uma extensão do andamento habitual da aula.

Para desenvolver uma atividade com jogos em sala de aula, o professor deve elaborar um plano de ação que possibilite a aprendizagem de conceitos matemáticos e culturais de uma forma geral. É necessário reservar um horário no planejamento que permita a exploração de todo o potencial dos jogos, métodos de solução, registros e discussões sobre os diversos rumos que poderão surgir.

Nesse tipo de atividade, a função do professor é acompanhar a maneira de jogar dos alunos, interferindo sempre que necessário e levantando questões relevantes, de forma a auxiliar na condução do jogo.

O trabalho com jogos propicia, entre outros, os seguintes benefícios:

- o professor detecta com mais facilidade se os alunos apresentam dificuldades;
- o aluno é levado a aperfeiçoar e criar novas estratégias em busca de obter um bom desempenho;
- o aluno desenvolve habilidades ao expressar suas ideias e ao formular questões. Nessa prática, ele potencializa a autonomia de seu pensamento, tornando-se mais independente das interferências do professor;
- o erro tem papel importante, pois o aluno busca uma nova solução, investigando, explorando e descobrindo por si próprio.

Nas **orientações para o professor** página a página da segunda parte deste manual, há sugestões de jogos referentes a alguns capítulos, os quais podem ser propostos pelo professor de acordo com o seu planejamento.

## Recursos tecnológicos

Nas últimas décadas, o impacto das novas tecnologias tem provocado mudanças significativas na vida das pessoas, tanto na área da educação quanto em outros segmentos.

Em um supermercado, por exemplo, há um terminal que informa o preço de um produto com rapidez e eficiência ao ler o código de barras. De maneira semelhante, a utilização de computadores, *smartphones* ou outros dispositivos conectados à internet possibilita o envio e o recebimento de mensagens, o ensino a distância, a obtenção de informações bancárias e a realização de pesquisas com agilidade.

No dia a dia, o aluno está estreitamente ligado às tecnologias, que evoluem rapidamente e se tornam cada vez mais acessíveis. Nesse contexto, é fundamental que o professor repense sua prática para fornecer as ferramentas motivadoras ao aluno e, dessa forma, ajude-o a construir conhecimentos. Além disso, o professor deve buscar novas formas de ação que permitam que o aluno lide, por exemplo, com o computador e com a calculadora.

O uso da calculadora, proposto em diversos momentos no livro do alunos, é um recurso útil na verificação de resultados e na correção de possíveis erros, favorecendo também a percepção de regularidades matemáticas e o desenvolvimento de estratégias de resolução de situações-problema.

Na seção **Explorando tecnologias**, sugerimos a utilização de uma planilha eletrônica e um *software* livre de geometria dinâmica para construções geométricas, percepção de propriedades, organização de dados, construção de gráficos, entre outras tarefas. O uso desses recursos tecnológicos, por vezes, torna os processos mais ágeis, se comparado aos cálculos e construções realizados manualmente e, quando utilizados em sala de aula, podem oferecer uma contribuição para a aprendizagem, por se aproximar da realidade extraclasse dos alunos, onde eles têm contato com a televisão, o computador, o *smartphone*, a internet, isto é, uma realidade com recursos diferentes daqueles geralmente encontrados no ambiente escolar.

### Cálculo mental, aproximações e estimativas

Para determinar se um móvel cabe em determinado local, estipular a medida da distância percorrida de casa até a escola ou trabalho, saber se a quantia em dinheiro é suficiente para comprar determinados itens e em muitas outras atividades rotineiras, nossas habilidades de realizar estimativas, aproximações e cálculos mentais são colocadas à prova.

As aulas de Matemática configuram um ambiente propício para desenvolver e aprimorar tais habilidades, desde que o caminho adotado auxilie os alunos a desenvolverem técnicas para tais fins.

Ao realizar uma subtração de números naturais mentalmente, por exemplo, se a estratégia utilizada for uma reprodução do algoritmo escrito, provavelmente, o cálculo exigirá muito da memória, causando possíveis erros no resultado. Então, é necessário criar estratégias baseadas nas propriedades das operações que facilitem esse processo mental.

Dessa forma, no livro do aluno, em diversos momentos, encorajamos os estudantes a realizar estimativas, aproximações e cálculo mental, tanto a partir de estratégias pessoais, quanto por meio de técnicas que podem ser entendidas como mais adequadas para cada situação.

## A pesquisa escolar

De modo geral, a pesquisa no ambiente escolar não é algo tão intuitivo e pode causar certa frustração no professor, caso atribua essa tarefa aos alunos e receba resultados inconsistentes. Contudo, o ato de realizar pesquisas é fundamental em todas as áreas do conhecimento, pois ajuda a desenvolver habilidades como autonomia, capacidade de análise e síntese, e leitura.

Nesta coleção, propomos a realização de pesquisas em alguns momentos e, a seguir, apresentamos algumas possibilidades de condução que podem contribuir para que os alunos realizem essa tarefa e se familiarizem cada vez mais com o processo de investigação.

### Definição da pergunta de investigação

Primeiro, é necessário definir o tema da pesquisa e, então, propor uma pergunta ou situação-problema de investigação abrangente, que desperte o interesse dos alunos. Em determinados momentos da coleção, pontuamos algumas sugestões de temas, contudo fica a critério do professor e dos alunos outras escolhas, de acordo com as especificidades de cada turma. Nesse momento, permita que os alunos se familiarizem com o tema, conversando e apresentando fotos, vídeos e outros materiais que possam aguçar a curiosidade deles.

## Cronograma

Se o trabalho for em grupos, defina a organização da turma e estipule um prazo final para a divulgação da pesquisa. Organize um cronograma de acordo com as etapas seguintes para acompanhar o passo a passo e orientar o trabalho, sugerindo ideias e propondo outras perguntas para nortear a pesquisa.

## Escolha das fontes

A próxima etapa é definir, com os alunos, as fontes que serão utilizadas para obter as informações, como livros, jornais, revistas, *sites*, dicionários, fotografias, filmes, músicas etc. É provável que eles recorram à internet como fonte de pesquisa, pela praticidade e disponibilidade de conteúdos. Nesse caso, devem ser orientados a escolher *sites* confiáveis, que informem as origens dos dados e os respectivos autores. Outra sugestão é buscarem informações em *sites* de instituições reconhecidas e governamentais.

Uma forma de fazer com que os alunos avaliem a integridade de um *site* pesquisado é realizar alguns questionamentos, como: “Por que você escolheu esse *site*?”; ou “O autor ou instituição tem propriedade para disponibilizar informações sobre o tema pesquisado?”; ou ainda “Qual o interesse do *site* em divulgar as informações?”.

## Coleta e análise dos dados

Nessa etapa, os alunos devem se engajar em coletar e selecionar, a partir de diversas fontes, as informações mais apropriadas para responder a pergunta de investigação. A troca de experiências e cooperação entre os alunos é fundamental.

Além dos textos, é valioso ressaltar a importância de buscar também imagens, fotografias, mapas, gráficos, tabelas, infográficos, entre outros recursos que possam enriquecer a divulgação. Após a coleta, é preciso analisar e interpretar as informações, para que sejam entendidas de maneira crítica e compreendidas no contexto estabelecido. Esse processo deve envolver o conhecimento prévio dos alunos, os conteúdos estudados e as problemáticas propostas no início da pesquisa.

Caso a pesquisa seja realizada em grupos, sugerimos que essa etapa seja feita em conjunto, de modo que os alunos tomem conhecimento sobre as informações coletadas pelos colegas e cheguem a um consenso sobre alguns pontos.

### Produção

Essa fase requer a definição da ordem em que os tópicos serão apresentados. Nesse momento, é possível criar um esboço do texto e esquemas com as informações principais pesquisadas.

Em seguida, inicia-se o processo de produção, que pode variar de acordo com o produto final da pesquisa. Se for um trabalho escrito, as partes do texto podem ser distribuídas entre os membros do grupo, ou o texto pode ser produzido de forma integral de modo colaborativo. Outras possibilidades podem ser seminários, cartazes, *slides*. É importante ressaltar que os textos devem ser elaborados pelos alunos e, caso haja alguma citação, deve ser referenciada.

### Divulgação

Para que a experiência se torne mais enriquecedora, é fundamental que os grupos troquem informações sobre as etapas e conclusões a que chegaram. Cada formato de trabalho tem suas particularidades, sendo importante definir um produto final que:

> [...] pode ser um seminário, um vídeo, uma publicação coletiva, um texto escrito para ser lido na classe... Seja qual for a escolha, o fundamental é ampliar o público. Por dois motivos: primeiro, como forma de incentivar a preocupação com os propósitos da pesquisa e a forma como ela será comunicada. Segundo, para que a pesquisa cumpra verdadeiramente sua função. Se na sociedade a meta de uma investigação é disseminar informações, não faz sentido que na escola ela se transforme em um contato restrito entre aluno e professor. [...]

BIBIANO, Bianca; MARTINS, Ana Rita. Busca certeira: como selecionar *sites* confiáveis. **Nova Escola**. São Paulo, Fundação Lemonn, 1 dez. 2008. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/2563/busca-certeira-como-selecionar-sites-confiaveis>. Acesso em: 13 set. 2018.

Independente do produto final, é necessário orientar os alunos quanto à postura em cada um dos casos. Uma apresentação oral, por exemplo, exige postura, entonação de voz, roteiro e segurança na fala. Já um trabalho escrito precisa incluir um texto com introdução, desenvolvimento e conclusão, além de uma capa com os nomes dos integrantes, da escola, da turma em que estudam, entre outros elementos.

## Relações entre componentes curriculares

A transversalidade, que, no contexto dos saberes, considera as inter-relações entre os objetos do conhecimento, é o ponto de partida para se pensar as relações entre os componentes curriculares. O conhecimento passa a ser concebido em sua essência dinâmica, deixando de ser algo estanque, o que demanda nova postura de professores e alunos diante de uma proposta de ensino que possibilita a formulação de um saber crítico-reflexivo com base no diálogo entre os conteúdos dos diferentes componentes.

Com relação a isso, as etapas da Educação Básica necessitam ter suas aprendizagens essenciais asseguradas de modo complementar pela BNCC e pelos currículos, que devem envolver, entre outros elementos, a participação da família e da comunidade. Uma maneira de alcançar tais objetivos é seguir alguns procedimentos de cooperação, como ações transversais que tornem a aprendizagem mais efetiva, e em que os alunos alcancem uma compreensão mais abrangente da realidade.

O trabalho que associa diferentes componentes curriculares requer condutas que instiguem a busca pelo conhecimento e sejam favoráveis aos diferentes atores do ambiente escolar, como alunos, professores, comunidade e a própria escola. Envolver-se com o processo de ensino e aprendizagem é uma maneira de os alunos serem agentes motivadores da cooperação entre professores e auxiliarem no fortalecimento das relações entre os diferentes componentes curriculares. Ademais, eles aprendem a trabalhar coletivamente, privilegiando a interação com os colegas e favorecendo o desenvolvimento da capacidade de argumentar e organizar as informações.

Um modo de concretizar propostas de aprendizagem transversal é por meio de projetos investigativos de trabalho ou de pesquisa, por exemplo. Geralmente, são atividades que requisitam etapas e, por conta disso, provocam situações de aprendizagem essencialmente dinâmicas, com atitudes de reflexão, questionamento e argumentação, já que exigem planejamento, levantamento de hipóteses, coletas de dados, análises, deduções e conclusões.

São numerosas, portanto, as contribuições que as atividades que relacionam diferentes componentes curriculares trazem aos alunos, já que, por meio delas, é possível estabelecer uma convivência de parceria e colaboração tanto com a equipe escolar quanto com a comunidade em que se localiza a escola. Nesta coleção, os diálogos entre a Matemática e os demais componentes curriculares são observados em diversos momentos, e é importante salientar que muitas dessas possibilidades de trabalho podem ser conferidas também nas orientações ao professor.

## A avaliação

### A importância da avaliação

A avaliação deve ser considerada um diálogo perene entre professor e aluno, pois assinala de modo concreto uma resposta à prática do professor e ao processo de ensino-aprendizagem. É, portanto, um instrumento do professor para diagnosticar, analisar, sistematizar e orientar suas ações pedagógicas, pois aponta os reais problemas na aprendizagem e colabora para a evolução do aluno. Contudo, deve sempre haver a clareza de que o processo deve ser contínuo e não se restringir a resultados isolados.

Por ter natureza dialógica, tendo em vista que professores e alunos são participantes do processo, é necessário que os erros e acertos façam sentido para a aprendizagem de ambos. Assim, a avaliação configura-se como um instrumento de coleta de informações que devem ser sistematizadas e interpretadas pelos professores.

Nesse sentido, a avaliação pode ser uma das ferramentas de sustentação do trabalho do professor, de modo a auxiliá-lo nos ajustes necessários para que seu fazer didático produza desafios que se transformem em aprendizagem, pois é um espaço ideal para a mediação entre as alternativas de ensino do professor e os percursos de aprendizagem dos alunos.

Durante muito tempo, a maneira de avaliação predominante e quase exclusiva nas instituições escolares era por meio de provas escritas que partiam de um ensino homogêneo e linear, sem considerar as particularidades de cada aluno no processo de aprendizagem. Já em uma aprendizagem heterogênea e não linear, deve-se considerar uma avaliação formativa, por valorizar tanto o processo de aprendizagem quanto aquilo que se aprende, tornando a prática pedagógica reflexiva e transformadora.

Uma maneira de garantir o dialogismo do processo e assegurar que a avaliação não se torne uma forma de seleção e exclusão é apresentar e discutir os critérios de avaliação com os alunos, para que eles saibam como e sob quais aspectos serão avaliados.

É de suma importância, também, que o resultado da avaliação seja devolvido e revisado com os alunos, de modo que percebam o ensino como um processo e revejam os motivos de seus erros para avançar na aprendizagem. Por isso, é fundamental que o planejamento do processo de avaliação contenha também atividades que valorizem diferentes tipos de conhecimento, como exercícios objetivos, dissertativos, trabalhos em grupo, debates, entre outros.

A avaliação, portanto, passa a acompanhar a aprendizagem do aluno de maneira formativa e continuada, e possibilita que o professor reveja sua prática pedagógica.

## A autoavaliação

A autoavaliação é uma ferramenta que permite aos alunos e aos professores avaliarem seu desempenho em sala de aula, sendo, portanto, fundamental para a democratização da avaliação. É um modo mais autônomo de o aluno enxergar a aprendizagem, pois não se concentra no crivo do professor.

Além disso, ao demandar que os alunos revejam suas metas e averiguem suas estratégias, o professor também passa a refletir sobre a sua atuação nos processos didáticos, de maneira a adequar suas posturas às necessidades originadas.

Nesta coleção, a seção **Explorando o que estudei** é um espaço para que o aluno execute uma autoavaliação, já que incita a reflexão sobre os principais conceitos tratados no capítulo. Da mesma maneira, a seção conduz o professor a uma investigação dos conceitos compreendidos pelos alunos e daqueles que, por quaisquer motivos, necessitam ser revistos com algum tratamento diferente.

# Distribuição de conteúdos

| | Capítulo | Tópicos | Objetos de conhecimento | Habilidades |
|---|---|---|---|---|
| **1º Bimestre** | 1<br>**Potências e raízes** | • Potenciação<br>• Radiciação<br>• Potências com expoente fracionário<br>• Propriedades dos radicais<br>• Simplificação de radicais<br>• Operações com radicais | • Potências com expoentes negativos e fracionários. ① | **EF09MA03**: Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários. |
| | | | • Números reais: notação científica e problemas. ② | **EF09MA04**: Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações. |
| | 2<br>**Equações do 2º grau e sistemas de equações** | • Equações do 2º grau com uma incógnita<br>• Resolução de equações do 2º grau<br>• Estudando as raízes de equações do 2º grau<br>• Sistema de duas equações com duas incógnitas | • Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis. ③ | **EF09MA09**: Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau. |
| | | | • Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações. ④ | |
| | 3<br>**Matemática financeira** | • A Matemática financeira<br>• Porcentagem<br>• Acréscimos e descontos sucessivos<br>• Juro | • Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos. ⑤ | **EF09MA05**: Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira. |

① Potenciação e radiciação. (8º ano)

② Notação científica. (8º ano)

③ Valor numérico de expressões algébricas. (8º ano)

④ Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano. (8º ano)

③ e ④ Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. (8º ano)

⑤ Porcentagens. (8º ano)

| | Capítulo | Tópicos | Objetos de conhecimento | Habilidades |
|---|---|---|---|---|
| **2º Bimestre** | 4<br>**Razão e proporção** | • Razão<br>• Proporção<br>• Divisão em partes proporcionais<br>• Regra de três simples<br>• Regra de três composta | • Razão entre grandezas de espécies diferentes. ⑥ | **EF09MA07**: Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica. |
| | | | • Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. ⑦ | **EF09MA08**: Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas. |

⑥ Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano. (8º ano)

⑥ e ⑦ Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais. (8º ano)

**2º Bimestre**

| Capítulo | Tópicos | Objetos de conhecimento | Habilidades |
|---|---|---|---|
| **5** **Noções de função e função afim** | - A noção de função<br>- Representação gráfica de uma função de variável real<br>- Função afim | - Funções: representações numérica, algébrica e gráfica. ⑧ | **EF09MA06**: Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. |

⑧ Valor numérico de expressões algébricas. (8º ano)
Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano. (8º ano)
Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano. (8º ano)
Sequências recursivas e não recursivas. (8º ano)

| Capítulo | Tópicos | Objetos de conhecimento | Habilidades |
|---|---|---|---|
| **6** **Função quadrática** | - Função quadrática | - Funções: representações numérica, algébrica e gráfica. ⑨ | **EF09MA06**: Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. |

⑨ Valor numérico de expressões algébricas. (8º ano)
Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano. (8º ano)
Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano. (8º ano)
Sequências recursivas e não recursivas. (8º ano)

**3º Bimestre**

| Capítulo | Tópicos | Objetos de conhecimento | Habilidades |
|---|---|---|---|
| **7** **Medidas de comprimento e medidas em informática** | - Medidas de comprimento<br>- Unidades de medida de capacidade de armazenamento<br>- Outras unidades de medida em informática | - Números reais: notação científica e problemas. ⑩ | **EF09MA04**: Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações. |
| | | - Unidades de medida para medir distâncias muito grandes e muito pequenas. ⑪ | **EF09MA18**: Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros. |
| | | - Unidades de medida utilizadas na informática. ⑫ | |

⑩, ⑪ e ⑫ Notação científica. (8º ano)

⑫ Potenciação e radiciação. (8º ano)

3º Bimestre

| | | | |
|---|---|---|---|
| **8**<br>**Semelhança** | • Ângulos opostos pelo vértice<br>• Segmentos proporcionais<br>• Semelhança de figuras<br>• Homotetia<br>• Triângulos semelhantes | • Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal. ⑬ | **EF09MA10**: Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. |
| | | • Semelhança de triângulos. ⑭ | **EF09MA12**: Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. |
| | | • Relações métricas no triângulo retângulo. ⑮ | **EF09MA14**: Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. |
| | | • Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração. ⑯ | |
| | | • Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais. ⑰ | |

⑮ e ⑰ Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais. (8º ano)

⑬, ⑭ e ⑯ Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros. (8º ano)

| | | | |
|---|---|---|---|
| **9**<br>**Relações no triângulo retângulo** | • Relações métricas no triângulo retângulo<br>• Teorema de Pitágoras<br>• Relações trigonométricas no triângulo retângulo<br>• Ângulos notáveis<br>• Tabela trigonométrica | • Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta. ⑱<br>• Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica. ⑲ | **EF09MA01**: Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). |
| | | | **EF09MA02**: Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica. |
| | | • Relações métricas no triângulo retângulo. ⑳<br>• Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração. ㉑<br>• Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais. ㉒ | **EF09MA13**: Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. |
| | | | **EF09MA14**: Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. |
| | | • Distância entre pontos no plano cartesiano. ㉓ | **EF09MA16**: Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano. |

㉑ Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros. (8º ano)

㉓ Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano. (8º ano)

⑱ e ⑲ Área do círculo e comprimento de sua circunferência. (8º ano)

⑳ e ㉒ Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais. (8º ano)

**4º Bimestre**

| Capítulo | Tópicos | Objetos de conhecimento | Habilidades |
|---|---|---|---|
| **10**<br>**Estatística e probabilidade** | • Gráficos e tabelas<br>• Média aritmética, moda e mediana<br>• Leitura e interpretação de gráficos e tabelas<br>• Pesquisa amostral<br>• Probabilidade | • Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes. ㉔ | **EF09MA20**: Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos. |
| | | • Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação. ㉕ | **EF09MA21**: Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros. |
| | | • Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos. ㉖ | **EF09MA22**: Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central. |
| | | • Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório. ㉗ | **EF09MA23**: Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas. |

㉔ O princípio multiplicativo da contagem. (8º ano)
Princípio multiplicativo da contagem. (8º ano)
Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral. (8º ano)

㉗ Medidas de tendência central e de dispersão. (8º ano)
Pesquisas censitária ou amostral. (8º ano)
Planejamento e execução de pesquisa amostral. (8º ano)

㉕ e ㉖ Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados. (8º ano)
Organização dos dados de uma variável contínua em classes. (8º ano)

**4º Bimestre**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **11**<br>**Circunferência e círculo** | • A circunferência<br>• Ângulo na circunferência<br>• Medida do comprimento de um arco de circunferência<br>• Medida da área do setor circular<br>• Medida da área da coroa circular | • Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo. ㉘ | **EF09MA11**: Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *software* de geometria dinâmica. |
| | | • Polígonos regulares. ㉙ | **EF09MA15**: Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*. |

㉘ Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais. (8º ano)

㉙ Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. (8º ano)

| | | | |
|---|---|---|---|
| **12**<br>**Figuras geométricas espaciais** | • Relembrando figuras geométricas espaciais<br>• Vistas ortogonais<br>• Representações em perspectiva<br>• Medidas de volume<br>• Medida do volume de cilindros | • Vistas ortogonais de figuras espaciais. | **EF09MA17**: Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva. |
| | | • Volume de prismas e cilindros. ㉚ | **EF09MA19**: Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas. |

㉚ Área de figuras planas. (8º ano)
Área do círculo e comprimento de sua circunferência. (8º ano)
Volume de cilindro reto. (8º ano)
Medidas de capacidade. (8º ano)

# Sugestões de livros e *sites*

## Livros

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de et al. **Práticas de modelagem matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Educação matemática crítica**: reflexões e diálogos. Belo Horizonte: Argvmentvm, 2007.

BARLOW, Michel. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo Carvalho (Org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 3. ed. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRITO, Márcia Regina Ferreira. **Solução de problemas e a matemática escolar**. 2. ed. Campinas: Alínea, 2010.

BUCK INSTITUTE FOR EDUCATION. **Aprendizagem baseada em projetos**: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

CARRAHER, Terezinha Nunes et al. **Na vida dez, na escola zero**. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2015.

CARVALHO, Mercedes. **Problemas? Mas que problemas?!**: estratégias de resolução de problemas em sala de aula. Petrópolis: Vozes, 2005.

CARVALHO, Luiz Mariano et al. (Org.). **História e tecnologia no ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.

CHACÓN, Inés Maria Gómez. **Matemática emocional**: os afetos na aprendizagem da Matemática. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2005.

DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira; SMOLE, Kátia Cristina Stocco. **O conceito de ângulo e o ensino de geometria**. 2. ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 1996.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman; NUNES, Kátia Regina Ashton. **Fazendo arte com a Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

FERREIRA, Mariana Kawall Leal (Org.). **Ideias matemáticas de povos culturalmente distintos**. São Paulo: Global, 2002. (Antropologia e educação).

GARDNER, Howard. **Inteligências múltiplas**: a teoria na prática. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio**. Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Cia. das Letras, 1999.

HUETE, Juan Carlos Sánchez; BRAVO, José Antonio Fernández. **O ensino da Matemática**: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsk. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1 e 2.

______. **Os números**: história de uma grande invenção. Tradução de Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 1989.

KAISER, Fung. **Os números governam sua vida**: a influência velada das probabilidades e da estatística em tudo que você faz. Tradução de Beth Honorato. São Paulo: DVS, 2011.

LITTON, Jonathan; FLINTHAM, Thomas. **O genial mundo da matemática**. Tradução de Claudia Morales. São Paulo: Publifolha, 2013.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010. (Formação de professores).

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem escolar**: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2018.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação histórica no ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

______. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MONTEIRO, Alexandria; POMPEU JR., Geraldo. **A Matemática e os temas transversais**. São Paulo: Moderna, 2001.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Org.). **A formação do professor que ensina Matemática**: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto de método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROONEY, Anne. **A história da Matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SADOVSKY, Patricia. **O ensino de Matemática hoje**: enfoques, sentidos e desafios. Tradução de Antonio de Padua Danesi. São Paulo: Ática, 2007. (Educação em ação).

SELBACH, Simone. **Matemática e didática**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2015. (Coleção Como Bem Ensinar).

SILVA, Circe Mary Silva; FILHO, Moysés Gonçalves Siqueira. **Matemática:** resolução de problemas. Brasília: Liber livro, 2011.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. 2. ed. Campinas: Papirus, 2001. (Perspectivas em Educação Matemática).

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

STROGATZ, Steven Henry. **A Matemática do dia a dia**: transforme o medo dos números em ações eficazes para a sua vida. Tradução de Paulo Polzonoff Jr. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 1995.

______. **Os números governam o mundo**: folclore da Matemática. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). **Avaliação em Matemática**: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2008. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

## Sites

- A Matemática interativa na internet (Imática):
  <www.matematica.br/historia/index_h_top.html>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Ação Local de Estatística Aplicada (Alea):
  <http://alea.ine.pt/index.php?lang=pt>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação (Anped):
  <www.anped.org.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Auge Educacional:
  <www.augeeducacional.com.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Banco Internacional de Objetos Educacionais:
  <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br>. Acesso em: 5 out. 2018.

- Boletim de Educação Matemática (Bolema):
  <www.scielo.br/scielo.php?script=sci_serial&pid=0103-636X&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Boletim online de Educação Matemática (BoEM):
  <www.revistas.udesc.br/index.php/boem>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática:
  <www.ime.usp.br/caem>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Educação Matemática e Tecnologia Informática (Edumatec):
  <www.edumatec.mat.ufrgs.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Geogebra:
  <www.geogebra.org>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE):
  <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa):
  <https://impa.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Khan Academy:
  <https://pt.khanacademy.org>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Klickeducação:
  <https://br.pearson.com/educacao-basica/KlickEducacao.html>. Acesso em: 5 out. 2018.
- M. C. Escher:
  <www.mcescher.com>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Matematica.com.br:
  <www.matematica.com.br/home>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Matematiquês:
  <www.matematiques.com.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Mathema:
  <http://mathema.com.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Ministério da Educação (MEC):
  <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Nova Escola:
  <https://novaescola.org.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Olimpíada Brasileira de Matemática:
  <www.obm.org.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas:
  <www.obmep.org.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Planilha eletrônica:
  <https://pt-br.libreoffice.org>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Portal do professor:
  <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Revista do Professor de Matemática:
  <www.rpm.org.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Sociedade Brasileira de Matemática:
  <www.sbm.org.br>. Acesso em: 5 out. 2018.
- Soroban (ábaco japonês):
  <www.soroban.org>. Acesso em: 5 out. 2018.

## Jogando com as raízes

Sergio L. Filho

|  |  |  |
|---|---|---|
| $\sqrt{9}$ | 3 | $\sqrt[4]{1}$ |
| $\sqrt[4]{16}$ | 2 | 1 |
| $\sqrt{16}$ | 4 | $\sqrt{1}$ |
| $\sqrt{36}$ | 6 | 11 |
| $\sqrt{64}$ | 8 |  |

Referente aos comentários da página **29**.

# Jogando com as raízes

Sergio L. Filho

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt[3]{27}$ | 3 | $\sqrt[3]{0}$ |
| $\sqrt[4]{8}$ | 2 | 4 |
| $\sqrt{25}$ | 5 | 5 |
| $\sqrt{49}$ | 7 | |
| $\sqrt{81}$ | 9 | |

Referente aos comentários da página **29**.

## Jogando com as raízes

Sergio L. Filho

$\sqrt{100}$

$\sqrt{0}$

$\sqrt{144}$

$\sqrt{121}$

$\sqrt[3]{125}$

10

1

0

13

12

$\sqrt{169}$

$\sqrt[3]{64}$

0

Referente aos comentários da página **29**.

# Jogo das equações do 2º grau

|  |  |  |
|---|---|---|
| $x^2 - 4 = 0$ | $x^2 - 64 = 0$ | $x^2 - 16 = 0$ |
| $x^2 - 25 = 0$ | $x^2 - 36 = 0$ | $x^2 - 5x + 6 = 0$ |
| $x^2 - 3x + 2 = 0$ | $x^2 - 4x + 3 = 0$ | $2x^2 = 18$ |
| $x^2 = 25$ | $x^2 = 36$ | $2x^2 = 98$ |
| $x^2 - 3x = 0$ | $3x^2 - 12 = 0$ | $2x^2 = 0$ |

Sergio L. Filho

Referente aos comentários da página **55**.

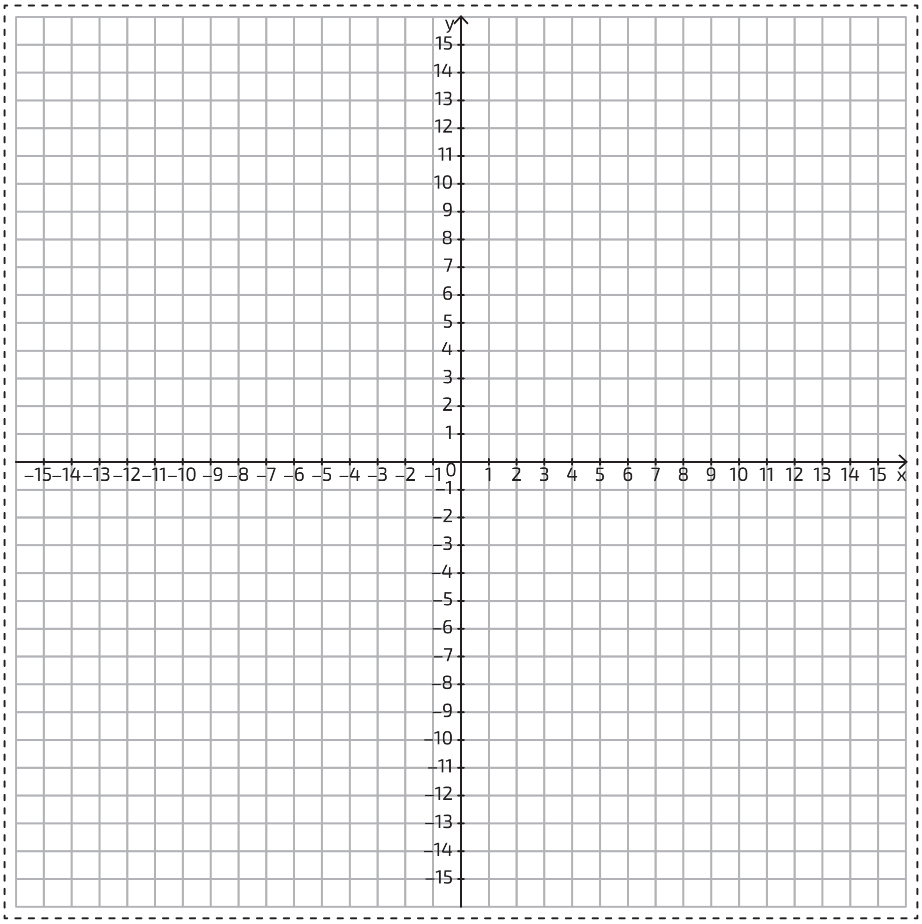
## Jogo das equações do 2º grau

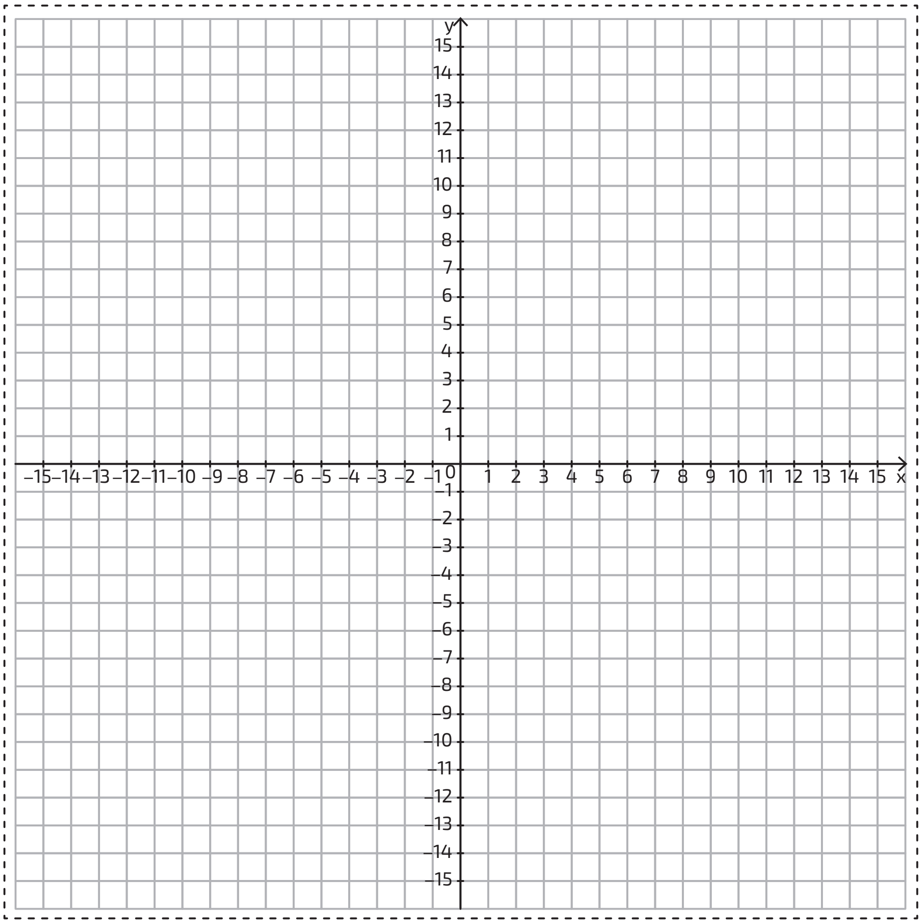
| | | |
|---|---|---|
| +2 ou −2 | +8 ou −8 | +4 ou −4 |
| +5 ou −5 | +6 ou −6 | +2 ou +3 |
| +1 ou +2 | +1 ou +3 | +3 ou −3 |
| +5 ou −5 | +6 ou −6 | +7 ou −7 |
| 0 ou −3 | +2 ou −2 | 0 |

Sergio L. Filho

Referente aos comentários da página **55**.

# Plano cartesiano

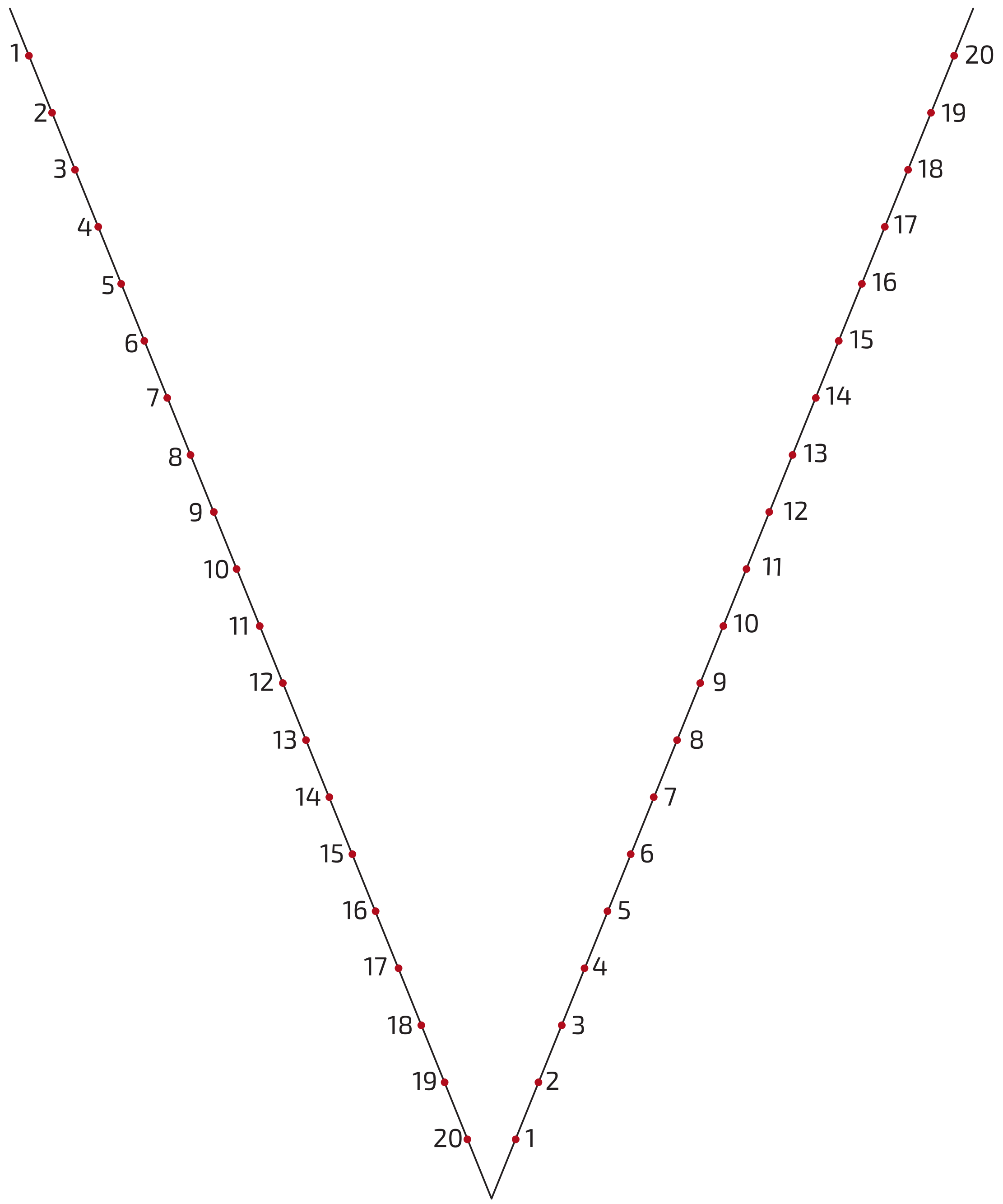




Ilustrações: Sergio L. Filho

Referente aos comentários das páginas **105**, **107** e **201**.

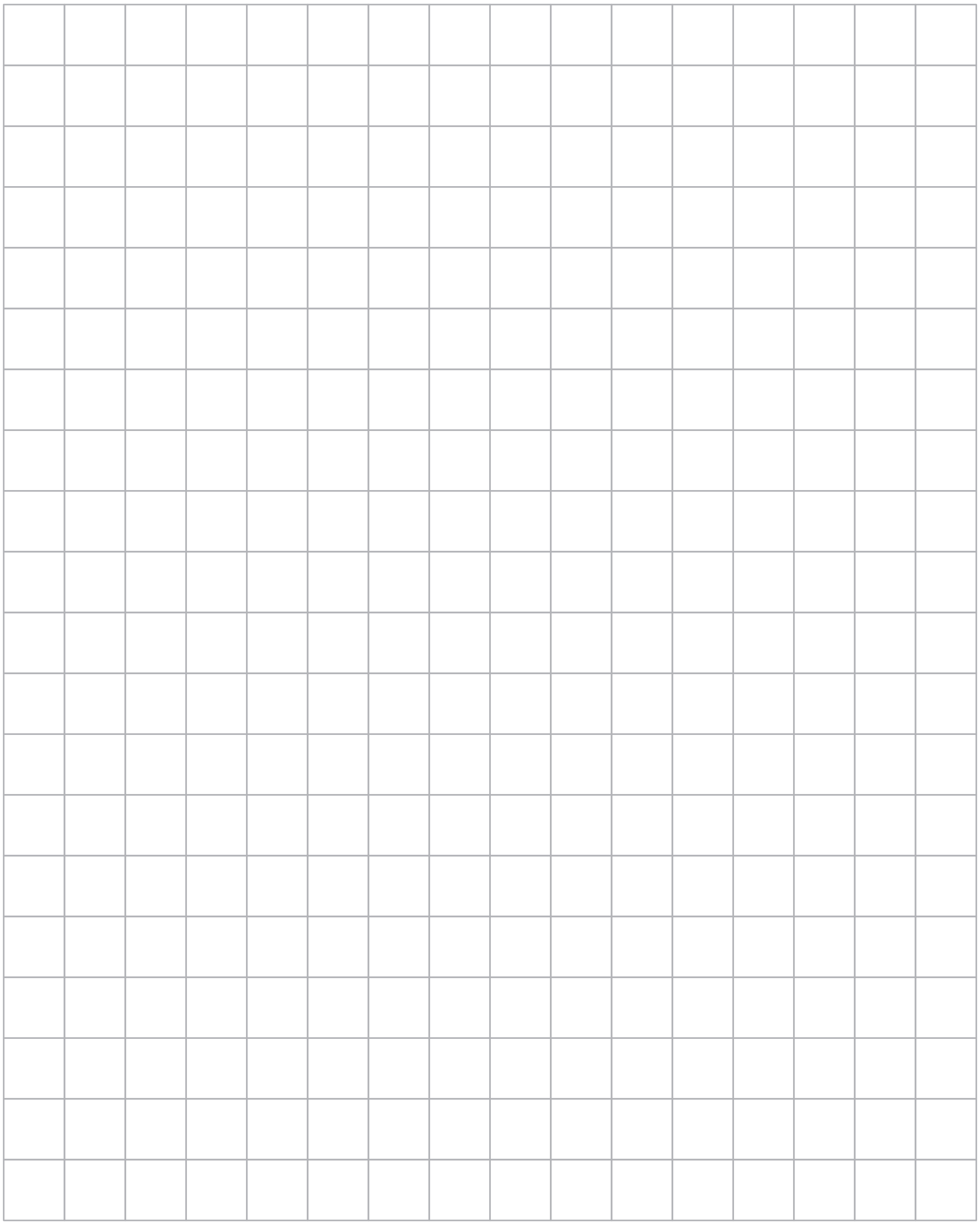
## Parábola com segmentos de reta



Sergio L. Filho

Referente aos comentários da página **131**.

# Malha quadriculada



Sergio L. Filho

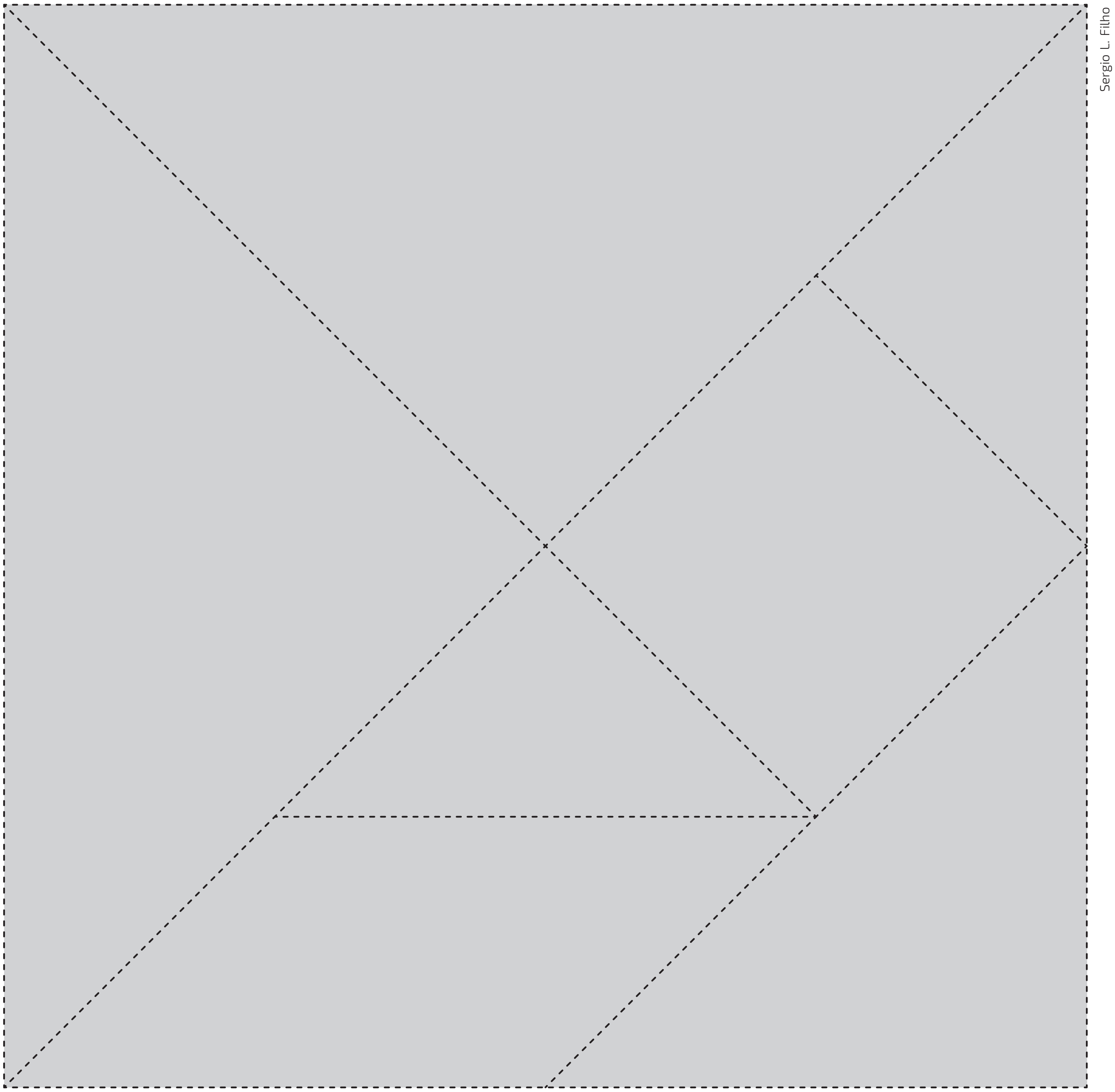
Referente aos comentários das páginas **132**, **177** e **255**.

## Tabela ASCII

| TABELA ASCII | | | |
|---|---|---|---|
| 01000001 | A | 01001110 | N |
| 01000010 | B | 01001111 | O |
| 01000011 | C | 01010000 | P |
| 01000100 | D | 01010001 | Q |
| 01000101 | E | 01010010 | R |
| 01000110 | F | 01010011 | S |
| 01000111 | G | 01010100 | T |
| 01001000 | H | 01010101 | U |
| 01001001 | I | 01010110 | V |
| 01001010 | J | 01010111 | W |
| 01001011 | K | 01011000 | X |
| 01001100 | L | 01011001 | Y |
| 01001101 | M | 01011010 | Z |

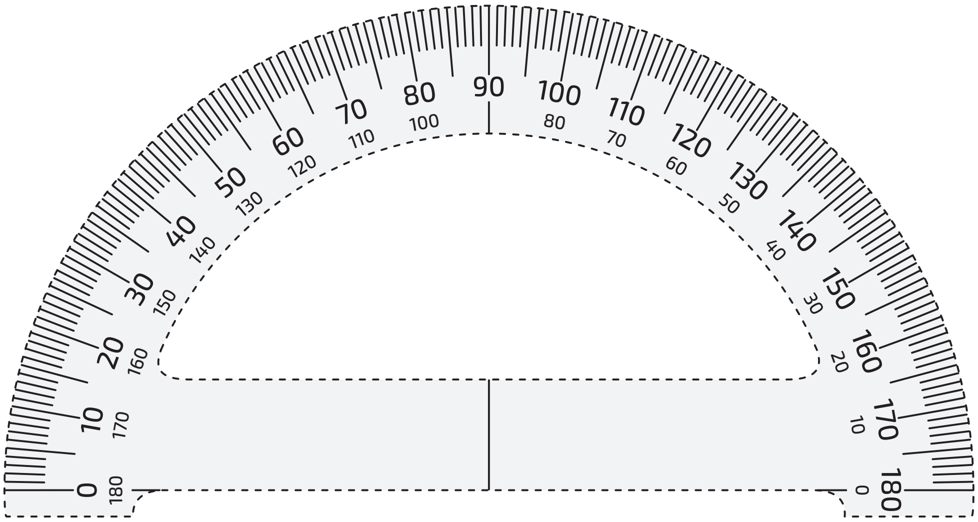
Referente aos comentários da página **155**.

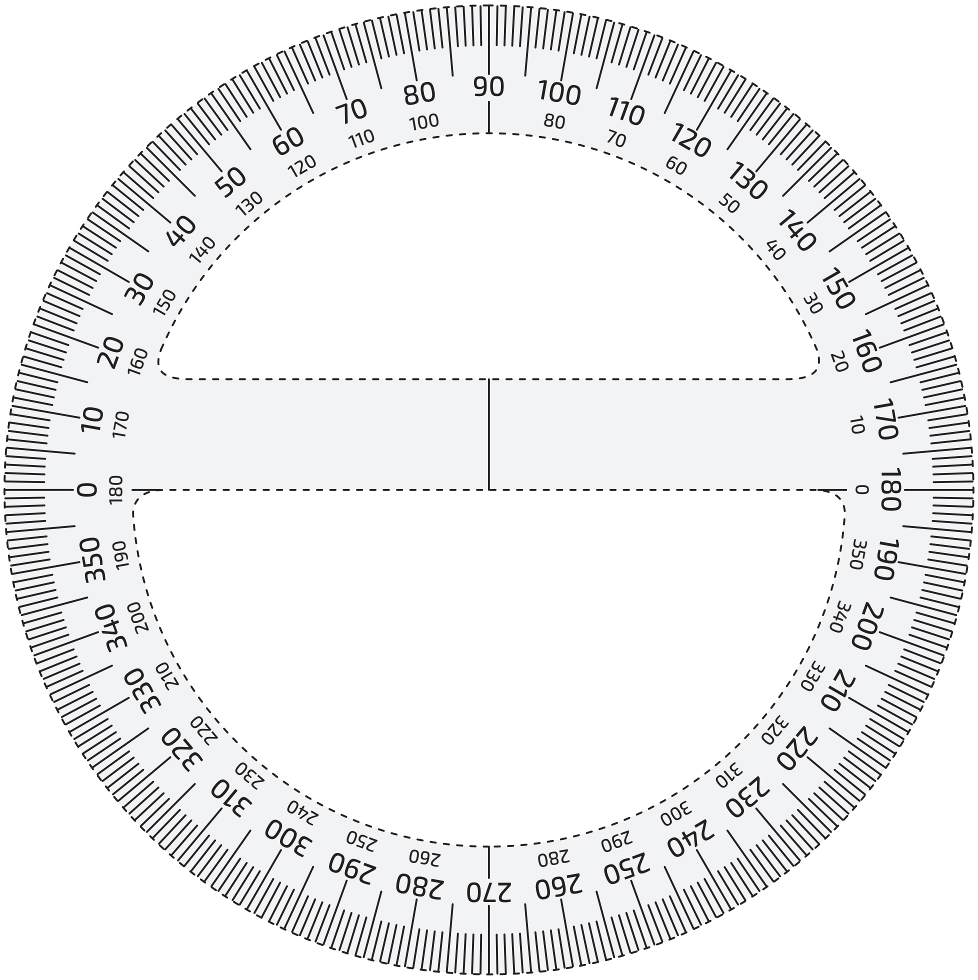
# Tangram



Referente aos comentários da página **180**.

# Transferidor

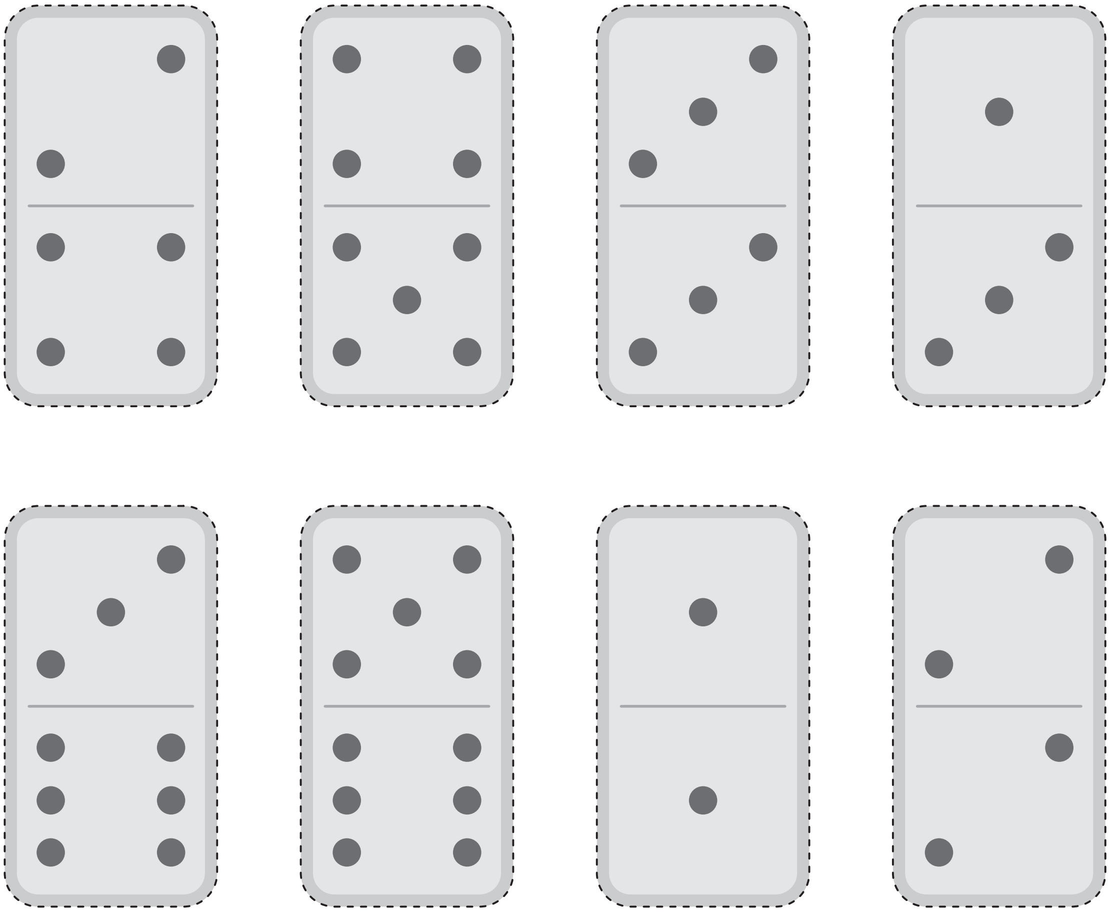




Ilustrações: Cynthia Sekiguchi

Referente aos comentários da página **211**.

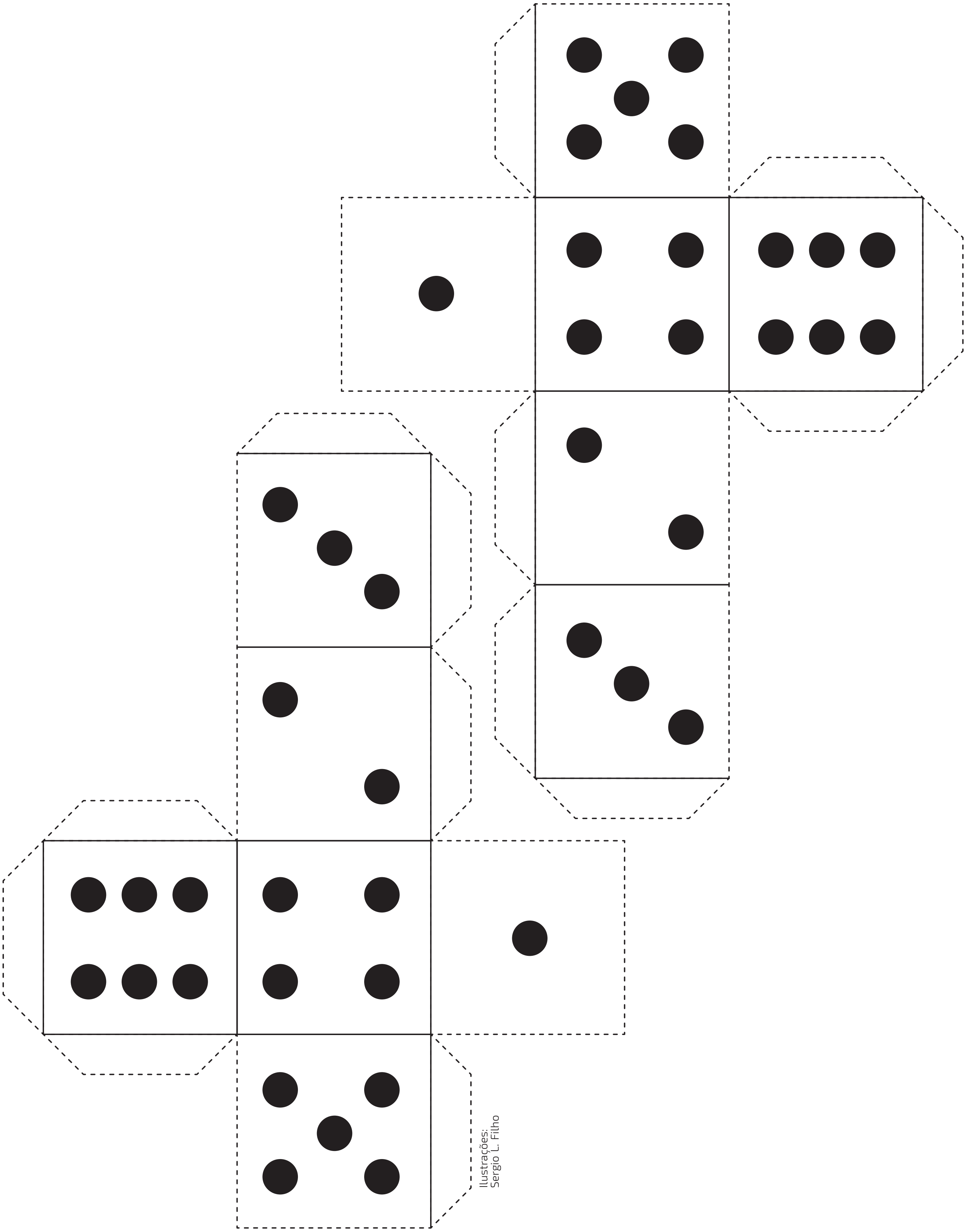
# Peças do dominó



Sergio L. Filho

Referente aos comentários da página **228**.

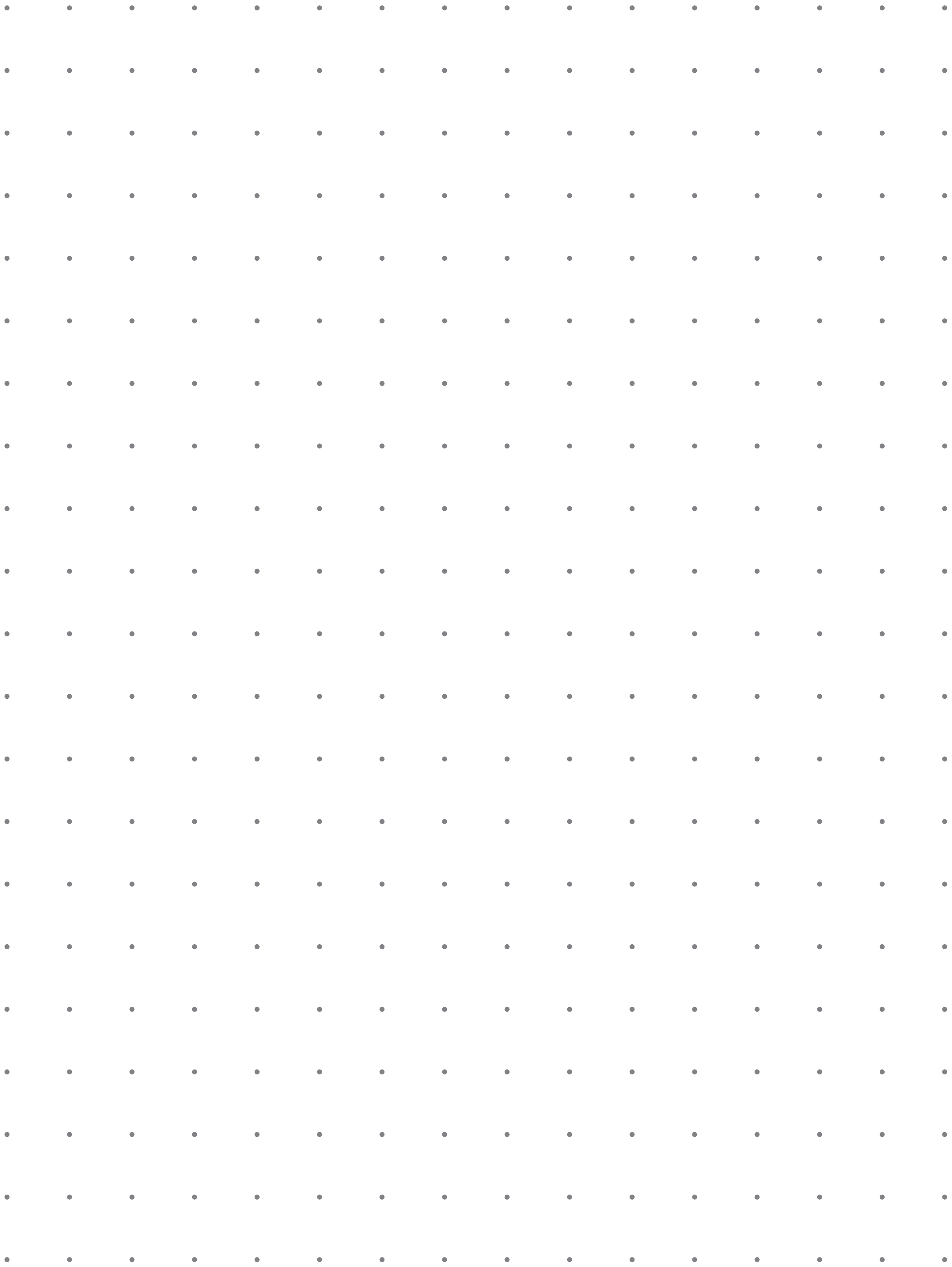
# Moldes dos dados



Ilustrações: Sergio L. Filho

Referente aos comentários da página **228**.

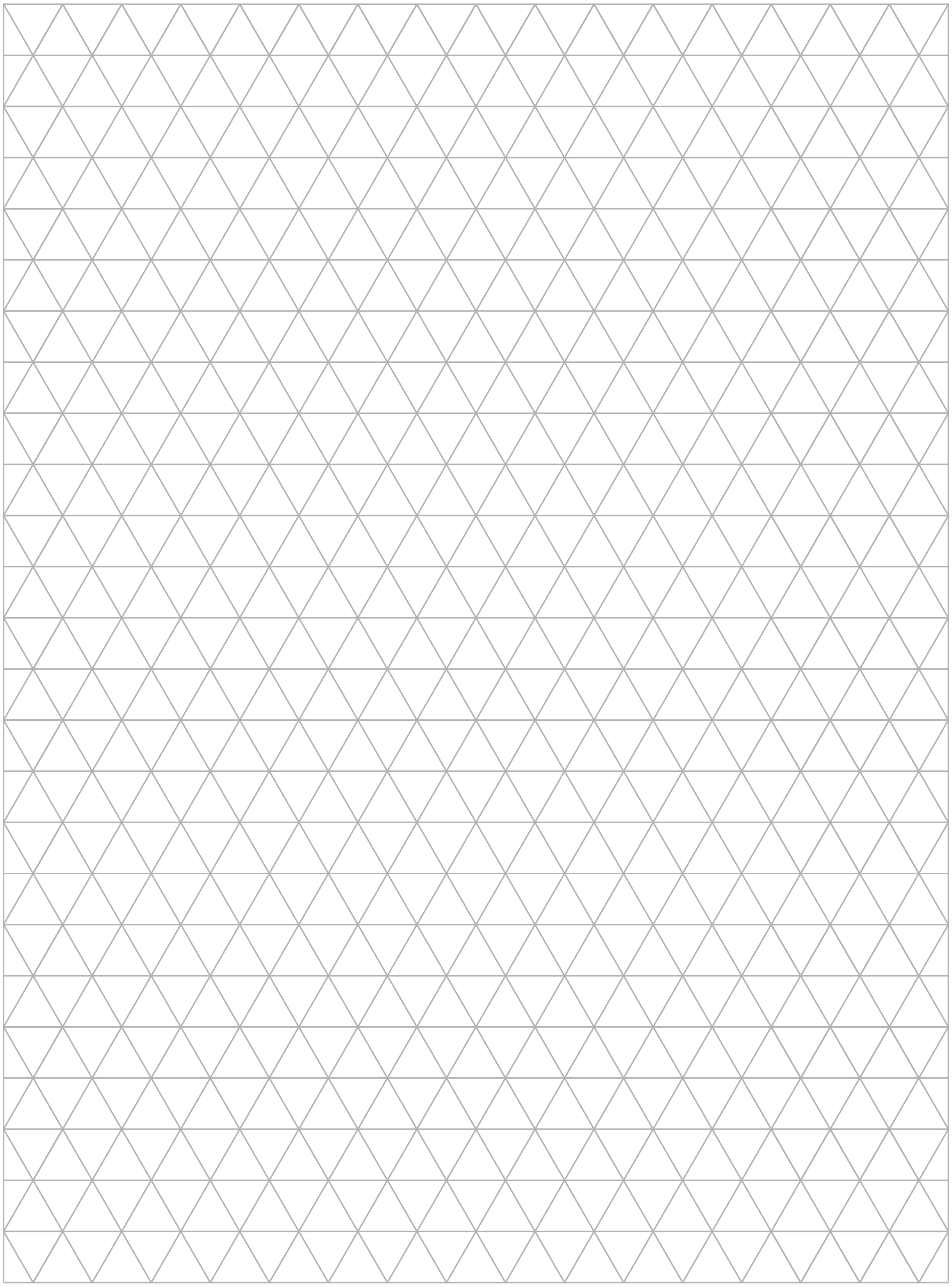
# Malha pontilhada



Sergio L. Filho

Referente aos comentários da página **255**.

# Malha triangular



Sergio L. Filho

Referente aos comentários da página **255**.

# Bibliografia

BASSIT, Ana Zahira (Org.). **O interdisciplinar**: olhares contemporâneos. São Paulo: Factash, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 25 set. 2018.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Pró-Letramento**: Programa de formação continuada de professores dos anos/séries iniciais do Ensino Fundamental. Matemática. Brasília: MEC/SEB, 2007.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectiva. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

CHAMBERS, Paul; TIMILIN, Robert. **Ensinando Matemática para adolescentes**. 2. ed. Tradução de Gabriela Wondracek Linck. Porto Alegre: Penso, 2015.

DIMENSTEIN, Gilberto. **O cidadão de papel**: a infância, a adolescência e os direitos humanos no Brasil. 24. ed. São Paulo: Ática, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 55. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2017.

HUETE, Juan Carlos Sánchez; BRAVO, José A. Fernández. **O ensino da Matemática**: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

LIMA, Elon Lages. Matemática e ensino. **Sociedade Portuguesa de Matemática**. 8. ed. Lisboa: Gradiva, 2004.

MACHADO, José Nilson. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimentos e inteligência e a prática docente. 7. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

______. **Matemática e educação**: alegorias, tecnologias, jogo, poesia. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2012. (Questões da nossa época).

MASCHIO, Elaine Cátia Falcade; SOARES, Eliana Maria do Sacramento (Org.). **Cultura escolar, tecnologias e práticas**: perspectivas históricas e contemporâneas. Curitiba: Appis, 2017.

MENDEZ, Juan. **Avaliar para conhecer**: examinar para excluir. Porto Alegre: Artmed, 2002.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

MORENO, Montserrat et al. **Falemos de sentimentos**: a afetividade como um tema transversal. Tradução de Maria Cristina de Oliveira. São Paulo: Moderna, 1999. (Educação em pauta: temas transversais).

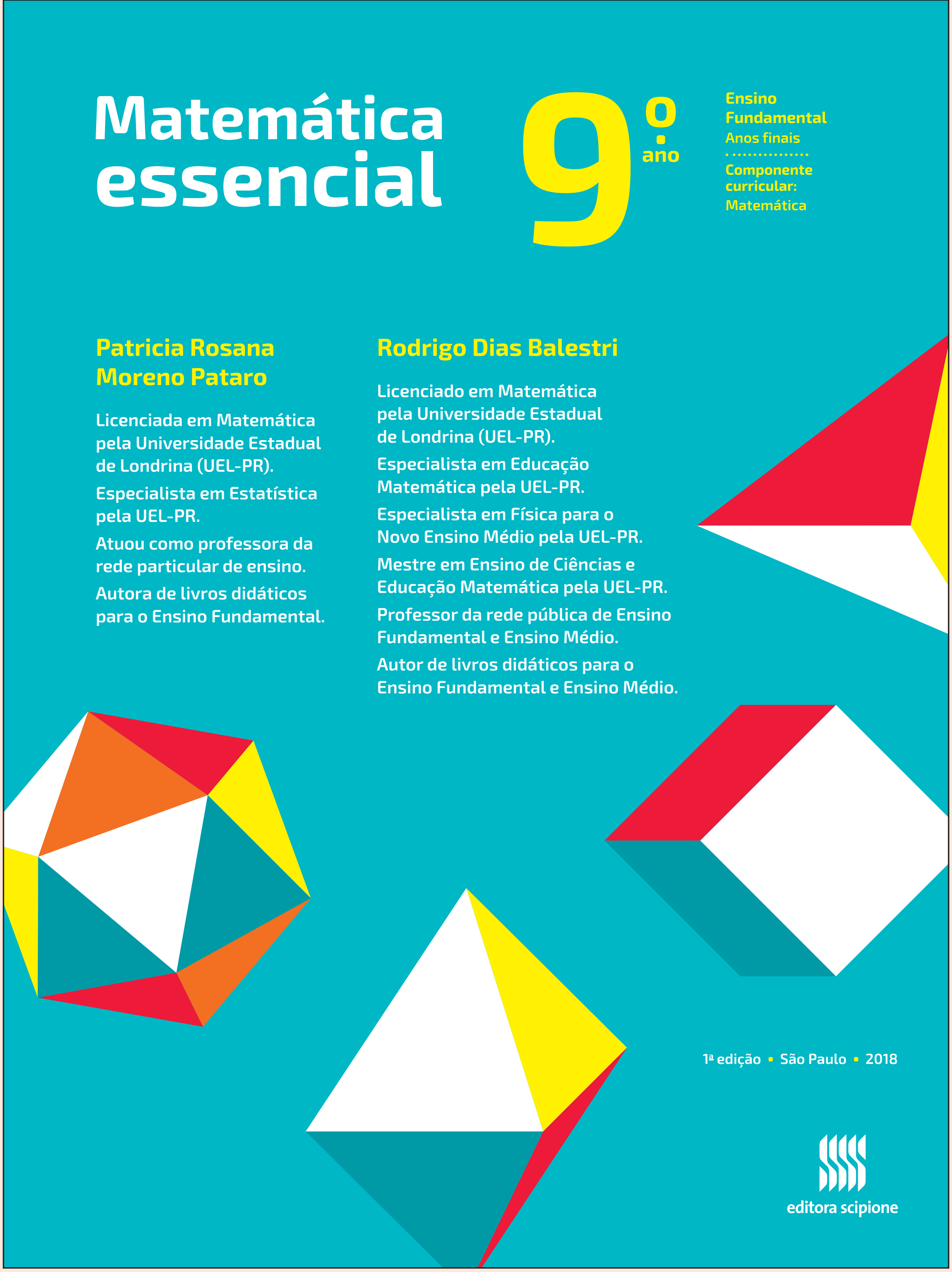
NACARATO, Adair; MENGALI, Brenda; PASSOS, Cármen. **A Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma (Orgs.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artmed, 1996.

POLYA, George. Sobre a resolução de problemas de Matemática na *high school*. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues; Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.



# Matemática essencial

# 9º ano

Ensino Fundamental
Anos finais

Componente curricular:
Matemática

**Patricia Rosana Moreno Pataro**

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Especialista em Estatística pela UEL-PR.

Atuou como professora da rede particular de ensino.

Autora de livros didáticos para o Ensino Fundamental.

**Rodrigo Dias Balestri**

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Especialista em Educação Matemática pela UEL-PR.

Especialista em Física para o Novo Ensino Médio pela UEL-PR.

Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.

Professor da rede pública de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Autor de livros didáticos para o Ensino Fundamental e Ensino Médio.

1ª edição • São Paulo • 2018

editora scipione

editora scipione

**Direção geral:** Guilherme Luz
**Direção editorial:** Renata Mascarenhas e Luiz Tonolli
**Gestão de projeto editorial:** Mirian Senra
**Projeto e produção editorial:** Scriba Soluções Editoriais
**Edição:** André Luiz Steigenberger, Denise Maria Capozzi,
Fátima Gomes Machado Vizacaro, Janaina Soler Caldeira,
Sheila Caroline Molina
**Assistência editorial:** Leandro Figueira Ferreira,
Paulo Ricardo Mercadante Krzyzanowski
**Leitura técnica:** Eduardo Henrique Gomes Tavares
**Colaboração técnico-pedagógica:** Eduardo Wagner
**Supervisão de produção:** Lucília Franco Lemos dos Santos
**Revisão:** Amanda S. Santos
**Projeto gráfico:** Marcela Pialarissi
**Capa:** Marcela Pialarissi
**Imagem de capa:** Dkart/Getty Images
**Designer:** Janaina Oliveira
**Iconografia:** Alaíde Alves de França e Stein
**Tratamento de imagens:** José Vitor Elorza Costa
**Licenciamento de conteúdos de terceiros:** Erick Lopes de
Almeida, Marissol Martins Maia
**Editoração eletrônica:** Luiz Roberto Lúcio Correa (superv.)

---

Avenida das Nações Unidas, 7221, 1º andar, Setor D
Pinheiros – São Paulo – SP – CEP 05425-902
Tel.: 4003-3061
www.scipione.com.br / atendimento@scipione.com.br

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

Pataro, Patricia Moreno
Matemática essencial 9º ano : ensino fundamental, anos finais / Patricia Moreno Pataro, Rodrigo Balestri. -- 1. ed. -- São Paulo : Scipione, 2018.

Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia.
ISBN: 978-85-474-0166-5 (aluno)
ISBN: 978-85-474-0167-2 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental). I. Balestri, Rodrigo. II. Título.

2018-0052 CDD: 372.7

Julia do Nascimento – Bibliotecária – CRB-8/010142

**2018**
Código da obra CL 713558
CAE 631771 (AL) / 631772 (PR)
1ª edição
1ª impressão

Impressão e acabamento

# Apresentação

Você já observou como a Matemática está presente em nosso dia a dia? Conferir o troco em uma compra, observar uma obra de arte, planejar um passeio e preparar uma receita são alguns exemplos de situações em que a Matemática é utilizada como ferramenta indispensável.

Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo a explorar a Matemática, dando significado a suas ideias de modo que você seja capaz de utilizá-las. Procuramos abordar os conteúdos e as situações de maneira prazerosa, trabalhando sua autonomia e criatividade e possibilitando a você que argumente e tome decisões.

Esperamos que utilize este livro com dedicação e entusiasmo. No decorrer do trabalho, troque informações com os colegas e o professor e exponha suas ideias e opiniões, sempre respeitando as dos demais.

Desejamos a você sucesso em seus estudos!

**Os autores.**

# Vamos conhecer o livro!

## Abertura do capítulo

## Capítulo 4

## Razão e proporção

Madurodam é um parque temático em miniatura na cidade de Haia, na Holanda. O parque conta com diversas atividades, apresenta a história do país e também monumentos históricos.

As miniaturas são objetos que replicam os detalhes do objeto original e mantêm uma proporção entre eles. Por exemplo, em Madurodam, as réplicas têm a escala 1 : 25, ou seja, 1 cm da miniatura equivale a 25 cm do objeto em tamanho real.

**Pensando nisso...**

- Ⓐ Que tipo de miniatura mais interessa a você? Por quê?
- Ⓑ Determine a medida, em centímetros, do comprimento da miniatura de um trem cujo comprimento real mede 150 m, sabendo que a réplica tem a escala 1 : 100, ou seja, 1 cm da miniatura equivale a 100 cm do objeto em tamanho real.
- Ⓒ Seguindo a escala de Madurodam, quanto mediria a altura de um objeto-modelo, como uma casa, sabendo que a altura de sua miniatura mede 14 cm?

**Miniaturas**
Veja mais informações sobre miniaturas no *site*:
<www.minimundo.com.br>
(acesso em: 10 nov. 2018).

Parque em miniatura na cidade de Haia, na Holanda, em 2017.

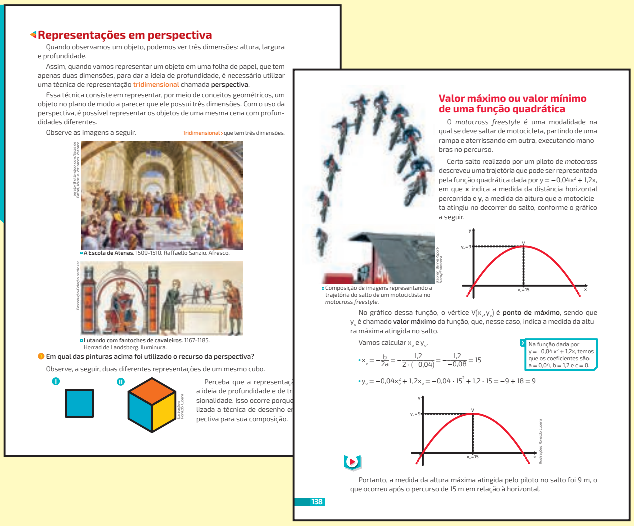
Olena Tselykh Fotografie/ Shutterstock.com

74

75

Na abertura, você entrará em contato com os assuntos que serão estudados no capítulo. São propostas questões que permitem mostrar o que você já sabe e também trocar ideias com seus colegas e o professor.

## Conteúdos



### Representações em perspectiva

Quando observamos um objeto, podemos ver três dimensões: altura, largura e profundidade.

Assim, quando vamos representar um objeto em uma folha de papel, que tem apenas duas dimensões, para dar a ideia de profundidade, é necessário utilizar uma técnica de representação **tridimensional** chamada **perspectiva**.

Essa técnica consiste em representar, por meio de conceitos geométricos, um objeto no plano de modo a parecer que ele possui três dimensões. Com o uso da perspectiva, é possível representar os objetos de uma mesma cena com profundidades diferentes.

Observe as imagens a seguir.

**Tridimensional** › que tem três dimensões.

serato/Shutterstock.com/Salas de Rafael, Museus Vaticanos, Vaticano

**A Escola de Atenas**. 1509-1510. Raffaello Sanzio. Afresco.

Reprodução/Coleção particular

**Lutando com fantoches de cavaleiros**. 1167-1185. Herrad de Landsberg. Iluminura.

**Em qual das pinturas acima foi utilizado o recurso da perspectiva?**

Observe, a seguir, duas diferentes representações de um mesmo cubo.

Ilustrações: Ronaldo Lucena

Perceba que a representaçã a ideia de profundidade e de tr sionalidade. Isso ocorre porque lizada a técnica de desenho er pectiva para sua composição.

### Valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática

O *motocross freestyle* é uma modalidade na qual se deve saltar de motocicleta, partindo de uma rampa e aterrissando em outra, executando manobras no percurso.

Certo salto realizado por um piloto de *motocross* descreveu uma trajetória que pode ser representada pela função quadrática dada por $y = -0,04x^2 + 1,2x$, em que **x** indica a medida da distância horizontal percorrida e **y**, a medida da altura que a motociclista atingiu no decorrer do salto, conforme o gráfico a seguir.

Stephen Barnes/Sport/ Alamy/Fotoarena

Composição de imagens representando a trajetória do salto de um motociclista no *motocross freestyle*.

No gráfico dessa função, o vértice $V(x_v, y_v)$ é **ponto de máximo**, sendo que $y_v$ é chamado **valor máximo** da função, que, nesse caso, indica a medida da altura máxima atingida no salto.

Vamos calcular $x_v$ e $y_v$.

- $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1,2}{2 \cdot (-0,04)} = -\frac{1,2}{-0,08} = 15$
- $y_v = -0,04x_v^2 + 1,2x_v = -0,04 \cdot 15^2 + 1,2 \cdot 15 = -9 + 18 = 9$

Na função dada por $y = -0,04x^2 + 1,2x$, temos que os coeficientes são: $a = 0,04$, $b = 1,2$ e $c = 0$.

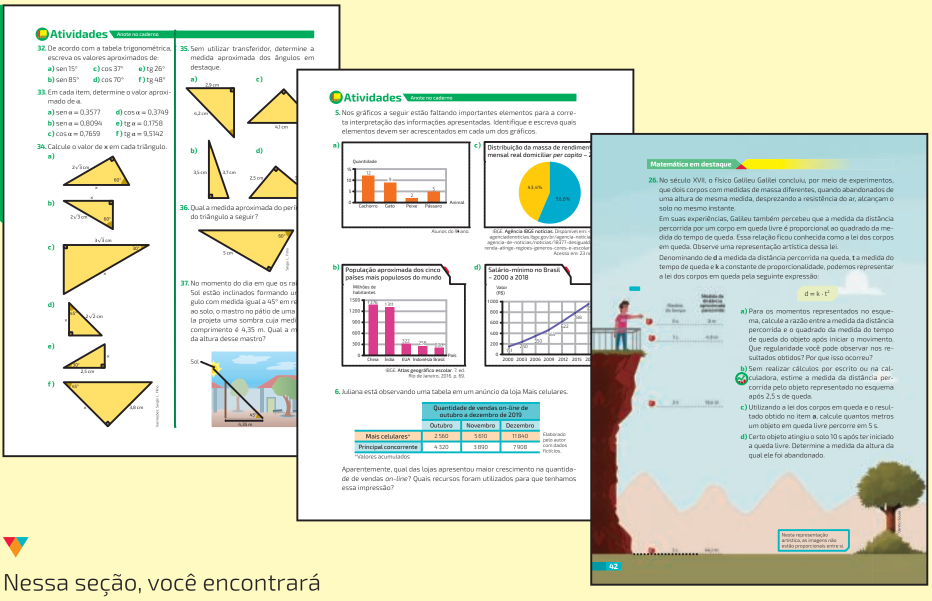
Ilustrações: Ronaldo Lucena

Portanto, a medida da altura máxima atingida pelo piloto no salto foi 9 m, o que ocorreu após o percurso de 15 m em relação à horizontal.

138

Os conteúdos propostos são abordados gradativamente para que você possa desenvolver e aprimorar seu conhecimento.

# Atividades



**Atividades** Anote no caderno

**32.** De acordo com a tabela trigonométrica, escreva os valores aproximados de:

**a)** sen 15° **c)** cos 37° **e)** tg 26°
**b)** sen 85° **d)** cos 70° **f)** tg 48°

**33.** Em cada item, determine o valor aproximado de α.

**a)** sen α = 0,3577 **d)** cos α = 0,3749
**b)** sen α = 0,8094 **e)** tg α = 0,1758
**c)** cos α = 0,7659 **f)** tg α = 9,5142

**34.** Calcule o valor de **x** em cada triângulo.

**35.** Sem utilizar transferidor, determine a medida aproximada dos ângulos em destaque.

**36.** Qual a medida aproximada do perí
do triângulo a seguir?

**37.** No momento do dia em que os rai
Sol estão inclinados formando u
gulo com medida igual a 45° em re
ao solo, o mastro no pátio de uma
la projeta uma sombra cuja medi
comprimento é 4,35 m. Qual a m
da altura desse mastro?

**Atividades** Anote no caderno

**5.** Nos gráficos a seguir estão faltando importantes elementos para a correta interpretação das informações apresentadas. Identifique e escreva quais elementos devem ser acrescentados em cada um dos gráficos.

Alunos do 9º ano.

IBGE. **Agência IBGE notícias**. Disponível em: <
agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticia
agencia-de-noticias/noticias/18377-desigualda
renda-atinge-regioes-generos-cores-e-escolari
Acesso em: 23 no

IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 7. ed. Rio de Janeiro, 2016. p. 69.

**6.** Juliana está observando uma tabela em um anúncio da loja Mais celulares.

| | Quantidade de vendas *on-line* de outubro a dezembro de 2019 | | |
|---|---|---|---|
| | Outubro | Novembro | Dezembro |
| Mais celulares* | 2 560 | 5 610 | 11 840 |
| Principal concorrente | 4 320 | 3 890 | 7 908 |

*Valores acumulados

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Aparentemente, qual das lojas apresentou maior crescimento na quantidade de vendas *on-line*? Quais recursos foram utilizados para que tenhamos essa impressão?

**Matemática em destaque**

**26.** No século XVII, o físico Galileu Galilei concluiu, por meio de experimentos, que dois corpos com medidas de massa diferentes, quando abandonados de uma altura de mesma medida, desprezando a resistência do ar, alcançam o solo no mesmo instante.

Em suas experiências, Galileu também percebeu que a medida da distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado da medida do tempo de queda. Essa relação ficou conhecida como a lei dos corpos em queda. Observe uma representação artística dessa lei.

Denominando de **d** a medida da distância percorrida na queda, **t** a medida do tempo de queda e **k** a constante de proporcionalidade, podemos representar a lei dos corpos em queda pela seguinte expressão:

$$d = k \cdot t^2$$

**a)** Para os momentos representados no esquema, calcule a razão entre a medida da distância percorrida e o quadrado da medida do tempo de queda do objeto após iniciar o movimento. Que regularidade você pode observar nos resultados obtidos? Por que isso ocorreu?

**b)** Sem realizar cálculos por escrito ou na calculadora, estime a medida da distância percorrida pelo objeto representado no esquema após 2,5 s de queda.

**c)** Utilizando a lei dos corpos em queda e o resultado obtido no item **a**, calcule quantos metros um objeto em queda livre percorre em 5 s.

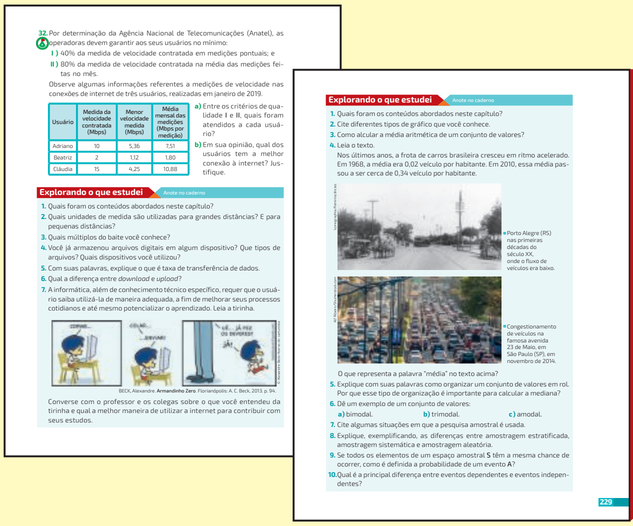
**d)** Certo objeto atingiu o solo 10 s após ter iniciado a queda livre. Determine a medida da altura da qual ele foi abandonado.

Nesta representação artística, as imagens não estão proporcionais entre si.

Nessa seção, você encontrará atividades diversificadas, que possibilitam desenvolver as ideias e os conceitos estudados.

As atividades com a tarja **Matemática em destaque** permitem que você relacione a Matemática com situações do dia a dia e também com outras áreas do conhecimento.

Após a última seção de **Atividades** do capítulo, são propostas questões que retomam o conteúdo abordado para que você reflita sobre o que estudou. Assim, você pode identificar as principais ideias compreendidas e também as que precisam ser revistas.



**32.** Por determinação da Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), as operadoras devem garantir aos seus usuários no mínimo:

**I)** 40% da medida de velocidade contratada em medições pontuais; e

**II)** 80% da medida de velocidade contratada na média das medições feitas no mês.

Observe algumas informações referentes a medições de velocidade nas conexões de internet de três usuários, realizadas em janeiro de 2019.

| Usuário | Medida da velocidade contratada (Mbps) | Menor velocidade medida (Mbps) | Média mensal das medições (Mbps por medição) |
|---|---|---|---|
| Adriano | 10 | 5,36 | 7,51 |
| Beatriz | 2 | 1,12 | 1,80 |
| Cláudia | 15 | 4,25 | 10,88 |

**a)** Entre os critérios de qualidade **I** e **II**, quais foram atendidos a cada usuário?

**b)** Em sua opinião, qual dos usuários tem a melhor conexão à internet? Justifique.

**Explorando o que estudei** Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo?
2. Quais unidades de medida são utilizadas para grandes distâncias? E para pequenas distâncias?
3. Quais múltiplos do baite você conhece?
4. Você já armazenou arquivos digitais em algum dispositivo? Que tipos de arquivos? Quais dispositivos você utilizou?
5. Com suas palavras, explique o que é taxa de transferência de dados.
6. Qual a diferença entre *download* e *upload*?
7. A informática, além de conhecimento técnico específico, requer que o usuário saiba utilizá-la de maneira adequada, a fim de melhorar seus processos cotidianos e até mesmo potencializar o aprendizado. Leia a tirinha.

BECK, Alexandre. **Armandinho Zero**. Florianópolis: A. C. Beck, 2013. p. 94.

Converse com o professor e os colegas sobre o que você entendeu da tirinha e qual a melhor maneira de utilizar a internet para contribuir com seus estudos.

**Explorando o que estudei** Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo?
2. Cite diferentes tipos de gráfico que você conhece.
3. Como alcular a média aritmética de um conjunto de valores?
4. Leia o texto.

Nos últimos anos, a frota de carros brasileira cresceu em ritmo acelerado. Em 1968, a média era 0,02 veículo por habitante. Em 2010, essa média passou a ser cerca de 0,34 veículo por habitante.

Porto Alegre (RS) nas primeiras décadas do século XX, onde o fluxo de veículos era baixo.

Congestionamento de veículos na famosa avenida 23 de Maio, em São Paulo (SP), em novembro de 2014.

O que representa a palavra "média" no texto acima?

5. Explique com suas palavras como organizar um conjunto de valores em rol. Por que esse tipo de organização é importante para calcular a mediana?
6. Dê um exemplo de um conjunto de valores:
   **a)** bimodal. **b)** trimodal. **c)** amodal.
7. Cite algumas situações em que a pesquisa amostral é usada.
8. Explique, exemplificando, as diferenças entre amostragem estratificada, amostragem sistemática e amostragem aleatória.
9. Se todos os elementos de um espaço amostral **S** têm a mesma chance de ocorrer, como é definida a probabilidade de um evento **A**?
10. Qual é a principal diferença entre eventos dependentes e eventos independentes?

229

# Explorando o que estudei

Cidadania: explore essa ideia

## Cidadania: explore essa ideia

### População idosa, saudável e ativa

Imagens de idosos em asilos ou isolados em casa foram substituídas por outras que mostram essas pessoas passeando pelas ruas, fazendo compras em comércios, frequentando clubes, festas, academias, excursões, universidades etc. Aquela figura arqueada, apoiando-se em uma bengala, geralmente usada em estabelecimentos comerciais para identificar o atendimento preferencial a idosos, também está sendo modificada em várias cidades do Brasil, a fim de retratar melhor o perfil dessa população. Independentemente da condição de debilitação de uma pessoa nessa fase da vida, ela merece tanto ser respeitada e valorizada quanto ter seus direitos garantidos.

Imagem antiga (acima) e proposta (abaixo) para identificar atendimento preferencial a idosos em caixas de supermercado, assentos em bancos, vagas de estacionamentos etc.

Os avanços da medicina e da ciência e os baixos índices de natalidade são fatores que vêm aumentando a proporção da população idosa no mundo, bem como sua inserção na sociedade. A estimativa é que, em 2050, cerca de 21 pessoas, a cada 100 indivíduos, terão idade acima de 60 anos. Veja a tabela.

População mundial, em milhares de habitantes – junho de 2017

| Ano | População total | Idosos (acima de 60 anos) |
|---|---|---|
| [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] |

*estimativa

United Nations. **Population Division**. Disponível em: <https://stats.oecd.org/index.aspx?DataSetCode=RPOP>. Acesso em: 5 jul. 2019.

**Analisando com cidadania** Anote no caderno

Respostas nas orientações ao professor.

1. Quais são os principais fatores que influenciaram o aumento da população idosa?
2. Em sua opinião, qual é a importância do idoso para a sociedade?
3. Você tem algum familiar ou conhece alguma pessoa com mais de 60 anos? Como é a rotina dessa pessoa?

**Analisando com a Matemática** Anote no caderno

4. Considere o seguinte trecho do texto: "A estimativa é que, em 2050, cerca de 21 pessoas, a cada 100 indivíduos, terão idade acima de 60 anos.". Que cálculo você faria para verificar essa razão?
5. Utilizando uma calculadora, calcule o percentual de idosos para cada ano apresentado na tabela.

Nessa seção, são abordados temas que contribuem com sua formação cidadã, permitindo que você reflita sobre a importância de cada um deles para a sociedade e para seu cotidiano.

### Dica

Nesse quadro, você obtém orientações para o desenvolvimento dos conteúdos e das atividades. Além disso, encontra indicações para trabalhar a seção **Explorando tecnologias**.

## Veja o significado dos ícones apresentados na coleção.

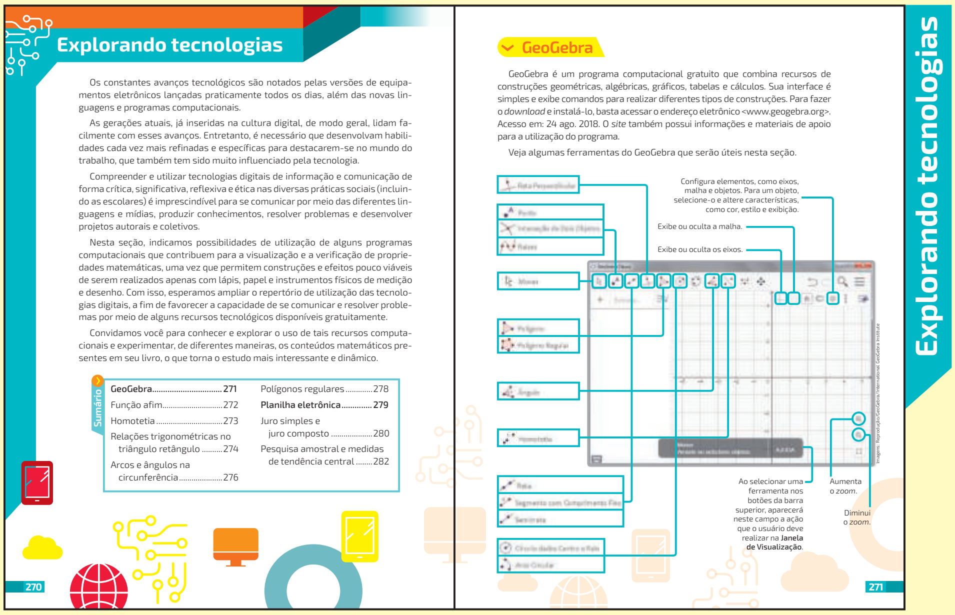
Apresenta sugestões de *sites* para que você obtenha mais informações sobre o assunto estudado.

Atividades em que você deve elaborar questões, problemas ou textos.

Atividades de caráter desafiador, em que você é estimulado a desenvolver as próprias estratégias para a resolução.

Atividades em que você realiza procedimentos de cálculo mental.

Atividades que exploram procedimentos para que você utilize a calculadora.



## Explorando tecnologias

Os constantes avanços tecnológicos são notados pelas versões de equipamentos eletrônicos lançadas praticamente todos os dias, além das novas linguagens e programas computacionais.

As gerações atuais, já inseridas na cultura digital, de modo geral, lidam facilmente com esses avanços. Entretanto, é necessário que desenvolvam habilidades cada vez mais refinadas e específicas para destacarem-se no mundo do trabalho, que também tem sido muito influenciado pela tecnologia.

Compreender e utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) é imprescindível para se comunicar por meio das diferentes linguagens e mídias, produzir conhecimentos, resolver problemas e desenvolver projetos autorais e coletivos.

Nesta seção, indicamos possibilidades de utilização de alguns programas computacionais que contribuem para a visualização e a verificação de propriedades matemáticas, uma vez que permitem construções e efeitos pouco viáveis de serem realizados apenas com lápis, papel e instrumentos físicos de medição e desenho. Com isso, esperamos ampliar o repertório de utilização das tecnologias digitais, a fim de favorecer a capacidade de se comunicar e resolver problemas por meio de alguns recursos tecnológicos disponíveis gratuitamente.

Convidamos você para conhecer e explorar o uso de tais recursos computacionais e experimentar, de diferentes maneiras, os conteúdos matemáticos presentes em seu livro, o que torna o estudo mais interessante e dinâmico.

Sumário

270

### GeoGebra

GeoGebra é um programa computacional gratuito que combina recursos de construções geométricas, algébricas, gráficos, tabelas e cálculos. Sua interface é simples e exibe comandos para realizar diferentes tipos de construções. Para fazer o *download* e instalá-lo, basta acessar o endereço eletrônico <www.geogebra.org>. Acesso em: 24 ago. 2018. O *site* também possui informações e materiais de apoio para a utilização do programa.

Veja algumas ferramentas do GeoGebra que serão úteis nesta seção.

Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

271

Explorando tecnologias

Nessa seção, você utilizará a planilha eletrônica Calc e o *software* GeoGebra, para desenvolver exemplos e realizar atividades que complementam o que foi estudado no capítulo.

## Sugestões de livros e *sites*

**Livros**

- **Atlas da situação mundial**, de Dan Smith. Tradução de Mário Vilela. São Paulo: Companhia Editoria Nacional.
- **Semelhança não é mera coincidência**, de Nílson José Machado. São Paulo: Scipione. (Vivendo a Matemática).
- **Como encontrar a medida certa**, de Carlos Alberto Marcondes dos Santos e Nelson Gentil. São Paulo: Ática. (A descoberta da Matemática).
- **A Matemática das coisas**: do papel A4 aos cordões de sapatos, do GPS às rodas dentadas, de Nuno Crato. São Paulo: Livraria da Física.
- **101 Ilusões de óptica**, de Sam Taplin. São Paulo: Edições Usborne.
- **Os peregrinos**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **Origami**: a divertida arte das dobraduras, de William Gilbert. São Paulo: Nobel.
- **Esporte, caminho de superação**, de Denise Pellegrini. São Paulo: Moderna.
- **O homem que calculava**, de Malba Tahan. Rio de Janeiro: Record.
- **Os olímpicos**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD.(O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **História da equação do 2º grau**, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática. (Contando a história da Matemática).
- **Você precisa de quê?**: A diferença entre consumo e consumismo, de Silmara Franco. São Paulo: Moderna.
- **As mil e uma equações**, de Ernesto Rosa. São Paulo: Ática. (A descoberta da Matemática).

Reprodução/Editora Scipione

Reprodução/Edições Usborne

Reprodução/Editora Moderna

Reprodução/Editora Moderna

283

Sugestões de livros e *sites*

Essa seção apresenta sugestões de livros e *sites*, possibilitando que você amplie os conceitos estudados nos capítulos.

Atividades em que você faz construções geométricas utilizando instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.

Atividades em que você realiza estimativas ou aproximações.

Indica que as imagens apresentadas não estão proporcionais entre si.

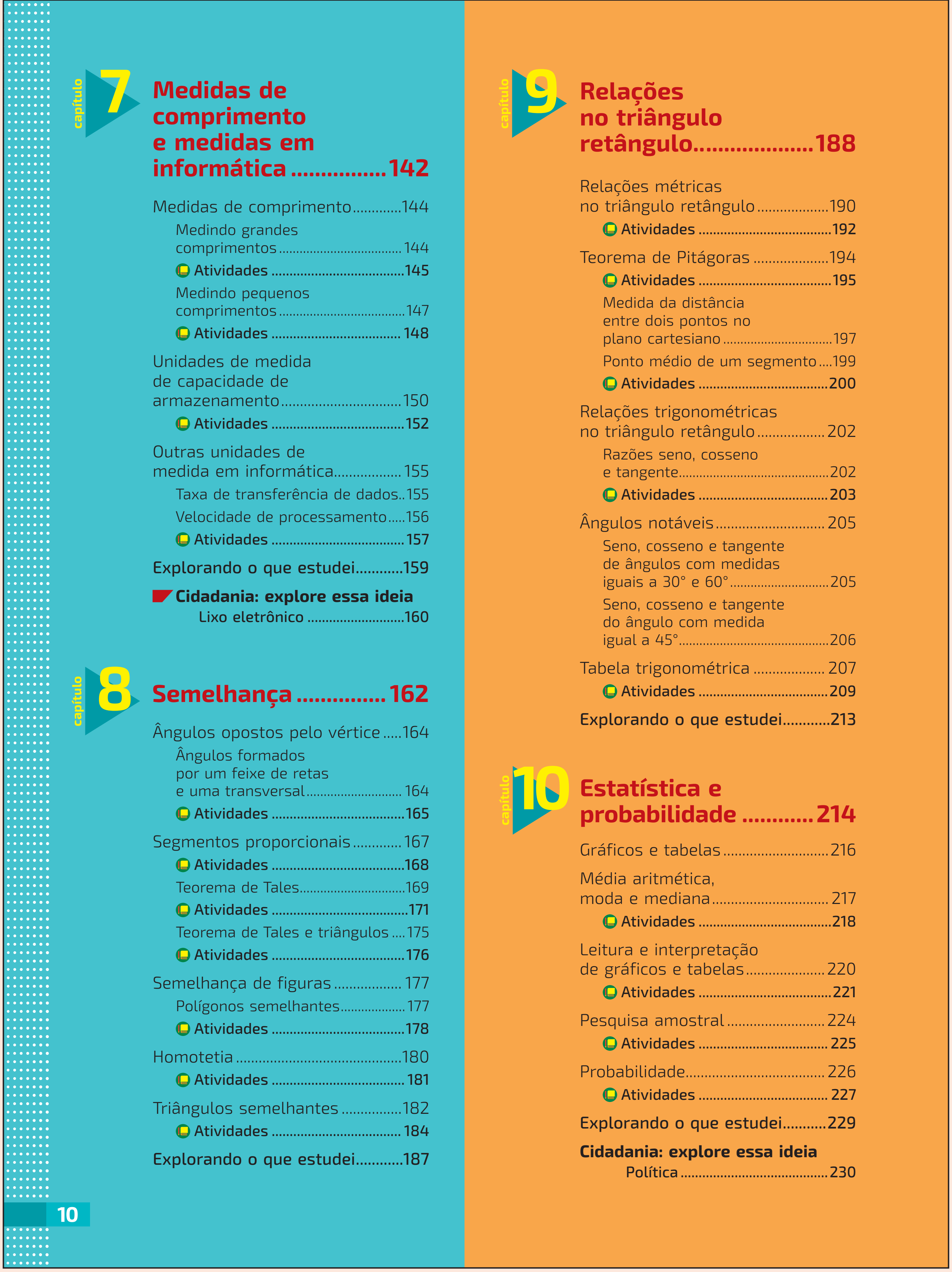
Indica que as cores utilizadas não correspondem às reais.

Apresenta sugestões de áudios e vídeos que contribuem para ampliar ou sintetizar conteúdos trabalhados.

# Sumário

IOvE IOvE/Shutterstock.com

Vadim Sadovski/Shutterstock.com



oykuozgu/Shutterstock.com

marchello74/Shutterstock.com

# Capítulo 1

# Potências e raízes

Em 1974, o professor húngaro Ernő Rubik (1944-) apresentou um protótipo de cubo, feito em madeira e com as faces de diferentes cores, para ilustrar o conceito de terceira dimensão aos seus alunos de arquitetura. Ao girar cada uma das 6 faces coloridas do cubo, o aluno podia visualizar o movimento realizado.

Nomeado de cubo mágico pelo seu inventor e depois popularizado como cubo de Rubik, na década de 1980, esse quebra-cabeça tridimensional, que exige raciocínio lógico e agilidade, continua desafiando as mentes mais criativas e agitando campeonatos. Após misturadas as peças das linhas e colunas, o objetivo do jogo é deixar novamente cada face com apenas uma cor. A versão mais conhecida tem cada face composta por 9 quadradinhos, dispostos em 3 linhas e 3 colunas.

## Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

**A** Em sua opinião, por que Ernő Rubik nomeou sua invenção de cubo mágico?

**B** Na versão mais conhecida do cubo mágico, em quantas peças de sua superfície é possível observar 3 cores diferentes? Por que tais peças possuem essa característica?

**C** Qual a medida do comprimento da aresta de um cubo mágico cuja medida do volume é $512\ cm^3$?

Esse capítulo retomará o conceito de potenciação, a fim de embasar os alunos no estudo de radiciação, que será aprofundado a partir das propriedades dos radicais e da realização das operações básicas com eles.

- As páginas de abertura trazem algumas informações sobre o cubo de Rubik, além de estabelecer uma relação entre as dimensões de um desses cubos e as ideias de radiciação, como pode ser visto na questão **C**.
  Uma sugestão de condução do trabalho com essas páginas é propor uma leitura coletiva do texto e, na sequência, promover um debate, de maneira que os alunos possam observar as diferentes interpretações e opiniões dos colegas. Para ilustrar algumas das informações apresentadas, leve para a sala de aula um cubo de Rubik, ou peça, antecipadamente, para alguns alunos levarem. Com isso, é possível que eles manipulem e tentem resolver esse quebra-cabeça, além de observarem sua forma e, até mesmo, calcularem a medida aproximada do seu volume.
- Estimule a curiosidade dos alunos apresentando-lhes outras informações sobre o cubo mágico. Comente que o próprio inventor, Ernő Rubik, demorou um mês para resolvê-lo pela primeira vez.

**Material digital**

- No material digital, é apresentado um **Plano de desenvolvimento** para o 1º bimestre capaz de auxiliar nos planejamentos e desenvolvimentos das aulas, em que são descritos em um quadro os objetivos específicos, os objetos de conhecimento e as habilidades específicas **EF09MA03**, **EF09MA04**, **EF09MA05** e **EF09MA09**, previstas para os capítulos **1**, **2** e **3** sugeridos para esse período. Além disso, são elencadas as principais práticas didático-pedagógicas e atividades recorrentes previstas para o conteúdo abordado nesse bimestre.

Cubo de Rubik sendo manipulado.

lOvE lOvE/Shutterstock.com

**Pensando nisso...**

**A** Possível resposta: o nome “cubo” é devido ao formato, e “mágico” é por conta do desafio que a montagem proporciona, depois de misturadas as peças.

**B** 8 peças; Porque são as peças que formam os vértices do cubo, na intersecção de três faces.

**C** 8 cm

- Ao abordar o item **A**, verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para pesquisarem sobre a pergunta proposta.
- No item **B**, leve um cubo mágico para a sala de aula, a fim de que os alunos possam manuseá-lo.
- Para a resolução do item **C**, lembre os alunos de como é calculado o volume de um cubo, ou seja, $V = a^3$, em que **a** corresponde à medida do comprimento da aresta desse cubo. Espera-se que eles percebam que, para resolver esse item, é necessário determinar a medida que, elevada ao cubo, resulta em 512 $cm^3$, o que pode ser feito por meio de tentativas ou pelo cálculo da raiz cúbica de 512.

# Potenciação

Já estudamos que a operação utilizada para representar uma multiplicação de fatores iguais é a **potenciação**, na qual podemos destacar os seguintes elementos:

**potência**

$$5^4 = 625$$

**expoente**: indica a quantidade de vezes que o fator se repete

**base**: fator que se repete

Veja alguns exemplos de cálculos envolvendo potências:

- $6^4 = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{\text{4 fatores iguais}} = 1\,296$
- $0{,}4^3 = \underbrace{0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4}_{\text{3 fatores iguais}} = 0{,}064$
- $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}_{\text{2 fatores iguais}} = \frac{1}{25}$
- $(-2)^5 = \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}_{\text{5 fatores iguais}} = -32$

De modo geral, a expressão $a^n$ (lê-se: **a** elevado a **n**) indica uma multiplicação de **n** fatores iguais ao número real **a**, ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\textbf{n}\text{ fatores iguais}}$$

Não podemos confundir **potenciação** com **multiplicação**. A multiplicação é utilizada para representar uma adição de parcelas iguais e a potenciação é utilizada para representar uma multiplicação de fatores iguais.

- **multiplicação**: $3 \cdot 2 = \underbrace{2 + 2 + 2}_{\text{3 parcelas iguais}} = 6$
- **potenciação**: $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 fatores iguais}} = 8$

Veja a seguir outros casos envolvendo potenciação.

- Em uma potência cuja base é um número qualquer e o expoente é igual a 1, o resultado é o próprio número.

$$68^1 = 68 \qquad (21{,}3)^1 = 21{,}3$$

- Em uma potência cuja base é um número não nulo elevado ao expoente zero, o resultado é igual a 1.

$$102^0 = 1 \qquad (0{,}125)^0 = 1$$

- Nas potências de bases fracionárias, elevamos o numerador e o denominador ao mesmo expoente.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

**Escreva uma potência com base fracionária e dê para um colega resolver. Depois, confira a resposta dada por ele.** Resposta pessoal.

**Objetivos do capítulo**

- Calcular potências.
- Identificar os elementos da radiciação.
- Calcular raízes.
- Escrever potências com expoentes fracionários por meio de uma raiz e vice-versa.
- Resolver expressões utilizando as propriedades da radiciação.
- Simplificar radicais.
- Introduzir fator externo em um radical.
- Efetuar adição, subtração, multiplicação e divisão com raízes.
- Racionalizar denominadores.

**Avaliação**

- Antes de iniciar o trabalho com o tópico **Potenciação**, apresente aos alunos algumas potências para avaliar o conhecimento prévio deles. Após a resolução, peça que alguns deles exponham os resultados na lousa e, em seguida, promova uma discussão com os demais acerca dos procedimentos utilizados.

**Material digital**

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **1**, **2** e **3** do 1º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

## Potências com base negativa

De acordo com o expoente, o resultado de uma potência com base negativa pode ser um número **positivo** ou um número **negativo**. Observe separadamente cada um desses casos.

Em uma potência cuja base é um número **negativo** e cujo expoente é um número **par**, o resultado é **positivo.**

- $(-1{,}3)^2 = (-1{,}3) \cdot (-1{,}3) = 1{,}69$
- $\left(-\frac{1}{5}\right)^4 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{625}$

Em uma potência cuja base é um número **negativo** e cujo expoente é um número **ímpar**, o resultado é **negativo**.

- $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$
- $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{125}$

> Lembre-se: quando a base de uma potência for um número negativo, ela deve ser escrita entre parênteses.

## Potências com expoente negativo

Veja a seguir como calcular uma potenciação envolvendo potências com expoente negativo.

Em uma potência cuja base é um número diferente de zero elevado a um expoente inteiro negativo, o resultado é igual ao inverso da base elevado ao oposto desse expoente. Assim, se **a** é um número diferente de zero ($a \neq 0$) e **n** é um número natural, temos: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ou $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Veja alguns exemplos.

- $6^{-4} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1\,296}$
- $(-7)^{-2} = \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{49}$
- $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{1}\right)^2 = \frac{9^2}{1^2} = \frac{81}{1} = 81$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$

> Lembre-se: o inverso de **a** é $\frac{1}{a}$, pois $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, e o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$, com **a** e **b** diferentes de zero, pois $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

**Escreva uma potência com expoente negativo e dê para um colega resolver. Depois, confira a resposta dada por ele.** Resposta pessoal.

- Caso julgue necessário, sugira outras potências com base negativa ou expoente negativo para os alunos calcularem.
- Ao trabalhar com a questão proposta na teoria, oriente os alunos a verificarem a resposta dada pelo colega e, caso esteja errada, indicarem o erro cometido.

**Material digital**

- O material digital dessa coleção apresenta o projeto integrador **Radiações eletromagnéticas não ionizantes**, que possibilita uma integração com os componentes curriculares **Ciências e Língua portuguesa**, além do trabalho com os temas contemporâneos **Ciência e tecnologia** e **Saúde**, destacados na BNCC. Esse projeto, com base na apresentação do conceito de radiação e sua presença em situações do cotidiano, promoverá uma campanha de prevenção da exposição à radiação.

# Propriedades das potências

Vamos retomar algumas propriedades das potências que você já estudou decorrentes das definições de potências estudadas neste capítulo.

- **1ª propriedade**: Uma multiplicação de potências de mesma base pode ser escrita como uma única potência. Exemplos:
  - $4^2 \cdot 4^3 \cdot 4 = 4^{2+3+1} = 4^6$
  - $5^{-2} \cdot 5^6 = 5^{-2+6} = 5^4$
  - $(-8)^3 \cdot (-8)^2 = (-8)^{3+2} = (-8)^5$

De modo geral, temos: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, com $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$ se $n \leq 0$ ou $m \leq 0$.

- **2ª propriedade**: Uma divisão de potências de mesma base (não nula) pode ser escrita como uma única potência. Exemplos:
  - $3^6 : 3^4 = 3^{6-4} = 3^2$
  - $4^2 : 4^{-1} = 4^{2-(-1)} = 4^3$
  - $(-8)^3 : (-8)^2 = (-8)^{3-2} = (-8)^1$

De modo geral, temos: $a^m : a^n = a^{m-n}$, com $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$.

- **3ª propriedade**: Em uma multiplicação de dois ou mais fatores elevados a um mesmo expoente, podemos elevar cada um dos fatores a esse expoente. Exemplos:
  - $(6 \cdot 2)^3 = 6^3 \cdot 2^3$
  - $(-3 \cdot 4)^2 = (-3)^2 \cdot 4^2$
  - $(8 \cdot 3)^{-4} = 8^{-4} \cdot 3^{-4}$

De modo geral, temos: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ e $(a \cdot b) \neq 0$ se $n \leq 0$.

- **4ª propriedade**: Em uma divisão elevada a um expoente, podemos elevar o dividendo e o divisor a esse mesmo expoente. Exemplos:
  - $(13 : 5)^4 = \left(\frac{13}{5}\right)^4 = \frac{13}{5} \cdot \frac{13}{5} \cdot \frac{13}{5} \cdot \frac{13}{5} = \frac{13^4}{5^4}$
  - $(6 : 3)^3 = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = \frac{6^3}{3^3}$
  - $(10 : 5)^{-4} = \left(\frac{10}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{10}\right)^4 = \frac{5^4}{10^4} = 2^{-4}$

De modo geral, temos: $(a : b)^n = a^n : b^n$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ e $a \neq 0$ se $n \leq 0$.

- **5ª propriedade**: Uma potência elevada a um expoente pode ser escrita como uma única potência. Exemplos:
  - $(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$
  - $\left[(-2)^4\right]^{-1} = (-2)^{4 \cdot (-1)} = (-2)^{-4}$
  - $\left[(-3)^2\right]^3 = (-3)^{2 \cdot 3} = (-3)^6$

De modo geral, temos: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, com $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$ se $n \leq 0$ ou $m \leq 0$.

**Qual propriedade pode ser utilizada para escrever a sentença $3^3 \cdot (-4)^3$ como uma única potência? Escreva essa potência.** 3ª propriedade; $(-12)^3$.

- Se julgar conveniente, apresente aos alunos a demonstração algébrica das propriedades das potências mostradas na teoria:

**1ª propriedade**: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, com $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$ se $n \leq 0$ ou $m \leq 0$.

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n) \text{ fatores}} = a^{m+n}$$

**2ª propriedade**: $a^m : a^n = a^{m-n}$, com $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$.

$$a^m : a^n = \frac{a^{m+(n-n)}}{a^n} = \frac{a^{n+(m-n)}}{a^n} =$$

$$= \frac{\overbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}^{n \text{ fatores}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{(m-n) \text{ fatores}}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{n \text{ fatores}}} = a^{m-n}$$

# Atividades

Anote no caderno

**1.** Calcule as potências.

**a)** $5^3$ 125

**b)** $1^7$ 1

**c)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ $-\frac{1}{32}$

**d)** $(0,4)^3$ 0,064

**e)** $\left(\frac{2}{9}\right)^0$ 1

**f )** $(-2)^{-5}$ $-\frac{1}{32}$

**g)** $(0,28)^1$ 0,28

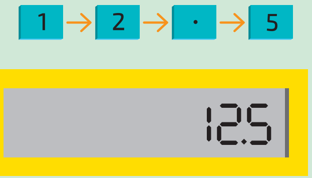
**h)** $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ $\frac{9}{49}$

**i )** $127^0$ 1

**j )** $20^2$ 400

**2.** Observe as etapas para efetuar $(12,5)^3$ utilizando uma calculadora.

**I** Inicialmente registramos o número 12,5.



**II** Em seguida, digitamos as teclas × e =, obtendo o resultado de $(12,5)^2$.

**III** Novamente, digitamos a tecla =, obtendo o resultado de $(12,5)^3$.

Ilustrações: Keithy Mostachi

Utilizando uma calculadora, efetue:

**a)** $125^2$ 15 625

**b)** $50^5$ 312 500 000

**c)** $(0,2)^3$ 0,008

**d)** $312^2$ 97 344

**e)** $(6,1)^3$ 226,981

**f )** $4^8$ 65 536

**3.** Calcule.

**a)** $\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}$ $\frac{81}{4}$ **b)** $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$ $\frac{7}{5}$ **c)** $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$ 216 **d)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$ $\frac{16}{81}$

**4.** Calcule utilizando as propriedades de potências.

**a)** $3^4 \cdot 3^2$ $3^6 = 729$

**b)** $(-9)^2 \cdot (-9)^3$ $(-9)^5 = -59\,049$

**c)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$

**d)** $15^6 : 15^4$ $15^2 = 225$

**e)** $6^{-1} : 6^5$ $6^{-6} = \frac{1}{46\,656}$

**f )** $(-10)^5 : (-10)^4$ $(-10)^1 = -10$

**g)** $(10^2)^3$ $10^6 = 1\,000\,000$

**h)** $(7^{-1})^4$ $7^{-4} = \frac{1}{2\,401}$

**5.** Resolva os itens a seguir.

**a)** O produto de $(-5)^4$ e $(-5)^2$. 15 625

**b)** O quociente de $12^3$ por $12^2$. 12

**c)** O quadrado da metade de $(-6)$. 9

**d)** A metade do quadrado de $(-6)$. 18

**e)** O dobro do cubo de 3. 54

**f )** O cubo do quadrado de 3. 729

**6.** Resolva as expressões a seguir.

**a)** $7^3 - 49 + 5^2$ 319

**b)** $(-8)^3 : (-2) + 3 \cdot (-4)^3$ 64

**c)** $5^{-3} - \left(-\frac{1}{5}\right)^2$ $-\frac{4}{125}$

**d)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ $-\frac{107}{8}$

**e)** $\left(2 - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2$ $\frac{13}{8}$

**7.** Determine o valor de cada letra no quadrado mágico abaixo, sabendo que elas representam números na forma de potência e que o produto das linhas, colunas ou diagonais deve ser o mesmo.

$A = 3^{-2}$
$B = 3^0$
$C = 3^4$
$D = 3^6$
$E = 3^{-1}$

| | | |
|---|---|---|
| $3^5$ | A | $3^3$ |
| B | $3^2$ | C |
| $3^1$ | D | E |

- Ao abordar a atividade de **2**, verifique a possibilidade de levar algumas calculadoras para a sala de aula. Caso não haja quantidade suficiente para todos os alunos, peça para formarem duplas.
- Na atividade **5**, se for necessário, recorde com os alunos os termos utilizados, como produto, quociente e metade.
- No trabalho com a atividade **6**, lembre os alunos de que, em uma expressão numérica, as potências devem ser efetuadas primeiro. Em seguida, devem ser consideradas as operações de multiplicação e divisão, adição e subtração, na ordem em que aparecerem. Porém, se houver chaves { }, colchetes [ ] e parênteses ( ), deve-se resolver primeiro as operações que aparecem dentro dos parênteses, depois as de dentro dos colchetes e, por último, as de dentro das chaves, nessa ordem.

**3ª propriedade**: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, com $(a \cdot b) \neq 0$ se $n \leq 0$.

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{\text{n fatores}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fatores}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{n fatores}} = a^n \cdot b^n$$

**4ª propriedade**: $(a:b)^n = a^n : b^n$, com $a \neq 0$ se $n \leq 0$ e $b \neq 0$.

$$(a:b)^n = \underbrace{(a:b) \cdot (a:b) \cdot \ldots \cdot (a:b)}_{\text{n fatores}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{\text{n fatores}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n fatores}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{n fatores}}} = a^n : b^n$$

**5ª propriedade**: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, com $a \neq 0$ se $n \leq 0$ ou $m \leq 0$.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{\text{n fatores}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{\text{n fatores}}} = a^{m \cdot n}$$

**8.** Copie os itens abaixo substituindo **x** pelo número adequado, de maneira que as igualdades sejam verdadeiras.

**a)** $(-2)^x = 16$ $x = 4$

**b)** $(-5)^x = -125$ $x = 3$

**c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ $x = 0$

**d)** $x^{20} = 1$ $x = 1$

**e)** $7^x = 49$ $x = 2$

**f)** $(1,2)^6 \cdot (1,2)^{-2} = (1,2)^x$ $x = 4$

**9.** Determine.

**a)** $10^3$ 1 000

**b)** $10^9$ 1 000 000 000

**c)** $10^1$ 10

**d)** $10^6$ 1 000 000

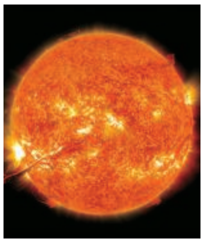
**e)** $10^8$ 100 000 000

**f)** $10^4$ 10 000

**10.** Uma perfumaria encomendou 10 caixas de perfumes. Cada caixa contém 10 pacotes com 10 unidades de perfumes cada um. Quantos perfumes foram encomendados? 1 000 perfumes

**11.** Leia as informações a seguir.

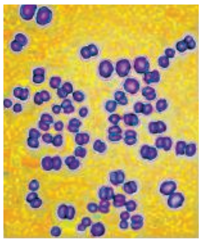
**A**



Digital Images Studio/Shutterstock.com

A medida da distância média da Terra ao Sol é de aproximadamente 149 500 000 km.

**B**



James Cavallini/Science Source/Fotoarena

Uma das bactérias que causam a meningite é a meningococo, que tem, em média, a medida do comprimento de um diâmetro de 0,0008 mm.

Para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, geralmente usamos números com grande quantidade de algarismos. Para auxiliar na compreensão dessas informações podemos representar esses números em **notação científica**. Veja como podemos representar em notação científica o número que aparece nas informações acima.

Os números representados em notação científica são escritos como $a \cdot 10^n$, em que:
- **a** é um número maior ou igual a 1 e menor do que 10.
- **n** é um número inteiro.

**I)** $149\,500\,000 = 1{,}495 \cdot 100\,000\,000 = 1{,}495 \cdot 10^8$

**II)** $0{,}0008 = 8 \cdot 0{,}0001 = 8 \cdot 10^{-4}$

Agora, represente em notação científica os números que aparecem nas informações a seguir.

**a)** Um canino tem aproximadamente 300 000 000 de células olfativas. $3 \cdot 10^8$

**b)** Estima-se que a população mundial chegou a 7 600 000 000 de pessoas, em outubro de 2017. $7{,}6 \cdot 10^9$

**c)** A medida do comprimento do diâmetro de um pólen é de, aproximadamente, 0,01 mm. $1 \cdot 10^{-2}$

**d)** Um milésimo de segundo pode ser expresso como 0,001 s. $1 \cdot 10^{-3}$

**12.** Em certo laboratório foi feito um experimento com colônias de vírus. Durante o processo, constatou-se que a quantidade de vírus de uma das colônias, em condições ideais, aumentava 10 vezes a cada dia.

**a)** Em quantos dias essa colônia passou de $3{,}4 \cdot 10^{12}$ para $3{,}4 \cdot 10^{19}$ vírus? 7 dias

**b)** Quantos vírus haviam inicialmente nessa colônia, se após 10 dias essa quantidade passou a ser $3{,}4 \cdot 10^{22}$? $3{,}4 \cdot 10^{12}$

**BNCC em foco**

- A atividade **11** aborda a notação científica e a atividade **12** apresenta um problema sobre esse mesmo conceito, envolvendo a operação de mutiplicação em sua resolução, conforme orienta a habilidade **EF09MA04** da BNCC.
- Aproveite que a atividade **11** traz informações sobre uma das bactérias causadoras da meningite e faça uma relação com o tema contemporâneo **Saúde.** Sugira que os alunos pesquisem sobre os sintomas, a transmissão e a prevenção dessa doença, e proponha um bate-papo, para que um complemente as informações do outro. Ressalte que uma das maneiras mais eficientes de prevenir essa doença, além de evitar o contato com quem estiver contaminado, é manter o sistema imunitário fortalecido, com uma rotina de alimentação equilibrada, atividades físicas e sono de qualidade.
- A atividade **12** também é uma oportunidade de exercitar com os alunos a **Competência geral 2**, uma vez que estimula o pensamento científico e mobiliza a curiosidade intelectual ao solicitar a solução do problema apresentado.

- Na atividade **9**, lembre os alunos de que a maneira prática de resolver potências de base 10 é acrescentar zeros à direita do algarismo 1, de acordo com o expoente.

**Relacionando saberes**

- Ainda na atividade **11**, relacione as informações sobre a distância média da Terra ao Sol com o componente curricular **Ciências**, aproveitando para pedir aos alunos que façam uma pesquisa acerca das medidas das distâncias entre o Sol e os demais planetas do Sistema Solar. Esse é um momento para que eles exercitem a escrita dos números utilizando a notação científica.

# Radiciação

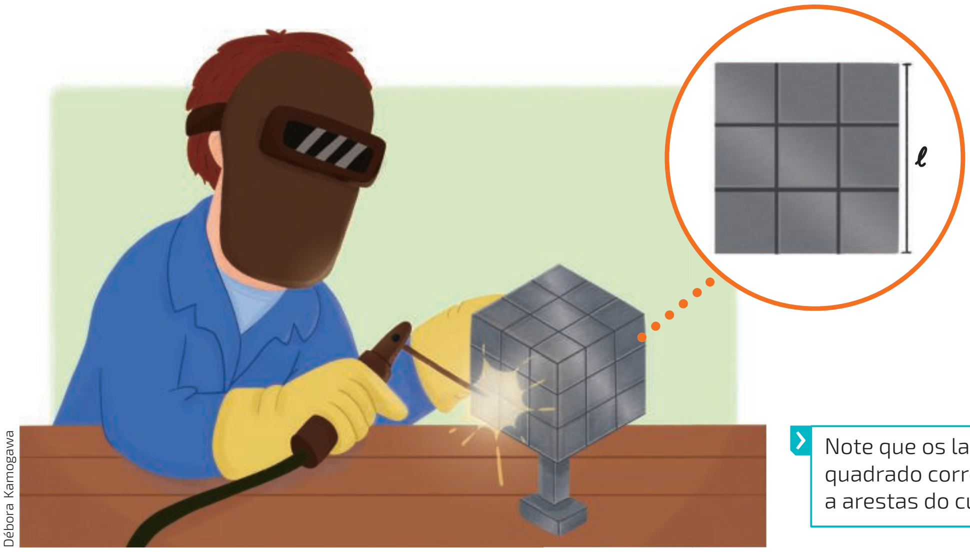
Neste capítulo, aprofundaremos o estudo sobre a operação de **radiciação**. Para isso, considere o problema a seguir.

Certo artesão vai produzir um troféu que será oferecido ao vencedor de um campeonato de cubo mágico. Esse troféu será confeccionado em metal e terá a forma de um cubo mágico, sendo que cada face deve medir 400 $cm^2$ de área. Qual é a medida do comprimento da aresta do cubo que será produzido?

Para resolver esse problema, podemos utilizar a fórmula que permite calcular a medida da área do quadrado, que corresponde à face do cubo mágico.

$A = \ell^2$ A: medida da área do quadrado

$400 = \ell^2$ $\ell$: medida do comprimento do lado do quadrado



Débora Kamogawa

Note que os lados do quadrado correspondem a arestas do cubo.

Assim, temos que determinar um número positivo que elevado ao quadrado resulte em 400, ou seja, precisamos calcular a **raiz quadrada** de 400.

$$\sqrt{400} = 20, \text{ pois } 20^2 = 20 \cdot 20 = 400$$

Portanto, a aresta do cubo deve medir 20 cm de comprimento.

A operação utilizada para resolver a situação acima é chamada **radiciação**.

Nessa operação, podemos destacar os seguintes elementos:

$$\text{índice} \longrightarrow \overset{\text{radical}}{\sqrt[2]{\underset{\text{radicando}}{400}}} = 20 \longleftarrow \text{raiz}$$

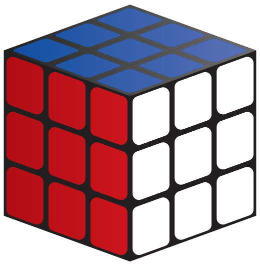
Quando o índice de uma radiciação é 2, costumamos não indicá-lo. Assim, a raiz quadrada de 400, por exemplo, pode ser expressa por $\sqrt{400} = 20$.

**BNCC em foco**

- A partir do trabalho com o tópico **Radiciação,** em diversos momentos serão apresentadas atividades que possibilitam aos alunos compreenderem as relações entre os conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática, no caso a Aritmética e a Geometria. Nesse sentido, auxilie-os de modo que se sintam seguros para construir e aplicar os conhecimentos matemáticos, e, também, desenvolvam a autoestima e a perseverança na busca de soluções, contemplando a **Competência específica de Matemática 3**.

- Ao trabalhar com o tópico **Radiciação**, aproveite para auxiliar a compreensão dos alunos atribuindo possíveis valores para a medida do comprimento $\ell$ do lado do quadrado, por exemplo, 15 e 25, de maneira que eles percebam que essas medidas não correspondem à solução da equação, uma vez que $15^2 = 225$ e $25^2 = 625$. Nesse caso, conduza-os a perceberem que a solução corresponde a uma medida entre 15 cm e 25 cm. Após trabalhar os conteúdos dessa página, escreva algumas raízes na lousa, escolhendo convenientemente números cujas raízes sejam exatas, para que os alunos se lembrem de como calcular raízes quadradas e cúbicas.

Para resolver o item **C** da página **12**, é necessário determinar a medida do comprimento da aresta de um cubo mágico, sabendo que seu volume mede 512 $cm^3$.


Somma Studio

Para obter a medida do comprimento da aresta do cubo mágico, podemos utilizar a fórmula que permite calcular a medida do volume do cubo.

$V = a^3$ V: medida do volume do cubo

$512 = a^3$ a: medida do comprimento da aresta do cubo

Sendo assim, devemos calcular a **raiz cúbica** de 512.

$$\sqrt[3]{512} = 8, \text{ pois } 8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$$

Portanto, a medida do comprimento da aresta desse cubo mágico é 8 cm.

A radiciação é a operação inversa da potenciação.

Podemos calcular raízes com índices maiores do que 3. Veja alguns exemplos.

- $\sqrt[4]{625} = 5$, pois $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

  Lê-se: raiz quarta de 625 é igual a 5.
- $\sqrt[5]{-243} = -3$, pois $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

  Lê-se: raiz quinta de −243 é igual a −3.

Seja **a** um número real e **n** um número natural maior do que 1, devemos considerar os seguintes casos para o cálculo da **raiz enésima** de **a** ($\sqrt[n]{a}$).

- Se **n** for par e $a \geq 0$, temos que $\sqrt[n]{a}$ é um número $b \geq 0$, tal que $b^n = a$. Exemplos:
  - $\sqrt{121} = 11$, pois $11^2 = 121$.
  - $\sqrt[6]{729} = 3$, pois $3^6 = 729$.
  - $\sqrt[4]{81} = 3$, pois $3^4 = 81$.
- Se **n** for par e $a < 0$, não existe $\sqrt[n]{a}$ no conjunto dos números reais. Exemplos:
  - Não existe $\sqrt{-9}$ em $\mathbb{R}$, pois não há um número real **b**, tal que $b^2 = -9$.
  - Não existe $\sqrt[4]{-16}$ em $\mathbb{R}$, pois não há um número real **b**, tal que $b^4 = -16$.
- Se **n** for ímpar, temos que $\sqrt[n]{a}$ é um número **b**, tal que $b^n = a$. Exemplos:
  - $\sqrt[3]{125} = 5$, pois $5^3 = 125$.
  - $\sqrt[5]{1\,024} = 4$, pois $4^5 = 1\,024$.
  - $\sqrt[3]{-64} = -4$, pois $(-4)^3 = -64$.
  - $\sqrt[7]{-2\,187} = -3$, pois $(-3)^7 = -2\,187$.

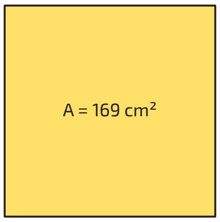
- Ao falar do item **C** da página **13**, se necessário, retome com os alunos o texto e as questões propostas nas páginas **12** e **13** desse capítulo.
- Ao abordar a raiz cúbica de 512, apresente aos alunos mais exemplos de raízes quadradas e cúbicas exatas.
- Explique a eles que enésima se refere ao índice de ordem **n** de uma raiz e que esse índice também pode ser representado por **n-ésima**.
- Verifique se os alunos compreenderam que, quando o radicando é negativo, a raiz existirá no conjunto dos números reais apenas se o índice da radiciação for ímpar.

## Atividades

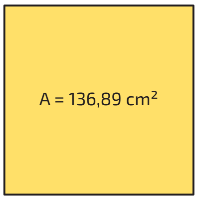
Anote no caderno

**13.** Calcule a medida do perímetro de cada quadrado, em que a medida da área A está indicada.

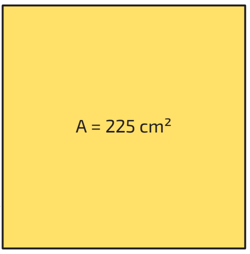
**a)** 52 cm



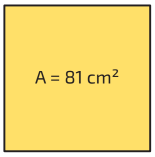
**c)** 46,8 cm



**b)** 60 cm



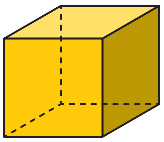
**d)** 36 cm



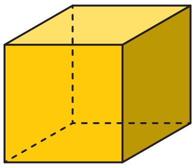
Ilustrações: Ronaldo Lucena

**14.** Determine a medida do comprimento da aresta de cada cubo, em que a medida do volume V está indicada.

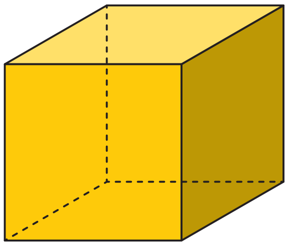
**a)** 5 m



**b)** 6 m



**c)** 9 m



Ilustrações: Ronaldo Lucena

**15.** Com o auxílio de uma calculadora, resolva os itens arredondando o resultado para o centésimo mais próximo.

**a)** $\sqrt{18}$ 4,24 **c)** $\sqrt{10}$ 3,16 **e)** $\sqrt{74}$ 8,60

**b)** $\sqrt{5}$ 2,24 **d)** $\sqrt{42}$ 6,48 **f)** $\sqrt{638}$ 25,26

**16.** Determine qual dos valores indicados no quadro substitui corretamente cada ■.

**a)** $\sqrt[4]{\blacksquare} = 9$ 6 561 **d)** $\sqrt[\blacksquare]{81} = 3$ 4

**b)** $\sqrt[3]{2\,197} = \blacksquare$ 13 **e)** $\sqrt[6]{\blacksquare} = 4$ 4 096

**c)** $\sqrt[5]{\blacksquare} = 6$ 7 776 **f)** $\sqrt[4]{1\,296} = \blacksquare$ 6

| | | |
|---|---|---|
| 4 096 | 6 | 7 776 |
| 13 | 6 561 | 4 |

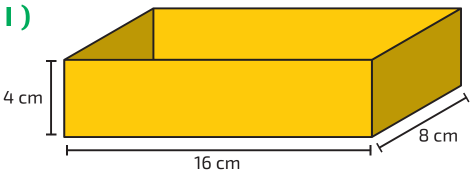
**17.** Quais itens têm solução no conjunto dos números reais? b; d; e; f

**a)** $\sqrt[6]{-64}$ **c)** $\sqrt{-25}$ **e)** $\sqrt[9]{-128}$

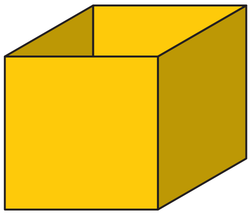
**b)** $\sqrt[5]{-32}$ **d)** $\sqrt[3]{-64}$ **f)** $\sqrt[5]{-79}$

**18.** Os recipientes **I** e **II** têm a mesma medida de capacidade e formato de paralelepípedo retângulo e cubo, respectivamente.

**I)**



**II)**



Ilustrações: Ronaldo Lucena

**a)** Qual é a medida da capacidade do recipiente **I**, em centímetros cúbicos? 512 cm³

**b)** Determine a medida do comprimento da aresta do recipiente **II**. 8 cm

**19.** Observe a sequência.

$$\sqrt[3]{5^2},\ \sqrt[4]{5^4},\ \sqrt[5]{5^6},\ \sqrt[6]{5^8},\ \ldots$$

**a)** Quais são os próximos três elementos dessa sequência? $\sqrt[7]{5^{10}}$, $\sqrt[8]{5^{12}}$ e $\sqrt[9]{5^{14}}$

**b)** Qual elemento dessa sequência é igual a 5? $\sqrt[4]{5^4}$

- Para resolver as atividades **13**, **14** e **16**, sugira aos alunos que utilizem o método das tentativas e efetuem os cálculos necessários por escrito ou mentalmente.
- Na atividade **13**, lembre os alunos de que a medida do perímetro de um polígono corresponde à soma das medidas dos comprimentos de seus lados.
- Na atividade **15**, caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, veja a possibilidade de levar algumas calculadoras para a sala de aula.
- Na atividade **19**, antes de os alunos responderem aos itens propostos, peça para escreverem o padrão da sequência apresentada, de modo a auxiliá-los na resposta do item **a**.

## Matemática em destaque

**20.** Herão de Alexandria foi um dos matemáticos de mais destaque em sua época. Seus trabalhos, em geral, tratam com maior frequência de aplicações práticas da Matemática, dando grandes contribuições à Agrimensura e à Engenharia.

Agrimensura › arte ou técnica de medição de terras, campos etc.

Somma Studio

> Lembre-se: os números quadrados perfeitos são aqueles cuja raiz quadrada é um número natural.

Na obra Métrica, Herão propõe um método para o cálculo da raiz quadrada aproximada de um número natural que não seja quadrado perfeito. Nele, dado $n = a \cdot b$, temos $\sqrt{n} \simeq \frac{a+b}{2}$, sendo que, quanto mais próximos forem **a** e **b**, melhor será a aproximação. Veja, por exemplo, o cálculo aproximado de $\sqrt{30}$.

Como $30 = 5 \cdot 6$, podemos tomar $a = 5$ e $b = 6$.

Dessa forma: $\sqrt{30} \simeq \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$.

Logo, pelo método de Herão, $\sqrt{30} \simeq 5{,}5$.

**a)** Para calcular o valor aproximado de $\sqrt{30}$ pelo método de Herão, quais outros valores inteiros podemos tomar para **a** e **b** além dos apresentados no exemplo? 1 e 30; 2 e 15; 3 e 10

**b)** Utilizando o método de Herão, calcule o valor aproximado de $\sqrt{30}$ com base nos valores de **a** e **b** indicados no item anterior.
Para a = 1 e b = 30, temos: 15,5; para a = 2 e b = 15, temos: 8,5; para a = 3 e b = 10, temos: 6,5

**c)** Determine uma aproximação de $\sqrt{30}$ em uma calculadora e compare com os resultados obtidos no exemplo e no item anterior. Para quais valores de **a** e **b** o método de Herão resultou em uma melhor aproximação de $\sqrt{30}$? Por que isso ocorreu? 5 e 6; Porque, entre os possíveis valores de **a** e **b**, esses são os mais próximos um do outro.

**d)** Utilizando o método de Herão, calcule o valor aproximado de:

- $\sqrt{20}$ 4,5
- $\sqrt{72}$ 8,5
- $\sqrt{35}$ 6
- $\sqrt{120}$ 11

Agora, junte-se a um colega e comparem as respostas obtidas por vocês e os valores determinados em uma calculadora.

**BNCC em foco**

- A atividade **20** possibilita aos alunos reconhecerem que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos. Aproveite para auxiliá-los na compreensão de que ela é uma ciência viva, pois contribui para a solução de problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho, de modo a contemplar a **Competência específica de Matemática 1**.

- Na atividade **20** é trabalhado o método de Herão. Complemente o enunciado lendo o trecho abaixo para os alunos.

> [...] seus escritos, que com tanta frequência enfatizam mais as aplicações práticas do que o acabamento teórico, mostram uma fusão curiosa do grego com o oriental. Ele se empenhou em fornecer uma fundamentação científica para a engenharia e a agrimensura. [...]

HOWARD, Eves. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

A respeito do método para a aproximação de raízes quadradas, diga aos alunos que ele é utilizado com frequência nos computadores atuais, pois estabelece uma maneira de melhorar a aproximação obtida. Observe:

Seja $\sqrt{n} \simeq \frac{a+b}{2} = c_1$, com $a \cdot b = n$. Uma boa aproximação para $\sqrt{n}$ é dada por

$\sqrt{n} \simeq \frac{c_1 + \frac{n}{c_1}}{2} = c_2$. Para uma aproximação ainda melhor, continuamos os cálculos:

$$\sqrt{n} \simeq \frac{c_2 + \frac{n}{c_2}}{2} = c_3;\ \sqrt{n} \simeq \frac{c_3 + \frac{n}{c_3}}{2} = c_4;\ \ldots$$

Exemplo:

$$\sqrt{6} \simeq \frac{2+3}{2} = 2{,}5;\ \sqrt{6} \simeq \frac{2{,}5 + \frac{6}{2{,}5}}{2} = 2{,}45;$$

$$\sqrt{6} \simeq \frac{2{,}45 + \frac{6}{2{,}45}}{2} \simeq 2{,}4494898;\ \ldots$$

Caso os alunos tenham dificuldade em utilizar a calculadora para realizar os cálculos, oriente-os a apertar a seguinte sequência de teclas, no exemplo apresentado na página:

3 → 0 → √

# Potências com expoente fracionário

Estudamos anteriormente potências com expoentes inteiros, como:

$13^2$ $5^{-4}$ $8^5$ $-7^{11}$ $\left(\frac{5}{4}\right)^3$

Agora, estudaremos potências com expoentes fracionários e como essas potências podem ser escritas por meio de radicais.

Considere a igualdade $x = \sqrt[3]{4^2}$.

Como nesse caso $\sqrt[n]{a} = b$ implica em $b^n = a$, temos que:

$$x = \sqrt[3]{4^2} \Rightarrow x^3 = 4^2$$

Como ambos os membros da igualdade são positivos, temos:

$$x^3 = 4^2 \Rightarrow (x^3)^{\frac{1}{3}} = (4^2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x^{\frac{3}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = 4^{\frac{2}{3}}$$

Portanto, $\sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}$.

A propriedade $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ também é válida para **m** e **n** fracionários.

Note que o índice do radical corresponde ao denominador do expoente da potência.

Podemos escrever potências de base positiva e expoente fracionário por meio de radicais, e escrever radicais por meio de potências de base positiva e expoentes fracionários. Exemplos:

- $\sqrt[4]{3^5} = 3^{\frac{5}{4}}$
- $9^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{9^2}$
- $\sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$

De modo geral, sendo **a** um número real positivo, **m** um número natural maior que zero e **n** um número natural maior que 1, temos: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

## Atividades

Anote no caderno

**21.** Nas fichas, determine o número correspondente a cada letra.

A: 4; B: 5; C: 9; D: 5; E: 2; F: 10

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt[A]{5^7} = 5^{\frac{7}{4}}$ | $\sqrt[4]{7^C} = 7^{\frac{9}{4}}$ | $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{E}}$ |
| $\sqrt[3]{12^5} = 12^{\frac{B}{3}}$ | $\sqrt[6]{9^5} = 9^{\frac{D}{6}}$ | $\sqrt[F]{4^6} = 4^{\frac{3}{5}}$ |

**22.** Escreva cada radical como uma potência de expoente fracionário.

**a)** $\sqrt[4]{11^5}$ $11^{\frac{5}{4}}$ **b)** $\sqrt[7]{2^4}$ $2^{\frac{4}{7}}$ **c)** $\sqrt[8]{1}$ $1^{\frac{1}{8}}$ **d)** $\sqrt[9]{4^3}$ $4^{\frac{3}{9}}$ ou $4^{\frac{1}{3}}$

**23.** Determine o radical equivalente a cada potência.

**a)** $3^{\frac{2}{5}}$ $\sqrt[5]{3^2}$ **b)** $8^{\frac{4}{9}}$ $\sqrt[9]{8^4}$ **c)** $15^{\frac{7}{2}}$ $\sqrt{15^7}$ **d)** $65^{\frac{1}{6}}$ $\sqrt[6]{65}$

**24.** Resolva as expressões.

Inicialmente transforme as potências em radicais.

**a)** $1^{\frac{9}{7}} - 10 + 121^{\frac{1}{2}}$ 2

**b)** $625^{\frac{1}{4}} - 1\,024^{\frac{1}{10}} + 100^{\frac{1}{2}}$ 13

**25.** Associe cada potência a um radical, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. a-III; b-I; c-IV; d-II

**a)** $\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$ **c)** $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{8}{3}}$

**b)** $\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{9}{10}}$ **d)** $\left(2^{\frac{16}{9}}\right)^{\frac{3}{4}}$

**I )** $\sqrt{2^3}$ **III)** $\sqrt{2}$

**II)** $\sqrt[3]{2^4}$ **IV)** $\sqrt[3]{2^2}$

**BNCC em foco**

- A partir do trabalho com o tópico abordado nessa página, espera-se que os alunos estejam aptos a realizarem cálculos envolvendo potências com expoentes fracionários, de modo a contemplar a habilidade **EF09MA03** da BNCC.

- Na atividade **21**, verifique se os alunos concluíram que F = 10, pois: $4^{\frac{3}{5}} = 4^{\frac{2\cdot3}{2\cdot5}} = 4^{\frac{6}{10}} = \sqrt[10]{4^6}$.

- Ao apresentar a 2ª propriedade dos radicais aos alunos, lembre-os de que, ao multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número diferente de zero, a fração obtida é equivalente à inicial.
- As propriedades da radiciação apresentadas nessa página podem ser justificadas algebricamente na lousa para que os alunos compreendam melhor e tenham contato com generalizações e demonstrações matemáticas. Se necessário, lembre com os alunos as propriedades operatórias da potenciação, dadas no rodapé dessa página, já trabalhadas nesse capítulo.

**Material digital**

- No material digital dessa coleção, para completar o trabalho com o tópico **Propriedades dos radicais**, disponibilizamos a **Sequência didática 1**, elaborada com objetivo de desenvolver a habilidade **EF09MA03**. Essa sequência apresenta atividades que desenvolvem o cálculo de potências com expoentes fracionários e, também, possibilitam o trabalho com as propriedades dos radicais.

# Propriedades dos radicais

Veremos a seguir algumas propriedades dos radicais. Em certas situações, essas propriedades auxiliam na realização de alguns cálculos.

- **1ª propriedade**: O índice do radical e o expoente do radicando são iguais. Nesse caso, o resultado é o próprio radicando. Exemplos:

› $\sqrt[3]{6^3} = 6^{\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}} = 6^1 = 6$

› $\sqrt[8]{7^8} = 7^{\frac{\cancel{8}}{\cancel{8}}} = 7^1 = 7$

De modo geral, sendo **a** um número real positivo e **n** um número natural maior do que 1, temos: $\sqrt[n]{a^n} = a$.

A 1ª propriedade também é válida se **a** for um número real negativo, e **n**, um número ímpar maior do que 1. Por exemplo:

$\sqrt[7]{(-5)^7} = (-5)^{\frac{\cancel{7}}{\cancel{7}}} = -5$

- **2ª propriedade**: Quando multiplicamos ou dividimos o índice do radical e o expoente do radicando pelo mesmo número natural não nulo, o radical obtido é equivalente ao inicial. Exemplos:

› $\sqrt[4]{9^5} = 9^{\frac{5}{4}} = 9^{\frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3}} = \sqrt[4 \cdot 3]{9^{5 \cdot 3}} = \sqrt[12]{9^{15}}$

› $\sqrt[4]{8^6} = 8^{\frac{6}{4}} = 8^{\frac{6:2}{4:2}} = \sqrt[4:2]{8^{6:2}} = \sqrt[2]{8^3} = \sqrt{8^3}$

De modo geral, sendo a um número real positivo, **n** um número natural maior do que 1 e **m** e **q** números naturais diferentes de zero, temos: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:q]{a^{m:q}}$ e $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:q]{a^{m:q}}$.

- **3ª propriedade**: A raiz de um produto é igual ao produto das raízes dos fatores. De maneira parecida, a raiz de um quociente é igual ao quociente entre a raiz do dividendo e a do divisor. Exemplos:

› $\sqrt[3]{5 \cdot 9} = (5 \cdot 9)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{9}$

› $\sqrt[4]{\frac{6}{7}} = \left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{6^{\frac{1}{4}}}{7^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{7}}$

De modo geral, sendo **a** e **b** números reais positivos e **n** um número natural maior do que 1, temos: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ e $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ou $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$.

- **4ª propriedade**: A raiz de uma raiz pode ser representada por um único radical, no qual o índice é igual ao produto dos índices das raízes iniciais. Exemplos:

› $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \left(\sqrt[4]{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{5}$

› $\sqrt{\sqrt[5]{7}} = \left(\sqrt[5]{7}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(7^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{7}$

De modo geral, sendo a um número real positivo, e n e p números naturais maiores do que 1, temos: $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$.

## Atividades

Anote no caderno

**26.** Calcule.

**a)** $\sqrt[6]{9^6}$ 9 **b)** $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}$ $\frac{1}{2}$ **c)** $\sqrt[3]{(-5)^3}$ $-5$

**27.** Determine o valor de cada letra. A: 1; B: 12; C: 4; D: 2

- $\sqrt[12]{9^4} = \sqrt[3]{9^A}$
- $\sqrt[C]{0{,}6^2} = \sqrt[16]{0{,}6^8}$
- $\sqrt[3]{7^5} = \sqrt[B]{7^{20}}$
- $\sqrt[3]{(-5)^D} = \sqrt[9]{(-5)^6}$

**28.** Escreva as expressões por meio de um único radical.

**a)** $\sqrt{7} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ $\sqrt{252}$ **c)** $\frac{\sqrt[7]{13}}{\sqrt[7]{9}}$ $\sqrt[7]{\frac{13}{9}}$

**b)** $\sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{9}$ $\sqrt[4]{180}$ **d)** $\frac{\sqrt[10]{5}}{\sqrt[10]{4}} \cdot \sqrt[10]{20}$ $\sqrt[10]{25}$

**29.** Observe como Henrique transformou $\sqrt[6]{125}$ em uma raiz quadrada.

$$\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6:3]{5^{3:3}} = \sqrt{5}$$

**a)** Nesse cálculo, que propriedade dos radicais Henrique utilizou? $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:q]{a^{m:q}}$

**b)** De maneira parecida, transforme:

- $\sqrt[4]{289}$ em uma raiz quadrada. $\sqrt{17}$
- $\sqrt[18]{64}$ em uma raiz cúbica. $\sqrt[3]{2}$

**30.** Quais igualdades são verdadeiras?

**a)** $\sqrt[3]{\sqrt{18}} = \sqrt[6]{18}$ V **c)** $\sqrt[15]{42} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{42}}$ V

**b)** $\sqrt[6]{\sqrt{22}} = \sqrt[8]{22}$ F **d)** $\sqrt{\sqrt[12]{74}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{74}}}$ F

**31.** Escreva cada item em um único radical.

**a)** $\sqrt[6]{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[6]{12}$ $\sqrt[6]{20}$ **b)** $\frac{\sqrt[12]{5}}{\sqrt[12]{4}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{6}}$ $\sqrt[12]{\frac{15}{2}}$

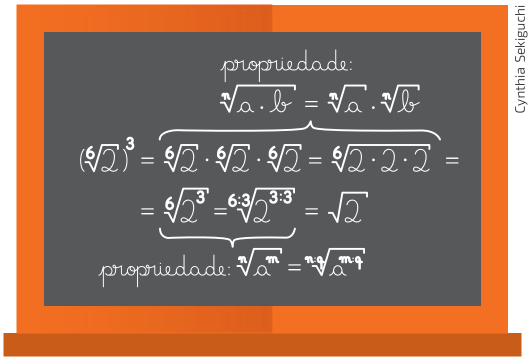
**32.** Podemos utilizar a propriedade $\sqrt[n]{a^n} = a$ para resolver o radical $\sqrt[4]{(-3)^4}$? Justifique sua resposta. não; Possível resposta: nesse caso, $a = -3 < 0$, o que não atende à restrição $a > 0$ da propriedade.

Agora, calcule esse radical. 3

**33.** Sabendo que $\sqrt[3]{5} \simeq 1{,}7$, qual dos valores é mais próximo de $\sqrt[6]{1\,600}$? b

**a)** 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

**34.** Veja como Rui simplificou $\left(\sqrt[6]{2}\right)^3$.



Cynthia Sekiguchi

De maneira parecida, simplifique.

**a)** $\left(\sqrt[8]{7}\right)^2$ $\sqrt[4]{7}$ **b)** $\left(\sqrt[9]{4}\right)^3$ $\sqrt[3]{4}$ **c)** $\left(\sqrt[18]{9^2}\right)^3$ $\sqrt[3]{9}$

**35.** Utilizando uma calculadora comum, podemos obter raízes cujo índice é uma potência de base 2. Veja, por exemplo, como podemos calcular $\sqrt[8]{6\,561}$.

**I** Registramos o número 6 561 e digitamos a tecla √, obtendo $\sqrt{6\,561}$:

6 → 5 → 6 → 1 → √

**II** Digitamos a tecla √ pela 2ª vez, obtendo $\sqrt{\sqrt{6\,561}}$, ou seja, $\sqrt[4]{6\,561}$.

**III** Por fim, digitamos a tecla √ pela 3ª vez, obtendo $\sqrt{\sqrt[4]{6\,561}}$, ou seja, $\sqrt[8]{6\,561}$.

Ilustrações: Keithy Mostachi

Utilizando uma calculadora comum, determine:

**a)** $\sqrt[4]{4\,096}$ 8 **c)** $\sqrt[8]{5\,764\,801}$ 7

**b)** $\sqrt[8]{65\,536}$ 4

- Ao abordar a atividade **30**, se julgar necessário, peça aos alunos que reescrevam as sentenças classificadas como falsas transformando-as em verdadeiras.
- Na atividade **35**, caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, verifique a possibilidade de levar algumas calculadoras para a sala de aula.

- Verifique se os alunos perceberam que, pelo fato de $\sqrt[3]{168}$ ser uma raiz cúbica, é mais conveniente escrever, se possível, os fatores primos de 168 ao cubo. Diga a eles que isso também ocorre com a raiz quadrada e com as outras raízes.
- Para a resolução da atividade **40**, verifique se os alunos notaram que é possível introduzir o fator externo no radicando para facilitar a comparação entre os números.

# Simplificação de radicais

Muitas vezes, quando necessário, podemos escrever um radical de maneira simplificada, como, por exemplo, com um radicando menor.

Observe como podemos simplificar algumas raízes.

- $\sqrt{99}$

Decompomos o radicando em fatores primos.

| | | |
|---|---|---|
| 99 | 3 | $3^2$ |
| 33 | 3 | |
| 11 | 11 | |
| 1 | | |

Como 99 = 3 · 3 · 11, temos:

$$\sqrt{99} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 11} = \sqrt{3^2 \cdot 11}$$

Utilizando as propriedades $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ e $\sqrt[n]{a^n} = a$, temos:

$$\sqrt{3^2 \cdot 11} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{11} = 3\sqrt{11}$$

Portanto, $\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$.

- $\sqrt[3]{168}$

| | | |
|---|---|---|
| 168 | 2 | $2^3$ |
| 84 | 2 | |
| 42 | 2 | |
| 21 | 3 | |
| 7 | 7 | |
| 1 | | |

$$\sqrt[3]{168} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} =$$
$$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3 \cdot 7} =$$
$$= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 7} =$$
$$= 2\sqrt[3]{21}$$

Portanto, $\sqrt[3]{168} = 2\sqrt[3]{21}$.

## Atividades

Anote no caderno

**36.** Simplifique as raízes.

**a)** $\sqrt{162}$ $9\sqrt{2}$

**b)** $\sqrt[4]{405}$ $3\sqrt[4]{5}$

**c)** $\sqrt[3]{2\,808}$ $6\sqrt[3]{13}$

**d)** $\sqrt[5]{18\,711}$ $3\sqrt[5]{77}$

**37.** Determine o valor de cada ■.

**a)** $\sqrt{175} = \overset{5}{■}\sqrt{7}$

**b)** $\sqrt{92} = 2\sqrt{\underset{23}{■}}$

**c)** $\sqrt{\underset{567}{■}} = 9\sqrt{7}$

**d)** $\sqrt{153} = \overset{3}{■}\sqrt{17}$

**e)** $\sqrt[3]{768} = 4\sqrt[3]{\underset{12}{■}}$

**f)** $\sqrt[3]{\underset{540}{■}} = 3\sqrt[3]{20}$

**38.** Associe os itens cujos cálculos apresentam o mesmo resultado, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes.
a-III; b-IV; c-I; d-II

**a)** $\sqrt[3]{5^3 \cdot 6^4}$

**b)** $\sqrt[3]{5^4 \cdot 6^4}$

**c)** $\sqrt[3]{5^4 \cdot 6^5}$

**d)** $\sqrt[3]{5^4 \cdot 6^3}$

**I)** $30\sqrt[3]{5 \cdot 6^2}$

**II)** $30\sqrt[3]{5}$

**III)** $30\sqrt[3]{6}$

**IV)** $30\sqrt[3]{30}$

**39.** Observe como Vanessa introduziu o fator externo de $2\sqrt[3]{5}$ no radicando.

$$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} =$$
$$= \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$$

De maneira parecida, introduza o fator externo no radicando.

**a)** $3\sqrt[3]{6}$ $\sqrt[3]{162}$

**b)** $7\sqrt{2}$ $\sqrt{98}$

**c)** $2\sqrt[4]{8}$ $\sqrt[4]{128}$

**d)** $6\sqrt[3]{3}$ $\sqrt[3]{648}$

**e)** $4\sqrt{3{,}5}$ $\sqrt{56}$

**f)** $5\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$ $\sqrt[3]{5}$

**40.** Utilizando o símbolo <, escreva os números em ordem crescente.
$2\sqrt{11} < 3\sqrt{6} < 3\sqrt{7} < 6\sqrt{2} < 5\sqrt{3} < 8\sqrt{2} < 7\sqrt{3}$

$5\sqrt{3}$ $6\sqrt{2}$ $7\sqrt{3}$ $3\sqrt{6}$

$2\sqrt{11}$ $3\sqrt{7}$ $8\sqrt{2}$

# Operações com radicais

Em muitas situações podemos realizar operações com radicais, como adição, subtração, multiplicação e divisão. Essas operações podem simplificar expressões envolvendo radicais.

Veja como podemos calcular a expressão $\sqrt{48} + \sqrt{588} - \sqrt{300}$.

Inicialmente, simplificamos cada radical da expressão.

$$\begin{array}{r|l} \begin{matrix}48\\24\end{matrix} & \left.\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}2^2 \\ \begin{matrix}12\\6\end{matrix} & \left.\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}2^2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \begin{matrix}588\\294\end{matrix} & \left.\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}2^2 \\ 147 & 3 \\ \begin{matrix}49\\7\end{matrix} & \left.\begin{matrix}7\\7\end{matrix}\right\}7^2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \begin{matrix}300\\150\end{matrix} & \left.\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}2^2 \\ 75 & 3 \\ \begin{matrix}25\\5\end{matrix} & \left.\begin{matrix}5\\5\end{matrix}\right\}5^2 \\ 1 & \end{array}$$

- $\sqrt{48} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
- $\sqrt{588} = \sqrt{2^2 \cdot 7^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{3} = 14\sqrt{3}$
- $\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

Assim, temos: $\sqrt{48} + \sqrt{588} - \sqrt{300} = 4\sqrt{3} + 14\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$.

Colocamos $\sqrt{3}$ em evidência.

$$4\sqrt{3} + 14\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = (4 + 14 - 10)\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

Portanto, $\sqrt{48} + \sqrt{588} - \sqrt{300} = 8\sqrt{3}$.

Agora, veja como podemos realizar multiplicações e divisões envolvendo radicais de mesmo índice.

- $\sqrt{80} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{80 \cdot 15} = \sqrt{1\,200} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2} = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 20\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{2\,160} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2\,160 : 5} = \sqrt[3]{432} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$

## Atividades

Anote no caderno

**41.** Simplifique as expressões.

**a)** $-\sqrt{54} - \sqrt{486} - \sqrt{294}$ $-19\sqrt{6}$

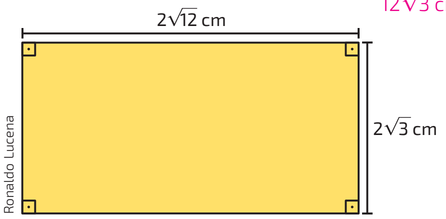
**b)** $\sqrt{128} + \sqrt{50} - \sqrt{98} + \sqrt{242}$ $17\sqrt{2}$

**c)** $\sqrt[3]{189} - \sqrt[3]{448} - \sqrt[3]{875}$ $-6\sqrt[3]{7}$

**d)** $\sqrt{396} - \sqrt{108} + \sqrt{176} + \sqrt{675}$ $10\sqrt{11} + 9\sqrt{3}$

**e)** $\sqrt{300} + \sqrt{50} - \sqrt{162} - \sqrt{243}$ $\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

**42.** Calcule a medida do perímetro do retângulo, simplificando o resultado se possível. $12\sqrt{3}$ cm



- Ao apresentar o cálculo da expressão composta pela adição e subtração de radicais, lembre os alunos do modo de fatorar evidenciando um fator comum.
- Ao trabalhar com a atividade **42**, lembre os alunos de que a medida do perímetro é dada pela soma das medidas dos comprimentos dos lados.

- Para resolver cada item da atividade **43**, verifique se os alunos perceberam que, inicialmente, devem simplificar cada radical que compõe a expressão.
- Na atividade **47**, se for necessário, lembre os alunos das fórmulas para calcular a medida da área do retângulo e a do triângulo.
- Após realizar as atividades dessa página, verifique a possibilidade de realizar a **Atividade complementar** da página seguinte, com o intuito de promover a interação dos alunos, desenvolver o raciocínio lógico-matemático e aplicar conceitos de radiciação estudados até o momento de maneira lúdica.

**43.** De acordo com as informações do quadro, calcule o valor aproximado de:

$\sqrt{6} \simeq 2,45$

$\sqrt{7} \simeq 2,65$

$\sqrt{11} \simeq 3,32$

**a)** $\sqrt{44} + 2\sqrt{99}$ 26,56

**b)** $2\sqrt{24} - \sqrt{54}$ 2,45

**c)** $-\sqrt{252} + \sqrt{28}$ −10,6

**d)** $\sqrt{96} + \sqrt{11} - 3\sqrt{112}$ −18,68

**44.** Determine os números correspondentes a cada letra nas igualdades. A: 50 B: $9\sqrt{14}$

$\sqrt{72} + \sqrt{A} = 11\sqrt{2}$

$\sqrt{126} + 3\sqrt{56} = B$

**45.** Sendo $a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt{3}$, qual dos itens corresponde a $\sqrt{162} - \sqrt{588} + \sqrt{450}$? c

**a)** $17a - 14b$

**b)** $24a - 17b$

**c)** $24a - 14b$

**d)** $14a - 24b$

**46.** Efetue os cálculos.

**a)** $\sqrt{648} : \sqrt{6}$ $6\sqrt{3}$

**b)** $\sqrt{76} \cdot \sqrt{12}$ $4\sqrt{57}$

**c)** $\sqrt[3]{1875} : \sqrt[3]{3}$ $5\sqrt[3]{5}$

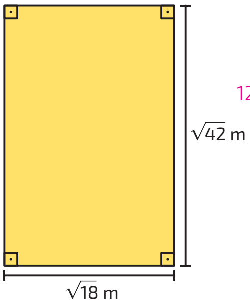
**d)** $\sqrt[4]{144} : \sqrt[4]{9}$ 2

**e)** $\sqrt{12} \cdot \sqrt{14} : \sqrt{3}$ $2\sqrt{14}$

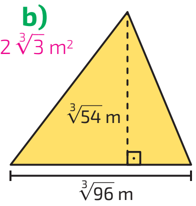
**f)** $\sqrt[3]{320} : \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{20}$ $4\sqrt[3]{20}$

**47.** Calcule a medida da área dos polígonos, simplificando o resultado quando possível.

**a)** $6\sqrt{21}$ m²



**b)** $12\sqrt[3]{3}$ m²



Ilustrações: Ronaldo Lucena

**48.** Determine o valor de **x** nas igualdades.

**a)** $\sqrt{34} \cdot \sqrt{8} = 4\sqrt{x}$ $x = 17$

**b)** $\sqrt{x} \cdot \sqrt{40} = 8\sqrt{10}$ $x = 16$

**c)** $\sqrt{4^x} : \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ $x = 3$

**d)** $\sqrt{550} : \sqrt{11} = x\sqrt{2}$ $x = 5$

**49.** Simplifique a seguinte expressão. $4\sqrt{7} - 9$

$\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{126} + \sqrt{56}\right) - \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{84} - \sqrt{3} + \sqrt{48}\right)$

**50.** Veja como Bruna resolveu a expressão $\sqrt{63} \cdot \left(\sqrt{14} + \sqrt{126}\right)$.

$\sqrt{63} \cdot \left(\sqrt{14} + \sqrt{126}\right) =$

$= \sqrt{63 \cdot 14} + \sqrt{63 \cdot 126} =$

$= \sqrt{882} + \sqrt{7\,938} =$

$= \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} + \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} =$

$= 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{2} =$

$= 21\sqrt{2} + 63\sqrt{2} = 84\sqrt{2}$

De maneira parecida, calcule.

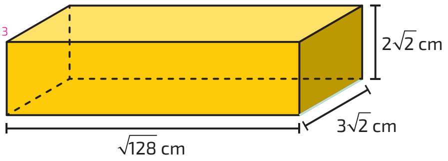
**a)** $\sqrt{12} \cdot \left(\sqrt{8} + \sqrt{15}\right)$ $4\sqrt{6} + 6\sqrt{5}$

**b)** $\left(\sqrt{6} + \sqrt{32}\right) \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt{24}\right)$ $-4 - 14\sqrt{3}$

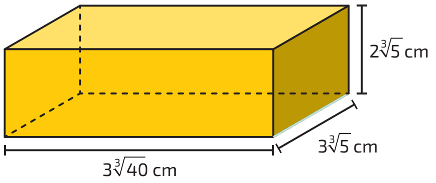
**51.** A medida da área de um retângulo é $2\sqrt{336}$ cm². Sabendo que seu menor lado mede $\sqrt{8}$ cm de comprimento, quantos centímetros de comprimento tem o maior lado desse retângulo? $2\sqrt{42}$ cm

**52.** Calcule a medida do volume de cada paralelepípedo retângulo.

**a)** $96\sqrt{2}$ cm³



**b)** 180 cm³



Ilustrações: Ronaldo Lucena

› Quando possível, simplifique o resultado.

**53.** Escreva uma multiplicação de dois radicais cujo produto seja: Possível resposta:

**a)** $4\sqrt{13}$ $\sqrt{26} \cdot \sqrt{8}$ **b)** $\sqrt[5]{10}$ $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{5}$ **c)** $2\sqrt[3]{72}$ $\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{18}$

Agora, junte-se a um colega para comparar as multiplicações que vocês fizeram.

# Racionalização de denominador

Observe algumas frações cujos denominadores são raízes não exatas.

- $\frac{5}{\sqrt{10}}$
- $\frac{4}{\sqrt[3]{11}}$
- $\frac{2}{\sqrt{6}}$
- $\frac{7}{\sqrt[4]{3}}$
- $\frac{8}{2\sqrt{15}}$

Para facilitar as operações entre frações com essa característica, podemos utilizar a **racionalização de denominador**.

Esse artifício consiste em transformar uma fração em outra equivalente de maneira que não haja radical em seu denominador.

Veja, por exemplo, como podemos racionalizar o denominador de $\frac{5}{\sqrt{10}}$.

Inicialmente, temos de determinar a fração conveniente que multiplicará $\frac{5}{\sqrt{10}}$.

Como $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{100} = 10$, multiplicamos a fração por $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$, eliminando assim a raiz do denominador.

$$\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Note que $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$. Assim, ao multiplicarmos $\frac{5}{\sqrt{10}}$ por essa fração, não alteramos seu valor.

Ao realizarmos por escrito o cálculo aproximado de $\frac{5}{\sqrt{10}}$ e $\frac{\sqrt{10}}{2}$, sabendo que $\sqrt{10} \simeq 3{,}162$, perceberemos que é mais prático o cálculo em que o denominador não é um radical.

- $\frac{5}{\sqrt{10}} \simeq 5 : 3{,}162$

```
5 0 0 0      |3 1 6 2
1 8 3 8 0     1, 5 8 1 ...
  2 5 7 0 0
    4 0 4 0
      8 7 8
        ⋮
```

- $\frac{\sqrt{10}}{2} \simeq 3{,}162 : 2$

```
3 1 6 2        |2 0 0 0
1 1 6 2 0       1, 5 8 1
  1 6 2 0 0
      2 0 0 0
            0
```

## Atividades

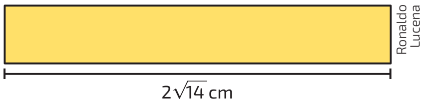
Anote no caderno

**54.** Racionalize o denominador das frações.

**a)** $\frac{3}{\sqrt{2}}$ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **c)** $\frac{5}{\sqrt{14}}$ $\frac{5\sqrt{14}}{14}$ **d)** $\frac{12}{\sqrt{6}}$ $2\sqrt{6}$ **e)** $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}}$ $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ **f)** $\sqrt{\frac{3}{8}}$ $\frac{\sqrt{6}}{4}$

**55.** Considerando $\sqrt{5} \simeq 2{,}24$, calcule o valor aproximado de $-\frac{4}{\sqrt{20}}$. $-0{,}893$

**56.** Determine a medida do comprimento do menor lado do retângulo, sabendo que sua medida de área é $6\sqrt{2}$ cm². $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ cm



Ronaldo Lucena

### Atividade complementar

**Jogando com as raízes**

**Materiais**

- fichas do jogo
- cartolina
- tesoura
- cola

**Desenvolvimento**

- Peça aos alunos que formem grupos com três integrantes cada.
- Reproduza as fichas que se encontram nas **Páginas para reprodução** e entregue-as aos grupos, pedindo para colarem a folha em uma cartolina e recortarem as fichas, a fim de aumentar a durabilidade delas.
- Cada participante receberá seis fichas, e as restantes deverão ficar no centro da mesa, empilhadas com as faces voltadas para baixo. Os jogadores devem formar pares de fichas contendo o radical e a raiz correspondente. Caso o 1º jogador não tenha fichas que formem um par, deverá comprar uma ficha da pilha; caso forme um par, deverá dispor sobre a mesa para todos verem. Se, ainda assim, não formar o par, deve realizar o descarte da ficha comprada.
- O participante seguinte poderá escolher entre a carta descartada imediatamente antes ou pegar uma da pilha. Após a escolha, deverá tentar formar um par e, caso não consiga, descartar uma carta, e assim sucessivamente.
- Vencerá o jogo quem formar três pares primeiro ou, caso acabem as cartas do monte, quem conseguir o maior número de pares. Caso ocorra empate, o vencedor será aquele que obtiver a maior soma dos números naturais apresentados nas cartas que formaram pares.

- Na atividade **57**, se for necessário, peça aos alunos que resolvam um dos itens da questão **c** para responder ao item **b** com maior propriedade.
- Na atividade **58**, verifique se eles perceberam que a fração $\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ foi escolhida convenientemente, de maneira que o radical $\left(\sqrt{2}\right)$ fosse elevado ao quadrado e, assim, eliminado do denominador.

**57.** Na lousa, há duas maneiras de racionalizar o denominador de $\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

Cynthia Sekiguchi

1ª maneira:

$$\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

2ª maneira:

$$\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

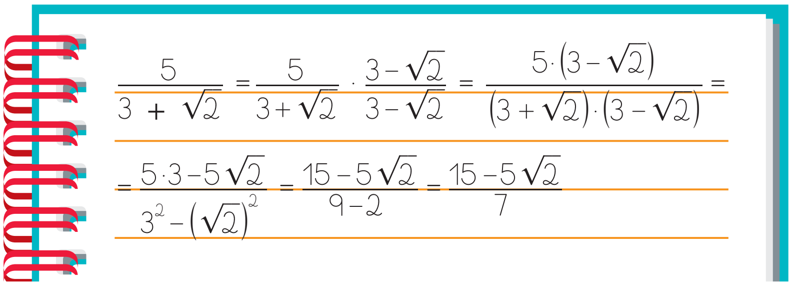
**a)** Ambas as maneiras de racionalização de denominadores estão corretas? sim

**b)** Qual dessas maneiras você prefere? Por quê? Resposta pessoal.

**c)** Racionalize o denominador de cada fração da maneira que preferir.

- $\frac{9}{4\sqrt{2}}$ $\frac{9\sqrt{2}}{8}$
- $\frac{1}{8\sqrt{11}}$ $\frac{\sqrt{11}}{88}$
- $\frac{6}{5\sqrt{3}}$ $\frac{2\sqrt{3}}{5}$
- $\frac{10}{7\sqrt{6}}$ $\frac{5\sqrt{6}}{21}$

**58.** Veja como Rodrigo racionalizou o denominador de $\frac{5}{3+\sqrt{2}}$.



$$\frac{5}{3+\sqrt{2}} = \frac{5}{3+\sqrt{2}} \cdot \frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \left(3-\sqrt{2}\right)}{\left(3+\sqrt{2}\right) \cdot \left(3-\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{5 \cdot 3 - 5\sqrt{2}}{3^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{15-5\sqrt{2}}{9-2} = \frac{15-5\sqrt{2}}{7}$$

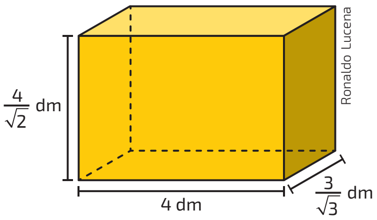
**a)** Qual dos produtos notáveis a seguir Rodrigo utilizou na racionalização? $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**b)** De maneira parecida, racionalize o denominador de:

- $\frac{9}{9+\sqrt{5}}$ $\frac{81-9\sqrt{5}}{76}$
- $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}-4}$ $-\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{4}$
- $\frac{13}{1-\sqrt{7}}$ $-\frac{13+13\sqrt{7}}{6}$
- $\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{6}}$ $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{4}$

**59.** Calcule a medida do volume do paralelepípedo retângulo e racionalize o denominador, se for necessário. $8\sqrt{6}\ \text{dm}^3$



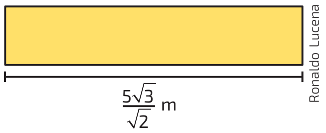
**60.** Observe como podemos racionalizar o denominador de $\frac{8}{\sqrt[3]{2^2}}$.

$$\frac{8}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{8}{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{8\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 2}} = \frac{8\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{8\sqrt[3]{2}}{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

De maneira parecida, racionalize os denominadores das frações a seguir.

**a)** $\frac{7}{\sqrt[8]{3^5}}$ $\frac{7\sqrt[8]{3^3}}{3}$ **b)** $\frac{4}{\sqrt[6]{5}}$ $\frac{4\sqrt[6]{5^5}}{5}$ **c)** $\frac{9}{\sqrt[7]{3^5}}$ $3\sqrt[7]{3^2}$ **d)** $\frac{6}{\sqrt[10]{15^4}}$ $\frac{2\sqrt[5]{15^3}}{5}$

**61.** Observe o retângulo a seguir.



Sabendo que esse retângulo tem medida de área igual a 7,5 m², elabore um problema usando essas informações e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se a resposta dele está correta. Resposta pessoal.

## Explorando o que estudei

Anote no caderno

**1.** Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? Potenciação, radiciação, potência com expoente fracionário, propriedades dos radicais, simplificação de radicais, operações com radicais e racionalização de denominador.

**2.** Sendo $a = (2^2)^3$, $b = 8^2$ e $c = 16^{-3}$, calcule o produto de $a \cdot b \cdot c$. 1

**3.** Aplicando as propriedades das potências, escreva com uma única potência de 2 a expressão $(16^2 \cdot 64)^3 : 2^{35}$. $2^7$

**4.** Descreva os procedimentos utilizados para calcular a raiz quadrada aproximada por meio do método de Herão. Possível resposta: de acordo com o método de Herão, para obter a raiz quadrada aproximada de um número **n**, calcula-se a média aritmética entre dois outros números, cujo produto entre eles seja igual a **n**. Quanto mais próximos forem esses outros dois números, melhor será a aproximação para a raiz quadrada de **n**.

**5.** É possível calcular a raiz quinta de –32 no conjunto dos números reais? Justifique sua resposta. sim; $\sqrt[5]{-32} = -2$, pois $(-2)^5 = -32$.

**6.** Como você faria para escrever a potência $a^{0,25}$, com $a > 0$, por meio de um radical? Possível resposta: $a^{0,25} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$.

**7.** Quais são as vantagens de racionalizar o denominador de uma fração? Possível resposta: facilitar as operações com frações que apresentam radical no denominador.

- Ao trabalhar com a atividade **59**, lembre os alunos de que a medida do volume de um paralelepípedo retângulo é dada pela multiplicação das medidas da largura, altura e comprimento.
- Na atividade **60**, verifique se os alunos perceberam que a fração $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$ foi escolhida convenientemente para que no produto dos denominadores fosse possível obter um radical na forma $\sqrt[n]{a^n}$.
- Aproveite a atividade de **61** para avaliar a leitura e a interpretação de imagens, e como os alunos utilizam o conhecimento adquirido para elaborar o problema. Eles podem formular problemas como:
  - Determine a medida do comprimento do menor lado do retângulo.

    R $\frac{\sqrt{6}}{2}$

### Avaliação

- Aproveite as questões apresentadas na seção **Explorando o que estudei** para avaliar o conhecimento dos alunos a respeito dos conteúdos abordados. Para isso, peça para responderem às questões individualmente em uma folha de papel e, em seguida, trocarem com um colega para fazer a correção. Por fim, promova uma discussão, de modo que eles exponham suas interpretações a respeito do tema.

- Na questão **6**, verifique se os alunos perceberam que é conveniente transformar o expoente de $a^{0,25}$ em fração e, em seguida, utilizar a relação $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Esse capítulo levará os alunos ao reconhecimento de equações do 2º grau, à identificação dos elementos que as compõem e à classificação dessas equações em completas ou incompletas. Os alunos também serão estimulados a escrever equações do 2º grau na forma reduzida, representar situações por meio delas e determinar suas soluções.

Além disso, os assuntos trabalhados possibilitarão que os alunos compreendam a relação entre as raízes de uma equação do 2º grau e seu discriminante e entre as raízes e seus coeficientes, e ainda que avançem para a resolução de sistemas que recaem em equações do 2º grau.

- A abertura desse capítulo apresenta um breve histórico sobre os satélites artificiais e suas principais finalidades. Uma sugestão de trabalho é realizar uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes opiniões dos alunos. As questões propostas podem ser respondidas individualmente ou em grupos de dois ou três alunos. Ao final, é importante que as respostas sejam discutidas pela turma. Para complementar o estudo do tema, verifique a possibilidade de levar os alunos a um laboratório de informática para que possam utilizar o programa de computador *Google Earth* ou acessar o *site Google Maps*, em que é possível observar fotografias de diversas partes do mundo produzidas por satélite.

# Capítulo 2

## Equações do 2º grau e sistemas de equações

A ciência tecnológica espacial, com base nas teorias sobre gravitação de Isaac Newton (1643-1727), evoluiu consideravelmente nas últimas décadas, permitindo a criação de satélites artificiais que orbitam o planeta Terra com diversas finalidades, entre elas a de transmitir sinais de comunicação telefônica, televisiva e virtual, e a de observação, importante para estudos sobre meio ambiente.

Atualmente, é possível observar fotografias de quase todas as partes da Terra tiradas por satélites artificiais. Os satélites podem fotografar com diferentes níveis de *zoom* e resolução como se a imagem de uma determinada área estivesse a poucos metros. As fotografias são enviadas à Terra por meio de antenas receptivas.

### Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

**A** De acordo com o texto, quem contribuiu com importantes teorias sobre gravitação que possibilitaram aos satélites artificiais orbitarem o planeta Terra?

**B** Em sua opinião, qual é a importância dos satélites artificiais?

**C** Suponha que certo satélite artificial fotografou uma região terrestre de formato retangular cuja medida do comprimento é igual ao dobro da medida da largura. Sabendo que a área da região fotografada mede 8 km$^2$, determine a medida de suas dimensões.

**Satélites artificiais**
Veja mais informações sobre satélites artificiais no *site*: <www.aeb.gov.br/programa-espacial-brasileiro/satelites> (acesso em: 31 out. 2018).

**BNCC em foco**

- As páginas de abertura relacionam-se diretamente com o tema contemporâneo **Ciência e tecnologia**. Diga aos alunos que as mudanças na sociedade e o desenvolvimento tecnológico andam juntos e, desde a antiguidade, foram sendo criadas técnicas para atender a determinadas necessidades do ser humano. Aproveite para evidenciar, por exemplo, a ligação do aprimoramento de ferramentas de geolocalização com o tema, perguntando aos alunos se eles já fizeram uso dessa tecnologia e como avaliam a experiência.

Satélite em órbita ao redor da Terra.

Vadim Sadovski/Shutterstock.com

### Pensando nisso...

**A** Isaac Newton

**B** Possíveis respostas: transmitir sinais de telefonia, televisão e internet; fotografar partes do planeta para compor mapas ou detectar desmatamentos em florestas.

**C** A medida da largura é 2 km e a do comprimento é 4 km.

- No item **B**, pergunte aos alunos quais desses serviços disponibilizados pela tecnologia dos satélites eles possuem ou com os quais já tiveram contato.
- Na questão **C**, em que os alunos devem determinar a medida das dimensões da região fotografada, são trabalhadas, de maneira intuitiva, ideias relacionadas a equações do 2º grau, especificamente a equação $2x \cdot x = 8$, em que $x$ corresponde à medida da largura, em quilômetros, da região fotografada. Portanto, nesse momento, é importante que os alunos sejam estimulados a resolver o problema utilizando estratégias já trabalhadas anteriormente.

**Objetivos do capítulo**

- Reconhecer uma equação do 2º grau.
- Identificar os elementos de uma equação do 2º grau.
- Classificar equações do 2º grau em completas ou incompletas.
- Escrever equações do 2º grau na forma reduzida.
- Representar situações por meio de uma equação do 2º grau.
- Determinar as soluções de uma equação do 2º grau.
- Determinar a quantidade de raízes reais distintas de uma equação do 2º grau analisando o valor do discriminante.
- Compreender a relação entre as raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau.
- Resolver sistemas que recaem em equações do 2º grau.

- Ao apresentar os exemplos de equações já estudadas pelos alunos, se julgar conveniente, peça que resolvam e proponha mais equações do tipo $ax^2=b$, observando os métodos utilizados por eles em suas resoluções.

# Equações do 2º grau com uma incógnita

Em anos anteriores estudamos as **equações**, que são sentenças matemáticas expressas por igualdades em que há pelo menos uma letra que representa um número desconhecido, chamada **incógnita**. Veja alguns exemplos:

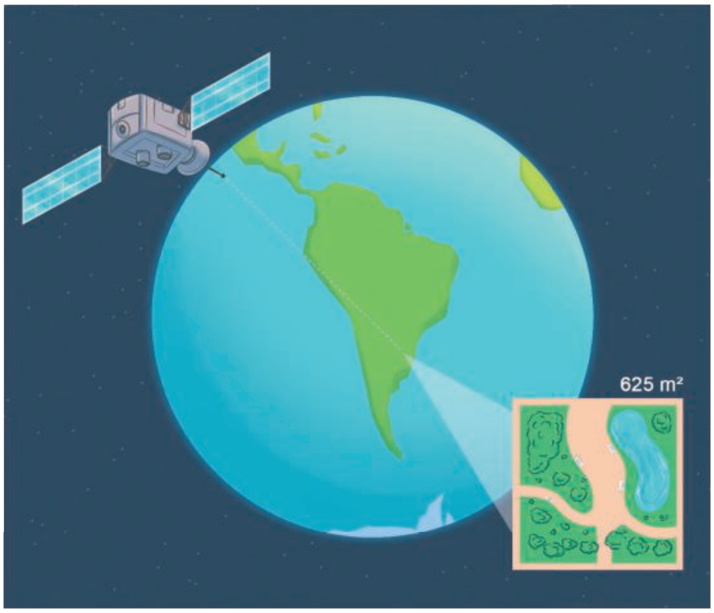
- $x - 4 = 12$
- $-5x^2 = -25$
- $9 - 7x = 3x + 7$

Neste capítulo, vamos aprofundar o estudo das equações, cujo maior expoente da incógnita é 2.

Veja uma situação que está associada a uma equação desse tipo.

Certo satélite artificial fotografou uma região da Terra de formato quadrado, medindo 625 m² de área.

Qual é a medida do comprimento do lado da região fotografada pelo satélite?



Rafael Lam

Para resolver o problema, representamos por **x** a medida do comprimento do lado da região fotografada e escrevemos a equação:

$$x \cdot x = 625$$
$$x^2 = 625$$

Temos dois números cujo quadrado é 625, isto é:

$$x = +25 \qquad x = -25$$

Nesse caso, **x** corresponde à medida do lado da região, que deve ser positiva. Assim, desconsideramos o valor negativo −25.

Portanto, a região fotografada tem 25 m de medida de comprimento de lado.

Na equação $x^2 = 625$, o maior expoente da incógnita é 2. Dizemos que essa é uma **equação do 2º grau com uma incógnita**.

**Material digital**

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **1**, **2** e **3** do 1º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo que reoriente o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

Uma equação do 2º grau com incógnita **x** pode ser escrita da seguinte maneira: $ax^2 + bx + c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são números reais com $a \neq 0$.

Essa igualdade é a **forma reduzida** de uma equação do 2º grau. Nela, **a**, **b** e **c** são os **coeficientes**, sendo **a** o coeficiente de $x^2$, **b** o coeficiente de **x**, e **c** o termo independente.

As equações do 2º grau em que **a**, **b** e **c** são diferentes de zero são denominadas **completas**. Já aquelas em que $b = 0$, $c = 0$ ou $b = c = 0$ são as **incompletas**.

Exemplos:

- Equação do 2º grau completa, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$:

$$x^2 - 2x + 15 = 0, \text{ com } a = 1,\ b = -2 \text{ e } c = 15$$

- Equação do 2º grau incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$:

$$2x^2 + x = 0, \text{ com } a = 2,\ b = 1 \text{ e } c = 0$$

- Equação do 2º grau incompleta do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$, $b = 0$ e $c \neq 0$:

$$-x^2 + 6 = 0, \text{ com } a = -1,\ b = 0 \text{ e } c = 6$$

- Equação do 2º grau incompleta do tipo $ax^2 = 0$, com $a \neq 0$, $b = 0$ e $c = 0$:

$$7x^2 = 0, \text{ com } a = 7,\ b = 0 \text{ e } c = 0$$

## Atividades

Anote no caderno

**1.** Quais equações são do 2º grau? a; b; d; e

**a)** $x + 5x^2 = 2$

**b)** $5 - 3x = x^2$

**c)** $\frac{7}{2}x + 1 = 21x$

**d)** $-x^2 + 18 = 5 + 4x^2$

**e)** $x^2 + 3 = 5x^2 + 1$

**f)** $3x^3 + 2x = 0$

**2.** Para os coeficientes indicados em cada item, escreva uma equação do 2º grau na forma reduzida. 2. e) $-\sqrt{\frac{1}{3}}x^2 - \sqrt{2}x + \frac{3}{2} = 0$

**a)** $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = 5$ $2x^2 + \frac{1}{2}x + 5 = 0$

**b)** $a = -3$, $b = 1$ e $c = -1$ $-3x^2 + x - 1 = 0$

**c)** $a = 5$, $b = 0$ e $c = -1$ $5x^2 - 1 = 0$

**d)** $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{3}$ e $c = 0$ $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x = 0$

**e)** $a = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, $b = -\sqrt{2}$ e $c = \frac{3}{2}$

**3.** Indique os coeficientes de cada equação e classifique-as em completa ou incompleta. Respostas nas orientações ao professor.

**a)** $-x^2 + 4 = 0$

**b)** $x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$

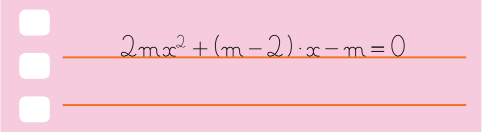
**c)** $\frac{1}{2}x^2 + 2x = 0$

**d)** $-3x^2 + 7 = 0$

**e)** $\frac{1}{9}x^2 - x + 2 = 0$

**f)** $\sqrt[3]{2}x^2 + \frac{2}{5}x + 1 = 0$

**4.** Observe a equação que Milena escreveu.



$2mx^2 + (m - 2) \cdot x - m = 0$

Nessa equação, a incógnita é representada pela letra **x**, e os coeficientes são: $a = 2m$, $b = (m - 2)$ e $c = -m$.

Para qual valor de **m** essa equação:

**a)** não é do 2º grau? $m = 0$

**b)** é do 2º grau incompleta? $m = 2$

> A uma equação que apresenta outras letras além da incógnita damos o nome de **equação literal**.

**5.** Escreva as equações na forma reduzida.

**a)** $(2x + 1) \cdot \left(\frac{x}{2} - 2\right) = x + 5$ $x^2 - \frac{9}{2}x - 7 = 0$

**b)** $\left(\frac{2x}{3} + 1\right) \cdot 3x = 5 \cdot (x - 4) + 20$ $2x^2 - 2x = 0$

**c)** $x^2 - (x - 1) \cdot (2x - 2) = 3x$ $-x^2 + x - 2 = 0$

**d)** $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 5x = x - 1$ $\frac{x^2}{3} - 6x + 1 = 0$

- Ao trabalhar a atividade **1**, peça aos alunos que, inicialmente, simplifiquem as equações de maneira que as do 2º grau fiquem na forma reduzida.

**Respostas**

**3. a)** $a = -1$, $b = 0$ e $c = 4$; incompleta

**b)** $a = 1$, $b = 2$ e $c = -\frac{1}{2}$; completa

**c)** $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$ e $c = 0$; incompleta

**d)** $a = -3$, $b = 0$ e $c = 7$; incompleta

**e)** $a = \frac{1}{9}$, $b = -1$ e $c = 2$; completa

**f)** $a = \sqrt[3]{2}$, $b = \frac{2}{5}$ e $c = 1$; completa

- Veja uma possível resolução para o desafio proposto na atividade **4**.

**a)** Não será do 2º grau quando $a = 0$, ou seja: $2m = 0 \rightarrow m = 0$.

**b)** Será do 2º grau incompleta quando $a \neq 0$ e um dos coeficientes, **b** ou **c**, for igual a 0.

- $b = 0$
  $m - 2 = 0$
  $m = 2$
- $c = 0$
  $m = 0$
  Como $a = 0$ para $m = 0$, a única possibilidade é $m = 2$.

- Para resolver a atividade **9**, lembre os alunos das fórmulas para calcular a medida da área do quadrado ($A = l^2$, em que **l** é a medida do comprimento do lado) e a do losango ($A = \frac{D \cdot d}{2}$, em que **D** é a medida da do comprimento diagonal maior e **d** é a medida do comprimento da diagonal menor).

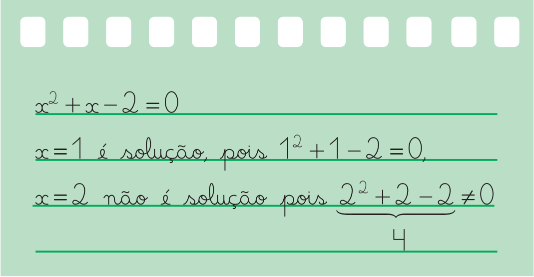
**6.** Escreva três equações do 2º grau:

**a)** completas. Possível resposta: $2x^2 - 5x + 8 = 0$; $-x^2 + 3x - 1 = 0$; $\sqrt{3}x^2 + x - \frac{1}{3} = 0$

**b)** incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$. $2x^2 + 5x = 0$; $-7x^2 + \sqrt{2}x = 0$; $-x^2 + \frac{3}{2}x = 0$

**c)** incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$. $-7x^2 + 2 = 0$; $\frac{1}{3}x^2 - 1 = 0$; $x^2 + 8 = 0$

**7.** Resolver uma equação é determinar o valor desconhecido da incógnita, ou seja, obter a **solução** ou a **raiz** da equação. Uma das maneiras de determinar a solução de uma equação do 2º grau é por meio de tentativas, atribuindo valores à incógnita até obter uma igualdade verdadeira. Observe um exemplo.



$x^2 + x - 2 = 0$

$x = 1$ é solução, pois $1^2 + 1 - 2 = 0$,

$x = 2$ não é solução pois $\underbrace{2^2 + 2 - 2}_{4} \neq 0$

Em cada item, verifique quais dos números indicados são solução da equação.

**a)** $x^2 - 4 = 0$ $x = -2$ e $x = 2$

$x = -1$ | $x = -2$ | $x = 2$

**b)** $x^2 + 2x + 1 = 0$ $x = -1$

$x = 1$ | $x = -1$ | $x = \frac{5}{2}$

**c)** $-\frac{3}{4}x^2 + x + 1 = 0$ $x = 2$

$x = 2$ | $x = -8$ | $x = 5$

**d)** $x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1$ e $x = 2$

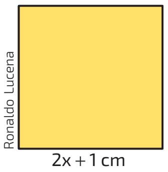
$x = -1$ | $x = -\frac{5}{8}$ | $x = 2$

**e)** $4x^2 - 5x = 0$ $x = \frac{5}{4}$

$x = -3$ | $x = \frac{5}{4}$ | $x = \sqrt{10}$

**8.** Escreva uma equação do 2º grau na forma reduzida que represente cada situação.

**a)** A medida da área de um quadrado cujo comprimento do lado mede $2x + 1$ cm é igual a 16 cm². $4x^2 + 4x - 15 = 0$

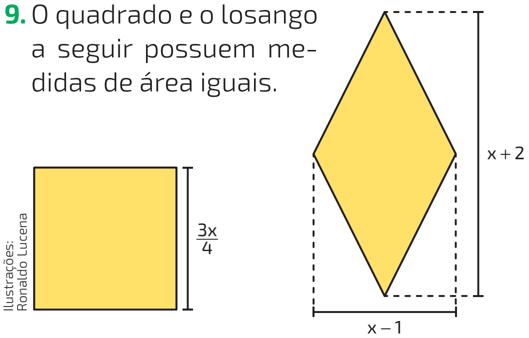


**b)** O quadrado de um número **x**, menos 8, é igual a 6. $x^2 - 14 = 0$

**c)** Um número **x**, menos 15, é igual ao quadrado de **x**. $x^2 - x + 15 = 0$

**d)** O triplo do quadrado de um número **x**, menos o dobro desse número, é igual à quinta parte de **x**. $3x^2 - \frac{11x}{5} = 0$

**9.** O quadrado e o losango a seguir possuem medidas de área iguais.



**a)** Escreva uma equação do 2º grau na forma reduzida que represente essa igualdade. Possível resposta: $2x^2 - 16x + 32 = 0$

**b)** Quais são os coeficientes dessa equação? Ela é completa ou incompleta? Possível resposta: $a = 2$, $b = -16$ e $c = 32$; completa

**10.** Junte-se a um colega e, com base nas equações a seguir, resolvam as questões.

**I )** $x \cdot (x - 2) = 0$

**II )** $(x + 3) \cdot (2x + 10) = 0$

**a)** Escrevam cada equação na forma reduzida. I: $x^2 - 2x = 0$; II: $2x^2 + 16x + 30 = 0$

**b)** Sabendo que cada uma dessas equações possui duas soluções, as obtenham por tentativas. I: $x = 0$ e $x = 2$; II: $x = -3$ e $x = -5$

Anotem os procedimentos utilizados para resolver o item **b**.

- Veja uma possível resolução para a atividade **10**, que apresenta um desafio.

**a)** I: $x \cdot (x - 2) = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0$
II: $(x + 3) \cdot (2 \cdot x + 10) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2x^2 + 10x + 6x + 30 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2x^2 + 16x + 30 = 0$

**b)**

| x | $x \cdot (x - 2)$ | $(x + 3) \cdot (2x + 10)$ |
|---|---|---|
| −5 | $-5 \cdot (-5 - 2) = 35$ | $(-5 + 3) \cdot (2 \cdot (-5) + 10) = 0$ |
| −3 | $-3 \cdot (-3 - 2) = 15$ | $(-3 + 3) \cdot (2 \cdot (-3) + 10) = 0$ |
| 0 | $0 \cdot (0 - 2) = 0$ | $(0 + 3) \cdot (2 \cdot 0 + 10) = 30$ |
| 2 | $x \cdot (x - 2) = 0$ | $(2 + 3) \cdot (2 \cdot 2 + 10) = 70$ |

I: $x = 0$ e $x = 2$

II: $x = -3$ e $x = -5$

- No item **b** dessa atividade, explique aos alunos que as equações possuem duas raízes reais e diferentes. Sugira-lhes a construção de um quadro, como o apresentado ao lado, para que possam organizar as tentativas e, dessa maneira, realizar novas tentativas considerando as feitas anteriormente.

# Resolução de equações do 2º grau

A resolução de equações do 2º grau foi abordada, no decorrer da história, por diversos povos, como os árabes, hindus e babilônios. Em cerca de 2000 a.C. os babilônios já resolviam esse tipo de equação, em alguns casos com o auxílio de figuras.

Neste capítulo, vamos estudar a resolução de equações do 2º grau incompletas e completas.

## Resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$

Veja como Jéssica resolveu as seguintes equações.

**a)** $x^2 - 64 = 0$ **b)** $4x^2 - 46 = 3$ **c)** $3x^2 + 25 = 4$

Note que nessas equações o coeficiente **b** é igual a zero ($b = 0$).

a) $x^2 - 64 = 0$

$x^2 - 64 + 64 = 0 + 64$ (Adiciono 64 aos dois membros.)

$x^2 = 64$ (Calculo a raiz quadrada nos dois membros.)

$x = \sqrt{64} = 8$ ou $x = -\sqrt{64} = -8$.

Portanto, as raízes da equação são 8 e −8.

b) $4x^2 - 46 = 3$

$4x^2 - 46 + 46 = 3 + 46$

$4x^2 = 49$

$\frac{4x^2}{4} = \frac{49}{4}$

$x^2 = \frac{49}{4}$

$x = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$ ou $x = -\sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{7}{2}$

Portanto, as raízes da equação são $\frac{7}{2}$ e $-\frac{7}{2}$.

c) $3x^2 + 25 = 4$

$3x^2 + 25 - 25 = 4 - 25$

$3x^2 = -21$

$\frac{3x^2}{3} = -\frac{21}{3}$

$x^2 = -7$

Como não existe um número real que elevado ao quadrado seja igual a −7, então não existe número real $x$ que seja solução da equação.
Portanto, $3x^2 + 25 = 4$ não tem raízes reais.

- Antes de iniciar o trabalho com essa página, leia o texto a seguir para os alunos, evidenciando a época em que os babilônios já manipulavam equações do 2º grau e, para além disso, já haviam criado tábulas que podiam ser utilizadas para resolver problemas que levavam a equações cúbicas:

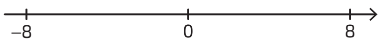
> Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro). Encontrou-se uma tábula que fornece, além de uma tábua de quadrados e de cubos dos inteiros de 1 a 30, também a sequência de valores de $n^2 + n^3$ correspondente a esse intervalo. São dados muitos problemas que levam a cúbicas da forma $x^3 + x^2 = b$, os quais podem ser resolvidos usando-se a tábua de $n^3 + n^2$. [...]

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 61-62.

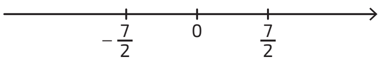
- Durante o trabalho com essa página, realize os cálculos com os alunos na lousa da maneira como foram feitos pela personagem, evidenciando as etapas de raciocínio para que eles possam acompanhar e compreender o processo. Em seguida, apresente outras equações desse tipo para que resolvam e peça, também, que representem as raízes da equação na reta numérica.

As equações do tipo $ax^2 + c = 0$ têm duas raízes reais diferentes e **opostas** ou não têm raízes reais. Se representarmos as raízes das equações dos itens **a** e **b**, apresentadas na página anterior, na reta numérica, temos:

**a)**



**b)**



## Resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$

Agora, observe como Jéssica resolveu as equações.

**a)** $x^2 - 8x = 0$

**b)** $6x^2 + 18x = 0$

a) $x^2 - 8x = 0$

$x \cdot (x - 8) = 0$ (Coloco o fator comum $x$ em evidência.)

Como o produto dos fatores é zero, pelo menos um deles é zero.

Assim, temos:

$\underbrace{x = 0}_{}$ ou $\underbrace{x - 8 = 0}_{}$

1º fator 2º fator

$x - 8 + 8 = 0 + 8$

$x = 8$

Portanto, as raízes da equação são 0 e 8.

b) $6x^2 + 18x = 0$

$x \cdot (6x + 18) = 0$

Assim, temos:

$x = 0$ ou $6x + 18 = 0$

$6x + 18 - 18 = 0 - 18$

$6x = -18$

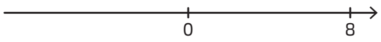
$\frac{6x}{6} = -\frac{18}{6}$

$x = -3$

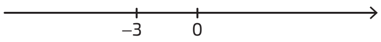
Portanto, as raízes da equação são 0 e $-3$.

As equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ têm duas raízes reais, uma das quais é zero. Se representarmos as raízes das equações dos itens **a** e **b** na reta numérica, temos:

**a)**



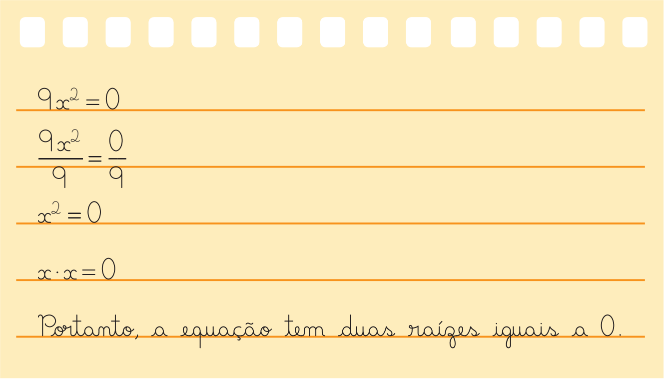
**b)**



Ilustrações: Ronaldo Lucena

## Resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 = 0$

Por fim, observe como Jéssica resolveu a equação $9x^2 = 0$.



$9x^2 = 0$

$\frac{9x^2}{9} = \frac{0}{9}$

$x^2 = 0$

$x \cdot x = 0$

Portanto, a equação tem duas raízes iguais a 0.

Dizer que uma equação tem duas raízes iguais é o mesmo que dizer que a equação tem apenas uma raiz.

As equações do tipo $ax^2 = 0$ têm duas raízes reais e iguais a zero.

**Sem realizar cálculos, quais são as raízes reais da equação $16x^2 = 0$?**
A equação tem duas raízes reais iguais a 0.

## Atividades

Anote no caderno

**11.** Calcule as raízes de cada equação:

**a)** $5x^2 - 20 = 0$ $x = 2$ e $x = -2$

**b)** $\sqrt{\frac{2x^2}{3}} = 0$ $x = 0$

**c)** $x^2 + \frac{x}{5} = 0$ $x = 0$ e $x = -\frac{1}{5}$

**d)** $7x^2 - 21 = 0$ $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$

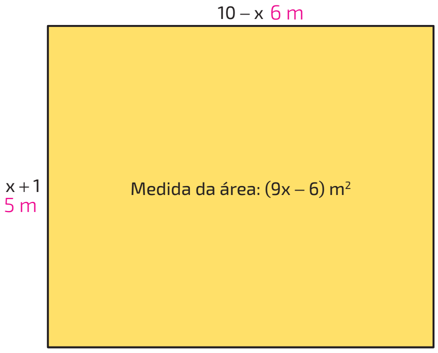
**e)** $2x^2 + 5x = 0$ $x = 0$ e $x = -\frac{5}{2}$

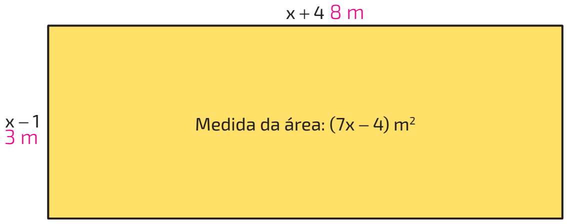
**f)** $-x^2 + 4x = 0$ $x = 0$ e $x = 4$

**g)** $-2x^2 + 8x = 0$ $x = 0$ e $x = 4$

**h)** $6x^2 - 216 = 0$ $x = 6$ e $x = -6$

**12.** Determine a medida do comprimento dos lados de cada retângulo.





Ilustrações: Ronaldo Lucena

**13.** Quais das equações a seguir não possuem raízes reais? I e II

**I )** $-x^2 - 5 = 0$   **II )** $x^2 + 13 = 0$   **III)** $\frac{x^2}{5} - \frac{1}{2} = 0$   **IV)** $-x^2 + 2 = 0$

**14.** Para quais valores de **y** a expressão $\frac{5y^2}{3} - \frac{17y}{6} + 1$ é igual a $(2y - 1)^2$? $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$

- Ressalte que, na resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 = 0$, dizer que há duas raízes reais e iguais é o mesmo que dizer que existe apenas uma raiz real. É importante que esse conceito fique claro aos alunos, para que não haja possibilidade de gerar alguma confusão.
- Na atividade **11**, questione os alunos de modo que identifiquem o tipo de cada equação, a fim de prever quantas raízes terá, antes de realizar os cálculos, além de identificar quais delas terão raízes iguais a zero.

- Para resolver a atividade **17**, peça aos alunos que desenhem, em uma folha de papel, a representação da superfície de uma piscina e indiquem nela a letra **x** para representar a medida da largura ou do comprimento da superfície da piscina. Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos nessa atividade:
  - Quais as medidas do comprimento e da largura da superfície dessa piscina?

    R 4 m e 8 m
- Veja uma possível resolução para o desafio **18**:

  Como foram utilizadas 3 latas de tinta para pintar os dois lados do muro, então foram pintados $24 \cdot 3 = 72$ m², ou seja, o muro possui 36 m² de medida de área em cada lado. Sendo assim, tomando como **x** a medida do comprimento do muro, teremos:

  $$\frac{x}{9} \cdot x = 36$$
  $$\frac{x^2}{9} = 36$$
  $$x^2 = 324$$
  $$x = \pm\sqrt{324}$$

  Portanto, $x = 18$. Assim, a medida da altura é dada por $\frac{18}{9} = 2$ m, e a medida do comprimento é 18 m.

**15.** Escreva uma equação do 2º grau que represente a fala de cada pessoa. Depois, obtenha a solução das equações que você escreveu.

$3x^2 = 75$; $x = 5$ e $x = -5$

**Juliana**

$\frac{1}{2}x = x^2$; $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$

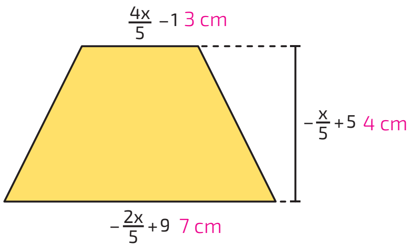
**Sabrina**

$x^2 - 5 = 0$; $x = \sqrt{5}$ e $x = -\sqrt{5}$

**Daniel**

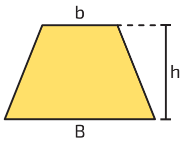
Ilustrações: Débora Kamogawa

**16.** Determine a medida da altura e as medidas do comprimento das bases do trapézio sabendo que sua área mede 20 cm².



Lembre-se de que a medida da área do trapézio é dada por:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$



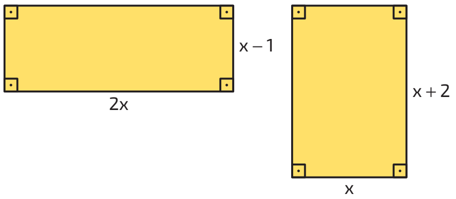
Ilustrações: Ronaldo Lucena

**17.** Uma piscina ocupa uma superfície retangular cuja medida da área é 32 m². A medida de seu comprimento é o dobro da medida de sua largura. Elabore um problema envolvendo a situação descrita e dê para um colega resolver. Depois, verifique se ele resolveu corretamente. Resposta pessoal.

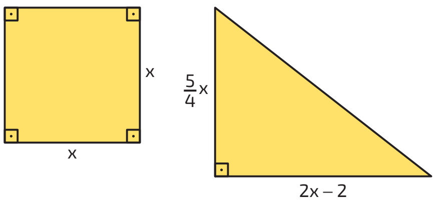
**18.** Para pintar os dois lados de um muro, foram necessárias exatamente 3 latas de tinta, que cobrem, cada uma, uma área cuja medida é 24 m². Sabendo que a medida da altura do muro corresponde a $\frac{1}{9}$ da medida de seu comprimento, quanto mede a altura e o comprimento desse muro?
medida da altura: 2 m e medida do comprimento: 18 m

**19.** Sabendo que em cada item os polígonos têm medidas de área iguais, determine o valor de **x**.

**a)** $x=4$



**b)** $x=5$



Ilustrações: Ronaldo Lucena

**20.** As equações $(x-2)^2 = -4x+13$ e $2x^2-18=0$ são equivalentes, ou seja, possuem as mesmas soluções? Justifique. sim; Espera-se que os alunos respondam que ambas têm como solução $x=3$ e $x=-3$.

**21.** Verifique se as afirmativas são verdadeiras ou falsas.

**a)** Toda equação do 2º grau tem soluções reais. F

**b)** Uma equação do 2º grau pode ter duas raízes iguais. V

**c)** O zero é solução de todas as equações do tipo $ax^2+bx=0$. V

**d)** Equações do tipo $ax^2+c=0$ podem ter duas raízes opostas. V

**e)** As raízes da equação $x^2-2x-15=0$ são $x=-3$ e $x=7$. F

**22.** Calcule as raízes de cada equação.

**a)** $(2x+3)^2 - 9 = 12x$ $x=0$

**b)** $(3x-1)^2 = 1$ $x=0$ e $x=\frac{2}{3}$

**c)** $(x-2)\cdot(x+4) = 2\cdot(x+4)$ $x=4$ e $x=-4$

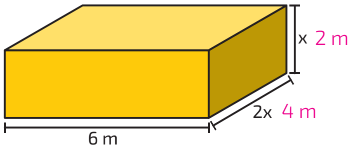
**d)** $-15x+\frac{x^2}{3} = x^2+5\cdot(x^2-3x)$ $x=0$

**23.** Determine as raízes da equação indicada no quadro sabendo que **x** representa a incógnita e $m \neq 0$. $x=3$ e $x=0$

$$\boxed{mx^2 = 3mx}$$

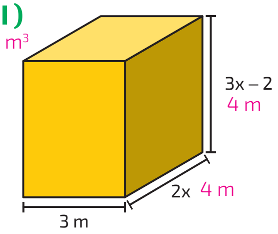
**24.** Os paralelepípedos retângulos a seguir têm a mesma medida de volume.

**I)** 48 m³



Ilustrações: Ronaldo Lucena

**II)** 48 m³



**a)** Determine as medidas de suas dimensões.

**b)** Determine a medida do volume de cada um deles.

**25.** Quais são as soluções da equação $2x^2\cdot(x^2-3)\cdot(-3x^2+12)=0$?
$x=0$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$, $x=2$ e $x=-2$

- Na lousa, com os alunos, valide as raízes obtidas nas atividades **20**, **22**, **23** e **25**, substituindo-as nas equações e realizando os cálculos.
- Na atividade **23**, explique aos alunos que a restrição $m \neq 0$ possibilita que os dois membros da equação sejam divididos por **m**, o que permite a sua solução.
- Veja a resolução do desafio proposto na atividade **25**:
O produto de três fatores é igual a zero quando um deles, pelo menos, é igual a zero. Logo, as soluções da equação dada serão as soluções das equações $2x^2=0$, $x^2-3=0$ e $-3x^2+12=0$. Temos que:
  - $2x^2=0$
  $x=0$
  - $x^2-3=0$
  $x^2=3$
  $x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$
  - $-3x^2+12=0$
  $3x^2=12$
  $x^2=4$
  $x=2$ ou $x=-2$

Portanto, as soluções da equação são $x=0$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$, $x=2$ e $x=-2$.

**Relacionando saberes**

- Aproveite o tema abordado nessa página para estabelecer uma relação com o componente curricular **História** e transmita aos alunos mais informações sobre Galileu Galilei, que nasceu em Pisa, na Itália, em 1564. Diga que ele se tornou um astrônomo muito influente no século XVII e deixou contribuições importantes à Ciência e à Matemática, áreas em que demonstrava grande talento. Galileu fez experiências públicas relacionadas à queda de corpos e, em uma delas, deixou cair simultaneamente, do alto da torre de Pisa, dois pedaços de metal, um bem mais pesado que o outro, mostrando que a velocidade da queda não depende da massa do objeto, o que contrariou a crença da época de que o objeto mais pesado deveria chegar primeiro ao chão.

**BNCC em foco**

- As questões presentes na atividade **Matemática em destaque** são uma oportunidade de se trabalhar a essência da **Competência geral 2**, haja vista que exercitam a curiosidade intelectual dos alunos para a solução de problemas e estimulam o pensamento científico, crítico e criativo na elaboração de hipóteses para a realização das estimativas.

- Diga aos alunos que há conteúdos relacionados ao assunto trabalhado nessa página que serão estudados em anos posteriores, possivelmente no componente curricular de **Física**.

## Matemática em destaque

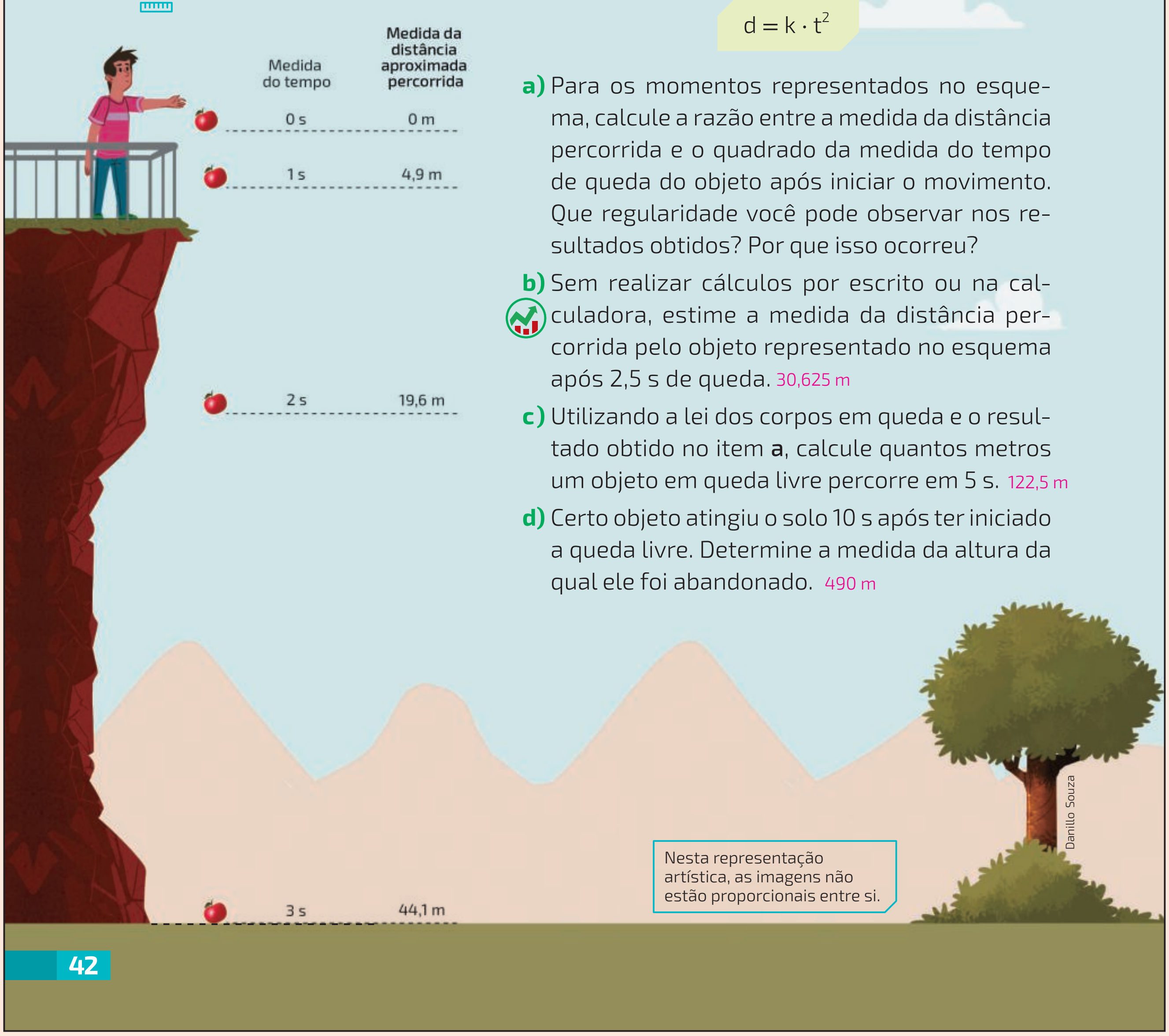
**26.** No século XVII, o físico Galileu Galilei concluiu, por meio de experimentos, que dois corpos com medidas de massa diferentes, quando abandonados de uma altura de mesma medida, desprezando a resistência do ar, alcançam o solo no mesmo instante.

Em suas experiências, Galileu também percebeu que a medida da distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado da medida do tempo de queda. Essa relação ficou conhecida como a lei dos corpos em queda. Observe uma representação artística dessa lei.

Denominando de **d** a medida da distância percorrida na queda, **t** a medida do tempo de queda e **k** a constante de proporcionalidade, podemos representar a lei dos corpos em queda pela seguinte expressão:

$$d = k \cdot t^2$$

26. a) Espera-se que os alunos respondam que todos os resultados são iguais a 4,9 m/s. Isso ocorre devido à lei dos corpos em queda, pois a razão corresponde à constante de proporcionalidade.



Nesta representação artística, as imagens não estão proporcionais entre si.

Danillo Souza

**a)** Para os momentos representados no esquema, calcule a razão entre a medida da distância percorrida e o quadrado da medida do tempo de queda do objeto após iniciar o movimento. Que regularidade você pode observar nos resultados obtidos? Por que isso ocorreu?

**b)** Sem realizar cálculos por escrito ou na calculadora, estime a medida da distância percorrida pelo objeto representado no esquema após 2,5 s de queda. 30,625 m

**c)** Utilizando a lei dos corpos em queda e o resultado obtido no item **a**, calcule quantos metros um objeto em queda livre percorre em 5 s. 122,5 m

**d)** Certo objeto atingiu o solo 10 s após ter iniciado a queda livre. Determine a medida da altura da qual ele foi abandonado. 490 m

# Resolução de equações do 2º grau completas

Para calcular as raízes de uma equação do 2º grau completa, vamos utilizar três métodos: **fatoração**, **completar quadrados** ou **fórmula resolutiva**.

## Fatoração

Vamos determinar as raízes de $x^2 - 14x + 49 = 9$ por fatoração.

Nessa equação, o 1º membro é um **trinômio quadrado perfeito**. Assim, podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$\overbrace{x^2 - 14x + 49}^{\text{trinômio quadrado perfeito}} = 9$$

$$(x - 7) \cdot (x - 7) = 9$$

$$(x - 7)^2 = 9$$

> Trinômios quadrados perfeitos são expressões que podem ser obtidas por meio do quadrado da soma ou da diferença de dois termos:
> - $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
> - $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

Como há dois números cujo quadrado é igual a 9, temos:

$$x - 7 = +\sqrt{9} \qquad\qquad x - 7 = -\sqrt{9}$$

$$x - 7 = 3 \qquad\qquad x - 7 = -3$$

$$x - 7 + 7 = 3 + 7 \qquad\qquad x - 7 + 7 = -3 + 7$$

$$x = 10 \qquad\qquad x = 4$$

Portanto, as raízes da equação são 4 e 10.

## Completar quadrados

Há equações do 2º grau em que o 1º membro não é um trinômio quadrado perfeito. Nesses casos, podemos determinar as raízes da equação utilizando o método de **completar quadrados**.

Observe como podemos calcular as raízes de $x^2 + 8x + 7 = 0$ utilizando esse método.

- Como o 1º membro não é um trinômio quadrado perfeito, é preciso acrescentar um número apropriado aos dois membros da igualdade para poder fatorá-lo. Para isso, inicialmente isolamos o termo independente no 2º membro.

$$x^2 + 8x + 7 - 7 = 0 - 7$$

$$x^2 + 8x = -7$$

**BNCC em foco**

- Os conteúdos abordados no capítulo buscam levar os alunos a compreenderem os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau, contemplando, dessa maneira, a habilidade **EF09MA09**.

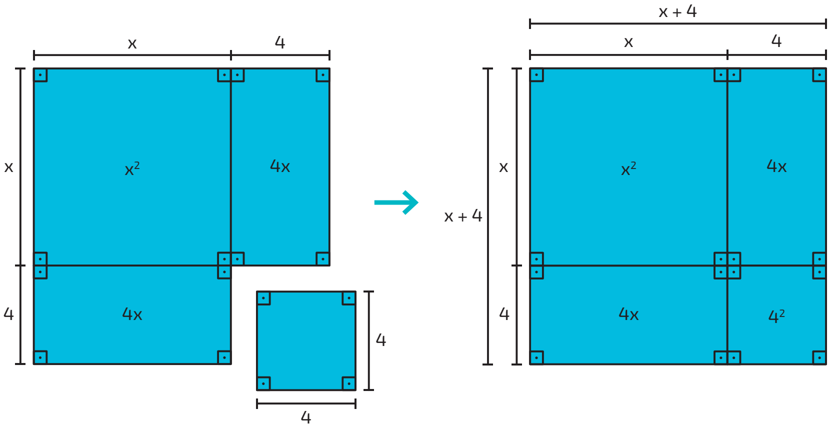
**BNCC em foco**

- Ao trabalhar com a representação geométrica do 1º membro de uma equação do 2º grau, destaque aos alunos a importância da Geometria no estudo da Álgebra. Dessa forma, é possível levá-los à compreensão das relações entre os conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. Assim, contempla-se a **Competência específica de Matemática 3**.

- Escrevemos o 1º membro de maneira conveniente.

$$x^2 + 8x = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x$$

Para nos auxiliar na obtenção do número a ser acrescentado em ambos os membros da equação, podemos utilizar a representação geométrica do 1º membro. Note que, para completar a figura a fim de obter um quadrado, temos de acrescentar um quadrado cuja medida do comprimento do lado é 4 unidades de comprimento.



Observe que na representação geométrica $x + 4 > 0$, porém, algebricamente, também devemos considerar os valores negativos.

Ilustrações: Ronaldo Lucena

- Para obter um trinômio quadrado perfeito no 1º membro da equação, acrescentamos $4^2$ aos dois membros.

$$\overbrace{x^2 + 8x + 4^2}^{\text{trinômio quadrado perfeito}} = -7 + 4^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = 9$$

- Agora, fatoramos o trinômio quadrado perfeito e resolvemos a equação.

$$x^2 + 8x + 16 = 9$$

$$(x + 4)^2 = 9$$

Como há dois números cujo quadrado é igual a 9, temos:

$$\begin{array}{cc} x + 4 = +\sqrt{9} & x + 4 = -\sqrt{9} \\ x + 4 = 3 & x + 4 = -3 \\ x + 4 - 4 = 3 - 4 & x + 4 - 4 = -3 - 4 \\ x = -1 & x = -7 \end{array}$$

As igualdades $x + 4 = +\sqrt{9}$ e $x + 4 = -\sqrt{9}$ podem ser indicadas, de maneira resumida, por $x + 4 = \pm\sqrt{9}$.

Portanto, as raízes da equação são −1 e −7.

## Fórmula resolutiva

Outra maneira de resolver uma equação do 2º grau é por meio da **fórmula resolutiva**, que consiste na generalização do método de completar quadrados.

Utilizando essa fórmula, é possível obter as raízes de uma equação do 2º grau por meio de seus coeficientes.

**fórmula resolutiva**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veja como podemos deduzir a fórmula resolutiva.

- Inicialmente, dividimos cada termo da equação $ax^2 + bx + c = 0$ por **a**. Depois, isolamos o termo independente no 2º membro.

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

- Escrevemos o 1º membro de maneira conveniente.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x$$

- Para obter um trinômio quadrado perfeito no 1º membro da equação, acrescentamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ aos dois membros:

$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Agora, fatoramos o trinômio quadrado perfeito e isolamos a incógnita **x** no 1º membro.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \longleftarrow$$

Se $b^2 - 4ac$ for maior ou igual a zero, podemos extrair a raiz quadrada nos dois membros da igualdade.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \longleftarrow \text{fórmula resolutiva}$$

- É importante que os alunos percebam que, por mais abstrata que a fórmula resolutiva de equações do segundo grau seja, é possível determiná-la a partir de conceitos já estudados por eles. Se julgar conveniente, apresente a dedução da fórmula que parte da equação $ax^2 + bx + c = 0$.
- Verifique se os alunos perceberam que, ao simplificarmos a expressão $2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x$, obtemos $\frac{b}{a}x$.

- Explique aos alunos que o símbolo Δ (lê-se: "delta") corresponde à 4ª letra do alfabeto grego.

**Respostas**

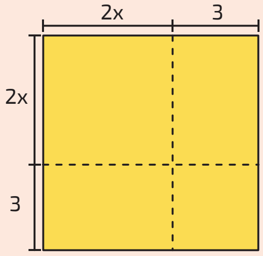
**27. a)** $(x-2)^2=9$;
$x_1=5$ e $x_2=-1$

**b)** $(x+6)^2=0$;
$x_1=-6$ e $x_2=-6$

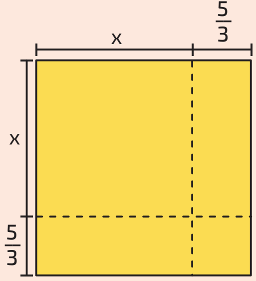
**c)** $(2x-3)^2=16$;
$x_1=\frac{7}{2}$ e $x_2=-\frac{1}{2}$

**d)** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=25$;
$x_1=\frac{11}{2}$ e $x_2=-\frac{9}{2}$

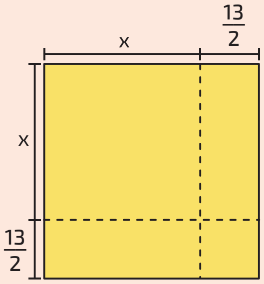
**28. a)** $x_1=-\frac{1}{2}$ e $x_2=-\frac{5}{2}$



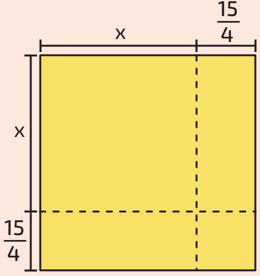
**b)** $x_1=-\frac{1}{3}$ e $x_2=-3$



**c)** $x_1=-5$ e $x_2=-8$



**d)** $x_1=-\frac{3}{2}$ e $x_2=-6$



Ilustrações: Sergio L. Filho

Na fórmula, $b^2-4ac$ é o **discriminante** e pode ser substituído por Δ. Assim, temos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

As raízes reais de uma equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$ são dadas por:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta=b^2-4ac \text{ e } \Delta\geq 0$$

Utilizando essa fórmula, vamos calcular as raízes da equação $x^2+3x-10=0$.

$$a=1$$
$$b=3$$
$$c=-10$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=3^2-4\cdot1\cdot(-10)$$
$$\Delta=9+40$$
$$\Delta=49$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{-3\pm7}{2}\left\langle\begin{array}{l} x_1=\frac{-3+7}{2}=\frac{4}{2}=2\\ x_2=\frac{-3-7}{2}=\frac{-10}{2}=-5\end{array}\right.$$

Portanto, as raízes da equação são 2 e −5.

Podemos verificar se a resolução está correta, substituímos os valores de $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ na equação.

Se obtivermos sentenças verdadeiras, $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ são as raízes da equação.

| Para $x_1=2$: | Para $x_2=-5$: |
|---|---|
| $2^2+3\cdot2-10=0$ | $(-5)^2+3\cdot(-5)-10=0$ |
| $4+6-10=0$ | $25-15-10=0$ |
| $0=0$ | $0=0$ |
| (sentença verdadeira) | (sentença verdadeira) |

## Atividades

Anote no caderno

**27.** Utilizando o método da fatoração, determine as raízes das equações.
Respostas nas orientações ao professor.

**a)** $x^2-4x+4=9$

**b)** $x^2+12x+36=0$

**c)** $4x^2-12x+9=16$

**d)** $x^2-x+\frac{1}{4}=25$

**28.** Resolva as equações utilizando o método de completar quadrados.
Respostas nas orientações ao professor.

**a)** $4x^2+12x+5=0$

**b)** $x^2+\frac{10}{3}x+1=0$

**c)** $x^2+13x+40=0$

**d)** $x^2+\frac{15}{2}x+9=0$

Se necessário, utilize figuras para auxiliar na resolução desta atividade.

**29.** Determine as raízes de cada equação pelo método de fatoração ou pelo método de completar quadrados.

**a)** $x^2 + 12x - 12 = 1$ $x_1 = 1$ e $x_2 = -13$

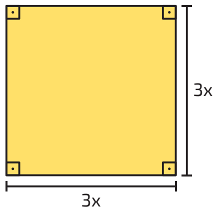
**b)** $4x^2 - 4x + 1 = 4$ $x_1 = \frac{3}{2}$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$

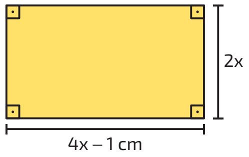
**c)** $x^2 - 6x + 9 = 0$ $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$

**d)** $16x^2 + 16x + 2 = 34$ $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$

**30.** Sabendo que a medida da área do quadrado é 8 cm² maior do que a medida da área do retângulo, calcule o valor de **x**.

$x = 2$ cm

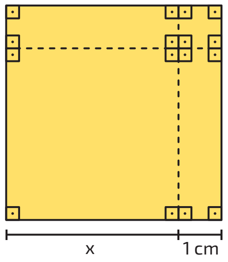




Ilustrações: Ronaldo Lucena

**31.** Para cada um dos quadrados, escreva uma equação do 2º grau na forma reduzida que represente a medida de sua área. Em seguida, resolva a equação.

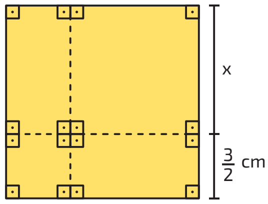
**a)**



Medida da área: 25 cm²

$x^2 + 2x - 24 = 0$; $x_1 = 4$ e $x_2 = -6$

**b)**



Ilustrações: Ronaldo Lucena

Medida da área: $\frac{81}{4}$ cm²

$x^2 + 3x - 18 = 0$; $x_1 = 3$ e $x_2 = -6$

**32.** Resolva o problema utilizando o método de completar quadrados. 50 m ou 55 m

Um terreno retangular tem área medindo 300 m², sendo a medida do comprimento de um de seus lados 5 m maior do que a do outro. Sabendo que apenas no lado voltado para a rua não será construído muro, determine a medida do comprimento, em metros, do muro que será construído.

Danillo Souza

**33.** Determine as raízes das equações utilizando a fórmula resolutiva.

**a)** $2x^2 + x - 1 = 0$ $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = -1$

**b)** $2x^2 + 2x - 24 = 0$ $x_1 = 3$ e $x_2 = -4$

**c)** $3x^2 - 4x - 2 = -3$ $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{1}{3}$

**d)** $\frac{1}{4}x^2 + \frac{5x}{4} - 6 = 0$ $x_1 = -8$ e $x_2 = 3$

**34.** Escreva uma equação do 2º grau que represente cada situação e, em seguida, resolva-a.

**a)** A terça parte de um número mais o dobro do quadrado desse número é igual a 4. $\frac{1}{3}x + 2x^2 = 4$; $x_1 = \frac{4}{3}$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$

**b)** O quadrado de um número, menos seu triplo, mais 4 é igual a 8.
$x^2 - 3x + 4 = 8$; $x_1 = 4$ e $x_2 = -1$

**c)** O quadrado da metade de um número mais o quádruplo desse número é igual a 9. $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4x = 9$; $x_1 = 2$ e $x_2 = -18$

**35.** Obtenha a forma reduzida de cada equação e determine suas raízes.

**a)** $x^2 - 4x = 5$ $x^2 - 4x - 5 = 0$; $x_1 = 5$ e $x_2 = -1$

**b)** $(x + 1) \cdot (x - 2) = -7x - 10$ $x^2 + 6x + 8 = 0$; $x_1 = -2$ e $x_2 = -4$

**c)** $3x \cdot (x - 2) = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)$ $3x^2 - 8x - 3 = 0$; $x_1 = 3$ e $x_2 = -\frac{1}{3}$

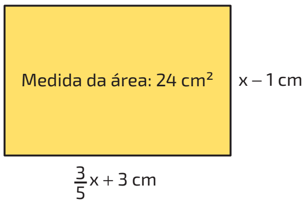
**d)** $(x - 4)^2 + \frac{15 - x}{3} = 27$ $x^2 - \frac{25}{3}x - 6 = 0$; $x_1 = 9$ e $x_2 = -\frac{2}{3}$

- Veja uma possível resolução para o desafio proposto na atividade **32**:
Sendo **x** a medida do comprimento de um dos lados do muro, então o outro lado mede x + 5. Como a área do terreno mede 300 m², temos que:
$x \cdot (x + 5) = 300$
$x^2 + 5x = 300$
$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 =$
$= 300 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$
$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1225}{4}$
$x + \frac{5}{2} = \frac{35}{2} \rightarrow x = 15$
ou
$x + \frac{5}{2} = -\frac{35}{2} \rightarrow x = -20$
(não convém)
Logo, os comprimentos dos lados do terreno medem 15 m e 20 m.
Se o lado que está voltado para a rua é o de 20 m, então a medida do comprimento do muro será de:
$2 \cdot 15 + 20 = 5 \rightarrow 50$ m
Se o lado que está voltado para a rua é o de 15 m, então a medida do comprimento do muro será de:
$15 + 2 \cdot 20 = 55 \rightarrow 55$ m
- Peça aos alunos que, nas atividades em que **x** representa uma medida de comprimento, considerem apenas as soluções positivas das equações. Sugira a eles que não utilizem a fórmula resolutiva para resolver as atividades de **27** a **32**.

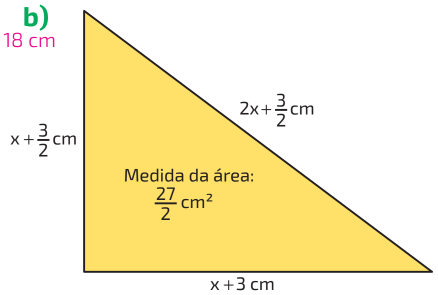
- Em problemas contextualizados, principalmente nos que se referem a medidas de comprimento, é comum que apenas uma raiz satisfaça às condições do problema na solução de uma equação do segundo grau. Dessa maneira, estimule os alunos a verificar e validar as soluções.
- Na atividade **36**, se for necessário, lembre os alunos de que a medida do perímetro de um polígono é dada pela soma das medidas do comprimento de seus lados.

**36.** Determine a medida do perímetro de cada polígono.

**a)** 20 cm

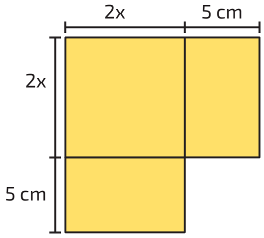


**b)** 18 cm



Ilustrações: Ronaldo Lucena

**37.** A figura composta por um quadrado e dois retângulos tem medida de área igual a 144 cm².



Ronaldo Lucena

**a)** Represente a medida da área dessa figura por meio de uma equação do 2º grau e resolva-a pelo método de completar quadrados e pela fórmula resolutiva. $4x^2 + 20x = 144$; $x_1 = -9$ e $x_2 = 4$

**b)** Nos dois métodos utilizados no item **a** para resolver a equação, a resposta obtida foi a mesma? sim

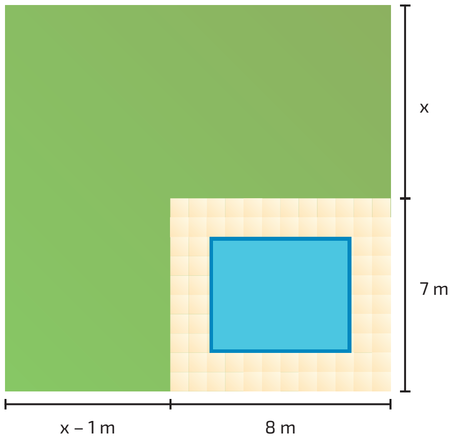
**c)** Qual dos métodos você considerou mais adequado? Resposta pessoal.

**38.** No livro *Al-Jabr wa'l muqabalah*, de cerca de 825 d.C., do matemático árabe al-Khowarizmi, é abordada a resolução de equações do 2º grau. A equação abaixo, escrita com notação atual, é uma das que aparecem nesse livro.

$$x^2 + 21 = 10x$$

Quais são as raízes dessa equação? $x_1 = 7$ e $x_2 = 3$

**39.** Observe a vista de cima de um terreno retangular em que uma piscina foi construída e no qual a região em verde está coberta com grama.



Rafael L. Gaion

Determine o valor de **x** sabendo que a região coberta pela grama representa $\frac{5}{7}$ da medida da área total do terreno. $x = 7$ m

**40.** A quantidade de diagonais **D** de um polígono com **n** lados é dada por:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Essa fórmula pode ser escrita da seguinte maneira:

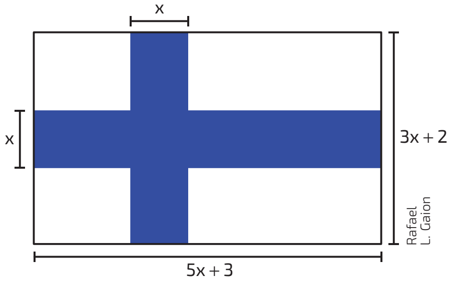
$$D = \frac{n(n-3)}{2} \longrightarrow D = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

**a)** Determine a quantidade de diagonais de um polígono com:

- 7 lados. 14 diagonais
- 20 lados. 170 diagonais

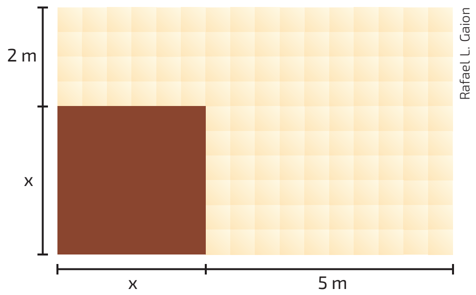
**b)** Quantos lados tem um polígono que possui 5 diagonais? E 27 diagonais? 5 lados; 9 lados

**41.** Observe a bandeira da Finlândia, representada proporcionalmente nas suas dimensões oficiais.



Sabendo que essa bandeira é retangular e tem 198 unidades de medida de área, calcule a medida de área ocupada pela parte azul. 78 unidades de área

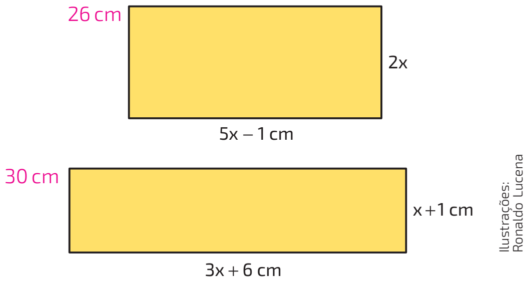
**42.** A medida da área do terreno retangular abaixo é 40 m².



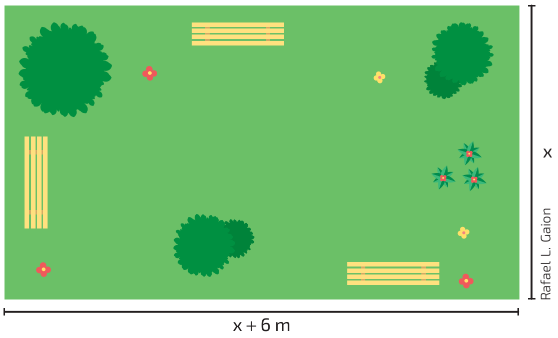
Escreva um problema para esta situação e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se a resolução do colega está correta. Resposta pessoal.

**43.** Para construir uma calçada contornando uma casa que fica em um terreno retangular, serão necessários 96 m² de lajotas. Sabendo que toda a calçada terá a mesma medida de largura e que as dimensões da casa medem 8 m e 12 m, qual a medida da largura da calçada que será construída? 2 m

**44.** Sabendo que os retângulos têm medidas de áreas iguais, determine a medida do perímetro de cada um deles.



**45.** A praça retangular tem área medindo 112 m². Qual é a medida do perímetro dessa praça? 44 m



- No item **b** da atividade **40**, é importante que os alunos percebam a necessidade de substituir a quantidade de diagonais na fórmula $D = \frac{n^2 - 3n}{2}$ e resolver a equação do 2º grau obtida.
- Veja uma possível resolução para o desafio proposto na atividade **41**.

$(5x + 3) \cdot (3x + 2) = 198$
$15x^2 + 10x + 9x + 6 = 198$
$15x^2 + 19x - 192 = 0$
$\Delta = 19^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-192) =$
$= 11\,881$

$$x = \frac{-19 \pm \sqrt{11\,881}}{2 \cdot 15} =$$

$$= \frac{-19 \pm 109}{30} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{64}{15} \end{cases}$$

(não convém)

Note que a parte azul é formada por dois retângulos que se sobrepõem, tendo na parte sobreposta a área $x^2$. Assim, a área dessa parte é dada por:

$x \cdot (5x + 3) + x \cdot$
$\cdot (3x + 2) - x^2 =$
$= 7x^2 + 5x$
$7 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 = 78$

Portanto, a parte azul ocupa 78 unidades de área.

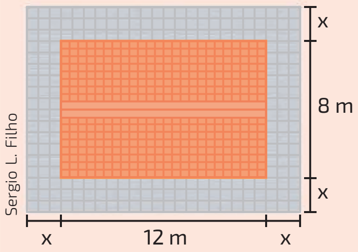
- Veja um possível problema a ser elaborado pelos alunos na atividade **42**:
  - A figura representa o quintal da casa de Gabriel, que mede 40 m² de área. Sabendo que ele quer construir um canil na parte indicada em marrom, calcule a medida da área dessa parte.
    R 9 m²
- Veja uma possível resolução para o desafio proposto na atividade **43**:

A medida da área da calçada é igual à diferença entre a medida da área total do terreno e a medida da área ocupada pela casa.

Assim:
$(2x + 12) \cdot (2x + 8) - 12 \cdot 8 = 96$
$4x^2 + 16x + 24x + 96 - 96 = 96$
$4x^2 + 40x - 96 = 0$
$x^2 + 10x - 24 = 0$
$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 196$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 14}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -12 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, a calçada terá 2 m de largura.



- Enfatize para os alunos que, quando $\Delta = 0$, a equação do 2º grau possui duas raízes reais e iguais, que é o mesmo que dizer que ela possui uma única raiz, já que os valores são os mesmos. É importante que esse conceito fique claro para não gerar confusão no futuro. Diga aos alunos que, em anos posteriores, será apresentado um novo conjunto numérico, no qual será possível obter as raízes de uma equação com discriminante negativo.

# Estudando as raízes de equações do 2º grau

## Quantidade de raízes reais de uma equação e o discriminante

Utilizando a fórmula resolutiva, Vítor resolveu três equações do 2º grau.

a) $x^2 + x - 12 = 0$

$a = 1;\ b = 1;\ c = -12$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)$

$\Delta = 1 + 48$

$\Delta = 49$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+7}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\[2ex] x_2 = \dfrac{-1-7}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

Nessa equação, $\Delta > 0$ e há duas raízes reais diferentes, 3 e $-4$.

b) $-x^2 + 14x - 49 = 0$

$a = -1;\ b = 14;\ c = -49$

$\Delta = 14^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-49)$

$\Delta = 196 - 196$

$\Delta = 0$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-14 \pm 0}{-2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-14+0}{-2} = \dfrac{-14}{-2} = 7 \\[2ex] x_2 = \dfrac{-14-0}{-2} = \dfrac{-14}{-2} = 7 \end{cases}$$

Nessa equação, $\Delta = 0$ e há duas raízes reais iguais a 7.

c) $x^2 - 2x + 5 = 0$

$a = 1;\ b = -2;\ c = 5$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$

$\Delta = 4 - 20$

$\Delta = -16$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 1}$$

A equação não tem raízes reais, pois em $\mathbb{R}$ não há raiz quadrada de número negativo. Nessa equação, $\Delta < 0$ e não há raízes reais.

De acordo com o valor de $\Delta$, podem ocorrer três casos.

- Se $\Delta > 0$, a equação do 2º grau possui **duas raízes reais e diferentes**.
- Se $\Delta = 0$, a equação do 2º grau possui **duas raízes reais e iguais**.
- Se $\Delta < 0$, a equação do 2º grau **não possui raízes reais**.

## Relação entre as raízes e os coeficientes de uma equação

Por meio dos coeficientes de uma equação do 2º grau, podemos estabelecer duas relações envolvendo suas raízes.

Para determinar essas relações, consideramos uma equação do 2º grau cujas raízes são dadas por $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$ e $\Delta \geq 0$.

Agora, estabelecemos as seguintes relações:

- soma das raízes (S)

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

- produto das raízes (P)

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\left(-b + \sqrt{\Delta}\right) \cdot \left(-b - \sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Portanto:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Utilizando as relações de soma e produto das raízes, podemos escrever uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ de outra maneira. Para isso, dividimos todos os termos dessa equação por **a**.

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \longrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Como $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$, temos:

$$x^2 - \underbrace{\left(-\frac{b}{a}\right)}_{S}x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{P} = 0 \longrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Podemos escrever uma equação do 2º grau por meio de duas raízes dadas. Uma equação cujas raízes são 3 e −4, por exemplo, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$S = x_1 + x_2 = 3 + (-4) = -1 \qquad P = x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (-4) = -12$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$
$$x^2 - (-1)x + (-12) = 0$$
$$x^2 + x - 12 = 0$$

Portanto, uma equação cujas raízes são 3 e −4 é $x^2 + x - 12 = 0$.

- As relações de soma e produto das raízes possibilitam resolver algumas equações do 2º grau de maneira mais prática.

- Nessa página, ao escrever uma equação com base em suas raízes, explique aos alunos que $x^2 + x - 12 = 0$ é apenas uma das infinitas equações do 2º grau que têm os números 3 e −4 como raízes. Nesse caso, optou-se por determinar aquela que possui coeficiente $a = 1$. Para complementar esse exemplo, obtenha e escreva na lousa, com o auxílio deles, outras equações que tenham essas mesmas raízes.

- Na apresentação dos conteúdos propostos nessa página, se for necessário, escreva na lousa alguns exemplos e faça questionamentos a fim de observar se todos os alunos estão compreendendo.

**Material digital**

- Após o trabalho com o tópico **Forma fatorada de uma equação do 2º grau**, verifique a possibilidade de aplicar a **Sequência didática 2** disponibilizada no material digital dessa coleção, elaborada com o objetivo de desenvolver a habilidade **EF09MA09**. As atividades propostas nessa sequência, além de abordar a identificação e compreensão de equações do 2º grau, buscam explorar diferentes procedimentos para determinar suas raízes.

Veja, por exemplo, como podemos calcular as raízes da equação $x^2 - 4x - 21 = 0$. Como $a = 1$, procedemos da seguinte maneira.

- Inicialmente, obtemos dois números cuja soma é o oposto do coeficiente **b**, isto é, $-(-4) = 4$. Veja algumas possibilidades.

1 e 3

7 e −3

2 e 2

8 e −4

Note que, se $a = 1$, temos:
$S = -\frac{b}{a} = -\frac{b}{1} = -b$
$P = \frac{c}{a} = \frac{c}{1} = c$

- Como o produto das raízes é o próprio coeficiente **c**, isto é, −21, as raízes são 7 e −3, pois:

$$S = 7 - 3 = 4 \qquad P = 7 \cdot (-3) = -21$$

## Forma fatorada de uma equação do 2º grau

Vamos escrever a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, cujas raízes são $x_1$ e $x_2$, em sua forma fatorada.

Colocando o coeficiente **a** em evidência na equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

$$a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

Sabendo que $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, podemos escrever:

$$a\left[x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{S} \cdot x + \underbrace{(x_1 \cdot x_2)}_{P}\right] = 0 \longrightarrow a\left[\underbrace{x^2 - x_1 \cdot x}_{x \text{ é fator comum}} - \underbrace{x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2}_{x_2 \text{ é fator comum}}\right] = 0$$

Em seguida, colocamos os fatores comuns em evidência.

$$a\left[x \cdot \underbrace{\underbrace{(x - x_1)} - x_2 \cdot \underbrace{(x - x_1)}}_{\text{fator comum}}\right] = 0$$

Por fim, colocamos o fator comum $(x - x_1)$ em evidência:

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Portanto, $a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ é a forma fatorada da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, cujas raízes são $x_1$ e $x_2$.

Assim como foi feito na página **51**, vamos escrever uma equação do 2º grau, dadas as suas raízes, porém utilizando a forma fatorada. Uma equação cujas raízes são 2 e −5, por exemplo, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$a(x - 2) \cdot (x - (-5)) = 0 \longrightarrow a(x^2 + 5x - 2x - 10) = 0$$

Dividimos ambos os membros da igualdade por a.

$$\frac{a(x^2 + 3x - 10)}{a} = \frac{0}{a} \longrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

Portanto, uma equação cujas raízes são 2 e −5 é $x^2 + 3x - 10 = 0$.

## Atividades

Anote no caderno

**46.** Sem resolver as equações, verifique se elas têm duas raízes reais e iguais, duas raízes reais e diferentes ou não têm raízes reais.

**a)** $3x^2 - 9x - 21 = 0$ duas raízes reais e diferentes

**b)** $9x^2 - 6x + 1 = 0$ duas raízes reais e iguais

**c)** $x^2 + 4x + 5 = 0$ não possui raiz real

**47.** Para quais valores de **k** a equação $x^2 + 2x - k = 0$ não possui raízes reais? $k < -1$

**48.** Determine o valor de **m**, com $m \neq 0$, para que a equação $mx^2 - 6x = 3$:

**a)** não possua raízes reais. $m < -3$

**b)** possua duas raízes reais e iguais. $m = -3$

**c)** possua duas raízes reais e diferentes. $m > -3$

**49.** Para quantos números naturais **n** a equação $\frac{3}{2}x^2 + 6x + n = 0$ possui duas raízes reais? 7 números naturais

**50.** Sem resolver as equações, determine a soma e o produto das raízes de cada uma delas. Depois, resolva as equações e verifique se as respostas estão corretas.

**a)** $x^2 - 3x + 2 = 0$ $S = 3$ e $P = 2$; $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$

**b)** $-4x^2 + 8x - 4 = 0$ $S = 2$ e $P = 1$; $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$

**c)** $3x^2 - 18 = -15x$ $S = -5$ e $P = -6$; $x_1 = -6$ e $x_2 = 1$

**51.** Determine o valor de **n** em cada item, sendo $x_1$ e $x_2$ as raízes da equação.

**a)** $x^2 + 11x + n = 0$, em que $x_1 \cdot x_2 = 7$ $n = 7$

**b)** $3x^2 - nx + 5 = 0$, em que $x_1 + x_2 = 2$ $n = 6$

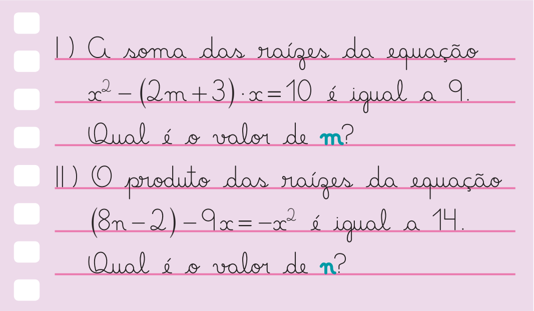
**c)** $nx^2 - 8x = 12$, em que $x_1 \cdot x_2 = -3$ $n = 4$

**52.** Determine:

**a)** as raízes de uma equação do 2º grau sabendo que a soma dessas raízes é −7 e o produto é 12. $x_1 = -4$ e $x_2 = -3$

**b)** o produto das raízes da equação $x^2 + 6mx + 2m = 0$ sabendo que a soma delas é 18. −6

**53.** Observe os problemas que Talita escreveu.



I) A soma das raízes da equação $x^2 - (2m + 3) \cdot x = 10$ é igual a 9. Qual é o valor de **m**?

II) O produto das raízes da equação $(8n - 2) - 9x = -x^2$ é igual a 14. Qual é o valor de **n**?

**a)** Resolva os problemas escritos por Talita e escreva os procedimentos que você utilizou para resolvê-los. I: $m = 3$, II: $n = 2$; Resposta pessoal.

**b)** A partir dos valores de **m** e **n** obtidos no item **a**, escreva a equação de cada problema na forma reduzida e, em seguida, resolva-a. Resposta nas orientações ao professor.

**c)** Elabore dois problemas parecidos com os de Talita e dê para um colega resolver. Depois, verifique se ele resolveu corretamente. Resposta pessoal.

**54.** Utilizando as relações de soma e produto e conhecendo uma das raízes da equação, determine o valor de **p** em cada item.

**a)** $2x^2 + px + 16 = 0$, $x_1 = 2$ $p = -12$

**b)** $x^2 + 7x + (p + 1) = 0$, $x_1 = -3$ $p = 11$

**c)** $5x^2 - (6 - p) \cdot x - 25 = 0$, $x_1 = -5$ $p = 26$

**d)** $3x^2 - 9x + \left(\frac{p}{2}\right) = 0$, $x_1 = 1$ $p = 12$

**55.** Utilizando as relações de soma e produto das raízes, resolva as equações.

**a)** $x^2 - 13x + 42 = 0$ $x_1 = 6$ e $x_2 = 7$

**b)** $x^2 - 11x + 28 = 0$ $x_1 = 4$ e $x_2 = 7$

**c)** $x^2 - 2x + 1 = 0$ $x_1 = x_2 = 1$

**d)** $x^2 - 3x - 10 = 0$ $x_1 = -2$ e $x_2 = 5$

**Respostas**

**53. b)** I: $x^2 - 9x - 10 = 0$,
$x_1 = 10$ e $x_2 = -1$;
II: $x^2 - 9x + 14 = 0$,
$x_1 = 2$ e $x_2 = 7$

- No item **c** da atividade **53**, algumas sugestões de problemas que podem ser elaborados pelos alunos são:
  A equação $2x^2 - 12x + m + 3 = 0$ possui duas raízes iguais. Qual é o valor de m?
  Ⓡ 15
  O produto das raízes da equação $2x^2 + 9x + p = 0$ é igual a 2. Qual é o valor de p?
  Ⓡ 4
- Na atividade **54**, verifique se os alunos perceberam que, em cada item, o valor de **p** pode ser obtido substituindo, na equação, a raiz dada.
- Na atividade **55**, verifique se os alunos perceberam que o coeficiente **a** de cada equação é igual a 1. Assim, a soma das raízes é dada por −**b** e o produto, por **c**.

- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **60**.
  $S = -4 + 11 = 7$
  $P = (-4) \cdot 11 = -44$
  $x^2 - Sx + P = 0$
  $x^2 - 7x - 44 = 0$
  $5x^2 - 35x - 220 = 0$
- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **63**.
  Daqui a **x** anos, as idades de Antônio e Mário serão $(12 + x)$ e $(17 + x)$, respectivamente. Assim:
  $(12 + x) \cdot (17 + x) = 336$
  $204 + 12x + 17x + x^2 =$
  $= 336$
  $x^2 + 29x - 132 = 0$
  $\Delta = 29^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-132) =$
  $= 1369$
  $x = \dfrac{-29 \pm \sqrt{1369}}{2 \cdot 1} =$
  $= \dfrac{-29 \pm 37}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -33 \end{cases}$
  (não convém)

  Portanto, o produto das idades daqui a 4 anos será 336.
- Ao trabalhar a atividade **64**, explique aos alunos que, ao multiplicarmos ou dividirmos cada membro de uma equação por um número real diferente de zero, obtemos uma equação equivalente, ou seja, que possui as mesmas soluções. Verifique se eles perceberam que, ao multiplicarmos ou dividirmos a equação para obter outra equação equivalente com coeficiente $a = 1$, o cálculo da raiz é facilitado com a utilização das relações de soma e produto.

**56.** A soma de dois números é 23, e o produto é 120. Utilizando equações do 2º grau, determine quais são esses números. 8 e 15

**57.** Determine os dois números naturais consecutivos cujo produto é 132. 11 e 12

**58.** Escreva uma equação do 2º grau cujas raízes sejam: Possível resposta:

**a)** $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$ $x^2 - 7x + 12 = 0$

**b)** $x_1 = -5$ e $x_2 = 7$ $x^2 - 2x - 35 = 0$

**c)** $x_1 = 1$ e $x_2 = -6$ $x^2 + 5x - 6 = 0$

**59.** Escreva duas equações do 2º grau cujas raízes sejam: Possíveis respostas:

**a)** $-3$ e 0. $x^2 + 3x = 0$ e $-2x^2 - 6x = 0$

**b)** números pares.
$x^2 - 6x + 8 = 0$ e $x^2 - 10x + 24 = 0$

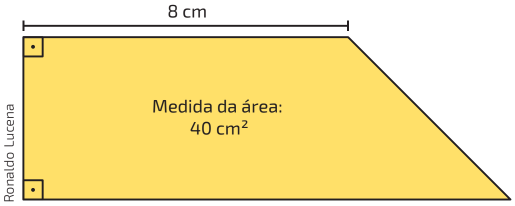
**c)** números primos.
$x^2 - 8x + 15 = 0$ e $x^2 - 10x + 21 = 0$

**d)** números reais e iguais.
$x^2 - 4x + 4 = 0$ e $x^2 + 6x + 9 = 0$

**60.** Escreva uma equação do 2º grau com raízes iguais a $-4$ e 11 e com coeficiente **a** igual a 5. $5x^2 - 35x - 220 = 0$

**61.** Em uma equação do 2º grau, a soma das raízes é igual ao triplo do produto das raízes, e o coeficiente **a** é igual a 1. Sabendo que a soma das raízes é igual a 12, determine essa equação.
$x^2 - 12x + 4 = 0$

**62.** Observe o trapézio.



Ronaldo Lucena

Sabendo que a medida do comprimento da base maior desse trapézio é igual ao triplo da medida da altura, determine a medida do comprimento da base maior e da altura. base maior: 12 cm e altura: 4 cm

**63.** Antônio tem 12 anos e Mário, 17 anos. Daqui a quantos anos o produto das idades de Antônio e Mário será 336? 4 anos

**64.** Observe como Luana calculou mentalmente as raízes da equação $3x^2 - 3x - 6 = 0$.

**Inicialmente, dividi cada membro da equação por 3, obtendo outra, equivalente, em que $a = 1$.**

$$\frac{3x^2 - 3x - 6}{3} = \frac{0}{3} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

**Depois, utilizando, as relações de soma e produto determinei as raízes da equação.**

$$\begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ e } x_2 = -1$$

Débora Kamogawa

Agora, resolva as equações mentalmente.

**a)** $4x^2 - 28x + 40 = 0$ $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$

**b)** $3x^2 - 24x + 21 = 0$ $x_1 = 1$ e $x_2 = 7$

**c)** $-2x^2 - 4x + 48 = 0$ $x_1 = -6$ e $x_2 = 4$

**65.** Sabendo que 5 é uma das raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$, determine, utilizando a forma fatorada, a outra raiz.
2

**66.** Utilizando a forma fatorada, escreva uma equação do 2º grau cujas raízes são: Possível resposta:

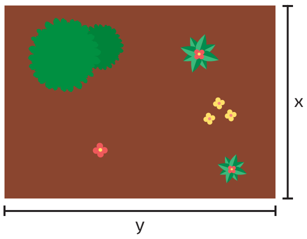
**a)** 2 e 3 $-x^2 + 5x - 6 = 0$

**b)** $-3$ e $-6$ $x^2 + 9x + 18 = 0$

**c)** 4 e $-2$ $3x^2 - 6x - 24 = 0$

# Sistema de duas equações com duas incógnitas

Rafael L. Gaion



Estudamos em anos anteriores como resolver sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Agora, estudaremos alguns sistemas que recaem em equações do 2º grau.

Observe a situação a seguir.

Guilherme vai utilizar 72 m de tela para cercar um terreno retangular cuja medida da área é 315 m². Quais são as medidas das dimensões desse terreno?

Para resolver essa questão, podemos escrever um sistema de duas equações, representando por **x** a medida do comprimento e por **y** a medida da largura do terreno.

| Informação | Equação | Sistema |
|---|---|---|
| Medida do perímetro | $2x + 2y = 72$ | $\begin{cases} 2x + 2y = 72 \\ x \cdot y = 315 \end{cases}$ |
| Medida da área | $x \cdot y = 315$ | |

Esse sistema pode ser resolvido pelo **método da substituição**. Observe.

**1º** Escolhemos uma equação e isolamos uma das incógnitas.

$$2x + 2y = 72$$
$$2x + 2y - 2y = 72 - 2y$$
$$2x = 72 - 2y$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{72 - 2y}{2}$$
$$x = 36 - y$$

**2º** Em seguida, substituímos **x** por $36 - y$ na outra equação.

$$x \cdot y = 315$$
$$(36 - y) \cdot y = 315$$
$$36y - y^2 = 315$$
$$36y - y^2 - 315 = 315 - 315$$
$$-y^2 + 36y - 315 = 0$$

**3º** Resolvendo $-y^2 + 36y - 315 = 0$ com a fórmula resolutiva, temos:

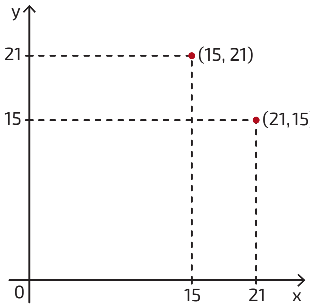
$$a = -1;\ b = 36;\ c = -315$$
$$\Delta = 36^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-315) = 1\,296 - 1\,260 = 36$$
$$y = \frac{-36 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-36 \pm 6}{-2} \begin{cases} y_1 = \dfrac{-36 + 6}{-2} = \dfrac{-30}{-2} = 15 \\ y_2 = \dfrac{-36 - 6}{-2} = \dfrac{-42}{-2} = 21 \end{cases}$$

**4º** Para determinar o valor de **x**, substituímos os valores obtidos de **y** na equação $x = 36 - y$.

- $y_1 = 15$
  $x_1 = 36 - y_1$
  $x_1 = 36 - 15$
  $x_1 = 21$
- $y_2 = 21$
  $x_2 = 36 - y_2$
  $x_2 = 36 - 21$
  $x_2 = 15$

Assim, as soluções dos sistema são os pares ordenados (15, 21) e (21, 15). Portanto, as dimensões do terreno são 15 m e 21 m.

Também podemos representar a solução do sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 72 \\ x \cdot y = 315 \end{cases}$ em um plano cartesiano.



Ronaldo Lucena

- Lembre os alunos do modo como é representado um par ordenado (x, y) em um plano cartesiano. Caso julgue necessário, retome esse conteúdo, que foi abordado no capítulo **11** do volume do **7º** ano dessa coleção.

**Avaliação**

- Antes de iniciar o trabalho com essa página, realize a **Atividade complementar** a seguir, com o intuito de avaliar os alunos, enquanto eles resolvem as equações propostas na atividade, utilizando a estratégia que julgarem melhor. Observe e anote as estratégias utilizadas por eles e considere-as como referência para guiar a prática na continuação do trabalho com o capítulo.

**Atividade complementar**

**Jogo das equações do 2º grau**

**Materiais**

- cartolina
- tesoura com pontas arredondadas
- cola

**Desenvolvimento**

- Reproduza as fichas do jogo disponíveis nas **Páginas para reprodução** e entregue-as aos alunos, que deverão estar organizados em grupos com 4 integrantes. Peça que colem as fichas na cartolina e, em seguida, recortem, a fim de torná-las mais resistentes.
- Oriente que distribuam 6 fichas para cada integrante do grupo, e as restantes deverão ficar em um monte.
- O objetivo é formar pares de fichas contendo uma equação em uma delas e as suas raízes em outra. O jogador, na sua vez, deverá comprar uma ficha do monte e devolver essa mesma ficha ou outra, já que não poderá ficar com mais de 6 fichas nas mãos. Feito isso, é a vez do próximo jogador.
- Vencerá o jogo aquele que conseguir formar primeiro os 3 pares de fichas.

- Na resolução da atividade **69**, diga aos alunos que há sistemas que apresentam mais de uma solução, como no item **b**. Possibilite que eles realizem tentativas mentalmente para solucionar os sistemas.
- Na atividade **72**, observe se os alunos compreendem a estrutura de um problema e se percebem o que é essencial em sua formulação, verificando como eles compararam o exemplo para formular um novo problema. Essa atividade contribui para ampliar o repertório textual dos alunos. Veja uma possível questão que pode ser elaborada por eles:
  - A soma de dois números naturais é 20, e o produto deles é 96. Quais são esses números?
    R 8 e 12

## Atividades

Anote no caderno

**67.** Resolva.

**a)** $\begin{cases} 2x - y^2 = 1 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$ $(1, 1)$ e $\left(\frac{17}{9}, -\frac{5}{3}\right)$

**b)** $\begin{cases} x + 6y = 3 \\ x \cdot y = -9 \end{cases}$ $(9, -1)$ e $\left(-6, \frac{3}{2}\right)$

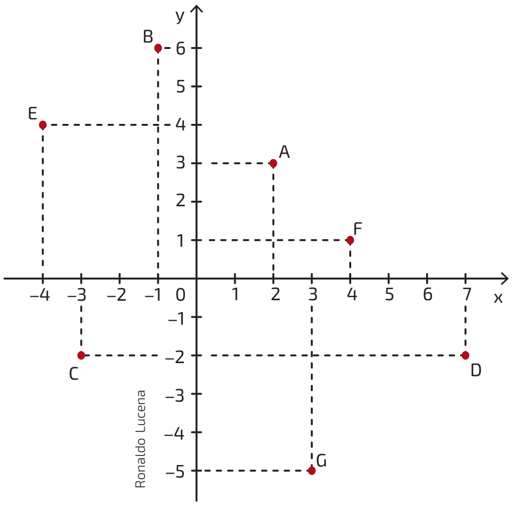
**c)** $\begin{cases} x + y = \frac{5}{6} \\ x^2 + 3y = \frac{5}{4} \end{cases}$ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

**68.** Determine quais dos pontos indicados no plano representam soluções do sistema:

**a)** $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$ A e C

**b)** $\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$ A e B

**c)** $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y^2 = 3 \end{cases}$ D e F



Ronaldo Lucena

**69.** Resolva cada problema.

**a)** A soma de dois números é 6, e o produto entre eles é –16. Quais são esses números?

–2 e 8

**b)** Um número está para outro assim como 7 está para 3. Determine esses dois números sabendo que a soma de seus quadrados é 232.

6 e 14; –6 e –14

**70.** Veja o procedimento que João utiliza para resolver mentalmente um sistema de equações com duas incógnitas. Depois, resolva mentalmente os sistemas.

Inicialmente, penso em pares de números que satisfaçam uma das equações. Depois, substituo cada par de números na outra equação. Aquele que satisfizer as duas equações simultaneamente será a solução do sistema.

Débora Kamogawa

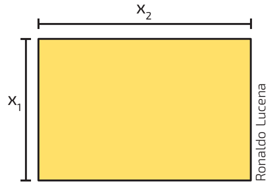
**a)** $\begin{cases} x + y = 3 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$ $(1, 2)$

**b)** $\begin{cases} -x + y = 3 \\ x \cdot y = 0 \end{cases}$ $(0, 3)$ e $(-3, 0)$

**c)** $\begin{cases} \frac{xy}{4} = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$ $(4, 4)$ e $(-4, -4)$

**71.** As medidas das dimensões do retângulo, em centímetros, coincidem numericamente com as raízes de uma equação do 2º grau de coeficiente $a = 1$. Sabendo que a medida da área do retângulo é 24 cm² e a medida do perímetro é 20 cm, escreva essa equação do 2º grau.

$x^2 - 10x + 24 = 0$



Ronaldo Lucena

**72.** Leia a seguinte afirmação:

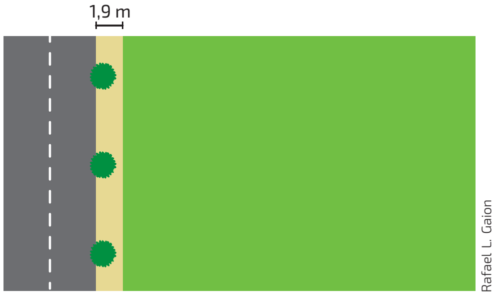
> A soma de dois números naturais é 20, e o produto deles é 96.

Agora, escreva uma questão utilizando essa afirmação e resolva-a.

Resposta pessoal.

**73.** Sabendo que a medida da área de um jardim retangular é $36\ m^2$ e a medida do perímetro é 26 m, quais são as medidas de comprimento dos lados desse jardim? 4 m e 9 m

**74.** O terreno retangular em verde tem a medida do perímetro igual a 86 m e a medida da área igual a $450\ m^2$.



Rafael L. Gaion

**a)** Quais são as medidas das dimensões desse terreno? 18 m e 25 m

**b)** Uma calçada cuja medida da largura é 1,9 m será construída em frente a um dos lados menores desse terreno. Qual é a medida da área dessa calçada? $34,2\ m^2$

**75.** Adicionando a quantidade de camisas com a de calças que Romildo possui, obtêm-se 23 peças de roupa. Calculando o produto da quantidade de cada tipo de peça, obtêm-se 102.

**a)** Sabendo que Romildo possui mais camisas que calças, determine quantas calças e quantas camisas ele tem. 6 calças e 17 camisas

**b)** Como pode ser entendido o significado do produto entre a quantidade de calças e de camisas? Espera-se que os alunos respondam que é a quantidade de maneiras possíveis que Romildo pode se vestir com uma calça e uma camisa.

## Explorando o que estudei

Anote no caderno

**1.** Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? equações do 2º grau com uma incógnita e sistemas de equações

**2.** O que diferencia uma equação do 1º grau de uma do 2º grau? Espera-se que os alunos respondam que o maior expoente da incógnita em uma equação do 1º grau é igual a 1, e em uma equação do 2º grau é igual a 2.

**3.** Como é possível verificar se certo número é solução de uma equação do 2º grau? Espera-se que os alunos respondam que substituindo a incógnita da equação por esse número. Caso a sentença obtida seja verdadeira, o número é solução da equação.

**4.** É possível que uma equação do 2º grau não tenha raiz real? Justifique por meio de um exemplo. sim; Resposta pessoal.

**5.** Vimos que uma equação do 2º grau pode ser resolvida pelos métodos de fatoração, completar quadrados ou utilizando a fórmula resolutiva. Quais desses métodos você prefere? Justifique. Resposta pessoal.

**6.** O que é possível determinar em uma equação do 2º grau observando apenas o valor do discriminante? Espera-se que os alunos digam que é possível determinar a quantidade de raízes reais da equação.

**7.** As relações de soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau são úteis em quais situações? Dê um exemplo. Espera-se que os alunos digam que para calcular as raízes da equação ou seus coeficientes; Resposta pessoal.

**Avaliação**

- Utilize a seção **Explorando o que estudei** para realizar uma avaliação com os alunos. Para isso, observe e faça anotações com o intuito de verificar possíveis falhas nos processos de ensino-aprendizagem. Avalie se eles reconhecem equações do segundo grau, se compreendem as maneiras de resolvê-las e, principalmente, qual estratégia de resolução eles consideram mais eficaz. Aproveite para agregar essas estratégias nas próximas aulas, tornando-as mais acessíveis aos alunos.

- Uma possibilidade de resposta para a questão **5** é a de que não há, de maneira geral, um método de resolução de equação do 2º grau que seja mais prático. O método mais adequado depende de algumas características da equação, como, por exemplo, se ela é completa ou incompleta.
- Na questão **7**, espera-se que os alunos compreendam que há situações em que se faz necessário escrever uma equação com base nas raízes dadas, e isso pode ser feito com o auxílio das relações de soma e produto. Outra situação é quando se pretende determinar as raízes de uma equação mentalmente, o que também pode ser realizado com base nessas relações.

Esse capítulo, por meio de contextos financeiros, auxiliará os alunos a lembrarem do cálculo de porcentagens e a compreenderem os conceitos de acréscimos e descontos sucessivos.

Em seguida, os estudos avançarão para o cálculo de juro simples e composto. As páginas finais do capítulo abordarão a conscientização dos alunos quanto ao importante ato de poupar dinheiro.

- As páginas de abertura permitem que os alunos percebam a importância do estudo de conceitos da Matemática financeira para a utilização em situações do dia a dia. O texto apresenta algumas informações históricas sobre o uso do dinheiro e busca estimular os alunos a compreenderem a necessidade de administrar adequadamente sua vida financeira desde jovens, possibilitando que tenham melhor relação com circunstâncias de consumo, financiamento, dívida e poupança. Uma sugestão de condução do trabalho é organizar os alunos em grupos de três ou quatro integrantes para realizar a leitura e responder às questões propostas. Em seguida, promova um debate sobre o texto de maneira que eles possam se expressar com comentários e experiências. Para complementar o estudo do tema, pesquisem juntos sobre as taxas e os encargos cobrados pelas operadoras de cartão de crédito quando a fatura não é paga em dia. Com relação a isso, sugira que consultem o Código de Defesa do Consumidor no que se refere a cobranças abusivas nessas situações e como o consumidor deve se portar.

# Capítulo 3

# Matemática financeira

Compra *on-line* utilizando um cartão de crédito.

Stokkete/ Shutterstock.com

**Evolução do dinheiro**

Veja mais informações sobre a história do dinheiro no *site*: <www.bcb.gov.br/htms/origevol.asp?idpai=HISTDIN> (acesso em: 6 nov. 2018)

Antes da utilização de uma moeda padronizada, trocavam-se desde produtos agrícolas e animais domésticos até pedras preciosas e objetos diversos. As pessoas precisavam carregar grandes e pesados volumes para oferecer nas trocas.

Desde a criação da moeda pelos gregos até os tempos atuais, muita coisa mudou. Hoje, podemos utilizar dinheiro físico para as transações monetárias, tanto em cédulas quanto em moedas, ou dinheiro virtual, por meio do cartão de crédito ou da internet.

Independentemente da maneira que você realiza pagamentos, é importante utilizar o dinheiro de forma consciente. Antes da compra, analise se essa aquisição é realmente indispensável para não gastar mais do que pode pagar e, sempre que puder, poupe antecipadamente o dinheiro necessário para adquirir um bem ou serviço. Além disso, se decidir usar o cartão de crédito ou realizar algum tipo de movimentação financeira via internet, fique atento aos criminosos virtuais.

## Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

**A** Em sua opinião, quais foram as vantagens de criar uma moeda padronizada para fazer transações monetárias?

**B** De acordo com o texto, que cuidado devemos ter ao utilizar o dinheiro?

**C** Pesquise dicas de segurança para fazer movimentações financeiras pela internet.

**Pensando nisso...**

**A** Resposta pessoal.

**B** É importante utilizar o dinheiro de forma consciente, analisando, antes de comprar um produto, se sua aquisição é realmente necessária, para não gastar mais do que pode pagar.

**C** Possíveis respostas: evitar acessar dados pessoais em computadores públicos; não gravar senhas bancárias em celulares ou em qualquer outro lugar; não abrir *e-mails* estranhos, sobretudo aqueles que possuem anexos ou *links*.

- Espera-se que os alunos concluam, no item **A**, que a moeda padronizada deu maior agilidade às operações financeiras, além de facilitar o manuseio, transporte e armazenamento de valores, entre outras vantagens.

## Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **1**, **2** e **3** do 1º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

**Objetivos do capítulo**

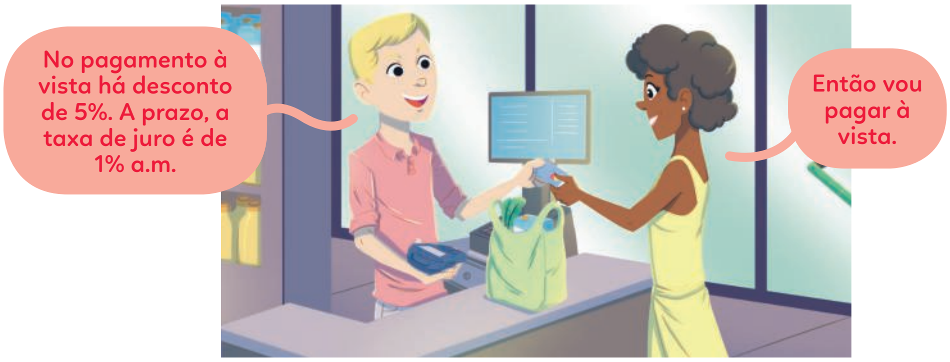
- Reconhecer elementos da Matemática financeira no dia a dia.
- Calcular porcentagens abordadas em situações do dia a dia.
- Calcular acréscimos e descontos sucessivos em diferentes situações, inclusive em contextos de matemática financeira.
- Identificar os termos utilizados para calcular juro.
- Compreender e realizar cálculos nos sistemas de juro simples e de juro composto.

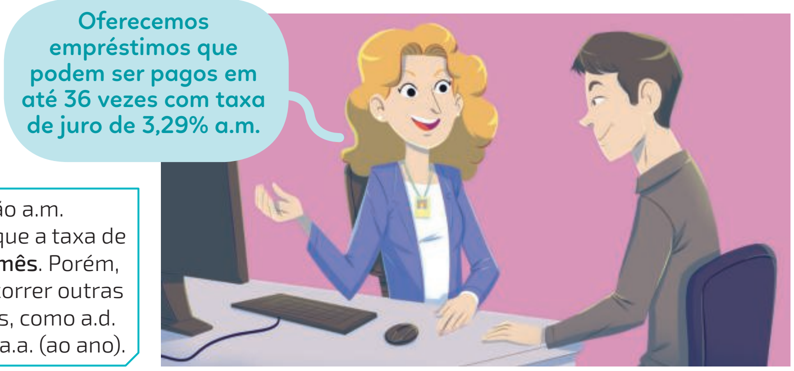
**BNCC em foco**

- Nesse capítulo, os alunos serão levados a resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens, sobretudo com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos, em diferentes contextos, inclusive no de educação financeira, fazendo uso de tecnologias digitais, além de determinar taxas percentuais. Assim, contempla-se a habilidade **EF09MA05**.
- O conteúdo desse capítulo relaciona-se com a **Competência geral 6** por auxiliar a promoção da autogestão, capacitando os alunos a fazerem escolhas responsáveis em relação ao futuro na vida em sociedade. Gerir bem seus recursos financeiros é um modo de ter autonomia e liberdade com relação ao mercado consumidor e ao acúmulo de despesas.

# A Matemática financeira

Quando compramos um produto em uma loja e o pagamento é realizado a prazo, geralmente é acrescido um valor chamado **juro**. Porém, quando o pagamento é feito à vista, algumas vezes é possível obter desconto.





A indicação a.m. significa que a taxa de juro é **ao mês**. Porém, podem ocorrer outras indicações, como a.d. (ao dia) e a.a. (ao ano).

Ilustrações: Rafael Lam

Esses tipos de operações, envolvendo compra, venda, aplicações, empréstimos, entre outros, são elementos de estudo da **Matemática financeira**, assunto muito utilizado e presente no dia a dia.

Nos bancos, as taxas, por exemplo, são calculadas com o auxílio da Matemática financeira, cálculos estatísticos e porcentagem. Quando uma aplicação (investimento) é feita em um banco, o investidor recebe juro sobre a quantia aplicada. De maneira parecida, quando uma pessoa faz um empréstimo no banco, ela deve pagar um "aluguel" sobre essa quantia, isto é, deve pagar juro ao banco, além da quantia emprestada.

A Matemática financeira é uma ferramenta útil na análise de vantagens e desvantagens, nas compras à vista ou a prazo, no empréstimo ou financiamento de bens de consumo, e consiste na utilização de procedimentos matemáticos para simplificar as operações financeiras a serem realizadas.

Neste capítulo, vamos rever alguns conceitos relacionados a porcentagem, conteúdo já abordado anteriormente, e estudar situações envolvendo acréscimo, desconto e juro.

- A formação de cidadãos críticos é um dos objetivos da Matemática. Conhecer elementos da Matemática financeira é importante para que os alunos, desde jovens, se conscientizem de como consumir de maneira adequada. Escolher a melhor forma de pagamento na compra de um produto e calcular a taxa de juro cobrada em um empréstimo são exemplos de situações nas quais é necessário o conhecimento sobre Matemática financeira.

# Porcentagem

Em algumas localidades do Brasil, o turismo é muito importante para a economia local, pois, entre outros motivos, gera empregos. Há diversas opções de turismo ao longo de todo o território brasileiro, de praias a patrimônios históricos e culturais.

Veja a seguir um dos pacotes de viagem ofertado por uma agência de turismo.

Rafael Lam

Neste caso, dizemos que a taxa percentual de desconto é de 28%.

Supondo que uma pessoa deseja viajar para Foz do Iguaçu na baixa temporada, qual será o valor do desconto desse pacote de viagem?

Para calcular o valor do desconto na baixa temporada, podemos imaginar o preço, em reais, do pacote de viagem dividido em 100 partes, sendo 28 delas o valor total do desconto.

Desse modo, temos:

$$1\,400 : 100 = 14$$

$$14 \cdot 28 = 392$$

Outra maneira de representar a porcentagem é na forma de fração ou de número decimal. Por exemplo:

$$28\% = \frac{28}{100} = 0{,}28$$

Assim, o valor do desconto no pacote de viagem para Foz do Iguaçu, na baixa temporada, é R$ 392,00.

Observe outras três maneiras de determinar 28% de R$ 1 400,00.

**1ª maneira**

$$\frac{28}{100} \cdot 1400 = \frac{28 \cdot 1400}{100} = \frac{39\,200}{100} = 392$$

**2ª maneira**

$$0{,}28 \cdot 1400 = 392$$

**BNCC em foco**

- Durante todo o capítulo, serão desenvolvidos os temas contemporâneos **Educação para o consumo** e **Educação financeira e fiscal**, em que os alunos serão capacitados a reconhecer, dentre outros elementos, o sistema tributário do país, a importância dos impostos e a aplicação desses recursos. Os estudos elucidarão a necessidade de não gastar mais do que se ganha, de poupar dinheiro e conhecer os tributos que envolvem o preço final e as parcelas de uma compra a prazo ou financiamento.

- Para complementar a abordagem do tema, leia para os alunos o texto a seguir:

> Compra consciente
>
> Faça uma lista – Sempre que for às compras, faça uma lista de todos os produtos e a quantidade necessária, planejando, desde o início, o orçamento.
>
> Pesquise – Procure ir a diferentes lojas antes de fazer suas compras: os preços variam muito.
>
> Cuidado com as ofertas – Procure adquirir apenas o que está na lista, evitando cair na tentação das ofertas e dos anúncios publicitários.
>
> Não tenha vergonha – Antes de passar pelo caixa do supermercado, confira o carrinho de compras e verifique se não há nada supérfluo que possa ser deixado de lado. Aquelas cestas colocadas ao lado dos caixas existem para isso mesmo.
>
> Lembre-se da nota fiscal – Ela é o documento que garante a troca, o conserto ou a devolução dos produtos em caso de arrependimento ou defeitos.

Como combater o desperdício. São Paulo: BEI Comunicação, 2004. p. 122. (Entenda e Aprenda).

- Se achar conveniente, mostre aos alunos outra maneira de "pensar" sobre a situação apresentada nessa página. Podemos analisar as operações realizadas no primeiro acréscimo do preço do quilograma do tomate da seguinte maneira:
$4,00 + 4,00 \cdot 0,125 =$
$= \underbrace{4,00 \cdot (1 + 0,125)}_{\text{colocamos em evidência } 4,00} =$
$= 4,00 \cdot (1,125) = 4,50$
Utilizando a mesma ideia, analisamos as operações realizadas no segundo acréscimo do preço do quilograma do tomate desse modo:
$4,50 + 4,50 \cdot (0,08) =$
$= 4,50 \cdot (1 + 0,08) =$
$= 4,50 \cdot (1,08) = 4,86$
Note que, para determinar o valor que passou a corresponder ao preço do quilograma do tomate após o segundo acréscimo, podemos calcular:
$\underbrace{4,00 \cdot (1 + 0,125)}_{4,50} \cdot$
$\cdot (1 + 0,08) =$
$= 4,00 \cdot 1,125 \cdot 1,08 =$
$= 4,86$
Portanto, o preço do quilograma do tomate após o segundo acréscimo é R$ 4,86.

**3ª maneira**

| Preço (em reais) | Porcentagem (%) |
|---|---|
| 1 400 | 100 |
| x | 28 |

$$100x = 1\,400 \cdot 28$$
$$100x = 39\,200$$
$$x = \frac{39\,200}{100}$$
$$x = 392$$

**A agência de turismo oferece um pacote de viagem para Maragogi (AL) por R$ 2 100,00 em alta temporada e o mesmo pacote com 35% de desconto em baixa temporada. Qual é o valor do desconto que uma pessoa obterá para esse pacote de viagem em baixa temporada?** R$ 735,00

# Acréscimos e descontos sucessivos

## Acréscimos sucessivos

Em um supermercado, o preço do quilograma do tomate sofreu alguns reajustes no período de dois meses. Em fevereiro de 2019, o quilograma custava R$ 4,00 e sofreu um acréscimo de 12,5%. Em março do mesmo ano, houve outro acréscimo no preço do quilograma do tomate, e dessa vez a taxa percentual foi de 8%. Que valor passou a corresponder ao preço do quilograma do tomate após o segundo acréscimo?


Mositone/Shutterstock.com

Tomates.

Para responder a essa pergunta precisamos primeiro determinar o valor que corresponde ao preço do quilograma do tomate após o primeiro acréscimo. Depois, adicionamos o valor do acréscimo ao valor inicial.

$$\overbrace{0,125 \cdot 4,00}^{12,5\% \text{ de } 4} = 0,50 \qquad 4,00 + 0,50 = 4,50$$

Depois, determinamos o valor que corresponde ao segundo acréscimo e adicionamos ao valor do quilograma do tomate após o primeiro acréscimo.

$$\overbrace{0,08 \cdot 4,50}^{8\% \text{ de } 4,50} = 0,36 \qquad 4,50 + 0,36 = 4,86$$

Assim, o quilograma do tomate passou a custar R$ 4,86 em março, após o segundo acréscimo.

**Material digital**

- No material digital dessa coleção, para complementar o trabalho com o tópico **Acréscimos e descontos sucessivos**, disponibilizamos a **Sequência didática 3**, elaborada com o objetivo de desenvolver a habilidade **EF09MA05**. As atividades propostas nessa sequência buscam explorar o reconhecimento e a resolução de situações-problema que envolvam cálculo de percentuais sucessivos.

**Nesse mesmo supermercado, o preço do quilograma da laranja também sofreu alguns reajustes em fevereiro e março de 2019. Em fevereiro ele custava R$ 7,50 e sofreu um acréscimo de 4%. No mês seguinte houve um novo acréscimo de 15%. Que valor passou a corresponder ao preço do quilograma da laranja em março, após o segundo acréscimo?** R$ 8,97

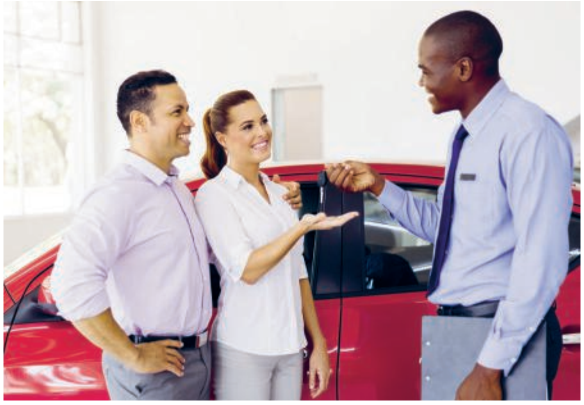
Sejam $P_0$ o valor inicial de uma grandeza e $i_1, i_2, \ldots, i_n$ as taxas de acréscimos sucessivos. Os valores $P_1, P_2, \ldots, P_n$, obtidos após cada acréscimo, são determinados por:

| 1º acréscimo | 2º acréscimo | | n-ésimo acréscimo |
|---|---|---|---|
| $A_1 = P_0 \cdot i_1$ | $A_2 = P_1 \cdot i_2$ | ... | $A_n = P_{n-1} \cdot i_n$ |
| $P_1 = P_0 + A_1$ | $P_2 = P_1 + A_2$ | | $P_n = P_{n-1} + A_n$ |

## Descontos sucessivos

Assim como uma quantia pode ter acréscimos sucessivos, é possível também que uma determinada quantia tenha descontos sucessivos. Veja o exemplo.

Uma concessionária está em liquidação. O preço de um veículo que custa R$ 45 000,00 está com desconto de 16%. Além disso, se o pagamento for à vista, é concedido também um desconto de 5%, calculado após o desconto de 16%. Qual será o preço pago pelo veículo se um cliente desejar comprá-lo à vista durante essa liquidação?


michaeljung/Shutterstock.com

Clientes e vendedor em uma concessionária.

Para responder a essa pergunta, determinamos o primeiro desconto e, depois, subtraímos do valor inicial.

$$\overbrace{0{,}16 \cdot 45\,000}^{16\%\text{ de }45\,000} = 7\,200 \qquad 45\,000 - 7\,200 = 37\,800$$

Em seguida, determinamos o segundo desconto e subtraímos do valor do veículo após o primeiro desconto.

$$\overbrace{0{,}05 \cdot 37\,800}^{5\%\text{ de }37\,800} = 1\,890 \qquad 37\,800 - 1\,890 = 35\,910$$

Portanto, se o cliente desejar comprar o veículo à vista, ele vai pagar R$ 35 910,00 nessa liquidação.

- Sistematizando a ideia e complementando o conceito, temos:
  Sejam $P_0$ o valor inicial de uma grandeza e $i_1, i_2, \ldots, i_n$ as taxas de acréscimos sucessivos, os valores $P_1, P_2, \ldots, P_n$, obtidos após cada acréscimo são determinados por:

  1º acréscimo
  $P_1 = P_0 \cdot (1 + i_1)$

  2º acréscimo
  $P_2 = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)$

  $\vdots$

  n-ésimo acréscimo
  $P_n = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot$
  $\cdot (1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)$

  O valor final $P = P_n$ é dado por
  $P = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot$
  $\cdot (1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)$.
- Também é possível analisar os descontos sucessivos de outra forma:
  Analisando as operações realizadas no primeiro desconto do preço do veículo, temos que:
  $45\,000 - 45\,000 \cdot$
  $\cdot (0{,}16) = 45\,000 \cdot$
  $\cdot (1 - 0{,}16) = 45\,000 \cdot$
  $\cdot (0{,}84) = 37\,800$
  Do mesmo modo, analisando as operações para o segundo desconto, no caso de pagamento à vista, temos:
  $37\,800 - 37\,800 \cdot$
  $\cdot (0{,}05) = 37\,800 \cdot$
  $\cdot (1 - 0{,}05) = 37\,800 \cdot$
  $(0{,}95) = 35\,910$
  Note que, para determinar o valor correspondente, após o segundo desconto, também podemos calcular da seguinte maneira:
  $\underbrace{45\,000 \cdot (1 - 0{,}16)}_{37\,800} \cdot$
  $\cdot (1 - 0{,}05) = 45\,000 \cdot$
  $\cdot (0{,}84) \cdot (0{,}95) = 35\,910$
  Portanto, o preço do veículo na compra à vista, após os dois descontos, é R$ 35 910,00.

- Podemos sistematizar o conceito de descontos sucessivos apresentado da seguinte maneira:
  Sejam $P_0$ o valor inicial de uma grandeza e $i_1, i_2, \ldots, i_n$ as taxas de descontos sucessivos, os valores $P_1, P_2, \ldots, P_n$, obtidos após cada desconto são determinados por:

  1º desconto
  $P_1 = P_0 \cdot (1 - i_1)$
  2º desconto
  $P_2 = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2)$
  $\vdots$
  n-ésimo desconto
  $P_n = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot \ldots \cdot (1 - i_n)$
- O valor final $P = P_n$ é dado por $P = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot \ldots \cdot (1 - i_n)$.

Sejam $P_0$ o valor inicial de uma grandeza e $i_1, i_2, \ldots, i_n$ as taxas de descontos sucessivos. Os valores $P_1, P_2, \ldots, P_n$, obtidos após cada desconto, são determinados por:

| 1º desconto | 2º desconto | | n-ésimo desconto |
|---|---|---|---|
| $D_1 = P_0 \cdot i_1$ | $D_2 = P_1 \cdot i_2$ | ... | $D_n = P_{n-1} \cdot i_n$ |
| $P_1 = P_0 - D_1$ | $P_2 = P_1 - D_2$ | | $P_n = P_{n-1} - D_n$ |

Ao comprar um produto que custa R$ 150,00, o que seria mais vantajoso para o cliente: ter um único desconto de 35% ou dois descontos sucessivos de 20% e 15%, respectivamente?

Para responder a essa questão, calculamos as duas opções de desconto.

**Único desconto de 35%**

$D = 150 \cdot 0{,}35 \cdot 1 = 52{,}50$

$P = 150 - 52{,}50 = 97{,}50$

**Dois descontos sucessivos de 20% e 15%**

$D_1 = 150 \cdot 0{,}2 \cdot 1 = 30$

$P_1 = 150 - 30 = 120$

$D_2 = 120 \cdot 0{,}15 \cdot 1 = 18$

$P_2 = 120 - 18 = 102$

Seria mais vantajoso ter um único desconto de 35%, pois o valor seria menor.

## Atividades

Anote no caderno

**1.** Represente as porcentagens a seguir de outras duas maneiras.

**a)** 2% $\frac{2}{100}$; 0,02 **b)** 34% $\frac{34}{100}$; 0,34 **c)** 100% $\frac{100}{100}$; 1 **d)** 121% $\frac{121}{100}$; 1,21

**2.** Determine:

**a)** 6% de 90 kg. 5,4 kg

**b)** 10% de R$ 50,00. R$ 5,00

**c)** 50% de 150 L. 75 L

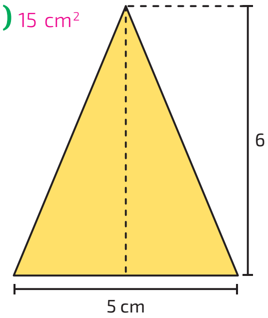
**d)** 35% de 200 mm. 70 mm

**3.** A taxa de iluminação pública, que é cobrada na fatura de energia elétrica, abrange os gastos com a iluminação de ruas, praças, avenidas, túneis e outros logradouros de domínio público. Em certa cidade, o valor pago por um morador para a realização desse serviço era de R$ 12,80. Sabendo que houve um acréscimo de 15% nessa taxa, qual será o novo valor do serviço? R$ 14,72

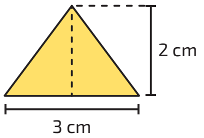
**4.** Após um aumento de preço, um botijão de gás de cozinha que custava R$ 70,00 passou a R$ 79,10. De quantos por cento foi o aumento? 13%

**5.** Determine a medida da área dos triângulos a seguir.

**a)** 15 cm$^2$



**b)** 3 cm$^2$



Ilustrações: Sergio L. Filho

A medida da área do triângulo do item **b** corresponde a quantos por cento da medida da área do triângulo do item **a**? 20%

**6.** Rosângela comprou um presente para sua filha. O presente custava R$ 25,90, mas com o desconto passou a custar R$ 18,13. Qual é a porcentagem do desconto? 30%

**7.** Um recipiente possui medida de capacidade igual a 70 L, e 29% do conteúdo do recipiente está preenchido com água. Quantos litros de água há no recipiente? 20,3 L

**8.** Um produto teve seu preço reduzido no mês de março em 5%, no mês de abril, em 2% e no mês de maio, em 6%. Sabendo que o preço original era R$ 27,90, quanto o produto passou a custar após os descontos sucessivos? aproximadamente R$ 24,42

**9.** Com base na imagem a seguir, elabore um problema e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se a resolução está correta. Resposta pessoal.

**ELETRODOMÉSTICOS**

Televisor de 32 polegadas
**R$ 899,90**
12% de desconto à vista

Micro-ondas de 38 L
**R$ 350,99**
13% de desconto à vista

Refrigerador de 260 L
**R$ 1800,00**
8% de desconto à vista

Rafael L. Gaion/Fotomontagem. Fotos: AlexandrBognat, goir e focal point/Shutterstock.com

**10.** Observe a tabela a seguir.

| Preço médio da gasolina no Brasil – 2018 | |
|---|---|
| **Mês** | **Preço médio do litro (R$)** |
| Abril | 4,22 |
| Maio | 4,31 |
| Junho | 4,55 |
| Julho | 4,49 |

ANP – Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis. **Série histórica do levantamento de preços e de margens de comercialização de combustíveis**. Disponível em: <www.anp.gov.br/precos-e-defesa/234-precos/levantamento-de-precos/868-serie-historica-do-levantamento-de-precos-e-de-margens-de-comercializacao-de-combustiveis>. Acesso em: 13 nov. 2018.

Determine a porcentagem do acréscimo ou do desconto no preço do litro da gasolina entre:

**a)** abril e maio. acréscimo de, aproximadamente, 2,1%

**b)** maio e junho. acréscimo de, aproximadamente, 5,6%

**c)** junho e julho. desconto de, aproximadamente, 1,3%

**d)** abril e julho. acréscimo de, aproximadamente, 6,4%

- Na atividade **5**, se for necessário, lembre aos alunos a fórmula para calcular a medida da área do triângulo: $A=\frac{b\cdot h}{2}$
- Aproveite o trabalho com a atividade **9** para avaliar como os alunos formulam problemas, a partir da observação da imagem proposta, relacionando com o conteúdo abordado até o momento. Veja um problema possível de ser elaborado pelos alunos:
  - Marcos comprou o televisor e o refrigerador nessa loja e pagou a compra à vista. Qual o valor total da compra feita por Marcos?

    R O valor total da compra feita por Marcos foi de R$ 2 447,91.
- Ao concluir as atividades propostas, peça para os alunos levarem para a sala de aula folhetos que apresentem descontos ou acréscimos no preço de mercadorias para diferentes formas de pagamento. Oriente-os a se reunirem em duplas para elaborarem questões relacionadas aos respectivos folhetos. Em seguida, as duplas devem trocar as questões e resolvê-las, conferindo posteriormente as respostas.

- É fundamental ressaltar aos alunos que, no cálculo de juro (**J**), a taxa (**i**) e o período de tempo (**t**) em que o capital (**C**) foi emprestado ou investido devem apresentar a mesma unidade de tempo. Outra observação importante é que a taxa deve ser aplicada na fórmula em sua forma decimal.

# Juro

Flávia foi ao banco e fez uma aplicação de R$ 10 000,00, que após um mês havia rendido R$ 70,00. Esse rendimento equivale a 0,7% do valor aplicado e corresponde ao juro. Nesse caso, a taxa de juro da aplicação foi de 0,7% a.m.

Outra situação envolvendo juro é quando o banco empresta dinheiro a um cliente, que, nesse caso, deve pagar um "aluguel" pelo período em que o dinheiro ficou emprestado.

Veja alguns termos muito utilizados no estudo do juro.

- Capital (**C**): quantia investida ou emprestada.
- Juro (**J**): rendimento ou acréscimo pago pelo investimento ou empréstimo de uma quantia.
- Taxa de juro (**i**): porcentagem que se recebe de rendimento em um investimento ou que se paga pelo empréstimo de uma quantia por certo período.
- Tempo (**t**): período em que se investe ou empresta certa quantia, podendo ser em dias, meses, anos etc.
- Montante (**M**): soma do capital com o juro. Podemos indicar o montante por $M = C + J$.

Dentre os vários tipos de juro, podemos destacar o juro **simples** e o juro **composto**.

## Juro simples

Marcos foi a um banco para pagar uma fatura no valor de R$ 800,00 com 5 dias de atraso. Para o pagamento em atraso, constava na fatura uma multa em que era cobrada uma taxa de juro simples de 0,3% a.d. (ao dia). Quanto Marcos pagou pela fatura?

Nesse problema, temos:

- capital (valor da fatura): R$ 800,00 $\longrightarrow C = 800$
- medida do tempo: 5 dias $\longrightarrow t = 5$
- taxa de juro: 0,3% a.d. $\longrightarrow i = 0{,}3\% = 0{,}003$

Calculamos o juro simples pelo atraso de cada dia.

$$0{,}3\% \text{ de } 800 \longrightarrow \frac{0{,}3}{100} \cdot 800 = 0{,}003 \cdot 800 = 2{,}4 \longrightarrow \text{R\$ } 2{,}40$$

Como a fatura foi paga com 5 dias de atraso e nesse sistema o cálculo do juro é sempre sobre o capital inicial, multiplicamos o juro de um dia por 5.

$$2{,}4 \cdot 5 = 12 \longrightarrow \text{R\$ } 12{,}00$$

Note que, para determinar o valor da multa (juro), multiplicamos o valor da fatura pela taxa de juro e pela medida do tempo de atraso, isto é:

$$J = C \cdot i \cdot t$$
$$J = 800 \cdot 0{,}003 \cdot 5$$
$$J = 12$$

Como queremos saber quanto Marcos pagou para quitar a fatura, ou seja, o montante, adicionamos o valor da fatura ao da multa.

$$M = C + J$$
$$M = 800 + 12$$
$$M = 812$$

Portanto, Marcos pagou R$ 812,00 para quitar a fatura.

Veja outro exemplo.

Aline fez um empréstimo no valor de R$ 1100,00 para ser pago no fim de 8 meses. Sabendo que o juro pago no fim do período foi de R$ 220,00, qual a taxa de juro simples cobrada pelo empréstimo?

Para resolver essa questão, podemos utilizar a fórmula $J = C \cdot i \cdot t$.

C: R$ 1100,00
t: 8 meses
J: R$ 220,00

$$J = C \cdot i \cdot t$$
$$220 = 1100 \cdot i \cdot 8$$
$$220 = 8\,800i$$
$$\frac{220}{8\,800} = i$$
$$i = 0{,}025$$

Podemos expressar a taxa de juro 0,025 em porcentagem, por meio de uma fração decimal:

$$0{,}025 = \frac{2{,}5}{100} = 2{,}5\%$$

Portanto, a taxa de juro simples cobrada pelo empréstimo é 2,5% a.m.

O juro simples (**J**) sempre é calculado sobre o capital inicial (**C**), a uma certa taxa (**i**), em um determinado período de tempo (**t**). Para calcular o juro simples, podemos utilizar a fórmula: $J = C \cdot i \cdot t$

Ao utilizar a fórmula do juro simples, a taxa de juro e a medida do tempo devem apresentar a mesma unidade de medida de tempo. Se a taxa de juro, por exemplo, for dada ao mês, a medida do tempo também deve estar em meses. Caso isso não ocorra, temos de transformar uma delas para que fiquem na mesma unidade de medida.

## Atividades

Anote no caderno

**11.** Eliza realizou um investimento de R$ 750,00 a uma taxa de juro simples de 10% a.a.

**a)** Qual o valor do capital investido? R$ 750,00

**b)** Que quantia será obtida de juro em um ano? R$ 75,00

**c)** Após 4 anos, qual será o montante obtido? R$ 1 050,00

**d)** Por quantos anos o capital deve ser investido para que o montante obtido seja R$ 1 275,00? 7 anos

- Proponha as **Atividades complementares** a seguir após o trabalho com o conteúdo dessa página. Peça para que os alunos, em duplas, resolvam as atividades e, em seguida, discutam as resoluções com a turma.

### Atividades complementares

- Uma pessoa fez um empréstimo de R$ 30 000,00 a uma taxa de juro de 5% ao mês, no regime de juro simples. Quanto essa pessoa pagará se quitar a dívida em 6 meses?

  R R$ 39 000,00

- José emprestou R$ 5 500,00 para um amigo por 8 meses. Sabendo que eles combinaram o pagamento de juro simples de 12% ao mês, calcule quanto José vai receber do amigo ao final dos 8 meses.

  R R$ 10 780,00

- Uma loja vende um aparelho de televisão por R$ 1 080,00 à vista, ou em quatro pagamentos de R$ 378,00. Sabendo que a loja cobra juro simples na compra a prazo, qual a taxa de juro cobrada ao mês?

  R 10%

- Veja uma possível resolução para a atividade **16**:
  10% de 130 $\rightarrow \frac{10}{100} \cdot 130 = 0{,}1 \cdot 130 = 13$
  $t = 6 : 30 = 0{,}2 \rightarrow 0{,}2$ mês
  $j = 130 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}2 = 0{,}52$
  $130 + 13 + 0{,}52 = 143{,}52 \rightarrow$
  $\rightarrow$ R$ 143,52
  Ao trabalhar essa atividade, diga aos alunos que, em geral, os boletos bancários possuem código de barras, o que facilita seu pagamento em lotéricas, caixas eletrônicos e outros estabelecimentos autorizados. Em alguns casos, os acréscimos que devem ser adicionados ao valor do boleto para pagamentos em atraso são realizados posteriormente e adicionados ao valor do próximo boleto a ser emitido. Peça para os alunos pesquisarem em boletos bancários ou faturas (água, energia elétrica, telefone etc.) os acréscimos que estão previstos para pagamentos em atraso.
- Na atividade **17**, é importante os alunos perceberem que o valor financiado pela loja, ou seja, o valor sobre o qual incidirá o juro, corresponde aos 40% de R$ 690,00, que não foram pagos de entrada.
- Na atividade **18**, caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizá-la ou, então, verifique a possibilidade de levar algumas para a sala de aula.

**12.** No empréstimo de R$ 780,00 por um período de 7 meses, Roberta pagou R$ 351,00 de juro. Qual a taxa mensal de juro simples cobrada nesse empréstimo? 6,43% a.m.

**13.** Por quantos meses um capital de R$ 2 500,00 deve ficar aplicado a uma taxa de juro simples de 2% a.m. para que o montante obtido seja R$ 2 900,00? 8 meses

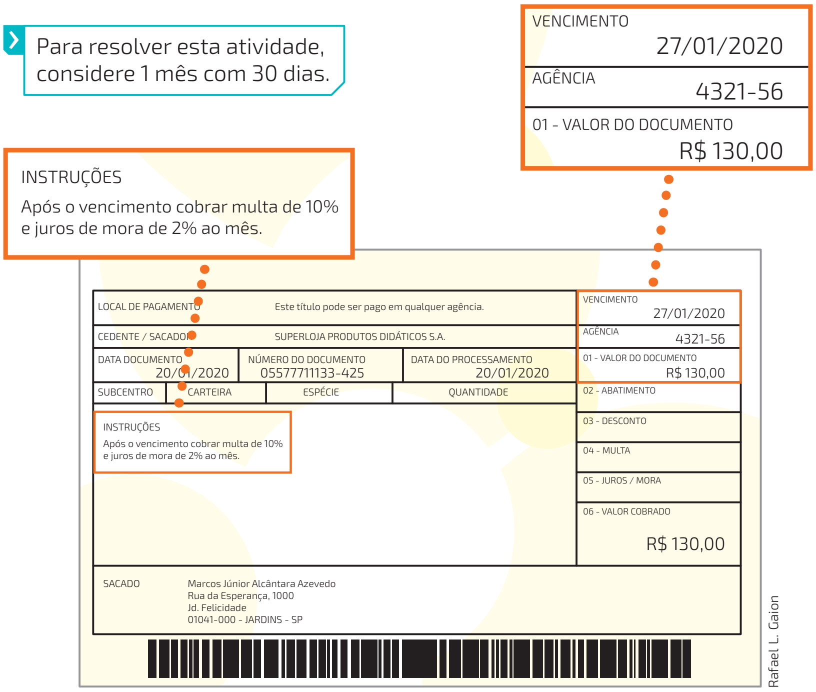
**14.** Qual deve ser o capital aplicado a uma taxa de juro simples de 25% a.a. para que em 6 meses renda R$ 425,00 de juro? R$ 3 400,00

**15.** Diogo fez um empréstimo de R$ 1 730,00 a uma taxa de juro simples de 38% a.a. Sabendo que o empréstimo foi pago após 10 meses, qual o valor do juro pago por Diogo? aproximadamente R$ 547,83

**16.** Os boletos bancários são documentos emitidos com a finalidade de facilitar algumas cobranças.

Observe um boleto bancário.

Para resolver esta atividade, considere 1 mês com 30 dias.



INSTRUÇÕES
Após o vencimento cobrar multa de 10% e juros de mora de 2% ao mês.

VENCIMENTO 27/01/2020
AGÊNCIA 4321-56
01 - VALOR DO DOCUMENTO R$ 130,00

LOCAL DE PAGAMENTO Este título pode ser pago em qualquer agência.
CEDENTE / SACADOR SUPERLOJA PRODUTOS DIDÁTICOS S.A.
DATA DOCUMENTO 20/01/2020
NÚMERO DO DOCUMENTO 05577711133-425
DATA DO PROCESSAMENTO 20/01/2020
SUBCENTRO
CARTEIRA
ESPÉCIE
QUANTIDADE
INSTRUÇÕES Após o vencimento cobrar multa de 10% e juros de mora de 2% ao mês.
VENCIMENTO 27/01/2020
AGÊNCIA 4321-56
01 - VALOR DO DOCUMENTO R$ 130,00
02 - ABATIMENTO
03 - DESCONTO
04 - MULTA
05 - JUROS / MORA
06 - VALOR COBRADO R$ 130,00

SACADO
Marcos Júnior Alcântara Azevedo
Rua da Esperança, 1000
Jd. Felicidade
01041-000 - JARDINS - SP

Rafael L. Gaion

Qual valor deve ser cobrado nesse boleto, sabendo que o pagamento foi realizado com 6 dias de atraso? R$ 143,52

**17.** Vanessa comprou um telefone celular cujo preço à vista é R$ 690,00, pagando 60% de entrada e o restante após 1 mês, em uma única parcela de R$ 300,84. Qual é a taxa de juro simples mensal cobrada pela loja? 9% a.m.

**18.** Com o auxílio de uma calculadora, determine quantos meses um capital de R$ 5 100,00 deve ser aplicado a uma taxa de 0,87% a.m. para que renda R$ 399,33 de juro. 9 meses

## Juro composto

Diferentemente do juro simples, que é calculado sempre sobre o capital inicial, o **juro composto** é calculado sobre o montante obtido no período anterior.

Veja uma situação envolvendo juro composto.

Gilberto aplicou R$ 5 200,00 durante três anos a uma taxa de juro composto de 7% a.a. No fim do período, qual foi o montante obtido?

Podemos resolver essa situação calculando o montante obtido no fim de cada ano.

- Montante no fim do 1º ano.

$$J_1 = 5\,200 \cdot 0{,}07 \cdot 1 = 364$$
$$M_1 = 5\,200 + 364 = 5\,564$$

- Montante no fim do 2º ano.

$$J_2 = 5\,564 \cdot 0{,}07 \cdot 1 = 389{,}48$$
$$M_2 = 5\,564 + 389{,}48 = 5\,953{,}48$$

- Montante no fim do 3º ano.

$$J_3 = 5\,953{,}48 \cdot 0{,}07 \cdot 1 \simeq 416{,}74$$
$$M_3 = 5\,953{,}48 + 416{,}74 = 6\,370{,}22$$

Na seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **280** e **281**, veja como utilizar uma planilha eletrônica para calcular o montante em situações envolvendo juro simples e juro composto.

Portanto, o montante obtido no fim do 3º ano foi R$ 6 370,22.

Note que o juro é calculado sobre o montante obtido no período anterior. Nesse caso, para calcular o juro no fim do 2º ano, consideramos o capital como o montante no fim do 1º ano. De maneira parecida, para calcular o juro no fim do 3º ano, consideramos o capital como o montante no fim do 2º ano.

No juro composto somente no 1º período o juro é calculado sobre o capital inicial, e nos seguintes o juro é calculado sobre o montante obtido no período anterior. Nesse sistema o montante pode ser calculado da seguinte maneira:

| 1º período | 2º período | 3º período | | n-ésimo período |
|---|---|---|---|---|
| $J_1 = C \cdot i \cdot 1$ | $J_2 = M_1 \cdot i \cdot 1$ | $J_3 = M_2 \cdot i \cdot 1$ | ... | $J_n = M_{n-1} \cdot i \cdot 1$ |
| $M_1 = C + J_1$ | $M_2 = M_1 + J_2$ | $M_3 = M_2 + J_3$ | | $M_n = M_{n-1} + J_n$ |

## Atividades

Anote no caderno

**19.** Um capital de R$ 640,00 foi aplicado durante três meses a uma taxa de juro composto de 2% a.m. Quantos reais de juro rendeu essa aplicação? R$ 39,17

**20.** Calcule quantos reais de juro renderá uma aplicação de R$ 12 900,00 durante dois anos à taxa anual de 9% de:

- juro simples. R$ 2 322,00
- juro composto. R$ 2 426,49

- A fórmula do juro composto em que o montante é dado em função da medida do tempo pode ser deduzida a partir da fórmula do montante no regime de juro simples. A seguir, é apresentada tal dedução.
Partindo de $M = C + J$, temos que:

| | |
|---|---|
| 0 | $M_0 = C$ |
| 1 | $M_1 = C + J_1 =$<br>$= C + C \cdot i \cdot 1 =$<br>$= C(1 + i)$ |
| 2 | $M_2 = M_1 + J_2 =$<br>$= M_1 + M_1 \cdot i \cdot 1 =$<br>$= C(1 + i) + C$<br>$(1 + i) \cdot i =$<br>$= C(1 + i) \cdot$<br>$\cdot (1 + i) = C(1 + i)^2$ |
| 3 | $M_3 = M_2 + J_3 =$<br>$= M_2 + M_2 \cdot i \cdot 1 =$<br>$= C(1 + i)^2 + C(1 + i)^2 \cdot$<br>$\cdot i = C(1 + i)^2 \cdot (1 + i) =$<br>$= C(1 + i)^3$ |
| ⋮ | ⋮ |
| t | $M_t = M_{t-1} + J_t =$<br>$= M_{t-1} + M_{t-1} \cdot i \cdot 1 =$<br>$= C(1 + i)^{t-1} + C(1 + i)^{t-1} \cdot$<br>$\cdot i = C(1 + i)^{t-1} \cdot (1 + i) =$<br>$= C(1 + i)^t$ |

Portanto, $M = C \cdot (1 + i)^t$.

**BNCC em foco**

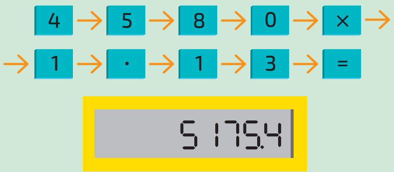
- Nas páginas **280** e **281** da seção **Explorando tecnologias** é possível verificar como construir planilhas eletrônicas para calcular o montante em situações envolvendo juro simples e composto. Dessa maneira, os alunos são capacitados a utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados e contemplando, desse modo, a **Competência específica de Matemática 5**.

- Caso não haja calculadoras para todos os alunos resolverem a atividade **21**, reúna-os em grupos ou, então, verifique a possibilidade de levar algumas para a sala de aula.
- Uma possível situação-problema elaborada pelos alunos, ao resolverem o item **b** da atividade **21**, é:
  - Utilize uma calculadora para calcular o montante obtido em uma aplicação, a juro composto, de um capital de R$ 23 000,00 a uma taxa de 8% a.a. em um período de 4 anos.

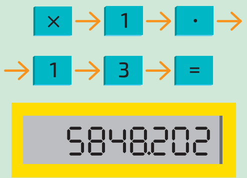
    R R$ 31 291,25
- Depois de trabalhar o conteúdo dessas páginas, avalie a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para acessarem a opção "Financiamento com prestações fixas" no *site* do Banco Central do Brasil, em que é possível realizar cálculos envolvendo financiamentos. Ali, são apresentadas quatro variáveis: quantidade de meses, taxa de juros mensal, valor da prestação e valor financiado. Deve-se inserir o valor de três dessas variáveis, obtendo como resultado o valor da 4ª variável. Veja em: <www.bcb.gov.br/calculadora/calculadoracidadao.asp>. Acesso em: 7 nov. 2018.

**21.** Veja como podemos determinar, em uma calculadora, o montante obtido em uma aplicação de R$ 4 580,00 a uma taxa de juro composto de 13% a.a. em um período de 3 anos.

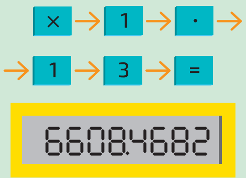
**I** Inicialmente, multiplicamos 4 580 por 1,13, que corresponde ao capital acrescido de 13% e digitamos a tecla =.



**II** Para obter o montante após 2 anos, multiplicamos o resultado obtido novamente por 1,13.



**III** Por último, multiplicamos o resultado obtido por 1,13 para determinar o montante ao final de 3 anos.



Ilustrações: Keithy Mostachi

Portanto, o montante obtido ao final de 3 anos de aplicação é, aproximadamente, R$ 6 608,47.

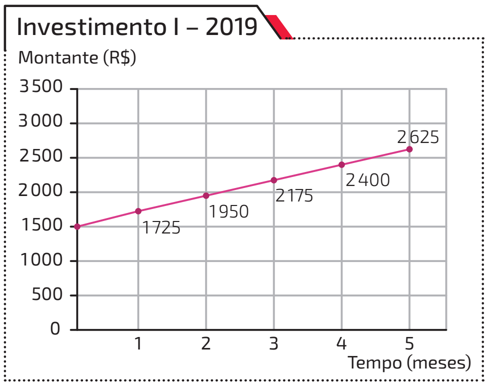
**a)** Utilizando uma calculadora, calcule o montante obtido em uma aplicação, a juro composto, de um capital de:

- R$ 804,00 a uma taxa de 29% a.a. em um período de 5 anos. aproximadamente R$ 2 872,13
- R$ 2 145,00 a uma taxa de 6,3% a.a. em um período de 7 anos. aproximadamente R$ 3 289,73

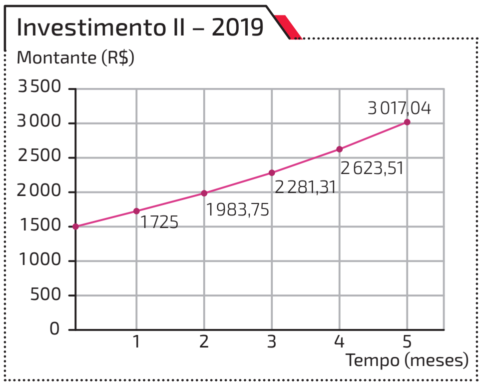
**b)** Elabore uma situação semelhante às apresentadas anteriormente e dê para um colega resolver. Depois, confira a resposta dada por ele. Resposta pessoal.

**22.** Os gráficos a seguir apresentam os montantes obtidos em função da medida do tempo em dois investimentos.

Em cada um desses investimentos, a taxa de juro não foi alterada durante o período apresentado.


Investimento I – 2019

Elaborado pelo autor com dados fictícios.


Investimento II – 2019

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Ilustrações: Sergio L. Filho

**a)** Qual foi o capital aplicado em cada um desses investimentos? investimentos I e II: R$ 1 500,00

**b)** Qual dos gráficos representa um investimento no sistema de:

- juro simples? investimento I
- juro composto? investimento II

**c)** Qual é a taxa de juro de cada um desses investimentos? investimentos I e II: 15% a.m.

**d)** Por que os montantes das aplicações no fim do 1º mês são iguais, e o mesmo não ocorre nos demais meses? Espera-se que os alunos digam que os montantes são calculados sobre o mesmo valor apenas no 1º mês.

**23.** Se uma pessoa realizar um empréstimo de R$ 2 500,00 à taxa de juro composto de 4% a.m. e pagar após 3 meses, quantos reais de juro ela terá de pagar? R$ 312,16

**24.** Há mais de 3 000 anos, povos como os hindus estavam habituados a resolver problemas relacionados a juro que, de modo geral, eram associados a transações comerciais da época. O problema enunciado a seguir, em linguagem atual, consta em uma tábula de cerca de 1 700 a.C.

> [...] Por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20% para que ela dobre? [...]

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

De acordo com o problema, o tempo deve ser maior ou menor do que três anos? Justifique. maior; Espera-se que os alunos justifiquem que a soma vai dobrar no 4º ano da aplicação.

**25.** Observe duas opções de investimento disponíveis em uma instituição financeira.

**I )**

**II )**

Ilustrações: Somma Studio

Se necessário, utilize uma calculadora para resolver esta atividade.

25. b) investimento I: R$ 599,90 e investimento II: R$ 600,00

**a)** Para quem pretende investir por um período de um mês, qual dos investimentos é mais vantajoso? Justifique. investimento II; Espera-se que os alunos justifiquem que nesse período o montante obtido será maior no investimento II.

**b)** Quantos reais de juro renderá um capital de R$ 20 000,00 aplicado em cada uma das opções de investimento por um período de 3 meses?

**c)** Elabore uma questão envolvendo as duas opções para um investimento aplicado durante um período entre 4 e 8 meses e dê para um colega resolver. Depois, confira as respostas dadas por ele. Resposta pessoal.

## Explorando o que estudei

Anote no caderno

**1.** Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo?
Matemática financeira, porcentagem, acréscimo, desconto, juro simples e juro composto

**2.** Cite algumas situações em que a Matemática financeira está presente.
Resposta pessoal.

**3.** Escreva o que você entende por acréscimo sucessivo, desconto sucessivo e juro.
Resposta pessoal.

**4.** O que diferencia o capital do montante?
Espera-se que os alunos respondam que o montante é a soma do capital e do juro.

**5.** Escreva algumas situações nas quais se paga juro.
Possíveis respostas: compras parceladas, financiamentos, empréstimos, entre outros.

**6.** Leia o que Caio está dizendo.

Débora Kamogawa

Essa afirmação é verdadeira? Justifique. não; Possível resposta: apenas no 1º período o juro composto é calculado sobre o capital inicial. Nos demais, o juro é calculado sobre o montante obtido no período anterior.

**7.** Qual é a diferença entre juro simples e juro composto?
Possível resposta: o juro simples é calculado sempre sobre o capital inicial. Já o juro composto é calculado sobre o capital inicial apenas no 1º período, e nos períodos seguintes, sobre o montante obtido no período anterior.

- Após os alunos responderem à questão **7**, explique que existem outros tipos de juros além do simples e do composto, os quais são utilizados em negociações financeiras, financiamento de bens e mercadorias, aplicações, entre outros. Quando financiamos a compra de um carro, por exemplo, o tipo de juro utilizado, de maneira geral, considera os abatimentos no pagamento das parcelas feitos periodicamente.

### Material digital

- Antes de prosseguir com os estudos e, se julgar oportuno, avalie a aprendizagem dos alunos em relação a algumas habilidades trabalhadas no decorrer desse bimestre. O material digital apresenta uma proposta de avaliação para o 1º bimestre que pode ser utilizada neste momento como ferramenta auxiliar do processo de ensino e aprendizagem.

- Uma possível questão que os alunos podem elaborar no item **c** da atividade **25** é a seguinte:
  - Calcule o montante obtido em cada uma das opções de investimento apresentadas de um capital de R$ 50 000,00, após um período de 6 meses. Qual é mais vantajosa?
    R investimento **I**: R$ 53 044,49; e investimento **II**: R$ 52 970,00. O investimento **I** é mais vantajoso.
- Para complementar a atividade **25**, peça que os alunos construam dois gráficos para representar os montantes obtidos com o investimento de R$ 20 000,00 em cada uma das opções por um período de 6 meses, o que pode ser feito em uma planilha eletrônica (ver seção **Explorando tecnologias**). Solicite que comparem os montantes obtidos em cada mês e conversem com um colega sobre as vantagens de cada investimento.

### Avaliação

- Realize uma avaliação com os alunos por meio da seção **Explorando o que estudei**, observando como eles compreenderam os conceitos de matemática financeira abordados. Com base nas observações, reflita sobre as práticas utilizadas nos processos de ensino-aprendizagem com a intenção de afirmá-las ou modificá-las para os próximos capítulos. Caso um ou mais alunos apresentem dificuldades em responder às questões propostas, verifique a possibilidade de fazer um resumo do conteúdo para sanar as dúvidas com a turma.

**BNCC em foco**

- A seção **Cidadania: explore essa ideia** contempla o tema contemporâneo **Educação financeira e fiscal**, pois destaca a atitude de poupar dinheiro em qualquer idade. Espera-se também que os alunos percebam que o hábito de poupar independe da quantia que se recebe.

- Com os alunos, observem as cenas e questione-os sobre o hábito de guardar parte do dinheiro que recebem. Pergunte a eles também por qual motivo costumam poupar.
A leitura do texto pode ser realizada coletivamente. Instigue os alunos a expressarem suas opiniões, sempre tomando cuidado para que haja respeito mútuo. Após a leitura, verifique se perceberam que o personagem poupa parte da mesada que recebe. Se for necessário, explique que mesada é uma quantia em dinheiro que alguns pais ou responsáveis cedem mensalmente aos seus filhos para ser utilizada na compra de lanche na escola ou em algum passeio. A administração da mesada possibilita à criança ou ao adolescente simular a vida adulta no trato com o dinheiro, uma vez que, se bem combinado, eles têm de aprender a consumir de maneira consciente, a fim de não gastar seu dinheiro muito tempo antes do recebimento da próxima mesada. Além disso, é possível adquirir o hábito de poupar para conquistar algo de maior valor do que o recebido mensalmente.
Ao final, destaque que existem diversas modalidades de investimento bancário, das quais uma das mais simples e utilizadas no Brasil é a poupança.

# Cidadania: explore essa ideia

## Poupar desde cedo

Poupar dinheiro implica não gastar tudo o que se ganha. Pessoas que poupam geralmente mantêm uma reserva financeira para investir ou usar em imprevistos, como gastos com a saúde, com o conserto de um equipamento ou com outra necessidade específica. Esse hábito deve ser cultivado desde cedo, quando ainda recebemos pequenas quantias, como uma mesada ou semanada. Outra vantagem de poupar, mesmo que sejam pequenas quantias, é a possibilidade de comprar, depois de certo tempo, o que tanto se deseja, como um jogo, um tênis, um brinquedo ou mesmo um presente para alguém especial. O dinheiro poupado pode ser guardado em um banco ou em um cofrinho, por exemplo. Se a quantia poupada for investida em uma aplicação bancária, pode-se receber juro sobre o valor depositado.

Nik Neves

## Analisando com cidadania

Anote no caderno Respostas nas orientações ao professor.

1. Você considera importante poupar? Por quê?
2. Qual é o objetivo do personagem ao poupar parte de sua mesada?
3. O texto cita duas maneiras de guardar dinheiro, considerando um cofrinho e um investimento bancário. Em sua opinião, qual dessas opções é mais apropriada para uma criança ou um adolescente? E para um adulto?

## Analisando com a Matemática

Anote no caderno

4. Caso o personagem ganhe uma mesada de R$ 80,00, da qual economize 30%, por quantos meses ele precisará guardar dinheiro para comprar um *skate* de R$ 140,00?
5. O juro relativo à aplicação da mãe do personagem é simples ou composto? Calcule o saldo dessa aplicação ao final do mês de março de 2020, considerando que ela não fará outros depósitos ou saques.

EXTRATO *ON-LINE*

01/01/2020 09:30:47

| DATA | HISTÓRICO | SALDO (R$) |
|---|---|---|
| JULHO - 2019 | | |
| 31/07 | DEPÓSITO | R$ 1000,00 |
| AGOSTO - 2019 | | |
| 01/08 | SALDO ANTERIOR | R$ 1000,00 |
| 31/08 | RENDIMENTO MÊS | R$ 6,00 |
| SETEMBRO - 2019 | | |
| 01/09 | SALDO ANTERIOR | R$ 1006,00 |
| 30/09 | RENDIMENTO MÊS | R$ 6,05 |
| OUTUBRO - 2019 | | |
| 01/10 | SALDO ANTERIOR | R$ 1012,05 |
| 31/10 | RENDIMENTO MÊS | R$ 6,07 |
| NOVEMBRO - 2019 | | |
| 01/11 | SALDO ANTERIOR | R$ 1018,12 |
| 30/11 | RENDIMENTO MÊS | R$ 6,10 |
| DEZEMBRO - 2019 | | |
| 01/12 | SALDO ANTERIOR | R$ 1024,22 |
| 31/12 | RENDIMENTO MÊS | R$ 6,14 |
| 01/01 | SALDO ATUAL | R$ 1030,36 |

Nik Neves

### Respostas

1. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que guardar parte do dinheiro que se ganha pode ser uma boa alternativa para compor uma reserva financeira, necessária em caso de eventualidades.
2. Comprar um *skate* novo.
3. Resposta pessoal. Possível resposta: criança e adolescente: cofrinho; adulto: conta bancária
4. 6 meses
5. composto; R$ 1049,02

- As questões propostas nessa seção podem ser realizadas em grupos de dois ou três alunos, proporcionando a interação deles e, ao final, discutidas com toda a turma.
- Na questão **3**, diga aos alunos que muitos adultos também têm o hábito de poupar em cofrinhos, onde guardam quantias menores que nos bancos. Já crianças e adolescentes devem utilizar esse meio porque ainda não têm idade suficiente para movimentar investimentos bancários. Porém, diga aos alunos que, quando há uma grande quantidade de moedas em um cofrinho, é recomendável colocá-las em circulação, pedindo a um adulto que deposite a quantia em algum tipo de investimento.

# Capítulo 4

# Razão e proporção

Madurodam é um parque temático em miniatura na cidade de Haia, na Holanda. O parque conta com diversas atividades, apresenta a história do país e também monumentos históricos.

As miniaturas são objetos que replicam os detalhes do objeto original e mantêm uma proporção entre eles. Por exemplo, em Madurodam, as réplicas têm a escala 1 : 25, ou seja, 1 cm da miniatura equivale a 25 cm do objeto em tamanho real.

**Pensando nisso...** Respostas nas orientações ao professor.

**A** Que tipo de miniatura mais interessa a você? Por quê?

**B** Determine a medida, em centímetros, do comprimento da miniatura de um trem cujo comprimento real mede 150 m, sabendo que a réplica tem a escala 1 : 100, ou seja, 1 cm da miniatura equivale a 100 cm do objeto em tamanho real.

**C** Seguindo a escala de Madurodam, quanto mediria a altura de um objeto-modelo, como uma casa, sabendo que a altura de sua miniatura mede 14 cm?

Esse capítulo permitirá que os alunos avancem nos conteúdos sobre razão e proporção já estudados em anos anteriores, de modo a relacionar o conceito de razão a contextos como densidade demográfica, velocidade média e escala, e relembrar o cálculo de porcentagens.

Será estudado o conceito de proporção e suas propriedades, relacionando-o aos números proporcionais e à divisão em partes proporcionais. As regras de três simples e composta também serão abordadas, sempre que possível, por meio de situações oriundas de contextos reais, levando os alunos a resolver e elaborar problemas que as envolvam.

- A abertura desse capítulo possibilita abordar o conceito de razão e proporção de maneira intuitiva, lançando mão de miniaturas, um assunto que permite despertar a curiosidade dos alunos. A abordagem do conteúdo com base no contexto apresentado pode contribuir com o processo de aprendizagem do conceito de proporcionalidade, uma vez que as miniaturas são produzidas de acordo com determinadas escalas, e fazer com que o estudo seja mais interessante. Uma sugestão de condução do trabalho é realizar uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. As questões propostas podem ser respondidas individualmente ou em duplas e, ao final, é importante que as respostas sejam discutidas pela turma. Para complementar os estudos, sugira que os alunos levem para a sala de aula algumas miniaturas, de preferência aquelas que indicam a escala. Ao realizar as respectivas medições utilizando as escalas e uma trena, é possível determinar de maneira concreta as medidas reais dos objetos reduzidos. Por exemplo, a miniatura do parque temático apresentada nas páginas de abertura foi produzida na escala 1:25, ou seja, cada centímetro da miniatura representa 25 cm do objeto em tamanho real.

Parque em miniatura na cidade de Haia, na Holanda, em 2017.

Olena Tselykh Fotografie/Shutterstock.com

**Miniaturas**

Veja mais informações sobre miniaturas no *site*: <www.minimundo.com.br> (acesso em: 10 nov. 2018).

## Material digital

- No material digital, é apresentado um **Plano de desenvolvimento** para o 2º bimestre capaz de auxiliar nos planejamentos e desenvolvimentos das aulas, em que são descritos em um quadro os objetivos específicos, os objetos de conhecimento e as habilidades específicas **EF09MA06**, **EF09MA07** e **EF09MA08**, previstas para os capítulos **4**, **5** e **6** sugeridos para esse período. Além disso, são elencadas as principais práticas didático-pedagógicas e atividades recorrentes previstas para o conteúdo abordado nesse bimestre.

## Pensando nisso...

Ⓐ Resposta pessoal.
Ⓑ 150 cm
Ⓒ 350 cm

- Ao abordar a questão **C**, verifique a possibilidade de apresentar as medidas de algumas construções famosas para que os alunos tenham a oportunidade de reproduzi-las em miniatura, com a mesma escala utilizada em Madurodam.

## Avaliação

- Nesse momento, antes de iniciar o trabalho com o capítulo, realize uma avaliação com os alunos, na intenção de verificar seus conhecimentos prévios quanto ao conteúdo de razão e proporção, visto que, nos anos anteriores, eles já tiveram contato com esses conceitos. Em seguida, reflita sobre seu planejamento de trabalho, a fim de alinhá-lo às necessidades apresentadas pelos alunos durante essa avaliação. Para isso, proponha as **Atividades complementares** abaixo e outras que julgar necessárias.

## Atividades complementares

- A idade de Pedro é de 15 anos, e a de Fátima é de 45 anos. Qual é a razão entre as idades de Pedro e Fátima?

  Ⓡ $\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$

- Dois médicos atendem 36 pacientes em 6 horas. Mantidas as proporções, quatro médicos atendem 36 pacientes em quantas horas?

  Ⓡ 3 horas

## Objetivos do capítulo

- Compreender o conceito de razão.
- Resolver problemas envolvendo razões de diferentes espécies em contextos variados.
- Compreender o conceito de proporção, números proporcionais e divisão em partes proporcionais.
- Compreender a regra de três como um método de resolver problemas que envolvam grandezas proporcionais.
- Utilizar regras de três simples e composta para resolver problemas que envolvam grandezas proporcionais.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais.

## Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **4**, **5** e **6** do 2º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

Neste capítulo, vamos rever o conteúdo sobre razão e proporção, visto em anos anteriores, e ampliar o estudo de alguns conceitos.

# Razão

Podemos utilizar razão para comparar duas grandezas. Observe um exemplo.

Certa empresa tem 20 funcionários do sexo feminino e 16 do sexo masculino. Podemos obter a razão entre essas quantidades da seguinte maneira.

quantidade de funcionários do sexo feminino

$$\frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

quantidade de funcionários do sexo masculino

A razão entre dois números **x** e **y** (com y ≠ 0) é o quociente de **x** por **y**. Podemos expressar a razão entre **x** e **y** pela fração $\frac{x}{y}$ ou por x : y. Lemos: "**x** está para **y**".

Se invertermos a ordem na fração, obtemos $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$. Nesse caso, dizemos que a razão $\frac{5}{4}$ é o inverso da razão $\frac{4}{5}$.

Ao efetuarmos a multiplicação entre essas duas razões, obteremos produto igual a 1.

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1$$

Podemos dizer que uma razão é inversa da outra quando o produto entre elas for igual a 1.

# Algumas razões

Existem razões que recebem nomes especiais. Neste tópico vamos estudar algumas, entre elas: **densidade demográfica**, **velocidade média**, **escala** e **porcentagem**.

## Densidade demográfica

Uma razão muito utilizada é a **densidade demográfica**, também conhecida por **população relativa**. A densidade demográfica de certa localidade é a razão entre a quantidade de habitantes dessa localidade e a medida de sua área, em quilômetros quadrados.

Altamira (PA) – 2016

IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 7 ed. Rio de Janeiro, 2016.

O município de Altamira (PA) é o maior município em extensão territorial do Brasil. A medida da sua área é maior do que a de vários países, entre eles Dinamarca (43 094 km$^2$), Grécia (131 990 km$^2$) e Portugal (92 389 km$^2$).

Vamos calcular a densidade demográfica (Dd) do município de Altamira (PA) no ano de 2016.

- População estimada em 2017: 109 938 habitantes
- Medida da área territorial: 159 533,328 km$^2$

$$Dd = \frac{\text{quantidade de habitantes}}{\text{área territorial (km}^2\text{)}} = \frac{109\,938}{159\,533{,}328} = 0{,}6891$$

A densidade demográfica de Altamira em 2016 é aproximadamente 0,7 hab/km$^2$.

## Relacionando saberes

- Tendo em vista a estreita relação entre razão e proporção e a representação de mapas, aproveite para integrar aos estudos o componente curricular de **Geografia**, de maneira a elucidar o uso desse conteúdo matemático na escala de mapas e nos cálculos de densidade demográfica. Conte com o auxílio do professor responsável pelo componente e, juntos, tentem fornecer mais informações sobre a aplicação desses conceitos nos contextos geográficos. Também é possível transmitir outros conhecimentos sobre o município apresentado, como o fato de estar às margens do rio Xingu e de ser cortado pela Rodovia Transamazônica.

## Velocidade média

A **velocidade média** é uma razão que relaciona as grandezas distância e tempo. A velocidade média de um carro em certo percurso, por exemplo, é a razão entre a medida da distância percorrida e a medida do tempo de percurso.

Vamos calcular a medida da velocidade média (v) de um carro que percorreu 300 km em 4 h.

- Medida da distância percorrida (d): 300 km
- Medida do tempo (t): 4 h

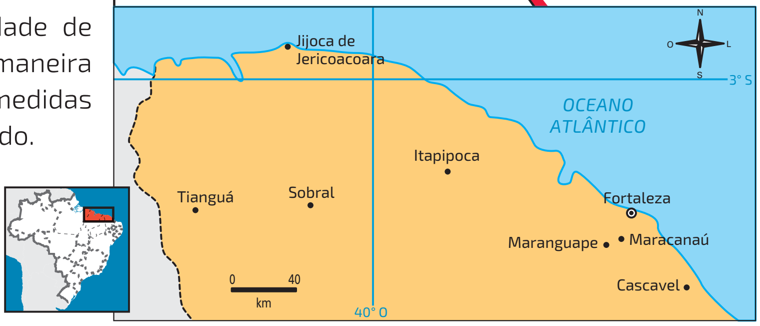
$$v = \frac{d}{t} = \frac{300}{4} = 75$$

No percurso, a velocidade do carro pode ter variado, mas na média a medida velocidade foi 75 km/h.

## Escala

Um mapa tem a finalidade de representar certo local de maneira reduzida e proporcional às medidas reais. Observe o mapa ao lado.

Parte do estado do Ceará – 2016



IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 7 ed. Rio de Janeiro, 2016.

Edson Belluscci

No mapa, cada 1 cm representa 40 km na realidade, ou seja, cada 4 000 000 cm (40 km) foi reduzido para 1 cm. Portanto, ele foi feito na razão de 1 cm para 4 000 000 cm.

Essa razão é chamada **escala** e pode ser representada por $\frac{1}{4\,000\,000}$ ou 1 : 4 000 000.

No mapa, a medida da distância em linha reta entre as cidades de Fortaleza e Sobral é cerca de 5 cm. Para sabermos a medida aproximada da distância real em linha reta entre essas duas cidades, utilizamos a escala de acordo com a qual o mapa foi confeccionado. Portanto, realizamos o seguinte cálculo:

$$\underbrace{5}_{\text{medida em centímetros no mapa}} \cdot \underbrace{4\,000\,000}_{\text{medida real correspondente a 1 cm no mapa}} = 20\,000\,000 \text{ cm}$$

Transformando em quilômetros a medida obtida, temos:

$$20\,000\,000 : \underbrace{100\,000}_{100\,000 \text{ cm} = 1 \text{ km}} = 200 \text{ km}$$

Portanto, a medida da distância real em linha reta entre as cidades de Fortaleza e Sobral é aproximadamente 200 km.

- Explique aos alunos que a velocidade de 75 km/h quer dizer que o carro percorreu, em média, 75 km a cada uma hora.
- Os valores apresentados no tópico **Escala** podem ser representados por potências de base 10. Peça aos alunos que representem a escala e os valores dessa página também com potências de base 10.

### BNCC em foco

- Os tópicos **Densidade demográfica**, **Velocidade média**, **Escala** e **Porcentagem**, com as atividade propostas nas páginas **78** a **80**, proporcionam o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes nos alunos, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. Dessa maneira, contempla-se a **Competência específica de Matemática 2**.
- A velocidade média, apresentada nessa página, é um exemplo de taxa de variação, pois se trata da razão entre a medida da distância percorrida pela medida do intervalo de tempo. Assim, ao resolver problemas que envolvem a velocidade média, os alunos estarão desenvolvendo a habilidade **EF09MA08**.

### Material digital

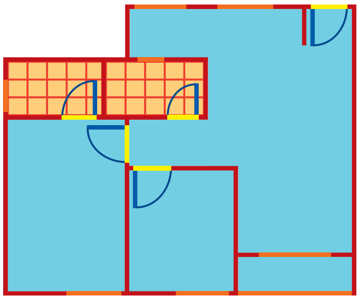
- O material digital dessa coleção apresenta o projeto **Imprudência no trânsito**, que possibilita uma integração com o componente curricular **Língua Portuguesa**, além do trabalho com os temas contemporâneos **Educação para o trânsito** e **Vida familiar e social**, destacados na BNCC. Esse projeto visa promover a compreensão dos conceitos que envolvam razão entre grandezas de espécies diferentes ao tratar de velocidade média, com o objetivo de conscientizar sobre a importância de respeitar as leis de trânsito.

- Se for preciso, informe aos alunos que planta baixa é um desenho que representa a construção observada do alto, considerando um corte horizontal e a retirada da parte de cima dessa construção.

**BNCC em foco**

- A obra de Luiz Sacilotto evidencia a relação entre o conceito de escala e as obras de arte. Apresentar referências artísticas é uma maneira de desenvolver a **Competência geral 3**, incentivando os alunos a reconhecer, valorizar e compreender as diversas manifestações artísticas e culturais, aprimorando o senso estético e contribuindo para a sua formação.
- As atividades que se iniciam nessa página e vão até a página **80** capacitam os alunos a resolver problemas que envolvem a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade média e densidade demográfica, e contempla, por conseguinte, a habilidade **EF09MA07**.
- Eles também serão estimulados a resolver e elaborar problemas que envolvem relações de proporcionalidade direta entre grandezas, inclusive escalas, conforme orienta a habilidade **EF09MA08**.

Além dos mapas, a escala também pode ser utilizada em objetos, monumentos, obras de arte, plantas baixas, entre outros. Veja alguns exemplos.



Ingridhi Borges

1 : 180

Arquivo Valter Sacilotto/ Coleção particular, São Paulo

1 : 9

**Paisagem**. 1944. Luiz Sacilotto. Óleo sobre papelão.

## Porcentagem

Em certo concurso, foram aprovados 6 candidatos de um total de 25. Os candidatos aprovados representam quantos por cento do total?

Podemos responder a essa questão por meio da seguinte razão:

$$\frac{\text{candidatos aprovados}}{\text{total de candidatos}} = \frac{6}{25} = 0{,}24 = \frac{24}{100} = 24\%$$

Assim, 24% do total de candidatos foi aprovado no concurso.

Nesse caso, a **porcentagem** é a razão entre parte e todo, ou seja, entre os candidatos aprovados e o total de candidatos do concurso.

## Atividades

Anote no caderno

**1.** Em um campeonato de futsal, determinado time venceu 3 dos 5 jogos que disputou.

**a)** A quantidade de jogos que o time venceu representa quantos por cento do total? 60%

**b)** Se o time tivesse vencido 4 dos 5 jogos, quantos por cento representariam essas vitórias? 80%

**2.** Observe a tabela e resolva as questões.

Informações sobre alguns municípios brasileiros – 2017

| Município | Estimativa da população | Área (km²) | Densidade demográfica |
|---|---|---|---|
| Amajari (RR) | 11 560 | 28 472 | 0,4 |
| São Paulo (SP) | 12 106 920 | 1 521 | 7 959,8 |
| São João de Meriti (RJ) | 460 461 | 35 | 13 156 |
| Cambará do Sul (RS) | 6 680 | 1 208 | 5,5 |

IBGE. **Cidades**. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br>. Acesso em: 20 ago. 2018.

**a)** Qual desses municípios tem:

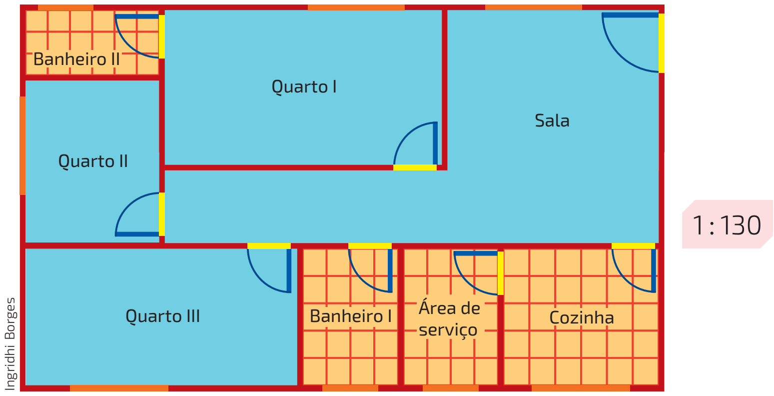
- a maior quantidade de habitantes? São Paulo
- a maior medida de área territorial? Amajari
- a maior densidade demográfica? São João de Meriti

**b)** O município de maior população tem a maior densidade demográfica? não

**c)** Ter a maior quantidade de habitantes garante ao município ter a maior densidade demográfica? Justifique sua resposta.

c) não; Espera-se que os alunos respondam que a densidade demográfica é uma razão que depende da população e da medida da área territorial.

**3.** No encarte de propaganda do lançamento de um condomínio residencial, foi apresentada a planta baixa de um dos apartamentos.



Planta baixa.

De acordo com as informações, resolva as questões.

**a)** Nessa planta baixa, 5 cm correspondem a quantos metros do apartamento? 6,5 m

**b)** Para representar 5,2 m do apartamento, quantos centímetros da planta baixa são utilizados? 4 cm

**c)** Utilizando os conhecimentos relacionados à escala, elabore uma questão em que seja necessário o uso de régua e dê para um colega resolver. Depois, verifique se a resposta dada por ele está correta. Resposta pessoal.

**4.** Em termos de velocidade, o guepardo, um felino típico das savanas africanas, é considerado um dos animais terrestres mais velozes do mundo.

Qual é a medida da velocidade média, em metros por segundo (m/s), obtida por um guepardo que percorreu 266 m em 10 s? 26,6 m/s

**5.** Após realizar atividades físicas, três alunos de uma turma do 9º ano contaram seus batimentos cardíacos por um período de 10 s. Observe o resultado obtido por eles no quadro ao lado.

| Aluno | Quantidade de batimentos cardíacos |
|---|---|
| Paola | 27 |
| Tiago | 31 |
| Juliana | 28 |

**a)** Calcule a quantidade de batimentos cardíacos por minuto de cada aluno. Paola: 162 batimentos por minuto; Tiago: 186 batimentos por minuto; Juliana: 168 batimentos por minuto

**b)** Quais alunos apresentaram entre 124 e 176 batimentos cardíacos por minuto? Paola e Juliana

**6.** A população de Palmas (TO) é uma das que mais cresceram no Brasil nos últimos anos. De 2010 a 2017, a população desse município, cuja área territorial mede 2 218,942 km², passou de 228 332 para 286 787 habitantes.

Qual era a densidade demográfica de Palmas em 2010? E em 2017?
aproximadamente 102,90 hab/km², aproximadamente 129,24 hab/km²

**7.** Paulo fez uma viagem de ônibus de 841 km entre os municípios de São José do Rio Preto (SP) e Juiz de Fora (MG). Sabendo que o ônibus partiu às 8 h e chegou às 22 h 30 min do mesmo dia, qual a medida da velocidade média desse ônibus? 58 km/h

- Veja uma possível questão que pode ser elaborada pelos alunos no item **c** da atividade **3**:
  - Calcule, em metros, a medida do comprimento e da largura do apartamento.
    R comprimento: 13 m; largura: 7,8 m
- Na atividade **6**, se julgar conveniente, informe os alunos de que Palmas é a capital do estado do Tocantins, localizado na Região Norte do Brasil, sendo o estado mais novo das 27 unidades federativas do país.

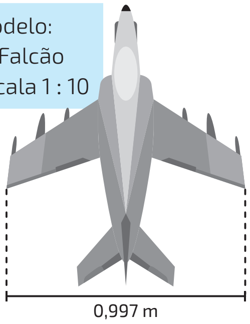
- Veja um possível problema elaborado pelos alunos na atividade **8**:
  - Determine a medida, em metros, das envergaduras dos aviões em tamanho real.
    Ⓡ A-1 Falcão: 9,97 m; *Boeing* KC-137: 44,42 m
- Na atividade **9**, promova uma discussão para que os alunos justifiquem qual das maneiras apresentadas eles consideram mais fácil na resolução do problema.

**8.** Os aeromodelos são miniaturas de aviões e helicópteros construídos com base em uma escala das verdadeiras dimensões da aeronave.

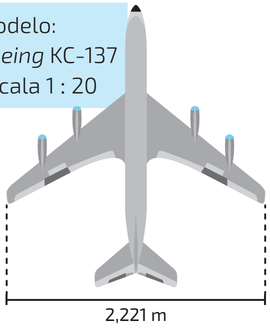
Com base nas escalas indicadas e nas medidas das envergaduras dos aeromodelos a seguir, elabore um problema e dê para um colega resolver. Depois, confira se a resposta dele está correta. Resposta pessoal.

**Envergadura ›** nos aviões, é a distância máxima entre as extremidades de suas asas.

Modelo:
A1 Falcão
Escala 1 : 10

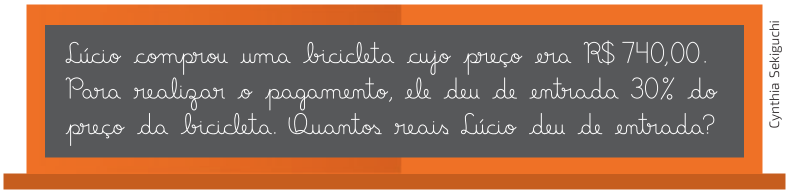


Modelo:
*Boeing* KC-137
Escala 1 : 20



Ilustrações: Rafael L. Gaion

**9.** Leia o problema.



Lúcio comprou uma bicicleta cujo preço era R$ 740,00. Para realizar o pagamento, ele deu de entrada 30% do preço da bicicleta. Quantos reais Lúcio deu de entrada?

Cynthia Sekiguchi

Observe como três alunos resolveram esse problema.

**Caio**

Para obter o valor pago na entrada, efetuei os cálculos no caderno.

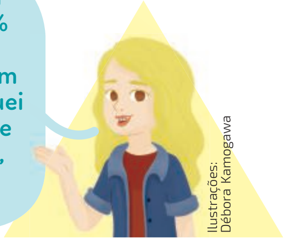
30% de R$ 740,00 → $\frac{30}{100} \cdot 740 =$

$= \frac{22\,200}{100} = 222$ → R$ 222,00

**Luana**

Determinei o resultado utilizando uma calculadora. Para isso, digitei as teclas 7 4 0 × 3 0 % e obtive 222, ou seja, R$ 222,00.

Primeiro, calculei mentalmente 10% de R$ 740,00 e obtive R$ 74,00. Em seguida, multipliquei o resultado por 3 e obtive R$ 222,00, que é o valor da entrada.



**Juliana**

Ilustrações: Débora Kamogawa

Agora, junte-se a um colega e resolvam cada problema a seguir de duas maneiras.

**a)** Em uma escola estudam 420 alunos no período da tarde e, desse total, 40% são meninos. Quantos meninos estudam nessa escola no período da tarde?
168 meninos

**b)** Um reservatório que tem medida de capacidade de 12 280 L está com 75% da medida de sua capacidade com água. Nesse reservatório tem mais ou menos de 9 824 L de água? menos

# Proporção

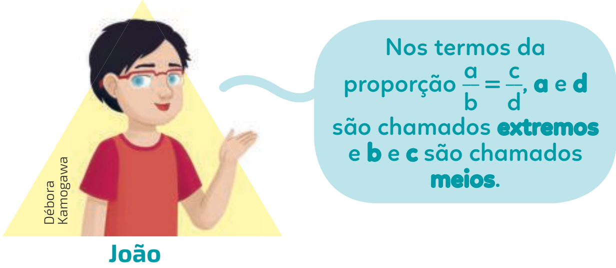
Vimos anteriormente que, em certa empresa, a razão entre a quantidade de funcionários do sexo feminino e a do sexo masculino é de $\frac{20}{16}$ ou $\frac{5}{4}$.

Agora, vamos verificar a razão entre a quantidade de funcionários do sexo feminino e do sexo masculino na empresa Criativa, que tem 30 mulheres e 24 homens. Nesse caso, a razão é: $\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$.

Portanto, a razão entre a quantidade de funcionários do sexo feminino e de funcionários do sexo masculino é igual nas duas empresas. Podemos indicar essa situação do seguinte modo:

$\frac{20}{16} = \frac{30}{24}$ (lê-se: 20 está para 16 assim como 30 está para 24)

> Quando duas razões são iguais, temos uma proporção. Portanto, se a razão entre **a** e **b** ($b \neq 0$) é igual à razão entre **c** e **d** ($d \neq 0$), dizemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção.



## Propriedade fundamental das proporções

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Assim, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0$; $d \neq 0$), então $a \cdot d = b \cdot c$.

Por exemplo, na proporção $\frac{1}{2} = \frac{9}{18}$, temos:

$$1 \cdot 18 = 2 \cdot 9$$

$$18 = 18$$

## Outras propriedades

Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos as seguintes propriedades.

- Ao trocar a posição dos extremos, a proporção se mantém: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.
- Ao trocar a posição dos meios, a proporção se mantém: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
- No caso de $a \neq 0$ e $c \neq 0$, ao inverter as razões, a proporção se mantém: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

**BNCC em foco**

- A partir do estudo desse tópico e das atividades propostas, os alunos serão levados a resolver e elaborar problemas que envolvem relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou três grandezas e divisão em partes proporcionais em diferentes contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas, contemplando assim a habilidade **EF09MA08**.

Assim, considerando a proporção $\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{2}{18}=\frac{1}{9} \qquad \frac{9}{1}=\frac{18}{2} \qquad \frac{18}{9}=\frac{2}{1}$$

Além disso, se $b \neq d$ e se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ é uma proporção, então também são válidas as seguintes propriedades:

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b} \qquad \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b} \qquad \frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}$$

Assim, considerando a proporção $\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{9+1}{18+2}=\frac{9}{18} \qquad \frac{9+1}{18+2}=\frac{1}{2} \qquad \frac{9-1}{18-2}=\frac{9}{18} \qquad \frac{9-1}{18-2}=\frac{1}{2}$$

Note que ao simplificarmos as frações obtemos, em cada caso, uma igualdade verdadeira:

$$\frac{9+1}{18+2}=\frac{9}{18} \Rightarrow \frac{10^{:10}}{20_{:10}}=\frac{9^{:9}}{18_{:9}} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2} \qquad \frac{9+1}{18+2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{10^{:10}}{20_{:10}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{9-1}{18-2}=\frac{9}{18} \Rightarrow \frac{8^{:8}}{16_{:8}}=\frac{9^{:9}}{18_{:9}} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2} \qquad \frac{9-1}{18-2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{8^{:8}}{16_{:8}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

## Números proporcionais

Estudamos em anos anteriores o que são grandezas diretamente proporcionais e o que são grandezas inversamente proporcionais. Agora, vamos estudar **números diretamente proporcionais** e **números inversamente proporcionais**.

### Números diretamente proporcionais

Ao abastecer o carro, Jaqueline observou que o litro de etanol custava R$ 3,00.

A quantidade de litros de etanol e o preço a pagar são grandezas diretamente proporcionais.

No quadro abaixo, podemos observar alguns valores correspondentes a essas duas grandezas.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quantidade de etanol (em L) | 4 | 5 | 6 |
| Preço a pagar (em R$) | 12 | 15 | 18 |

Rafael Lam

Simplificando as razões $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{15}$ e $\frac{6}{18}$, obtemos razões iguais a $\frac{1}{3}$.

Portanto, os números 4, 5 e 6 são diretamente proporcionais aos números 12, 15 e 18 respectivamente.

- Após o trabalho com o tópico **Números diretamente proporcionais**, complemente os estudos pedindo aos alunos que identifiquem a constante de proporcionalidade entre as seguintes grandezas:

| Medida do tempo (horas) | Produção (kg) |
|---|---|
| 2 | 120 |
| 3 | 180 |
| 4 | 240 |

R $\frac{1}{60}$

| Quantidade de combustível gasto (L) | Medida da distância percorrida (km) |
|---|---|
| 30 | 300 |
| 60 | 600 |
| 120 | 1 200 |

R $\frac{1}{10}$

Para saber se os números 2, 3, 8 e 10 são diretamente proporcionais aos números 8, 12, 32 e 40, respectivamente, devemos verificar se as frações, na forma irredutível e que representam as razões correspondentes, são iguais:

$$\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \qquad \frac{3}{12}=\frac{1}{4} \qquad \frac{8}{32}=\frac{1}{4} \qquad \frac{10}{40}=\frac{1}{4}$$

Como todos os resultados obtidos são iguais a $\frac{1}{4}$ (constante de proporcionalidade), podemos dizer que os números 2, 3, 8 e 10 são diretamente proporcionais aos números 8, 12, 32 e 40, respectivamente.

Os números **a**, **c** e **e** são **diretamente proporcionais** aos números **b**, **d** e **f** (diferentes de zero), respectivamente, quando as razões $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ são todas iguais a uma constante **k**, chamada constante de proporcionalidade. Assim, podemos escrever: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$.

## Números inversamente proporcionais

Timóteo distribuiu certa quantidade de suco em 12 copos de modo que cada copo ficasse com 100 mL de suco. Se em cada copo fossem colocados 200 mL de suco, seriam necessários 6 copos. Da mesma maneira, se em cada copo fossem colocados 300 mL de suco, seriam necessários 4 copos.

Organizando esses dados em um quadro, temos:


Rafael Lam

| Quantidade de suco nos copos (em mL) | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|
| Quantidade de copos | 12 | 6 | 4 |

Observe que, se a quantidade de suco nos copos dobrar, a quantidade de copos diminui pela metade, e se a quantidade de suco triplicar, a quantidade de copos diminui para um terço. Nesse caso, dizemos que os números 100, 200 e 300 são inversamente proporcionais aos números 12, 6 e 4, respectivamente.

Veja as razões que obtemos com esses números.

$$\frac{100}{\frac{1}{12}}=100\cdot\frac{12}{1}=1200 \qquad \frac{200}{\frac{1}{6}}=200\cdot\frac{6}{1}=1200 \qquad \frac{300}{\frac{1}{4}}=300\cdot\frac{4}{1}=1200$$

- Após o trabalho com o tópico **Números inversamente proporcionais**, complemente os estudos pedindo aos alunos que identifiquem a constante de proporcionalidade entre as seguintes grandezas:

| Medida da velocidade (km/h) | Medida do tempo gasto (horas) |
|---|---|
| 60 | 4 |
| 80 | 3 |
| 120 | 2 |

R 240

| Quantidade de máquinas | Medida do tempo (min) |
|---|---|
| 3 | 72 |
| 4 | 54 |
| 5 | 43,2 |

R 216

- Ao resolverem a atividade **11**, ressalte que todo medicamento só deve ser tomado com a orientação de um adulto. Veja uma possível questão elaborada por eles nessa atividade:
  - Quantas gotas desse medicamento Mariana deverá dar à sua filha, cuja medida de massa é igual a 20 kg?
    R 50 gotas
- Veja um possível problema elaborado pelos alunos na atividade **15**:
  - Se Douglas tivesse oito calopsitas, um pacote de ração poderia alimentá-las por quantos dias?
    R 9 dias

Como os resultados obtidos são iguais a 1200 (constante de proporcionalidade), podemos dizer que os números 100, 200 e 300 são inversamente proporcionais aos números 12, 6 e 4, respectivamente.

Os números **a**, **c** e **e** são **inversamente proporcionais** aos números **b**, **d** e **f** (diferentes de zero), respectivamente, se as razões $\frac{a}{\frac{1}{b}}$, $\frac{c}{\frac{1}{d}}$, $\frac{e}{\frac{1}{f}}$ forem todas iguais a uma constante **k**, chamada de constante de proporcionalidade. Assim, podemos escrever: $a \cdot b = c \cdot d = e \cdot f = k$.

## Atividades

Anote no caderno

**10.** Sabendo que **a**, **b**, **c** e 120 são diretamente proporcionais aos números 220, 120, 160 e 480, respectivamente, determine os números **a**, **b** e **c**. a = 55, b = 30, c = 40

**11.** Na bula de um determinado medicamento pediátrico, recomenda-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg do "peso" da criança.

A partir dessa situação, elabore uma questão e entregue-a para um colega resolver. Em seguida, corrija-a. Resposta pessoal.

**12.** Um professor de matemática tem 24 livros para distribuir igualmente entre alguns de seus alunos. De acordo com o quadro a seguir, se ele escolher apenas 2 alunos, cada um deles receberá 12 livros. Se ele escolher 4 alunos, cada um receberá 6 livros. Se ele escolher 6 alunos, cada um deles receberá 4 livros.

| Quantidade de alunos escolhidos | Quantidade de livros para cada aluno |
|---|---|
| 2 | 12 |
| 4 | 6 |
| 6 | 4 |

Nesse caso, as duas grandezas envolvidas, quantidade de alunos e quantidade de livros, são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais? inversamente proporcionais

**13.** Um trem, deslocando-se a uma velocidade média cuja medida é 400 km/h, faz um determinado percurso em 3 horas. Caso a medida da velocidade média do trem fosse 480 km/h, qual seria a medida do tempo necessário para fazer esse mesmo percurso? 2 h 30 min

**14.** Um carro à velocidade média cuja medida é 100 km/h faz certo percurso em 4 horas. Se a medida da velocidade média do carro fosse 80 km/h, em quantas horas seria feito o mesmo percurso? 5 horas

**15.** Douglas tem 6 calopsitas e planeja ter mais. Para alimentá-las, um pacote de ração é o suficiente para 12 dias.


Débora Kamogawa

Com base no enunciado e na imagem, elabore um problema e dê para um colega resolver. Depois, confira se a resposta dele está correta. Resposta pessoal.

# Divisão em partes proporcionais

Estudaremos neste tópico como podemos dividir um número em partes proporcionais.

## Divisão em partes diretamente proporcionais

Em certo ano, o dono de uma loja dividiu uma bonificação salarial de R$ 12 000,00 entre seus três vendedores, de maneira proporcional à quantidade de anos de trabalho nessa loja, como indicado no quadro a seguir.

| Vendedor | Mel | Raul | Zeca |
|---|---|---|---|
| Quantidade de anos de trabalho | 1 | 2 | 3 |

Para saber quantos reais de bonificação cada vendedor recebeu, precisamos dividir R$ 12 000,00 em partes diretamente proporcionais à quantidade de anos de trabalho de cada vendedor, ou seja, aos números 1, 2 e 3.

Assim, utilizando as propriedades das proporções apresentadas na página **82** e sabendo que **x**, **y** e **z** representam as quantias, em reais, recebidas por Mel, Raul e Zeca, respectivamente, temos:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\frac{x+y+z}{6}$$

Como $x+y+z=12\,000$, temos $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\frac{12\,000}{6}=2\,000$

$$\frac{x}{1}=2\,000$$
$$x=1\cdot 2\,000$$
$$x=2\,000$$

$$\frac{y}{2}=2\,000$$
$$y=4\,000$$

$$\frac{z}{3}=2\,000$$
$$z=6\,000$$

Dessa maneira, Mel recebeu R$ 2 000,00, Raul recebeu R$ 4 000,00 e Zeca recebeu R$ 6 000,00.

## Divisão em partes inversamente proporcionais

No ano seguinte, o dono dessa loja decidiu dividir a bonificação salarial de R$ 18 000,00 entre seus três vendedores, de maneira inversamente proporcional à quantidade de faltas de cada um deles naquele ano. As faltas estão indicadas no quadro a seguir.

| Vendedor | Mel | Raul | Zeca |
|---|---|---|---|
| Quantidade de faltas | 3 | 4 | 6 |

Como a divisão aconteceu de maneira inversa à quantidade de faltas, assim escrevemos as razões $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$, e as reduzimos ao mesmo denominador. Desse modo, obtemos $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$ e $\frac{2}{12}$ e dividimos 18 000 em partes proporcionais aos números 4, 3 e 2.

- Após o trabalho com o tópico **Divisão em partes diretamente proporcionais**, proponha as **Atividades complementares** a seguir, de maneira que os alunos possam, nesse primeiro momento, aplicar os procedimentos vistos.

**Atividades complementares**

- Quanto se obtém ao dividir o número 100 em três partes diretamente proporcionais a 4, 7 e 9?
  R 20, 35 e 45
- Moisés e Marcos abriram uma empresa e investiram R$ 30 000,00, sendo que R$ 12 000,00 foram de Moisés e os R$ 18 000,00 restantes, de Marcos. Se, no primeiro mês, a empresa lucrou R$ 6 000,00, quanto cada um deve receber se o lucro for dividido de maneira proporcional ao capital investido por cada um?
  R Moisés deve receber R$ 2 400,00 e Marcos, R$ 3 600,00.

**Avaliação**

- As atividades **16** a **21** podem ser utilizadas para realizar uma avaliação com os alunos. Observe como eles as respondem para identificar possíveis dificuldades e, se necessário, faça interferências, a fim de saná-las. Aproveite para observar as estratégias utilizadas pelos alunos e incorporá-las em sala de aula, a fim de facilitar a compreensão dos conteúdos.

Assim, escrevemos:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x + y + z}{9}$$

Como $x + y + z = 18\,000$, temos $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{18\,000}{9} = 2\,000$

$$\frac{x}{4} = 2\,000 \qquad \frac{y}{3} = 2\,000 \qquad \frac{z}{2} = 2\,000$$

$$x = 8\,000 \qquad y = 6\,000 \qquad z = 4\,000$$

Portanto, Mel recebeu R$ 8 000,00, Raul recebeu R$ 6 000,00 e Zeca recebeu R$ 4 000,00.

## Atividades

Anote no caderno

17. Os candidatos receberão respectivamente R$ 144 000,00, R$ 88 000,00 e R$ 56 000,00.

**16.** João, Ivo e Elton ganharam de seus pais 46 moedas de mesmo valor. Eles repartiram essas moedas de maneira diretamente proporcional às suas idades, que são: 4, 7 e 12 anos, respectivamente. Quantas moedas cada um recebeu?

João, Ivo e Elton receberam respectivamente 8, 14 e 24 moedas.

**17.** O prêmio de um concurso no valor de R$ 288 000,00 será dividido de maneira diretamente proporcional aos pontos obtidos pelos candidatos das três primeiras colocações. Supondo que o primeiro colocado tenha feito 180 pontos, o segundo, 110 pontos, e o terceiro, 70 pontos, determine o valor em reais do prêmio de cada um dos candidatos.

**18.** Três amigos fizeram um investimento juntos, no qual receberiam no final R$ 3 500,00. Sabendo que Júlia contribuiu com R$ 400,00, Débora com R$ 600,00 e Igor com R$ 1 000,00, calcule a quantia recebida no final, sabendo que a divisão deve ser diretamente proporcional ao valor do investimento.

Júlia: R$ 700,00; Débora: R$ 1 050,00 e Igor: R$ 1 750,00.

**19.** A quantia de R$ 3 000,00 precisa ser dividida entre Amanda, Taís e Heloísa, de maneira inversamente proporcional às suas idades, 20, 15 e 12 anos, respectivamente. Determine a quantia, em reais, que cada uma receberá.

Amanda receberá R$ 750,00, Taís R$ 1 000,00 e Heloísa R$ 1 250,00.

**20.** O gerente de um setor de uma empresa vai presentear os seus três funcionários com 11 diárias em um hotel-fazenda da região, baseando a distribuição em seus salários. Para que a divisão seja justa, o gerente determinou que o funcionário com o menor salário deverá receber a quantidade maior de diárias e aquele com o maior salário deverá receber a quantidade menor de diárias.

| Funcionário | Salário |
|---|---|
| A | 1 000 |
| B | 2 000 |
| C | 3 000 |

Quantas diárias no hotel-fazenda cada funcionário ganhará? Os funcionários **A**, **B** e **C** ganharão 6, 3 e 2 diárias, respectivamente.

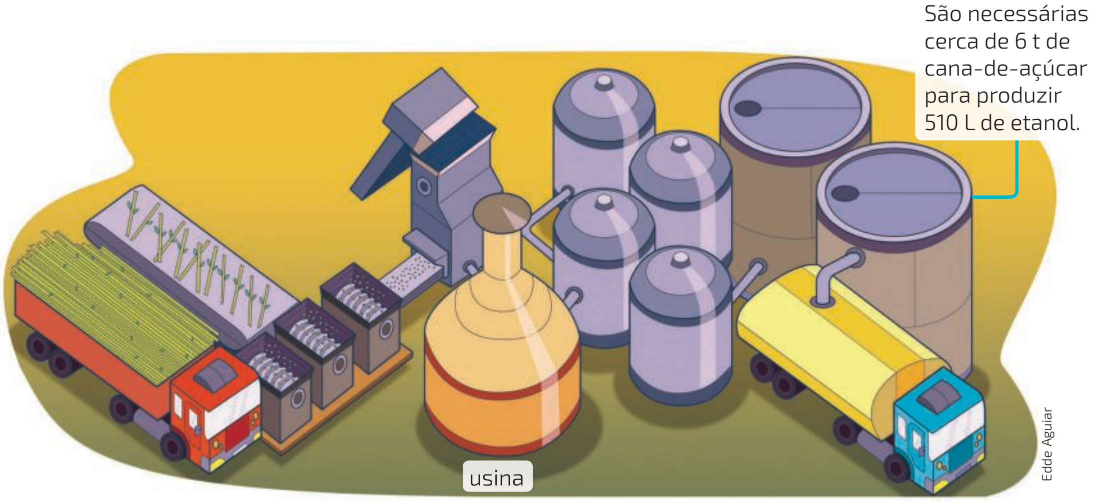
**21.** Os três jogadores mais disciplinados de um campeonato de futebol amador receberão um prêmio de R$ 5 010,00, dividido em partes inversamente proporcionais à quantidade de faltas cometidas em todo o campeonato. Os jogadores cometeram 5, 7 e 11 faltas. Qual a premiação de cada jogador, respectivamente? A premiação será, respectivamente, R$ 2 310,00, R$ 1 650,00 e R$ 1 050,00.

## Regra de três simples

As ideias do uso de regra de três na resolução de alguns problemas – que provavelmente se originaram na China antiga – podem ser observadas nos tempos mais remotos. O papiro de Rhind, que é um papiro egípcio de mais de 3 000 anos, apresenta diversos problemas que recaem em manipulações equivalentes à regra de três.

Podemos resolver diversos problemas que envolvem duas grandezas proporcionais utilizando a **regra de três simples**. Observe os exemplos.

- Atualmente, devido ao aumento na venda de veículos bicombustíveis, o Brasil vem produzindo e consumindo cada vez mais etanol. Veja a proporção entre a quantidade necessária de cana-de-açúcar e de etanol produzido.



Quantas toneladas de cana-de-açúcar são necessárias para produzir 1 700 L de etanol?

Note que as grandezas "quantidade de cana-de-açúcar" e "produção de etanol" são diretamente proporcionais, pois, ao dobrarmos a quantidade de cana-de-açúcar, a produção de etanol também dobrará; ao reduzirmos pela metade a quantidade de cana-de-açúcar, a produção de etanol também será reduzida pela metade, e assim por diante.

Para resolver essa questão, podemos utilizar a regra de três simples envolvendo grandezas diretamente proporcionais. Para isso, construímos um quadro que representa a situação.

| Grandezas diretamente proporcionais | |
|---|---|
| Quantidade de cana-de-açúcar (em t) | Produção de etanol (em L) |
| 6 | 510 |
| x | 1 700 |

- O esquema apresentado é apenas uma representação artística de alguns elementos que compõem o processo de produção do etanol. Diga aos alunos que eles não estão proporcionais entre si.

**BNCC em foco**

- Tendo em vista que as explicações do conteúdo dessa página trazem informações sobre o etanol, faça uma relação com o tema contemporâneo **Educação ambiental** e converse com os alunos sobre esse biocombustível, destacando que, por não ser proveniente do petróleo, polui menos. Além disso, é produzido a partir de uma fonte renovável que reduz a emissão de gases do efeito estufa, um dos principais responsáveis pelo aquecimento global. No Brasil, é produzido, em sua maior parte, por meio da cana-de-açúcar, mas também há outras fontes vegetais, como a beterraba e a batata-doce, por exemplo.

- Pergunte aos alunos se eles já viram uma cisterna como a da fotografia. Em algumas regiões do país, sobretudo as que mais são atingidas pelas secas, é comum se deparar com vilas inteiras em que todas as casas têm uma cisterna. Diga aos alunos que, embora essa seja uma medida essencial para o fornecimento de água, é ainda um modo sustentável de armazenar e não desperdiçar a água da chuva. Atualmente, a falta de água deixou de ser um problema regional e acomete diversas localidades, inclusive as grandes metrópoles. Em vista disso, aproveite para ressaltar a importância de se consumir o recurso hídrico com consciência, sem desperdícios.

Escrevendo uma proporção com base no quadro e resolvendo-a, temos:

$$\frac{6}{x} = \frac{510}{1\,700}$$

$$x \cdot 510 = 6 \cdot 1\,700$$

$$\frac{510x}{510} = \frac{10\,200}{510}$$

$$x = 20$$

Portanto, para produzir 1 700 L de etanol são necessárias 20 t de cana-de-açúcar.

- No sítio de Antônio, o abastecimento de água da casa é feito por meio de uma cisterna. Quando cheia, a cisterna é suficiente para abastecer a casa por 128 dias com um consumo médio diário de 125 L de água.

As cisternas são reservatórios de água potável que visam suprir as necessidades da população rural que sofre com a seca.

Andre Dib/Pulsar Imagens

A cisterna pode abastecer a casa de Antônio por quantos dias, no máximo, se forem consumidos diariamente 200 L de água?

Note que, ao dobrarmos o consumo diário de água, a medida do tempo de abastecimento diminuirá pela metade; ao reduzirmos pela metade o consumo diário de água, a medida do tempo de abastecimento dobrará, e assim por diante. Dessa forma, as grandezas "consumo diário de água" e "tempo de abastecimento" são inversamente proporcionais.

Para resolver essa questão, podemos utilizar a regra de três simples envolvendo grandezas inversamente proporcionais.

| Grandezas inversamente proporcionais | |
|---|---|
| Consumo diário de água (em L) | Medida do tempo de abastecimento (em dias) |
| 125 | 128 |
| 200 | x |

Como as grandezas são inversamente proporcionais, escrevemos a proporção invertendo uma das razões:

$$\frac{125}{200} = \frac{x}{128}$$

$$200 \cdot x = 125 \cdot 128$$

$$\frac{200x}{200} = \frac{16\,000}{200}$$

$$x = 80$$

Assim, se forem consumidos 200 L de água diariamente, a cisterna vai abastecer a casa por no máximo 80 dias.

## Atividades

Anote no caderno

**22.** Verifique se em cada item as grandezas em destaque são proporcionais.

**a)** A **massa** de carne a ser comprada em um açougue e o **preço** a ser pago. proporcionais

**b)** A **velocidade média** obtida ao se deslocar de uma cidade a outra e a **distância** entre essas cidades. não proporcionais

**c)** A **vazão** da mangueira de um caminhão-pipa e o **tempo** necessário para esvaziar o reservatório. proporcionais

**d)** A **idade** e a **altura** de uma pessoa. não proporcionais

**23.** Observe a quantidade de peças produzidas por uma máquina de acordo com a medida do tempo e responda às questões.

| Medida do tempo (h) | 1 | 2 | 5 | 7 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|
| Quantidade de peças | 14 | 28 | 70 | 98 | 154 |

**a)** Divida cada quantidade de peças pela medida do tempo necessário para produzi-las. Que regularidade você pôde observar? Espera-se que os alunos respondam que os resultados são sempre iguais a 14.

**b)** Essas grandezas são proporcionais? Por quê? Sim, pois, ao dobrarmos a medida do tempo, a quantidade de peças produzidas também dobrará; ao quintuplicar a medida do tempo, a quantidade de peças produzidas também quintuplicará, e assim por diante.

**24.** Em cada quadro, realize os cálculos necessários e determine o valor de **x**.

**a)**

| Grandezas diretamente proporcionais | |
|---|---|
| Quantidade de combustível (em L) | Preço a pagar (R$) |
| 120 | 540 |
| 80 | x x = 360 |

**b)**

| Grandezas inversamente proporcionais | |
|---|---|
| Quantidade de operários | Medida do tempo necessário para realizar um trabalho (em dias) |
| x x = 840 | 250 |
| 175 | 1 200 |

**c)**

| Grandezas diretamente proporcionais | |
|---|---|
| Quantidade de máquinas | Quantidade de peças produzidas |
| 5 | 380 |
| x x = 9 | 684 |

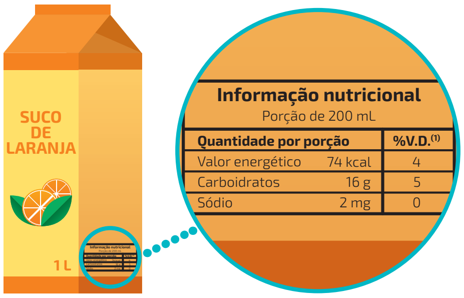
**d)**

| Grandezas inversamente proporcionais | |
|---|---|
| Medida da vazão (em L/min) | Medida do tempo necessário para esvaziar um reservatório (em min) |
| 500 | x x = 245 |
| 175 | 700 |

**25.** Observe a imagem e resolva as questões.

**a)** Quantas quilocalorias (kcal) uma pessoa ingere ao beber 150 mL desse suco? E quantos miligramas de sódio? 55,5 kcal; 1,5 mg

**b)** Sem efetuar cálculos por escrito, estime quantos mililitros desse suco contêm 250 kcal. Em seguida, efetue os cálculos por escrito e verifique sua resposta. aproximadamente 676 mL



**Informação nutricional**

Porção de 200 mL

| Quantidade por porção | | %V.D.[1] |
|---|---|---|
| Valor energético | 74 kcal | 4 |
| Carboidratos | 16 g | 5 |
| Sódio | 2 mg | 0 |

Rafael L. Gaion

- Complemente a atividade **25** propondo aos alunos as seguintes questões:
  - Quantos gramas de carboidratos uma pessoa ingere ao beber 150 mL desse suco?
    R 12 g
  - Quantas quilocalorias uma pessoa ingere ao beber 500 mL desse suco? E quantos miligramas de sódio?
    R 185 kcal; 5 mg
- Na atividade **25**, comente com os alunos que esse tipo de suco deve ser consumido com moderação, já que contém sódio que deve ser ingerido em pouca quantidade. Segundo a Organização Mundial de Saúde, indivíduos na idade adulta devem consumir uma porção diária de, no máximo, 2 gramas de sódio.

**BNCC em foco**

- Ao realizar a atividade **26**, converse com os alunos sobre a necessidade de observar a etiqueta de eficiência energética de um aparelho no momento da compra. Explique que as etiquetas informativas têm por objetivo alertar o consumidor, uma vez que equipamentos com melhor eficiência energética apresentam menor consumo de energia elétrica, o que contribui com a economia e a preservação do meio ambiente. Esse tipo de conversa auxilia no desenvolvimento da **Competência geral 10**, pois capacita os alunos a ter autonomia e condições de tomar decisões fundamentadas em princípios democráticos e sustentáveis.
  Aproveite a oportunidade para salientar a importância da economia no consumo de energia elétrica e destacar o tema contemporâneo **Educação para o consumo.** Cite algumas atitudes básicas que contribuem para isso, como evitar manter o televisor ligado por muito tempo, usar a lavadora de roupas na capacidade máxima, aproveitar a luz natural, não deixar o chuveiro quente ligado por muito tempo, entre outras. Pergunte aos alunos quais outras ações devem ser feitas para reduzir o consumo e estimule-os a adotar essas práticas no cotidiano.

**26.** Observe a potência de alguns aparelhos.

Roland Ancla Legaspi/ Shutterstock.com

Lavadora de roupas.

xiaorui/Shutterstock.com

Cafeteira.

Se uma cafeteira ficar ligada durante 1 h por dia, por exemplo, calculamos seu consumo de energia elétrica diário, em watt-hora (Wh), da seguinte maneira:

$$300\text{ W} \cdot 1\text{ h} = 300\text{ Wh}$$

Portanto, o consumo de energia elétrica da cafeteira é 300 Wh por dia.

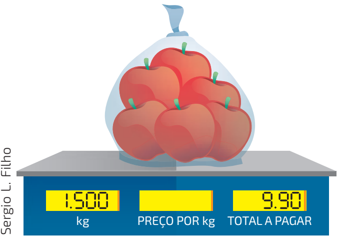
Agora, responda às questões.

**a)** Qual dos aparelhos consome mais energia elétrica? lavadora de roupas

**b)** Se a cafeteira elétrica permanecer ligada 30 min por dia, durante 25 dias no mês, quantos watts-hora ela vai consumir no mês? 3 750 Wh

**c)** Quantas horas deve permanecer ligada uma lavadora de roupas em um dia, para que consuma 7 500 Wh por dia? 5 h

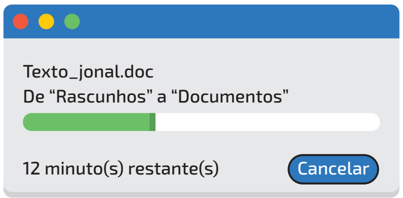
**27.** Observe as maçãs sobre a balança.



Cynthia Sekiguchi/ Sergio L. Filho

Elabore um problema e dê para um colega resolver. Em seguida, confira se a resposta dele está correta. Resposta pessoal.

**28.** Quando copiamos um arquivo de fotografia, vídeo, texto etc., que está na internet, para a memória de um computador, estamos realizando um *download* ou "baixando" esse arquivo. A medida da velocidade com a qual fazemos essa cópia depende de uma série de fatores e é chamada de taxa de transferência. Essa taxa de transferência, em geral, é medida em *quilobaites* por segundo (kbps) e, quanto maior for essa taxa de transferência, mais rápido o arquivo é copiado.



Texto_jonal.doc
De "Rascunhos" a "Documentos"
12 minuto(s) restante(s)

Rafael L. Gaion

Certo computador realizou o *download* de um arquivo em 12 min com uma taxa de transferência média de 60 kbps. Em quantos minutos esse computador realizaria o *download* desse mesmo arquivo se a média da taxa de transferência fosse 96 kbps? 7 min 30 s

**29.** Em uma usina de reciclagem, cada quilograma de latas de alumínio é comprado por R$ 5,00, sendo necessárias, em média, 600 latas para obter 8 kg de alumínio.

**a)** Quantas latas, em média, são necessárias para obter 150 kg de alumínio? 11 250 latas

**b)** Nessa usina de reciclagem, quantos reais são pagos por 210 kg de latas de alumínio? R$ 1 050,00

**30.** Priscila tem um carro bicombustível que percorre, em média, 34 km com 4 L de etanol ou 84 km com 7 L de gasolina. Considerando que a média de consumo de combustível se mantenha, quantos quilômetros o carro de Priscila percorre com 14 L de etanol? E com 15 L de gasolina? 119 km; 180 km

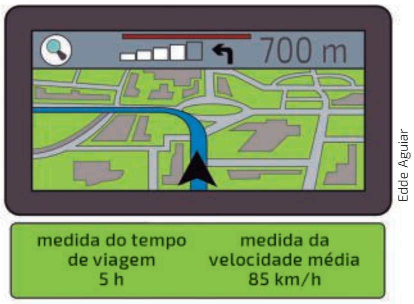
- Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos para a atividade **27**:
  - Quantos reais se pagaria em 2,5 kg dessas maçãs?
    R R$ 16,50

**31.** Para prevenir a desidratação, quando uma pessoa apresenta vômito ou diarreia, costuma-se prescrever a ingestão de soro caseiro. Veja ao lado a proporção de água filtrada, sal e açúcar necessária no preparo do soro caseiro.

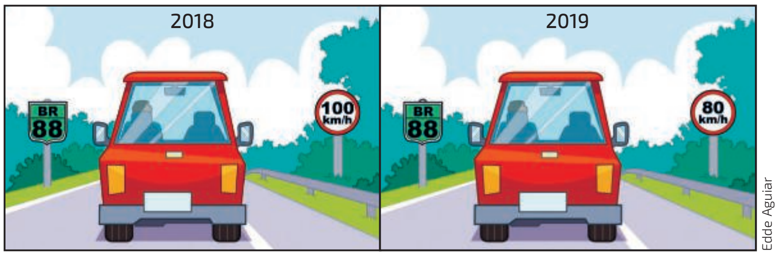
Quantos litros de água filtrada e quantos gramas de sal são necessários no preparo do soro caseiro se forem utilizados 130 g de açúcar? 3,25 L de água filtrada e 11,375 g de sal

**32.** Observe no aparelho de GPS algumas informações sobre uma viagem realizada por Marcelo entre os municípios de São Paulo (SP) e Rio de Janeiro (RJ).

Em quantas horas e minutos Marcelo faria essa mesma viagem se a medida da velocidade média fosse de 68 km/h? 6 h 15 min

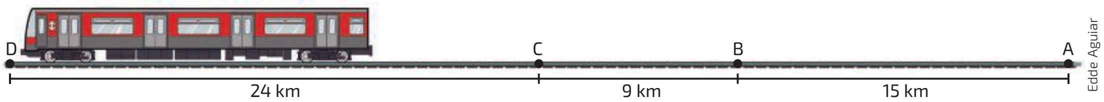


**33.** A medida da distância entre a casa de Victor e a casa de seus pais é de 240 km, trajeto esse que ele poderia percorrer no mínimo em 2 h 24 min, respeitando a média de 100 km/h, medida da velocidade máxima permitida na BR em 2018.



Com base nas informações e na imagem, elabore um problema e dê para um colega resolver. Em seguida, confira se a resposta dele está correta.
Resposta pessoal.

**34.** O esquema representa a linha de um metrô que liga as estações **A**, **B**, **C** e **D**. Para realizar o percurso entre as estações **B** e **C**, o metrô leva, em média, 12 min.



Considerando que a medida da velocidade média do metrô se mantenha, quantos minutos ele levará para realizar o percurso entre as estações **A** e **B**? E entre as estações **C** e **D**? 20 min; 32 min

**35.** Responda à questão sem efetuar cálculos por escrito.

- Se 3 m de certo tecido custam R$ 45,00, 8 m desse mesmo tecido vão custar mais do que R$ 135,00? não

- Na atividade **31**, informe os alunos de que o soro caseiro é uma medida que previne a desidratação. Porém, em casos de vômito ou diarreia, é necessário procurar atendimento médico.
- Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos para a atividade **33**:
  - Qual a medida do tempo mínima que Victor levará para percorrer o trajeto de sua casa até a casa de seus pais, respeitando os 80 km/h da BR?
    R 3 h

**BNCC em foco**

- Tendo em vista que a atividade **33** traz informações sobre o limite de velocidade de determinada autopista, faça uma relação com o tema contemporâneo **Educação para o trânsito.** Converse com os alunos sobre a importância de respeitar os limites estipulados para o tráfego, já que estes são demarcados de acordo com as condições das pistas, do entorno, do volume de veículos, dos fenômenos climáticos recorrentes, do relevo, entre outros fatores. Ressalte que, com o estudo desses elementos, as velocidades são estipuladas em favor de um tráfego seguro, para evitar acidentes e preservar a integridade dos cidadãos.

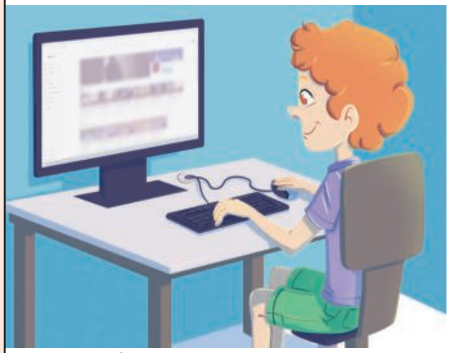
- A atividade **35** promove o desenvolvimento do cálculo mental nos alunos. Aproveite para propor outras questões, como as apresentadas abaixo ou as que achar conveniente.
  - Se 5 quilogramas de tomate custam R$ 34,95, 2 quilogramas de tomate vão custar mais do que R$ 14,00?
    R não
  - Se 3 quilogramas de berinjela custam R$ 14,25, 7 quilogramas de berinjela vão custar mais do que R$ 40,00?
    R não

- Diga aos alunos que, em situações que envolvem três grandezas proporcionais, devemos compará-las duas a duas, deixando fixa aquela que não estiver sendo comparada no momento.
- Explique que situações que podem ser resolvidas por uma regra de três composta também podem ser resolvidas de outras maneiras. No exemplo apresentado nessa página, podemos inicialmente determinar quanto cada computador consome de energia elétrica em 1 h e, depois, quanto 7 computadores consumirão em 3 h, conforme segue:
  - consumo de 6 computadores em 1 h: $4{,}8 : 4 = 1{,}2 \rightarrow 1{,}2$ kWh
  - consumo de 1 computador em 1 h: $1{,}2 : 6 = 0{,}2 \rightarrow 0{,}2$ kWh
  - consumo de 7 computadores em 3 h: $0{,}2 \cdot 7 \cdot 3 = 4{,}2 \rightarrow$ $\rightarrow 4{,}2$ kWh

# Regra de três composta

Existem situações que envolvem mais de duas grandezas. Nesses casos, se as grandezas, tomadas duas a duas, são proporcionais, podemos utilizar a **regra de três composta**, conteúdo que estudaremos a seguir.

## Regra de três composta envolvendo grandezas diretamente proporcionais



Rafael Lam

Uma escola de informática calculou que, em 4 h de funcionamento, 6 computadores consomem 4,8 kWh. Qual será o consumo de energia elétrica se 7 computadores ficarem em funcionamento por 3 h nessa escola?

Podemos resolver essa questão utilizando regra de três composta, pois estão relacionadas três grandezas: tempo, quantidade de computadores e consumo de energia.

Para verificar se as grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais, fixamos uma delas e fazemos a análise das demais duas a duas.

- Fixando a grandeza "tempo": ao dobrarmos a quantidade de computadores, o consumo de energia elétrica também dobrará; ao reduzirmos pela metade a quantidade de computadores, o consumo de energia elétrica também será reduzido pela metade, e assim por diante. Portanto, essas grandezas são diretamente proporcionais.
- Fixando a grandeza "quantidade de computadores": ao dobrarmos a medida do tempo de funcionamento dos computadores, o consumo de energia elétrica também dobrará; ao reduzirmos pela metade a medida do tempo de funcionamento dos computadores, o consumo de energia elétrica também será reduzido pela metade, e assim por diante. Portanto, essas grandezas também são diretamente proporcionais.

grandezas diretamente proporcionais
grandezas diretamente proporcionais

| Medida do tempo (em h) | Quantidade de computadores | Consumo de energia (kWh) |
|---|---|---|
| 4 | 6 | 4,8 |
| 3 | 7 | x |

A grandeza "consumo de energia" é diretamente proporcional às outras duas grandezas. Desse modo, a razão entre os valores da grandeza "consumo de energia" é igual ao produto da razão entre os valores correspondentes às outras duas grandezas.

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4{,}8}{x}$$

$$\frac{24}{21} = \frac{4{,}8}{x}$$

$$24 \cdot x = 21 \cdot 4{,}8$$

$$\frac{24x}{24} = \frac{100{,}8}{24}$$

$$x = 4{,}2$$

Portanto, 7 computadores consomem 4,2 kWh em 3 h de funcionamento.

# Regra de três composta envolvendo grandezas inversamente proporcionais

Para atender a uma encomenda de 15 000 panfletos, uma gráfica utilizou 5 máquinas de mesmo rendimento, que realizaram a impressão em 20 min. Quantos minutos são necessários para que 3 dessas máquinas imprimam 7 200 panfletos como esses?

Veja como podemos resolver esse problema.

| Quantidade de máquinas | Quantidade de panfletos | Medida do tempo (em min) |
|---|---|---|
| 5 | 15 000 | 20 |
| 3 | 7 200 | x |


Rafael Lam

Para resolver esse problema, inicialmente, analisamos as grandezas duas a duas.

- Fixando a grandeza “quantidade de máquinas”: ao dobrarmos a quantidade de panfletos, a medida do tempo necessário para a impressão também dobrará; ao reduzirmos pela metade a quantidade de panfletos, a medida do tempo necessário para a impressão também será reduzida pela metade, e assim por diante. Dessa forma, essas grandezas são diretamente proporcionais.
- Fixando a grandeza “quantidade de panfletos”: ao dobrarmos a quantidade de máquinas, a medida do tempo necessário para a impressão vai diminuir pela metade; ao reduzirmos pela metade a quantidade de máquinas, a medida do tempo necessário para a impressão vai dobrar, e assim por diante. Dessa forma, essas grandezas são inversamente proporcionais.

grandezas inversamente proporcionais

grandezas diretamente proporcionais

| Quantidade de máquinas | Quantidade de panfletos | Medida do tempo (em min) |
|---|---|---|
| 5 | 15 000 | 20 |
| 3 | 7 200 | x |

Como as grandezas “quantidade de máquinas” e “tempo” são inversamente proporcionais, escrevemos a proporção invertendo a fração $\frac{5}{3}$.

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{15\,000}{7\,200}=\frac{20}{x}$$

$$\frac{45\,000}{36\,000}=\frac{20}{x}$$

$$45\,000\cdot x=20\cdot 36\,000$$

$$\frac{45\,000x}{45\,000}=\frac{720\,000}{45\,000}$$

$$x=16$$

Portanto, 3 máquinas imprimem 7 200 panfletos em 16 min de funcionamento.

- Após o trabalho com essa página, proponha as **Atividades complementares** a seguir, possibilitando que os alunos se reúnam em duplas para resolvê-las e, desse modo, pratiquem a interação entre si.

**Atividades complementares**

- Em uma fábrica de brinquedos, 8 pessoas montam 20 carrinhos em 5 dias. Quantos carrinhos serão montados por 4 pessoas em 16 dias?
  R 32 carrinhos
- Uma equipe composta de 15 pessoas extrai, em 30 dias, 3,6 toneladas de carvão. Se for aumentada para 20 pessoas, em quantos dias conseguirão extrair 5,6 toneladas de carvão?
  R 35 dias
- Cinco fotocopiadoras levam 6 minutos para fazer 600 fotocópias. Quantos minutos 7 fotocopiadoras idênticas às anteriores levarão para fazer 1 400 fotocópias?
  R 10 minutos

**Material digital**

- No material digital dessa coleção, para complementar o trabalho com o tópico **Regra de três composta**, disponibilizamos a **Sequência didática 4**, elaborada com o objetivo de desenvolver as habilidades EF09MA07 e EF09MA08. Essa sequência apresenta atividades que permitem retomar os conteúdos abordados nesse capítulo e, também, complementar os estudos com regra de três composta, envolvendo grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

**BNCC em foco**

- Aproveite que a atividade **38** trata de desperdício de água e faça uma relação com o tema contemporâneo **Educação ambiental**, ressaltando a importância de se cuidar dos recursos hídricos e não desperdiçá-los. Comente a problemática da escassez, tendo em vista que muitos locais já apresentam falta e racionamento de água, e pergunte aos alunos sobre as práticas que adotam ou que consideram essenciais para a redução no desperdício desse bem vital.
- A atividade **39** destaca um dos problemas ambientais dos tempos modernos, que agrega a produção excessiva de lixo com o desperdício de alimentos. Faça uma relação com o tema contemporâneo **Educação para o consumo** e converse com os alunos sobre essa problemática, ressaltando algumas atitudes que ajudam a amenizar os danos, como comprar somente o que será consumido e evitar estoques, estar atento aos prazos de validade dos produtos e aproveitar talos, cascas e folhas de frutas e vegetais.

## Atividades

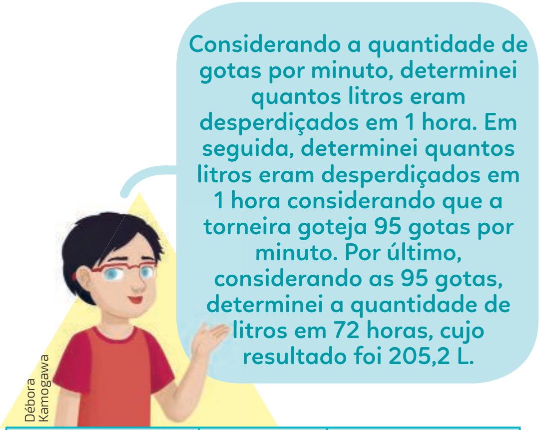
Anote no caderno

**36.** De acordo com as informações apresentadas na página **92**, quantos computadores devem estar em funcionamento por 5 h para que o consumo seja de 16 kWh?
16 computadores

**37.** Um instituto de pesquisa necessita de 120 entrevistadores trabalhando 8 h para aplicar 512 questionários. Quantos entrevistadores, com o mesmo ritmo de trabalho, são necessários para aplicar 1 200 questionários em 5 h?
120 entrevistadores

**38.** Veja como João resolveu a atividade abaixo.

> Uma torneira gotejando 60 gotas por minuto desperdiça 43,2 L de água em 24 h. Quantos litros de água uma torneira desperdiçará em 72 h, gotejando 95 gotas por minuto?



Débora Kamogawa

| Quantidade de gotas por minuto | Medida do tempo (h) | Quantidade, em litros, desperdiçada |
|---|---|---|
| 60 | 24 | 43,2 |
| 60 | 1 | 1,8 |
| 95 | 1 | 2,85 |
| 95 | 72 | 205,2 |

- Agora, calcule a quantidade de água, em litros, desperdiçada em 96 horas considerando um desperdício de 95 gotas por minuto. 273,6 L

**39.** Leia e resolva o que se pede.

Analisando a composição do lixo é possível identificarmos características daqueles que o descartaram. A produção de lixo orgânico em excesso, por exemplo, expressa o desperdício de alimentos, assunto econômico e ambiental que tem sido debatido seriamente. Sendo assim, além de promover a reciclagem – uma medida que evita o agravamento causado pela produção de grande quantidade de lixo –, é importante adotar outras medidas a fim de reduzir desperdícios, especialmente de alimentos.


Gabor Havasi/Shutterstock.com

Na composição do lixo, é possível perceber o desperdício de alimentos.

**a)** Ao aumentarmos a quantidade de moradores de uma casa, a produção diária de lixo orgânico na casa vai aumentar, diminuir ou se manter? Justifique.

**b)** Certa família de 5 pessoas produz 26 kg de lixo orgânico em 10 dias. Considerando que a produção diária de lixo orgânico por pessoa se mantenha, quantos quilogramas desse tipo de lixo serão produzidos em 12 dias por uma família de 4 pessoas? 24,96 kg

**c)** Junte-se a um colega e sugiram atitudes que devemos tomar para diminuir a produção de lixo orgânico. Resposta pessoal.

39. a) Espera-se que os alunos respondam que ela vai aumentar e justifiquem dizendo que, quanto mais moradores, mais lixo orgânico é produzido.

**40.** Em um canil, para alimentar 160 cães durante 12 dias são necessários 694 kg de ração. Nesse mesmo canil, durante quantos dias é possível alimentar 72 cães com 1 041 kg de ração? 40 dias

**41.** Hugo é artesão e trabalha em um ateliê. Trabalhando diariamente 5 h, durante 21 dias, ele tece 63 m de tecido. Para tecer 105 m desse mesmo tecido em 25 dias, quantas horas diárias ele deve trabalhar? 7 h

**42.** Para construir um muro retangular medindo 16 m de comprimento por 2,5 m de altura, uma equipe de operários demora 5 dias. Mantendo esse ritmo de trabalho, em quantos dias essa mesma equipe vai construir um muro retangular medindo 24 m de comprimento por 2 m de altura? 6 dias

**43.** Uma confecção produz, em uma semana, 640 blusas com 16 funcionários trabalhando 8 h por dia. Para que em uma semana sejam produzidas 960 blusas, quantas horas e minutos por dia devem trabalhar 20 funcionários, com a mesma produtividade? 9 h 36 min

Rafael Lam

**44.** Para realizar uma viagem de 248 km de bicicleta, Daiane pedalou 6 h por dia durante 7 dias. Nesse mesmo ritmo, quantas horas por dia ela deve pedalar para realizar uma viagem de 620 km em 15 dias? 7h

**45.** A colheita de soja de um sítio será realizada com uma colheitadeira que, trabalhando 13 h por dia, colhe 31 200 sacas de soja em 8 dias.

De acordo com as informações acima, elabore um problema e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se ele resolveu corretamente. Resposta pessoal.

**46.** No livro *Liber abaci*, do matemático italiano Leonardo Fibonacci (c. 1175–1250), são apresentados alguns problemas que recaíam em regra de três.

Resolva o problema a seguir, que foi retirado dessa obra. 33 dias

> [...] Um certo rei envia 30 homens a seu pomar para plantar árvores. Se eles podem plantar 1 000 árvores em 9 dias, em quantos dias 36 homens plantariam 4 400 árvores?
>
> [...]

EVES, Howard . **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 316.

## Explorando o que estudei

Anote no caderno

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? razão, proporção, números proporcionais, divisão em partes proporcionais, regra de três simples e regra de três composta
2. Duas grandezas que estão relacionadas sempre são proporcionais? Justifique por meio de exemplos. não; Resposta pessoal.
3. Cite uma situação envolvendo duas grandezas diretamente proporcionais. Resposta pessoal.
4. Em quais situações podemos utilizar a regra de três simples? E a regra de três composta? Espera-se que os alunos respondam que em situações que envolvem até duas grandezas proporcionais; Espera-se que os alunos respondam que em situações que envolvem três ou mais grandezas que, tomadas duas a duas, são proporcionais.
5. Explique os procedimentos que você utiliza para resolver um problema por meio de regra de três composta. Possível resposta: inicialmente, fixamos uma grandeza e analisamos se as demais, duas a duas, são diretamente ou inversamente proporcionais. Em seguida, construímos um quadro com as informações do problema relacionando as grandezas. Por fim, escrevemos a proporção e a resolvemos.

- Veja algumas possibilidades de problemas que podem ser elaborados pelos alunos na atividade **45**:
  - Quantos dias são necessários para que essa colheitadeira, trabalhando 9 h 30 min por dia, colha 5 700 sacas de soja?

    R 2 dias
  - Utilizando essa colheitadeira, o dono do sítio colheu toda a produção de soja em 10 dias, trabalhando 11 h por dia. Qual foi a produção total de sacas de soja desse sítio?

    R 33 000 sacas de soja

### Avaliação

- Por meio da seção **Explorando o que estudei**, realize uma avaliação com os alunos, de modo a observar como eles respondem as questões e identificar possíveis dificuldades apresentadas por eles. Caso julgue necessário, providencie um resumo do conteúdo de maneira a focar nos pontos em que os alunos mais apresentaram dificuldades. Aproveite para refletir sobre as práticas adotadas para o trabalho com esse capítulo, a fim de confirmá-las ou modificá-las para as próximas aulas.

- Com a questão **2**, é possível verificar se os alunos compreenderam que nem sempre duas grandezas relacionadas são proporcionais. Caso alguns alunos ainda não tenham essa compreensão, discuta com eles determinadas situações em que isso ocorra. Algumas sugestões são:
  - A medida da altura de uma criança e a sua idade não são proporcionais, pois, embora a criança cresça com o passar do tempo, a medida da altura não aumenta proporcionalmente à medida do tempo.
  - A desvalorização de um automóvel e o tempo de uso não são grandezas proporcionais, pois, de maneira geral, nos primeiros anos após a compra a desvalorização é maior do que nos anos seguintes.
  - A medida do perímetro de um quadrado e sua medida de área não são grandezas proporcionais, pois, ao dobrarmos a medida do perímetro, quadruplicamos a medida da sua área.

**BNCC em foco**

- A seção apresentada nessas páginas visa desenvolver o tema contemporâneo **Processo de envelhecimento e valorização do idoso**, mostrando situações do cotidiano em que os idosos são atuantes.
  Junto aos alunos, realize uma leitura das cenas e questione se eles conhecem pessoas idosas que não deixaram de praticar suas atividades por conta da idade. Enfatize que, em muitos casos, há limitações físicas, mas muitas vezes as pessoas se retiram de alguns contextos por conta da opinião de outras pessoas. Procure conversar com os alunos no sentido de quebrar os estereótipos e valorizar a independência e a liberdade de todo cidadão, independentemente da idade que ele tenha.

- A leitura do texto pode ser realizada coletivamente. Instigue os alunos a expressar suas opiniões, sempre tomando cuidado para que haja respeito mútuo. Se for necessário, explique a eles que um asilo é um estabelecimento para abrigo, sustentação ou educação de pessoas com dificuldades de se manter, como dependentes químicos, idosos ou órfãos. Os asilos para idosos podem ser designados como casa de repouso, clínica geriátrica ou ancionato.
- Explique também que o índice de natalidade diz respeito à relação entre a quantidade de nascidos vivos e o total da população em determinado lugar, num dado período de tempo.

# Cidadania: explore essa ideia

## População idosa, saudável e ativa

Imagens de idosos em asilos ou isolados em casa foram substituídas por outras que mostram essas pessoas passeando pelas ruas, fazendo compras em comércios, frequentando clubes, festas, academias, excursões, universidades etc. Aquela figura arqueada, apoiando-se em uma bengala, geralmente usada em estabelecimentos comerciais para identificar o atendimento preferencial a idosos, também está sendo modificada em várias cidades do Brasil, a fim de retratar melhor o perfil dessa população. Independentemente da condição de debilitação de uma pessoa nessa fase da vida, ela merece tanto ser respeitada e valorizada quanto ter seus direitos garantidos.

Imagem antiga (acima) e proposta (abaixo) para identificar atendimento preferencial a idosos em caixas de supermercado, assentos em bancos, vagas de estacionamentos etc.

Nik Neves

- Diga que as cenas relatadas nas figuras são importantes para mostrar a atuação do idoso em diversas esferas da vida pública e privada e desconstruir imagens estereotipadas e negativas da velhice. Ainda persistem no imaginário coletivo ideias que relacionam o processo de envelhecimento à decadência física e à ausência de papéis sociais, portanto é fundamental que os jovens possam ter consciência de que a velhice é algo natural na vida e que eles devem lutar pelos direitos dos idosos, já que, com sorte, um dia se tornarão um deles.

Os avanços da medicina e da ciência e os baixos índices de natalidade são fatores que vêm aumentando a proporção da população idosa no mundo, bem como sua inserção na sociedade. A estimativa é que, em 2050, cerca de 21 pessoas, a cada 100 indivíduos, terão idade acima de 60 anos. Veja a tabela.

**População mundial, em milhares de habitantes – junho de 2017**

| Ano | População total | Idosos (acima de 60 anos) |
|---|---|---|
| 1970 | 3 700 578 | 304 449 |
| 1990 | 5 330 943 | 488 248 |
| 2010 | 6 958 169 | 769 413 |
| 2030* | 8 551 199 | 1 406 105 |
| 2050* | 9 771 823 | 2 080 459 |

*estimativa

United Nations. **Population Division**. Disponível em: <https://stats.oecd.org/index.aspx?DataSetCode=RPOP>. Acesso em: 5 jul. 2019.

## Analisando com cidadania

Anote no caderno

Respostas nas orientações ao professor.

**1.** Quais são os principais fatores que influenciaram o aumento da população idosa?

**2.** Em sua opinião, qual é a importância do idoso para a sociedade?

**3.** Você tem algum familiar ou conhece alguma pessoa com mais de 60 anos? Como é a rotina dessa pessoa?

## Analisando com a Matemática

Anote no caderno

**4.** Considere o seguinte trecho do texto: "A estimativa é que, em 2050, cerca de 21 pessoas, a cada 100 indivíduos, terão idade acima de 60 anos.". Que cálculo você faria para verificar essa razão?

**5.** Utilizando uma calculadora, calcule o percentual de idosos para cada ano apresentado na tabela.

Nik Neves

- Converse com os alunos a respeito das leis que determinam prioridades de atendimento e descontos em ingressos para pessoas com 65 anos ou mais. Pergunte se eles acham que isso é suficiente para valorizar os idosos e se costumam ceder lugares e auxiliá-los nas dificuldades. Destaque que o abandono é, muitas vezes, um mal que os acompanha e isso tem uma relação direta com a desvalorização do papel do idoso na sociedade.

### Respostas

**1.** Os avanços da ciência e da medicina e as baixas taxas de natalidade.

**2.** Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que as pessoas idosas, em geral, são pessoas sábias e experientes, elas já contribuíram a maior parte de suas vidas com a família e a sociedade.

**3.** Resposta pessoal.

**4.** A razão entre a população idosa e a população total estimada para o ano de 2050, ou seja,

$$\frac{2\,080\,459}{9\,771\,823} \simeq 0,21 =$$
$$= \frac{21}{100} = 21\%$$

**5.** 1970: aproximadamente 8%; 1990: aproximadamente 9%; 2010: aproximadamente 11%; 2030: aproximadamente 16%; 2050: aproximadamente 21%.

- Na questão **1**, diga aos alunos que os avanços na ciência e na medicina são importantes não somente para aumentar a expectativa de vida, mas também para que haja qualidade nas diferentes formas de viver.

Esse capítulo levará os alunos a compreender a noção de função – incluindo a representação por meio de diagramas e gráficos –, e a identificar as suas variáveis. Em seguida, os estudos avançarão para o reconhecimento de uma função afim, de modo a identificar seus termos e construir gráficos.

O capítulo também abordará funções lineares e proporcionará que os alunos as relacionem com a proporcionalidade entre duas grandezas, além de identificarem funções crescentes e decrescentes e determinarem o zero de uma função afim.

- O exemplo de criptografia, da maneira como foi apresentado nessas páginas de abertura, está relacionado às ideias de função, visto que foi associado um único símbolo ou letra do alfabeto a cada algarismo. É importante os alunos perceberem que uma mensagem codificada possui apenas uma mensagem original correspondente, e, para obtê-la, é necessário conhecer a "chave" decodificadora. Uma sugestão de condução do trabalho é fazer uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes opiniões dos alunos. As questões propostas podem ser respondidas individualmente ou em grupos de dois ou três. Ao final, é importante que as respostas sejam discutidas pela turma. Para complementar o assunto, elabore com os alunos um sistema de criptografia para o alfabeto, em que cada letra é associada a um único símbolo. Com base nesse sistema, codifiquem e decodifiquem algumas palavras na lousa.

# Capítulo 5

## Noções de função e função afim

A escrita em códigos, transformando o texto original em um texto cifrado para ser decodificado apenas pelo receptor desejado, existe há milhares de anos. Contudo, recentemente os militares aperfeiçoaram essa técnica a fim de transmitir mensagens com segurança.

A palavra criptografia originou-se do grego, da fusão entre *kruptós*, que significa oculto, e *graphía*, que quer dizer escrita. Atualmente, está associada ao uso seguro de informações sigilosas, como senhas, transações financeiras em geral e telecomunicações.

As técnicas criptográficas mais conhecidas envolvem as chamadas chaves criptográficas. A decodificação da mensagem e o acesso aos serviços são permitidos apenas se a chave estiver correta. Então, quanto mais complexa for a chave, mais difícil será para decifrar as mensagens.

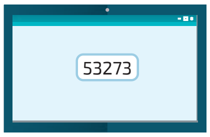
### Um exemplo de criptografia

**Etapa 1**

Uma chave de codificação é criada. No exemplo abaixo, cada algarismo está associado a um único caractere.

| Caractere original | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Caractere-chave | $ | % | @ | / | ? | a | e | i | o | u |

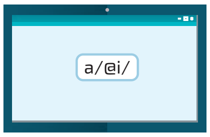
**Etapa 2**



53273

A mensagem original é escrita.

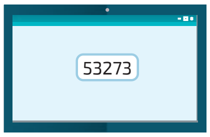
**Etapa 3**



a/@i/

A mensagem é codificada de acordo com a chave, impedindo sua leitura.

**Etapa 4**



53273

Com a chave, é realizada a decodificação, e a mensagem original pode ser lida.

Ilustrações: Keithy Mostachi

## Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

**A** Em sua opinião, por que a criptografia é importante?

**B** Usando a chave apresentada no exemplo, decodifique a mensagem @$@%.

**C** Pense em um número para compor uma mensagem e, com a chave apresentada no exemplo, codifique-a. Depois, peça a um colega para decodificá-la. Por fim, verifiquem se a codificação e a decodificação foram feitas corretamente.

A máquina Enigma foi um dos dispositivos tecnológicos mais importantes usados na Segunda Guerra Mundial. Conhecida como máquina cifrante, ela era capaz de produzir códigos combinatórios por meio de um mecanismo de rotores criptográficos.

Lenscap Photography/Shutterstock.com/Museu Bletchley Park, Bletchley, Inglaterra

### Pensando nisso...

**A** Resposta pessoal. Possível resposta: é importante para manter a segurança e a privacidade no envio e recebimento de informações sigilosas.

**B** 2021

**C** Resposta pessoal.

- Na questão **C**, sugira que os alunos codifiquem números relacionados a eles, como a data de nascimento, a idade, o número da casa onde moram, o número de celular etc.

### BNCC em foco

- A teoria e as atividades desse capítulo proporcionam que os alunos compreendam as relações entre conceitos e procedimentos da Geometria e da Álgebra, relacionando as representações gráficas e algébricas de funções, além de estabelecerem relações com outras áreas do conhecimento. Assim, eles desenvolvem não só a segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, mas também a autoestima e a perseverança na busca de soluções, contemplando a **Competência específica de Matemática 3**.

**Objetivos do capítulo**

- Identificar relações entre duas grandezas.
- Compreender o conceito de função.
- Escrever a lei de formação de uma função.
- Identificar a variável dependente e a variável independente.
- Representar uma função por meio de diagramas e gráficos.
- Verificar se um gráfico representa uma função.
- Reconhecer uma função afim.
- Identificar os termos associados a uma função afim.
- Construir gráficos de funções afim.
- Relacionar a função linear com a proporcionalidade entre duas grandezas.
- Classificar uma função afim em crescente ou decrescente.
- Determinar o zero de uma função afim e o ponto de interseção do gráfico dessa função com o eixo **y**.

**BNCC em foco**

- No decorrer desse capítulo, os alunos serão levados a compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica, além de utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. Dessa maneira, contempla-se a habilidade **EF09MA06**.

# A noção de função

Nas páginas **98** e **99**, quando estudamos algumas informações sobre criptografia, vimos um exemplo em que cada algarismo era relacionado a um único caractere.

Quando relacionamos elementos dessa maneira, estamos tratando, em geral, do conceito de **função**.

Veja algumas situações do cotidiano em que as funções estão presentes.

- A comissão de um vendedor é dada em função de quanto ele vende em determinado período.
- A medida do tempo de uma viagem está em função da medida da velocidade praticada no trajeto.

Agora, observe o que diz uma eletricista.

Rafael Lam

De acordo com a informação da eletricista, vamos construir o seguinte quadro.

| Medida do tempo em horas (x) | Consumo em kWh (y) |
|---|---|
| 1 | 4,5 |
| 2 | 9 |
| 3 | 13,5 |
| 4 | 18 |
| 5 | 22,5 |

Neste caso, estão relacionadas duas grandezas, isto é, o tempo de uso do chuveiro **x** e o consumo de energia elétrica **y**.

Cada medida do tempo de uso corresponde a um determinado consumo de energia elétrica, ou seja, a cada valor que atribuímos à variável **x**, obtemos um único valor para a variável **y**, o que caracteriza um exemplo de **função**.

Podemos escrever uma sentença que permite calcular o consumo **y** em função do tempo **x**.

consumo de energia elétrica, em kWh

$$y = 4{,}5 \cdot x$$

consumo de energia elétrica em 1 h de uso do chuveiro, em kWh

medida do tempo de uso do chuveiro, em horas

**Qual é o consumo, em quilowatt-hora, de energia elétrica para 7 horas de uso desse chuveiro?** 31,5 kWh

**Material digital**

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **4**, **5** e **6** do 2º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

Nesse caso, dizemos que o consumo em kWh (y) é obtido em função da medida do tempo de uso do chuveiro em horas (x). Chamamos **x** de **variável independente** e **y** de **variável dependente**, pois **y** depende de **x**.

A sentença $y = 4{,}5 \cdot x$ é a **lei de formação da função** ou **fórmula da função**. Com essa fórmula, podemos calcular, por exemplo, o consumo de energia elétrica em 8 h de uso do chuveiro ou em quantas horas de uso serão consumidos 54 kWh.

$$y = 4{,}5 \cdot 8 = 36$$

Serão consumidos 36 kWh em 8 h de uso do chuveiro.

$$54 = 4{,}5 \cdot x$$

$$\frac{54}{4{,}5} = \frac{4{,}5x}{4{,}5}$$

$$x = 12$$

Serão necessárias 12 h de uso do chuveiro para que sejam consumidos 54 kWh.

Veja outra situação envolvendo função.

Para acessar a internet, Douglas vai a um cibercafé, cuja forma de cobrança é a seguinte: uma taxa fixa de R$ 2,50 mais R$ 3,30 por hora de acesso.

Podemos escrever uma fórmula que expressa o valor a ser pago por Douglas pelo acesso à internet (y) em função da quantidade de horas (x).

$$\overset{\text{valor a ser pago}}{y} = \underset{\text{taxa fixa}}{2{,}5} + \underset{\text{valor pago por hora de acesso}}{3{,}3} \cdot \overset{\text{quantidade de horas de acesso}}{x}$$

Note que essa relação é uma função, pois para cada quantidade de horas de acesso à internet (x) está associado um único valor a ser pago (y).

Outra notação que podemos utilizar para representar a lei dessa função é substituir a variável dependente **y** por **f(x)**. Essa notação foi uma das contribuições do matemático Leonhard Euler (1707-1783) ao estudo das funções.

Assim, podemos representar a função dada por $y = 2{,}5 + 3{,}3 \cdot x$ da seguinte maneira:

$$f(x) = 2{,}5 + 3{,}3 \cdot x$$

Como a variável independente (x) representa a quantidade de horas de acesso, se consideramos $x = 3$, a variável dependente (valor pago) é dada por:

$$f(3) = 2{,}5 + 3{,}3 \cdot 3 = 12{,}4$$

A representação $f(3) = 12{,}4$ indica que, quando $x = 3$, então $y = 12{,}4$.

Portanto, o valor a ser pago pelo acesso de 3 h à internet é R$ 12,40.

Na notação f(x) (lê-se **f** de **x**) podemos utilizar qualquer letra para indicar a função, porém é mais comum usar **f**, **g** e **h**. No caso da variável independente, também podemos utilizar qualquer letra, mas a letra **x** é a mais utilizada.

- Diga aos alunos que os cibercafés são locais equipados com computadores conectados à internet.

**BNCC em foco**

- Aproveite o exemplo apresentado sobre o consumo de energia do chuveiro elétrico e converse com os alunos orientando-os a evitarem tomar banhos quentes demorados, a fim de economizarem energia elétrica, desenvolvendo com eles o tema contemporâneo **Educação para o consumo**.

# Representação de uma função por meio de diagramas

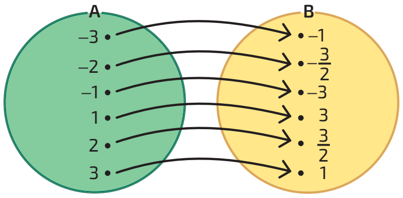
Veja no quadro como as variáveis de certa função **f** se relacionam.

| x | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | $-1$ | $-\frac{3}{2}$ | $-3$ | 3 | $\frac{3}{2}$ | 1 |

Observando o quadro, podemos notar que os valores da 2ª linha são obtidos dividindo-se o número 3 pelos valores correspondentes da 1ª linha. Assim, a lei de formação dessa função é dada por $f(x) = \frac{3}{x}$ e **x** deve ser diferente de 0.

Outra maneira de representar a correspondência das variáveis dessa função é por meio de um **diagrama**.

No diagrama abaixo, representamos por **A** o conjunto dos valores da variável **x** e por **B** o conjunto dos valores correspondentes da variável **y**. Cada seta associa um elemento de **A** a um elemento de **B**. Neste caso, dizemos que essa é uma **função de A em B**, ou seja, $f: A \longrightarrow B$ (lê-se: **f** de **A** em **B**).



Cynthia Sekiguchi

No quadro, assim como no diagrama, estão representadas as correspondências apenas entre alguns dos valores. No entanto, poderíamos atribuir qualquer valor real para **x** na função **f** com $x \neq 0$.

**Que valor é preciso atribuir a x na função dada por $f(x) = \frac{3}{x}$ para obtermos 6?** $\frac{1}{2}$

## Atividades

Anote no caderno

**1.** Entre os vários fatores que determinam a quantidade de medicamento que uma pessoa pode receber podemos citar a medida da massa corporal. Na bula de todo medicamento consta sua posologia, ou seja, a indicação da dose adequada. O quadro a seguir foi construído com base nas informações presentes na bula de certo medicamento.

| Medida da massa corporal (kg) | Dose indicada (gota) |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 6 | 3 |
| 8 | 4 |
| 10 | 5 |

**a)** Escreva uma fórmula que expresse a dose **g** (em gotas) em função da medida da massa **m** (em kg). $g = \frac{m}{2}$

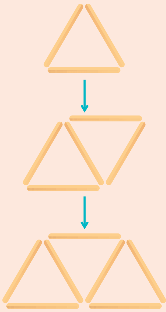
**b)** Qual a dose indicada para uma pessoa cuja medida da massa é 36 kg? 18 gotas

**c)** Quantos quilogramas de medida de massa uma pessoa deve ter para receber uma dose de 41 gotas? 82 kg

- Antes de iniciar o trabalho com as atividades, proponha aos alunos a **Atividade complementar** abaixo.

### Atividade complementar

- As figuras da sequência lembram triângulos construídos com palitos de sorvete.



Bárbara Sarzi

- Considerando os três primeiros elementos dessa sequência, construa um quadro que relacione a quantidade **t** de figuras que lembram triângulos e a quantidade **p** de palitos de cada elemento.

R

| t | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| p | 3 | 5 | 7 |

- Escreva uma fórmula que permita calcular a quantidade de palitos em função da quantidade de figuras que lembram triângulos.

R $p = 2t + 1$

- Quantos palitos são necessários para formar o elemento dessa sequência composto de 6 triângulos? E o elemento composto de 12 triângulos?

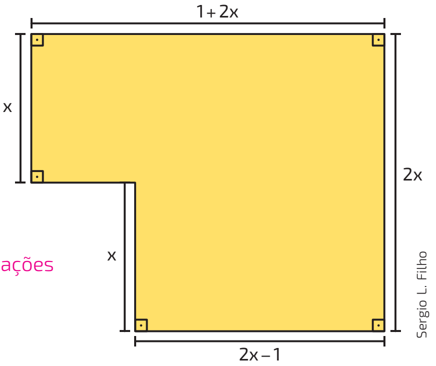
R 13 palitos; 25 palitos

- O elemento formado por 41 palitos é composto de quantas figuras que lembram triângulos?

R 20 triângulos

- Na atividade **1**, é importante comentar com os alunos sobre os cuidados que devemos ter com medicamentos. Enfatize que devemos nos medicar somente com orientação médica, acompanhados por um adulto, além de sempre consultar a bula do medicamento.

**2.** Observe a figura e resolva as questões.



Sergio L. Filho

**a)** Escreva uma fórmula, em função de **x**, que permita calcular:

- a medida do perímetro **P** da figura. $P = 8x + 2$
- a medida da área **A** da figura. $A = 4x^2$

**b)** Determine as medidas do perímetro e da área da figura para **x** igual a: Respostas nas orientações ao professor.

- 2 cm.
- 5 cm.
- 20 cm.
- 3 cm.
- 10 cm.
- 70 cm.

**3.** Para calcular o preço de venda dos produtos, um lojista utiliza a fórmula $P = 1{,}65C$, na qual **P** representa o preço de venda, e **C**, o preço de custo de cada produto.

**a)** Qual o preço de venda de um produto cujo preço de custo é R$ 8,00? R$ 13,20

**b)** Sabendo que o lucro **L** é a diferença entre o preço de venda e o de custo do produto, escreva uma fórmula que expresse o lucro do lojista na venda de um produto em função de **C**. $L = 0{,}65C$

**c)** Qual o lucro obtido na venda de um produto cujo preço de custo é R$ 12,00? R$ 7,80

**d)** Qual é a porcentagem de lucro desse lojista na venda de cada produto? 65%

**e)** Qual o lucro obtido pelo lojista na venda de um produto por R$ 33,00? R$ 13,00

**4.** O preço do aluguel de uma embarcação é composto de duas partes: uma fixa, de R$ 60,00, e outra variável, de R$ 3,00 por hora de uso.

**a)** Escreva uma fórmula que represente o preço **V** a ser pago pelo aluguel dessa embarcação em função do tempo **t**. $V = 60 + 3t$

**b)** Determine o preço a ser pago pelo aluguel dessa embarcação por 8 horas. R$ 84,00

**c)** Com R$ 73,00 é possível alugar essa embarcação por 5 horas? Justifique sua resposta. Não, pois $V = 60 + 3 \cdot 5 = 75$ (R$ 75,00)

**5.** Para cada item, escreva uma fórmula que expresse **y** em função de **x**.

**a)** A medida **y** do perímetro de um triângulo equilátero cuja medida do comprimento do lado seja **x**. $y = 3x$

**b)** A medida **y** do comprimento do lado maior de um retângulo é $\frac{3}{2}$ da medida **x** do comprimento do lado menor, mais 3. $y = \frac{3}{2}x + 3$

**6.** Determinado investimento realizado por um cliente de uma corretora resulta em um montante **M**, dado pela fórmula $M = 40\,000 \cdot (1{,}009)^t$, em que **t** é o período do tempo investido, em meses.

Utilize uma calculadora para resolver esta atividade.

**a)** Qual é o montante obtido ao final de:

- 8 meses? R$ 42 972,36
- 1 ano? R$ 44 540,36

**b)** A partir de quantos meses, o cliente obterá um montante maior do que R$ 45 300,00? A partir de 1 ano e 2 meses, ou 14 meses.

- Antes de trabalhar com as atividades dessa página, peça aos alunos que resolvam a **Atividade complementar** abaixo.

### Atividade complementar

- Para cada quadro, escreva uma fórmula que permita calcular o valor de **y** em função de **x**.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 3 | 4 | 5 | 6 |

R $y = x + 2$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 0 | 3 | 6 | 9 |

R $y = 3x$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y | 5 | 7 | 9 | 11 |

R $y = 2x - 1$

### Respostas

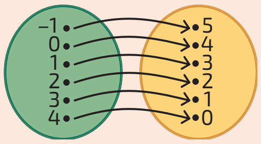
**2. b)**

- 2 cm: $P = 18$ cm e $A = 16$ cm$^2$
- 3 cm: $P = 26$ cm e $A = 36$ cm$^2$
- 5 cm: $P = 42$ cm e $A = 100$ cm$^2$
- 10 cm: $P = 82$ cm e $A = 400$ cm$^2$
- 20 cm: $P = 162$ cm e $A = 1\,600$ cm$^2$
- 70 cm: $P = 562$ cm e $A = 19\,600$ cm$^2$

- Diga aos alunos que, para resolver os itens **b** e **c** da atividade **9**, devem considerar 1 mês com 30 dias.

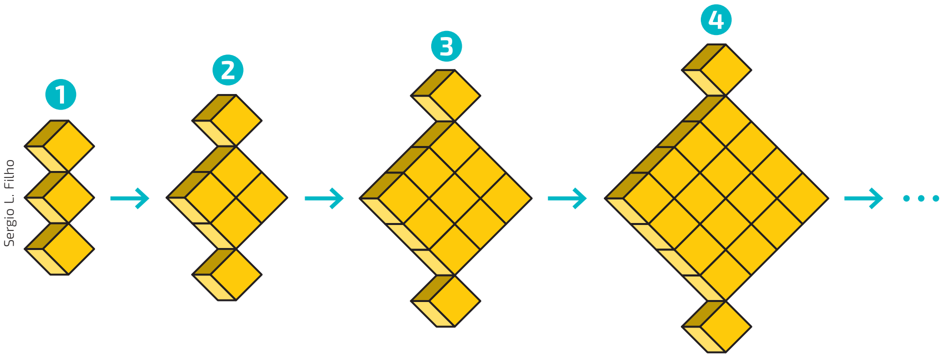
**Resposta**

**11.**



Cynthia Sekiguchi

**7.** Observe a sequência de figuras formadas por cubos.



Sergio L. Filho

**a)** Quantos cubos terá a figura **5** dessa sequência? E a figura **6**? 27 cubos; 38 cubos

**b)** Escreva uma fórmula que expresse a quantidade de cubos **c** em função do número da figura **f**. $c = f^2 + 2$

**c)** Utilizando a fórmula que você escreveu no item **b**, calcule a quantidade de cubos da:

- figura **8**. 66 cubos
- figura **10**. 102 cubos
- figura **15**. 227 cubos

**8.** Dada a função **f** definida por $f(x) = \frac{x+1}{2x}$, para $x \neq 0$, determine o valor de:

**a)** f(5), f(–2) e f(1). $f(5) = \frac{3}{5}$, $f(-2) = \frac{1}{4}$ e $f(1) = 1$

**b)** **f** para $x = -1$. $f(-1) = 0$

**c)** **x** para $f(x) = \frac{4}{7}$. $x = 7$

**9.** Observe no quadro o consumo de energia elétrica, em quilowatt-hora, de certa lâmpada.

| Medida do tempo (em h) | Consumo (em kWh) |
|---|---|
| 1 | 0,06 |
| 2 | 0,12 |
| 3 | 0,18 |
| 4 | 0,24 |

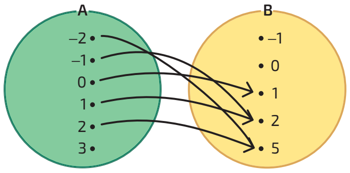
**a)** Escreva uma fórmula que expresse o consumo **c** de energia elétrica da lâmpada em função da quantidade de horas **t** que ela fica ligada. $c = 0{,}06t$

**b)** Quantos quilowatts-hora por mês consome essa lâmpada se ficar ligada, em média, 6 h por dia? 10,8 kWh

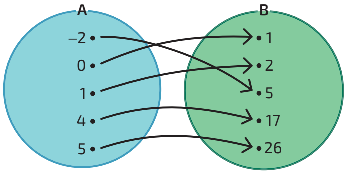
**c)** Junte-se a um colega e pesquisem o preço cobrado por quilowatt-hora na região onde moram. Em seguida, calculem, em reais, o valor do consumo de energia elétrica nas condições estabelecidas no item **b**. Resposta pessoal.

**10.** Qual dos diagramas representa a função dada por $f(x) = x^2 + 1$ para os valores estabelecidos? b

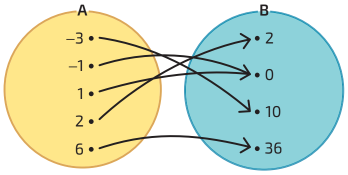
**a)**



**b)**



**c)**



Ilustrações: Cynthia Sekiguchi

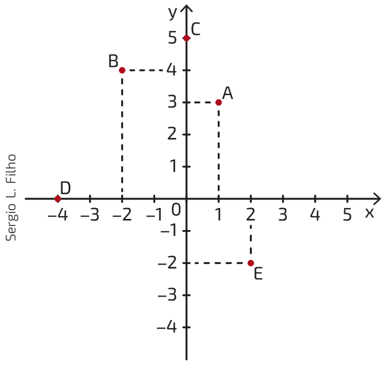
**11.** Represente a função **g** dada por $g(x) = -x + 4$ por meio de um diagrama. Para isso, atribua a **x** valores inteiros maiores do que –2 e menores do que 5.
Resposta nas orientações ao professor.

# Representação gráfica de uma função de variável real

Estudamos anteriormente que o **plano cartesiano** é um sistema composto de duas retas numeradas – uma horizontal e outra vertical – que se cruzam perpendicularmente em um único ponto, chamado **origem**.

Estudamos também como é possível localizar um ponto no plano cartesiano por meio de **coordenadas cartesianas**, representando-o por um **par ordenado** na forma (x, y).

Veja, no plano cartesiano a seguir, a localização dos pontos A(1, 3), B(−2, 4), C(0, 5), D(−4, 0) e E(2, −2).



Sergio L. Filho

A reta horizontal é denominada **eixo das abscissas** (**eixo x**), e a reta vertical, **eixo das ordenadas** (**eixo y**). Na localização do ponto A(1, 3) no plano cartesiano, por exemplo, o número 1 indica a posição de **A** em relação ao eixo das abscissas, e o 3 indica a posição de **A** em relação ao eixo das ordenadas. O número 1 é chamado abscissa do ponto **A**, e o 3, ordenada de **A**.

Podemos representar uma função em um plano cartesiano. Observe um exemplo de como isso pode ser feito.

Na situação abaixo, note que a cada hora são despejados 2,5 m$^3$ de água na piscina. Chamando de **y** a medida da quantidade de água na piscina, em metros cúbicos, e de **x** a medida do tempo em que o registro está aberto, em horas, podemos escrever uma função cuja lei de formação é dada por y = 2,5x.

Rafael Lam

**Avaliação**

- Antes de iniciar o estudo da representação gráfica de uma função de variável real, lembre os alunos do conceito de plano cartesiano. Uma possibilidade é construir na lousa um plano cartesiano e, junto com eles, desenhar e localizar alguns pontos com base em suas coordenadas. Durante essa atividade, fique atento para o modo como os alunos indicam tais pontos, a fim de verificar seus conhecimentos prévios a respeito desse conteúdo para, a partir de então, prosseguir com o conteúdo do capítulo.

- Nas atividades em que é necessária a construção de gráficos, reproduza e entregue aos alunos o plano cartesiano disponível nas **Páginas para reprodução**.

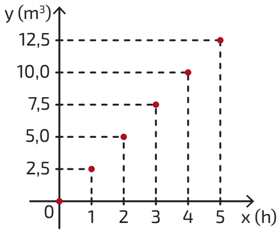
- Durante o trabalho com funções, leia o texto a seguir para situar os alunos historicamente em relação ao conceito de função.

A história do termo *função* proporciona outro exemplo interessante da tendência dos matemáticos de generalizar e ampliar os conceitos. A palavra *função*, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva. Por volta de 1718, Johann Bernoulli havia chegado a considerar uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; pouco tempo depois Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. [...] Lejeune Dirichlet (1805-1859) chegou à seguinte formulação: Uma *variável* é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis *x* e *y* estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a *x*, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a *y*, então se diz que *y* é uma *função* (unívoca) de *x*. A variável *x*, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada *variável independente* e a variável *y*, cujos valores dependem dos valores de *x*, é chamada *variável dependente*.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 660-661.

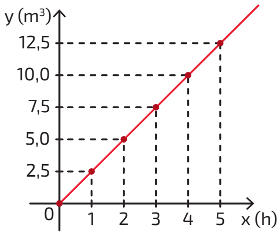
Ao atribuirmos valores para **x**, determinamos o valor correspondente para **y** de acordo com a lei de formação da função. Os pares ordenados (x, y) obtidos podem ser indicados no plano cartesiano.

| x | $y = 2{,}5x$ | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | $y = 2{,}5 \cdot 0 = 0$ | (0; 0) |
| 1 | $y = 2{,}5 \cdot 1 = 2{,}5$ | (1; 2,5) |
| 2 | $y = 2{,}5 \cdot 2 = 5$ | (2; 5) |
| 3 | $y = 2{,}5 \cdot 3 = 7{,}5$ | (3; 7,5) |
| 4 | $y = 2{,}5 \cdot 4 = 10$ | (4; 10) |
| 5 | $y = 2{,}5 \cdot 5 = 12{,}5$ | (5; 12,5) |



Nesse caso, não há valores negativos, e o menor tempo que podemos indicar é 0 h, cuja quantidade de água correspondente é 0 L.

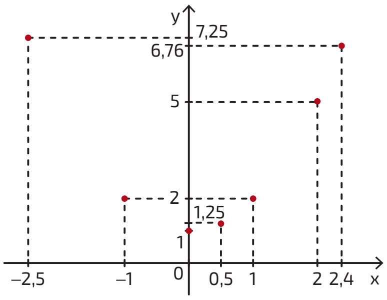
Os valores atribuídos para o tempo (x) foram arbitrários e inteiros. No entanto, poderíamos atribuir qualquer valor real maior ou igual a zero. Assim, a representação gráfica da função dada por $y = 2{,}5x$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) que satisfazem sua lei de formação.



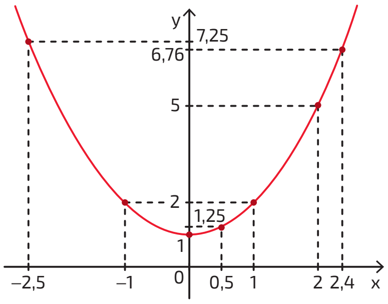
Veja outro exemplo.

Para construir o gráfico da função definida por $f(x) = x^2 + 1$, em que **x** representa um número real, atribuímos alguns valores para **x** e calculamos os valores correspondentes para **y**; dessa forma, obtemos pares ordenados (x, y) e localizamos no plano cartesiano o ponto correspondente a cada par ordenado obtido.

| x | $f(x) = x^2 + 1$ | (x, y) |
|---|---|---|
| −2,5 | $f(-2{,}5) = (-2{,}5)^2 + 1 = 7{,}25$ | (−2,5; 7,25) |
| −1 | $f(-1)^2 = (-1)^2 + 1 = 2$ | (−1; 2) |
| 0 | $f(0) = (0)^2 + 1 = 1$ | (0; 1) |
| 0,5 | $f(0{,}5) = (0{,}5)^2 + 1 = 1{,}25$ | (0,5; 1,25) |
| 1 | $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ | (1; 2) |
| 2 | $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ | (2; 5) |
| 2,4 | $f(2{,}4) = (2{,}4)^2 + 1 = 6{,}76$ | (2,4; 6,76) |



Somente com os pontos do quadro não é possível traçar o gráfico de **f**. Como **x** representa um número real, podemos atribuir infinitos valores a ele e obter infinitos pontos. Assim, o gráfico da função definida por $f(x) = x^2 + 1$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) que satisfazem sua lei de formação.

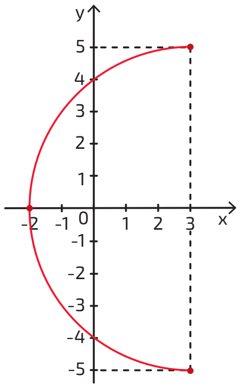


Ilustrações: Sergio L. Filho

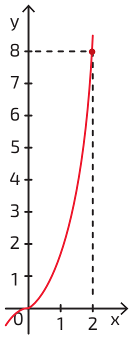
# Gráfico de uma função

Vimos que, ao atribuir um valor para a variável **x**, obtemos um único valor correspondente para a variável **y** de acordo com a lei de formação da função.

Com base nessa característica, é possível verificar se um gráfico representa uma função. Observe.



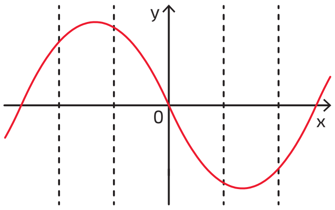
Esse gráfico não representa uma função. Note que para x = 3, por exemplo, temos dois valores correspondentes para **y**, isto é, y = −5 e y = 5.



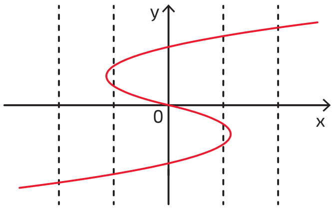
Esse gráfico representa uma função. Note que para cada valor de **x** há um único valor correspondente para **y**.

De maneira prática, podemos verificar se um gráfico representa uma função traçando retas paralelas ao eixo **y**. Se cada reta possível de ser traçada intersectar o gráfico em um único ponto, ele representa uma função. Se ao menos uma dessas retas possuir interseção em dois ou mais pontos, esse gráfico não representa uma função.

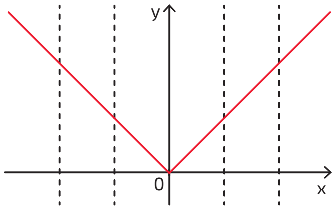
Exemplos.



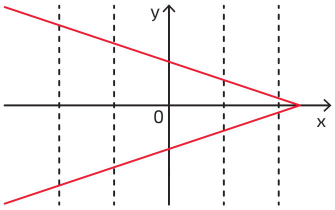
É o gráfico de uma função.



Não é o gráfico de uma função.



É o gráfico de uma função.



Ilustrações: Sergio L. Filho

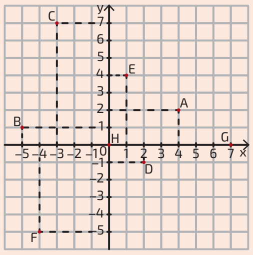
Não é o gráfico de uma função.

- Peça aos alunos que construam no caderno as representações de algumas curvas e a entreguem para um colega verificar se correspondem a possíveis funções ou não, utilizando o teste apresentado nessa página. Para isso, reproduza o plano cartesiano sobre a malha quadriculada disponível nas **Páginas para reprodução** e entregue a eles. Atividades desse tipo proporcionam a interação entre os estudantes, contribuindo com o compartilhamento de ideias e experiências.

- Na atividade **14**, caso os alunos tenham dificuldade para verificar qual gráfico representa a função apresentada, peça que escolham um par ordenado, que é ponto de cada curva, e substitua na lei de formação da função. Oriente-os da mesma maneira na atividade **15**.

**Resposta**

**12.**



Sergio L. Filho

## Atividades

Anote no caderno

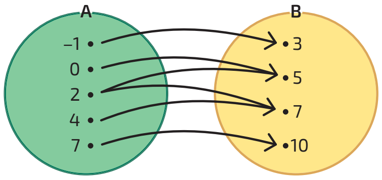
**12.** Construa um plano cartesiano em uma malha quadriculada e represente os pontos: Resposta nas orientações ao professor.

- A(4, 2)
- D(2, −1)
- G(7, 0)
- B(−5, 1)
- E(1, 4)
- H(0, 0)
- C(−3, 7)
- F(−4, −5)

**a)** Quais desses pontos estão localizados sobre o eixo das abscissas? E sobre o das ordenadas? G e H; H

**b)** Determine as coordenadas dos pontos A', B' e C' simétricos, respectivamente, aos pontos **A**, **B** e **C** em relação ao eixo **x**. A'(4, −2), B'(−5, −1) e C'(−3, −7)

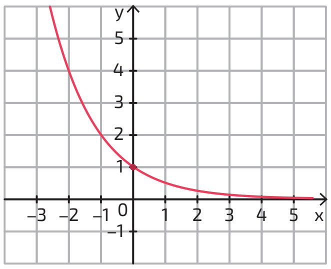
**13.** O diagrama abaixo representa uma função? Por quê?



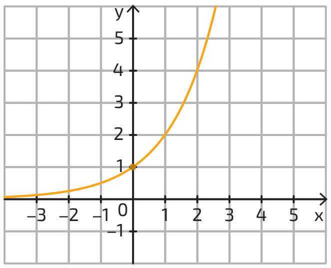
Cynthia Sekiguchi

**14.** Qual dos gráficos representa a função $h(x) = 2^x$? b

**a)**



**b)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

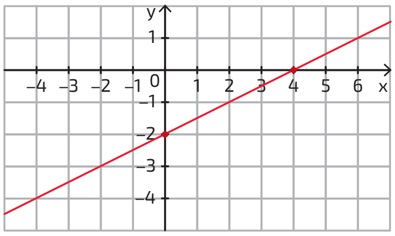
**15.** Associe cada gráfico à lei de formação da função, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondente. a-III; b-I; c-II

**I )** $f(x) = 4^x - 2$

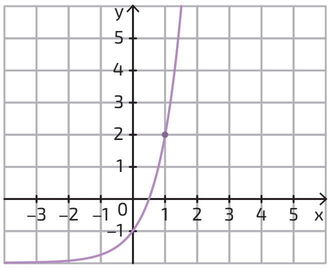
**II )** $g(x) = x^2 - 2$

**III)** $h(x) = \frac{x}{2} - 2$

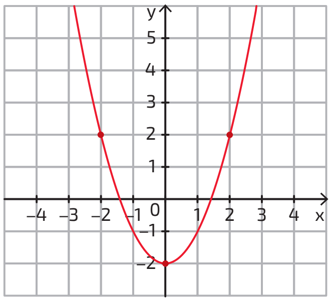
**a)**



**b)**



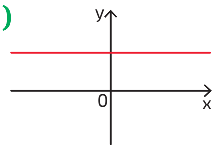
**c)**



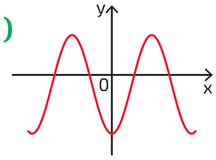
Ilustrações: Sergio L. Filho

**16.** Quais dos gráficos não representam uma função? b; d

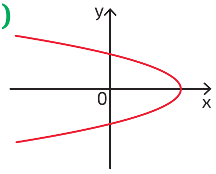
**a)**



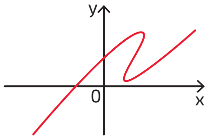
**c)**



**b)**



**d)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

Escreva os procedimentos que você utilizou para resolver esta atividade. Resposta pessoal.

13. não; Possível resposta: um elemento correspondente à variável independente está associado a dois elementos correspondentes à variável dependente.

# Função afim

Carlos e sua família vão alugar um apartamento em uma pousada de praia. O aluguel corresponde a uma parte fixa de R$ 85,00, referente à taxa de limpeza, mais R$ 390,00 por dia.

Para calcular o valor do aluguel, podemos escrever uma fórmula. Para isso, chamamos de $y = f(x)$ o valor do aluguel e de **x** a quantidade de dias de hospedagem.

$$f(x) = 390x + 85$$

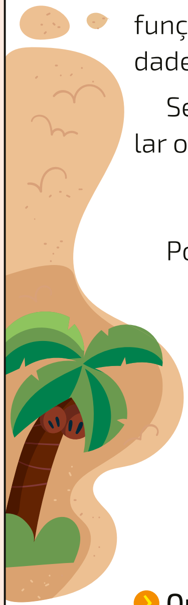
Dessa maneira, $f(x) = 390x + 85$ é a lei de formação da função que expressa o valor do aluguel de acordo com a quantidade **x** de dias.

Se considerarmos $x = 7$, podemos, por meio dessa fórmula, calcular o valor do aluguel para 7 diárias.

$$f(7) = 390 \cdot 7 + 85 = 2\,815$$

Portanto, o valor do aluguel para 7 dias de hospedagem é R$ 2 815,00.

Claudia Souza



Chamamos de **função afim** a função de variável real, definida por $f(x) = ax + b$, em que **a** e **b** são números reais.

Dizemos que **a** e **b** são coeficientes da função. O coeficiente **b** também é chamado **termo independente**.

**Quais são os coeficientes a e b da função dada por $g(x) = -x + 9$? E os coeficientes a e b da função dada por $h(x) = 7x$?** $a = -1$ e $b = 9$; $a = 7$ e $b = 0$

## Atividades

Anote no caderno

**17.** Escreva cada função na forma $y = ax + b$ e determine os valores dos coeficientes **a** e **b**. Respostas nas orientações ao professor.

**a)** $y + 2x = 4 - x$

**b)** $2y - 3x = y + x + 1$

**c)** $3y + 1 = y - x$

**d)** $3y + x = 3x + 2y + 7$

**e)** $4y - 3x + 2 = -y - 4x + 7$

**f)** $-2y - x + 3 = -4y - 6x - 1$

**18.** Quais das leis de formação apresentadas abaixo correspondem a de uma função afim? a; c; f; h

**a)** $y = \sqrt{2}x - 3$

**b)** $y = x^2 - 3$

**c)** $y = -x$

**d)** $y = \frac{3}{x} + x - 1$

**e)** $y = \frac{1}{x} - 4$

**f)** $y = \frac{2}{3}x + 4$

**g)** $y = x^{-2} - 3$

**h)** $y = 13$

### Respostas

**17. a)** $y = -3x + 4$; $a = -3$; $b = 4$

**b)** $y = 4x + 1$; $a = 4$; $b = 1$

**c)** $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$; $a = -\frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$

**d)** $y = 2x + 7$; $a = 2$; $b = 7$

**e)** $y = -\frac{x}{5} + 1$; $a = -\frac{1}{5}$; $b = 1$

**f)** $y = -\frac{5x}{2} - 2$; $a = -\frac{5}{2}$; $b = -2$

### Material digital

- No material digital dessa coleção, para complementar o trabalho com o tópico **Função afim**, disponibilizamos a **Sequência didática 5**, elaborada com objetivo de desenvolver a habilidade **EF09MA06**. Essa sequência apresenta atividades que possibilitam a compreensão da ideia de função, para promover o reconhecimento de uma função afim e sua lei de formação, além da resolução de situações-problemas que envolvam a ideia de função.

**Respostas**

**19.** $f(x)=2x-5$ e $g(x)=2x+3$

**a)**
- $f(3)=1$ e $g(3)=9$
- $f(-1)=-7$ e $g(-1)=1$
- $f(7)=9$ e $g(7)=17$
- $f(-2)=-9$ e $g(-2)=-1$
- $f(0)=-5$ e $g(0)=3$

**b)**
- f: $x=\frac{13}{2}$; g: $x=\frac{5}{2}$
- f: $x=3$; g: $x=-1$
- f: $x=-1$; g: $x=-5$
- f: $x=\frac{5}{2}$; g: $x=-\frac{3}{2}$

**23. b)** Sim, pois ela é uma função do tipo $f(x)=ax+b$, em que $a=0{,}06$ e $b=50$.

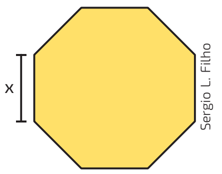
**24. c)** A partir de 210 minutos de ligação, pois para $x>209{,}375$, $B(x)<A(x)$.

**19.** Escreva a fórmula da função afim **f**, com coeficientes $a = 2$ e $b = -5$, e da **g**, com $a = 2$ e $b = 3$, ambas na variável **x**.
Respostas nas orientações ao professor.

**a)** Calcule o valor das fórmulas que você escreveu para:
- $x = 3$
- $x = 7$
- $x = 0$
- $x = -1$
- $x = -2$

**b)** Considerando as funções **f** e **g**, calcule o valor de **x** para o qual o valor da função é igual a:
- 8
- 1
- −7
- 0

**20.** No octógono regular está indicada a medida do comprimento de um de seus lados.



**a)** Escreva a lei de formação da função afim que represente a medida do perímetro **p** desse octógono em função da medida do comprimento de seu lado. $p(x) = 8x$

**b)** Calcule a medida do perímetro desse octógono sabendo que cada um de seus lados mede 8 cm de comprimento. 64 cm

**c)** Qual a medida do lado de um octógono regular que possui 36,4 cm de medida de perímetro? 4,55 cm

**21.** Um entregador cobra R$ 30,00 por dia de trabalho mais R$ 2,50 por entrega realizada.

**a)** Quantos reais ganhará esse entregador se em um dia ele fizer 50 entregas? E se realizar 75 entregas? R$ 155,00; R$ 217,50

**b)** Em um dia em que esse entregador ganhou R$ 142,50, quantas entregas ele fez? 45 entregas

**c)** Escreva a lei de formação de uma função afim para representar o ganho **g** do entregador, em um dia, em função do número **m** de entregas realizadas. $g(m) = 2{,}5m + 30$

**22.** Um encanador realizou um trabalho em 4 h e cobrou R$ 147,00. Sabendo que ele cobra R$ 35,00 por hora de trabalho mais um valor fixo, escreva a lei de formação que represente o preço **p** cobrado por **t** horas de trabalho desse encanador. $p(t) = 35t + 7$

**23.** Renato trabalha como garçom em um restaurante. Por dia de trabalho ele recebe R$ 50,00 e mais 6% da quantia total gasta pelos clientes que atende.

**a)** Escreva a lei de formação de uma função **f** por meio da qual seja possível calcular quanto Renato recebeu em um dia de trabalho em que os clientes que atendeu gastaram **x** reais. $f(x) = 0{,}06x + 50$

**b)** A lei de formação da função que você escreveu no item **a** é uma função afim? Justifique. Resposta nas orientações ao professor.

**c)** Calcule quantos reais Renato receberá em um dia de trabalho se os clientes que ele atender gastarem ao todo:
- R$ 300,00. R$ 68,00
- R$ 520,00. R$ 81,20

**d)** Se em certo dia Renato recebeu R$ 86,00, quantos reais ao todo gastaram os clientes que ele atendeu? R$ 600,00

**24.** Uma empresa de telefonia fixa oferece a seus clientes dois planos de serviços.
- Plano **A**: mensalidade de R$ 19,10 mais R$ 0,26 por minuto de ligações.
- Plano **B**: mensalidade de R$ 52,60 mais R$ 0,10 por minuto de ligações.

**a)** Para cada um dos planos, escreva a lei de formação de uma função afim que represente o valor da conta telefônica em função da quantidade **x** de minutos falados. $A(x) = 19{,}10 + 0{,}26x$; $B(x) = 52{,}60 + 0{,}10x$

**b)** Se um cliente utilizar, no mês, o telefone durante 356 minutos no plano **A**, quantos reais ele vai pagar na fatura? E se ele usar o plano **B**? R$ 111,66; R$ 88,20

**c)** Em relação ao valor da fatura, a partir de quantos minutos de ligação o plano **B** é mais vantajoso para o cliente do que o plano **A**? Por quê? Resposta nas orientações ao professor.

- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **24**:

**a)** plano **A**: $A(x) = 19{,}10 + 0{,}26x$

plano **B**: $B(x) = 52{,}60 + 0{,}10x$

**b)** plano **A**: $A(356) = 19{,}10 + 0{,}26 \cdot 356 = 111{,}66$; R$ 111,66
plano **B**: $B(356) = 52{,}60 + 0{,}10 \cdot 356 = 88{,}20$; R$ 88, 20

**c)** $B(x) < A(x)$
$52{,}60 + 0{,}10x < 19{,}10 + 0{,}26x$
$-0{,}16x < -33{,}50$
$0{,}16x > 33{,}50$
$x > 209{,}375$

Assim, a partir de $x = 210$, ou seja, 210 minutos de ligação, a função que representa o plano **B** assume valores menores do que os assumidos pela função que representa o plano **A**.

**25.** Beatriz e Ana planejam viajar durante as férias e pretendem alugar um carro. O aluguel do carro corresponde a um valor fixo de R$ 25,00, mais R$ 85,00 por dia.

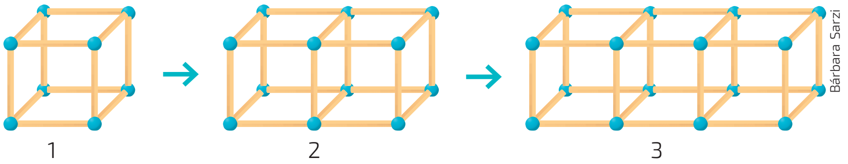
**a)** Escreva uma fórmula que relaciona o preço a ser pago pelo aluguel e a quantidade de dias em que o carro será utilizado. $y = 85x + 25$

**b)** Qual o valor a ser pago se elas alugarem o carro por 5 dias? R$ 450,00

**c)** Elas reservaram R$ 365,00 para o aluguel do carro. Por quantos dias, no máximo, elas poderão alugar o carro? 4 dias

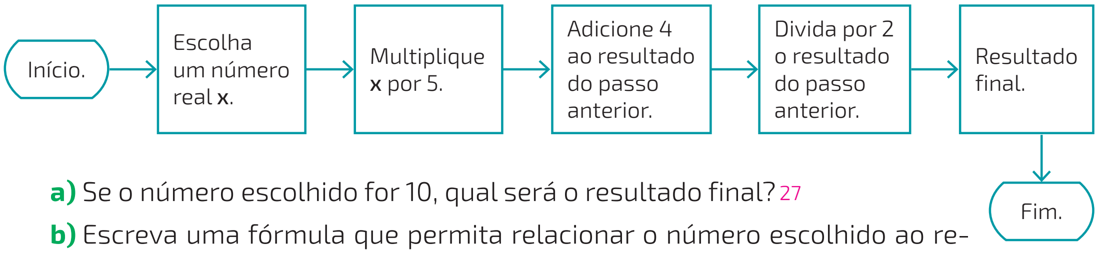

Débora Kamogawa

**26.** Cada figura da sequência foi construída com palitos e massa de modelar. Escreva uma fórmula que expresse a quantidade de palitos em função do número da figura na sequência. $y = 8x + 4$, em que **y** é a quantidade de palitos e **x** o número da figura na sequência.



Bárbara Sarzi

**27.** Observe o fluxograma a seguir.

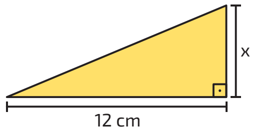


**a)** Se o número escolhido for 10, qual será o resultado final? 27

**b)** Escreva uma fórmula que permita relacionar o número escolhido ao resultado final. $y = 2{,}5x + 2$

**c)** Utilizando a fórmula que você escreveu no item **b**, qual número deve ser escolhido para que o resultado final seja 22? 8

**28.** Observe o triângulo retângulo a seguir.



Sergio L. Filho

**a)** Qual é a medida da área desse triângulo se $x = 5$ cm? 30 $cm^2$

**b)** Qual é o valor de **x** para que a medida da área desse triângulo seja igual a 18 $cm^2$? 3 cm

**c)** Escreva uma fórmula que permita relacionar o valor de **x** à medida da área **y** desse triângulo. $y = \frac{12x}{2}$

- Na atividade **27**, lembre os alunos de que um fluxograma é composto por figuras interligadas que ajudam na compreensão de determinadas informações. Nesse caso, ele apresenta, por meio de um passo a passo, uma maneira de resolver um problema.
- Na atividade **28**, comente com os alunos que a altura do triângulo retângulo coincide com um de seus lados adjacentes ao ângulo de 90°. Para calcular a medida da sua área, basta utilizar a fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

**BNCC em foco**

- O trabalho com essa página permite uma relação com a **Competência geral 10**, no sentido de despertar nos alunos a responsabilidade por suas ações no que tange ao uso da água. Enfatize a importância de evitar o desperdício desse bem natural, de modo a fazer com que eles percebam que decisões baseadas em princípios sustentáveis são fundamentais, não só para a economia doméstica, mas também para o equilíbrio e a manutenção do ecossistema, tendo em vista, principalmente, que a água é um bem finito e já apresenta sinais de esgotamento em muitas localidades do planeta.
Aproveite e converse com os alunos acerca de atitudes que podem ser tomadas a fim de evitar o desperdício, pois, assim, é possível desenvolver o trabalho com o tema contemporâneo **Educação ambiental**.

- Verifique se os alunos percebem que, segundo a companhia de saneamento da atividade, o preço a ser pago pelo $m^3$ de água é calculado de acordo com a quantidade consumida. Questione-os sobre o motivo do valor excedente a 30 $m^3$ ser mais caro e, caso não saibam, diga que cobrar mais caro pelo excesso é uma maneira de estimular as pessoas a não desperdiçarem água, gastando assim só o necessário. Dessa forma, quem tiver um consumo acima de 30 $m^3$ pagará mais caro pelo metro cúbico da água.

## Matemática em destaque

**29.** Utilizar água de modo consciente é um dever de todos, pois, além de evitar o desperdício, resulta em economia financeira. De modo geral, o valor da tarifa cobrada pelas companhias de saneamento depende da quantidade de metros cúbicos de água que foram consumidos no mês.

Observe como uma companhia de saneamento calcula o valor de uma fatura.

HISTÓRICO DE CONSUMO/$m^3$

| 04/18 | 05/18 | 06/18 | 07/18 | 08/18 | 09/18 | 10/18 | 11/18 | 12/18 | 01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 13 | 12 | 12 | 10 | 11 | 14 | 13 | 12 | |

**DESCRIÇÃO DOS SERVIÇOS LANÇADOS** (Composição dos valores da fat

| FAIXAS DE CONSUMO | VOLUME | VALOR R$/$m^3$ |
|---|---|---|
| | | ÁGUA |
| RESIDENCIAL | Mínimo até 10 $m^3$ | R$ 62,24 |
| | Excedente a 10 $m^3$ até 30 $m^3$ | R$ 10,79/$m^3$ |
| | Excedente a 30 $m^3$ | R$ 18,40/$m^3$ |

REFERÊNCIA 03/2019
DATA LEITURA 18/04/2019
LEITURA ANTERIOR 1356
DIAS DE CONSUMO 30
LEITURA ATUAL 1370
MÉDIA DE CONSUMO/$m^3$ ÚLTIMOS 5 MESES 13,8
CONSUMO/$m^3$ 14
MOTIVO DA AUSÊNCIA DE LEITURA

VALORES
ÁGUA
ESGOTO
SERVIÇOS
**TOTAL**
**VENCIMENTO**

O consumo mensal e a média dos meses anteriores costumam ser informados ao consumidor.

Até 10 $m^3$ de consumo de água a tarifa é fixa.
A partir de 10 $m^3$ é cobrada uma taxa proporcional ao consumo excedente.

Na fatura, constam também o preço total e a data de vencimento para pagamento.

**a)** Há diferença no valor da fatura para consumo de água de 6 $m^3$ e de 9 $m^3$? Por quê? não; Espera-se que os alunos respondam que, para consumo menor ou igual a 10 $m^3$, o valor cobrado é o mesmo, nesse caso, R$ 62,24.

**b)** Chamando de **x** o consumo de água em metros cúbicos, escreva a lei de formação de uma função para calcular o valor $y = f(x)$ quando o consumo de água e esgoto for:

- maior do que 10 $m^3$ e menor do que 30 $m^3$. $f(x) = 62,24 + 10,79(x - 10)$ ou $f(x) = 10,79x - 45,66$
- maior do que 30 $m^3$. $f(x) = 278,04 + 18,40(x - 30)$ ou $f(x) = 18,40x - 273,96$

**c)** De acordo com o item **b**, calcule o valor de uma fatura que apresente um consumo mensal de:

- 12 $m^3$ R$ 83,82
- 29 $m^3$ R$ 267,25
- 35 $m^3$ R$ 370,00

**d)** Supondo que a fatura de água de certa residência em determinado mês foi de R$ 137,77, qual foi o consumo de água, em metros cúbicos? 17 $m^3$

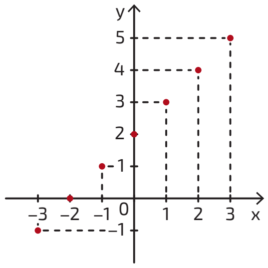
Somma Studio

# Gráfico de uma função afim

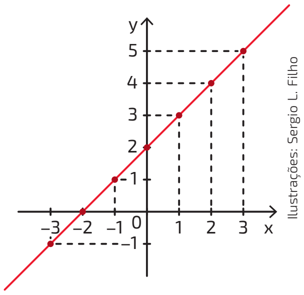
Veja como podemos construir o gráfico da função afim definida por $y = x + 2$, em que **x** representa um número real.

Inicialmente construímos um quadro e atribuímos valores a **x**. Calculamos os valores correspondentes de **y** e obtemos os pares ordenados (x, y). Em seguida, localizamos no plano cartesiano o ponto correspondente a cada par ordenado obtido.

| x | $y = x + 2$ | (x, y) |
|---|---|---|
| −3 | $y = -3 + 2 = -1$ | (−3, −1) |
| −2 | $y = -2 + 2 = 0$ | (−2, 0) |
| −1 | $y = -1 + 2 = 1$ | (−1, 1) |
| 0 | $y = 0 + 2 = 2$ | (0, 2) |
| 1 | $y = 1 + 2 = 3$ | (1, 3) |
| 2 | $y = 2 + 2 = 4$ | (2, 4) |
| 3 | $y = 3 + 2 = 5$ | (3, 5) |



Como **x** representa um número real, podemos atribuir a ele infinitos números reais e obter infinitos números reais correspondentes para **y**. Assim, entre os pontos indicados no plano cartesiano, podemos indicar infinitos outros pontos para obter o gráfico de $y = x + 2$.



Ilustrações: Sergio L. Filho

O gráfico de uma função afim é uma reta não perpendicular ao eixo **x**. Assim, para traçar o gráfico de uma função afim é suficiente definir apenas dois pontos.

## Atividades

Anote no caderno

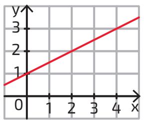
**30.** Associe cada lei de formação da função ao seu gráfico, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes.
a-III; b-I; c-II

**a)** $y = -5x + 1$

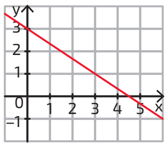
**b)** $y = \frac{x}{2} + 1$

**c)** $y = -\frac{2x}{3} + 3$

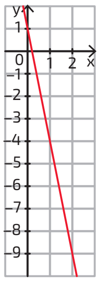
**I )**



**II )**



**III)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

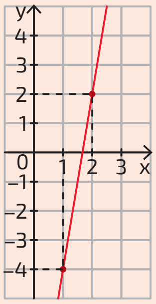
**31.** Em uma malha quadriculada, construa o gráfico das funções dadas por:
Respostas nas orientações ao professor.

**a)** $y = 6x - 10$ **b)** $y = \frac{x}{2} + 3$ **c)** $y = -4x + 4$ **d)** $y = \frac{x}{4}$

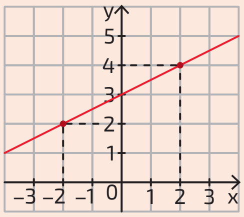
- Ao trabalhar com o tópico **Gráfico de uma função afim**, reforce aos alunos que, para determinar a reta, é necessário apenas que se obtenham as coordenadas de dois pontos.

**Respostas**

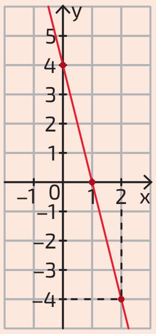
**31. a)**



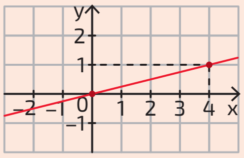
**b)**



**c)**

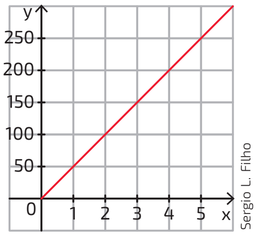


**d)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

**32.** O gráfico ao lado é de uma função que representa o consumo de energia elétrica **y**, em quilowatt-hora, de um equipamento em **x** horas de funcionamento.



Sergio L. Filho

**a)** Qual o consumo de energia elétrica desse equipamento, em quilowatt-hora, durante 3 h de funcionamento? 150 kWh

**b)** Escreva a lei de formação de uma função que permita calcular o consumo de energia elétrica desse equipamento de acordo com a quantidade de horas de funcionamento. $f(x) = 50x$

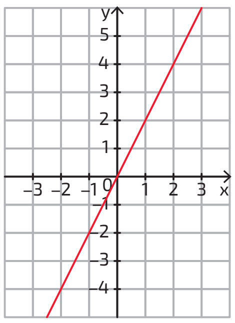
**c)** Calcule o consumo de energia elétrica desse equipamento em quilowatt-hora caso ele fique ligado durante:

- 6 h 300 kWh
- 8,5 h 425 kWh
- 15,5 h 775 kWh
- 24 h 1 200 kWh

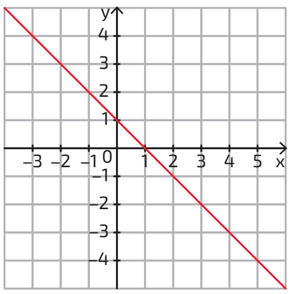
**d)** Por quantas horas esse equipamento deve ficar em funcionamento para que seu consumo seja de 900 kWh? 18 horas

**33.** Para cada gráfico, escreva a lei de formação da função correspondente.

**a)** $y = 2x$



**b)** $y = -x + 1$



Ilustrações: Sergio L. Filho

**34.** Utilizando uma malha quadriculada, construa os gráficos das funções **f**, **g** e **h** de variáveis reais em um mesmo plano cartesiano. Respostas nas orientações ao professor.

- $f(x) = 3x + 2$
- $g(x) = 3x - 1$
- $h(x) = 3x + 4$

**a)** As retas que representam os gráficos dessas funções são paralelas? Justifique sua resposta. sim; Espera-se que os alunos digam que as retas que representam as funções determinam no eixo **x** ângulos congruentes.

**b)** Qual regularidade pode ser observada em relação aos coeficientes **a** dessas funções? São iguais a 3.

**35.** Para esvaziar um reservatório que está com 30 000 L de água, será utilizada uma bomba com capacidade para retirar 2 000 L de água por hora.

**a)** Escreva a lei de formação de uma função que permita calcular a quantidade de água **q** no reservatório em função da quantidade de horas de funcionamento da bomba. $q = 30\,000 - 2\,000t$

**b)** Após 5 h de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão no reservatório? 20 000 L

**c)** Depois de quantas horas de funcionamento da bomba o reservatório estará com 6 000 L de água? 12 h

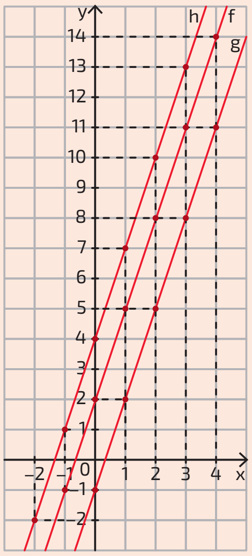
**d)** Quantas horas serão necessárias para que o reservatório seja esvaziado? 15 h

**e)** Construa o gráfico da função cuja lei de formação você escreveu no item **a**. Resposta nas orientações ao professor.

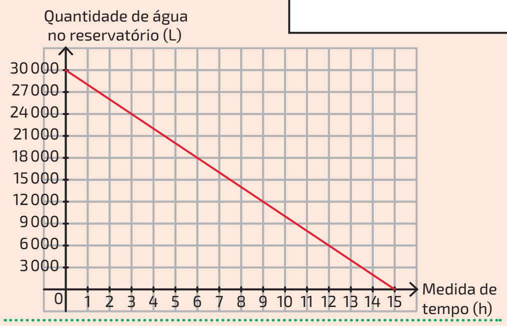
- Na atividade **32**, explique aos alunos que, nessa representação gráfica, os eixos **x** e **y** não estão na mesma escala.

## Respostas

**34.**



**35. e)** Para construir o gráfico, peça aos alunos que, no eixo vertical, considerem a medida do comprimento do lado do quadradinho da malha para representar 3 000 L de água.



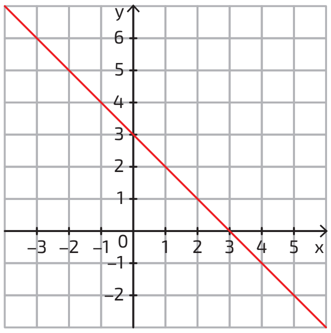
Ilustrações: Sergio L. Filho

**36.** Para cada item, escreva a lei de formação de três funções afins cujas retas que representam seus gráficos sejam paralelas ao gráfico da função dada por:

**a)** $f(x) = \sqrt{2}x + 3$. **b)** $f(x) = 8x + 3$. **c)** $f(x) = -4x + 7$.

**37.** Para quais valores de **n** as retas que representam as funções dadas por $f(x) = (2n - 1)x + 5$ e $g(x) = x - 2$ não são paralelas? Todo **n** tal que $n \neq 1$.

**38.** Escreva as coordenadas de três pontos que pertencem ao gráfico da função afim representada abaixo. Possíveis respostas: (−3, 6), (−2, 5), (−1, 4); (0, 3), (1, 2), (2, 1); (3, 0), (4, −1), (5, −2)



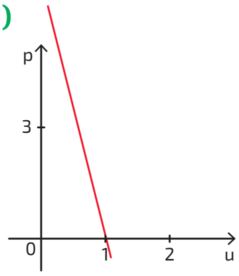
Sergio L. Filho

36. a) $g(x) = \sqrt{2}x - 1$; $h(x) = \sqrt{2}x + 5$; $m(x) = \sqrt{2}x + 2$
b) $g(x) = 8x - 1$; $h(x) = 8x + 10$; $m(x) = 8x - 12$
c) $g(x) = -4x - 5$; $h(x) = -4x + 1$; $m(x) = -4x + 9$

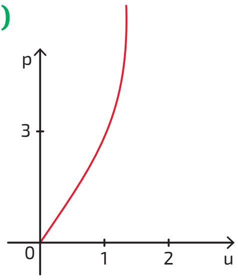
Agora, junte-se a um colega e escrevam a função afim na forma $f(x) = ax + b$ que esse gráfico representa. $f(x) = -x + 3$

**39.** Em certo supermercado, a alface é vendida por R$ 3,00 a unidade. Qual dos gráficos a seguir representa o preço **p** pago em reais pela compra de **u** unidades de alface nesse supermercado? d

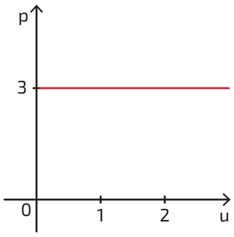
**a)**



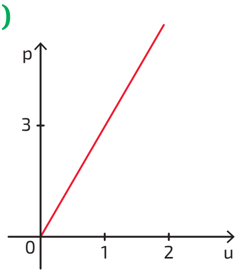
**b)**



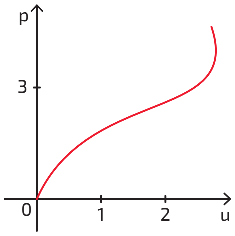
**c)**



**d)**



**e)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

- Veja uma possível resolução do desafio sugerido na atividade **37**: Não serão paralelas quando os coeficientes **a** das funções forem diferentes, ou seja:

$$2n - 1 \neq 1$$
$$2n \neq 2$$
$$n \neq 1$$

Logo, as retas não são paralelas para todo **n** tal que $n \neq 1$.

- Na atividade **39**, peça que os alunos escrevam a lei de formação da função que representa o preço **p** a pagar na compra de **u** unidades de alface nesse supermercado.
- Na seção **Explorando tecnologias**, na página **272**, apresentamos uma maneira de construir gráfico de função afim, utilizando o *software* GeoGebra. Verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para realizarem algumas construções com essa ferramenta.

- Após apresentar a função dada pela lei de formação $y = 0{,}5x$, peça que os alunos calculem a quantidade de combustível abastecido pela bomba após determinado tempo, a fim de verificar como eles estão lidando com situações que envolvem o conteúdo abordado.
- Se necessário, retome com os alunos o conceito de proporcionalidade, lembrando-os de que duas ou mais grandezas podem ser proporcionais ou não proporcionais. Aproveite e apresente algumas situações e peça para que eles verifiquem se são ou não proporcionais.

# Função linear

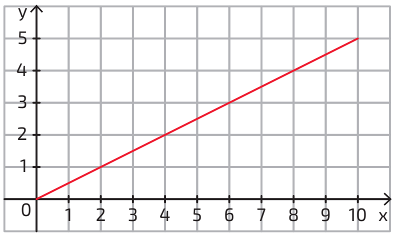
Um tipo particular de função afim é a **função linear**. A lei de formação dessa função é do tipo $y = ax$, em que **a** é um número real diferente de zero.

Veja uma situação envolvendo função linear.

Em um posto de combustível, a medida da vazão de certa bomba de abastecimento é 0,5 L por segundo. Podemos calcular, por meio da lei de formação de uma função **f** a quantidade $y = f(x)$ de combustível abastecido por essa bomba de acordo com a medida **x** de tempo de abastecimento.

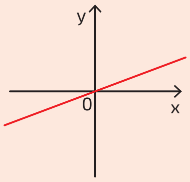
$$f(x) = 0{,}5x$$

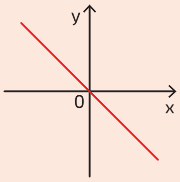
A função **f** é linear e seu gráfico está representado a seguir.



Uma função afim definida por $f(x) = ax + b$, em que $a \neq 0$ e $b = 0$, é chamada **função linear** e pode ser representada por $f(x) = ax$.

O gráfico de uma função linear é uma **reta** que passa pelo ponto de coordenadas $(0, 0)$.





Ilustrações: Sergio L. Filho

## Função linear e proporcionalidade

Situações que envolvem grandezas proporcionais podem ser representadas por funções lineares. Observe o exemplo.

Maurizio Milanesio/Shutterstock.com

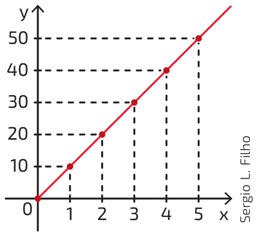
Pessoa trabalhando na produção de queijo.

Para calcular quantos litros de leite são necessários para produzir certa quantidade de queijo, podemos escrever a seguinte fórmula.

$$\underset{\text{leite (L)}}{y} = 10 \cdot \underset{\text{queijo (kg)}}{x}$$

A quantidade de leite está em função da quantidade de queijo a ser produzido. Veja a representação gráfica dessa função.

| x | y = 10x | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | $y = 10 \cdot 0 = 0$ | (0, 0) |
| 1 | $y = 10 \cdot 1 = 10$ | (1, 10) |
| 2 | $y = 10 \cdot 2 = 20$ | (2, 20) |
| 3 | $y = 10 \cdot 3 = 30$ | (3, 30) |
| 4 | $y = 10 \cdot 4 = 40$ | (4, 40) |
| 5 | $y = 10 \cdot 5 = 50$ | (5, 50) |



Sergio L. Filho

Observando o gráfico podemos notar que, se a quantidade de queijo dobra, a quantidade de leite também dobra; se a quantidade de queijo triplica, a quantidade de leite também triplica, e assim por diante.

Assim, dizemos que essas grandezas são diretamente proporcionais, e, ao calcularmos $\frac{y}{x}$, com $x \neq 0$, obtemos a **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{10}{1} = \frac{20}{2} = \frac{30}{3} = \frac{40}{4} = \frac{50}{5} = 10 \leftarrow \text{constante de proporcionalidade}$$

No cálculo da constante da proporcionalidade consideramos o valor de **x** e o valor correspondente de **y**.

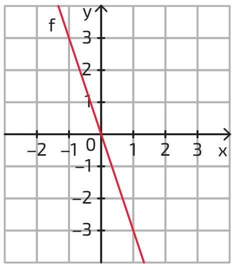
- Explique aos alunos que, nessa representação gráfica da função que relaciona a quantidade de leite necessária para produzir certa quantidade de queijo, os eixos **x** e **y** não estão na mesma escala.

## Atividades

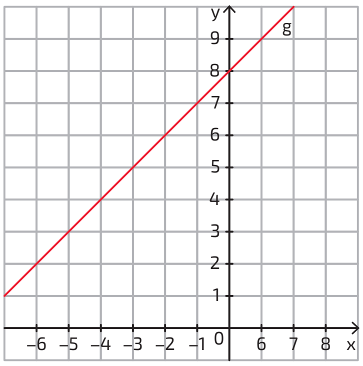
Anote no caderno

**40.** Observe os gráficos.

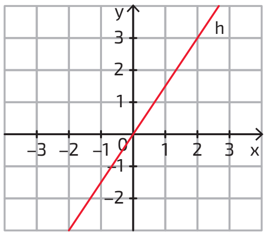
**I )**



**II )**



**III)**



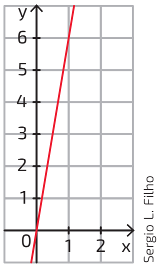
Ilustrações: Sergio L. Filho

**a)** Quais desses gráficos representam funções lineares? I e III

**b)** Qual a constante de proporcionalidade de cada função indicada no item **a**? I: –3; III: $\frac{3}{2}$

**c)** Escreva a função linear que cada gráfico indicado no item **a** representa. I: $f(x) = -3x$; III: $h(x) = \frac{3x}{2}$

**41.** Observe o gráfico de uma função afim.



Sergio L. Filho

**a)** Quais as coordenadas do ponto em que o gráfico intersecta o eixo **x**? (0, 0)

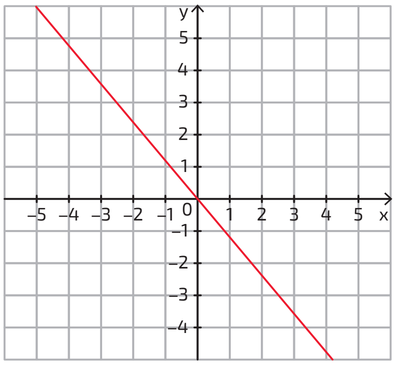
**b)** Esse gráfico representa uma função linear? Justifique. Sim, pois o gráfico é uma reta que passa pelo ponto de coordenadas (0, 0).

**c)** Qual a constante de proporcionalidade dessa função? 6

**42.** Quais dos gráficos a seguir representam o de uma função linear? Justifique sua resposta. a

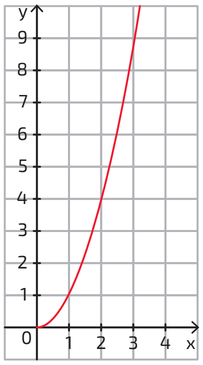
**a)**

Representa o gráfico de uma função linear, pois o gráfico é uma reta e passa pelo ponto de coordenadas (0, 0).



**b)**

Não representa o gráfico de uma função linear, pois o gráfico não é uma reta.



Ilustrações: Sergio L. Filho

**43.** Escreva a lei de formação de uma função linear que passa pelo ponto de coordenadas (4, –1). $f(x) = -\frac{x}{4}$

**44.** Em uma malha quadriculada, construa o gráfico de uma função dada por:

**a)** $f(x) = \frac{5x}{4}$

**b)** $g(x) = -2,5x$

**c)** $h(x) = 1,5x$

**d)** $m(x) = \frac{x}{3}$

Respostas nas orientações ao professor.

**45.** Observe o preço do quilograma do pão francês em certa padaria.

Fotomontagem de Sergio L. Filho: Guinter Fernandes Costa/Shutterstock.com

**a)** Quantos reais custarão 250 g de pão francês nessa padaria? E 400 g? R$ 3,40; R$ 5,44

**b)** Quantos gramas de pão francês é possível comprar com R$ 7,00? aproximadamente 515 g

**c)** Escreva a lei de formação de uma função que relaciona o preço **p** a ser pago e a quantidade **x** de quilogramas de pão. Em seguida, construa o gráfico dessa função. Resposta nas orientações ao professor.

**d)** Se 30 pães são cerca de 1,5 kg em média, quanto custa cada pão? R$ 0,68

**46.** Para pagamento à vista, certa loja oferece 12% de desconto na compra de qualquer artigo.

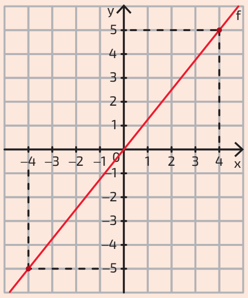
**a)** Escreva a lei de formação de uma função que relacione o preço **y** a ser pago após o desconto na compra à vista de um artigo que custa **x** reais. $y = 0,88x$

**b)** Quantos reais um cliente vai pagar por um fogão que custa R$ 960,00 se pagar à vista? R$ 844,80

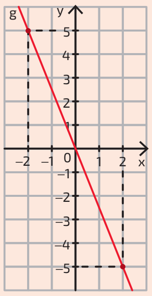
**c)** Construa o gráfico da função cuja lei de formação você escreveu no item **a**. Resposta nas orientações ao professor.

## Respostas

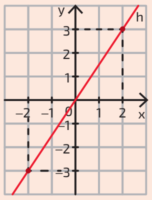
**44. a)**



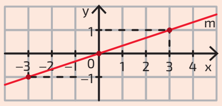
**b)**



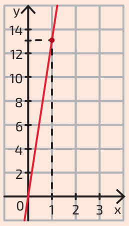
**c)**



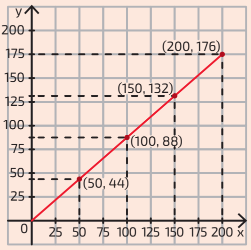
**d)**



**45. c)** $p(x) = 13,6x$



**46. c)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **46**:

**a)** $y = x - \frac{12}{100}x$

$y = 0,88x$

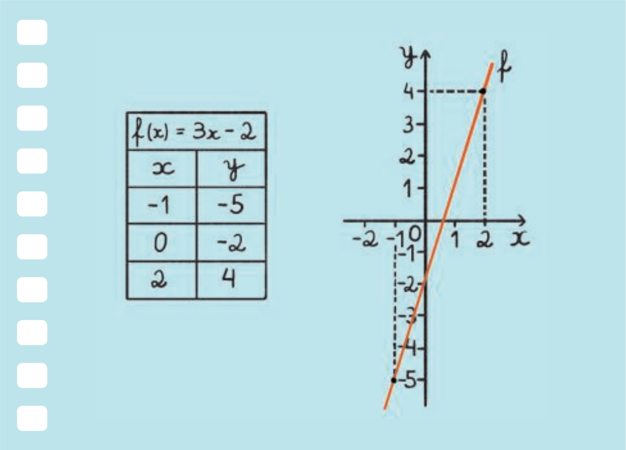
**b)** $y = 0,88 \cdot 960 = 844,8$, R$ 844,80

**c)** Para a produção do gráfico, os alunos podem construir obtendo alguns valores para **x** e **y**, conforme mostra o quadro.

| x | y=0,88x | (x, y) |
|---|---|---|
| 50 | $y = 0,88 \cdot 50 = 44$ | (50, 44) |
| 100 | $y = 0,88 \cdot 100 = 88$ | (100, 88) |
| 150 | $y = 0,88 \cdot 150 = 132$ | (150, 132) |
| 200 | $y = 0,88 \cdot 200 = 176$ | (200, 176) |

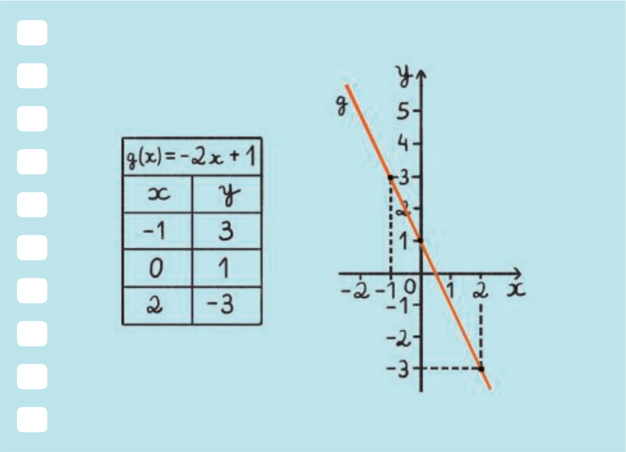
# Função crescente e decrescente

Veja os gráficos que Otávio construiu.



| $f(x) = 3x - 2$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| $-1$ | $-5$ |
| $0$ | $-2$ |
| $2$ | $4$ |

Observando o gráfico da função **f**, podemos notar que, se os valores de **x** aumentam, os valores correspondentes de **y** também aumentam. Assim, dizemos que **f** é uma **função crescente**.



| $g(x) = -2x + 1$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| $-1$ | $3$ |
| $0$ | $1$ |
| $2$ | $-3$ |

Ilustrações: Bárbara Sarzi

Observando o gráfico da função **g**, podemos notar que, se os valores de **x** aumentam, os valores correspondentes de **y** diminuem. Assim, dizemos que **g** é uma **função decrescente**.

Note que na função **f** o coeficiente **a** é 3 (positivo) e a cada aumento de 1 unidade em **x** há acréscimo de 3 unidades em **y**. Já na função **g** o coeficiente **a** é $-2$ (negativo) e a cada aumento de 1 unidade em **x** há decréscimo de 2 unidades em **y**.

Uma função afim, definida por $f(x) = ax + b$, é:

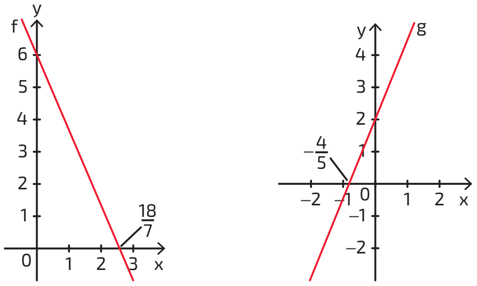
- crescente quando o coeficiente **a** é positivo $(a > 0)$.
  Nas funções crescentes, quando aumentamos os valores de **x**, os valores correspondentes de **y** também aumentam.
- decrescente quando o coeficiente **a** é negativo $(a < 0)$.
  Nas funções decrescentes, quando aumentamos os valores de **x**, os valores correspondentes de **y** diminuem.

Quando $a = 0$, temos um caso particular de função afim, a **função constante**. Nesse caso, o gráfico da função afim é uma reta paralela ao eixo **x**.

## Atividades

Anote no caderno

**47.** Observe os gráficos das funções **f** e **g**.



Ilustrações: Sergio L. Filho

**a)** A função **f** é crescente ou decrescente? E a função **g**? decrescente; crescente

**b)** Determine as coordenadas dos pontos de interseção de cada gráfico com os eixos **x** e **y**. Resposta nas orientações ao professor.

**c)** O coeficiente **a** da função **f** é positivo ou negativo? E da função **g**? negativo; positivo

**48.** Julgue como verdadeira (V) ou falsa (F) cada sentença abaixo.

V **a)** Em toda função afim crescente, o coeficiente de **x** é maior do que zero.

F **b)** Existe uma função afim decrescente cujo coeficiente de **x** é maior do que zero.

F **c)** Toda função afim, cujo termo independente é maior do que zero, é crescente.

F **d)** A reta que representa o gráfico de uma função afim crescente pode ser paralela à reta que representa o gráfico de uma função afim decrescente.

Agora, reescreva as sentenças que você julgou falsas corrigindo-as. Respostas nas orientações ao professor.

**49.** Escreva uma função afim: Possível resposta:

**a)** crescente, cujo termo independente seja 3. $f(x)=2x+3$

**b)** decrescente, cujo termo independente seja nulo. $f(x)=-5x$

**50.** Uma função linear cujo gráfico passa pelo ponto de coordenadas (−2, 3) é crescente ou decrescente? Justifique. decrescente; Possível resposta: ao diminuirmos o valor de **x** de 0 para −2, o valor de **y** aumenta de 0 para 3.

**51.** Classifique cada função afim, cuja lei de formação é apresentada a seguir, em crescente ou decrescente. crescente: h, m, p, q; decrescente: f, g, n, r

- $f(x)=-\sqrt{5}x+1$
- $h(x)=7x+2$
- $n(x)=5-\frac{7}{4}x$
- $q(x)=-8+4x$
- $g(x)=-\frac{8}{9}x-6$
- $m(x)=3x-15$
- $p(x)=\frac{x}{6}-\frac{1}{6}$
- $r(x)=-\sqrt{6}x+\sqrt{6}$

**52.** Determine o valor de **p** na função **g** dada por $g(x)=(3p-9)x+3$, de modo que ela seja:

**a)** crescente $p>3$

**b)** decrescente $p<3$

**53.** Escreva uma situação que possa ser representada por:

**I )** uma função afim crescente.

**II )** uma função afim decrescente.

Dê para um colega as situações que você escreveu dizendo que, para cada uma, ele deve escrever a fórmula da função que a represente e construir o respectivo gráfico. Em seguida, verifique se ele resolveu corretamente. Resposta pessoal.

### Respostas

**47. b)** A interseção de **f** com o eixo **x** ocorre em $\left(\frac{18}{7}, 0\right)$, e com o eixo **y** em (0, 6). A interseção de **g** com o eixo **x** ocorre em $\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$, e com o eixo **y** em (0, 2).

**48.** Possíveis respostas:

**b)** Não existe uma função afim decrescente cujo coeficiente **a** é maior do que zero.

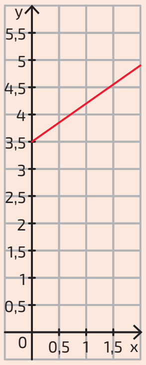
**c)** Toda função afim cujo coeficiente **a** é maior que zero é crescente.

**d)** A reta que representa o gráfico de uma função afim crescente não pode ser paralela à reta que representa o gráfico de uma função afim decrescente.

- Veja possíveis situações que podem ser elaboradas pelos alunos na atividade **53**:

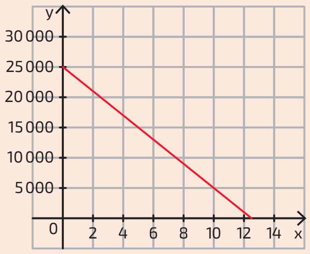
I ) Um motorista de táxi cobra R$ 3,50 de bandeirada e mais R$ 0,70 por quilômetro rodado.

**R** $f(x)=0,70x+3,50$;



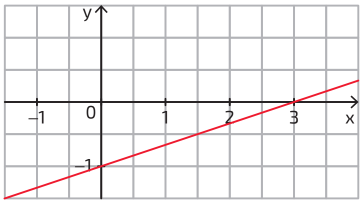
II ) Para esvaziar uma piscina com medida de capacidade de 25 000 L, uma bomba leva 1 h para retirar 2 000 L.

**R** $f(x)=25\,000-2\,000x$;



Ilustrações: Sergio L. Filho

**54.** Observe o gráfico de uma função afim do tipo $y = ax + b$.



Sergio L. Filho

**a)** O coeficiente **a** da função é positivo ou negativo? positivo

**b)** Essa função é crescente ou decrescente? crescente

**55.** Para cada uma das funções afins, cuja lei de formação é apresentada a seguir, determine o valor real de **n** para que a função seja crescente.

**a)** $y = (3n)x$ $n > 0$

**b)** $y = (5n + 15)x$ $n > -3$

**c)** $y = (4n - 8)x + 5$ $n > 2$

**d)** $y = \left(2n - \frac{7}{5}\right)x + 6$ $n > \frac{7}{10}$

**56.** Agora, para cada uma das funções afins da atividade anterior, determine o valor real de **n** para que a função seja decrescente. a: $n < 0$; b: $n < -3$; c: $n < 2$; d: $n < \frac{7}{10}$

**57.** Em cada quadro estão representados valores de **x** e **y** de uma função afim de variáveis reais.

**A**

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 0 | −1 | −2 | −3 |

**B**

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | −3 | −6 | −9 | −12 | −15 |

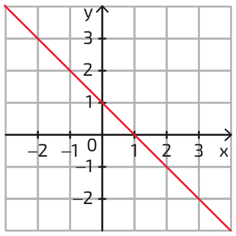
**C**

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |

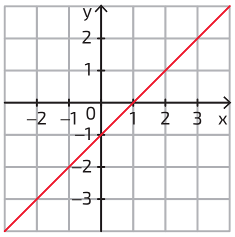
**a)** Escreva a fórmula da função representada em cada quadro.
A: $y = -x + 1$; B: $y = -3x - 3$; C: $y = x - 1$

**b)** Associe cada gráfico a seguir a uma das funções cuja fórmula você escreveu no item **a**. Para isso, escreva a letra e o número romano correspondentes. A-I; B-III; C-II

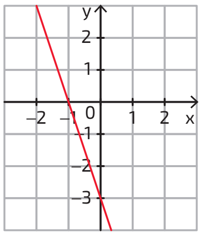
**I)**



**II)**



**III)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

**c)** Determine se cada uma dessas funções é crescente ou decrescente.
crescente: C; decrescente: A e B.

- Para complementar a atividade **57** dessa página, proponha a **Atividade complementar** a seguir, a fim de que os alunos possam relacionar os valores de **x** e **y** à lei de formação de uma função.

### Atividade complementar

- No quadro a seguir, estão representados os valores de **x** e **y** de uma função afim de variáveis reais. Complete esse quadro, escreva a lei de formação dessa função que relaciona os valores de **x** e **y** e diga se ela é crescente ou decrescente.

| x | y |
|---|---|
| −10 | −21 |
| −5 |  |
| 1 | 2,1 |
| 6 |  |
| 4 |  |

**R** Os valores que completam o quadro são, respectivamente, −10, 5; 12,6 e 8,4; $y = 2,1x$; crescente.

- Ao trabalhar com o tópico **Zero de uma função afim**, explique aos alunos que, na construção do gráfico de uma função desse tipo, o zero da função corresponde à abscissa do ponto em que a reta cruza o eixo **x**. No caso das funções lineares, o zero da função é dado sempre por $x=0$, pois: $f(x)=ax$.
Logo, $f(0)=a \cdot 0=0$.

## Zero de uma função afim

Chamamos **zero** de uma função **f** todo valor de **x** em que $f(x) = 0$.

Para determinar o zero de uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$, temos de obter o valor de **x** para qual $f(x) = 0$, ou seja, resolver a equação $ax + b = 0$.

Veja, por exemplo, como podemos calcular o zero da função **f** dada por $f(x) = 5x + 10$.

Inicialmente, substituímos f(x) por zero.

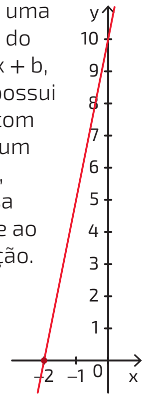
$$f(x) = 5x + 10$$
$$0 = 5x + 10$$
$$5x + 10 = 0$$

Depois, resolvemos a equação.

$$5x + 10 - 10 = 0 - 10$$
$$5x = -10$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{-10}{5}$$
$$x = -2$$

Portanto, o zero da função **f** é $x = -2$.

O gráfico de uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, possui interseção com o eixo **x** em um único ponto, cuja abscissa corresponde ao zero da função.



## Interseção com o eixo y

No ponto de interseção do gráfico de uma função afim com o eixo **y**, a abscissa é igual a zero. Assim, para determinar a ordenada do ponto de interseção do gráfico da função **f** dada por $f(x) = ax + b$ com o eixo **y**, temos de calcular f(0).

$$f(0) = \underbrace{a \cdot 0}_{0} + b = b$$

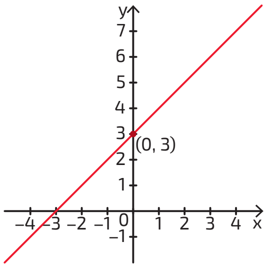
Note que a ordenada desse ponto corresponde ao termo independente da função afim.

O gráfico de uma função afim tem interseção com o eixo **y** no ponto de coordenadas (0, b).

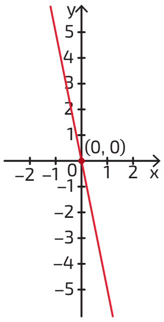
Veja alguns exemplos.

Na seção **Explorando tecnologias**, na página **272**, veja como utilizar um *software* de geometria para construir gráfico de função afim.

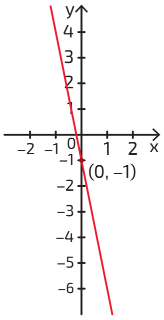
$f(x) = x + 3$



$g(x) = -5x$



$h(x) = -5x - 1$



Ilustrações: Sergio L. Filho

## Atividades

Anote no caderno

**58.** Para cada função, cuja lei de formação é apresentada a seguir, determine o zero e as coordenadas do ponto de interseção do gráfico com o eixo **y**.

**a)** $y = 6x - 1$ $x = \frac{1}{6}$; $(0, -1)$

**b)** $y = \frac{7}{3}x$ $x = 0$; $(0, 0)$

**c)** $y = -6x + 60$ $x = 10$; $(0, 60)$

**d)** $y = -1{,}6x$ $x = 0$; $(0, 0)$

**e)** $y = 3x + 6$ $x = -2$; $(0, 6)$

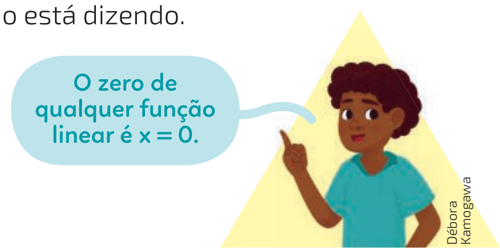
**f)** $y = -\frac{1}{7}x + 2$ $x = 14$; $(0, 2)$

**59.** Construa o gráfico da função **h** dada por $h(x) = -2x + 5$ e, nele, indique o zero da função.
Resposta nas orientações ao professor.

**60.** Qual o valor de **k** para que o zero da função **f** dada por $f(x) = -x + k + 3$ seja igual a 5? $k = 2$

Escreva os procedimentos que você utilizou para obter a resposta.
Resposta pessoal.

**61.** Leia o que Caio está dizendo.

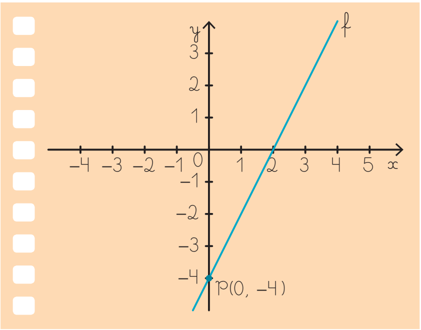


Débora Kamogawa

sim; Espera-se que os alunos justifiquem que o zero de uma função afim é dado pela raiz da equação $ax + b = 0$. Como na função linear $b = 0$, o zero da função é dado pela raiz de $ax = 0$ $(x = 0)$.

A afirmação feita por Caio está correta? Justifique sua resposta.

**62.** Veja o gráfico que Igor construiu em seu caderno para representar a função afim **f**.



Sergio L. Filho

**a)** Qual das leis de formação corresponde ao gráfico construído por Igor?
- $f(x) = 3x - 4$
- $f(x) = 2x - 4$

$f(x) = 2x - 4$

**b)** A função **f** é crescente ou decrescente?
crescente

**c)** Qual é o zero da função **f**? $x = 2$

**d)** Quais são as coordenadas do ponto em que o gráfico da função **f** passa pelo eixo **y**? $(0, -4)$

**63.** Verifique se cada afirmação a seguir a respeito da função afim dada por $y = -2x - 5$ com variáveis reais é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

**I)** A função é decrescente. Verdadeira, pois o coeficiente **a** é menor do que zero.

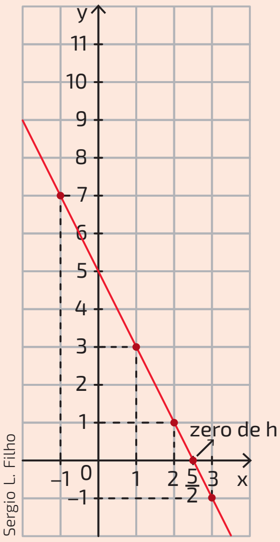
**II)** O zero dessa função é $-\frac{2}{5}$. Falso, pois o zero da função é $-\frac{5}{2}$.

**III)** O termo independente dessa função afim é $-5$. Verdadeiro, pois a função é do tipo $y = ax + b$.

**IV)** A interseção do gráfico dessa função com o eixo **y** ocorre no ponto de coordenadas $(0, 5)$. Falso, pois a interseção ocorre no ponto de coordenadas $(0, -5)$.

**Resposta**

**59.**



Sergio L. Filho

- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **60**:

$$f(5) = 0$$
$$-5 + k + 3 = 0$$
$$k = 2$$

**BNCC em foco**

- Aproveite as informações acerca do funcionamento cardíaco para estabelecer uma relação com o tema contemporâneo **Saúde** e converse com os alunos sobre a importância de se fazer uma avaliação médica antes de iniciar a prática de exercícios físicos. Saliente também que atividades praticadas de modo incorreto e sem acompanhamento de profissionais podem ocasionar lesões e dores musculares.

**Relacionando saberes**

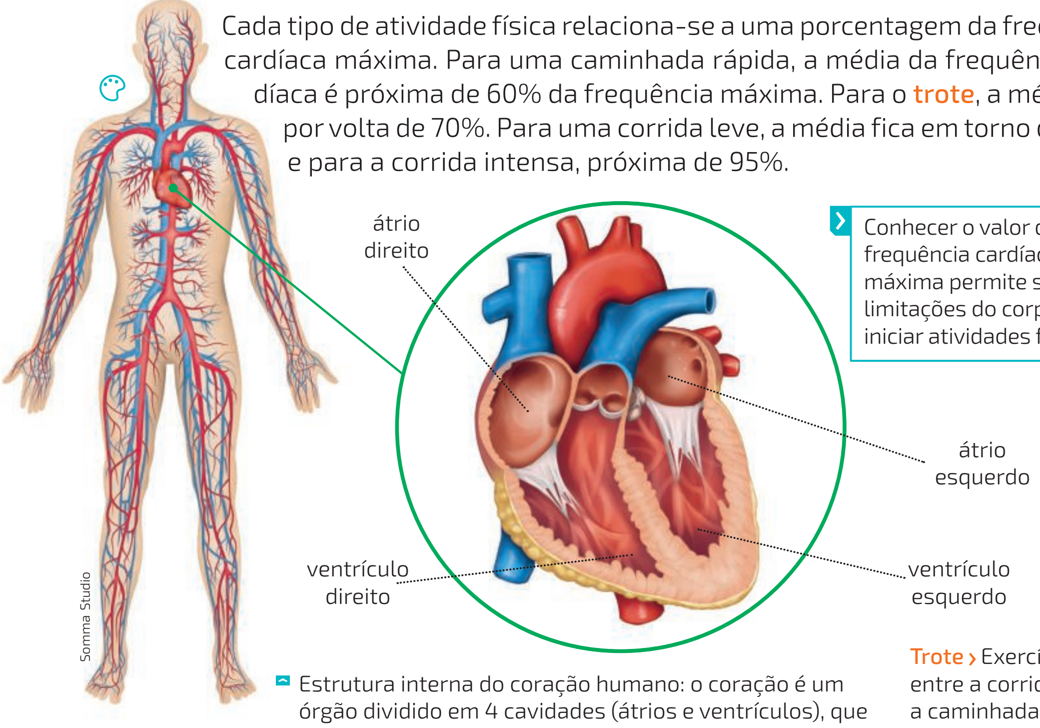
- Conte com o auxílio do professor responsável pelo componente curricular **Educação Física** e trabalhe um pouco mais o assunto relacionado à frequência cardíaca em atividades físicas, de modo a contribuir com outras informações. Verifique a possibilidade de levar os alunos à quadra de esportes a fim de realizar alguns exercícios físicos, com o intuito de calcular a frequência cardíaca deles em diversas situações. Peça para o professor enfatizar a importância de se habituar à prática desportiva e ressaltar alguns dos benefícios que ela traz.

## Matemática em destaque

**64.** O coração é um órgão constituído por músculos com a função de enviar o sangue para todo o corpo. Isso só é possível por meio do movimento de contração realizado regularmente pelo coração. A quantidade de batimentos do coração por minuto (bpm) é chamada frequência cardíaca, que pode variar conforme o nível de atividade corporal. Em repouso, o coração bate em torno de 70 vezes por minuto, e durante as atividades físicas, por exemplo, essa quantidade de batimentos aumenta.

A frequência cardíaca máxima de uma pessoa depende de vários fatores, sendo um deles a idade. Consultar um médico é a maneira mais segura de conhecer sua frequência cardíaca máxima. Contudo, é possível fazer um cálculo aproximado por meio da fórmula $y = 220 - x$, em que **x** é a idade da pessoa em anos e **y** é o valor aproximado da frequência cardíaca máxima.

Cada tipo de atividade física relaciona-se a uma porcentagem da frequência cardíaca máxima. Para uma caminhada rápida, a média da frequência cardíaca é próxima de 60% da frequência máxima. Para o trote, a média fica por volta de 70%. Para uma corrida leve, a média fica em torno de 85%, e para a corrida intensa, próxima de 95%.



Estrutura interna do coração humano: o coração é um órgão dividido em 4 cavidades (átrios e ventrículos), que realiza um movimento de contração enviando sangue pelos vasos sanguíneos para todo o corpo.

Conhecer o valor da frequência cardíaca máxima permite saber as limitações do corpo para iniciar atividades físicas.

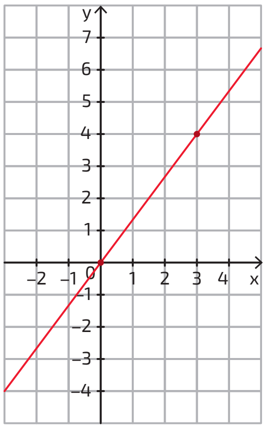
**Trote** › Exercício entre a corrida e a caminhada, com velocidade entre 6 e 8 km/h.

**a)** Para determinar o valor aproximado da frequência cardíaca relativa a uma caminhada rápida, é necessário calcular 60% da frequência cardíaca máxima. A fórmula para esse cálculo é, portanto, $y = (220 - x) \cdot 0,6$. Quais seriam as fórmulas para o cálculo da frequência cardíaca para as outras atividades físicas apresentadas? trote: $y = (220 - x) \cdot 0,7$; corrida leve: $y = (220 - x) \cdot 0,85$; corrida intensa: $y = (220 - x) \cdot 0,95$

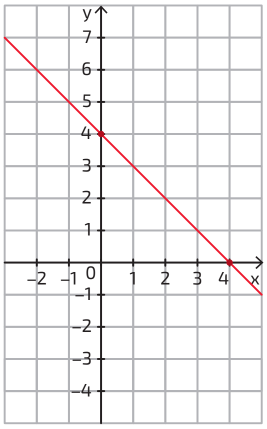
**b)** De acordo com as informações apresentadas, qual seria o valor aproximado de sua frequência cardíaca caso você realizasse uma corrida intensa? Resposta pessoal.

**65.** Determine o zero da função afim, cujo gráfico é apresentado em cada um dos itens.

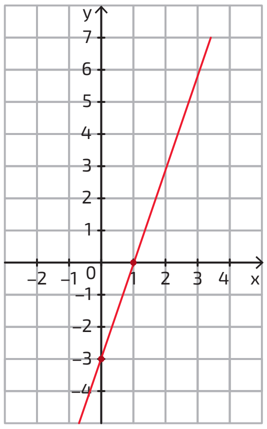
**a)** x = 0



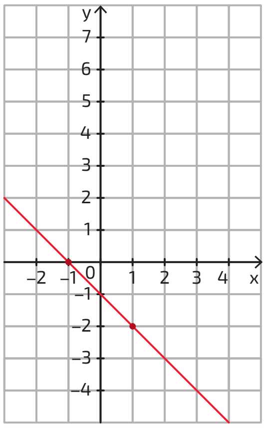
**b)** x = 4



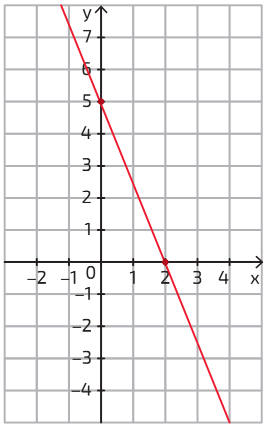
**c)** x = 1



**d)** x = –1



**e)** x = 2



Ilustrações: Sergio L. Filho

1. funções, gráfico de uma função, função afim, função linear, função crescente e decrescente, zero de uma função, interseção do gráfico de uma função afim com o eixo **y**

2. Resposta pessoal. Possível resposta: se a interseção de toda reta paralela ao eixo **y** com o gráfico ocorrer em um único ponto, trata-se de uma função. Caso a interseção ocorra em dois ou mais pontos, o gráfico não representa uma função.

## Explorando o que estudei

Anote no caderno

**1.** Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo?

**2.** Como é possível verificar se certo gráfico representa uma função?

**3.** Quais as características de uma função linear? A função linear pode ser escrita na forma $f(x) = ax$, com $a \neq 0$, e seu gráfico corresponde a uma reta que passa pela origem.

**4.** O que representa a abscissa do ponto onde o gráfico de uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, intersecta o eixo **x**? E a ordenada do ponto onde o gráfico intersecta o eixo **y**? zero da função; coeficiente **b**

**5.** Para construir o gráfico de uma função afim é preciso definir apenas dois pontos. Essa afirmação é verdadeira? Justifique. sim; Espera-se que os alunos justifiquem que o gráfico de uma função afim é uma reta, e toda reta é definida por dois pontos.

**6.** Quando uma função afim é decrescente? E quando ela é crescente?
Espera-se que os alunos respondam que é decrescente quando $a < 0$ e crescente quando $a > 0$.

**Avaliação**

- Utilize a seção **Explorando o que estudei** para avaliar os alunos e identificar quais habilidades eles desenvolveram no estudo desse capítulo. Para isso, observe-os enquanto respondem as questões propostas e, caso julgue necessário, faça uma revisão dos conteúdos antes de prosseguir para o próximo capítulo. Essa avaliação oportuniza refletir sobre as ações realizadas durante as aulas com a intenção de confirmá-las ou modificá-las, de maneira a atender as necessidades dos alunos.

Esse capítulo trabalhará com os alunos a compreensão do conceito de funções quadráticas e a identificação dos termos associados a elas, além de capacitá-los a escrever leis de formação.

Os estudos prosseguirão de modo a habilitar os alunos a construir gráficos, determinar os zeros de função quadrática e as coordenadas do vértice da parábola.

- Essas páginas de abertura buscam apresentar algumas informações sobre as modalidades olímpicas de lançamento e arremesso. O objetivo é discutir a trajetória descrita pelos objetos (dardo, peso, disco, martelo), que posteriormente será associada ao gráfico de uma função quadrática com a concavidade voltada para baixo. Com isso, os alunos poderão perceber relações entre o estudo da Matemática e de outras áreas, como o esporte. Uma sugestão de condução do trabalho é propor uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. Essas questões podem ser respondidas individualmente ou em grupos de dois ou três alunos. O tema tratado nessas páginas de abertura será retomado na atividade **31** da página **140**.

# Capítulo 6

# Função quadrática

Patrick Smith/Getty Images

**Atleta alemão Thomas Rohler, no lançamento de dardo no Campeonato Mundial da Associação Internacional de Federações de Atletismo, em Londres, no Reino Unido, em 2017.**

A prática do atletismo envolve de forma aprimorada as ações de correr, saltar e lançar, habilidades naturais do ser humano, sendo por esse motivo chamado de esporte-base. Presente desde os jogos da Grécia antiga, o atletismo permanece como o principal esporte olímpico dos tempos modernos.

Parte das competições olímpicas de atletismo é composta por modalidades de arremessos e lançamentos: peso, disco, martelo e dardo. Nessas modalidades, o princípio básico é lançar o objeto o mais longe possível, impulsionado apenas com os movimentos e a força do próprio corpo.

Provavelmente originados nos movimentos dos caçadores para abaterem suas presas, esses esportes requerem do atleta habilidades como impulso e força, dando ao objeto um movimento com aceleração progressiva e posterior desaceleração até a queda.

Rafael L. Gaion

## Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

- **A** Quais são as atuais modalidades olímpicas de arremesso? A trajetória dos objetos nesses lançamentos descreve uma reta ou uma curva?
- **B** Qual modalidade esportiva está retratada na fotografia?
- **C** Represente, no caderno, a possível trajetória do objeto em um arremesso olímpico, desde o momento do lançamento até sua queda no solo.

**Atletismo**
Veja mais informações sobre o atletismo no *site*: <www.cbat.org.br> (acesso em: 9 ago. 2018)

## Pensando nisso...

- **A** arremesso de peso, lançamento de disco, lançamento de martelo e lançamento de dardo; uma curva
- **B** lançamento de dardo
- **C** Resposta pessoal.

- Ao abordar o item **A**, verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para pesquisarem as atuais modalidades olímpicas de arremesso.
- No item **C**, espera-se que a representação seja parecida com a de uma parábola.

## Relacionando saberes

- O tema abordado nas páginas de abertura possibilita desenvolver um trabalho com o componente curricular **Educação Física**. Verifique a possibilidade de realizar uma atividade conjunta com o professor desse componente, na qual os alunos poderão fazer lançamentos de objetos em local apropriado, simulando os das modalidades olímpicas. Eles deverão observar e registrar a trajetória do objeto nesses lançamentos para, ao final, discutirem as semelhanças e diferenças entre as trajetórias. Outra possibilidade é, antes dos lançamentos, apresentar vídeos de atletas profissionais participando de competições dessa modalidade, a fim de que os alunos identifiquem os movimentos realizados pelos atletas para atingirem melhores resultados.

## BNCC em foco

- As páginas de abertura, além de destacarem o conteúdo abordado no capítulo, colocam em evidência a prática esportiva. Dessa maneira, contempla-se, também, a **Competência geral 8**, habilitando-os a desenvolver o autoconhecimento e o autocuidado por meio de assuntos que promovem a saúde física e emocional, como é o caso da prática de atletismo.

**Objetivos do capítulo**

- Reconhecer funções quadráticas.
- Identificar os termos associados às funções quadráticas.
- Escrever a lei de formação de uma função quadrática.
- Construir gráficos de funções quadráticas.
- Determinar os zeros de uma função quadrática, os pontos de interseção de seu gráfico com o eixo **y** e o vértice da parábola.
- Determinar o valor máximo ou o valor mínimo de uma função quadrática.

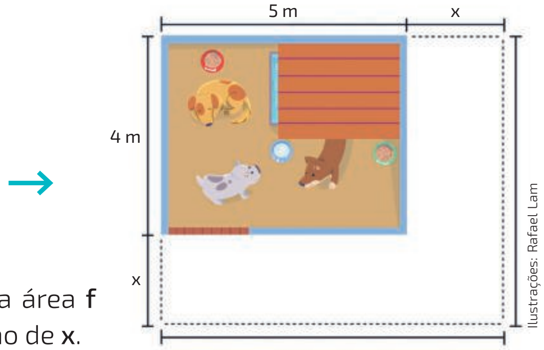
- Explique aos alunos que, para a função ser quadrática, necessariamente deve ocorrer $a \neq 0$.

**BNCC em foco**

- A teoria desenvolvida nesse capítulo, bem como as atividades propostas, contribuirá para que os alunos compreendam que as funções quadráticas são relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numéricas, algébricas e gráficas, e utilizem esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis, conforme orienta a habilidade **EF09MA06**.

# Função quadrática

A figura representa uma região retangular onde foi construído um canil. Para abrigar mais cães, pretende-se ampliar essa região em uma mesma medida, tanto no comprimento quanto na largura.



Ilustrações: Rafael Lam

Podemos expressar a medida da área **f** do canil após a ampliação em função de **x**.

$$f(x) = (5 + x) \cdot (4 + x) = 20 + 5x + 4x + x^2 = x^2 + 9x + 20$$

A expressão obtida é a lei de formação de uma **função quadrática**.

De acordo com essa situação, vamos construir um quadro com algumas possíveis medidas para ampliar o canil.

| Medida, em metros, a ser ampliada (x) | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Medida da área do canil, em metros quadrados (f) | 30 | 42 | 56 | |

Para $x = 4$, que não foi calculado no quadro acima, temos:

$$f(4) = 4^2 + 9 \cdot 4 + 20 = 16 + 36 + 20 = 72$$

Neste caso, se a região do canil for ampliada 4 m, tanto na largura quanto no comprimento, a medida da área após a ampliação será 72 m$^2$.

Chamamos função quadrática toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que:

- **a** é o coeficiente real de $x^2$, com $a \neq 0$.
- **b** é o coeficiente real de **x**.
- **c** é um coeficiente real, também chamado **termo independente**.

Veja as leis de formação das funções quadráticas **f**, **g**, **h** e **m**.

- $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$

  $a = -3$, $b = 5$ e $c = -1$
- $g(x) = 2x^2 - x$

  $a = 2$, $b = -1$ e $c = 0$
- $h(x) = x^2 + 6$

  $a = 1$, $b = 0$ e $c = 6$
- $m(x) = \frac{2}{3}x^2$

  $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$ e $c = 0$

**Material digital**

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **4**, **5** e **6** do 2º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

## Atividades

Anote no caderno

**1.** Quais leis de formação correspondem à de funções quadráticas? $f(x) = 5x^2 + 9x + 7$, $h(x) = x^2 + 1$ e $m(x) = \frac{x^2}{3} - 14x$

- $f(x) = 5x^2 + 9x + 7$
- $t(x) = 2x^3 - 10x^2 - 8$
- $h(x) = x^2 + 1$
- $m(x) = \frac{x^2}{3} - 14x$

**2.** Calcule o valor de $h(x) = 4x^2 - 6x + 3$ para:

**a)** $x = -2$ 31

**b)** $x = 0$ 3

**c)** $x = 3$ 21

**3.** Dados os coeficientes **a**, **b** e **c**, escreva a lei de formação de uma função quadrática na forma $y = ax^2 + bx + c$.

**a)** $a = -8$, $b = 2$ e $c = -4$ $y = -8x^2 + 2x - 4$

**b)** $a = 7$, $b = 0$ e $c = -6$ $y = 7x^2 - 6$

**4.** Verifique quais das leis de formação correspondem à de funções quadráticas. Depois, determine os coeficientes **a**, **b** e **c** de cada uma delas. funções quadráticas: a, c, d

**a)** $f(x) = (x + 5)^2 - 13$ $a = 1$, $b = 10$ e $c = 12$

**b)** $h(x) = 3 \cdot (4 - x) + 9x$

**c)** $m(x) = x \cdot (x + 9) - 7x + 6$ $a = 1$, $b = 2$ e $c = 6$

**d)** $n(x) = (x + 1)^2 + (x - 6)^2$ $a = 2$, $b = -10$ e $c = 37$

**5.** Calcule os valores de **x** na função dada por $g(x) = 2x^2 + 2x - 12$ quando:

**a)** $g(x) = -8$ $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$

**b)** $g(x) = -12$ $x_1 = -1$ e $x_2 = 0$

**c)** $g(x) = 0$ $x_1 = -3$ e $x_2 = 2$

**6.** Em cada item, determine os valores de **m** para que a função, cuja lei de formação está apresentada, seja quadrática.

**a)** $f(x) = mx^2 + x + (m - 1)$ $m \neq 0$

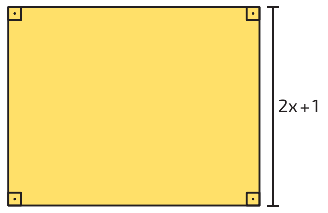
**b)** $g(x) = (m^2 - 25) \cdot x^2 + 2$ $m \neq -5$ e $m \neq 5$

**c)** $p(x) = (m^2 - 6m + 9) \cdot x^2$ $m \neq 3$

**d)** $q(x) = (m^2 + 1) \cdot x^2 - mx - m$ para todo $m \in \mathbb{R}$

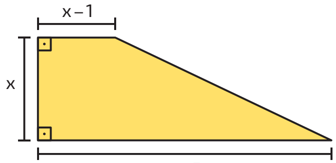
**7.** Para cada figura, escreva uma fórmula que expresse a medida da área **A** em função da medida **x**.

**I )**



$A(x) = 6x^2 + 3x$

**II )**

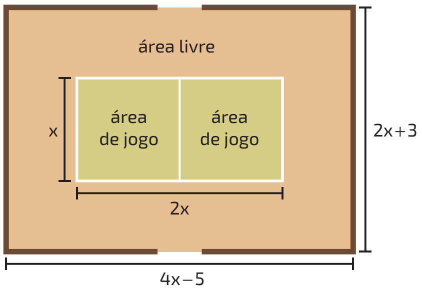


Ilustrações: Ronaldo Lucena

$A(x) = x^2 + 2x$

Agora, calcule a medida da área de cada figura para $x = 4$. I: 108 u.a.; II: 24 u.a.

**8.** O esquema representa a vista superior de uma quadra de vôlei de praia, construída em um terreno retangular.



Ronaldo Lucena

**a)** Escreva uma fórmula que expresse, em função de **x**, a medida da área **y**:

- da quadra. $y = 2x^2$
- da área livre. $y = 6x^2 + 2x - 15$
- do terreno. $y = 8x^2 + 2x - 15$

**b)** Calcule o valor de **x** de maneira que a medida da área livre seja 385 m². $x = 8$ m

**c)** De acordo com o valor de **x** calculado no item **b**, determine a medida da área e das dimensões da quadra e do terreno. quadra: 128 m²; 8 m e 16 m; terreno: 513 m²; 19 m e 27 m

- Para resolver a atividade **5**, retome com os alunos o estudo de equações do 2º grau, conteúdo visto no capítulo **2** desse volume.
- Na atividade **8**, se for necessário, diga aos alunos que, na figura, a área da quadra corresponde ao conjunto das duas áreas de jogo.

- Verifique se os alunos perceberam que, em uma função quadrática do tipo f(x) = a x², o eixo de simetria da parábola coincide com o eixo das ordenadas e passa pelo vértice (0,0). Essa propriedade pode ser demonstrada obtendo-se as coordenadas que passam pelo vértice da parábola desse tipo de gráfico, o que pode ser realizado apenas após o estudo da página **136**.

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2a} = 0$

$y_v = ax_v + bx_v + c =$
$= a \cdot 0^2 + 0 \cdot 0 + 0 = 0$

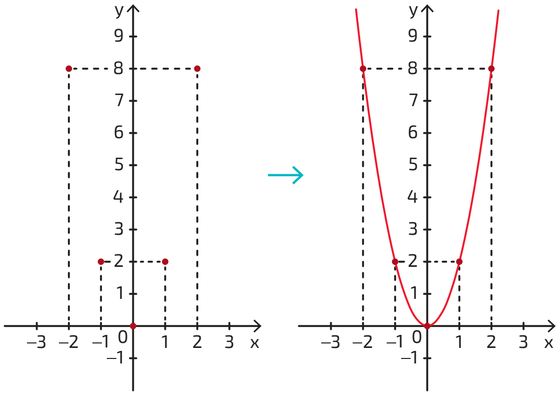
# Gráfico de uma função quadrática

Veja como podemos construir o gráfico da função quadrática dada por $y = 2x^2$.

Inicialmente, construímos um quadro, atribuímos valores a **x** e calculamos os valores correspondentes de **y**. Depois, representamos no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) obtidos.

Podemos atribuir infinitos valores reais a **x** e obter, para cada um, um único valor correspondente para **y**. Assim, entre os pontos indicados no plano cartesiano, podemos indicar infinitos outros pontos a fim de obter o gráfico da função dada por $y = 2x^2$.

| x | $y = 2x^2$ | (x, y) |
|---|---|---|
| −2 | $y = 2 \cdot (-2)^2 = 2 \cdot 4 = 8$ | (−2, 8) |
| −1 | $y = 2 \cdot (-1)^2 = 2 \cdot 1 = 2$ | (−1, 2) |
| 0 | $y = 2 \cdot 0^2 = 2 \cdot 0 = 0$ | (0, 0) |
| 1 | $y = 2 \cdot 1^2 = 2 \cdot 1 = 2$ | (1, 2) |
| 2 | $y = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$ | (2, 8) |



O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada **parábola**.

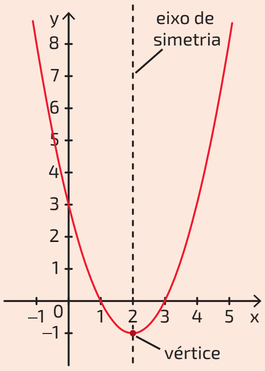
A parábola possui um **eixo de simetria**. No caso do gráfico de $y = 2x^2$, o eixo das ordenadas (**y**) é o eixo de simetria.

O ponto em que o eixo de simetria e a parábola se cruzam é o **vértice** da parábola, cujas coordenadas são indicadas por $V(x_v, y_v)$.

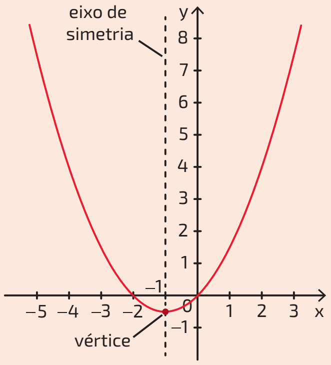
A parábola pode ter a concavidade voltada **para cima** ou **para baixo**, de acordo com o valor do coeficiente **a**.

Se a > 0 (positivo), a concavidade da parábola é voltada para cima.

$f(x) = x^2 - 4x + 3$



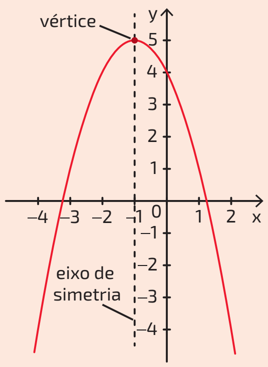
$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$



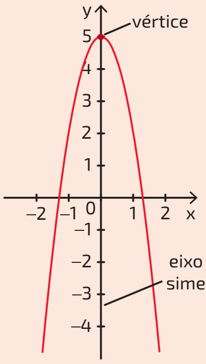
Ilustrações: Ronaldo Lucena

Se a < 0 (negativo), a concavidade da parábola é voltada para baixo.

$h(x) = -x^2 - 2x + 4$



$m(x) = -3x^2 + 5$

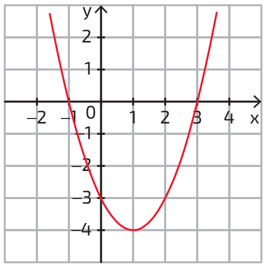


Ilustrações: Ronaldo Lucena

## Atividades

Anote no caderno

**9.** Observe o gráfico da função quadrática e responda.



Ronaldo Lucena

**a)** O coeficiente **a** é menor ou maior do que zero? Justifique. Maior, pois a concavidade da parábola está voltada para cima.

**b)** O eixo de simetria do gráfico coincide com o eixo **y**? não

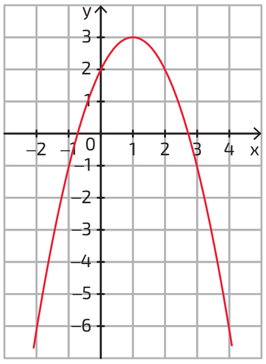
**c)** Esse gráfico corresponde a qual das leis de formação a seguir? $y = x^2 - 2x - 3$

- $y = x^2 - x - 4$
- $y = x^2 - 2x - 3$
- $y = -2x^2 - 3x$
- $y = -x^2 - 3x + 2$

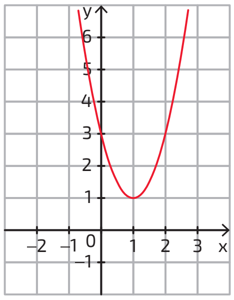
**10.** Associe a lei de formação da função a seu gráfico, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. a-II; b-III; c-I

**a)** $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ **b)** $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 4$ **c)** $h(x) = -x^2 + 2x + 2$

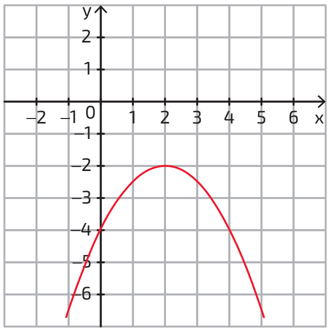
**I )**



**II )**



**III)**



Ilustrações: Ronaldo Lucena

- Após trabalhar a construção do gráfico de uma função quadrática, sugira aos alunos que construam uma figura que lembre uma parábola com alguns segmentos de reta. Para isso, realize a **Atividade complementar** a seguir.

### Atividade complementar

**Parábola com segmentos de reta**

**Materiais**

- régua
- lápis

**Desenvolvimento**

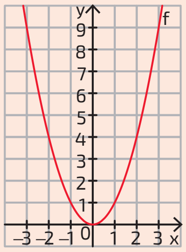
- Distribua para cada aluno uma cópia dos segmentos de reta graduados disponíveis nas **Páginas para reprodução**. Explique a eles que, para construir a figura, basta ligar os pontos com os números iguais.

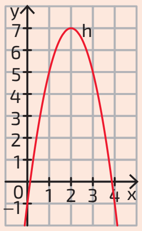
- Na atividade **9**, além de identificar que o coeficiente **a** é positivo (resolução do item **a**), uma maneira de resolver o item **c** é buscar pontos pertencentes ao gráfico e verificar se suas coordenadas satisfazem a lei de formação da função. O ponto (3, 0), por exemplo, satisfaz a lei de formação $y = x^2 - 2x - 3$, que corresponde à resposta do item **c**.
- Para complementar a atividade **10**, peça que os alunos identifiquem por qual abscissa passa o eixo de simetria de cada parábola. Nesse caso, para os gráficos **I**, **II** e **III**, as abscissas são 1, 1 e 2, respectivamente.

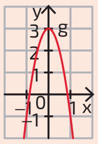
- Reproduza e distribua aos alunos a malha quadriculada disponível nas **Páginas para reprodução**, para que possam construir os gráficos das questões propostas no decorrer do capítulo.

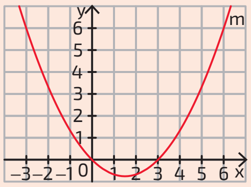
**Respostas**

**12. b)**









Ilustrações: Sergio L. Filho

**11.** Para quais valores de **n** o gráfico da função quadrática dada por:

**a)** $f(x) = nx^2 + 7x - 8$ tem concavidade voltada para cima? $n > 0$

**b)** $g(x) = (n - 2) \cdot x^2 + x + 3$ tem concavidade voltada para baixo? $n < 2$

**c)** $h(x) = (5 - n) \cdot x^2 - 2x + n$ tem concavidade voltada para cima? $n < 5$

**d)** $y = n^2x^2 + 10x - 6$ tem concavidade voltada para baixo? não existe $n \in \mathbb{R}$

**12.** Observe a lei de formação das funções **f**, **h**, **g** e **m**.

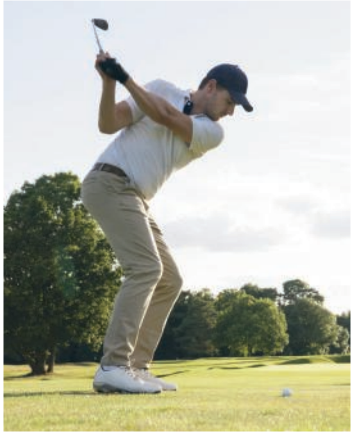
$f(x) = x^2$   $h(x) = -2x^2 + 8x - 1$   $g(x) = -4x^2 + 3$   $m(x) = \frac{x^2}{3} - x$

**a)** Quais dessas funções têm o gráfico com a concavidade voltada para cima? E para baixo? f, m; g, h

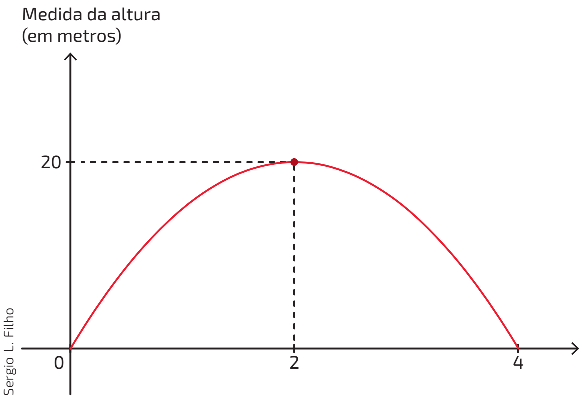
**b)** Utilizando uma malha quadriculada, construa o gráfico de cada uma dessas funções. Respostas nas orientações ao professor.

**c)** Em quais funções o gráfico possui eixo de simetria não coincidente com o eixo **y**? h, m

**13.** Durante uma partida de golfe, um dos jogadores deu uma tacada cuja medida da altura da bola, em metros, em função da medida do tempo, em segundos, pode ser representada pela parábola indicada no gráfico.


SWEETSODA/Shutterstock.com

Jogador de golfe preparando-se para uma tacada.



Sergio L. Filho

**a)** Durante quantos segundos a bola permaneceu no ar após a tacada? 4 s

**b)** Quantos segundos após a tacada a bola atingiu a medida máxima de altura? Qual foi essa medida? 2 s; 20 m

**c)** Qual das fórmulas representa a medida da altura (h) da bola em função da medida do tempo (t) nessa tacada? $h = -5t^2 + 20t$

- $h = 5t^2 + 20t$
- $h = -3t^2 + 20t$
- $h = -5t^2 + 20t$

**d)** Após a tacada, calcule a medida da altura atingida pela bola no instante:

- 1 s. 15 m
- 1,5 s. 18,75 m
- 2,2 s. 19,8 m
- 3 s. 15 m
- 2,5 s. 18,75 m
- 3,8 s. 3,8 m

# Zeros de uma função quadrática

Assim como na função afim, para determinar os zeros de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos de obter os valores de **x** para os quais $f(x) = 0$. Nesse caso, temos de resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Veja, por exemplo, como calculamos os zeros da função **f** dada por $f(x) = x^2 + x - 6$.

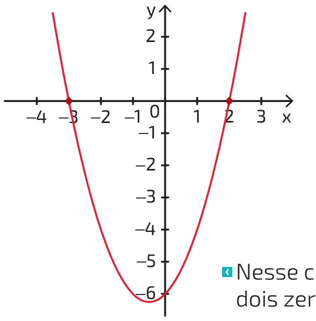
Inicialmente, substituímos f(x) por zero.

$$f(x) = x^2 + x - 6$$
$$0 = x^2 + x - 6$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$

Em seguida, utilizando a fórmula resolutiva, resolvemos a equação do 2º grau.

$$a = 1;\ b = 1;\ c = -6$$
$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Portanto, os zeros da função **f** são $x_1 = 2$ e $x_2 = -3$.



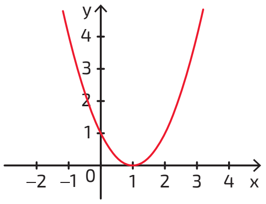
Nesse caso, $\Delta > 0$ e **f** tem dois zeros reais e diferentes.

O gráfico de uma função quadrática intersecta o eixo **x** em um, dois ou nenhum ponto.

Observe outros exemplos.

- Função **g** dada por $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

$$a = 1;\ b = -2;\ c = 1$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+0}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{2-0}{2} = 1 \end{cases}$$



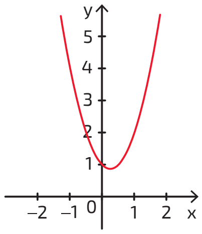
Nesse caso, $\Delta = 0$ e **g** tem dois zeros reais e iguais.

Ilustrações: Ronaldo Lucena

- Função **h** dada por $h(x) = 2x^2 - x + 1$.

$$a = 2;\ b = -1;\ c = 1$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7$$

Como $\Delta < 0$, a equação $h(x) = 0$ não tem raizes reais. Assim, dizemos que **h** não tem zeros reais.



Nesse caso, $\Delta < 0$ e **h** não tem zeros reais.

- Complemente o trabalho com essa página propondo a seguinte questão para os alunos:
  - Calcule os zeros das funções **f** e **g** dadas por $f(x)=12x^2+5x$ e $g(x)=-6x^2+8x+4$.

    Ⓡ Para f(x), temos $x_1=0$ e $x_2=-\frac{5}{12}$; para g(x), temos $x_1=\frac{2-\sqrt{10}}{3}$ e $x_2=\frac{2+\sqrt{10}}{3}$.

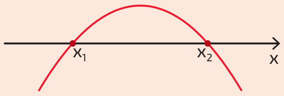
- Após o trabalho com o tópico **Interseção com o eixo y**, proponha aos alunos que se reúnam em duplas e sugira a atividade a seguir. Dessa maneira, contribui-se com a interação dos alunos e com o trabalho em equipe.
  - Determine as coordenadas dos pontos em que a função dada por $g(x) = x^2 + 3x + 2$ intersecta os eixos **x** e **y**.
    R eixo **x**: $(-1, 0)$ e $(-2, 0)$; eixo **y**: $(0, 2)$.

Obtemos os zeros de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ resolvendo a equação $f(x) = 0$. De acordo com o discriminante $(\Delta)$ dessa equação, temos que:

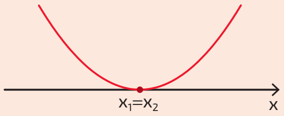
- se $\Delta > 0$, então **f** tem dois zeros reais e diferentes. Nesse caso, a interseção do gráfico de **f** com o eixo **x** ocorre em dois pontos distintos.
- se $\Delta = 0$, então **f** tem dois zeros reais e iguais. Nesse caso, a interseção do gráfico de **f** com o eixo **x** ocorre em um único ponto.
- se $\Delta < 0$, então **f** não tem zeros reais. Nesse caso, não há interseção do gráfico de **f** com o eixo **x**.

$a > 0$ e $\Delta > 0$

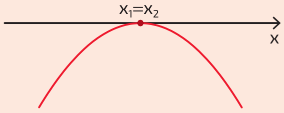
$a < 0$ e $\Delta > 0$



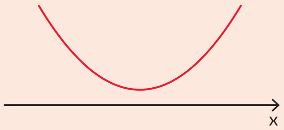
$a > 0$ e $\Delta = 0$



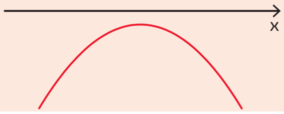
$a < 0$ e $\Delta = 0$



$a > 0$ e $\Delta < 0$



$a < 0$ e $\Delta < 0$



## Interseção com o eixo y

O ponto de interseção do gráfico de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com o eixo **y** tem abscissa igual a zero. Assim, para determinar a ordenada desse ponto, temos de calcular $f(0)$.

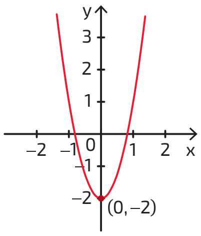
$$f(0) = \underbrace{a \cdot 0^2}_{0} + \underbrace{b \cdot 0}_{0} + c = c$$

Note que a ordenada desse ponto corresponde ao termo independente da função quadrática.

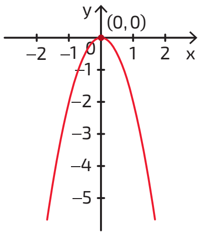
A interseção do gráfico de uma função quadrática com o eixo **y** ocorre em um único ponto de coordenadas $(0, c)$.

Veja alguns exemplos.

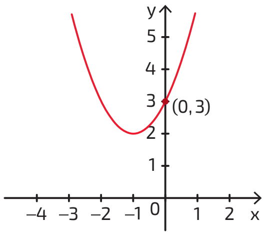
- $h(x) = 3x^2 - 2$



- $g(x) = -2x^2$



- $f(x) = x^2 + 2x + 3$

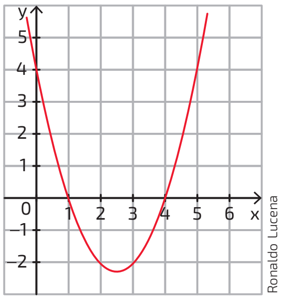


Ilustrações: Ronaldo Lucena

## Atividades

Anote no caderno

**14.** Observe o gráfico de uma função quadrática.



**a)** Quais são as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico da função com o eixo **x**? O que a abscissa desses pontos representa? (1, 0) e (4, 0); os zeros da função

**b)** Quais são as coordenadas do ponto de interseção da parábola com o eixo **y**? (0, 4)

**c)** O eixo de simetria dessa parábola coincide com o eixo **y**? não

**d)** O coeficiente **a** é maior ou menor do que zero? maior

**15.** Considere as funções, cujas leis de formação estão apresentadas.

- $f(x) = -x^2 + 8x - 15$
- $m(x) = -10x^2$
- $g(x) = 3x^2 - 6x - 9$
- $n(x) = -\frac{x^2}{8} + x$

**a)** Determine os zeros de cada função.

**b)** Quais são as coordenadas do ponto de interseção do gráfico de cada função com o eixo **y**? f: (0, –15); g: (0, –9); m: (0, 0); n: (0, 0)

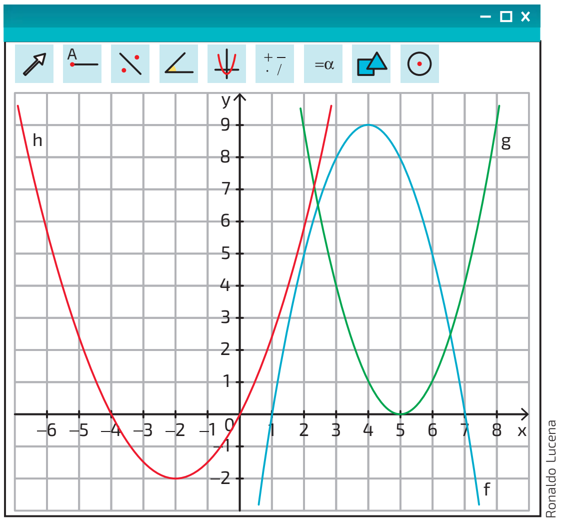
**c)** Escreva os procedimentos que você utilizou para resolver o item **b** desta atividade. Possível resposta: a interseção da parábola com o eixo **y** ocorre no ponto de abscissa zero e ordenada **c** (coeficiente independente).

**16.** Calcule o valor do discriminante, $(\Delta)$ e determine se cada função possui dois zeros reais e diferentes, dois zeros reais e iguais ou não possui zeros reais.

- $p(x) = 9x^2 - 6x + 1$ $\Delta = 0$, dois zeros reais e iguais
- $t(x) = -x^2 - 9$ $\Delta = -36$, não possui zeros reais
- $q(x) = 5x^2 + 10x + 7$ $\Delta = -40$, não possui zeros reais
- $v(x) = \frac{x^2}{4} + 2x$ $\Delta = 4$, dois zeros reais e diferentes

15. a) f: $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$; g: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$; m: $x_1 = x_2 = 0$; n: $x_1 = 0$ e $x_2 = 8$

**17.** Com o auxílio de um programa de computador foram construídos os gráficos das funções **f**, **g** e **h**.



**a)** Para cada função, determine se o coeficiente **a** é menor ou maior do que zero. menor do que zero: f; maior do que zero: g e h

**b)** Quais são as coordenadas do ponto da interseção do gráfico da função **h** com o eixo **y**? (0, 0)

**c)** Quais são os zeros das funções **f** e **g**? f: $x_1 = 1$ e $x_2 = 7$; g: $x_1 = x_2 = 5$

**18.** Calcule o valor de **m** na função **f** dada por $f(x) = (3m - 7) \cdot x^2 + 8x + 2$ de maneira que ela seja quadrática e tenha:

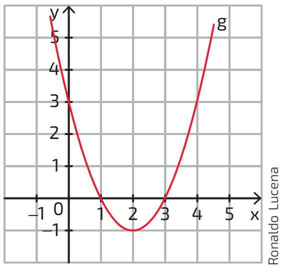
**a)** duas raízes reais e diferentes. $m \neq \frac{7}{3}$ e $m < 5$

**b)** duas raízes reais e iguais. $m = 5$

**c)** não possua raízes reais. $m > 5$

**19.** No plano cartesiano está representado o gráfico da função **g**, cujo coeficiente **a** é igual a 1.

Determine os valores dos coeficientes **b** e **c** e escreva a lei de formação da função **g**.



b = –4, c = 3; $g(x) = x^2 - 4x + 3$

- Veja uma possível resolução para o desafio proposto na atividade **19**:

Como o gráfico da função **g** intersecta o eixo **y** no ponto (0, 3), temos que c = 3. Assim, $g(x) = x^2 + bx + 3$. Como o ponto (1, 0) pertence ao gráfico, temos:

$g(1) = 0$

$1^2 + b \cdot 1 + 3 = 0$

$b = -4$

Portanto, $b = -4$, $c = 3$ e $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

### Avaliação

- Realize uma avaliação com os alunos propondo a **Atividade complementar** acima. Enquanto eles resolvem as questões, observe e anote as dificuldades apresentadas por eles para, depois, refletir sobre quais aspectos da dinâmica das aulas podem contribuir para sanar essas dificuldades.

### Atividade complementar

- A medida da temperatura de certo componente eletrônico varia de acordo com a quantidade de horas que ele permanece em funcionamento. Para períodos de 3 a 15 horas, a medida da temperatura **y**, em graus Celsius (°C), varia segundo a função quadrática dada por $y(t) = -0,4t^2 + 12t$, na qual **t** representa a medida do tempo em horas.

**a)** Qual a medida da temperatura desse componente em 3 h de funcionamento? E em 8 h?

R $y(3) = -0,4 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 = 32,4$; 32,4 °C

$y(8) = -0,4 \cdot 8^2 + 12 \cdot 8 = 70,4$; 70,4 °C

**b)** Considerando $y(t) = 89,6$, obtemos a equação $89,6 = -0,4t^2 + 12t$, cuja solução é $t_1 = 14$ e $t_2 = 16$. Nesse caso, qual desses valores de **t** representa a medida do tempo em que o componente deve permanecer em funcionamento para que sua temperatura seja 89,6 °C? Justifique.

R 14 h, pois a função admite valores para as medidas de tempo entre 3 e 15 horas.

**c)** Durante quantas horas esse componente deve permanecer em funcionamento para que a medida da sua temperatura seja igual a 80 °C?

R $80 = -0,4t^2 + 12t$

$0,4t^2 - 12t + 80 = 0$

$t^2 - 30t + 200 = 0$

$$\begin{cases} t_1 = 10 \\ t_2 = 20 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

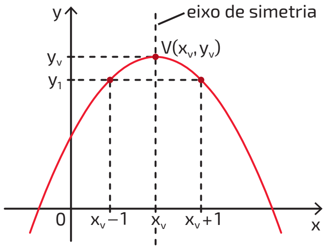
- Portanto, o componente deve permanecer em funcionamento durante 10 h.

# Coordenadas do vértice

Em muitas situações é importante conhecer as coordenadas do vértice de uma parábola, como na construção do gráfico de uma função quadrática.

Vamos deduzir uma fórmula que permita determinar a abscissa do vértice $(x_v)$ de uma parábola.

Sabemos que a parábola correspondente ao gráfico de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem um eixo de simetria, que passa pelo vértice da parábola.



Como as abscissas $x_v - 1$ e $x_v + 1$ estão a uma mesma medida da distância de $x_v$, então elas estão associadas à mesma ordenada. Assim, temos:

$$f(x_v - 1) = f(x_v + 1)$$

$$a \cdot (x_v - 1)^2 + b \cdot (x_v - 1) + c = a \cdot (x_v + 1)^2 + b \cdot (x_v + 1) + c$$

$$\cancel{ax_v^2} - 2ax_v + \cancel{a} + \cancel{bx_v} - b + \cancel{c} = \cancel{ax_v^2} + 2ax_v + \cancel{a} + \cancel{bx_v} + b + \cancel{c}$$

$$-2ax_v - b = 2ax_v + b$$

$$-2ax_v - 2ax_v = b + b$$

$$-4ax_v = 2b$$

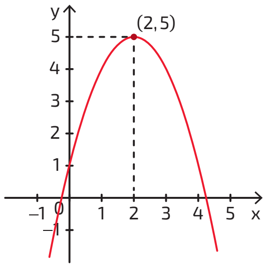
$$x_v = \frac{2b}{-4a} = -\frac{b}{2a}$$

Podemos determinar as coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$ do gráfico de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ utilizando a fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$. Obtendo $x_v$, o substituímos em $f(x)$ e calculamos $y_v$, isto é, $y_v = ax_v^2 + bx_v + c$.

Veja, por exemplo, como podemos obter as coordenadas do vértice do gráfico da função **f** dada por $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

- $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = -\frac{4}{-2} = 2$
- $y_v = -x_v^2 + 4x_v + 1 = -2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = -4 + 8 + 1 = 5$

Portanto, as coordenadas do vértice do gráfico de **f** são V(2, 5).



Ilustrações: Ronaldo Lucena

- Após trabalhar as coordenadas do vértice da parábola, se achar conveniente, mostre aos alunos como determinar uma fórmula que permite calcular a ordenada do vértice por meio dos coeficientes de uma função quadrática. Para isso, basta substituir a abscissa do vértice $x_v = -\frac{b}{2a}$ em $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$y_v = f(x_v) =$

$= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) +$

$+ c = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c =$

$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c =$

$= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, segue:

$$y_v = \frac{-\overbrace{(b^2 - 4ac)}^{\Delta}}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

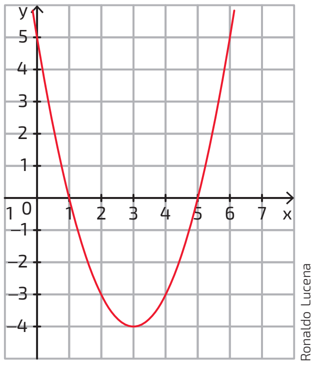
**Material digital**

- Após o trabalho com o tópico **Coordenadas do vértice**, verifique a possibilidade de aplicar a **Sequência didática 6** disponibilizada no material digital dessa coleção, elaborada com objetivo de desenvolver a habilidade **EF09MA06**. As atividades propostas nessa sequência buscam explorar o reconhecimento de uma função quadrática, a construção de seu gráfico e a identificação de seu vértice, além de apresentar situações que envolvem esse tipo de função.

## Atividades

Anote no caderno

**20.** Observe o gráfico da função **f** dada por $f(x) = x^2 - 6x + 5$.



Ronaldo Lucena

Quais são as coordenadas:

**a)** dos pontos de interseção da parábola com o eixo **x**? (1, 0) e (5, 0)

**b)** do ponto de interseção da parábola com o eixo **y**? (0, 5)

**c)** do vértice da parábola? (3, −4)

**d)** do ponto de interseção do eixo de simetria da parábola com o eixo **x**? (3, 0)

**21.** Sem construir o gráfico, determine as coordenadas do vértice da parábola da função dada por:

**a)** $f(x) = x^2 - 2x + 5$ (1, 4)

**b)** $g(x) = 3x^2 + 12x + 8$ (−2, −4)

**c)** $h(x) = -2x^2 - 4x + 7$ (−1, 9)

**d)** $m(x) = -2x^2 - 3$ (0, −3)

**e)** $n(x) = x^2 + 5x - 8$ $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{57}{4}\right)$

**22.** Para cada uma das funções da atividade anterior, resolva.

**a)** Quais das funções têm a concavidade da parábola voltada para cima? E para baixo? para cima: f, g, n; para baixo: h, m

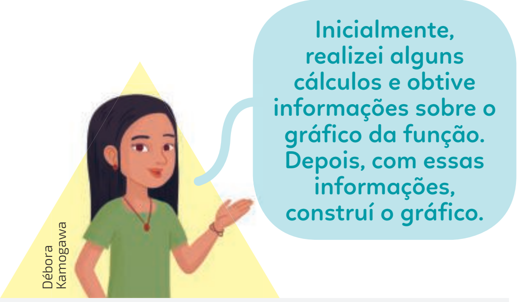
**b)** Qual é a ordenada do ponto de interseção do eixo de simetria da parábola com o eixo **x**? 0

**c)** Determine as coordenadas do ponto de interseção da parábola com o eixo **y**.
f: (0, 5), g: (0, 8), h: (0, 7), m: (0, −3), n: (0, −8)

**23.** Determine o valor de **n**, na função quadrática dada por $g(x) = nx^2 + (n + 1) \cdot x + 5$, sabendo que o vértice da parábola correspondente tem coordenadas (−1, 4).
n = 1

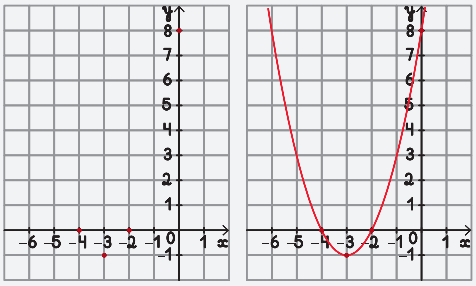
**24.** As coordenadas do vértice do gráfico da função quadrática $h(x) = ax^2 + 3x + c$ são (6, 0). Qual é o valor do coeficiente **a** e do coeficiente **c** dessa função? $a = -\frac{1}{4}$ e $c = -9$

**25.** Observe como Amanda construiu o gráfico da função **f** dada por $f(x) = x^2 + 6x + 8$.



Débora Kamogawa

- $a > 0$ (concavidade voltada para cima)
- (0,8) (ponto de interseção com o eixo y)
- $\Delta > 0$ (dois zeros reais e diferentes)
- $x_1 = -4$ e $x_2 = -2$ (zeros da função)
- (−3, −1) (vértice)



Ronaldo Lucena

De maneira similar, construa o gráfico da função dada por: Respostas nas orientações ao professor.

**a)** $y = -x^2 - 2x + 3$

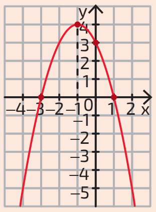
**b)** $y = 3x^2 - 12x + 12$

**c)** $y = -x^2 + 8x - 7$

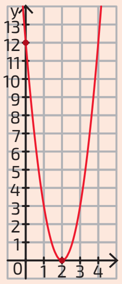
**d)** $y = -\frac{x^2}{4} + 4$

### Respostas

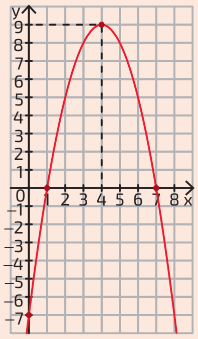
**25. a)**



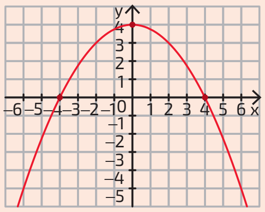
**b)**



**c)**



**d)**

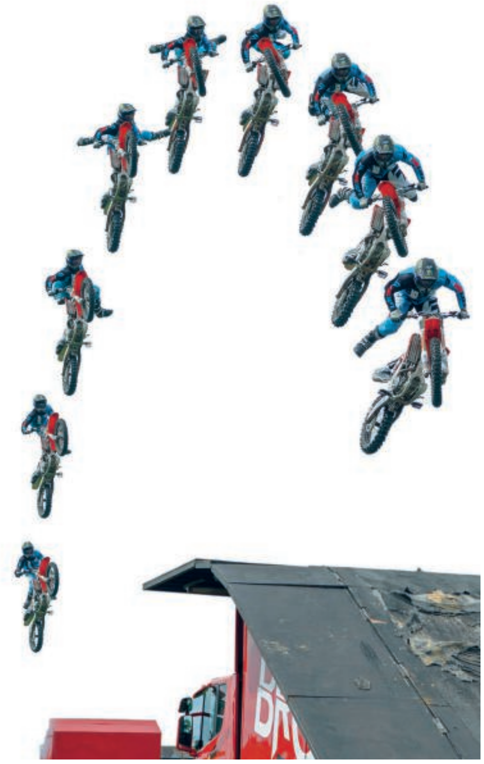


Ilustrações: Sergio L. Filho

# Valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática

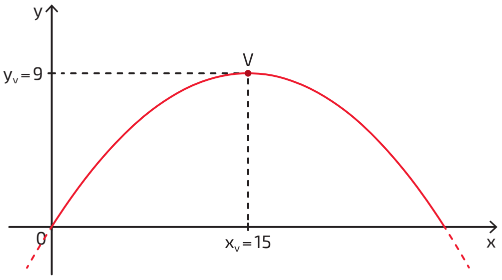
O *motocross freestyle* é uma modalidade na qual se deve saltar de motocicleta, partindo de uma rampa e aterrissando em outra, executando manobras no percurso.

Certo salto realizado por um piloto de *motocross* descreveu uma trajetória que pode ser representada pela função quadrática dada por $y = -0{,}04x^2 + 1{,}2x$, em que **x** indica a medida da distância horizontal percorrida e **y**, a medida da altura que a motocicleta atingiu no decorrer do salto, conforme o gráfico a seguir.



Stephen Barnes/Sport/Alamy/Fotoarena

Composição de imagens representando a trajetória do salto de um motociclista no *motocross freestyle*.

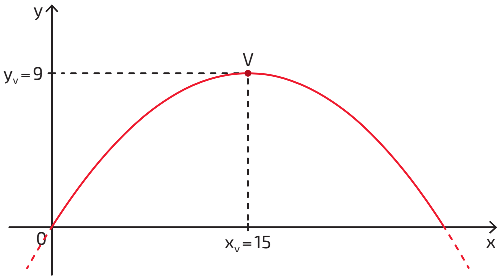


No gráfico dessa função, o vértice $V(x_v, y_v)$ é **ponto de máximo**, sendo que $y_v$ é chamado **valor máximo** da função, que, nesse caso, indica a medida da altura máxima atingida no salto.

Vamos calcular $x_v$ e $y_v$.

Na função dada por $y = -0{,}04x^2 + 1{,}2x$, temos que os coeficientes são: $a = 0{,}04$, $b = 1{,}2$ e $c = 0$.

- $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1{,}2}{2 \cdot (-0{,}04)} = -\frac{1{,}2}{-0{,}08} = 15$
- $y_v = -0{,}04x_v^2 + 1{,}2x_v = -0{,}04 \cdot 15^2 + 1{,}2 \cdot 15 = -9 + 18 = 9$

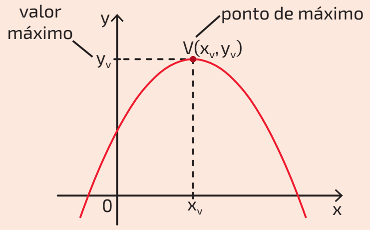


Ilustrações: Ronaldo Lucena

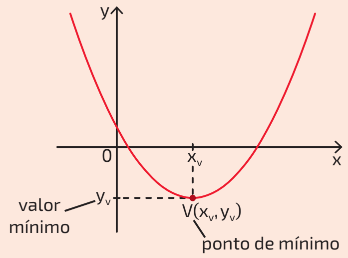
Portanto, a medida da altura máxima atingida pelo piloto no salto foi 9 m, o que ocorreu após o percurso de 15 m em relação à horizontal.

No material digital audiovisual dessa coleção disponibilizamos um vídeo que pode ser utilizado como ferramenta para enriquecer o trabalho com os assuntos abordados até o momento, relacionados ao estudo da função quadrática. As orientações de uso desse recurso estão disponíveis no material digital.

O vértice $V(x_v, y_v)$ é **ponto de máximo** da parábola quando sua concavidade é voltada para baixo, ou seja, quando o coeficiente **a** é menor do que zero. Dizemos ainda que $y_v$ é o **valor máximo** da função quadrática.



Quando a concavidade da parábola é voltada para cima, ou seja, quando o coeficiente **a** é maior do que zero, o vértice é **ponto de mínimo** da parábola e $y_v$ é o **valor mínimo** da função quadrática.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

## Atividades

Anote no caderno

**26.** Analisando o coeficiente **a** de cada função quadrática, cuja lei de formação é apresentada, determine quais possuem ponto de máximo e quais possuem ponto de mínimo. ponto de máximo: g, m; ponto de mínimo: f, h

- $f(x) = 3x^2 - 15x$
- $h(x) = 8x^2$
- $g(x) = -7x^2 - 3x + 12$
- $m(x) = -5x^2 + 8$

**27.** A seguir é apresentada a lei de formação das funções **h**, **f**, **g** e **m**.

**a)** $h(x) = 4x^2 + 2x$ ponto de mínimo: $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

**b)** $f(x) = -5x^2$ ponto de máximo: (0, 0)

**c)** $g(x) = 7x^2 + 6x + 5$ ponto de mínimo: $\left(-\frac{3}{7}, \frac{26}{7}\right)$

**d)** $m(x) = -6x^2 + 8x + 4$ ponto de máximo: $\left(\frac{2}{3}, \frac{20}{3}\right)$

Determine se o gráfico de cada uma dessas funções possui ponto de máximo ou ponto de mínimo. Depois, escreva as coordenadas desse ponto.

**28.** O gráfico da função dada por $g(x) = 2mx^2 - 3mx - 1$ possui ponto de mínimo com coordenadas $\left(\frac{3}{4}, -\frac{13}{4}\right)$.

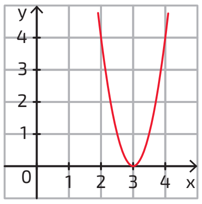
**a)** Qual é o valor de **m**? 2

**b)** Construa o gráfico da função **g**.
Resposta nas orientações ao professor.

**29.** Sabendo que 21 é o valor máximo da função quadrática $g(x) = px^2 - 8px + 5$, calcule o valor de **p**. −1

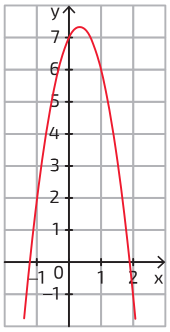
**30.** Observe o gráfico da função:

- **g**, dada por $g(x) = 4x^2 - 24x + 36$



b) (3, 0)
c) 0

- **m**, dada por $m(x) = -3x^2 + 2x + 7$



b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{22}{3}\right)$
c) $\frac{22}{3}$

Ilustrações: Ronaldo Lucena

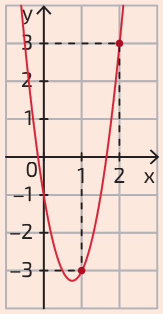
**a)** Qual dos gráficos tem ponto de máximo? E ponto de mínimo? m; g

**b)** Determine as coordenadas do ponto de máximo ou do ponto de mínimo do gráfico das funções **g** e **m**.

**c)** Qual é o valor máximo ou o valor mínimo de cada uma das funções?

**Resposta**

**28. b)**



Sergio L. Filho

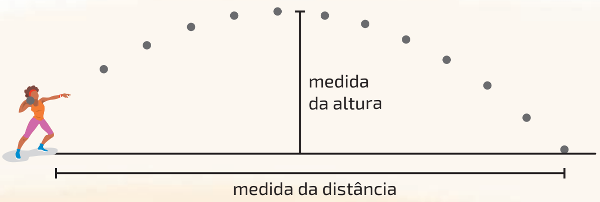
## BNCC em foco

- A atividade **31** permite que os alunos enfrentem situações-problema em múltiplos contextos, incluindo situações imaginadas, expressem suas respostas e sintetizem conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens. Dessa maneira, contempla-se a **Competência específica de Matemática 6**.
- Aproveite esse momento para conversar com os alunos sobre a importância da prática habitual de atividades físicas e, se possível, sob a supervisão de um profissional. Estabeleça uma relação com o tema contemporâneo **Saúde** e destaque alguns dos benefícios que a atividade física traz, como o fortalecimento do sistema imunitário e dos ossos, a melhoria da circulação sanguínea, a diminuição do risco de doenças cardíacas e o aumento dos níveis de humor e de autoestima.

## Matemática em destaque

**31.** Nas páginas **126** e **127**, conhecemos algumas modalidades esportivas de arremesso, entre elas o arremesso de peso. Essa prova é disputada em Jogos Olímpicos modernos desde a sua primeira edição, em 1896, na cidade de Atenas, na Grécia.

Nas competições masculinas, a massa da esfera de metal lançada mede 7,26 kg, e, nas femininas, 4 kg. Ao ser lançada, ela descreve uma trajetória que pode ser representada por uma parábola.



Em certo arremesso, a trajetória aproximada da esfera foi descrita por parte do gráfico da função quadrática dada por $y = -\frac{x^2}{20} + x$, no qual **x** representa a medida da distância, e **y**, a medida da altura, em metros.

Para o arremesso descrito acima, resolva.

**a)** Construa um quadro e registre a medida da altura da esfera, em metros, para **x** inteiro, maior do que 5 e menor do que 15.

**b)** Calcule a medida da altura máxima atingida pela esfera. 5 m

a)

| x | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 4,2 m | 4,55 m | 4,8 m | 4,95 m | 5 m | 4,95 m | 4,8 m | 4,55 m | 4,2 m |

Carmen Martinez

## Relacionando saberes

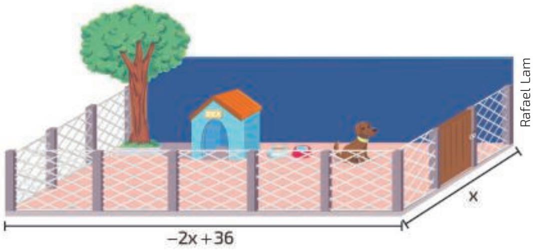
- A atividade **Matemática em destaque** retoma o assunto das páginas de abertura e, também, permite uma relação com o componente curricular **Educação Física**. Para complementar as informações sobre a modalidade de arremesso de peso, conte com o auxílio do professor responsável por esse componente e proponha aos alunos que pesquisem, em grupos de três ou quatro integrantes, os movimentos utilizados pelos atletas profissionais no lançamento, os recordes olímpicos feminino e masculino e os atletas brasileiros de maior expressão nesse esporte. Se for conveniente, procurem juntos alguns vídeos em que seja possível observar a trajetória do peso no lançamento.

**32.** Considere um retângulo cujas medidas das dimensões, em centímetros, são dadas por **x** e $-2x + 16$.

**a)** Determine o valor de **x**, de maneira que a medida da área do retângulo seja máxima. $x = 4$

**b)** De acordo com o valor de **x** obtido no item **a**, determine a medida das dimensões do retângulo. 4 cm e 8 cm

**33.** Para construir um cercado retangular, Mário dispõe de 36 m de tela. Na construção, ele pretende utilizar toda a tela e aproveitar um muro como um dos lados do cercado, como mostra a figura.



**a)** Escreva uma fórmula que relacione a medida da área **A** do cercado em função da medida **x** indicada. $A(x) = 36x - 2x^2$

**b)** Construa o gráfico da função cuja lei de formação você escreveu no item **a**. Resposta nas orientações ao professor.

**c)** Quais devem ser as dimensões desse cercado para que se possa obter a maior medida da área? 9 m e 18 m

**34.** Uma indústria, após realizar um estudo detalhado, obteve a função **f** dada por $f(x) = 0{,}3x^2 - 60x + 5\,000$ para calcular, em reais, o custo f(x) quando são produzidas **x** unidades de certa peça.

**a)** Qual é o custo para produzir 50 dessas peças? R$ 2 750,00

**b)** Quantas unidades dessas peças devem ser produzidas para obter o custo mínimo? Qual é o custo mínimo na produção dessas peças? 100 peças; R$ 2 000,00

## Explorando o que estudei

Anote no caderno

**1.** Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? função quadrática, gráfico de uma função quadrática, zeros de uma função quadrática, interseção com o eixo **y**, coordenadas do vértice e valor máximo e valor mínimo de uma função quadrática

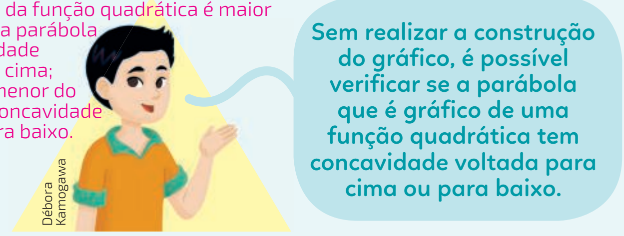
**2.** O que representa a abscissa do ponto de interseção do gráfico de uma função quadrática com o eixo **x**? E o que representa a ordenada do ponto de interseção do gráfico com o eixo **y**? zero da função; coeficiente **c**

**3.** Qual é o tipo de função cujo gráfico é uma parábola? função quadrática

**4.** O que caracteriza uma função quadrática? Possível resposta: toda função que pode ser escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

**5.** A afirmação feita por Lucas é verdadeira? Justifique sua resposta.

sim; Possível resposta: quando o coeficiente **a** da função quadrática é maior do que zero, a parábola tem concavidade voltada para cima; quando **a** é menor do que zero, a concavidade é voltada para baixo.



**6.** Na função **f** dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$, como é chamado o maior valor que **y** pode assumir? máximo da função

- Veja uma possível resolução do desafio **33**:

  **a)** $A(x) = x \cdot (36 - 2x) =$
  $= 36x - 2x^2$

  **c)** A maior medida de área é obtida para $x_v = 9$. Assim, as dimensões são:
  - 9 m
  - $36 - 2 \cdot 9 = 18$; 18 m

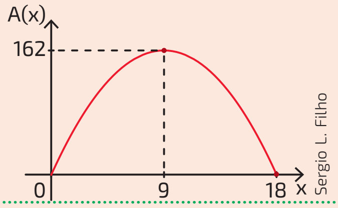
### Avaliação

- Utilize a seção **Explorando o que estudei** para fazer uma avaliação com os alunos. Observe como eles respondem às questões propostas procurando identificar as possíveis dificuldades apresentadas. Caso julgue necessário, faça um resumo do conteúdo estudado e, além disso, reflita sobre as práticas empregadas no trabalho com esse capítulo, a fim de modificá-las ou reformulá-las para os próximos capítulos.

- Ao trabalhar com a questão **5**, aproveite a oportunidade e explique aos alunos que muitas características da parábola correspondente ao gráfico de uma função quadrática podem ser determinadas sem que se esboce esse gráfico. Analisando o coeficiente **a**, por exemplo, podemos verificar se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo. Já em relação ao discriminante da equação, podemos obter a quantidade de pontos em que a parábola intersecta o eixo das abscissas.

### Resposta

**33. b)**



### Material digital

- Antes de prosseguir com os estudos e, se julgar oportuno, avalie a aprendizagem dos alunos em relação a algumas habilidades trabalhadas no decorrer desse bimestre. O material digital apresenta uma proposta de avaliação para o 2º bimestre que pode ser utilizada neste momento como ferramenta auxiliar do processo de ensino e aprendizagem.

# Capítulo 7

## Medidas de comprimento e medidas em informática

PowerUp/Shutterstock.com

Ao utilizar um serviço de armazenamento em nuvem, diferentes dispositivos podem acessar os mesmos arquivos armazenados em um servidor remoto. Uma pessoa com uma conta nesse tipo de serviço pode ter disponível de gigabaites (GB) a terabaites (TB) de espaço para o armazenamento de arquivos.

Nesse capítulo, os alunos serão capacitados a reconhecer diferentes unidades de medidas, como as Unidades Astronômicas e o Ano-Luz, referentes a grandes medidas de comprimento, e o micrômetro, que se refere a pequenas medidas de comprimento, além de resolver e elaborar problemas que as envolvam.

Do mesmo modo, os estudos avançam para unidades de medida de capacidade de armazenamento e outras unidades de medida em informática, estimulando os alunos a identificar, reconhecer e realizar conversões com tais unidades.

- As páginas de abertura trazem algumas informações sobre o sistema de armazenamento de arquivos em nuvem. Com a apresentação e as questões propostas, espera-se identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre informática, principalmente em relação às unidades de medida de capacidade de armazenamento de dados. O trabalho com essas páginas pode ser conduzido por meio de uma leitura coletiva do texto e, em seguida, pela proposição de um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. Durante a conversa, questione se eles possuem uma conta em algum serviço de armazenamento em nuvem e, em caso afirmativo, peça para relatarem os procedimentos necessários para armazenar um arquivo e quais as vantagens em utilizar esse serviço. Outra possibilidade é, em um laboratório de informática, criar uma conta em um serviço de armazenamento em nuvem (há diversos gratuitos) e armazenar alguns arquivos, observando o quanto eles ocupam da medida da capacidade total. As questões podem ser respondidas individualmente ou em duplas, de maneira que os alunos interajam e troquem experiências.

Imagine começar a escrever um trabalho escolar no computador de casa, incluir mais informações pelo *tablet* enquanto aguarda o atendimento do dentista e, por fim, terminá-lo utilizando o telefone celular. Pois então, isso é totalmente possível com o chamado armazenamento em nuvem.

Para usá-lo, é preciso ter um dispositivo conectado à internet, como celular, *tablet*, *notebook* ou computador, e uma conta virtual em uma empresa que ofereça esse serviço. A ideia é que o usuário possa salvar na "nuvem", e manter bem protegido, qualquer tipo de arquivo, como fotografias, vídeos, textos, planilhas, entre outros, e acessá-los por meio de qualquer outro dispositivo com acesso à internet.

Apesar do nome sugestivo, essa tecnologia não deixa os arquivos espalhados. Todos eles ficam gravados e protegidos em um servidor com grande capacidade de armazenamento.

## Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

**A** Que tipos de arquivo você considera útil armazenar? Como você expressaria a quantidade necessária de espaço de armazenamento para o seu uso?

**B** Se uma pessoa tiver 2 GB de espaço disponível na "nuvem", ela poderá guardar arquivos que, juntos, totalizam 500 MB?

**C** A chamada computação em nuvem permite mais do que o simples armazenamento de informações. Pesquise outra aplicação dessa tecnologia.

## Pensando nisso...

**A** Resposta pessoal.

**B** sim

**C** Possível resposta: a computação em nuvem permite o uso de diversos tipos de programas que são executados em servidores remotos, como processadores de textos, planilhas, editores de imagens etc.

- Na questão **A**, espera-se que os alunos expressem situações em que o armazenamento em nuvem é útil, assim como outras medidas de armazenamento que conheçam.
- O trabalho com a questão **B** pode ser retomado após o estudo das páginas **150** e **151** do capítulo, em que são apresentadas e discutidas algumas unidades de medida de capacidade de armazenamento e a conversão entre elas.

## Material digital

- No material digital, é apresentado um **Plano de desenvolvimento** para o 3º bimestre capaz de auxiliar nos planejamentos e desenvolvimentos das aulas, em que são descritos em um quadro os objetivos específicos, os objetos de conhecimento e as habilidades específicas **EF09MA01**, **EF09MA02**, **EF09MA04**, **EF09MA10**, **EF09MA12**, **EF09MA13**, **EF09MA14**, **EF09MA16** e **EF09MA18**, previstas para os capítulos **7**, **8** e **9** sugeridos para esse período. Além disso, são elencadas as principais práticas didático-pedagógicas e atividades recorrentes previstas para o conteúdo abordado nesse bimestre.

**Objetivos do capítulo**

- Reconhecer e empregar medidas de comprimento muito grandes ou muito pequenas.
- Resolver e elaborar problemas com notação científica.
- Identificar grandezas em informática.
- Reconhecer e utilizar unidades de medida em informática.
- Realizar conversões de unidades de medida em informática.

**Material digital**

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **7**, **8** e **9** do 3º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

# Medidas de comprimento

Você já estudou em anos anteriores algumas unidades de medidas de comprimento. Agora vamos estudar aquelas usadas para expressar medidas de comprimento muito grandes ou muito pequenas.

## Medindo grandes comprimentos

Em situações cotidianas é comum utilizarmos medidas com poucos dígitos, mas para medirmos a distância média aproximada entre alguns planetas e o Sol, por exemplo, são necessários muitos dígitos. Veja a seguir algumas dessas medidas.

| Planeta | Medida aproximada da distância ao Sol (em km) |
|---|---|
| Mercúrio | 57 900 000 |
| Vênus | 108 200 000 |
| Terra | 149 600 000 |
| Marte | 227 900 000 |
| Júpiter | 778 300 000 |
| Saturno | 1 427 000 000 |
| Urano | 2 870 700 000 |

NASA. **Planet Compare**. Disponível em: <https://solarsystem.nasa.gov/planet-compare>. Acesso em: 21 ago. 2018.

Podemos expressar essas medidas usando a **notação científica**. Por exemplo:

- Vênus: $108\,200\,000 \text{ km} = 1{,}082 \cdot 10^8 \text{ km}$
- Marte: $227\,900\,000 \text{ km} = 2{,}279 \cdot 10^8 \text{ km}$
- Urano: $2\,870\,700\,000 \text{ km} = 2{,}8707 \cdot 10^9 \text{ km}$

**Utilizando a notação científica, escreva no caderno as medidas das distâncias médias, aproximadas, entre os outros planetas e o Sol, conforme indicado no quadro.** Mercúrio: $57\,900\,000 \text{ km} = 5{,}79 \cdot 10^7$ km; Terra: $149\,600\,000 \text{ km} = 1{,}496 \cdot 10^8$ km; Júpiter: $778\,300\,000 \text{ km} = 7{,}783 \cdot 10^8$ km; Saturno: $1\,427\,000\,000 \text{ km} = 1{,}427 \cdot 10^9$ km

Para facilitar o trabalho com medidas de grandes distâncias, os cientistas criaram uma unidade adequada para medir distâncias dentro do Sistema Solar: a **unidade astronômica** (UA). Uma UA corresponde à medida da distância média entre a Terra e o Sol.

$$1 \text{ UA} = 149\,600\,000 \text{ km} = 1{,}496 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Veja como podemos converter a medida da distância média, aproximada, de quilômetros para UA entre Saturno e o Sol.

1º Primeiro, escrevemos a medida da distância média, aproximada, entre Saturno e o Sol em notação científica.

$$1\,427\,000\,000 \text{ km} = 1{,}427 \cdot 10^9 \text{ km}$$

2º Dividimos a medida da distância obtida, em notação científica, pela medida correspondente em quilômetros a 1 UA, também em notação científica.

$$\frac{1{,}427 \cdot \overset{10}{\cancel{10^9}}}{1{,}496 \cdot \underset{1}{\cancel{10^8}}} = \frac{1{,}427 \cdot 10}{1{,}496} = \frac{14{,}27}{1{,}496} \simeq 9{,}5$$

Portanto, a medida da distância média, aproximada, entre Saturno e o Sol é de 9,5 UA.

**Escreva em UA a medida da distância média, aproximada, entre Mercúrio e o Sol e entre Vênus e o Sol.** Mercúrio: 0,387 UA; Vênus: 0,723 UA

**BNCC em foco**

- As atividades propostas nesse capítulo levarão os alunos a resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações. Com isso, serão estimulados também a reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como medida de distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou células, medida da capacidade de armazenamento de computadores, entre outras. Dessa maneira, contemplam-se as habilidades **EF09MA04** e **EF09MA18**.

Para medir a distância entre as estrelas e o Sol ou entre outras galáxias e a Terra, utiliza-se como unidade de medida o **ano-luz** (AL); que é a unidade de medida da distância percorrida pela luz em um ano.

$$1 \text{ AL} \simeq 9{,}46 \cdot 10^{12} \text{ km}$$


JPL-Caltech/NASA

Galáxia de Andrômeda. Uma das galáxias mais próximas da Via Láctea, cuja medida da distância da Terra é de aproximadamente 2 537 000 AL.

Uma maneira de converter a medida da distância em anos-luz para quilômetros é utilizando uma regra de três simples.

| Medida da distância (em AL) | Medida da distância (em km) |
|---|---|
| 1 | $9{,}46 \cdot 10^{12}$ |
| 2 537 000 | x |

$$\frac{1}{2\,537\,000} = \frac{9{,}46 \cdot 10^{12}}{x}$$

$$x = \left(9{,}46 \cdot 10^{12}\right)(2\,537\,000)$$

$$x = 9{,}46 \cdot 10^{12} \cdot 2{,}537 \cdot 10^{6}$$

$$x \simeq 2{,}4 \cdot 10^{19}$$

Portanto, a medida da distância entre a Terra e a Galáxia de Andrômeda, em quilômetros, é de aproximadamente $2{,}4 \cdot 10^{19}$ km.

## Atividades

Anote no caderno

**1.** Expresse as medidas a seguir em notação científica.

**a)** 200 000 m $2 \cdot 10^5$ m

**b)** 6 520 000 km $6{,}52 \cdot 10^6$ km

**c)** 78 951 000 UA $7{,}8951 \cdot 10^7$ UA

**d)** 964 125 000 000 km $9{,}64125 \cdot 10^{11}$ km

**2.** Copie em seu caderno as sentenças abaixo, substituindo cada ■ pelo número que torna a igualdade verdadeira.

**a)** $4{,}488 \cdot 10^8$ km = ■ UA 3

**b)** $3{,}74 \cdot 10^8$ km = ■ UA 2,5

**c)** 8 UA = ■ km $1{,}1968 \cdot 10^9$

**d)** 3,2 UA = ■ km $4{,}7872 \cdot 10^8$

**e)** $1{,}892 \cdot 10^{13}$ km = ■ AL 2

**f)** $4{,}73 \cdot 10^{13}$ km = ■ AL 5

**g)** 3,5 AL = ■ km $3{,}311 \cdot 10^{13}$

**h)** 10 AL = ■ km $9{,}46 \cdot 10^{13}$

**Relacionando saberes**

- Aproveite que o capítulo trata de questões relacionadas aos conhecimentos astronômicos e verifique a possibilidade de levar os alunos a um planetário, estabelecendo uma conexão com o componente curricular **Ciências** e o professor responsável por ele. Se não houver um planetário na cidade em que a escola se localiza, avalie as condições de programar com antecedência uma excursão para outro local. A visita funcionaria como uma oportunidade de os alunos visualizarem as grandezas do Universo e compreenderem sua imensidão. Caso o deslocamento não seja possível, programe uma atividade de exibição de documentários com essa temática, contando com o auxílio do professor de **Ciências**.

- Veja um problema que pode ser elaborado pelos alunos na atividade **6**:
  - Qual é a diferença entre a medida da distância dos astros **A** e **B** e a medida da distância dos astros **B** e **C**?
    Ⓡ $2{,}843 \cdot 10^8$ km

**BNCC em foco**

- As atividades propostas nessa página e no decorrer do capítulo levarão os alunos a observarem sistematicamente aspectos quantitativos presentes nas práticas sociais e culturais, podendo investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes para interpretá-las e avaliá-las criticamente, produzindo argumentos convincentes. Dessa maneira, contempla-se a **Competência específica de Matemática 4**.

**3.** Para que um astro seja considerado planeta, ele deve preencher os seguintes pré-requisitos:

- Orbitar uma estrela.
- Possuir medida de massa suficiente para ser esférico pela sua própria gravidade.
- Ter dominância orbital em sua região, ou seja, não ser influenciado pelo campo gravitacional de outros corpos celestes de sua região.

Quando um astro não preenche somente o terceiro requisito, ele é classificado como planeta-anão. Veja, a seguir, alguns dos planetas-anões em nosso Sistema Solar.

| Planeta-anão | Valor médio aproximado da medida da distância até o Sol (em km) |
|---|---|
| Ceres | $4{,}14 \cdot 10^8$ |
| Plutão | $5{,}906 \cdot 10^9$ |
| Haumea | $6{,}432 \cdot 10^9$ |
| Makemake | $6{,}783 \cdot 10^9$ |
| Éris | $1{,}018 \cdot 10^{10}$ |

NASA. **Planets**. Disponível em: <https://solarsystem.nasa.gov/planets>. Acesso em: 14 nov. 2018.

De acordo com as informações acima, resolva.

**a)** Converta para UA a medida da distância entre o Sol e cada planeta-anão.

**b)** Supondo que os planetas-anões estivessem alinhados com o Sol, um atrás do outro, qual seria a medida média aproximada da distância, em UA, entre:

- Makemake e Ceres?
  aproximadamente 42,57 UA
- Éris e Haumea?
  aproximadamente 25,06 UA
- Plutão e Ceres?
  aproximadamente: 36,71 UA
- Haumea e Plutão?
  aproximadamente 3,51 UA

3. a) Ceres: aproximadamente 2,77 UA; Plutão: aproximadamente 39,48 UA; Haumea: aproximadamente 42,99 UA.; Makemake: aproximadamente 45,34 UA; Éris: aproximadamente 68,05 UA

**4.** Com exceção do Sol, a Proxima Centauri é a estrela mais próxima de nós, com cerca de 4,25 anos-luz de medida de distância. Faça a conversão da medida da distância de Proxima Centauri para:

- quilômetros. $4{,}0205 \cdot 10^{13}$ km
- UA. $2{,}6875 \cdot 10^{10}$ UA

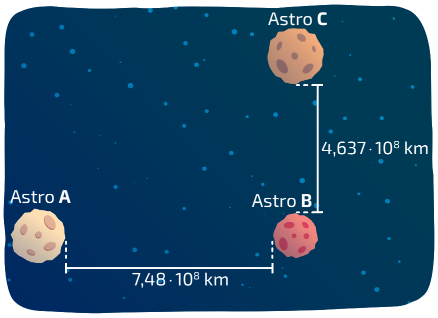
**5.** A National Aeronautics and Space Administration (Nasa) já enviou diversas sondas pelo Sistema Solar em busca de mais informações. Exemplos de sondas são a *Curiosity*, que foi enviada em missão para Marte, e a *New Horizons*, para Plutão. Sabendo que a medida média da distância entre Marte e o Sol é de aproximadamente 228 000 000 km, resolva.

**a)** Expresse a medida da distância entre Marte e o Sol em UA.
aproximadamente 1,52 UA

**b)** Considerando que Marte, Plutão e o Sol estejam alinhados, qual a diferença da medida da distância entre a *Curiosity* e a *New Horizons*, no momento em que estava em Plutão? Utilize os dados da tabela da atividade **3**.
aproximadamente 37,96 UA

**c)** Em sua opinião, quanto conseguiremos avançar, em 10 anos, na exploração do Sistema Solar? Resposta pessoal.

**6.** Com base na imagem a seguir, elabore um problema que envolva operações e notação científica e dê para um colega resolvê-lo. Em seguida, verifique se a resposta está correta. Resposta pessoal.



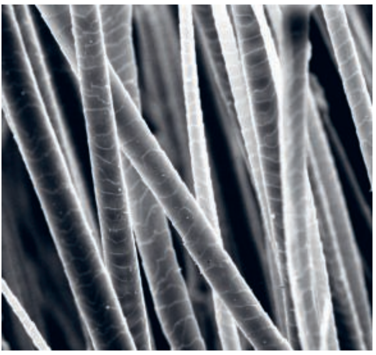
Cátia Germani

## Medindo pequenos comprimentos

Assim como há situações que envolvem medidas de comprimento muito grandes, há também situações envolvendo medidas de comprimento muito pequenas, como a medida do comprimento de células, de um vírus ou de uma bactéria.

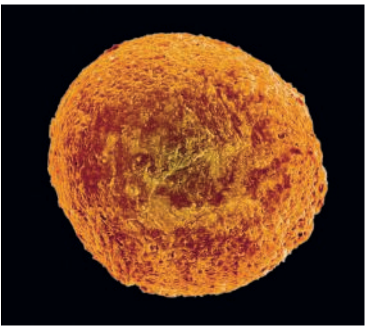
Ramona Kaulitzki/Shutterstock.com

Representação de hemácias, células cuja medida do comprimento do diâmetro é 0,000008 m.



David Phillips/Science Source/Fotoarena

Fios de cabelo humano sendo observados em um microscópio. A medida do comprimento do diâmetro de um fio de cabelo é 0,00007 m.



Dennis Kunkel Microscopy/SPL/Fotoarena

O ovócito (gameta feminino) é uma célula com formato esférico e cujo raio mede 0,00014 m de comprimento.

3Dstock/Shutterstock.com

Representação de um tardígrado, animal microscópico cuja medida do comprimento é 0,001 m.

Também podemos expressar essas medidas usando notação científica. Por exemplo:

Medida do comprimento do diâmetro da hemácia:

$$0{,}000008 \text{ m} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Medida do comprimento do diâmetro do ovócito humano:

$$0{,}00014 \text{ m} = 1{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

**Utilizando a notação científica, escreva no caderno a medida do comprimento do diâmetro do fio de cabelo e a medida do comprimento do tardígrado.**

fio de cabelo: $7 \cdot 10^{-5}$ m; tardígrado: $1 \cdot 10^{-3}$ m; ácaro: $1 \cdot 10^{-3}$ m

**Relacionando saberes**

- As imagens apresentadas nessa página trazem elementos com medidas de comprimento muito pequenas que possibilitam relação com o componente curricular **Ciências**. Veja a possibilidade de o professor responsável pelo componente levar os alunos ao laboratório de ciências para observarem algumas bactérias com o microscópio. Aproveite e aborde, por exemplo, algumas especificidades sobre o fio de cabelo. Diga aos alunos que uma pessoa costuma ter, em média, 100 mil fios, e é natural a perda de cerca de 100 a 200 fios por dia. Além disso, um dado interessante é o fato de os fios serem extremamente firmes, com a estimativa de que uma trança, por exemplo, possa suportar cerca de 10 toneladas. Caso perceba mais interesse dos alunos sobre esse assunto, leve-os ao laboratório de informática e sugira que pesquisem outras curiosidades.

Outra unidade de medida de comprimento que convém ser utilizada em medidas muito pequenas é o micrômetro (µm), que é um submúltiplo do metro.

$$1\ \mu m = 0{,}000001\ m = 10^{-6}\ m$$

O símbolo µ (lê-se: mi) é uma letra minúscula do alfabeto grego.

Veja como podemos converter a medida do comprimento do diâmetro da hemácia de metros para micrômetros.

- $0{,}000008\ m = 8 \cdot 10^{-6}\ m$

$$\frac{8 \cdot \overset{1}{\cancel{10^{-6}}}}{\underset{1}{\cancel{10^{-6}}}} = 8$$

Portanto, a medida do comprimento do diâmetro da hemácia é de 8 µm.

**Escreva, em micrômetros, a medida do comprimento do diâmetro do fio de cabelo e a medida do comprimento do tardígrado.**
fio de cabelo: 70 µm; tardígrado: 1 000 µm

## Atividades

Anote no caderno

**7.** Expresse as medidas a seguir em notação científica.

**a)** 0,0003 m $3 \cdot 10^{-4}$ m

**b)** 0,0000222 m $2{,}22 \cdot 10^{-5}$ m

**c)** 0,00756 m $7{,}56 \cdot 10^{-3}$ m

**d)** 0,00000089 m $8{,}9 \cdot 10^{-7}$ m

**8.** Copie em seu caderno as sentenças abaixo, substituindo cada ■ pelo número que torna a igualdade verdadeira.

**a)** $9 \cdot 10^{-6}$ m = ■ µm 9

**b)** $5{,}6 \cdot 10^{-5}$ m = ■ µm 56

**c)** $8{,}9 \cdot 10^{-7}$ m = ■ µm 0,89

**d)** 3 µm = ■ m $3 \cdot 10^{-6}$

**e)** 523 µm = ■ m $5{,}23 \cdot 10^{-4}$

**f)** 0,6 µm = ■ m $6 \cdot 10^{-7}$

**9.** Com base na imagem a seguir, elabore um problema envolvendo notação científica e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se ele resolveu corretamente. Resposta pessoal.

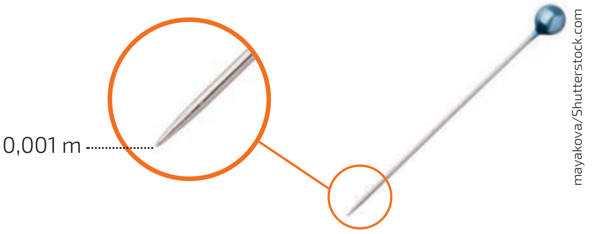
Danillo Souza

- Aproveite o trabalho com a atividade **9** para avaliar como os alunos interpretam as imagens e criam ideias para elaborar problemas. Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos:
  - Para realizar alguns cálculos, o cientista necessita expressar a medida do tamanho da lasca de ferro em metro. Qual foi a medida expressa por ele? Utilize notação científica para representá-la.
  R $2 \cdot 10^{-3}$ m

**Material digital**

- No material digital dessa coleção, para complementar o trabalho com o tópico **Medidas de comprimento**, disponibilizamos a **Sequência didática 7**, elaborada com o objetivo de desenvolver as habilidades **EF09MA04** e **EF09MA18**. Essa sequência apresenta atividades que permitem interpretar e resolver problemas que envolvam diferentes unidades de medida de comprimento.

**10.** Devido a algumas utilidades na costura, o alfinete é uma ferramenta comum em ateliês. Veja a seguir um exemplo de alfinete.



mayakova/Shutterstock.com

Converta para µm a medida do comprimento do diâmetro da ponta do alfinete. 1 000 µm

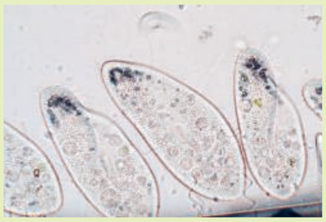
**11.** Como bactérias e células não podem ser vistas a olho nu, os laboratórios utilizam microscópios para obter imagens ampliadas. Um exemplo de bactéria é a *Staphylococcus*, que tem um formato esférico cuja medida do comprimento de seu diâmetro pode chegar a 1,5 µm. De acordo com essas informações, resolva os itens a seguir.

**a)** Escreva, em metros, a que medida pode chegar o comprimento do diâmetro da bactéria *Staphylococcus*. 0,0000015 m

**b)** Dê exemplos de situações em que é necessário utilizar um microscópio. Resposta pessoal.

**12.** Leia as informações e escreva, em metros, a menor e a maior medida apresentada. 0,00005 m; 0,0003 m

*Paramecium* é um gênero de protozoário ciliado. É um ser unicelular que pode medir entre 50 e 300 micrômetros de comprimento.



Rattiya Thongdumhyu/ Shutterstock.com

**Protozoário ciliado**
› protozoário que se desloca por meio da movimentação de cílios.

**13.** Na natureza existem insetos de diversos tamanhos, alguns deles são tão pequenos que quase não os enxergamos. Dois deles são: o *Megaphragma caribea*, cuja medida do comprimento é 0,1778 mm, e o *Nanosella fungi*, que mede 0,3 mm de comprimento.

Sabendo que 1 mm = 0, 001 m, resolva as questões a seguir.

**a)** Escreva a medida de cada um desses insetos:

- em metros. *Megaphragma caribea*: 0,0001778 m; *Nanossella fungi*: 0,0003 m
- em micrômetros. *Megaphragma caribea*: 177, 8 µm; *Nanossella fungi*: 300 µm

**b)** Elabore uma questão que envolva a diferença, em metros, entre as medidas apresentadas, utilizando notação científica, e dê para um colega resolver. Depois, confira a resposta do seu colega. Resposta pessoal.

**c)** Em sua opinião, qual unidade de medida é a mais adequada para expressar a medida do comprimento desses insetos? Resposta pessoal.

- Ao abordar o item **b** da atividade **11**, verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para que pesquisem imagens de objetos do cotidiano vistos em um microscópio, o modo de funcionamento desse instrumento e outras situações em que se faz necessária a sua utilização.
- Na atividade **12**, se julgar conveniente, oriente os alunos a pesquisarem e levarem para a sala de aula a medida do comprimento de outros insetos tão pequenos quanto os apresentados.
- Uma questão que pode ser elaborada pelos alunos no item **b** da atividade **13** é:
  - Qual a diferença, em metros, entre a medida do comprimento do *Megaphragma caribea* e a medida do comprimento do *Nanosella fungi*? Escreva esse número em notação científica.
    R $1{,}222 \cdot 10^{-4}$ m

**BNCC em foco**

- O tópico **Unidades de medida de capacidade de armazenamento** associa-se diretamente ao tema contemporâneo **Ciência e Tecnologia**, pois apresenta aos alunos algumas particularidades do desenvolvimento de linguagens e sistemas numéricos, como é o caso das unidades de informação e do sistema de numeração binário.

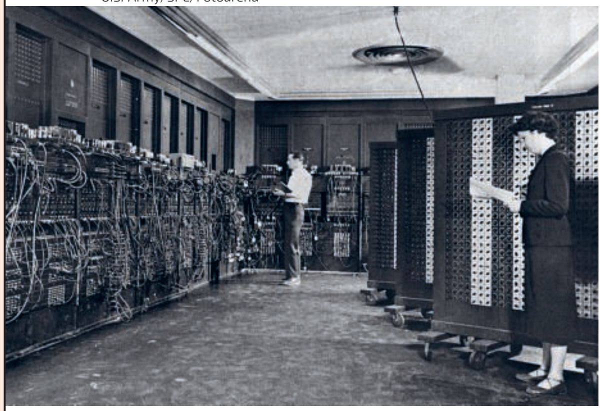
- Antes de apresentar o conteúdo desse tópico aos alunos, promova um debate a fim de verificar o conhecimento prévio deles acerca das unidades de medida em informática que serão abordadas.
- Explique aos alunos que existem outras unidades de medida de capacidade de armazenamento, múltiplas do baite, além das apresentadas. Algumas delas são:
  - petabaite:
    1 PB = $1\,024^5$ B.
  - exabaite:
    1 EB = $1\,024^6$ B.
  - zettabaite:
    1 ZB = $1\,024^7$ B.
  - yottabaite:
    1 YB = $1\,024^8$ B.

# Unidades de medida de capacidade de armazenamento

Os primeiros computadores que surgiram eram máquinas de grande porte. Com a evolução tecnológica, os computadores ficam cada vez menores e mais eficientes. Algumas de suas características, como a capacidade de armazenamento de dados e de processamento, são importantes informações ao comprar um computador. As unidades de medida de armazenamento e de processamento de um computador são exemplos das chamadas **unidades de medida em informática**.

O **bite** é a menor unidade de informação que um computador pode armazenar. As instruções da computação são exatas, pois existem apenas o “sim” e o “não”, sem um meio-termo. O bite pode assumir dois valores, 0 ou 1, sendo que o 0 significa “não” e o 1, “sim”. Esse sistema de numeração que utiliza somente dois algarismos é chamado **sistema binário**.

U.S. Army/SPL/Fotoarena



Em 1946, foi lançado o primeiro computador eletrônico, o ENIAC, que tinha 30 t de medida de massa, 3,5 m de medida de altura e 30 m de medida de comprimento. Com toda essa estrutura, o computador consumia muita energia elétrica.

Para que uma informação possa ser interpretada pelo computador, os bites são agrupados em conjuntos de 8, formando cada conjunto um **caractere**. A cada um desses conjuntos chamamos de **baite**. Dessa forma, um baite pode ser qualquer combinação de oito bites (0 ou 1), por exemplo, 10010100.

> Em um programa de edição de textos, por exemplo, cada algarismo, letra, espaço, sinal etc. é um caractere. Esse caractere pode ser introduzido no computador por meio de um teclado ou outros dispositivos.

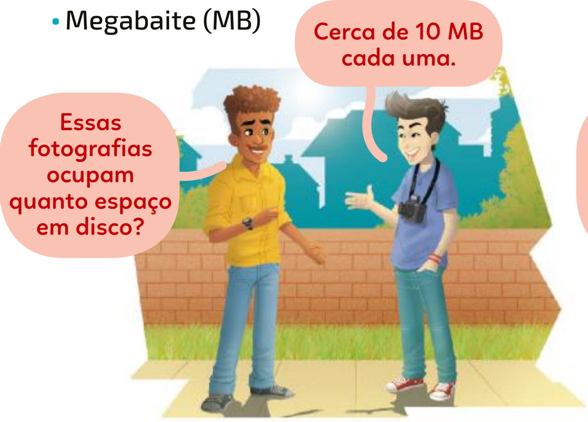
Para expressar medidas maiores, utilizamos os múltiplos do baite, que são o **quilobaite** (KB), o **megabaite** (MB), o **gigabaite** (GB), o **terabaite** (TB), entre outros.

Veja alguns exemplos do uso dessas unidades no nosso dia a dia.

- **Quilobaite (KB)**

Danillo Souza

- Megabaite (MB)



- Gigabaite (GB)

- Terabaite (TB)

Ilustrações: Danillo Souza

HD é a abreviação da expressão em inglês que significa “disco rígido”, e é o componente do computador no qual ficam armazenados os programas e outros arquivos.

Agora, observe no quadro as relações entre essas unidades.

| Medida de capacidade de armazenamento | Quantidade de caracteres (baites) | Tamanho do arquivo |
|---|---|---|
| 1 baite (B) | 1 | 8 bites |
| 1 quilobaite (KB) | 1024 | 1024 B |
| 1 megabaite (MB) | $1024^2 = 1048\,576$ | 1024 KB |
| 1 gigabaite (GB) | $1024^3 = 1073\,741\,824$ | 1024 MB |
| 1 terabaite (TB) | $1024^4 = 1099\,511\,627\,776$ | 1024 GB |

Bite, baite, quilobaite, megabaite, gigabaite e terabaite são termos aportuguesados das palavras da língua inglesa *bit*, *byte*, *kilobyte*, *megabyte*, *gigabyte* e *terabyte*.

Observe no esquema como podemos fazer a conversão entre as unidades de medida de capacidade de armazenamento de dados.

$$\begin{tikzcd} \text{B} \arrow[r, bend left, ":1\,024"] & \text{KB} \arrow[l, bend left, "\cdot 1\,024"] \arrow[r, bend left, ":1\,024"] & \text{MB} \arrow[l, bend left, "\cdot 1\,024"] \arrow[r, bend left, ":1\,024"] & \text{GB} \arrow[l, bend left, "\cdot 1\,024"] \arrow[r, bend left, ":1\,024"] & \text{TB} \arrow[l, bend left, "\cdot 1\,024"] \end{tikzcd}$$

Agora, observe como podemos converter 512 GB em terabaite e 5,4 MB em baite.

- $512\ \text{GB} = 512 : 1\,024\ \text{TB} = 0{,}5\ \text{TB}$
- $5{,}4\ \text{MB} = 5{,}4 \cdot 1\,024 \cdot 1\,024\ \text{B} = 5\,662\,310{,}4\ \text{B}$

**Converta 2 621 440 B em megabaite e 212 GB em quilobaite.**
2,5 MB; 222 298 112 KB

- Realize a **Atividade complementar** a seguir para que os alunos tenham consigo o esquema apresentado nessa página quando forem realizar conversões de unidades de medida de armazenamento de dados.

### Atividade complementar

### Esquema de conversão de unidades de medida de armazenamento de dados

**Materiais**

- cartolina
- tesoura com pontas arredondadas

**Desenvolvimento**

- Peça aos alunos que desenhem na cartolina o esquema de conversão de unidade de medida de armazenamento de dados presente nessa página e, em seguida, recortarem-no.

## Atividades

Anote no caderno

**14.** Além do HD, muitas vezes precisamos de dispositivos externos e portáteis, utilizados de acordo com a finalidade dos arquivos armazenados. O DVD-R, em geral, é usado para armazenamento permanente dos arquivos. Já o *pen drive* costuma ser utilizado para transportar arquivos de um computador para outro.

Observe a medida da capacidade de armazenamento de alguns dispositivos e resolva as questões.


Kolonko/Shutterstock.com

DVD-R
Medida da capacidade: 4,7 GB


nikkytok/Shutterstock.com

*Blu-ray*
Medida da capacidade: 25 GB


Nattawut Jaroenchai/Shutterstock.com

Cartão de memória
Medida da capacidade: 32 GB


cristi180884/Shutterstock.com

*Pen drive*
Medida da capacidade: 64 GB

HD externo
Medida da capacidade: 1 TB


Nachai Sorasee/Shutterstock.com

De acordo com a medida da capacidade dos dispositivos apresentados, responda aos itens a seguir.

**a)** Qual dispositivo tem a maior medida de capacidade de armazenamento de dados? HD externo

**b)** Quantos megabaites é possível armazenar no DVD-R? E no cartão de memória? 4 812,8 MB; 32 768 MB

**c)** Ao copiar todo o conteúdo gravado em 5 DVD-Rs que estavam completamente cheios para um *blu-ray* vazio, sobrarão quantos megabaites de espaço livre, no mínimo, nesse disco? 1 536 MB

**15.** Para cada frase, identifique qual das medidas indicadas melhor substitui o ■.

| 2 TB | 4,8 MB | 92 KB | 16 GB |
|---|---|---|---|

**a)** A música em formato digital que Mirela comprou tem ■. 4,8 MB

**b)** O celular de Alex tem ■ de memória interna. 16 GB

**c)** Otávio instalou em seu computador um HD com ■ de capacidade. 2 TB

**d)** Lívia digitou o seu currículo em um editor de texto e o enviou por *e-mail*. O arquivo tinha apenas ■. 92 KB

**16.** *Backup* é o nome dado às cópias de arquivos feitas de um dispositivo para outro, com a finalidade de recuperar esses arquivos posteriormente, se necessário.

João deseja fazer um *backup* de um total de 46 080 MB de arquivos que estão gravados no HD de seu computador. Qual das opções a seguir ele não poderá escolher para fazer esse *backup*? b

**a)** Utilizar 3 *pen drives* cuja medida da capacidade é 16 GB cada.

**b)** Utilizar 9 DVDs cuja medida da capacidade é 4,7 GB cada.

**c)** Utilizar um HD cuja medida da capacidade é 50 GB.

**17.** Bruno utiliza um serviço de armazenamento em nuvem disponível para 20 GB de arquivos. Em determinado momento, ele tinha 2,75 GB de espaço livre e realizou as seguintes alterações:

- adicionou uma pasta com fotografias, totalizando 440 MB;
- excluiu 1,25 GB de arquivos antigos;
- adicionou 5 arquivos de vídeo de 700 MB cada um.

Agora, com essas informações, elabore um problema e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se ele resolveu corretamente. Resposta pessoal.

- Complemente a atividade **14** explicando aos alunos que o *Blu-ray* costuma ser utilizado na gravação permanente de arquivos, o cartão de memória para armazenar arquivos em equipamentos como celulares e câmeras fotográficas e o HD externo normalmente é utilizado para gravar arquivos temporariamente, como na realização de *backup* para a formatação de um computador.
- Caso seja necessário, na atividade **16**, sugira aos alunos que calculem a medida da capacidade total de armazenamento dos dispositivos apresentados em cada item:

**a)** $3 \cdot 16\ \text{GB} = 48\ \text{GB} =$
$= 48 \cdot 1\,024\ \text{MB} =$
$= 49\,152\ \text{MB}$

**b)** $9 \cdot 4{,}7\ \text{GB} =$
$= 42{,}3\ \text{GB} =$
$= 42{,}3 \cdot 1\,024\ \text{MB} =$
$= 43\,325{,}2\ \text{MB}$

**c)** $50\ \text{GB} =$
$= 50 \cdot 1\,024\ \text{MB} =$
$= 51\,200\ \text{MB}$

- Veja um possível enunciado que pode ser elaborado pelos alunos na atividade **17**:
  - Quantos megabaites de espaço livre Bruno passou a ter em sua conta?
    Ⓡ 156 MB

**18.** Para funcionar, os aparelhos celulares contam com um sistema operacional e outros programas que ocupam parte de sua memória interna. Alguns modelos permitem aumentar essa capacidade de armazenamento por meio de um cartão de memória.

Rodrigo comprou um aparelho celular com 16 GB de memória interna e nele instalou um cartão de memória de 8 GB. Quantos gigabaites ele tem disponível, sabendo que esse aparelho vem de fábrica com 30% da memória interna ocupada? 19,2 GB

**19.** Uma das características dos *smartphones*, além das funções básicas de realizar ligações e enviar e receber mensagens de texto, é servir como um aparelho multimídia portátil, capaz de armazenar e reproduzir músicas e vídeos.

Cláudia possui um *smartphone* com memória interna de 16 GB, sendo que 819,2 MB estão sendo utilizados para armazenar o sistema operacional. O espaço da memória utilizado para armazenar o sistema operacional corresponde a que porcentagem do total de espaço na memória interna? 5%

**20.** Veja como podemos realizar algumas conversões com uma calculadora.

- Converter 1,2 TB em megabaite.

**I** Inicialmente, registramos o número 1 024, que é o fator que devemos multiplicar para realizar as conversões:

1 → 0 → 2 → 4

1024.

**II** Digitamos a tecla × e em seguida registramos o número 1,2:

× → 1 → · → 2

1.2

**III** Digitamos a tecla = duas vezes consecutivas.

| 1ª vez | 2ª vez |
|---|---|
| 1228.8 | 1258291.2 |
| 1 228,8 GB | 1 258 291,2 MB |

Portanto, 1,2 TB = 1 258 291,2 MB.

- Converter 76 200 KB em gigabaite.

**I** Inicialmente, registramos o número 76 200:

7 → 6 → 2 → 0 → 0

76200.

**II** Dividimos o número registrado por 1 024 digitando as teclas:

÷ → 1 → 0 → 2 → 4

1024.

**III** Digitamos a tecla = duas vezes consecutivas.

| 1ª vez | 2ª vez |
|---|---|
| 74.414062 | 0.0726699 |
| aproximadamente 74,414062 MB | aproximadamente 0,0726699 GB |

Portanto, 76 200 KB ≃ 0,073 GB.

Ilustrações: Keithy Mostachi

Agora, utilizando uma calculadora, realize as conversões a seguir.

**a)** 45 MB em B 47 185 920 B

**b)** 62 MB em TB aproximadamente 0,0000591 TB

**c)** 0,018 GB em KB 18 874,368 KB

**d)** 94 371,84 B em MB 0,09 MB

- Na atividade **18**, verifique a possibilidade de levar para a sala de aula um aparelho celular e um cartão de memória, a fim de exemplificar a utilização desse dispositivo. Diga aos alunos qual é a medida da capacidade interna de armazenamento do celular e do cartão de memória. Discuta com eles as vantagens na utilização desse recurso.
- Para a resolução da atividade **20**, informe que os procedimentos apresentados para as conversões das unidades podem variar de acordo com o modelo da calculadora. A diferença pode ocorrer na ordem ou na quantidade de vezes em que as teclas são digitadas para efetuar o cálculo. Geralmente, as calculadoras têm uma função de memorização das informações inseridas, de modo que, ao digitarmos a tecla = pela segunda vez, as informações fornecidas anteriormente são resgatadas. No entanto, nos modelos em que não há essa função, a memorização não ocorre e, nesse caso, é preciso realizar duas vezes a multiplicação ou a divisão por 1 024, por exemplo. Assim, procure identificar e orientar os alunos que possuam calculadoras de modelos diferentes da utilizada nos exemplos.

**BNCC em foco**

- As atividades dessa página contemplam os preceitos descritos na **Competência geral 5**, pois lançam mão de objetos tecnológicos para que os alunos possam operar cálculos relacionados a eles. Dessa maneira, o uso das tecnologias de comunicação e informação é estimulado, sempre de forma crítica, significativa e ética, em prol da inserção dos alunos na cultura digital.

**21.** Nos *smartphones*, as fotografias são armazenadas na memória interna ou em cartões de memória removíveis que são acoplados ao equipamento. Quando necessário, as fotografias podem ser transferidas para outro dispositivo de armazenamento de dados.


Claudia Souza

Regis visitou o centro histórico de São Luís (MA) e, para registrar as paisagens, ele utilizou a câmera de um *smartphone*. Quantas fotografias de 5 MB cada, no máximo, Regis pode armazenar em um cartão de memória cuja medida da capacidade é de:

**a)** 4 GB? 819 fotografias

**b)** 16 GB? 3 276 fotografias

**c)** 64 GB? 13 107 fotografias

**22.** O *mp3*, largamente utilizado como formato de áudio digital, surgiu na década de 1990, quando se tornou rapidamente o formato preferido para se armazenar músicas no computador. Esse sucesso ocorreu principalmente porque, até então, as músicas em formato digital ocupavam muito espaço em disco, e uma mesma música em formato *mp3* chegava a ocupar até 11 vezes menos espaço.

Uma maneira de medir o quanto um arquivo de áudio ocupa na memória do computador é por meio da **taxa de bites**, expressa em Kbps (quilobites por segundo). Se um arquivo de áudio tem 96 Kbps, significa que cada segundo de gravação ocupa 96 quilobites na memória. Para expressar esse valor em quilobaites (KB), basta dividir 96 por 8, pois 8 quilobites equivalem a 1 quilobaite.

$$96 \text{ quilobites} = \underbrace{12}_{96:8} \text{ quilobaites}$$

**a)** Certa música em formato *mp3*, com 3 min de duração, tem 128 Kbps de taxa de bites. Quantos megabaites tem essa música? 2,8125 MB

**b)** Quantos megabaites tem uma música de 4 min, gravada em um CD, cuja taxa de bites é 1 411 Kbps? Quantos megabaites essa música teria se fosse convertida em formato *mp3*, com taxa de bites de 192 Kbps? aproximadamente 41,34 MB; 5,625 MB

**23.** O HD do computador de Fátima tem medida de capacidade para armazenar 1 TB e está com 20% dessa capacidade ocupada. Para realizar uma manutenção no computador, ela pretende fazer um *backup*, ou seja, copiar os arquivos do HD em outro dispositivo.

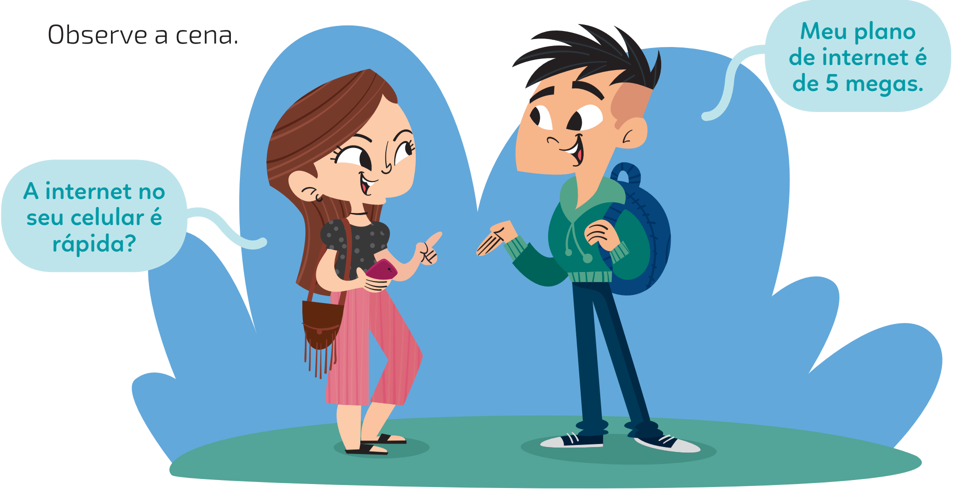
**a)** O HD do computador de Fátima está com quantos gigabaites ocupados? 204,8 GB

**b)** Se Fátima armazenar parte dos arquivos em um *pen drive* cuja medida da capacidade é 32 GB e em 6 discos de *blu-ray* com capacidade para 25 GB cada um, quantos DVDs cuja medida da capacidade é 4,7 GB, no mínimo, serão necessários para armazenar o restante dos arquivos? 5 DVDs

# Outras unidades de medida em informática

## Taxa de transferência de dados

Observe a cena.



A expressão "5 megas", citada por um dos personagens, refere-se à velocidade máxima com que os dados são transmitidos na conexão. Essa é uma maneira comum de indicar a **taxa de transferência de dados** que, nesse caso, é de até 5 megabites por segundo (5 Mbps ou 5 Mb/s). Isso não significa que os dados sejam transmitidos constantemente a 5 Mb por segundo durante todo o período de conexão. Nesse caso, costumamos dizer que a medida da **largura de banda** é de 5 Mbps, o que significa que o usuário tem disponível, em condições ideais, a velocidade de transmissão de até 5 Mb por segundo.

Ao utilizar a internet, a transferência de dados é feita em duas direções: o dispositivo pode receber ou enviar dados. O processo de receber (ou baixar) dados via internet chama-se *download*, e o de enviar (ou subir) dados, *upload*. Em um mesmo plano de internet, a velocidade para *download* costuma ser maior do que a de *upload*.

Ilustrações: Claudia Souza

- Realize a **Atividade complementar** a seguir com os alunos para contribuir com a compreensão de como os computadores codificam as informações em código binário. Informe-os de que a tabela apresentada é uma representação da tabela ASCII (Código Padrão Americano para o Intercâmbio de Informação).

### Atividade complementar

**Tabela ASCII**

**Materiais**

- tesoura com pontas arredondadas
- cola
- cartolina
- tabela ASCII

**Desenvolvimento**

- Reproduza e entregue aos alunos a tabela ASCII disponível nas **Páginas para reprodução** e peça para colarem-na na cartolina e recortarem-na, a fim de torná-la mais resistente. Feito isso, proponha as seguintes questões:
  - Converta para o código binário seu primeiro nome.

    R Resposta pessoal.
  - Transcreva o seguinte código binário para a nossa linguagem e descubra qual é a palavra: 01000010 01001001 01010100 01000101.

    R Bite
  - Escreva uma palavra usando o código binário e troque-a com um colega, pedindo para que ele faça a conversão para a nossa linguagem. Em seguida, corrija a resposta dada por ele.

    R Resposta pessoal.

- Complemente o conteúdo abordado nessa página explicando aos alunos que o processador é responsável por realizar todos os cálculos e processos que permitem o funcionamento do computador, além de enviar todas as informações aos outros componentes do aparelho e receber as geradas por eles. Diga também que, além da medida de frequência de um processador, há outras especificidades que influenciam em seu rendimento; o sistema de refrigeração, por exemplo, é vital para o funcionamento do processador.

Já estudamos que 1 baite equivale a 8 bites. Dessa maneira, temos que 1 megabaite equivale a 8 megabites. Para uma largura de banda de 5 Mbps é possível determinar quantos megabaites ou quilobaites por segundo podem ser transferidos no máximo, da seguinte maneira:

$$5 \text{ Mb} = \underbrace{0{,}625}_{5:8} \text{ MB} = \underbrace{640}_{0{,}625 \cdot 1\,024} \text{ KB}$$

Logo, para uma conexão de 5 Mbps, pode-se transferir, no máximo, 0,625 MB ou 640 KB de dados por segundo.

- Para calcular quantos megabaites podem ser transferidos em 1 min, podemos utilizar uma regra de três com grandezas diretamente proporcionais.

$$\frac{0{,}625}{x} = \frac{1}{60} \Rightarrow x = 0{,}625 \cdot 60 \Rightarrow x = 37{,}5$$

| Quantidade de dados (em MB) | Medida do tempo (s) |
|---|---|
| 0,625 | 1 |
| x | 60 |

Portanto, pode-se transferir em 1 min, no máximo, 37,5 MB com uma conexão de 5 Mbps.

- Para calcular a medida do tempo mínimo necessário para transferir um arquivo de 150 MB, utilizamos a seguinte regra de três.

$$\frac{0{,}625}{150} = \frac{1}{x} \Rightarrow 0{,}625x = 150 \Rightarrow x = 240$$

| Quantidade de dados (em MB) | Medida do tempo (s) |
|---|---|
| 0,625 | 1 |
| 150 | x |

Portanto, são necessários no mínimo 240 s ou 4 min (240 : 60) para transferir um arquivo de 150 MB com uma conexão de 5 Mbps.

## Velocidade de processamento

O **microprocessador** é o componente do computador no qual as instruções são processadas. Conhecido popularmente como **processador**, ele tem um papel fundamental em qualquer tipo de computador moderno.

Todo processador possui indicação da medida de sua frequência de operação, expressa em um múltiplo do **hertz** (Hz), como o **megahertz** (MHz) e o **gigahertz** (GHz). Essa frequência indica quantas instruções ou ciclos podem ser processados por segundo. Veja no quadro a quantidade de ciclos correspondente a medidas expressas nessas unidades.

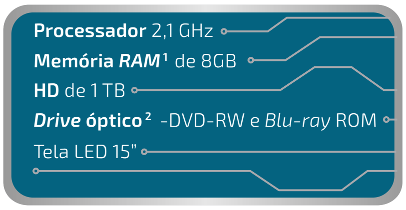
| Medida da frequência | Ciclos por segundo |
|---|---|
| 1 hertz (Hz) | 1 |
| 1 megahertz (MHz) | 1 000 000 |
| 1 gigahertz (GHz) | 1 000 000 000 |

Nos microprocessadores antigos, a frequência era medida em megahertz e, nos atuais, é comum ela ser expressa em gigahertz, como 1,2 GHz, 2,6 GHz e 3,0 GHz. Porém, uma maior frequência de operação nem sempre indica um melhor desempenho, pois há diversas variáveis que influenciam na velocidade com que o computador executa as instruções.

# Atividades

Anote no caderno

**24.** Observe a configuração de um computador oferecido por uma loja.



**Processador** 2,1 GHz

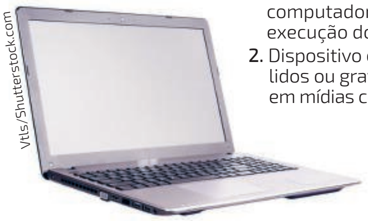
**Memória *RAM*¹** de 8GB

**HD** de 1 TB

***Drive* óptico²** -DVD-RW e *Blu-ray* ROM

Tela LED 15"

Ana Alexius



Vtls/Shutterstock.com

1. Memória do computador utilizada na execução dos programas.
2. Dispositivo em que são lidos ou gravados arquivos em mídias como DVD.

**a)** Nesse computador, qual a frequência de operação do processador? Expresse essa medida em gigahertz e em hertz. 2,1 GHz; 2 100 000 000 Hz

**b)** Qual é a medida da capacidade:

- do HD? 1 TB
- da memória RAM? 8 GB

**c)** Quantas polegadas mede a tela desse computador? 15"

**d)** Qual dispositivo é utilizado para ler ou gravar DVDs? *drive* óptico

**25.** Resolva os problemas.

**a)** O primeiro computador comprado por Juliano, em 2001, tinha 600 MHz de frequência de operação do processador. Em 2016, ou seja, 15 anos depois, ele teve um *smartphone* com 800 MHz a mais que aquele antigo computador. Qual era a frequência, em gigahertz, do processador desse *smartphone*? 1,4 GHz

**b)** Dois modelos de *tablet* estão sendo vendidos em uma loja. Um deles tem o processador de 1,2 GHz, e o outro, de 1,5 GHz. Qual é a diferença entre as frequências desses *tablets* em megahertz? 300 MHz

**26.** Escreva a quantos ciclos por segundo corresponde a frequência de cada processador.

**a)** Processador de 2,20 GHz 2 200 000 000 ciclos por segundo

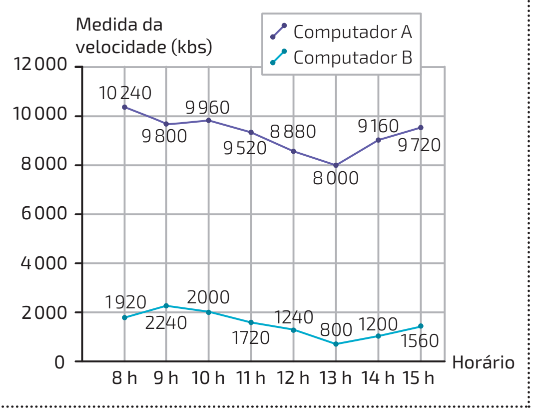
**b)** Processador de 900 MHz 900 000 000 ciclos por segundo

**c)** Processador de 1,80 GHz 1 800 000 000 ciclos por segundo

**27.** A velocidade de conexão é medida de acordo com a taxa de transferência de dados e, quanto maior essa medida de velocidade, mais rápido os *sites* serão acessados e os arquivos da internet copiados para o computador.

O gráfico a seguir apresenta a medida da velocidade de conexão de dois computadores em certo período do dia.

**Medida da velocidade de conexão de dois computadores – 2019**



Sergio L. Filho

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

**a)** Qual computador apresentou a maior medida de velocidade de conexão no período considerado? computador A

**b)** Em que horário o computador **A** obteve a maior medida de velocidade de conexão? Quantos Mbps? 8 h; 10 Mbps

**c)** A menor diferença da medida de velocidade de conexão entre os dois computadores ocorreu em que horário? Qual foi essa diferença? 13 h; 7 200 Kbps

- Na atividade **24**, lembre os alunos de que a unidade de medida polegada, indicada na configuração da tela do computador, corresponde a aproximadamente 2,54 cm. Nesse contexto, a diagonal da tela do computador mede 15", ou seja, cerca de 38,1 cm.

- Para resolver o item **b** da atividade **29**, peça para os alunos considerarem 1 mês com 30 dias. É possível também utilizarem a calculadora para resolver os cálculos.

Complemente essa atividade propondo outra situação para os alunos responderem as mesmas questões apresentadas: Suponha que Rodolfo está avaliando trocar seu plano de internet móvel e recebeu uma proposta de outra operadora, que oferece até 10 Mbps e uma franquia de 4 GB.

- questão **a**.
  - R aproximadamente 16 s
- questão **b**.
  - R aproximadamente 136,53 MB
- questão **c**.
  - R aproximadamente 54,61 min

**28.** A quais valores correspondem as letras **A**, **B** e **C** para que o quadro a seguir fique corretamente preenchido? A: 320; B: 27; C: 10

| Taxa de transferência de dados (Mb/s) | Medida da quantidade de dados (MB) | Medida de tempo de transferência (s) |
|---|---|---|
| 15 | 600 | A |
| 3 | B | 72 |
| C | 1 025 | 820 |

**29.** As operadoras de telefonia que oferecem planos de internet móvel costumam impor uma **franquia de dados**, que é uma limitação da quantidade de dados que podem ser transferidos no período de um mês. Rodolfo contratou um desses planos e agora tem disponível uma velocidade de conexão que pode medir até 7 Mbps e uma franquia de dados de 2 GB, ou seja, ele pode baixar durante 30 dias até 2 GB de conteúdo a uma medida de velocidade máxima de 7 Mbps em seu *smartphone*.

**a)** Calcule a medida do tempo mínima para que Rodolfo faça o *download* de um aplicativo de 20 MB em seu *smartphone*. aproximadamente 22,8 s

**b)** Em média, Rodolfo pode transferir quantos megabaites de conteúdo por dia, considerando um mês com 30 dias? aproximadamente 68,27 MB

**c)** Se Rodolfo utilizasse continuamente a internet no *smartphone* na medida de velocidade máxima contratada, em quantos minutos o limite da franquia de dados seria atingido? 39 min

**30.** Em certo plano de internet é prometida uma medida de velocidade de até 12 Mbps para *download* e de até 25% dessa medida de velocidade para *upload*. Ao utilizar esse plano, calcule a medida do tempo mínimo necessário para:

**a)** baixar um arquivo de 36 MB. 24 s

**b)** enviar um arquivo de 15 MB. 40 s

**c)** baixar 32 arquivos de 100 MB cada. aproximadamente 35 min 33 s

**d)** enviar um arquivo de 1 GB. aproximadamente 45 min 31 s

**31.** Renata, Daniel e Amanda possuem internet com diferentes medidas de velocidades. Observe o que eles estão dizendo.

Ilustrações: Débora Kamogawa

**a)** Calcule, para cada um deles, qual foi a taxa de transferência, em Mbps, no *download* realizado. Renata: 5 Mbps; Daniel: 8 Mbps; Amanda: aproximadamente 3 Mbps

**b)** Quem fez o *download* na maior taxa de transferência? E na menor? Daniel; Amanda

**c)** Mantendo a mesma taxa que obteve ao fazer o *download* do vídeo, quantos segundos Renata demoraria para baixar o mesmo arquivo que Daniel baixou? 24 s

**32.** Por determinação da Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), as operadoras devem garantir aos seus usuários no mínimo:

**I )** 40% da medida de velocidade contratada em medições pontuais; e

**II )** 80% da medida de velocidade contratada na média das medições feitas no mês.

Observe algumas informações referentes a medições de velocidade nas conexões de internet de três usuários, realizadas em janeiro de 2019.

| Usuário | Medida da velocidade contratada (Mbps) | Menor velocidade medida (Mbps) | Média mensal das medições (Mbps por medição) |
|---|---|---|---|
| Adriano | 10 | 5,36 | 7,51 |
| Beatriz | 2 | 1,12 | 1,80 |
| Cláudia | 15 | 4,25 | 10,88 |

**a)** Entre os critérios de qualidade **I** e **II**, quais foram atendidos a cada usuário? Adriano: **I**; Beatriz: **I** e **II**; Cláudia: nenhum critério

**b)** Em sua opinião, qual dos usuários tem a melhor conexão à internet? Justifique. Resposta pessoal.

## Explorando o que estudei

Anote no caderno

**1.** Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo?
medidas de comprimento e medidas em informática

**2.** Quais unidades de medida são utilizadas para grandes distâncias? E para pequenas distâncias? Unidade Astronômica (UA) e ano-luz (AL); Micrômetro (μm)

**3.** Quais múltiplos do baite você conhece? quilobaite (KB), megabaite (MB), gigabaite (GB) e terabaite (TB)

**4.** Você já armazenou arquivos digitais em algum dispositivo? Que tipos de arquivos? Quais dispositivos você utilizou? Resposta pessoal.

**5.** Com suas palavras, explique o que é taxa de transferência de dados.

**6.** Qual a diferença entre *download* e *upload*? O *download* corresponde ao processo de transferir dados para o dispositivo, enquanto o *upload* corresponde ao processo de enviar dados a partir do dispositivo.

**7.** A informática, além de conhecimento técnico específico, requer que o usuário saiba utilizá-la de maneira adequada, a fim de melhorar seus processos cotidianos e até mesmo potencializar o aprendizado. Leia a tirinha.
Resposta pessoal.

© Alexandre Beck/Acervo do cartunista

BECK, Alexandre. **Armandinho Zero**. Florianópolis: A. C. Beck, 2013. p. 94.

Converse com o professor e os colegas sobre o que você entendeu da tirinha e qual a melhor maneira de utilizar a internet para contribuir com seus estudos.

5. É a medida de velocidade com que os dados são transferidos, geralmente indicados em Mbps (megabites por segundo).

- Veja uma possível resolução para o desafio proposto na atividade **32**:

**a)** Calculamos para os usuários a velocidade mínima de cada um dos critérios.

Adriano:

- Critério **I**: 40% de 10 Mbps, ou seja, $\frac{40}{100}\cdot 10=\frac{400}{100}=$ $=4$ Mbps.
- Critério **II**: 80% de 10 Mbps, ou seja, $\frac{80}{100}\cdot 10=\frac{800}{100}=$ $=8$ Mbps.

Beatriz:

- Critério **I**: 40% de 2 Mbps, ou seja, $\frac{40}{100}\cdot 2=\frac{80}{100}=$ $=0,8$ Mbps.
- Critério **II**: 80% de 2 Mbps, ou seja, $\frac{80}{100}\cdot 2=\frac{160}{100}=$ $=1,6$ Mbps.

Cláudia:

- Critério **I**: 40% de 15 Mbps, ou seja, $\frac{40}{100}\cdot 15=\frac{600}{100}=$ $=6$ Mbps.
- Critério **II**: 80% de 15 Mbps, ou seja, $\frac{80}{100}\cdot 15=\frac{1\,200}{100}=$ $=12$ Mbps.

Logo, Adriano foi atendido no critério **I**, Beatriz nos critérios **I** e **II** e Cláudia em nenhum dos critérios.

### Avaliação

- Utilize a seção **Explorando o que estudei** para realizar uma avaliação com os alunos, observando quais conhecimentos são evidenciados a respeito do conteúdo estudado. Caso julgue necessário, realize um resumo e permita que eles tirem suas dúvidas, de modo que elas não sejam levadas para os próximos capítulos. Além disso, faça uma reflexão sobre as ações desenvolvidas nesse capítulo, com a intenção de avaliá-las para os próximos.

- A questão **7** configura-se como uma oportunidade de promover uma discussão sobre a ética no uso das tecnologias. É importante que os alunos estejam atentos, por exemplo, em relação ao plágio, uma vez que o acesso a informações digitais (como na internet) facilita a cópia não autorizada. Eles devem ser orientados em relação às regras que envolvem os direitos autorais e às consequências para quem pratica esse delito. Sendo assim, estimule-os a utilizar essas informações digitais como fonte de pesquisa, contribuindo com ideias na elaboração de seu próprio material.

# Cidadania: explore essa ideia

## Lixo eletrônico

Nik Neves

As constantes inovações tecnológicas muitas vezes instigam o consumidor a comprar outro produto mesmo que o antigo ainda esteja em boas condições de uso. A curta vida útil de diversos equipamentos também é outro fator que leva o consumidor a substituí-los.

Sabemos que é importante separar e descartar o lixo em local adequado, como as lixeiras específicas para lixo orgânico, papel, plástico, metal ou vidro. Mas em qual dessas lixeiras descartaríamos aquele celular velho que não funciona mais? E as peças antigas de um computador, as pilhas e as baterias usadas ou o televisor quebrado? A resposta é: em nenhuma delas!

Os Resíduos de Aparelhos Eletroeletrônicos (RAEE), também conhecidos por **lixo eletrônico**, devem ser descartados em pontos de coleta apropriados, pois são materiais com substâncias altamente tóxicas que podem contaminar o solo. Assim, sempre que inutilizarmos algum tipo de lixo eletrônico, devemos procurar um ponto de coleta para essa finalidade, a fim de reduzir a poluição do meio ambiente.

**BNCC em foco**

- Essa seção possibilita desenvolver o tema contemporâneo **Ciência e tecnologia**, atentando os alunos não só às principais características que devem ser levadas em conta ao se adquirir um produto eletrônico, mas também ao descarte correto de seus componentes, tendo em vista que muitos aparelhos atualmente são fabricados para ter uma vida útil limitada, configurando o que é chamado por obsolescência programada.
Com os alunos, faça uma leitura das cenas e questione se eles têm o hábito de verificar as funções e características dos produtos e de se preocupar com a maneira adequada de descartar os resíduos eletrônicos. Espera-se que eles percebam a importância de não deixar esse tipo de resíduo em locais impróprios, o que pode ocasionar a contaminação com materiais tóxicos.
Na história apresentada, verifique se eles perceberam que o motivo pelo qual a mãe do personagem pretende trocar o *smartphone* é o fato de o equipamento não funcionar mais. Comente que uma alternativa para essa situação seria consertá-lo, porém, por se tratar de um equipamento eletrônico, muitas vezes é mais vantajoso comprar um novo, pois a manutenção pode ter um custo relativamente alto, de um valor próximo ao de um equipamento novo.

- A leitura do texto pode ser feita coletivamente, e as questões propostas podem ser resolvidas em grupos de três ou quatro alunos e discutidas ao final. Após a resolução, verifique a possibilidade de apresentar informações sobre os locais adequados de coleta de lixo eletrônico no município em que moram ou, ainda, convidar um profissional que trabalhe com esse tipo de reciclagem, a fim de que ele possa apresentar mais informações sobre o assunto.
- Pergunte aos alunos se eles têm o hábito de verificar se um aparelho eletrônico pode ser consertado antes de optarem pela troca. Questione-os sobre o tempo de vida útil de um *smartphone*, por exemplo, no sentido de fazê-los pensar sobre o motivo de aparelhos digitais apresentarem falhas e lentidão após um período de uso, que tem ficado cada vez mais curto. Conduza a conversa para o entendimento de que, quanto mais os aparelhos são trocados, mais lixo eletrônico é gerado, causando assim mais danos ambientais.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Memória RAM | 2 GB | 4 GB | 8 GB |
| Memória Interna | 32 GB | 32 GB | 64 GB |
| Processador | 1,4 GHz | 1,6 GHz | 1,8 GHz |
| Tela | 5" | 4,5" | 5,5" |
| Câmera | 14 MP | 12 MP | 14 MP |
| Preço | R$ 900,00 | R$ 890,00 | R$ 1 450,00 |

Nik Neves

## Analisando com cidadania

Anote no caderno Respostas nas orientações ao professor.

1. Em sua opinião, o que instiga os consumidores a comprarem novos equipamentos eletroeletrônicos?
2. Você conhece algum ponto de coleta de lixo eletroeletrônico no município em que mora? Já descartou algum equipamento nesse local?
3. Quais características podem influenciar a escolha do consumidor ao adquirir um *smartphone* novo, como o personagem?

## Analisando com a Matemática

Anote no caderno

4. Cite exemplos de unidades de medida de capacidade interna e de processamento de dados dos *smartphones*.
5. Você conhece as características que estão sendo consideradas para comparar os três modelos de *smartphone* no início da página? Qual modelo você escolheria? Converse com o professor e os colegas a respeito dessas características.

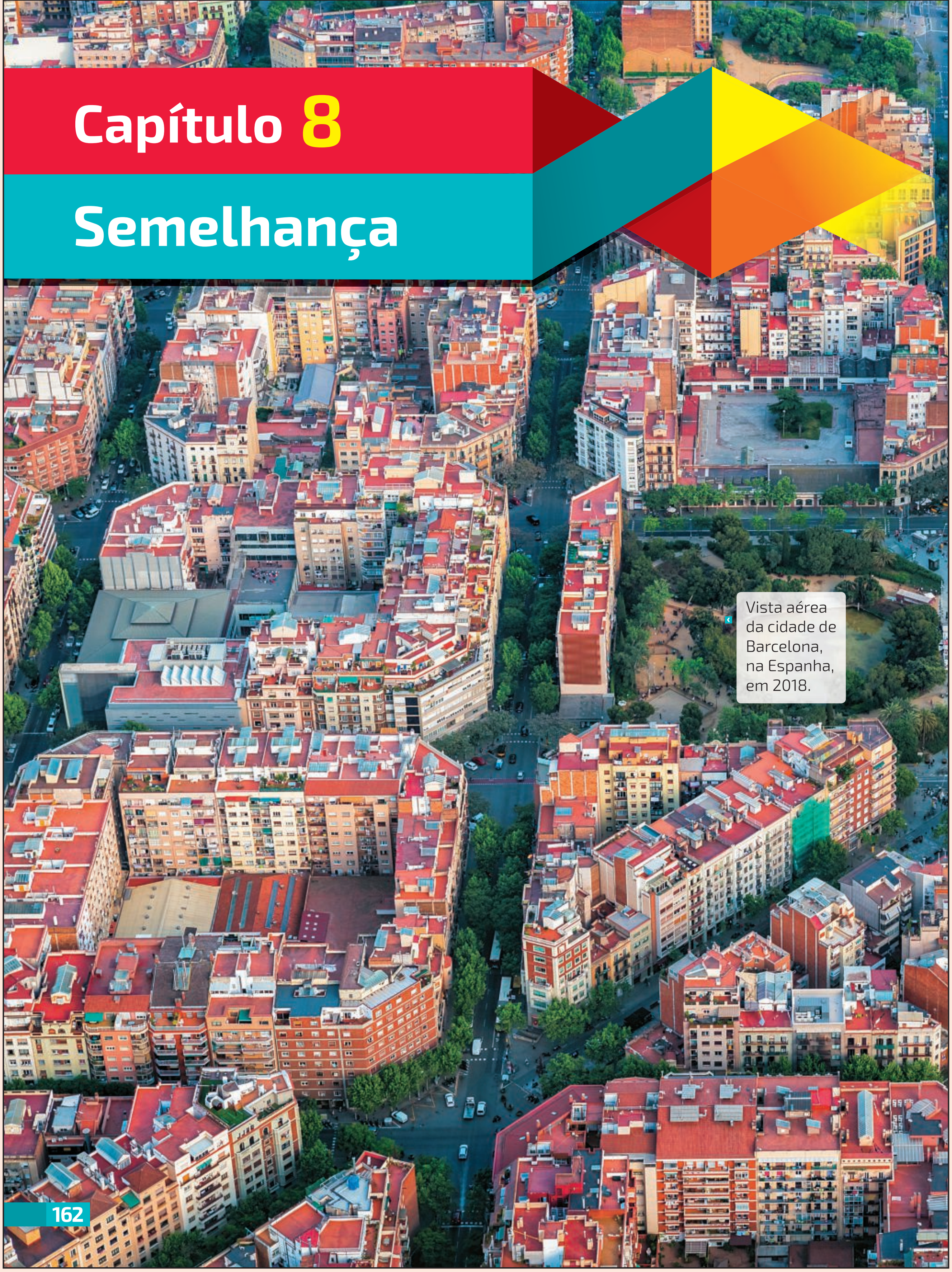
- Ao trabalhar com a questão **1**, converse com os alunos sobre a obsolescência programada, que se trata da decisão consciente de um fabricante de programar seu produto para ter certo tempo de vida útil, de modo que novos produtos o superem em tecnologias e funcionalidades e instiguem o consumidor a querer comprar a novidade. Peça aos alunos que deem exemplos de situações em que é possível observar a obsolescência (aproveite para dizer que essa palavra deriva de *obsoleto*, que quer dizer ultrapassado), como nos casos dos *smartphones*.

### Respostas

1. Resposta pessoal. Possíveis respostas: A constante inovação tecnológica; curto tempo de vida útil dos produtos.
2. Resposta pessoal. Nessa questão, promova uma discussão acerca dos locais indicados pelos alunos. Permita que falem sobre as experiências de descartar lixo eletrônico. Também é possível pesquisar locais de descarte no município em que moram.
3. Possíveis respostas: capacidade de armazenamento; velocidade de processamento; dimensões e resoluções da tela; durabilidade; funções extras; preços promocionais.
4. Unidades de medida de capacidade interna: baite (B), quilobaite (KB), megabaite (MB), gigabaite (GB) e terabaite (TB); unidades de medida de processamento de dados: hertz (Hz), megahertz (MHz) e gigahertz (GHz).
5. Resposta pessoal. Nessa questão, promova uma discussão acerca das informações usadas para comparar os modelos de *smartphone*. Espera-se que os alunos reconheçam as informações sobre memória RAM e memória interna (capacidade de armazenamento), velocidade de processamento, tamanho da tela em polegadas e resolução da câmera em *megapixels*. Aproveite as informações do preço para questionar os alunos a respeito do modelo com o melhor custo-benefício.

# Capítulo 8

# Semelhança



Vista aérea da cidade de Barcelona, na Espanha, em 2018.

Esse capítulo retomará conceitos de ângulos opostos pelo vértice e ângulos formados por um feixe de retas paralelas e uma transversal, e prosseguirá abordando o cálculo da razão entre dois segmentos de reta.

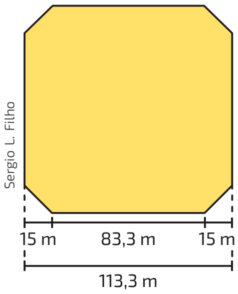
Dessa maneira, proporcionará que os alunos compreendam e verifiquem o teorema de Tales e o utilizem para determinar a medida do comprimento de segmentos de retas, aplicando-o em triângulos. Também serão estudados os conceitos de polígonos semelhantes, ampliação e redução, utilizando homotetia e a semelhança de triângulos.

- As páginas de abertura trazem algumas informações sobre o plano de urbanização de Barcelona, no litoral da Espanha. Diga aos alunos que um dos pressupostos de Ildefonso Cerdà era considerar a moradia um elemento fundamental para a qualidade de vida, por isso instaurou em seu projeto o chamado “urbanismo humanista”, que previa habitações dotadas de sol, luz natural e vento, além de espaços arborizados e equipamentos comunitários. O trabalho com essas páginas pode ser conduzido por meio de uma leitura coletiva do texto e, em seguida, pela proposição de um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. Durante a conversa, mesmo tendo em vista o fato de Barcelona ser bastante conhecida por seus atrativos turísticos e pelo famoso clube de futebol, verifique a possibilidade de mostrar mais imagens da cidade catalã, sobretudo as que ilustram esses pormenores. Outra possibilidade é levá-los ao laboratório de informática para que eles mesmos pesquisem fotos e outras informações sobre o plano urbanístico. As questões podem ser respondidas individualmente ou em duplas, de maneira que os alunos interajam e troquem experiências.

marchello74/Shutterstock.com

Em um período de enriquecimento acelerado, devido às atividades portuária e industrial, a cidade de Barcelona, na Espanha, também passava por grande crescimento populacional e, consequentemente, superlotação. Para adequar a cidade a todo esse crescimento, o engenheiro Ildefonso Cerdà elaborou um projeto de expansão da cidade, conhecido como Plano de Cerdà, que foi aprovado em 1859.

Além da expansão territorial, o plano apresenta um sistema equilibrado de distribuição de residências, parques, comércios e indústrias. O modo como as ruas, avenidas e quarteirões são organizados permite que se estendam à medida que a cidade for crescendo.



Sergio L. Filho

Medidas das dimensões dos quarteirões padrão do Plano de Cerdà.

## Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

**A** Em seu caderno, faça um desenho representando a organização das ruas e quarteirões apresentados na fotografia.

**B** Considerando as ruas que aparecem na fotografia como retas, quais posições relativas entre retas você identifica?

**C** Imagine que você projetará uma cidade. Como você organizaria as ruas e os quarteirões?

**Pensando nisso...**

**A** Resposta pessoal.

**B** Secantes, inclusive perpendiculares e paralelas.

**C** Resposta pessoal.

- No item **A**, espera-se que os alunos façam o desenho representando a organização das ruas por meio de um esquema utilizando retas paralelas e transversais em sua composição.
- Aproveite o trabalho com o item **B** para verificar se os alunos são capazes de identificar as ruas paralelas e perpendiculares.
- No item **C**, peça que os alunos façam o desenho, de acordo com o modo como realizariam a organização das ruas e quarteirões.

**Objetivos do capítulo**

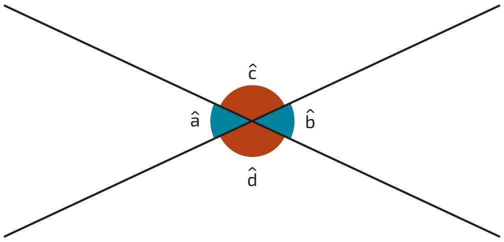
- Compreender as propriedades dos ângulos opostos pelo vértice e dos ângulos formados por um feixe de retas paralelas e uma transversal.
- Calcular a razão entre dois segmentos de reta.
- Verificar e compreender o teorema de Tales.
- Identificar segmentos proporcionais
- Utilizar o teorema de Tales para determinar a medida de um segmento de reta.
- Reconhecer figuras e polígonos semelhantes.
- Ampliar e reduzir polígonos utilizando a homotetia.
- Reconhecer triângulos semelhantes.

**Material digital**

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **7**, **8** e **9** do 3º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

# Ângulos opostos pelo vértice

Vimos em anos anteriores que duas retas concorrentes que formam entre si ângulos com medidas diferentes de 90° são chamadas oblíquas. Estudamos também que dois ângulos opostos pelos vértices formados por duas retas concorrentes são congruentes, ou seja, possuem medidas iguais.



Na imagem ao lado, os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são congruentes e indicamos essa congruência por $\hat{a} \equiv \hat{b}$. Temos também que $\hat{c} \equiv \hat{d}$.

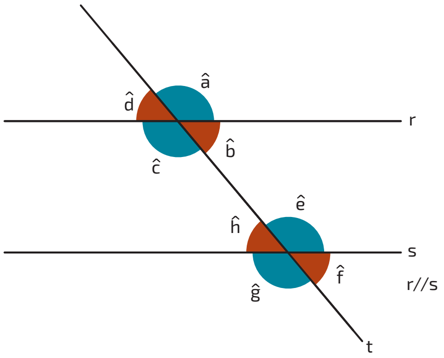
Considerando que a medida do ângulo $\hat{a}$ seja igual a, por exemplo, 50°, veja como determinar a medida dos outros ângulos.

- Como $\text{med}(\hat{a}) = \text{med}(\hat{b})$, temos que $\text{med}(\hat{b}) = 50°$.
- Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{d}$ são suplementares, logo:
  $\text{med}(\hat{a}) + \text{med}(\hat{d}) = 180°$.
  Calculando a medida do ângulo $\hat{d}$, temos:
  $\text{med}(\hat{d}) = 180° - 50° = 130°$.
- Como $\text{med}(\hat{d}) = \text{med}(\hat{c})$, temos que $\text{med}(\hat{c}) = 130°$.

## Ângulos formados por um feixe de retas e uma transversal

Já estudamos que duas retas são paralelas quando estão em um mesmo plano e nunca se cruzam. Vimos também que, de maneira geral, quando um par de retas paralelas é cortado por uma transversal, temos que os pares de ângulos:

- correspondentes têm medidas iguais;
- alternos têm medidas iguais;
- colaterais são suplementares.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Na imagem ao lado, os ângulos correspondentes estão indicados com a mesma cor.

Na imagem apresentada anteriormente, os ângulos:

- $\hat{b}$ e $\hat{e}$; $\hat{c}$ e $\hat{h}$ são chamados **colaterais internos** porque estão entre as retas paralelas e do mesmo lado em relação à reta transversal.
- $\hat{a}$ e $\hat{f}$; $\hat{d}$ e $\hat{g}$ são chamados **colaterais externos** porque estão do mesmo lado em relação à reta transversal, mas não estão entre as retas paralelas.
- $\hat{c}$ e $\hat{e}$; $\hat{b}$ e $\hat{h}$ são chamados **alternos internos** porque estão em lados opostos em relação à reta transversal e estão entre as retas paralelas.
- $\hat{a}$ e $\hat{g}$; $\hat{d}$ e $\hat{f}$ são chamados **alternos externos** porque estão em lados opostos em relação à reta transversal e não estão entre as retas paralelas.

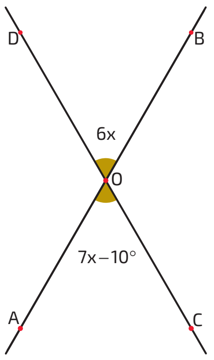
## Atividades

Anote no caderno

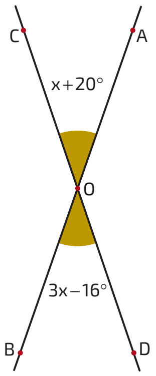
**1.** Dois ângulos opostos pelo vértice medem 105° e 3x + 30°. Qual é o valor de **x**?
25°

**2.** A imagem de cada item a seguir mostra duas retas concorrentes que se cruzam em **O**. Qual é o valor de **x**? E qual é a medida do ângulo $A\hat{O}C$?

**I )**
10°; 60°

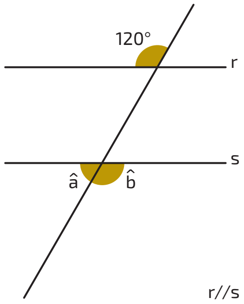


**II )**
18°; 38°



Ilustrações: Sergio L. Filho

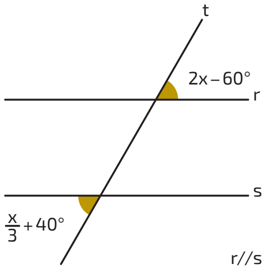
**3.** Observe as retas paralelas **r** e **s** e a reta transversal **t**. Determine a medida de $\hat{a}$ e $\hat{b}$. med($\hat{a}$) = 60°; med($\hat{b}$) = 120°



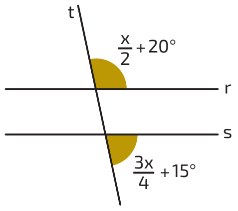
Sergio L. Filho

**4.** Em cada item, as retas **r** e **s** são paralelas e a reta **t** é uma transversal a elas. Qual é o valor de **x**?

**I )** 60°



**II )** 116°



Ilustrações: Sergio L. Filho

**Avaliação**

- Durante o estudo dessa página, observe o modo como os alunos identificam as características dos ângulos correspondentes internos e externos e dos ângulos alternos internos e externos em um feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal. Para isso, proponha alguns exemplos na lousa e peça que identifiquem tais ângulos, criando um momento de diálogo no qual os alunos possam expor suas conjecturas e esclarecer dúvidas. Caso julgue necessário, realize uma revisão desses conceitos, que podem ser encontrados no capítulo **8** do volume do 7º ano dessa coleção.

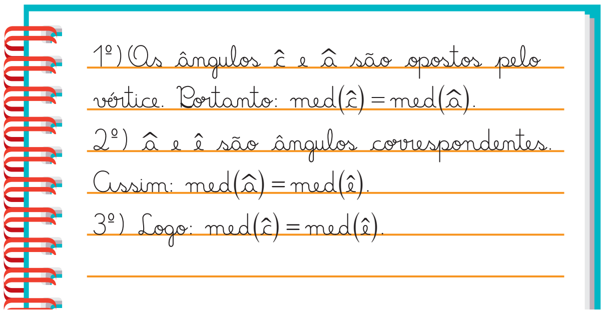
**BNCC em foco**

- A atividade **5** proporciona aos alunos desenvolverem a habilidade de demonstrar relações simples, mobilizando os conceitos estudados sobre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, contemplando assim a habilidade **EF09MA10**.
- Por meio da atividade **6**, que apresenta um símbolo nacional de um país do continente americano, é possível trabalhar a **Competência geral 9**, considerando o desenvolvimento da habilidade de valorizar a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, com seus saberes, sua cultura e suas potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

**Relacionando saberes**

- Aproveite que a atividade **6** destaca um país da América Central e faça uma relação com o componente curricular **Geografia**, conversando com os alunos sobre a Jamaica. Se necessário, peça o auxílio do professor responsável pelo componente. Algumas informações relevantes é que se trata de um território insular, cuja língua oficial é o inglês e a capital é Kingston. Além disso, o país é mundialmente conhecido por ser o berço do movimento rastafári, que congrega características religiosas e sociais.

**5.** Veja como Izabel demonstrou a relação entre os ângulos alternos internos $\hat{c}$ e $\hat{e}$ da figura.

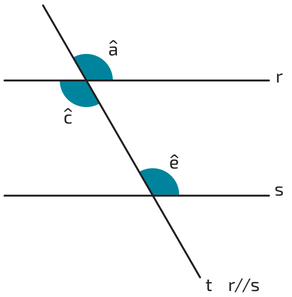


1º) Os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{a}$ são opostos pelo vértice. Portanto: $med(\hat{c}) = med(\hat{a})$.

2º) $\hat{a}$ e $\hat{e}$ são ângulos correspondentes.

Assim: $med(\hat{a}) = med(\hat{e})$.

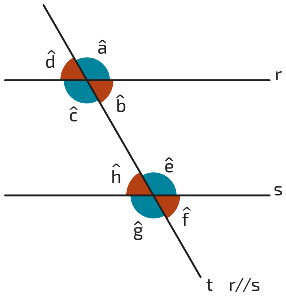
3º) Logo: $med(\hat{c}) = med(\hat{e})$.



Agora, de maneira parecida, demonstre a relação entre os ângulos:

Respostas nas orientações ao professor.

- alternos externos $\hat{d}$ e $\hat{f}$.
- colaterais internos $\hat{b}$ e $\hat{e}$.
- colaterais externos $\hat{a}$ e $\hat{f}$.



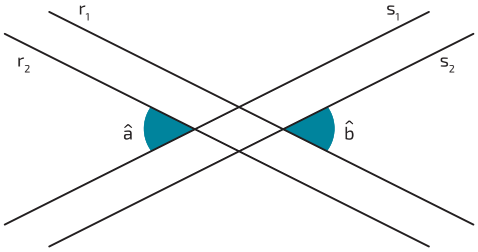
Ilustrações: Sergio L. Filho

6. Possíveis respostas:
Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são congruentes. Considerando $\hat{c}$ o ângulo alterno externo ao ângulo $\hat{b}$, quando consideramos as retas paralelas $s_1$ e $s_2$ e a transversal $r_1$, temos que $med(\hat{c}) = med(\hat{b})$. Este mesmo ângulo $\hat{c}$ é correspondente ao ângulo $\hat{a}$ quando consideramos as paralelas $r_1$ e $r_2$ com relação à reta transversal $s_1$, logo $med(\hat{c}) = med(\hat{a})$.
Portanto, $med(\hat{a}) = med(\hat{b})$.

**6.** A bandeira da Jamaica foi adotada em 6 de agosto de 1962, dia em que o país venceu a escravidão tornando-se uma colônia independente da Grã-Bretanha. As cores da bandeira são o amarelo, o preto e o verde e cada uma delas tem um significado: a cruz diagonal em amarelo representa a beleza da luz do Sol e as riquezas naturais do país; os triângulos em preto simbolizam os habitantes jamaicanos e a sua criatividade; e o verde remete à esperança e aos recursos agrícolas. Veja abaixo a bandeira da Jamaica e a representação geométrica de alguns elementos que compõem esta bandeira.

Ilustrações: Sergio L. Filho

Bandeira da Jamaica.



Representação geométrica de alguns elementos que compõem a bandeira.

Sabendo que a reta $r_1$ é paralela à reta $r_2$ e que a reta $s_1$ é paralela à reta $s_2$, o que podemos afirmar sobre os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$? Justifique sua resposta.

**Respostas**

**5.** • ângulos alternos externos $\hat{d}$ e $\hat{f}$:

1º) Os ângulos $\hat{d}$ e $\hat{b}$ são opostos pelo vértice. Portanto: $med(\hat{d}) = med(\hat{b})$.

2º) $\hat{b}$ e $\hat{f}$ são ângulos correspondentes. Assim: $med(\hat{b}) = med(\hat{f})$.

2º) Logo: $med(\hat{d}) = med(\hat{f})$.

- ângulos colaterais internos $\hat{b}$ e $\hat{e}$:

1º) Os ângulos $\hat{b}$ e $\hat{d}$ são opostos pelo vértice. Portanto: $med(\hat{b}) = med(\hat{d})$.

2º) $\hat{d}$ e $\hat{h}$ são ângulos correspondentes. Assim: $med(\hat{d}) = med(\hat{h})$.

3º) $\hat{e}$ e $\hat{h}$ são ângulos suplementares, ou seja, $med(\hat{e}) + med(\hat{h}) = 180°$.

4º) Logo: $med(\hat{e}) + med(\hat{h}) = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow med(\hat{e}) + med(\hat{b}) = 180°$.

# Segmentos proporcionais

Estudamos anteriormente algumas razões entre grandezas, como a velocidade média e a densidade demográfica. Neste tópico, estudaremos o que são **razões entre segmentos de reta**. Para isso, considere os segmentos a seguir.

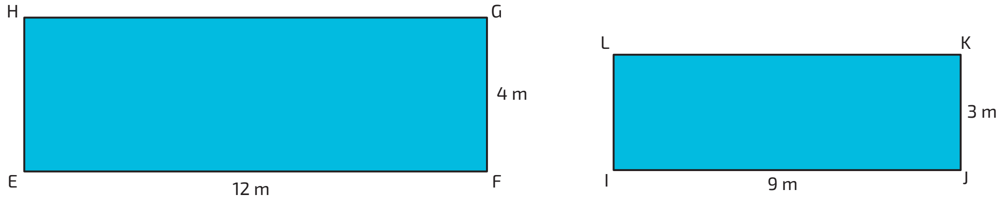
Dizer que a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é igual a 4 é o mesmo que dizer que o segmento CD "cabe" 4 vezes no segmento AB.

A razão entre os segmentos AB e CD é dada pela divisão da medida do comprimento de $\overline{AB}$ pela de $\overline{CD}$.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{8}{2} = 4$$

Portanto, a razão entre os segmentos AB e CD é 4, ou seja, $\frac{AB}{CD} = 4$.

Agora, considere os retângulos EFGH e IJKL.



Vamos calcular as razões entre os segmentos EF e FG, e entre os segmentos IJ e JK.

- $\frac{EF}{FG} = \frac{12}{4} = 3$
- $\frac{IJ}{JK} = \frac{9}{3} = 3$

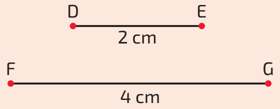
Temos que $\frac{EF}{FG} = \frac{IJ}{JK}$, isto é, as razões entre os segmentos são iguais. Nesse caso, dizemos que os segmentos EF e FG são **proporcionais** aos segmentos IJ e JK.

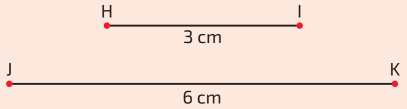
- A **razão entre dois segmentos** é dada pela divisão entre as medidas dos comprimentos desses segmentos, considerando uma mesma unidade de medida de comprimento.

A razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ é 2,5, pois:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

- Quando a razão entre dois segmentos é igual à razão entre outros dois segmentos, dizemos que eles são **proporcionais**.





Os segmentos DE e FG são proporcionais aos segmentos HI e JK, pois:

- $\frac{DE}{FG} = \frac{2}{4} = 0{,}5$
- $\frac{HI}{JK} = \frac{3}{6} = 0{,}5$

Ilustrações: Sergio L. Filho

**Avaliação**

- Tendo em vista que o ato de avaliar deve ser contínuo durante todo o processo de formação, observe, no decorrer do trabalho com esse capítulo, o modo como os alunos lidam com os conceitos de razão e proporção. Caso julgue oportuno, revise esses conceitos, pois serão utilizados para prosseguir com o conteúdo. Para isso, consulte o capítulo **4** desse volume.

- ângulos colaterais externos $\hat{a}$ e $\hat{f}$:

**1º)** Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são suplementares. Portanto: $med(\hat{a}) + med(\hat{b}) = 180°$.

**2º)** $\hat{b}$ e $\hat{f}$ são ângulos correspondentes. Assim: $med(\hat{b}) = med(\hat{f})$.

**3º)** Logo: $med(\hat{a}) + med(\hat{b}) = 180° \Rightarrow med(\hat{a}) + med(\hat{f}) = 180°$.

- A atividade **8** pode ser complementada com a seguinte questão:
  - O comprimento do lado maior de um retângulo mede 60 cm. Calcule a medida do comprimento do outro lado, de modo que a razão entre o lado maior e o lado menor seja igual à calculada no item **a**.

    Ⓡ 24 cm

## Atividades

**Anote no caderno**

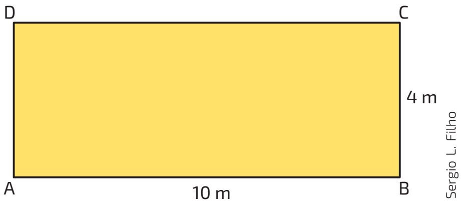
**7.** Determine a razão entre os segmentos:

**a)** AB = 5 cm e BC = 15 cm $\frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0{,}333...$

**b)** CD = 4 cm e DE = 10 cm $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

**c)** AC = 20 cm e CD = 4 cm $\frac{20}{4} = 5$

**8.** Observe o retângulo ABCD.



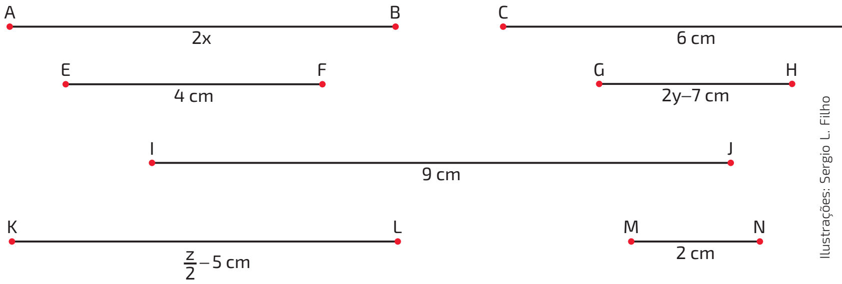
Sergio L. Filho

**a)** Qual a razão entre o lado maior (comprimento) e o lado menor (largura) desse retângulo? $\frac{10}{4} = 2{,}5$

**b)** Se acrescentarmos 3 cm na medida do comprimento de cada um dos lados desse retângulo, a razão entre o maior lado e o menor lado permanecerá a mesma? Justifique sua resposta. Não, pois $\frac{13}{7} \neq \frac{10}{4}$.

**9.** Sabendo que MN = 60 cm, OP = 15 cm e QR = 100 cm, determine a medida do comprimento de $\overline{ST}$ de modo que $\overline{MN}$ e $\overline{OP}$ sejam proporcionais a $\overline{QR}$ e $\overline{ST}$.
ST = 25 cm

**10.** Observe os segmentos de reta e suas medidas de comprimento.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Sabendo que as igualdades a seguir são verdadeiras, determine o valor de **x**, **y** e **z**. x = 3 cm; y = 5 cm; z = 22 cm

$\frac{CD}{EF} = \frac{IJ}{AB}$ $\frac{IJ}{GH} = \frac{AB}{MN}$ $\frac{EF}{KL} = \frac{CD}{IJ}$

**11.** No mapa, cada 1 cm equivale a 150 km.

**Medida da distância em linha reta entre Belém (PA) e Teresina (PI) – 2016**

Edson Bellusci

IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 7. ed. Rio de Janeiro, 2016.

Com o auxílio de uma régua, resolva.

**a)** Calcule, em quilômetros, a medida aproximada da distância real em linha reta entre Belém e Teresina. 750 km

**b)** Determine, em quilômetros, a medida aproximada da distância real em linha reta entre Belém e Fortaleza. 1140 km

# Teorema de Tales

Estudaremos agora uma propriedade relacionada a retas paralelas e transversais, denominada **teorema de Tales**. Essa propriedade pode ser enunciada da seguinte maneira.

> Um feixe de retas paralelas divide duas retas transversais, de maneira que os segmentos obtidos em uma são ordenadamente proporcionais aos segmentos obtidos na outra.

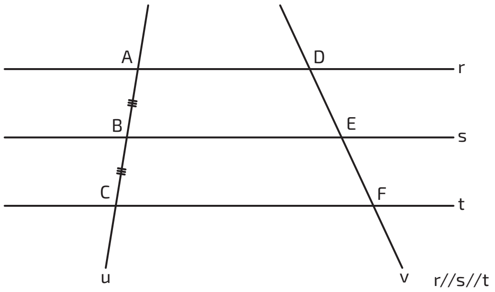
> Quando três ou mais retas em um mesmo plano são paralelas entre si, dizemos que elas formam um **feixe de retas paralelas**.

Vamos demonstrar o teorema de Tales para dois casos.

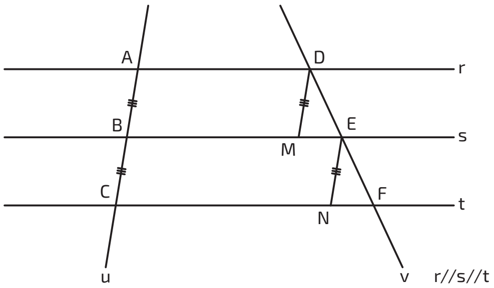
**1º caso**: Feixes de retas paralelas que dividem uma transversal em segmentos congruentes.

Considere o feixe de retas paralelas **r**, **s** e **t**, as retas transversais **u** e **v** e os pontos de interseção **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** destas retas, de modo que se tenha $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$.

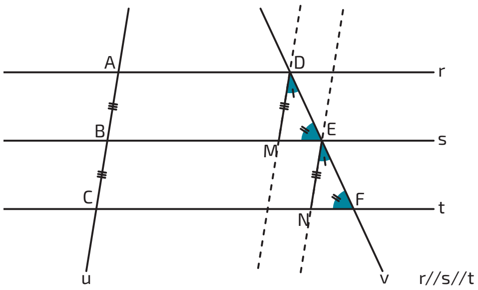
Vamos mostrar que $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$, ou seja, $\frac{DE}{EF} = 1$.



Traçamos os segmentos DM e EN, paralelos a **u**, e obtemos os paralelogramos ABMD e BCNE, com $\overline{AB} \equiv \overline{DM}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EN}$. Como $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$, concluímos que $\overline{DM} \equiv \overline{EN}$.



Considerando as retas paralelas que contêm os segmentos DM e EN, e a reta transversal **v**, temos que os ângulos $M\hat{D}E$ e $N\hat{E}F$ são correspondentes e, consequentemente, $M\hat{D}E \equiv N\hat{E}F$. Da mesma maneira, considerando as retas paralelas **s** e **t**, e a reta transversal **v**, temos que os ângulos $D\hat{E}M$ e $E\hat{F}N$ são correspondentes, logo $D\hat{E}M \equiv E\hat{F}N$.



Ilustrações: Sergio L. Filho

- Para complementar o assunto sobre o tópico **Teorema de Tales**, apresente aos alunos o seguinte texto, que traz mais informações sobre a vida de Tales e suas contribuições para a Matemática.

[...]

Segundo parece, Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a algumas viagens. Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra [...]. De volta a Mileto ganhou reputação, graças a seu gênio versátil, de estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo. Tales é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas. Em geometria, creditam- se a ele os seguintes resultados elementares:

1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.

2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.

4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais. [...]

5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto. (Este resultado era do conhecimento dos babilônios cerca de 1 400 anos antes.)

O valor desses resultados não deve ser aquilatado por eles mesmos, mas antes pela crença de que Tales os obteve mediante alguns raciocínios lógicos e não pela intuição ou experimentalmente.

[...]

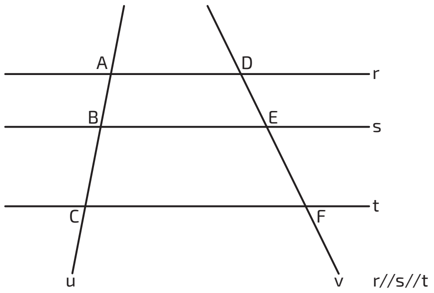
EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 95.

- Para demonstrar o teorema de Tales no 2º caso, foi escolhida uma unidade de medida **m**, de forma que os segmentos AB e BC fossem divididos em uma quantidade inteira de partes iguais. Nesse caso, dizemos que esses segmentos são comensuráveis.

Pelo caso $LAA_o$ (lado, ângulo, ângulo oposto), temos que os triângulos DEM e EFN são congruentes. Portanto, $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$ e os segmentos AB e BC são proporcionais aos segmentos DE e EF, ou seja, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = 1$.

**2º caso**: Feixes de retas paralelas que dividem uma transversal em segmentos comensuráveis não congruentes.

Considere o feixe de retas paralelas **r**, **s** e **t**, as transversais **u** e **v** e os pontos de interseção destas retas **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F**, tais que os segmentos AB e BC sejam comensuráveis.

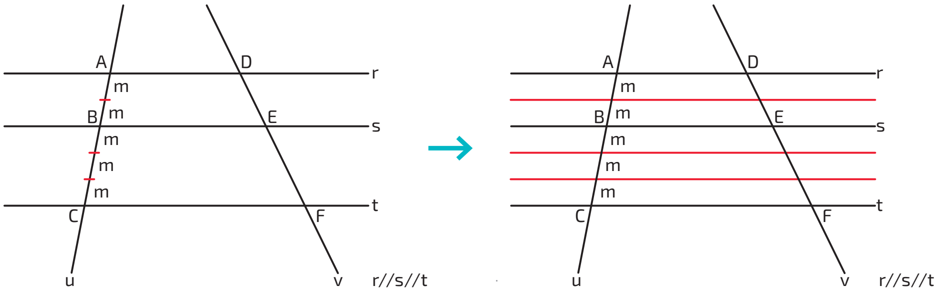


Dois segmentos são **comensuráveis** quando existe uma medida **m** que divide os segmentos em uma quantidade inteira de partes.

Queremos provar que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Sendo os segmentos AB e BC comensuráveis, podemos determinar uma medida **m** que cabe **p** vezes no segmento AB ($AB = p \cdot m$) e **q** vezes no segmento BC ($BC = q \cdot m$), com **p** e **q** números inteiros positivos. Deste modo, $\frac{AB}{BC} = \frac{p \cdot m}{q \cdot m} = \frac{p}{q}$.

Pelos pontos que dividem os segmentos AB e BC em partes de medida **m**, traçamos retas paralelas às retas **r**, **s** e **t**.

Veja a representação desta situação no caso em que $p = 2$ e $q = 3$.



Ilustrações: Sergio L. Filho

De acordo com o 1º caso, essas retas paralelas traçadas determinam, em **v**, precisamente $p + q$ segmentos congruentes, sendo que **p** deles compõe $\overline{DE}$ e **q** deles compõe $\overline{EF}$. Se denotarmos por **n** a medida do comprimento desses segmentos, concluímos que $\frac{DE}{EF} = \frac{p \cdot n}{q \cdot n} = \frac{p}{q}$.

Portanto, os segmentos AB e BC são proporcionais aos segmentos DE e EF, ou seja, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Apesar de termos demonstrado o teorema de Tales apenas para os dois casos apresentados, ele também é válido no caso em que o feixe de retas paralelas divide as transversais em segmentos **incomensuráveis**, isto é, quando não é possível determinar uma medida **m** que divida os dois segmentos em uma quantidade inteira de partes.

Temos ainda que a recíproca do teorema de Tales é válida, isto é:

Se $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, então r//s//t.

Recíproca › ideia ou ação oposta; inverso.

Veja como podemos determinar o valor de **x** na figura a seguir, utilizando o teorema de Tales.

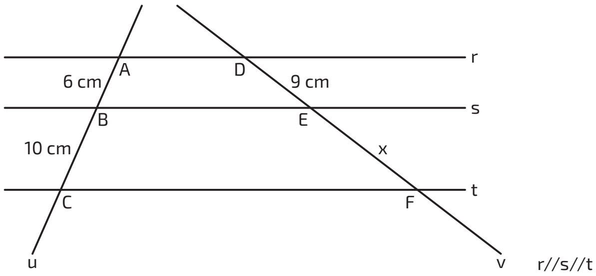
Como r//s//t, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

$$\frac{6}{10} = \frac{9}{x}$$

$$6x = 90$$

$$x = 15$$



Sergio L. Filho

Portanto, x = 15 cm.

## Atividades

Anote no caderno

**12.** Na figura, as retas **r**, **s**, **t** e **u** formam um feixe de retas paralelas. De acordo com essa figura, verifique quais das igualdades são verdadeiras. b; c; f; h

**a)** $\frac{AC}{BC} = \frac{EF}{EG}$

**b)** $\frac{BC}{AB} = \frac{FG}{EF}$

**c)** $\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{EG}$

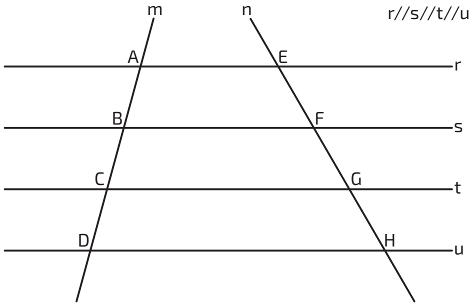
**d)** $\frac{CD}{AD} = \frac{EF}{EH}$

**e)** $\frac{AC}{BD} = \frac{FH}{EG}$

**f)** $\frac{AD}{BC} = \frac{EH}{FG}$

**g)** $\frac{AB}{BC} = \frac{FG}{EF}$

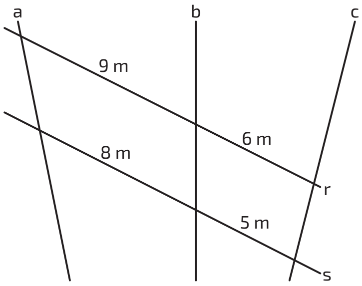
**h)** $\frac{BD}{CD} = \frac{FH}{GH}$



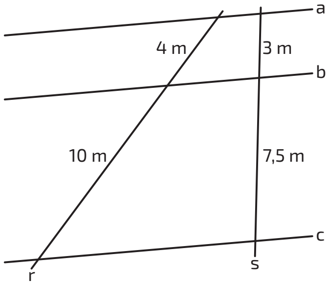
Sergio L. Filho

**13.** Em qual das figuras as retas **a**, **b** e **c** são paralelas? II

**I )**



**II )**



Ilustrações: Sergio L. Filho

- Na atividade **12**, peça aos alunos que escrevam outras igualdades verdadeiras que podem ser obtidas. Sugira-lhes que reescrevam os itens em que as igualdades são falsas, tornando-as verdadeiras.

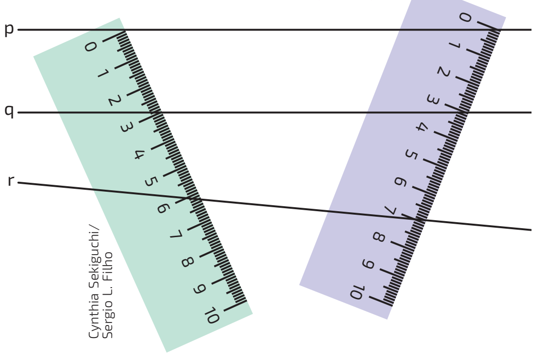
- Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos na atividade **18**:
  - Com base nas informações apresentadas no enunciado, determine as medidas de **a** e **b**.

    **R** a = 24,6 m; b = 16,4m

**BNCC em foco**

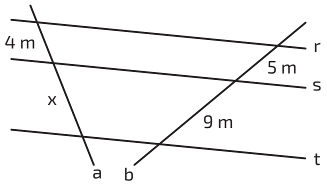
- As atividades **16** e **18** dessa página, bem como outras no decorrer do capítulo, abordam contextos relacionados a aspectos qualitativos e quantitativos presentes nas práticas comuns nos meio sociais, em que os alunos são levados a representar, organizar, investigar e comunicar informações para interpretá-las e avaliá-las criticamente, produzindo argumentos convincentes, o que vai ao encontro do que orienta a **Competência específica de Matemática 4**.
- Assim como ocorre na atividade **18**, em que os alunos são levados a elaborar um problema, outras atividades proporcionarão o desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar problemas que impliquem a aplicação das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes, conforme orienta a habilidade **EF09MA14**.

**14.** As retas **p**, **q** e **r** formam um feixe de retas paralelas? Justifique sua resposta. não; Possível resposta: pois $\frac{3}{3,9} \neq \frac{3}{3,2}$.



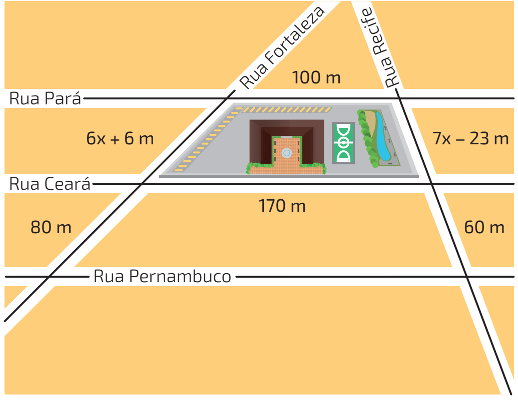
Cynthia Sekiguchi/ Sergio L. Filho

**15.** Calcule o valor de **x** sabendo que as retas **r**, **s** e **t** são paralelas. x = 7,2 m



Sergio L. Filho

**16.** Veja como Mateus representou as ruas próximas à escola em que estuda.



Carmen Martinez

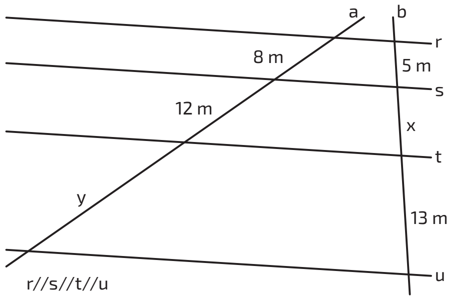
Considerando essas ruas como retas e sabendo que as ruas Pará, Ceará e Pernambuco são paralelas, responda.

**a)** Qual a medida do comprimento do lado da quadra da escola que fica na rua Fortaleza? E na rua Recife? 72 m; 54 m

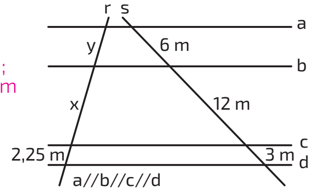
**b)** Qual a medida do perímetro da quadra da escola? 396 m

**17.** Calcule o valor de **x** e **y** em cada figura.

**a)** x = 7,5 m; y = 20,8 m

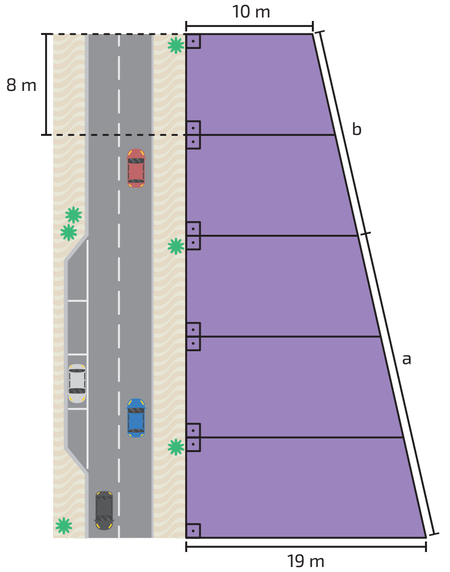


**b)** x = 9 m; y = 4,5 m



Ilustrações: Sergio L. Filho

**18.** A imagem abaixo representa um terreno em que todos os lados são retos e com a medida do perímetro igual a 110 m. Esse é formado por 5 lotes, todos de frente à Rua Piauí e com 8 m de largura cada.

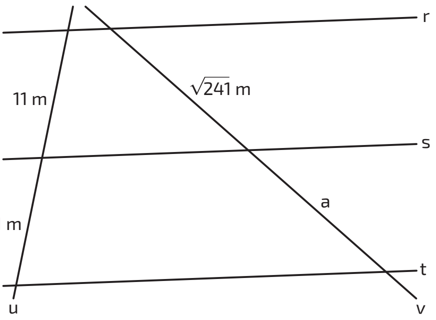


Ana Alexius

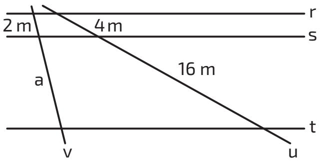
Elabore um problema e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se sua resolução está correta. Resposta pessoal.

**19.** Calcule mentalmente o valor de **a** em cada figura, sabendo que r//s//t.

**a)** $a = \sqrt{241}$ m



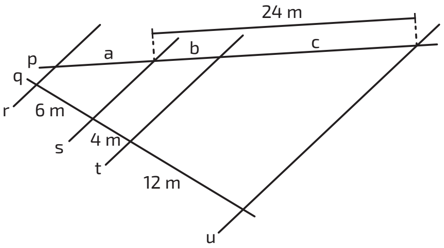
**b)** a = 8 m



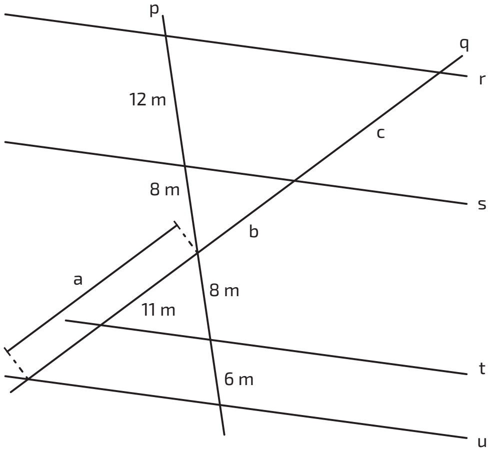
Ilustrações: Sergio L. Filho

**20.** Sabendo que em cada figura r//s//t//u, calcule os valores de **a**, **b** e **c**.

**a)** a = 9 m; b = 6 m; c = 18 m



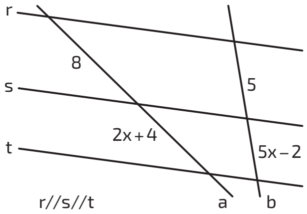
**b)** a = 19,25 m; b = 11 m; c = 16,5 m



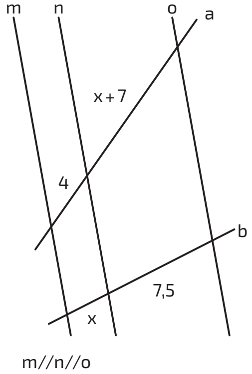
Ilustrações: Sergio L. Filho

**21.** Determine o valor de **x** em cada figura.

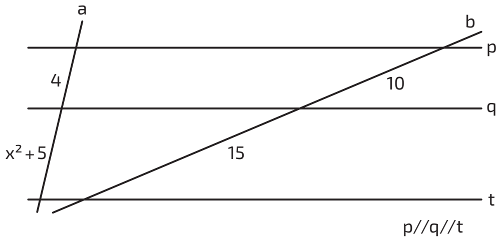
**a)** x = 1,2



**b)** x = 3

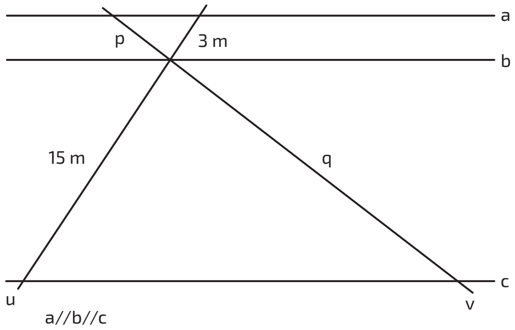


**c)** x = 1 ou x = −1



Ilustrações: Sergio L. Filho

**22.** Determine os valores de **p** e **q** sabendo que a soma dessas medidas é 24,6 m.
p = 4,1 m; q = 20,5 m

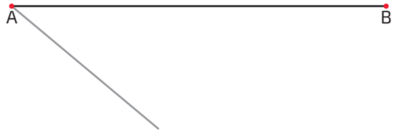


Sergio L. Filho

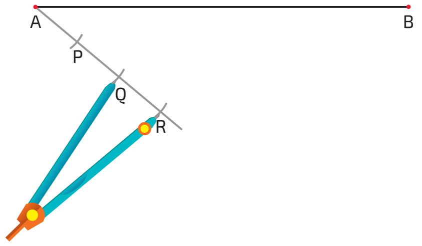
- Caso não haja esquadros e compassos para todos os alunos, reúna-os em grupos para realizarem a atividade ou, então, verifique a possibilidade de levar alguns desses instrumentos para a sala de aula.

**23.** Observe como podemos dividir um segmento AB em três partes com comprimento de mesma medida utilizando uma régua, um par de esquadros e um compasso. Respostas nas orientações ao professor.

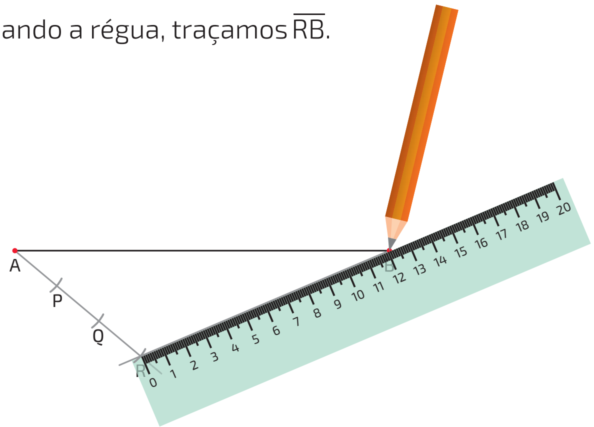
**1º** Inicialmente, traçamos um segmento auxiliar partindo de **A**.



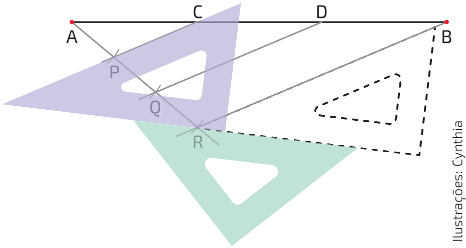
**2º** Depois, utilizando o compasso com abertura qualquer, marcamos no segmento auxiliar os pontos **P**, **Q** e **R**, com a mesma medida de distância entre eles.



**3º** Utilizando a régua, traçamos $\overline{RB}$.



**4º** Em seguida, com os esquadros, traçamos duas retas paralelas a $\overline{RB}$ passando pelos pontos **P** e **Q**, determinando em $\overline{AB}$ os pontos **C** e **D**. Esses pontos dividem o segmento AB em três partes de mesma medida de comprimento.



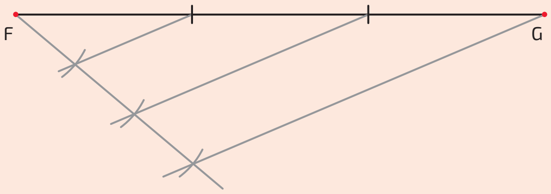
Ilustrações: Cynthia Sekiguch/Keithy Mostach/ Sergio L. Filho

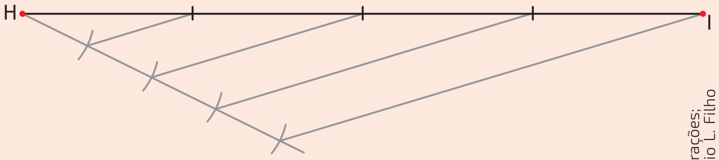
Agora, construa os segmentos FG = 7 cm e HI = 9 cm e, utilizando esses procedimentos, divida:

- $\overline{FG}$ em três partes com comprimento de mesma medida.
- $\overline{HI}$ em quatro partes com comprimento de mesma medida.

**Respostas**

**23.**

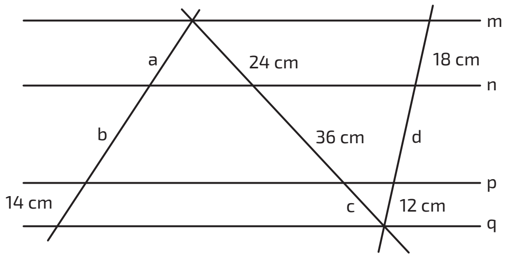




Ilustrações: Sergio L. Filho

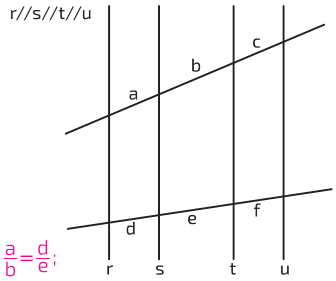
**24.** Calcule os valores de **a**, **b**, **c** e **d** sabendo que as retas **m**, **n**, **p** e **q** formam um feixe de retas paralelas.

a = 21 cm; b = 31,5 cm; c = 16 cm; d = 27 cm



Sergio L. Filho

**25.** Na figura, **a**, **b**, **c**, **d**, **e** e **f** representam medidas em centímetros. Utilizando essas medidas e de acordo com a figura, escreva seis igualdades.

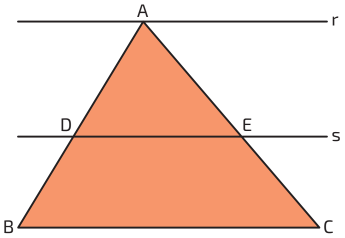


Possível resposta: $\frac{a}{b}=\frac{d}{e}$; $\frac{a}{c}=\frac{d}{f}$; $\frac{f}{e}=\frac{c}{b}$; $\frac{a+b}{b}=\frac{d+e}{e}$; $\frac{a}{a+b+c}=\frac{d}{d+e+f}$; $\frac{a}{b+c}=\frac{d}{e+f}$

## Teorema de Tales e triângulos

O teorema de Tales pode ser aplicado em situações que envolvem triângulos.

No ΔABC, as retas **r** e **s** são paralelas ao lado $\overline{BC}$.



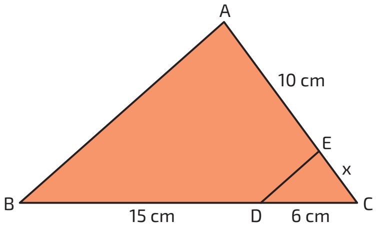
Feixe de retas paralelas: $\overleftrightarrow{BC}$, **s** e **r**

Retas transversais: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$

De acordo com o teorema de Tales, temos: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

> Qualquer reta paralela a um dos lados de um triângulo que intersecta os outros dois lados divide-os em segmentos proporcionais.

Veja, por exemplo, como podemos calcular a medida **x** no triângulo, sabendo que $\overline{DE}//\overline{AB}$.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Aplicando o teorema de Tales:

$$\frac{10}{x}=\frac{15}{6} \Rightarrow 15x = 60 \Rightarrow \frac{15x}{15}=\frac{60}{15} \Rightarrow x = 4$$

Portanto, x = 4 cm.

**BNCC em foco**

- Dessa página em diante, a teoria e as atividades propostas abordarão, inicialmente, os conceitos base para, posteriormente, levar os alunos a reconhecerem as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. Dessa maneira, contempla-se a habilidade **EF09MA12**.

- Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos na atividade **31**:
  - Calcule as medidas de **x**, **y** e **z** indicadas na figura.

    R $x = 120$ m, $y = 104$ m e $z = 80$ m
- Na atividade **32**, lembre os alunos de que o ponto médio de um segmento de reta é aquele que divide o segmento em duas partes de mesma medida de comprimento. Veja uma possível resolução do desafio proposto nessa atividade:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{CD}{BD}$$

$$\frac{AE}{9,4} = \frac{7,2}{7,2}$$

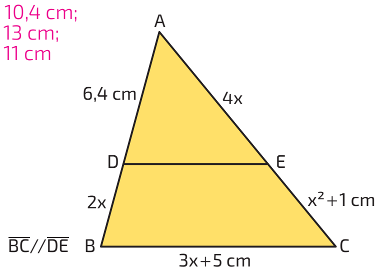
$$AE = 9,4$$

Logo, $x = 28$ cm.

## Atividades

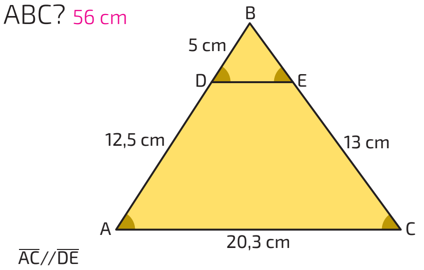
Anote no caderno

**26.** Determine a medida do comprimento dos lados do ΔABC. AB = 10,4 cm; AC = 13 cm; BC = 11 cm



Sergio L. Filho

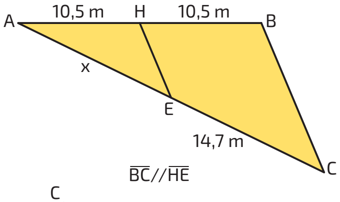
**27.** Qual a medida do perímetro do triângulo ABC? 56 cm



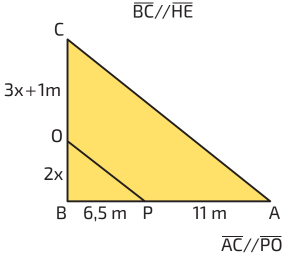
Sergio L. Filho

**28.** Calcule o valor de **x** em cada triângulo.

**a)** x = 14,7 m

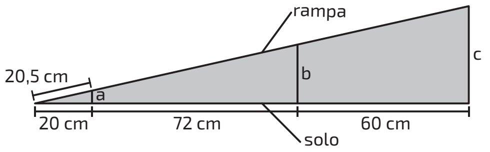


**b)** x = 2,6 m



Ilustrações: Sergio L. Filho

**29.** Veja a seguir o projeto de uma rampa.



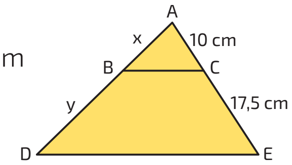
Sergio L. Filho

Calcule a medida do comprimento dessa rampa, sabendo que as estruturas de sustentação, indicadas por **a**, **b** e **c** são paralelas. 155,8 cm

**30.** Determine os valores de **x** e **y** no triângulo, sabendo que:

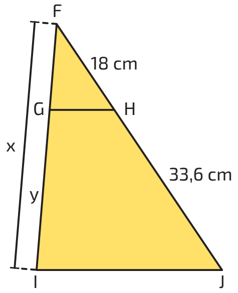
**a)**
- $\overline{BC}//\overline{DE}$
- $y - x = 9$ cm

x = 12 cm e y = 21 cm



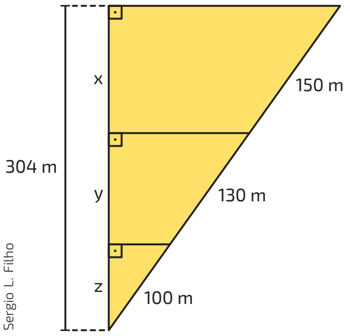
**b)**
- $\overline{GH}//\overline{IJ}$
- $y = x - 15$ cm

x = 43 cm e y = 28 cm



Ilustrações: Sergio L. Filho

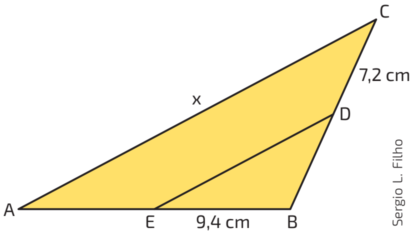
**31.** Observe a imagem abaixo.



Sergio L. Filho

Elabore um problema e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se o que ele fez está correto. Resposta pessoal.

**32.** No ΔABC, **D** é o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e $\overline{ED}//\overline{AC}$. Sabendo que a medida do perímetro desse triângulo é 61,2 cm, determine o valor de **x**. x = 28 cm



Sergio L. Filho

# Semelhança de figuras

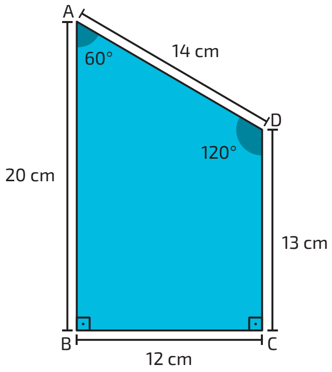
Marcela imprimiu a mesma figura em dois tamanhos diferentes.

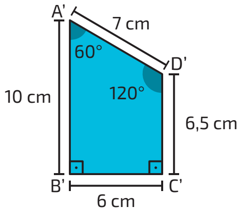
Ilustrações: Ana Alexius

Note que as imagens impressas têm a mesma forma, diferenciando-se apenas pelo tamanho. Na Matemática, quando isso acontece, dizemos que essas são **figuras semelhantes**. Ao ampliar, reduzir ou reproduzir uma figura, obtêm-se figuras semelhantes.

## Polígonos semelhantes

Observe dois quadriláteros semelhantes.





Ilustrações: Sergio L. Filho

Note que os ângulos internos correspondentes possuem medidas iguais, ou seja, são congruentes.

- $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{A'}) = 60^\circ$
- $\text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{C'}) = 90^\circ$
- $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{B'}) = 90^\circ$
- $\text{med}(\hat{D}) = \text{med}(\hat{D'}) = 120^\circ$

As razões entre os lados correspondentes dos quadriláteros ABCD e A'B'C'D' são iguais, ou seja, são proporcionais.

- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{20}{10} = 2$
- $\frac{BC}{B'C'} = \frac{12}{6} = 2$
- $\frac{CD}{C'D'} = \frac{13}{6{,}5} = 2$
- $\frac{AD}{A'D'} = \frac{14}{7} = 2$

- Após o estudo dessa página, reproduza e entregue aos alunos a malha quadriculada disponível nas **Páginas para reprodução**, com o intuito de que eles construam polígonos e tentem realizar, de maneira intuitiva, reduções e ampliações, de forma a mantê-los semelhantes. No decorrer do capítulo, os alunos serão levados a compreender algumas técnicas para realizar tais reproduções de polígonos.

- Nesse momento, é importante conversar com os alunos sobre as diferenças entre polígonos congruentes e polígonos semelhantes. Se necessário, dê exemplos.
- Explique aos alunos que todos os polígonos regulares com a mesma quantidade de lados são semelhantes entre si, pois os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.
- Da atividade **33** em diante, as frações apresentadas nas respostas para calcular a razão de semelhança entre figuras são irredutíveis, porém podem ser consideradas corretas todas as razões entre as medidas dos lados correspondentes das figuras semelhantes. No item **b** da atividade **33**, por exemplo, seria correto utilizar também as frações $\frac{9,6}{6,4}$, $\frac{10,8}{7,2}$, $\frac{10,2}{6,8}$, $\frac{8,25}{5,5}$ e $\frac{5,7}{3,8}$.
- Para a atividade **34**, caso não haja réguas e transferidores para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade, ou verifique a possibilidade de levar alguns desses instrumentos para a sala de aula.

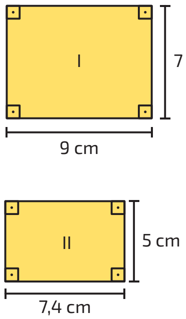
Dizemos que dois polígonos são semelhantes quando os ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais. O valor da razão entre os lados correspondentes é a **razão de semelhança**. No caso apresentado, a razão de semelhança entre os polígonos ABCD e A'B'C'D' é 2.

## Atividades

Anote no caderno

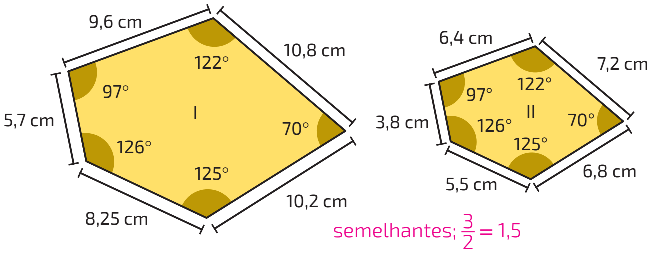
**33.** Identifique os pares de figuras semelhantes e, para eles, calcule a razão de semelhança entre as figuras **I** e **II**.

**a)**



não semelhantes

**b)**

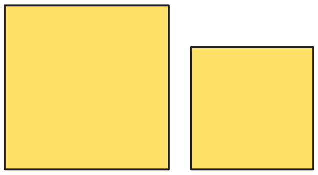


semelhantes; $\frac{3}{2} = 1,5$

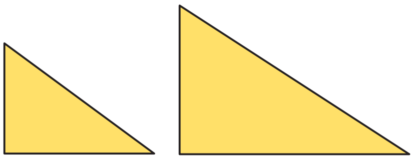
Ilustrações: Sergio L. Filho

**34.** Utilizando régua e transferidor, realize as medidas necessárias e identifique o par de polígonos semelhantes.

**a)** semelhantes

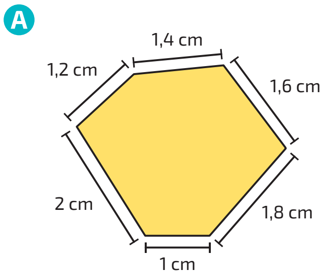


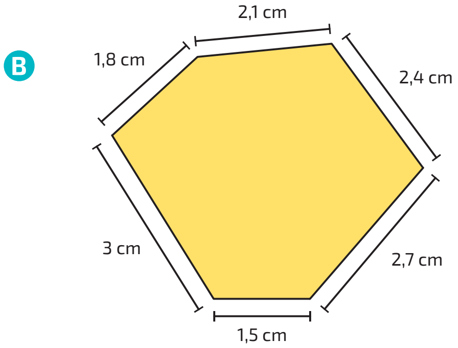
**b)** não semelhantes



Ilustrações: Sergio L. Filho

**35.** Observe as medidas indicadas nos polígonos semelhantes **A** e **B** e resolva as questões.





Ilustrações: Sergio L. Filho

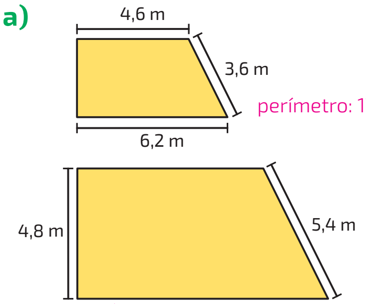
**a)** Qual é a medida do perímetro do polígono **A**? E qual é a medida do perímetro do polígono **B**? 9 cm; 13,5 cm

**b)** Qual é a razão entre as medidas dos perímetros dos polígonos **A** e **B**? $\frac{2}{3}$ ou 0,666...

**c)** Qual é a razão de semelhança entre os polígonos **A** e **B**? $\frac{2}{3}$ ou 0,666...

**36.** Calcule a medida do perímetro dos polígonos representados em cada item, sabendo que eles são semelhantes.

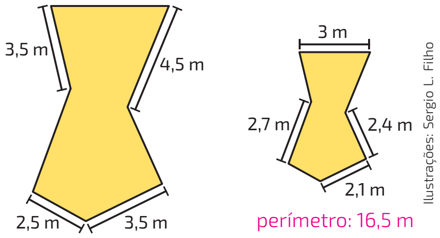
**a)**



perímetro: 17,6 m

perímetro: 26,4 m

**b)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

perímetro: 27,5 m

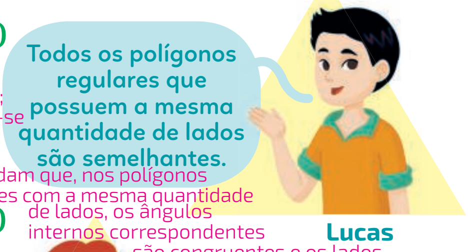
perímetro: 16,5 m

**37.** Junte-se a um colega e verifiquem se o que cada pessoa diz está correto. Em seguida, justifiquem suas respostas.

**a)**

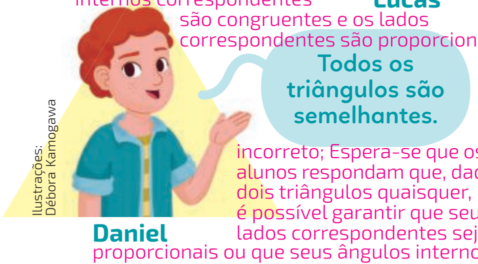
correto; Espera-se que os alunos respondam que, independentemente do tamanho, todos os círculos têm a mesma forma.

**b)**



correto; Espera-se que os alunos respondam que, nos polígonos regulares com a mesma quantidade de lados, os ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

**c)**



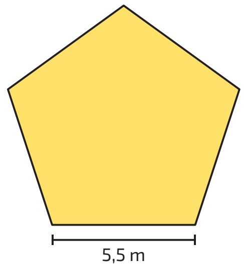
Ilustrações: Débora Kamogawa

incorreto; Espera-se que os alunos respondam que, dados dois triângulos quaisquer, não é possível garantir que seus lados correspondentes sejam proporcionais ou que seus ângulos internos correspondentes sejam congruentes.

**38.** A razão de semelhança entre dois hexágonos regulares é $\frac{7}{2}$. Determine a medida do comprimento do lado de cada um desses hexágonos, sabendo que a medida do perímetro do maior deles é 50,4 cm. maior: 8,4 cm; menor: 2,4 cm

**39.** Observe os pentágonos regulares.

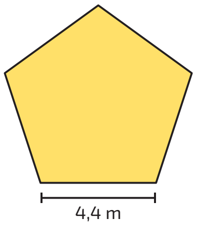
**A**



a) sim; Espera-se que os alunos respondam que, nos polígonos regulares com a mesma quantidade de lados, os ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

c) $\frac{27,5}{22} = \frac{5}{4} = 1,25$

**B**



Ilustrações: Sergio L. Filho

**a)** Esses pentágonos são semelhantes? Justifique sua resposta.

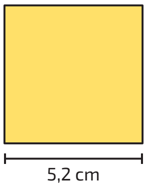
**b)** Qual a razão de semelhança entre os pentágonos **A** e **B**? $\frac{5,5}{4,4} = \frac{5}{4} = 1,25$

**c)** Qual é a razão entre as medidas dos perímetros dos pentágonos **A** e **B**?

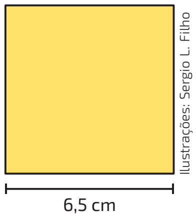
**d)** O resultado obtido nos itens **b** e **c** foi o mesmo? Isso também ocorre com outros polígonos semelhantes? sim; sim

**40.** Observe os quadrados a seguir.

**A**



**B**



Ilustrações: Sergio L. Filho

Com base nas imagens, elabore um problema e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se o que ele fez está correto. Resposta pessoal.

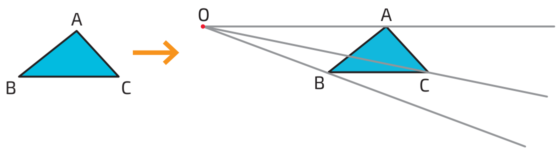
- Veja a resolução do desafio proposto na atividade **38**:
  - lado do hexágono maior:
    $\frac{50,4}{6} = 8,4$, portanto, 8,4 cm
  - lado do hexágono menor:
    $\frac{2}{7} \cdot 8,4 = 2,4$, portanto, 2,4 cm
- Na atividade **39**, leve os alunos a perceberem que a razão entre quaisquer dois lados correspondentes de dois polígonos semelhantes é igual à razão entre a medida de seus perímetros.
- Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos na questão **40**:
  - Qual a razão de semelhança entre os quadrados **A** e **B**?
    R 0,8

A partir dessa atividade, é possível levar os alunos a notarem que o quadrado da razão entre quaisquer lados correspondentes de dois polígonos semelhantes é igual à razão entre suas medidas de área.

# Homotetia

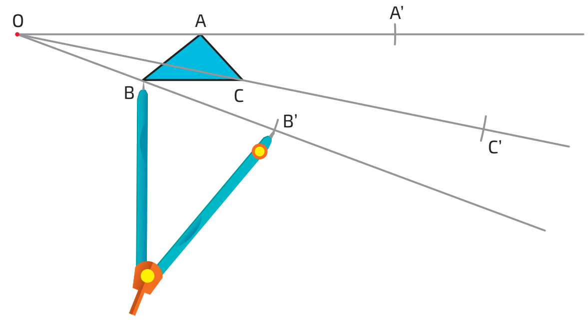
Podemos ampliar ou reduzir uma figura de diversas maneiras, por exemplo, utilizando um **pantógrafo**, um programa de computador ou uma transformação chamada **homotetia**. Observe como podemos ampliar, na razão 2 : 1, o ΔABC utilizando homotetia.

- Determinamos um ponto **O** qualquer, externo ao triângulo, e traçamos as semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

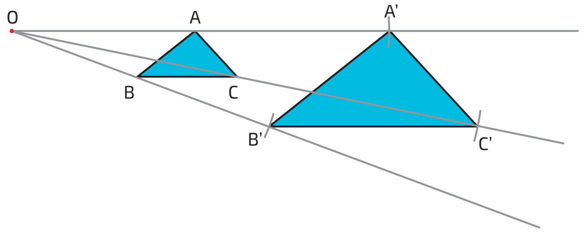


**Pantógrafo ›** instrumento composto de barras articuladas destinado a reproduzir, ampliar ou reduzir figuras.

- Com o auxílio de um compasso, marcamos os pontos A', B' e C' de maneira que OA' = 2OA, OB' = 2OB e OC' = 2OC.

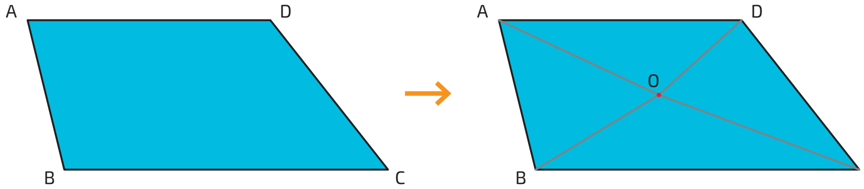


- Ligamos os pontos obtidos e determinamos o ΔA'B'C', que é uma ampliação na razão 2 : 1 do ΔABC.



Agora, veja como podemos reduzir na razão 1 : 2 o quadrilátero ABCD.

- Determinamos um ponto **O** interno ao quadrilátero ABCD e traçamos os segmentos OA, OB, OC e OD.



Ilustrações: Keithy Mostachi/Sergio L. Filho

- Antes de iniciar o tópico dessa página, proponha aos alunos a atividade complementar a seguir, para que possam construir figuras semelhantes utilizando o tangram.

## Atividade complementar

### Tangram e semelhança

**Materiais**

- tangram
- cartolina
- cola
- tesoura com pontas arredondadas

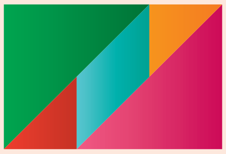
**Desenvolvimento**

- Reproduza o tangram disponível nas **Páginas para reprodução**, peça aos alunos que se reúnam em duplas e entregue um para cada dupla. Em seguida, oriente-os a colar o tangram em uma cartolina e a recortar cada uma das peças. Utilizando as peças, oriente os alunos a construírem as seguintes figuras:

I)

II)

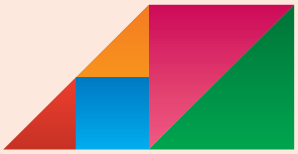
III)



- Com as peças do tangram construídas, oriente os alunos a construírem figuras semelhantes às imagens:

- I, utilizando 5 peças.

R



- II, utilizando 4 peças.

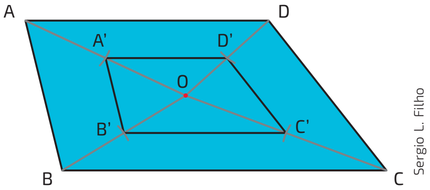
R

- III, utilizando 5 peças.

R

Ilustrações: Maryane Vioto Silva

- Utilizando um compasso, marcamos os pontos A', B', C' e D' de maneira que $OA' = \frac{OA}{2}$, $OB' = \frac{OB}{2}$, $OC' = \frac{OC}{2}$ e $OD' = \frac{OD}{2}$. Depois, ligamos os pontos obtidos e determinamos o quadrilátero A'B'C'D'.



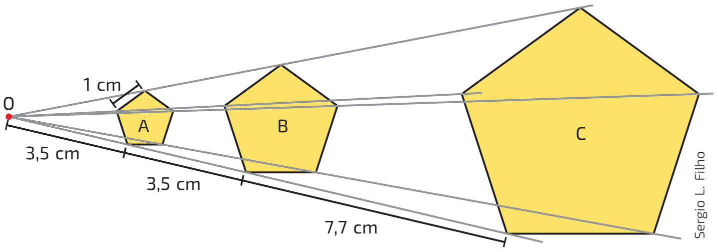
Sergio L. Filho

O quadrilátero A'B'C'D' é uma redução na razão 1 : 2 do quadrilátero ABCD.

## Atividades

Anote no caderno

**41.** Com base no pentágono regular **B**, foram construídos os pentágonos **A** e **C**.



Sergio L. Filho

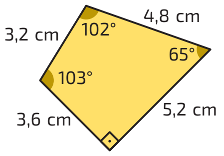
Na seção **Explorando tecnologias**, na página **273**, veja como utilizar um *software* de geometria para construir figuras semelhantes por homotetia.

**a)** Qual a medida do comprimento do lado do pentágono **B**? E do pentágono **C**? 2 cm; 4,2 cm

**b)** Qual a razão entre a medida do comprimento do lado do pentágono **C** e a do pentágono **B**? $\frac{4,2}{2} = 2,1$

**42.** Reproduza o polígono de acordo com as medidas indicadas, utilizando homotetia:

Respostas nas orientações ao professor.



Sergio L. Filho

**a)** amplie-o na razão 2 : 1.

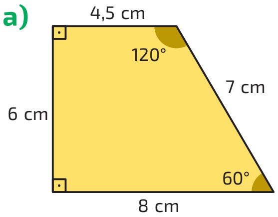
**b)** reduza-o na razão 3 : 4.

**c)** amplie-o na razão 5 : 2.

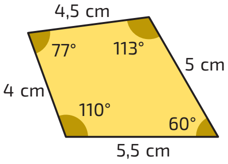
**43.** Construa um triângulo equilátero com medida do comprimento do lado igual a 3 cm. Em seguida, marque um ponto **O** externo ao triângulo e amplie-o na razão 7 : 2. Resposta nas orientações ao professor.

**44.** Reproduza cada polígono de acordo com as medidas indicadas e reduza-os por homotetia numa razão 3 : 5. Respostas nas orientações ao professor.

**a)**



**b)**

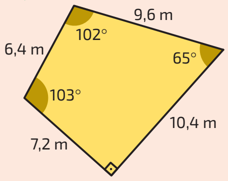


Ilustrações: Sergio L. Filho

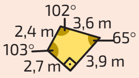
- Na página **273** da seção **Explorando tecnologias**, apresentamos como utilizar o *software* GeoGebra para construir figuras semelhantes por homotetia. Verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para realizarem a construção utilizando essa ferramenta.
- Lembre aos alunos a maneira de dividir, usando um compasso, um segmento em duas partes de mesma medida, assunto estudado no capítulo **9** do volume do **8º** ano dessa coleção.

### Respostas

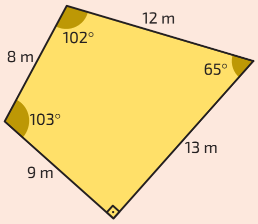
**42. a)**



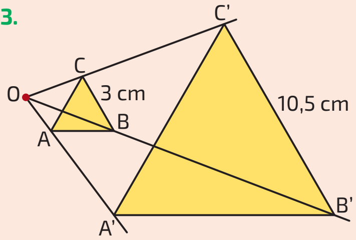
**b)**



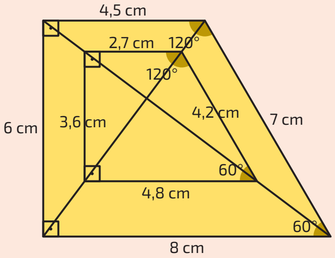
**c)**



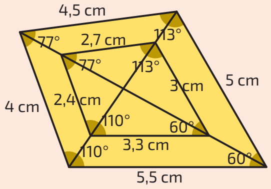
**43.**



**44. a)**



**b)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

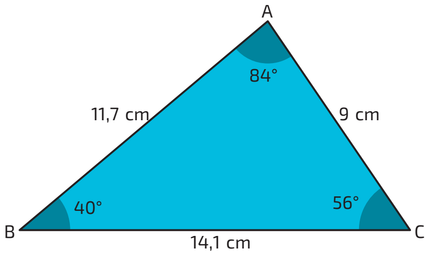
- Se julgar conveniente, retome com os alunos o conceito de congruência de figuras, assunto abordado no capítulo **9** do **8º** ano dessa coleção, de modo que eles compreendam a diferença entre congruência e semelhança.
- A demonstração da propriedade de semelhança de triângulos apresentada nessa página pode ser consultada no livro **Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana**, de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo – 7ª edição (Atual, 1993), na página **200**.

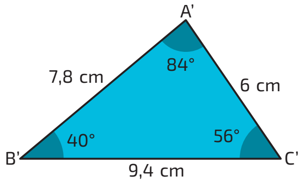
# Triângulos semelhantes

Vimos que dois polígonos são semelhantes quando satisfazem a duas condições:

- os ângulos internos correspondentes são congruentes.
- os lados correspondentes são proporcionais.

Caso apenas uma dessas condições seja satisfeita, os polígonos não serão semelhantes. Veja como podemos verificar se os triângulos a seguir são semelhantes.





Os ângulos internos correspondentes são congruentes:

- $\text{med}(\widehat{A})=\text{med}(\widehat{A'})=84°$
- $\text{med}(\widehat{B})=\text{med}(\widehat{B'})=40°$
- $\text{med}(\widehat{C})=\text{med}(\widehat{C'})=56°$

Os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{3}{2}$$

Dessa forma, como ambas as condições foram satisfeitas, verificamos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

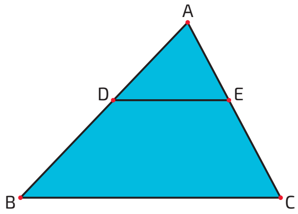
A notação $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ indica que esses triângulos são semelhantes.

Porém, para verificar se dois triângulos são semelhantes não é necessário analisar as medidas de todos os seus ângulos internos e as medidas do comprimento de todos os seus lados. Existem casos em que é possível verificar se dois triângulos são semelhantes conhecendo apenas alguns de seus elementos.

Antes de estudar os casos de semelhança de triângulos, veja uma importante propriedade para esse estudo.

> Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo cruza os outros dois lados formando um novo triângulo, então esses triângulos são semelhantes.

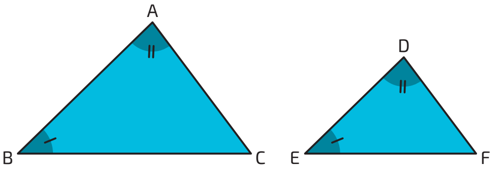
De acordo com a propriedade acima, se traçamos o segmento DE paralelo ao lado BC do triângulo ABC, os triângulos ABC e ADE serão semelhantes.



Ilustrações: Sergio L. Filho

### 1º caso de semelhança de triângulos (AA)

Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois ângulos internos correspondentes congruentes.



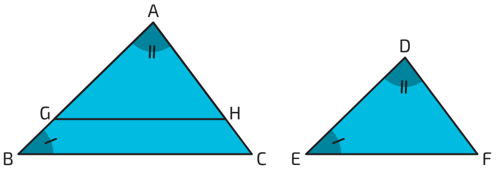
Vamos demonstrar que, se nos triângulos ABC e DEF temos $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{B} \equiv \hat{E}$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

**Demonstração**

Vamos considerar que os triângulos ABC e DEF não são congruentes, sendo $\overline{AB} > \overline{DE}$.

> No caso de triângulos congruentes, temos que os ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais. Portanto, os triângulos são semelhantes.

Considerando o ponto **G** sobre $\overline{AB}$, de maneira que $\overline{AG} \equiv \overline{DE}$, e traçando o segmento GH paralelo ao lado BC do triângulo ABC, temos que os triângulos ABC e AGH são semelhantes. Então, $\hat{B} \equiv \hat{G}$, logo $\hat{G} \equiv \hat{E}$.

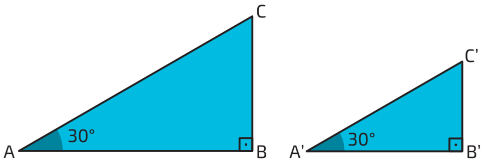


Como $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\overline{AG} \equiv \overline{DE}$ e $\hat{G} \equiv \hat{E}$, pelo caso ALA de congruência de triângulos, temos que os triângulos AGH e DEF são congruentes.

Portanto, como os triângulos ABC e AGH são semelhantes e os triângulos AGH e DEF são congruentes, concluímos que os triângulos ABC e DEF são semelhantes, como queríamos demonstrar.

Exemplo:

De acordo com o caso de semelhança de triângulos que estudamos, para que dois triângulos sejam semelhantes, é suficiente que possuam dois ângulos internos correspondentes congruentes.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Nos triângulos acima temos $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{A'}) = 30°$ e $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{B'}) = 90°$. Portanto, os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.

- Para melhor compreensão, retome com os alunos o caso de congruência de triângulos ALA que será utilizado na demonstração apresentada nessa página.

- Se necessário, após apresentar os três casos de semelhança, apresente alguns triângulos que permitam aos alunos verificar se são ou não semelhantes, indicando o caso de semelhança.
- Os casos de semelhança de triângulos LAL e LLL podem ser demonstrados de maneira muito parecida ao caso AA. As demonstrações desses casos também podem ser consultadas no livro **Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana**, de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo – 7ª edição (Atual, 1993), nas páginas **204** a **206**.

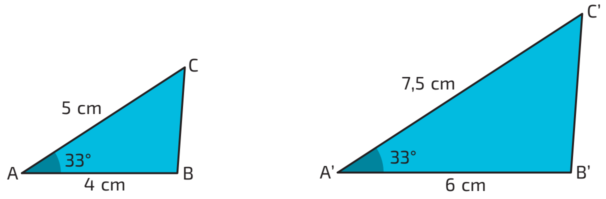
Agora, por meio de exemplos, vamos estudar outros dois casos de semelhança de triângulos.

### 2º caso de semelhança de triângulos (LAL)

Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por eles congruentes.

De acordo com esse caso, para que dois triângulos sejam semelhantes, é suficiente verificarmos a proporcionalidade entre dois lados correspondentes e a congruência entre os ângulos formados por eles.

Nos triângulos a seguir temos $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3}$ e $med(\hat{A}) = med(\hat{A'}) = 33°$. Portanto, os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.

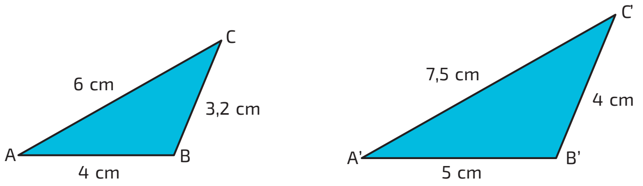


### 3º caso de semelhança de triângulos (LLL)

Dois triângulos são semelhantes quando possuem os três lados correspondentes proporcionais.

De acordo com esse caso, para que dois triângulos sejam semelhantes, é suficiente verificarmos a proporcionalidade entre seus lados correspondentes.

Nos triângulos a seguir, temos $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{4}{5}$. Portanto, os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.



Ilustrações: Sergio L. Filho

## Atividades

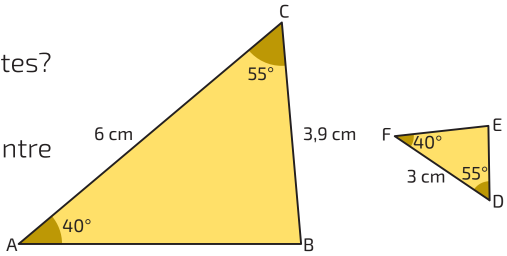
Anote no caderno

**45.** Observe os triângulos ABC e DEF.

**a)** Esses triângulos são semelhantes?
sim

**b)** Caso sejam semelhantes:

- qual a razão de semelhança entre os triângulos ABC e DEF? 2
- qual o caso de semelhança? AA



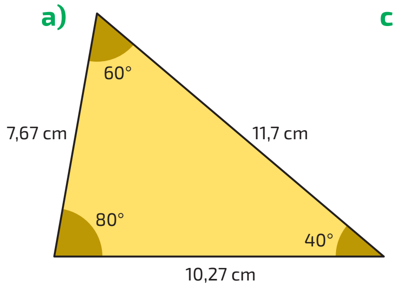
Ilustrações: Sergio L. Filho

### Material digital

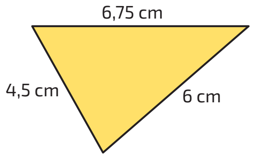
- No material digital dessa coleção, para complementar o trabalho com o tópico **Triângulos semelhantes**, disponibilizamos a **Sequência didática 8**, elaborada com objetivo de desenvolver a habilidade **EF09MA12**. Essa sequência apresenta atividades que permitem reconhecer as características de um triângulo quanto às medidas dos lados e dos ângulos internos, identificar triângulos semelhantes e resolver problemas que envolvam esses conceitos.

**46.** Identifique os pares de triângulos semelhantes e indique o caso de semelhança. a, f: AA; b, e: LAL; c, d: LLL

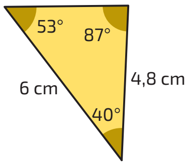
**a)**



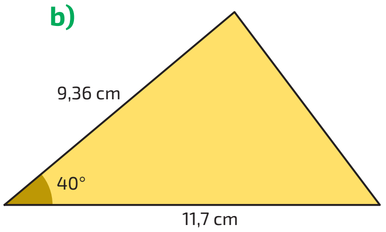
**c)**



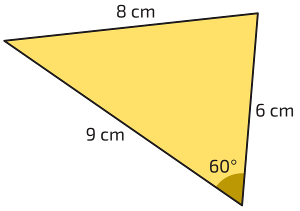
**e)**



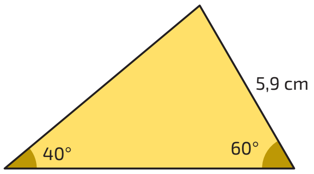
**b)**



**d)**

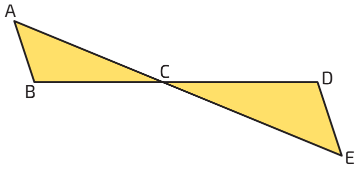


**f)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

**47.** Utilizando uma régua, realize as medições necessárias na figura e responda às questões.



Sergio L. Filho

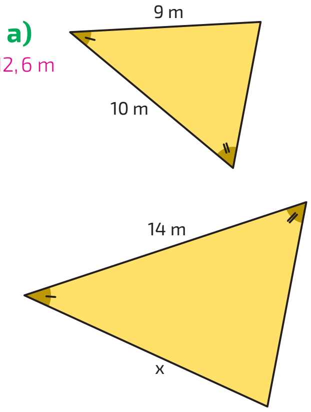
Os pontos **A**, **C** e **E** são colineares, assim como os pontos **B**, **C** e **D**.

**a)** Os triângulos ABC e EDC são semelhantes? Caso sejam semelhantes, qual o caso de semelhança? sim; Possíveis respostas: LLL; LAL.

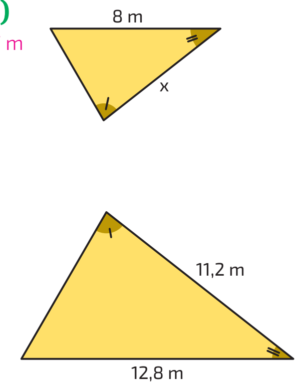
**b)** Esses triângulos são congruentes? Justifique sua resposta.
Não, pois as medidas do comprimento dos lados correspondentes são diferentes.

**48.** Determine a medida **x** sabendo que em cada item os triângulos são semelhantes.

**a)** x = 12,6 m



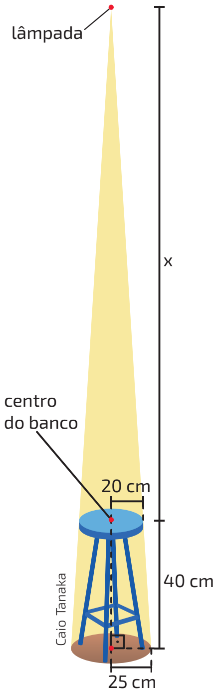
**b)** x = 7 m



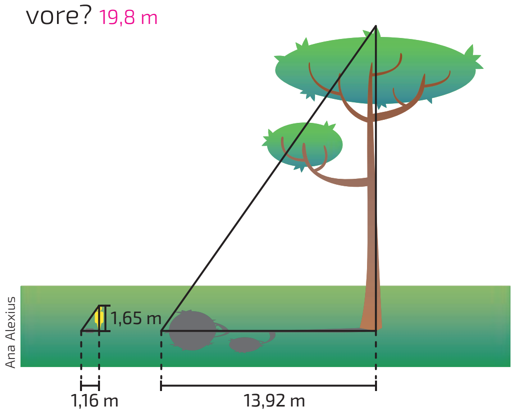
Ilustrações: Sergio L. Filho

- Na atividade **47**, não são indicadas as medidas dos lados e dos ângulos dos triângulos. Por isso, os alunos devem tirar suas conclusões utilizando os conceitos estudados acerca de triângulos semelhantes e com base nas medições do comprimento dos lados. Com essa atividade, é possível verificar se eles compreenderam os conceitos de semelhança entre triângulos.

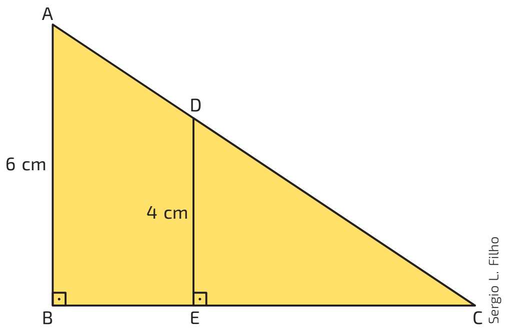
**49.** O esquema abaixo representa um banco de assento circular posicionado de tal maneira que o centro do assento está exatamente abaixo de uma lâmpada. Considerando as medidas indicadas na imagem, calcule a medida da distância da lâmpada até o chão. 200 cm



**50.** Em certo momento, uma pessoa cuja medida da altura é 1,65 m projeta uma sombra medindo 1,16 m, enquanto uma árvore projeta uma sombra medindo 13,92 m. Qual a medida da altura da árvore? 19,8 m

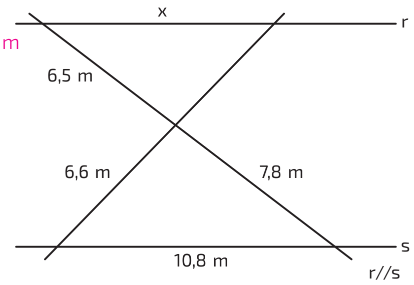


**51.** Na figura, AB//DE e a medida da área do $\Delta CDE$ é $12\ cm^2$. Qual a medida da área do $\Delta ABC$? $27\ cm^2$

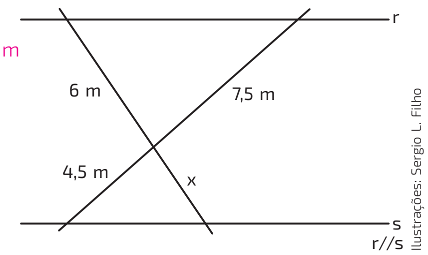


**52.** Calcule a medida **x** em cada figura.

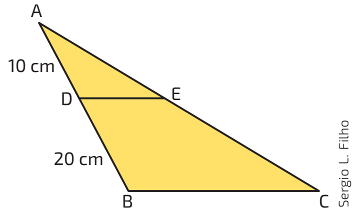
**a)** x = 9 m



**b)** x = 3,6 m



**53.** Observe a figura abaixo.



Sabendo que $\overline{DE} // \overline{BC}$, elabore um problema e dê para um colega resolver. Em seguida verifique se o que ele fez está correto. Resposta pessoal.

- Após o trabalho com as atividades dessa página, veja a possibilidade de propor a **Atividade complementar** a seguir, para que os alunos possam realizar na prática o experimento apresentado. Verifique a possibilidade de levá-los ao pátio da escola ou a uma praça próxima para que possam calcular a medida da altura aproximada de alguns elementos. Atividades extraclasse e em grupos podem contribuir significativamente para a interação e a troca de experiências dos alunos.

## Atividade complementar

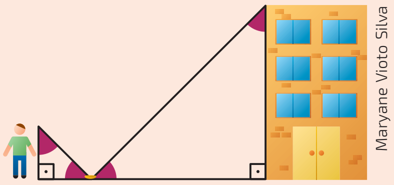
### Medindo alturas com um prato

**Materiais**

- trena ou fita métrica
- prato
- papel preto

**Desenvolvimento**

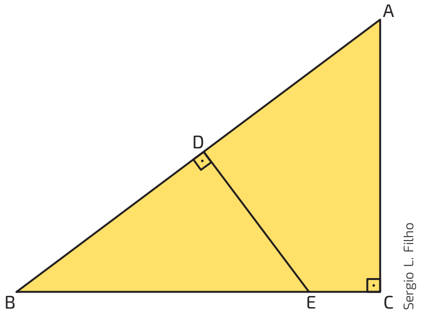
- Peça aos alunos que se organizem em duplas. Depois, oriente-os a recortar um círculo de papel preto com diâmetro igual ao do fundo do prato a ser utilizado e colar esse círculo dentro do prato. Em seguida, peça que coloquem um pouco de água dentro do prato, a fim de criar um espelho-d'água. O prato deverá ser posicionado no chão de maneira que seja possível visualizar, pelo observador de pé, o topo do que se quer medir no reflexo da água, como um poste ou uma árvore. Dessa posição em diante, peça que, utilizando a trena, meçam a distância entre o prato e a base do que se pretende medir, e também a distância entre o prato e os pés do observador. Assim, conhecendo essas medidas e mais a medida da altura do observador, é possível determinar, por semelhança de triângulos, a medida aproximada da altura desse prédio. Veja o esquema a seguir:



- Assista a um vídeo que explica com detalhes a atividade e os conceitos envolvidos. Disponível em: <www.youtube.com/watch?v=eB7NCwY-7Us>. Acesso em: 20 nov. 2018.

- Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos na atividade **53**:
  - Sendo a medida de $\overline{DE}$ igual a 15 cm, determine a medida de $\overline{BC}$.
    R 30 cm

**54.** Observe a figura e resolva as questões, sabendo que AC = 12,6 cm, AB = 21 cm e DE = 8,1 cm.

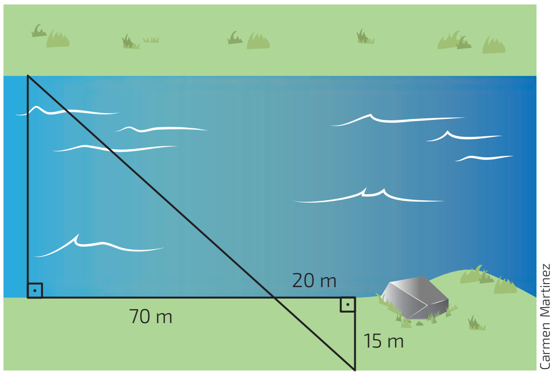


**a)** Qual caso garante a semelhança entre os triângulos ABC e BED? Escreva os lados proporcionais correspondentes. AA; $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BE}$, $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$

**b)** Qual a razão de semelhança entre os triângulos ABC e BDE? $\frac{12,6}{8,1} = \frac{14}{9} = 1,555...$

**c)** Qual a medida do comprimento de $\overline{BE}$? BE = 13,5 cm

**55.** Veja a seguir o desenho que um engenheiro fez com o objetivo de determinar a medida da largura de um rio para a construção de uma ponte em determinado local.



De acordo com as medidas indicadas, determine a medida da largura desse rio no ponto escolhido pelo engenheiro.
52,5 m

## Explorando o que estudei

Anote no caderno

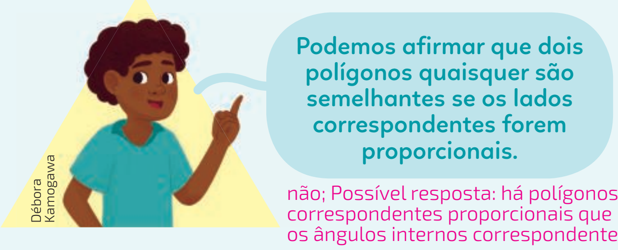
**1.** Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? ângulos opostos pelo vértice, segmentos proporcionais, teorema de Tales, semelhança de figuras, homotetia e triângulos semelhantes

**2.** Quais procedimentos você utiliza para verificar se dois segmentos de reta são proporcionais a outros dois? Espera-se que os alunos respondam que verificam se a razão entre os dois segmentos de reta é igual à razão dos outros dois.

**3.** Com o auxílio de figuras, explique com suas palavras o teorema de Tales.
Resposta pessoal.

**4.** Qual a diferença entre congruência e semelhança de polígonos?
Possível resposta: dois polígonos são congruentes quando os lados correspondentes são congruentes e quando os ângulos internos correspondentes são congruentes; e são semelhantes quando os ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

**5.** Leia o que José está dizendo.



não; Possível resposta: há polígonos com os lados correspondentes proporcionais que não são semelhantes, pois os ângulos internos correspondentes não são congruentes.

A afirmação feita por José é verdadeira? Justifique sua resposta.

**6.** Para que serve a transformação de homotetia?
Ampliar, reduzir ou reproduzir uma figura.

**7.** Quais casos de semelhança de triângulos você conhece?
Espera-se que os alunos respondam AA, LAL e LLL.

### Avaliação

- Utilize a seção **Explorando o que estudei** para realizar uma avaliação dos alunos. Para isso, observe-os enquanto respondem às questões propostas com o objetivo de identificar o que eles aprenderam com o estudo desse capítulo. Caso um ou mais alunos apresentem dificuldades em responder às questões, verifique a possibilidade de realizar uma revisão dos conceitos com a turma. Esse momento permite a reflexão sobre as estratégias de ensino empregadas no trabalho com o capítulo, com a finalidade de confirmá-las para os próximos estudos ou até mesmo, se for o caso, modificá-las.

- Na questão **5**, peça aos alunos que desenhem alguns polígonos semelhantes e também alguns que não sejam semelhantes, mesmo possuindo os lados correspondentes proporcionais.

# Capítulo 9

## Relações no triângulo retângulo

Ao planejar e executar construções arquitetônicas e urbanísticas é importante o estudo das distâncias e dos acidentes geográficos de um ambiente, sendo a topografia fundamental na determinação de todas as etapas da obra.

Na etapa de estudo, o topógrafo, profissional responsável pelas medições, faz o mapeamento topográfico do local com o auxílio de um teodolito. Esse instrumento determina com precisão a medida dos ângulos de inclinação ou desvio, tanto na horizontal quanto na vertical.

Porém, em diversas situações, como na determinação da medida da largura de um rio, o topógrafo, baseando-se nas medições obtidas com o teodolito, tem de utilizar também conhecimentos acerca de triângulos, uma vez que é inviável o uso de outros instrumentos, como uma trena, por exemplo.

Esse capítulo proporcionará aos alunos o avanço no estudo do triângulo retângulo, habilitando-os a reconhecer seus elementos para estabelecer relações métricas e trigonométricas. O teorema de Pitágoras também será trabalhado como procedimento de cálculo.

Além disso, os alunos serão levados a reconhecer que, fixada uma unidade de medida de comprimento, há segmentos de reta cujas medidas dos comprimentos não são expressas por números racionais, como a medida da altura de triângulos e diagonais de polígonos. O capítulo também abordará o cálculo da medida da distância entre dois pontos no plano cartesiano e a determinação do ponto médio de segmentos de reta.

- As páginas de abertura apresentam algumas informações sobre a topografia, principalmente em relação ao uso do teodolito. Nesse contexto, os alunos perceberão a importância de conhecimentos sobre triângulos em alguns tipos de medição, assunto tratado no estudo das relações métricas e das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Uma sugestão de condução do trabalho é realizar a leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. As questões propostas podem ser resolvidas na lousa, de acordo com as respostas dadas e, nesse momento, é importante que a turma seja incentivada a participar. Algumas atividades do capítulo, como a **38** e a **40** da página **210**, retomam o assunto, apresentando situações práticas de medições utilizando triângulos. Caso julgue necessário, após o trabalho com a abertura, leia tais atividades e explique aos alunos que elas serão resolvidas em momento oportuno.

Pessoas realizando medições com um teodolito.

Peter Titmuss/Shutterstock.com

## Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

- **A** Em que situações é importante o mapeamento topográfico?
- **B** Quais são as principais funções do teodolito?
- **C** Cite uma situação, além da apresentada no texto, em que seja difícil a realização de medição com trena, sendo necessário o uso do teodolito e de conhecimentos sobre triângulos.

## Pensando nisso...

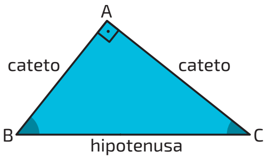
- **A** Possíveis respostas: construção civil, mineração, ferrovias, obras de urbanização pública, linhas de transmissão, pavimentação, arquitetura e paisagismo.
- **B** Espera-se que os alunos respondam que esse instrumento é utilizado para determinar, na superfície, as medidas dos ângulos de inclinação ou desvio, tanto na horizontal quanto na vertical.
- **C** Possíveis respostas: medir a altura de uma montanha, projetar o comprimento de um túnel sob um monte, estimar o comprimento de uma ponte sobre um cânion.

- Na questão **A**, pergunte aos alunos se eles já viram algum teodolito sendo manuseado.

# Relações métricas no triângulo retângulo

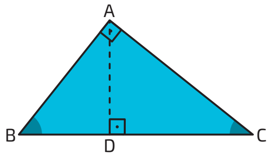
Estudamos anteriormente algumas propriedades e características dos triângulos. Agora, veremos relações e propriedades existentes em triângulos retângulos, isto é, aqueles que possuem um ângulo interno reto. Antes, porém, vamos destacar alguns elementos do triângulo retângulo.

A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e é o maior lado do triângulo retângulo.



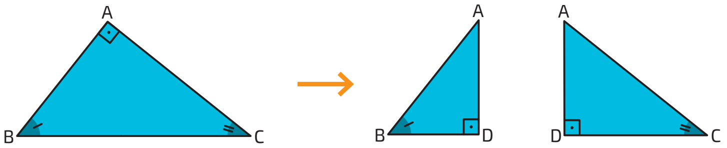
$\overline{BC}$: hipotenusa
$\overline{AB}$ e $\overline{AC}$: catetos

Agora, veja esse triângulo com a **altura relativa à hipotenusa** $(\overline{AD})$ traçada.

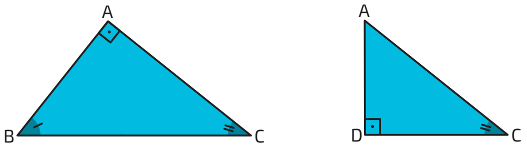


Ao traçar a altura, podemos destacar os triângulos retângulos ABC, ADC e ABD. Veja como podemos verificar se esses triângulos são semelhantes entre si.

Inicialmente consideramos os três triângulos separadamente.

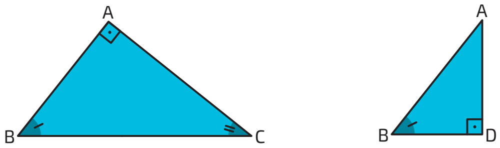


- Observando os triângulos ABC e ADC, podemos notar que $B\hat{A}C \equiv A\hat{D}C$, pois são retos, e que $A\hat{C}B \equiv A\hat{C}D$, pois são comuns aos dois triângulos.



Assim, $\Delta ABC \sim \Delta ADC$.

- Observando os triângulos ABC e ABD, podemos notar que $B\hat{A}C \equiv A\hat{D}B$, pois são retos, e que $A\hat{B}C \equiv A\hat{B}D$, pois são comuns aos dois triângulos.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

Assim, $\Delta ABC \sim \Delta ABD$.

Como os triângulos ADC e ABD são semelhantes ao triângulo ABC, esses triângulos são semelhantes entre si, ou seja, $\Delta ABC \sim \Delta ADC \sim \Delta ABD$.

## Objetivos do capítulo

- Identificar os elementos de um triângulo retângulo.
- Estabelecer relações métricas e trigonométricas existentes em um triângulo retângulo.
- Utilizar o teorema de Pitágoras como um procedimento de cálculo.
- Reconhecer que existem segmentos de retas cujas medidas dos comprimentos não são expressas por números racionais.
- Reconhecer um número irracional como um número real e estimar a sua localização na reta numérica.
- Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos no plano cartesiano.
- Calcular a medida da área e do perímetro de figuras representadas no plano cartesiano.
- Identificar em um triângulo retângulo os catetos adjacentes e opostos a um ângulo.
- Identificar os ângulos notáveis.
- Utilizar a tabela trigonométrica.
- Calcular o valor do seno, do cosseno e da tangente de ângulos.

## BNCC em foco

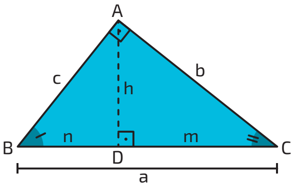
- A partir do tópico dessa página, os alunos serão levados a compreender e a demonstrar algumas relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos, conforme orienta a habilidade EF09MA13.

## Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **7**, **8** e **9** do 3º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas, de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

Em um triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois outros triângulos retângulos, que são semelhantes ao maior e, consequentemente, semelhantes entre si.

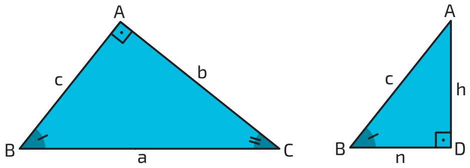
A partir da semelhança desses triângulos, podemos estabelecer algumas relações entre as medidas do comprimento de seus lados. Para isso, indicaremos essas medidas com letras minúsculas.



**a**: medida do comprimento da hipotenusa
**b** e **c**: medida do comprimento dos catetos
**h**: medida do comprimento da altura relativa à hipotenusa
**m** e **n**: medidas dos comprimentos das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, sendo a = m + n.

Como em triângulos semelhantes os lados correspondentes são proporcionais, podemos escrever as seguintes proporções.

- Em relação aos triângulos ABC e ABD.



$\frac{a}{c} = \frac{b}{h}$

$a \cdot h = b \cdot c$

$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$

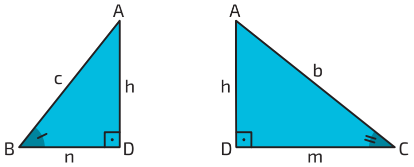
$a \cdot n = c \cdot c$

$c^2 = a \cdot n$

$\frac{c}{n} = \frac{b}{h}$

$c \cdot h = b \cdot n$

- Em relação aos triângulos ABD e ADC.



$\frac{c}{b} = \frac{h}{m}$

$c \cdot m = b \cdot h$

$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$

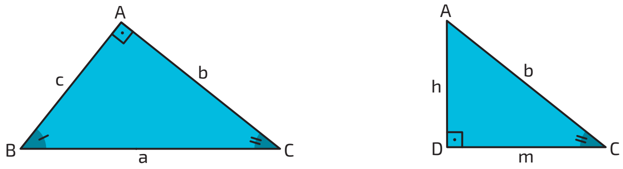
$h \cdot h = m \cdot n$

$h^2 = m \cdot n$

$\frac{c}{b} = \frac{n}{h}$

$c \cdot h = b \cdot n$

**Em relação aos triângulos ABC e ADC demonstre que as relações $b^2 = a \cdot m$, $a \cdot h = b \cdot c$ e $c \cdot m = b \cdot h$ são verdadeiras.** Resposta nas orientações ao professor.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

Dessa maneira, temos as seguintes relações métricas no triângulo retângulo.

$a = m + n$

$c \cdot m = b \cdot h$

$c^2 = a \cdot n$

$b^2 = a \cdot m$

$c \cdot h = b \cdot n$

$a \cdot h = b \cdot c$

$h^2 = m \cdot n$

As relações repetidas são consideradas uma única vez.

**Respostas**

- $\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$

  $a \cdot m = b \cdot b$

  $b^2 = a \cdot m$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{h}$

  $a \cdot h = b \cdot c$
- $\frac{c}{h} = \frac{b}{m}$

  $c \cdot m = b \cdot h$

- Para o trabalho com as relações métricas apresentadas nessa página, é importante que os alunos compreendam não apenas as expressões literais que as representam, mas também possam expressá-las com palavras. Veja um exemplo:
  - A relação $b^2 = a \cdot m$ pode ser expressa como: em todo triângulo retângulo, a medida do comprimento de um cateto elevado ao quadrado é igual ao produto da medida do comprimento da hipotenusa pela sua projeção sobre ela.

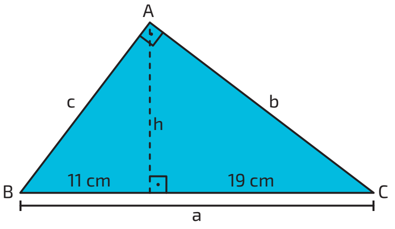
  Estimule os alunos a verbalizarem e a escreverem com palavras essas expressões durante as discussões desenvolvidas no estudo da página.

- Lembre os alunos de que o símbolo ≃ significa que o valor obtido é aproximado.

**Avaliação**

- As atividades dessa página podem servir como forma de avaliação. Observe como os alunos lidam com os conteúdos estudados até aqui, quais habilidades foram desenvolvidas e quais podem ser aprimoradas, aproveitando para refletir sobre as ações realizadas no trabalho com os conteúdos, com a intenção de confirmá-las ou reformulá-las para as próximas aulas.

Utilizando as relações métricas, determinaremos os valores de **a**, **b**, **c** e **h** no triângulo retângulo a seguir.



Ronaldo Lucena

- $a = m + n$

  $a = 19 + 11$

  $a = 30$ cm

- $c^2 = a \cdot n$

  $c^2 = 30 \cdot 11$

  $c^2 = 330$

  $c \simeq 18{,}17$ cm

- $b^2 = a \cdot m$

  $b^2 = 30 \cdot 19$

  $b^2 = 570$

  $b \simeq 23{,}87$ cm

- $h^2 = m \cdot n$

  $h^2 = 19 \cdot 11$

  $h^2 = 209$

  $h \simeq 14{,}46$ cm

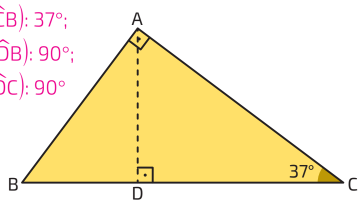
> Para obter os valores de **b**, **c** e **h**, tivemos de resolver uma equação que possui uma raiz positiva e outra negativa. Como os valores representam medidas de comprimento, consideramos apenas os valores positivos.

## Atividades

Anote no caderno

**1.** A figura a seguir é composta dos triângulos ABC, ABD e ACD.

a) $\Delta ABC$: med$(B\hat{A}C)$: 90°, med$(A\hat{B}C)$: 53°, med$(A\hat{C}B)$: 37°;
$\Delta ABD$: med$(B\hat{A}D)$: 37°, med$(A\hat{B}D)$: 53°, med$(A\hat{D}B)$: 90°;
$\Delta ACD$: med$(C\hat{A}D)$: 53°, med$(A\hat{C}D)$: 37°, med$(A\hat{D}C)$: 90°



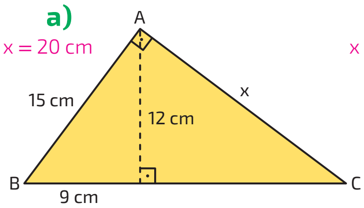
Ronaldo Lucena

**a)** Quais as medidas dos ângulos internos de cada um desses triângulos?

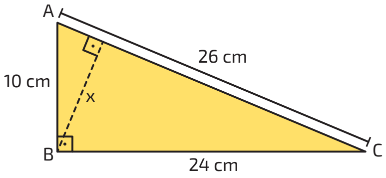
**b)** Quais desses triângulos são semelhantes? $\Delta ABC \sim \Delta ABD \sim \Delta ACD$

**2.** Determine o valor de **x** em cada triângulo.

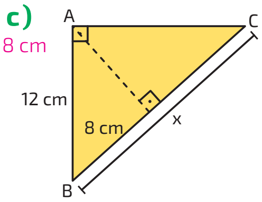
**a)** $x = 20$ cm



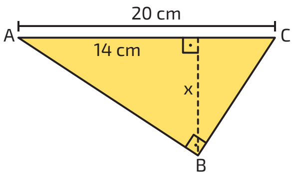
**b)** $x = \frac{120}{13}$ cm ou $x \simeq 9{,}23$ cm



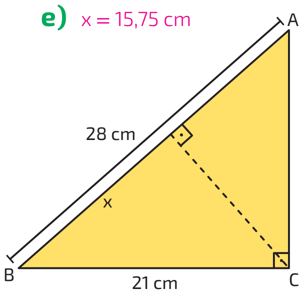
**c)** $x = 18$ cm



**d)** $x = 2\sqrt{21}$ cm
ou $x \simeq 9{,}17$ cm



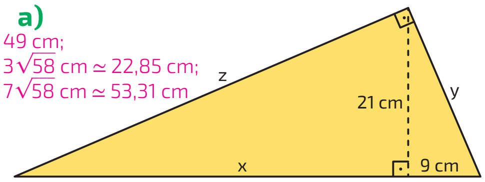
**e)** $x = 15{,}75$ cm



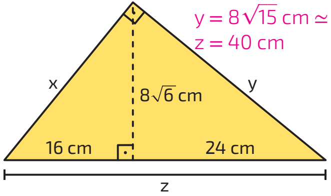
Ilustrações: Ronaldo Lucena

**3.** Em cada triângulo retângulo, **x**, **y** e **z** representam medidas em centímetros. Determine essas medidas.

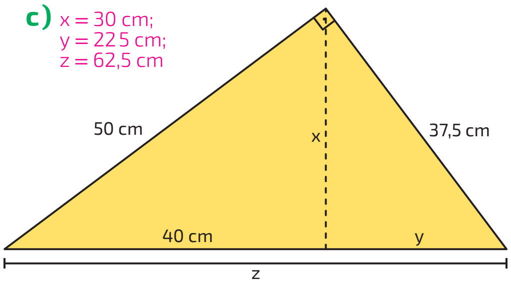
**a)** $x = 49$ cm; $y = 3\sqrt{58}$ cm $\simeq 22{,}85$ cm; $z = 7\sqrt{58}$ cm $\simeq 53{,}31$ cm



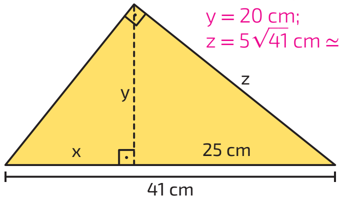
**b)** $x = 8\sqrt{10}$ cm $\simeq 25{,}3$ cm; $y = 8\sqrt{15}$ cm $\simeq 30{,}98$ cm; $z = 40$ cm



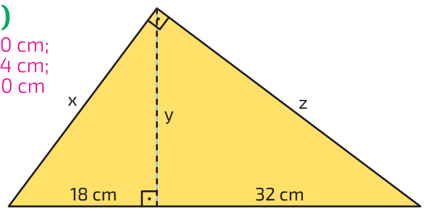
**c)** $x = 30$ cm; $y = 22{,}5$ cm; $z = 62{,}5$ cm



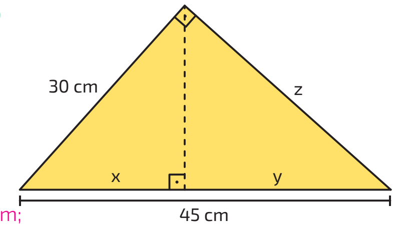
**d)** $x = 16$ cm; $y = 20$ cm; $z = 5\sqrt{41}$ cm $\simeq 32{,}02$ cm



**e)** $x = 30$ cm; $y = 24$ cm; $z = 40$ cm



**f)**

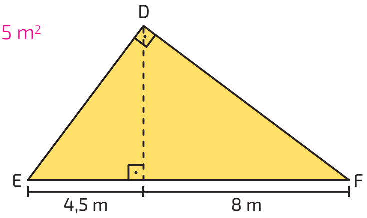


$x = 20$ cm; $y = 25$ cm; $z = 15\sqrt{5}$ cm $\simeq 33{,}54$ cm

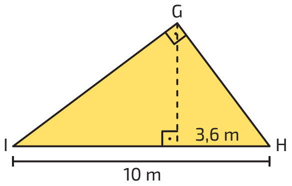
Ilustrações: Ronaldo Lucena

**4.** Calcule a medida do perímetro e a medida da área de cada um dos triângulos.

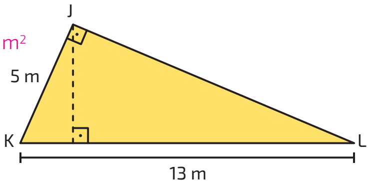
**a)** 30 m; 37,5 m²



**b)** 24 m; 24 m²

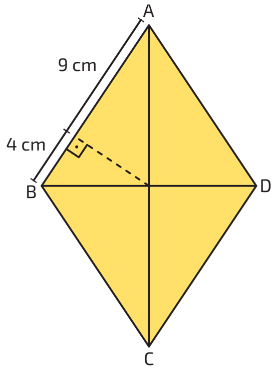


**c)** 30 m; 30 m²



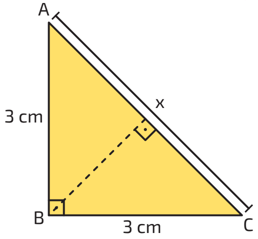
Ilustrações: Ronaldo Lucena

**5.** Calcule a medida do perímetro e a medida da área do losango ABCD. 52 cm; 156 cm²



Ronaldo Lucena

**6.** De acordo com as medidas indicadas, determine o valor de **x**. $x = 3\sqrt{2}$ cm ou $x \simeq 4{,}24$ cm



Ronaldo Lucena

- Na atividade **5**, lembre os alunos que a medida da área de um losango pode ser calculada utilizando a fórmula $A = \frac{D \cdot d}{2}$, em que **D** é a medida do comprimento da diagonal maior e **d**, a medida do comprimento da diagonal menor. E a medida do perímetro é igual à soma das medidas dos comprimentos dos lados desse polígono.
- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **6**:
  - Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{x}{3} = \frac{3}{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{x^2}{2} = 9$$

$$x^2 = 18$$

$x = \sqrt{18} \simeq 4{,}24$, portanto $x \simeq 4{,}24$ cm.


Quagga Media/Historisches Auge/Alamy/Fotoarena/Coleção particular

Pitágoras.

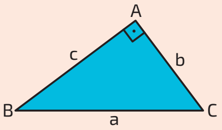
# Teorema de Pitágoras

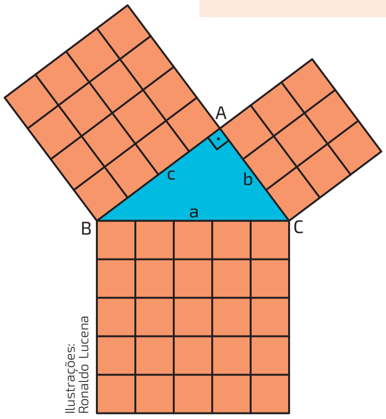
Pitágoras foi um matemático e filósofo grego que viveu por volta de 572 a.C. Nascido na ilha de Samos, ele viajou por muitos lugares, como Pérsia e Egito, e de acordo com alguns relatos é possível que tenha sido discípulo de Tales de Mileto. Em Crotona, localizada atualmente na Itália, ele fundou a Escola Pitagórica, que consistia em um centro de estudos de Matemática, Ciências Naturais, Filosofia etc.

O nome de Pitágoras é dado a um teorema por ter sido o primeiro a demonstrá-lo, apesar de os babilônios e os egípcios já o utilizarem em construções e em medições de terras. Esse teorema estabelece uma relação entre os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo.

De acordo com esse teorema, em todo triângulo retângulo a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

$$a^2 = b^2 + c^2$$



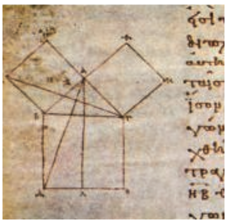


Ilustrações: Ronaldo Lucena

Podemos verificar essa relação por meio de figuras. Por exemplo, para um triângulo retângulo com lados medindo 3, 4 e 5 unidades de comprimento, consideramos três quadrados; cada um construído a partir de um lado do triângulo, conforme a figura ao lado.

Note que a medida da área do quadrado construído a partir da hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos a partir dos catetos, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

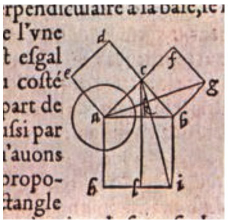
Muitas demonstrações do teorema de Pitágoras foram desenvolvidas no decorrer da história. Publicado em 1940, o livro **The pythagorean proposition**, de Elisha Scott Loomis, apresenta 370 demonstrações diferentes desse teorema. Observe recortes de textos antigos com demonstrações do teorema de Pitágoras.


Reprodução/Biblioteca Bodleiana, Oxford, Inglaterra

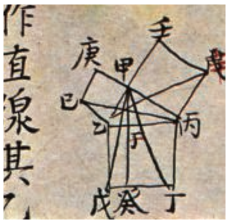
Grega, por volta do ano 800.


Reprodução/Museu Britânico, Londres, Inglaterra

Arábica, por volta do ano 1250.


Reprodução/Biblioteca Pública de Nova Iorque, EUA

Francesa, do ano 1564.


Reprodução/Universidade de Columbia, Nova Iorque, EUA

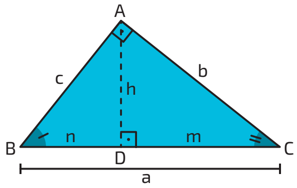
Chinesa, do ano 1607.

**BNCC em foco**

- Nessa página, é apresentada uma breve história da vida de Pitágoras e também é abordado o teorema que leva o seu nome, indicando sua importância para diversos povos em diferentes épocas, especialmente para medições de terras e construções. Dessa maneira, os alunos são levados a reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, além de ser uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, conforme orienta a **Competência específica de Matemática 1**.
Ressalte aos alunos as imagens presentes no fim da página, que exibem demonstrações desse teorema em registros antigos de civilizações, e o ano em que provavelmente foram escritos.

- Na verificação geométrica do teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo, com lados medindo 3, 4 e 5, sugira aos alunos que determinem a medida da área de cada quadrado contando os quadradinhos que os formam. Assim, o quadrado cujo comprimento do lado mede **a** tem 25 quadradinhos de medida de área, o quadrado cujo comprimento do lado mede **b** tem 9, e o quadrado cujo comprimento do lado mede **c** tem 16 quadradinhos.

Observe uma demonstração do teorema de Pitágoras utilizando algumas das relações métricas estudadas anteriormente.



Nesse triângulo, temos que $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$. Adicionando essas relações membro a membro, temos:

$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n$ ⟵ fatoramos am + an colocando **a** em evidência

$b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$ ⟵ como m + n = a, substituimos m + n por **a**

$b^2 + c^2 = a \cdot a$

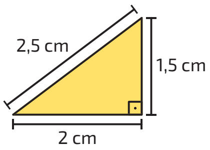
$b^2 + c^2 = a^2$

Portanto, $a^2 = b^2 + c^2$.

**A partir do triângulo ABC e utilizando as relações $b^2 = a \cdot m$, $c \cdot h = b \cdot n$, $a \cdot h = b \cdot c$ e $a = m + n$, demonstre o teorema de Pitágoras.**
Resposta nas orientações ao professor.

Temos ainda que a recíproca do teorema de Pitágoras é verdadeira, ou seja, se em um triângulo o quadrado da medida do comprimento de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas do comprimento dos outros dois lados, então esse triângulo é retângulo.

**O triângulo indicado ao lado é um triângulo retângulo? Justifique sua resposta.** Sim, pois $2{,}5^2 = 1{,}5^2 + 2^2$.



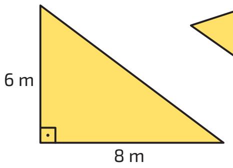
Ronaldo Lucena

## Atividades

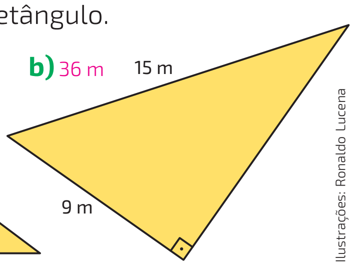
Anote no caderno

**7.** Calcule a medida do perímetro de cada triângulo retângulo.

**a)** 24 m

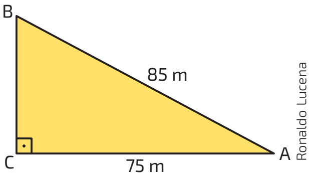


**b)** 36 m



Ilustrações: Ronaldo Lucena

**8.** Qual é a medida da área do triângulo ABC? 1 500 $m^2$



Ronaldo Lucena

**9.** A seguir, estão indicadas as medidas dos comprimentos dos lados de alguns triângulos. Utilizando o teorema de Pitágoras, verifique quais deles são triângulos retângulos. II e IV

| Triângulo | Medida do comprimento do lado (cm) | | |
|---|---|---|---|
| | a | b | c |
| I | 6 | 4 | 3 |
| II | 12,5 | 12 | 3,5 |
| III | 15 | 12 | 8 |
| IV | 37 | 35 | 12 |

**10.** Qual a medida do comprimento da diagonal de um retângulo que possui 48 cm de comprimento e 4 320 $cm^2$ de área?
102 cm

**BNCC em foco**

- Nessa página, os alunos serão levados a compreender e a demonstrar o teorema de Pitágoras, utilizando a semelhança de triângulos e algumas relações métricas, o que contempla a habilidade **EF09MA13**.
- As atividades propostas nessa página e na página seguinte permitem que os alunos resolvam e elaborem problemas de aplicação do teorema de Pitágoras indo ao encontro do que orienta a habilidade **EF09MA14**.

- Na atividade **9**, os alunos devem verificar, utilizando o teorema de Pitágoras, se as medidas indicadas correspondem às dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Peça a eles que sugiram outras medidas de comprimentos dos lados de triângulos retângulos.

**Resposta**

- $c \cdot h = b \cdot n$

  $h = \frac{b \cdot n}{c}$

- $a \cdot h = b \cdot c$

  $h = \frac{b \cdot c}{a}$

- $\frac{b \cdot n}{c} = \frac{b \cdot c}{a}$

  $c^2 \cdot b = a(b \cdot n)$

  $c^2 = a \cdot n$

Adicionando essas relações membro a membro, temos:

$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n$ ⟵ fatoramos a · m + a · n colocando **a** em evidência

$b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$ ⟵ temos m + n = a

$b^2 + c^2 = a \cdot a$

$b^2 + c^2 = a^2$

Portanto, $a^2 = b^2 + c^2$.

- Algumas atividades apresentadas nessa página, que possuem contextos oriundos de situações possíveis de serem vividas pelos alunos, contribuem para verificar a relevância do estudo desse conteúdo, mostrando a aplicação em suas vidas.
- Veja um possível problema de ser elaborado por eles na atividade **14**:
  - A partir das informações apresentadas na imagem, determine a medida aproximada da altura da torre.

    R aproximadamente 12,7 m
- Na atividade **17**, diga aos alunos que o cúbito é uma unidade de medida de comprimento correspondente ao comprimento do cotovelo à ponta do dedo médio de uma pessoa. Para mais informações sobre medidas de comprimento, consulte o capítulo **11** do volume do **6º** ano dessa coleção. Comente também que a pergunta presente no papiro matemático de Cairo, sobre a medida da distância que a escada alcança, refere-se à medida da altura a que ela poderá chegar quando encostada à parede.
- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **18**:
  - medida do comprimento do lado do triângulo: $18:3=6$ cm
  - medida do comprimento da altura h do triângulo:

$$6^2=\left(\frac{6}{2}\right)^2+h^2$$

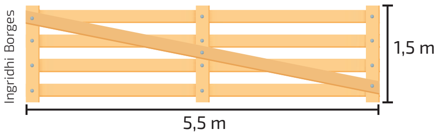
$$h=3\sqrt{3}\text{ cm}$$

  - medida da área:

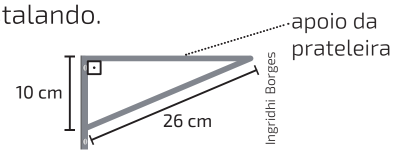
$$\frac{6\cdot 3\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}\simeq 15{,}59$$

Portanto, a medida da área é $9\sqrt{3}$ cm² ou, aproximadamente, 15,59 cm².

**11.** Pedro está construindo uma porteira com formato retangular para a entrada de sua fazenda. Ele precisa de uma ripa de madeira para fazer um reforço diagonal na estrutura retangular. De acordo com as medidas indicadas na imagem, qual deve ser a medida aproximada do comprimento dessa ripa? aproximadamente 5,7 m

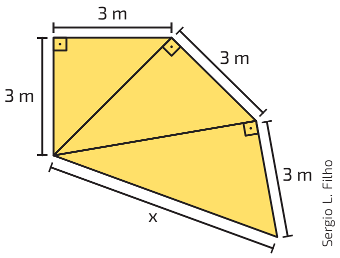


**12.** Veja as medidas indicadas em um dos suportes para prateleiras que Carmem está instalando.

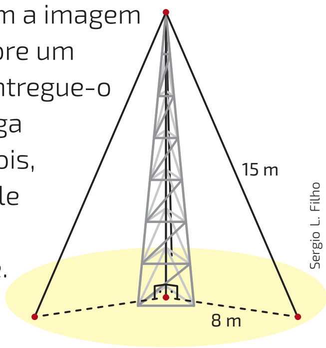


Determine a medida da largura da prateleira que Carmem vai utilizar sabendo que essa medida é igual à medida do comprimento da parte do suporte em que a prateleira ficará apoiada. 24 cm

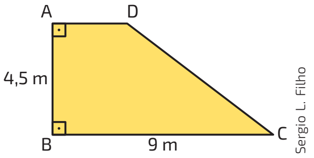
**13.** Calcule a medida **x**. 6 m



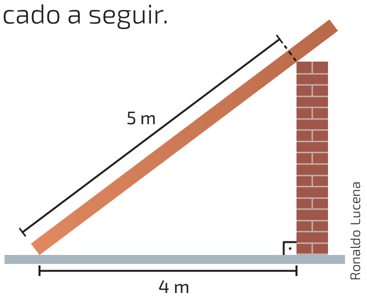
**14.** De acordo com a imagem ao lado, elabore um problema e entregue-o para um colega resolver. Depois, verifique se ele resolveu corretamente. Resposta pessoal.



**15.** Calcule a medida do comprimento do lado $\overline{CD}$ do trapézio, sabendo que a base menor mede $\frac{1}{3}$ da base maior. 7,5 m



**16.** Uma viga de madeira com 6 m de comprimento foi apoiada em um muro como indicado a seguir.

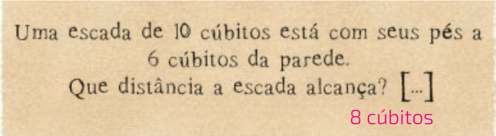


A que distância a base da viga deve ficar da base do muro para que o topo da viga coincida com o topo do muro? $3\sqrt{3}$ m

**17.** Leia o texto e resolva o problema encontrado no papiro matemático Cairo.

[...]

O chamado papiro matemático Cairo foi desenterrado em 1938 e investigado em 1962. O papiro, que data de 300 a.C. aproximadamente, contém quarenta problemas de matemática, nove dos quais lidam exclusivamente com o teorema de Pitágoras e mostra que os egípcios dessa época não só sabiam que o triângulo 3, 4, 5 é retângulo, mas que também acontecia o mesmo para os triângulos 5, 12, 13 e 20, 21, 29. [...]



Uma escada de 10 cúbitos está com seus pés a 6 cúbitos da parede.
Que distância a escada alcança? [...]

8 cúbitos

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 87.

**18.** Qual é a medida da área aproximada de um triângulo equilátero cuja medida do perímetro é 18 cm? $9\sqrt{3}$ cm² ou aproximadamente 15,59 cm²

## Material digital

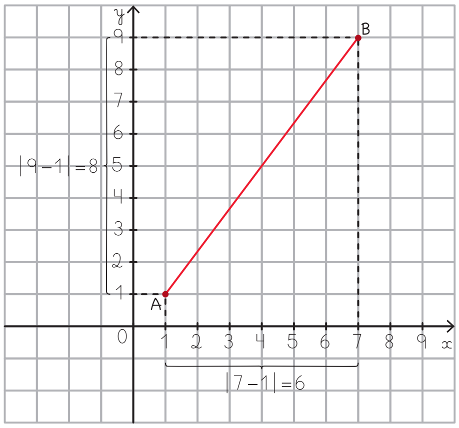
- No material digital dessa coleção, para complementar o trabalho com o tópico **Teorema de Pitágoras**, disponibilizamos a **Sequência didática 9**, elaborada com o objetivo de desenvolver as habilidades **EF09MA13** e **EF09MA14**. As atividades propostas nessa sequência possibilitam compreender a relação entre hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo, abordada no teorema de Pitágoras, além de analisar e resolver problemas utilizando esse teorema.

# Medida da distância entre dois pontos no plano cartesiano

Veja a pergunta proposta pelo professor de Rafael.

Danilo Souza

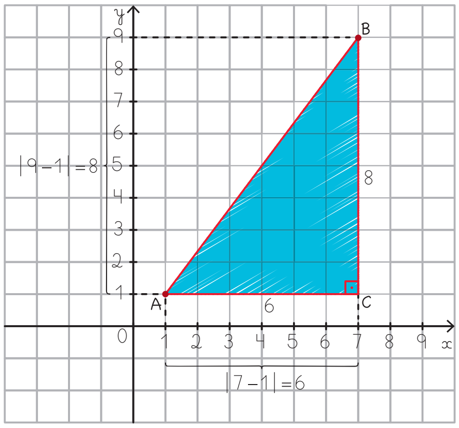
Para responder a essa pergunta, Rafael construiu um plano cartesiano em uma malha quadriculada, indicou os pontos A(1, 1) e B(7, 9), e considerou como unidade de medida o comprimento de cada lado dos quadradinhos da malha. Em seguida, ele construiu o segmento AB, cuja medida do comprimento é igual à medida da distância entre **A** e **B**.



Rafael não conseguiu contar quantas unidades de comprimento há entre **A** e **B**, mas ele percebeu que poderia determinar mais facilmente quantas unidades têm a projeção de $\overline{AB}$ no eixo **x** e no eixo **y**.

Lembre-se de que o módulo de todo número diferente de zero é sempre um número positivo, e indicamos por | |.

Em seguida, Rafael indicou no plano cartesiano o ponto **C**, obtendo o triângulo retângulo ABC, cujos catetos medem 8 e 6 unidades de comprimento.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

Dessa maneira, para determinar a medida da distância entre **A** e **B**, ele calculou a medida do comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo ABC por meio do teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 8^2 + 6^2$$
$$c^2 = 64 + 36$$
$$c^2 = 100$$
$$c = \sqrt{100}$$
$$c = 10$$

Portanto, a medida da distância entre os pontos **A** e **B** é 10 unidades de comprimento.

**Qual a medida da distância entre os pontos A(2, 5) e B(6, 8) no plano cartesiano?**
5 unidades de comprimento

- Antes de iniciar o trabalho com o conteúdo dessa página, desenhe dois segmentos no plano cartesiano, de modo que um seja paralelo ao eixo **x** e outro, paralelo ao eixo **y**, e verifique se os alunos calculam a medida dos comprimentos desses segmentos.

**Avaliação**

- Antes do trabalho com essa página, realize uma avaliação com os alunos para identificar como eles lidam com o teorema de Pitágoras e o plano cartesiano. Proponha alguns exemplos na lousa e peça para que resolvam, de modo que isso se converta em uma oportunidade de observá-los e identificar suas habilidades.

**BNCC em foco**

- Os tópicos dessa e da próxima página têm por objetivo levar os alunos a determinarem o ponto médio de um segmento de reta e a medida da distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas. Além disso, estimula os alunos a utilizarem esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano, conforme orienta a habilidade **EF09MA16**.

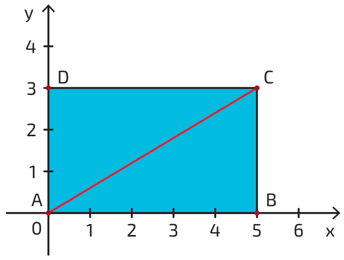
**BNCC em foco**

- A teoria desenvolvida nessa página, assim como algumas atividades das páginas **200** e **201** leva os alunos a reconhecerem que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade), como se verifica na habilidade **EF09MA01**. Além disso, um dos objetivos é auxiliar os alunos a reconhecerem um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a sua localização na reta numérica, contemplando o que orienta a habilidade **EF09MA02**.

A medida da distância entre os pontos **A** e **B** calculada anteriormente é expressa por um número racional, pois 10 pode ser representado na forma $\frac{a}{b}$ com **a** e **b** inteiros e $b \neq 0$. Assim, é possível determinar uma unidade de medida de comprimento que caiba uma quantidade inteira de vezes nessa medida.

Porém, nem sempre isso ocorre, pois há segmentos de reta cuja medida do comprimento não pode ser expressa por um número racional. Veja, por exemplo, o cálculo da medida do comprimento da diagonal do retângulo ABCD no plano cartesiano a seguir. Note que a diagonal $\overline{AC}$ desse retângulo corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 5 e 3 unidades de comprimento. Calculando a medida do comprimento de $\overline{AC}$, temos:

$$b^2 = c^2 + a^2$$
$$(AC)^2 = 5^2 + 3^2$$
$$(AC)^2 = 25 + 9$$
$$(AC)^2 = 34$$
$$AC = \sqrt{34}$$



Ronaldo Lucena

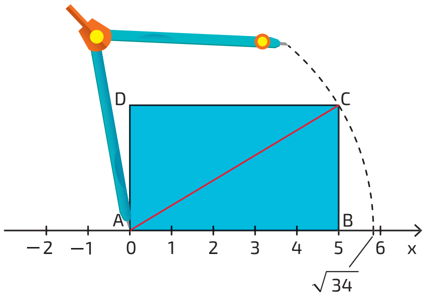
Portanto, a medida do comprimento da diagonal do retângulo ABCD é igual a $\sqrt{34}$ unidades de comprimento.

O número $\sqrt{34}$ é um exemplo de **número irracional**, pois ele não pode ser expresso na forma $\frac{a}{b}$ com **a** e **b** inteiros e $b \neq 0$. Sua representação decimal possui infinitas casas decimais que não se repetem de modo periódico, ou seja, não é uma dízima periódica. Veja as primeiras casas decimais de $\sqrt{34}$ calculadas com o auxílio de um computador.

$$\sqrt{34} = 5{,}8309518948453004708741...$$

Todos os número irracionais pertencem ao conjunto dos números reais.

Para representar $\sqrt{34}$ na reta numérica, utilizamos um compasso e transportamos a medida do comprimento da diagonal do retângulo ABCD.



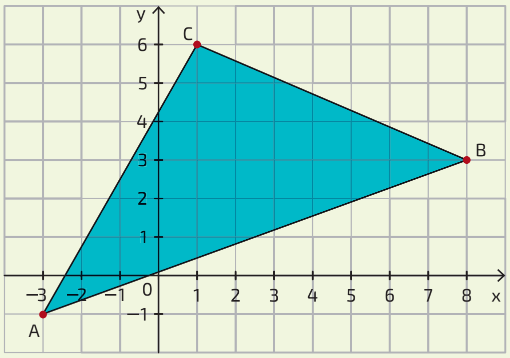
Sergio L. Filho

Sem realizar essa construção, podemos estimar a localização de $\sqrt{34}$ na reta numérica considerando o valor aproximado de sua representação decimal.

## Ponto médio de um segmento

Leia o problema a seguir.

Qual a medida do comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC representado no plano cartesiano abaixo?

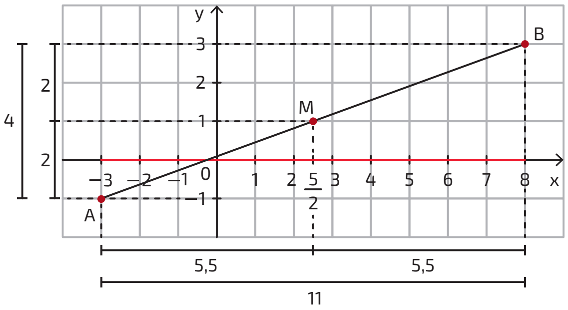


Já estudamos que a mediana é o segmento de reta em que uma das extremidades é um vértice do triângulo e a outra é o ponto médio do lado oposto a esse vértice. Estudamos também que o ponto médio de um segmento o divide em dois segmentos de mesma medida de comprimento.

Assim, para resolver o problema proposto, é preciso determinar a medida da distância entre o vértice **C** do triângulo e o ponto médio do lado $\overline{AB}$ do triângulo.

Para determinar as coordenadas do ponto médio $M(x_M, y_M)$ do segmento AB, considere suas projeções nos eixos **x** e **y**.

- No eixo **x**, $\frac{5}{2}$ divide a projeção de $\overline{AB}$ em dois segmentos congruentes.
- No eixo **y**, 1 divide a projeção de $\overline{AB}$ em dois segmentos congruentes.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

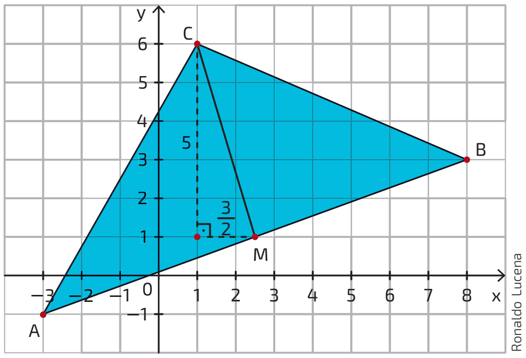
Note que $\frac{5}{2} = 2,5$.

Assim, o ponto médio do segmento AB é $M\left(\frac{5}{2}, 1\right)$.

**BNCC em foco**

- Nessa página e em diversos outros momentos desse capítulo, os alunos são levados a compreender as relações entre os diferentes campos da Matemática, como a Geometria e a Álgebra, de modo a desenvolver tanto a segurança em relação à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos quanto a autoestima e a perseverança na busca de soluções, indo ao encontro do que orienta a **Competência específica de Matemática 3**.

Agora, indicamos o ponto **M** no plano cartesiano e calculamos a medida da distância entre **M** e **C**.



$$(MC)^2 = 5^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Note que $\frac{3}{2} = 1{,}5$.

$$(MC)^2 = 25 + \frac{9}{4}$$

$$(MC)^2 = \frac{109}{4}$$

$$MC = \sqrt{\frac{109}{4}} = \frac{\sqrt{109}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{109}}{2}$$

Note que $\overline{MC}$ corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 5 e $\frac{3}{2}$ unidades de comprimento.

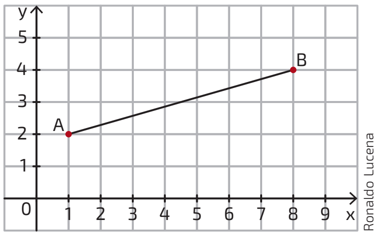
Portanto, a medida do comprimento da mediana é igual a $\frac{\sqrt{109}}{2}$ unidades de comprimento.

## Atividades

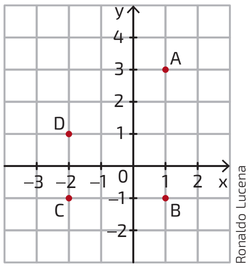
Anote no caderno

**19.** Qual a medida da distância entre os pontos **A** e **B** representado no plano cartesiano?

$\sqrt{53}$ unidades de comprimento



**20.** Observe os pontos indicados no plano cartesiano ao lado.



**a)** Calcule a medida da distância entre os pontos:

- **A** e **B**. 4 unidades de comprimento
- **B** e **C**. 3 unidades de comprimento

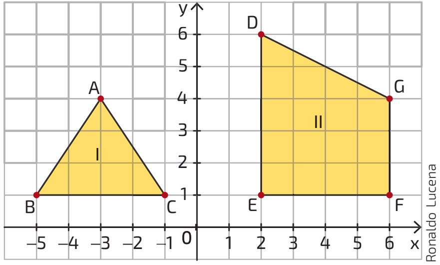
**b)** Calcule a medida da distância entre os pontos:

- **A** e **C**. 5 unidades de comprimento
- **B** e **D**. $\sqrt{13}$ unidades de comprimento

**c)** No item **a**, foi necessário utilizar o teorema de Pitágoras para obter as medidas solicitadas? E no item **b**? Justifique sua resposta. não; sim; Espera-se que os alunos digam que no item **a** basta realizar a projeção nos eixos e realizar a subtração e no item **b** é necessário utilizar o teorema de Pitágoras.

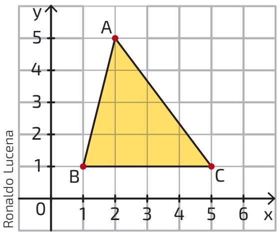
**21.** Calcule e medida da área e a medida do perímetro de cada uma das figuras representadas no plano cartesiano.

No triângulo ABC, a medida da altura em relação à $\overline{BC}$ é igual à medida do comprimento da mediana em relação a esse mesmo lado.



I: medida da área: 6 unidades de área; medida do perímetro: $2\sqrt{13} + 4$ unidades de comprimento
II: medida da área: 16 unidades de área; medida do perímetro: $2\sqrt{5} + 12$ unidades de comprimento

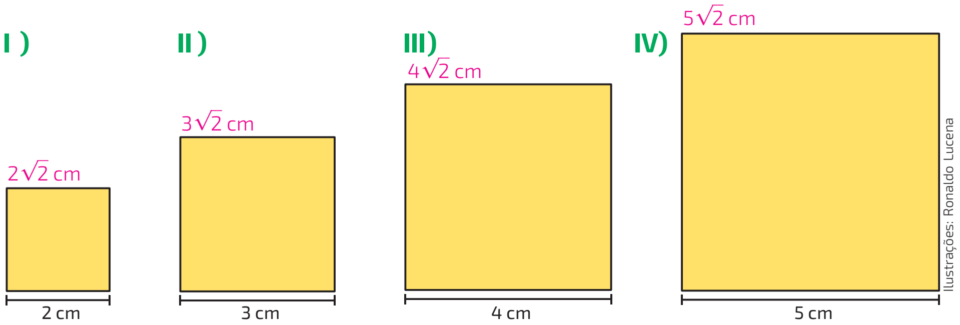
**22.** Observe o triângulo representado no plano cartesiano.



**a)** Determine as coordenadas dos pontos médios **D**, **E** e **F**, referente, respectivamente, aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. $D\left(\frac{3}{2}, 3\right)$, $E\left(\frac{7}{2}, 3\right)$, $F(3, 1)$

**b)** Reproduza o triângulo ABC em um plano cartesiano e indique os pontos **D**, **E** e **F**. Em seguida, calcule a medida do perímetro do triângulo DEF. $\frac{1}{2}(\sqrt{17}+9)$ unidades de comprimento

**23.** Calcule a medida do comprimento da diagonal de cada quadrado.

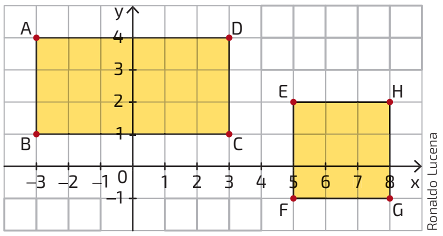


**a)** Quais regularidades podem ser observadas ao comparar as medidas calculadas? Espera-se que os alunos respondam que a medida do comprimento da diagonal é dada pelo produto da medida do comprimento do lado por $\sqrt{2}$.

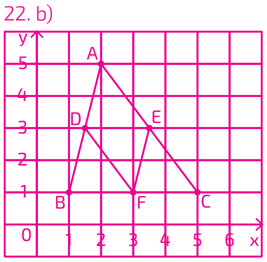
**b)** Escreva uma fórmula que permita calcular a medida do comprimento da diagonal **d** de um quadrado com comprimento do lado medindo $\ell$. $d = \ell\sqrt{2}$

**24.** Calcule a medida do comprimento da diagonal $\overline{AC}$ e $\overline{EG}$ de cada polígono abaixo.

$AC = 3\sqrt{5}$ unidades de comprimento; $EG = 3\sqrt{2}$ unidades de comprimento



22. b)



Agora, represente esses valores em uma reta numérica.

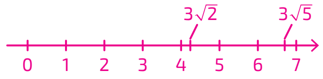
**25.** Calcule a medida da distância entre os pontos:

- A(0, 0) e B(8, 3) $\sqrt{73}$ unidades de comprimento
- A(0, 0) e C(5, 6) $\sqrt{61}$ unidades de comprimento
- A(0, 0) e D(1, 7) $\sqrt{50}$ unidades de comprimento

**a)** Utilizando uma calculadora, determine o valor aproximado dos resultados que você obteve anteriormente e estime a localização de cada um deles na reta numérica. Resposta nas orientações ao professor.

**b)** Utilizando régua e compasso, realize as construções necessárias e verifique suas estimativas. Resposta pessoal.

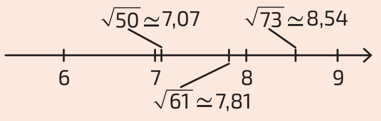
24.



- Reproduza e entregue aos alunos o plano cartesiano disponível nas **Páginas para reprodução**, para que possam realizar o item **b** da atividade **22**.
- Caso não haja calculadora para todos os alunos resolverem a atividade **25**, verifique a possibilidade de reuni-los em grupos.

**Resposta**

**25. a)**



Sergio L. Filho

- Para complementar o trabalho com essa página, leia o texto a seguir para os alunos, situando-os historicamente sobre a trigonometria e a tabela trigonométrica, que será vista mais adiante.

**Trigonometria e mensuração na Grécia**

A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem – ou nação. [...] Cada vez mais os astrônomos da Idade Alexandrina – notadamente Eratóstenes de Cirene (por volta de 276-194 a.C.) e Aristarco de Samos (por volta de 310-230 a.C.) tratavam problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas.

[...]

Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Eratóstenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática. Então, presumivelmente durante a segunda metade do segundo século a.C., foi compilada a que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Niceia (por volta de 180-125 a.C.), que assim ganhou o direito de ser chamado "o pai da trigonometria". [...] No entanto parece que antes de Hiparco empreender a tarefa ninguém tinha tabulado valores correspondentes do arco e da corda para toda uma série de ângulos. Foi sugerido, no entanto, que Apolônio pode ter-se antecipado a Hiparco quanto a isto, e que a contribuição desse último à trigonometria foi apenas a de calcular um melhor conjunto de cordas do que seus predecessores. Hiparco evidentemente calculou suas tabelas para serem usadas na sua astronomia, sobre cuja origem pouco se sabe. [...]

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 116-118.

# Relações trigonométricas no triângulo retângulo

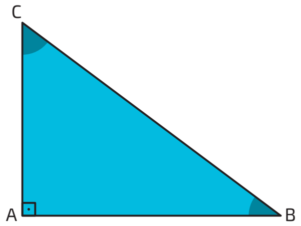
As relações métricas no triângulo retângulo estudadas anteriormente relacionam apenas as medidas dos comprimentos de seus lados. Agora, veremos relações que envolvem as medidas dos comprimentos dos lados e também as medidas dos ângulos internos do triângulo retângulo. A parte da Matemática que estuda, entre outros assuntos, os métodos para calcular as medidas do comprimento dos lados e dos ângulos de um triângulo é a **trigonometria.**

Não é certa a sua origem, porém há alguns problemas relacionados à trigonometria registrados no Papiro de Rhind e também em tábulas babilônicas.

É provável que a trigonometria tenha iniciado com os astrônomos babilônios da Antiguidade.

## Razões seno, cosseno e tangente

Inicialmente, vamos considerar o triângulo retângulo ABC e determinar quais são os catetos oposto e adjacente em relação a certo ângulo.



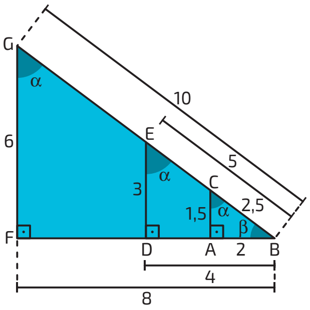
- Em relação ao ângulo agudo $\hat{B}$, o lado $\overline{AC}$ é o cateto oposto, e $\overline{AB}$ é o cateto adjacente.

**Em relação ao ângulo agudo $\hat{C}$, quem são os catetos oposto e adjacente?**

O lado $\overline{AB}$ é o cateto oposto e o lado $\overline{AC}$ é o cateto adjacente.

Agora, observe os triângulos retângulos semelhantes ABC, DBE e FBG.

Os símbolos α (lê-se: "alfa") e β (lê-se: "beta") são letras do alfabeto grego.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Na imagem, podemos notar que os triângulos são semelhantes, pois os ângulos correspondentes são congruentes.
Ao prolongarmos os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do ΔABC e traçarmos segmentos de reta paralelos ao lado $\overline{AC}$, obtemos triângulos retângulos semelhantes ao ΔABC. Nesse caso, ΔABC ~ ΔDBE ~ ΔFBG.

Com base nas medidas indicadas nos triângulos, vamos estabelecer as razões **seno**, **cosseno** e **tangente**.

- Razão entre a medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$ e a medida do comprimento da hipotenusa.

| ΔABC | ΔDBE | ΔFBG |
|---|---|---|
| $\frac{AC}{BC} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$ | $\frac{DE}{BE} = \frac{3}{5} = 0,6$ | $\frac{FG}{BG} = \frac{6}{10} = 0,6$ |

Note que as razões obtidas são iguais. Essa razão é chamada **seno** do ângulo cuja medida é β e indicamos por sen β.

- Razão entre a medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$ e a medida do comprimento da hipotenusa.

$\Delta ABC$ $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8$

$\Delta DBE$ $\frac{BD}{BE} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\Delta FBG$ $\frac{BF}{BG} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

As razões obtidas também são iguais. Essa razão é chamada **cosseno** do ângulo cuja medida é β e indicamos por cos β.

- Razão entre a medida do comprimento do cateto oposto e a medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$.

$\Delta ABC$ $\frac{AC}{AB} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$

$\Delta DBE$ $\frac{DE}{BD} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$\Delta FBG$ $\frac{FG}{BF} = \frac{6}{8} = 0{,}75$

Nesse caso, as razões obtidas também são iguais. Essa razão é chamada **tangente** do ângulo cuja medida é β e indicamos por tg β.

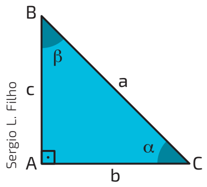
Em todo triângulo retângulo estabelecemos as razões trigonométricas **seno**, **cosseno** e **tangente**.

Tomando como referência o ângulo agudo $\hat{C}$, temos:

- $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{medida do comprimento do cateto oposto a }\hat{C}}{\text{medida do comprimento da hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{medida do comprimento do cateto adjacente a }\hat{C}}{\text{medida do comprimento da hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$
- $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{medida do comprimento do cateto oposto a }\hat{C}}{\text{medida do comprimento do cateto adjacente }\hat{C}} = \dfrac{c}{b}$

Tomando como referência o ângulo agudo $\hat{B}$, temos:

- $\text{sen}\,\beta = \dfrac{\text{medida do comprimento do cateto oposto a }\hat{B}}{\text{medida do comprimento da hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$
- $\cos\beta = \dfrac{\text{medida do comprimento do cateto adjacente a }\hat{B}}{\text{medida do comprimento da hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$
- $\text{tg}\,\beta = \dfrac{\text{medida do comprimento do cateto oposto a }\hat{B}}{\text{medida do comprimento do cateto adjacente }\hat{B}} = \dfrac{b}{c}$



Sergio L. Filho

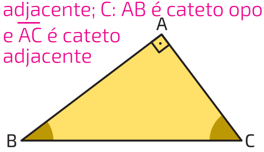
As razões seno, cosseno e tangente não dependem das medidas do comprimento dos lados do triângulo retângulo, e sim das medidas dos seus ângulos internos.

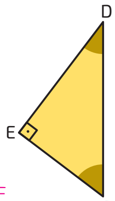
## Atividades

Anote no caderno

**26.** Identifique os catetos oposto e adjacente em relação a cada ângulo agudo dos triângulos.

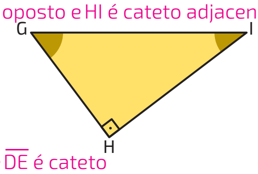
$\Delta ABC$
$\hat{B}$: $\overline{AC}$ é cateto oposto e $\overline{AB}$ é cateto adjacente; $\hat{C}$: $\overline{AB}$ é cateto oposto e $\overline{AC}$ é cateto adjacente



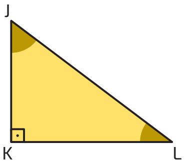


$\Delta DEF$
$\hat{D}$: $\overline{EF}$ é cateto oposto e $\overline{DE}$ é cateto adjacente; $\hat{F}$: $\overline{DE}$ é cateto oposto e $\overline{EF}$ é cateto adjacente

$\Delta GHI$
$\hat{G}$: $\overline{HI}$ é cateto oposto e $\overline{GH}$ é cateto adjacente; $\hat{I}$: $\overline{GH}$ é cateto oposto e $\overline{HI}$ é cateto adjacente

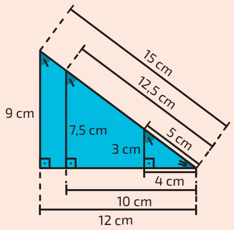


$\Delta JKL$
$\hat{J}$: $\overline{KL}$ é cateto oposto e $\overline{JK}$ é cateto adjacente; $\hat{L}$: $\overline{JK}$ é cateto oposto e $\overline{KL}$ é cateto adjacente



Ilustrações: Sergio L. Filho

- Para complementar o estudo dessa página, ao considerar os triângulos semelhantes da página anterior para introduzir o conceito de seno, cosseno e tangente, proponha também aos alunos a imagem a seguir e peça-lhes para verificar que os respectivos lados dos triângulos são proporcionais.



Sergio L. Filho

### Material digital

- O material digital dessa coleção apresenta o projeto **Arborização no bairro**, que possibilita uma integração com os componentes curriculares **Ciências** e **Geografia**, além do trabalho com os temas contemporâneos **Educação ambiental** e **Saúde**, destacados na **BNCC**. Esse projeto busca explorar as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo por meio da verificação experimental da medição da altura de árvores.

- Verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para trabalhar com o conteúdo das páginas **274** e **275**, da seção **Explorando tecnologias**, que aborda como determinar valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente de ângulos cuja medida é maior do que 0° e menor do que 90°, por meio do *software* GeoGebra.
- Verifique se os alunos notam que, para resolver o item **a** da questão **27**, o teorema de Pitágoras pode ser utilizado.
  No item **d**, leve-os a perceber que o seno de um ângulo entre 0° e 90° é igual ao cosseno de seu complementar.
- Após a realização da atividade **29**, verifique se os alunos perceberam que, para calcular a tangente do ângulo, podem ser considerados vários triângulos retângulos, como, por exemplo:
  $$\text{tg}\, b=\frac{1u}{2u}=\frac{2u}{4u}=\frac{3u}{6u}=\frac{1}{2}$$

## Respostas

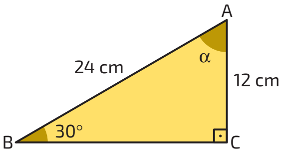
**27. c)** Complementares, pois $\text{med}\left(\hat{A}\right)+$ $+\,\text{med}\left(\hat{B}\right)=90°$.

**d)** $\text{sen}\, 30°=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$; $\cos\alpha=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$; são iguais

**30. b)**

- $\text{sen}\, 21° \simeq 0,358$; $\cos\, 21° \simeq 0,934$; $\text{tg}\, 21° \simeq 0,384$
- $\text{sen}\, 36° \simeq 0,588$; $\cos 36° \simeq 0,809$; $\text{tg}\, 36° \simeq 0,727$
- $\text{sen}\, 55° \simeq 0,819$; $\cos 55° \simeq 0,574$; $\text{tg}\, 55° \simeq 1,428$
- $\text{sen}\, 70° \simeq 0,940$; $\cos 70° \simeq 0,342$; $\text{tg}\, 70° \simeq 2,747$

**27.** De acordo com o $\Delta ABC$, responda.



Sergio L. Filho

**a)** Qual a medida aproximada do comprimento do lado $\overline{BC}$? $BC \simeq 20,785$ cm

**b)** Qual o valor de α? 60°

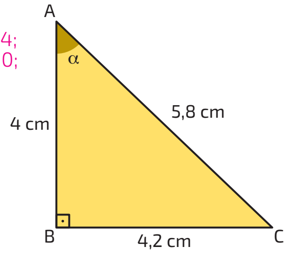
**c)** Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são complementares ou suplementares? Justifique. Resposta nas orientações ao professor.

**d)** Calcule sen 30° e cos α. O que você pôde observar em relação aos resultados obtidos? Resposta nas orientações ao professor.

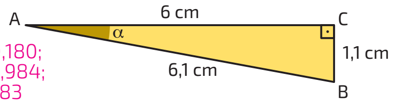
> Quando necessário, arredonde os valores calculados ao milésimo mais próximo.

**28.** Calcule o seno, o cosseno e a tangente do ângulo cuja medida é α em cada triângulo.

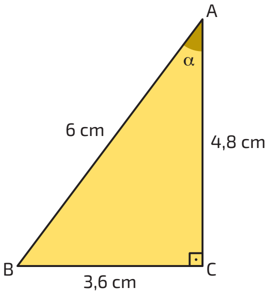
**a)** $\text{sen}\,\alpha \simeq 0,724$; $\cos\alpha \simeq 0,690$; $\text{tg}\,\alpha = 1,05$



**b)** $\text{sen}\,\alpha \simeq 0,180$; $\cos\alpha \simeq 0,984$; $\text{tg}\,\alpha \simeq 0,183$



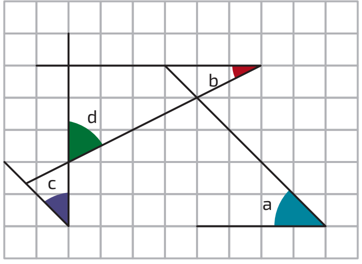
**c)** $\text{sen}\,\alpha = 0,6$; $\cos\alpha = 0,8$; $\text{tg}\,\alpha = 0,75$



Ilustrações: Sergio L. Filho

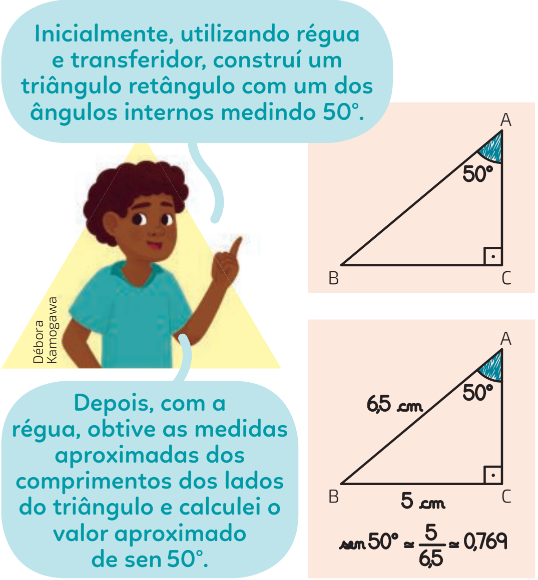
> Na seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **274** e **275**, veja como utilizar um *software* de geometria para determinar os valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente de ângulos cuja medida é maior do que 0° e menor do que 90°.

**29.** Determine a tangente dos ângulos indicados na malha quadriculada.
tg a = 1; tg b = 0,5; tg c = 1; tg d = 2



Sergio L. Filho

**30.** Observe como Caio calculou o valor aproximado de sen 50°.



Débora Kamogawa

Ilustrações: Sergio L. Filho

**a)** Calcule os valores aproximados do cosseno e da tangente do ângulo cuja medida é 50°. $\cos 50° \simeq 0,646$; $\text{tg}\, 50° \simeq 1,190$

**b)** Utilizando os mesmos procedimentos, calcule o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos cujas medidas estão indicadas a seguir. Resposta nas orientações ao professor.

- 21°
- 36°
- 55°
- 70°

**31.** Na ficha estão indicadas as medidas do comprimento dos lados de um triângulo retângulo.

AB = 5,25 cm
AC = 7,25 cm
BC = 5,0 cm

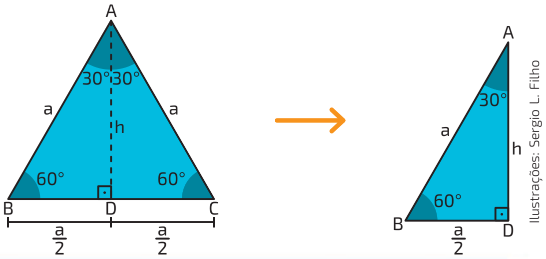
Calcule o seno e o cosseno do ângulo correspondente ao vértice C. 0,724; 0,690

## Ângulos notáveis

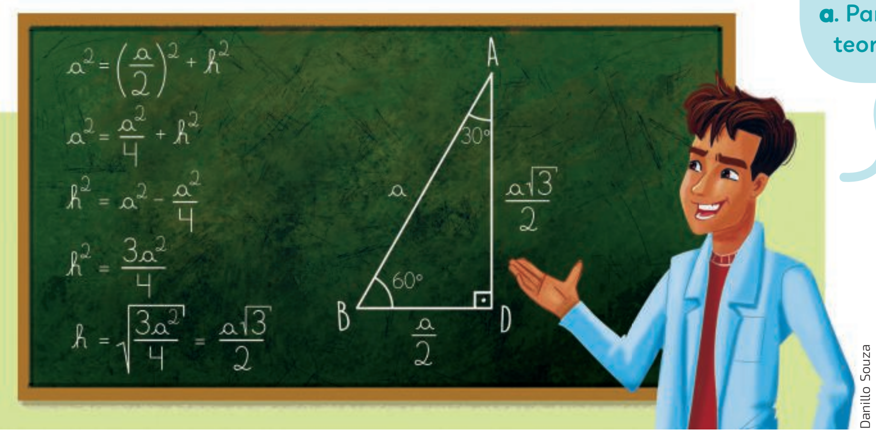
É comum encontrarmos situações envolvendo triângulos retângulos em que aparecem ângulos internos com medidas iguais a 30°, 45° e 60°. Esses ângulos são chamados **ângulos notáveis**.

### Seno, cosseno e tangente de ângulos com medidas iguais a 30° e 60°

Vamos considerar o triângulo equilátero ABC com o comprimento dos lados medindo **a** e altura $\overline{AD}$ relativa ao lado $\overline{BC}$.



No triângulo ABC, a medida **h** (AD), da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, pode ser escrita em função de **a**. Para isso, utilizamos o teorema de Pitágoras.



De acordo com esse triângulo, calculamos o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de medidas 30° e 60°.

- Seno

$$\text{sen } 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Cosseno

$$\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

- Tangente

$$\text{tg } 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

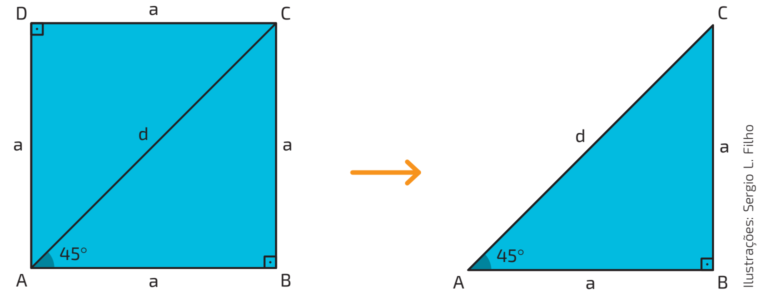
$$\text{tg } 60° = \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3}$$

- Ao apresentar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos notáveis nessa página e na página seguinte, proponha alguns questionamentos para que os alunos percebam que sen 30° = cos 60°, sen 45° = cos 45°, sen 60° = cos 30°, e que a soma das medidas dos ângulos em cada igualdade resulta em 90°. Informe-os de que isso ocorre para quaisquer pares de ângulos entre 0° e 90°. Na página **207**, é apresentada a tabela trigonométrica, por meio da qual é possível verificar essa propriedade.

- Avalie a possibilidade de construir com os alunos um quadro com os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos com medidas iguais a 30°, 45° e 60°, a fim de utilizá-lo durante a resolução de outras atividades e quando julgarem oportuno. Para isso, providencie algumas tesouras com pontas arredondadas e cartolinas. Em seguida, peça para os alunos reproduzirem na cartolina o quadro com os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis com medidas iguais a 30°, 45° e 60° presentes nessa página e, em seguida, recortarem e guardarem para consultas futuras.

## Seno, cosseno e tangente do ângulo com medida igual a 45°

Vamos considerar o quadrado ABCD cujo comprimento dos lados mede **a** e a diagonal, **d**.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Danillo Souza

De acordo com esse quadrado, calculamos o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de medida 45°.

- Seno

$$\text{sen } 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Cosseno

$$\cos 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Tangente

$$\text{tg } 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

Organizando os resultados obtidos em um quadro, temos:

| x | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| sen x | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos x | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg x | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

# Tabela trigonométrica

Para cada medida de ângulo, temos um valor correspondente para as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Esses valores (aproximados) podem ser obtidos consultando uma **tabela trigonométrica**, como a apresentada.

| Medida do ângulo | Seno | Cosseno | Tangente |
|---|---|---|---|
| 1° | 0,017 | 1,000 | 0,017 |
| 2° | 0,035 | 0,999 | 0,035 |
| 3° | 0,052 | 0,999 | 0,052 |
| 4° | 0,070 | 0,998 | 0,070 |
| 5° | 0,087 | 0,996 | 0,087 |
| 6° | 0,105 | 0,995 | 0,105 |
| 7° | 0,122 | 0,993 | 0,123 |
| 8° | 0,139 | 0,990 | 0,141 |
| 9° | 0,156 | 0,988 | 0,158 |
| 10° | 0,174 | 0,985 | 0,176 |
| 11° | 0,191 | 0,982 | 0,194 |
| 12° | 0,208 | 0,978 | 0,213 |
| 13° | 0,225 | 0,974 | 0,231 |
| 14° | 0,242 | 0,970 | 0,249 |
| 15° | 0,259 | 0,966 | 0,268 |
| 16° | 0,276 | 0,961 | 0,287 |
| 17° | 0,292 | 0,956 | 0,306 |
| 18° | 0,309 | 0,951 | 0,325 |
| 19° | 0,326 | 0,946 | 0,344 |
| 20° | 0,342 | 0,940 | 0,364 |
| 21° | 0,358 | 0,934 | 0,384 |
| 22° | 0,375 | 0,927 | 0,404 |
| 23° | 0,391 | 0,921 | 0,424 |
| 24° | 0,407 | 0,914 | 0,445 |
| 25° | 0,423 | 0,906 | 0,466 |
| 26° | 0,438 | 0,899 | 0,488 |
| 27° | 0,454 | 0,891 | 0,510 |
| 28° | 0,469 | 0,883 | 0,532 |
| 29° | 0,485 | 0,875 | 0,554 |
| 30° | 0,500 | 0,866 | 0,577 |
| 31° | 0,515 | 0,857 | 0,601 |
| 32° | 0,530 | 0,848 | 0,625 |
| 33° | 0,545 | 0,839 | 0,649 |
| 34° | 0,559 | 0,829 | 0,675 |
| 35° | 0,574 | 0,819 | 0,700 |
| 36° | 0,588 | 0,809 | 0,727 |
| 37° | 0,602 | 0,799 | 0,754 |
| 38° | 0,616 | 0,788 | 0,781 |
| 39° | 0,629 | 0,777 | 0,810 |
| 40° | 0,643 | 0,766 | 0,839 |
| 41° | 0,656 | 0,755 | 0,869 |
| 42° | 0,669 | 0,743 | 0,900 |
| 43° | 0,682 | 0,731 | 0,933 |
| 44° | 0,695 | 0,719 | 0,966 |
| 45° | 0,707 | 0,707 | 1,000 |
| 46° | 0,719 | 0,695 | 1,036 |
| 47° | 0,731 | 0,682 | 1,072 |
| 48° | 0,743 | 0,669 | 1,111 |
| 49° | 0,755 | 0,656 | 1,150 |
| 50° | 0,766 | 0,643 | 1,192 |
| 51° | 0,777 | 0,629 | 1,235 |
| 52° | 0,788 | 0,616 | 1,280 |
| 53° | 0,799 | 0,602 | 1,327 |
| 54° | 0,809 | 0,588 | 1,376 |
| 55° | 0,819 | 0,574 | 1,428 |
| 56° | 0,829 | 0,559 | 1,483 |
| 57° | 0,839 | 0,545 | 1,540 |
| 58° | 0,848 | 0,530 | 1,600 |
| 59° | 0,857 | 0,515 | 1,664 |
| 60° | 0,866 | 0,500 | 1,732 |
| 61° | 0,875 | 0,485 | 1,804 |
| 62° | 0,883 | 0,469 | 1,881 |
| 63° | 0,891 | 0,454 | 1,963 |
| 64° | 0,899 | 0,438 | 2,050 |
| 65° | 0,906 | 0,423 | 2,145 |
| 66° | 0,914 | 0,407 | 2,246 |
| 67° | 0,921 | 0,391 | 2,356 |
| 68° | 0,927 | 0,375 | 2,475 |
| 69° | 0,934 | 0,358 | 2,605 |
| 70° | 0,940 | 0,342 | 2,747 |
| 71° | 0,946 | 0,326 | 2,904 |
| 72° | 0,951 | 0,309 | 3,078 |
| 73° | 0,956 | 0,292 | 3,271 |
| 74° | 0,961 | 0,276 | 3,487 |
| 75° | 0,966 | 0,259 | 3,732 |
| 76° | 0,970 | 0,242 | 4,011 |
| 77° | 0,974 | 0,225 | 4,331 |
| 78° | 0,978 | 0,208 | 4,705 |
| 79° | 0,982 | 0,191 | 5,145 |
| 80° | 0,985 | 0,174 | 5,671 |
| 81° | 0,988 | 0,156 | 6,314 |
| 82° | 0,990 | 0,139 | 7,115 |
| 83° | 0,993 | 0,122 | 8,144 |
| 84° | 0,995 | 0,105 | 9,514 |
| 85° | 0,996 | 0,087 | 11,430 |
| 86° | 0,998 | 0,070 | 14,301 |
| 87° | 0,999 | 0,052 | 19,081 |
| 88° | 0,999 | 0,035 | 28,636 |
| 89° | 1,000 | 0,017 | 57,290 |

Note que essa tabela apresenta os valores para as razões trigonométricas de ângulos com medidas de 1° a 89° com aproximações de três casas decimais.

- Peça aos alunos que, com base no quadro apresentado na página anterior, obtenham em uma calculadora o número decimal aproximado correspondente ao seno, ao cosseno e à tangente dos ângulos notáveis. Depois, solicite que comparem-nos com os valores correspondentes indicados na tabela trigonométrica.

- No ΔABC que aparece no fim da página, explique aos alunos que também podemos determinar a medida de β utilizando a razão trigonométrica seno ou a tangente. Nesse caso, precisamos calcular inicialmente a medida do cateto oposto ao ângulo β utilizando o teorema de Pitágoras. Observe:

$14^2 = (AC)^2 + (7,8)^2$

$196 = (AC)^2 + 60,84$

$(AC)^2 = 196 - 60,84$

$(AC)^2 = 135,16$

$AC \simeq 11,626.$

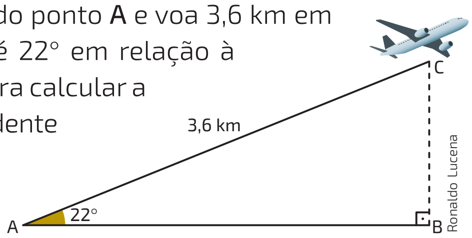
Assim:

- $\text{sen}\,\beta = \frac{11,626}{14} \simeq 0,83$
- $\text{tg}\,\beta = \frac{11,626}{7,8} \simeq 1,49$

Consultando a tabela trigonométrica, verificamos qual é a medida do ângulo cujo seno mais se aproxima de 0,83 e cuja tangente mais se aproxima de 1,49. Nesse caso, temos que a medida de β é de, aproximadamente, 56°.

Observe o exemplo.

No esquema ao lado, um avião decola do ponto **A** e voa 3,6 km em linha reta, com um ângulo cuja medida é 22° em relação à horizontal, quando sobrevoa o ponto **B**. Para calcular a medida do comprimento de $\overline{BC}$, correspondente à medida da altura do avião, temos de calcular sen 22°, isto é:



Ronaldo Lucena

$$\text{sen}\,22° = \frac{BC}{3,6} \quad \text{(I)}$$

Ao consultar a tabela, verificamos que o valor de sen 22° é aproximadamente 0,375. Substituindo esse valor em **I**, temos:

$$\text{sen}\,22° = \frac{BC}{3,6}$$

$$0,375 = \frac{BC}{3,6}$$

$$BC = 1,35$$

| Medida do ângulo | Seno | Cosseno | Tangente |
|---|---|---|---|
| 21° | 0,358 | 0,934 | 0,384 |
| 22° | 0,375 | 0,927 | 0,404 |
| 23° | 0,391 | 0,921 | 0,424 |

Assim, a medida da altura do avião ao sobrevoar o ponto **B** é 1,35 km.

De maneira parecida, também podemos calcular a medida do comprimento de $\overline{AB}$. Para isso, utilizamos a razão cosseno e a tabela trigonométrica.

$$\cos 22° = \frac{AB}{3,6}$$

$$0,927 = \frac{AB}{3,6}$$

$$AB \simeq 3,337$$

| Medida do ângulo | Seno | Cosseno | Tangente |
|---|---|---|---|
| 21° | 0,358 | 0,934 | 0,384 |
| 22° | 0,375 | 0,927 | 0,404 |
| 23° | 0,391 | 0,921 | 0,424 |

Assim, a medida do comprimento de $\overline{AB}$ é aproximadamente 3,337 km.

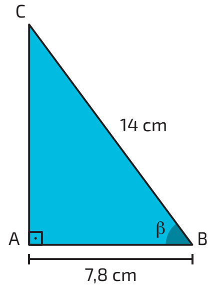
Além de obtermos a medida do comprimento dos lados, também podemos calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo retângulo.

Veja, por exemplo, como calcular o valor de β no ΔABC.

Utilizando a relação cosseno, temos:

$$\cos \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{7,8}{14} \simeq 0,557$$

| Ângulo | Seno | Cosseno | Tangente |
|---|---|---|---|
| 55° | 0,819 | 0,574 | 1,428 |
| 56° | 0,829 | 0,559 | 1,483 |
| 57° | 0,839 | 0,545 | 1,540 |



Sergio L. Filho

Consultando a tabela, verificamos qual é a medida do ângulo cujo cosseno mais se aproxima do valor obtido. Nesse caso, temos que β é aproximadamente 56°.

## Atividades

Anote no caderno

**32.** De acordo com a tabela trigonométrica, escreva os valores aproximados de:

**a)** sen 15° 0,259 **c)** cos 37° 0,799 **e)** tg 26° 0,488

**b)** sen 85° 0,996 **d)** cos 70° 0,342 **f)** tg 48° 1,111

**33.** Em cada item, determine o valor aproximado de α.

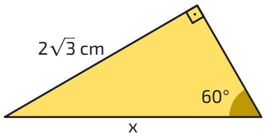
**a)** $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}3577$ 21° **d)** $\cos \alpha = 0{,}3749$ 68°

**b)** $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}8094$ 54° **e)** $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}1758$ 10°

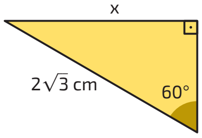
**c)** $\cos \alpha = 0{,}7659$ 40° **f)** $\operatorname{tg} \alpha = 9{,}5142$ 84°

**34.** Calcule o valor de **x** em cada triângulo.

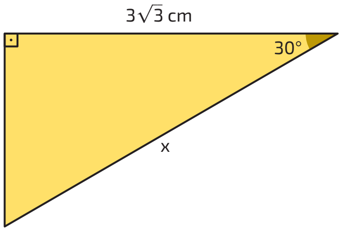
**a)** 4 cm



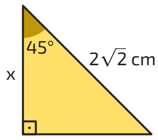
**b)** 3 cm



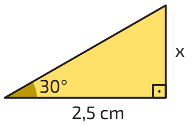
**c)** 6 cm



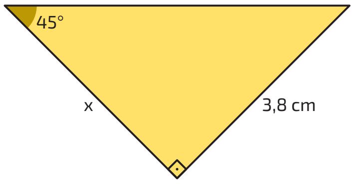
**d)** 2 cm



**e)** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ cm ou aproximadamente 1,443 cm



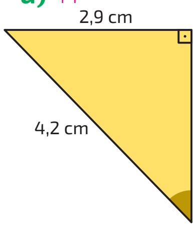
**f)** 3,8 cm



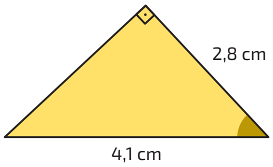
Ilustrações: Sergio L. Filho

**35.** Sem utilizar transferidor, determine a medida aproximada dos ângulos em destaque.

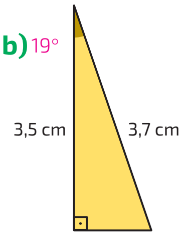
**a)** 44°



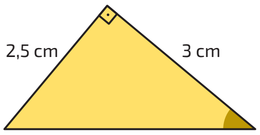
**c)** 47°



**b)** 19°

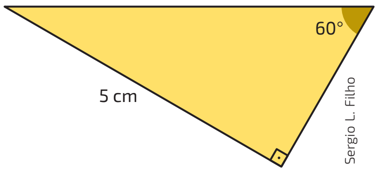


**d)** 40°



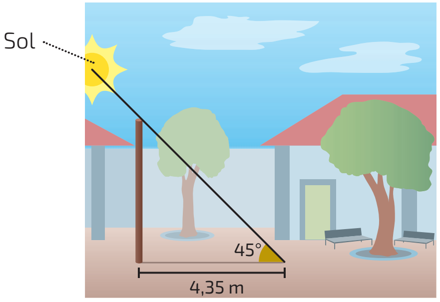
Ilustrações: Sergio L. Filho

**36.** Qual a medida aproximada do perímetro do triângulo a seguir? 13,661 cm



Sergio L. Filho

**37.** No momento do dia em que os raios do Sol estão inclinados formando um ângulo com medida igual a 45° em relação ao solo, o mastro no pátio de uma escola projeta uma sombra cuja medida do comprimento é 4,35 m. Qual a medida da altura desse mastro? 4,35 m



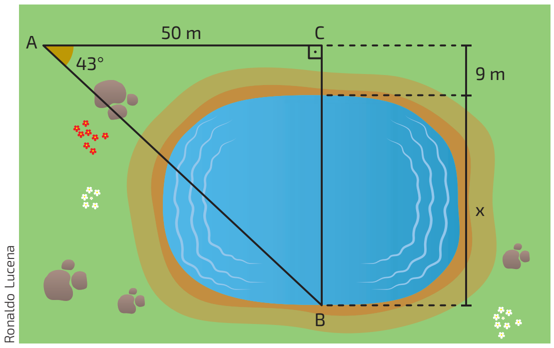
Ronaldo Lucena

- Complemente a atividade **36** propondo a seguinte questão:
  - Calcule a medida aproximada da área de um triângulo semelhante ao apresentado na atividade, cuja medida do cateto oposto ao ângulo de 60° meça 3 cm.
  - R aproximadamente 2,60 cm²

- Na atividade **39**, verifique se os alunos perceberam que, para determinar a medida do ângulo $B\hat{A}C$, é necessário obter, inicialmente, a medida de $\overline{CE}$ e, depois, a medida de $\overline{AC}$. Para isso, eles devem utilizar o teorema de Pitágoras. Por último, utiliza-se a razão cosseno para determinar a medida do ângulo.
- Na atividade **42**, caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, verifique a possibilidade de levar algumas calculadoras para a sala de aula.

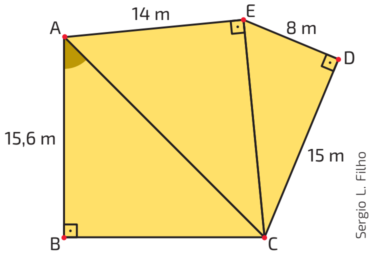
**38.** Já vimos que o topógrafo é o profissional responsável por representar no papel a configuração da superfície de uma região, localizando tanto os acidentes naturais (lagos, encostas, rios etc.) quanto os artificiais (casas, pontes, estradas etc.).

De acordo com o esquema e as medidas obtidas por um topógrafo, calcule a medida da largura **x** do lago representado. 37,65 m



Ronaldo Lucena

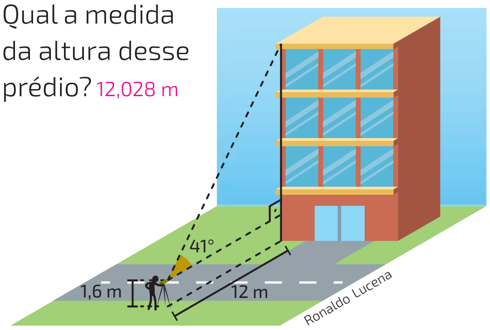
**39.** Determine a medida do ângulo $B\hat{A}C$ indicado na figura. 45°



Sergio L. Filho

**40.** Observe no esquema algumas medidas obtidas por um topógrafo.

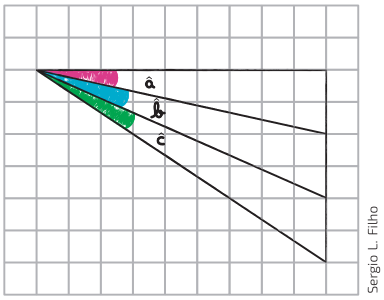
Qual a medida da altura desse prédio? 12,028 m



Ronaldo Lucena

**41.** Um pedestre está subindo uma rampa com 22 m de comprimento que forma com a horizontal um ângulo com medida igual a 15°. A que medida de altura estará o pedestre quando chegar ao topo da rampa? 5,698 m

**42.** Observe a figura que Joseane construiu utilizando papel milimetrado.

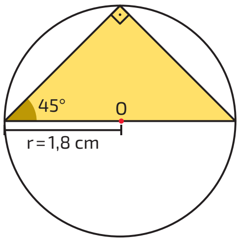


Sergio L. Filho

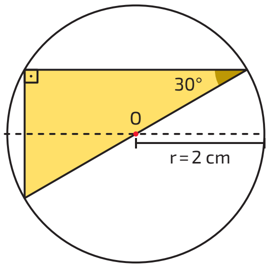
Com o auxílio de uma calculadora e consultando a tabela trigonométrica, determine a medida aproximada de cada ângulo indicado. $\text{med}(\hat{a}) \simeq 13^\circ$; $\text{med}(\hat{b}) \simeq 11^\circ$; $\text{med}(\hat{c}) \simeq 10^\circ$

**43.** Determine a medida da área de cada triângulo.

**a)** $3{,}24\ \text{cm}^2$



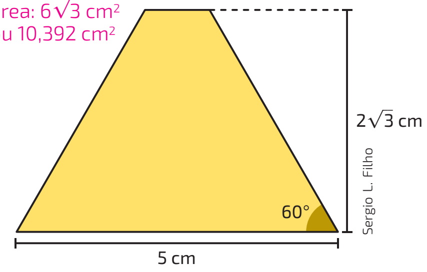
**b)** $2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ ou $3{,}464\ \text{cm}^2$



Ilustrações: Sergio L. Filho

**44.** Calcule a medida do perímetro e a medida da área do trapézio isósceles.

perímetro: 14 cm;
área: $6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
ou $10{,}392\ \text{cm}^2$



Sergio L. Filho

## BNCC em foco

- A atividade apresentada na próxima página possibilita desenvolver e discutir com os alunos assuntos relacionados a questões de urgência social, como é o caso da acessibilidade de pessoas com deficiências. Desse modo, leva-os a refletir pautados em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza. Dessa maneira, contempla-se a **Competência específica de Matemática 7**.

## Matemática em destaque

**45.** A acessibilidade das pessoas que se movimentam com cadeira de rodas e do cidadão portador de necessidades especiais, em geral, é garantida por leis e normas que visam proporcionar-lhes maior independência. Entre elas podemos destacar as que apontam para a necessidade das rampas de acesso em espaços públicos, a área especial para embarque e desembarque em transporte coletivo e o atendimento prioritário em diversas situações.

Uma dessas normas estabelece a inclinação máxima que a rampa de acesso para pessoas portadoras de necessidades especiais deve ter. Observe.

A razão entre a medida da altura **a** que se deseja acessar e a medida do comprimento horizontal **c** da rampa deve ser no máximo 0,0833.

$$\frac{a}{c} \leq 0{,}0833$$

Assim, por exemplo, para acessar uma altura com medida de 1 m, é necessário que a medida do comprimento horizontal da rampa não seja inferior a 12 m, pois $\frac{1}{12} \simeq 0{,}0833$.

45. c) Espera-se que os alunos respondam que é importante para garantir o acesso adequado aos portadores de necessidades especiais, pois, quanto maior a inclinação da rampa, mais difícil é subi-la ou descê-la.

**a)** Para um cadeirante, qual a importância das rampas de acesso?

Possível resposta: para que possa ter maior independência no acesso a locais públicos.

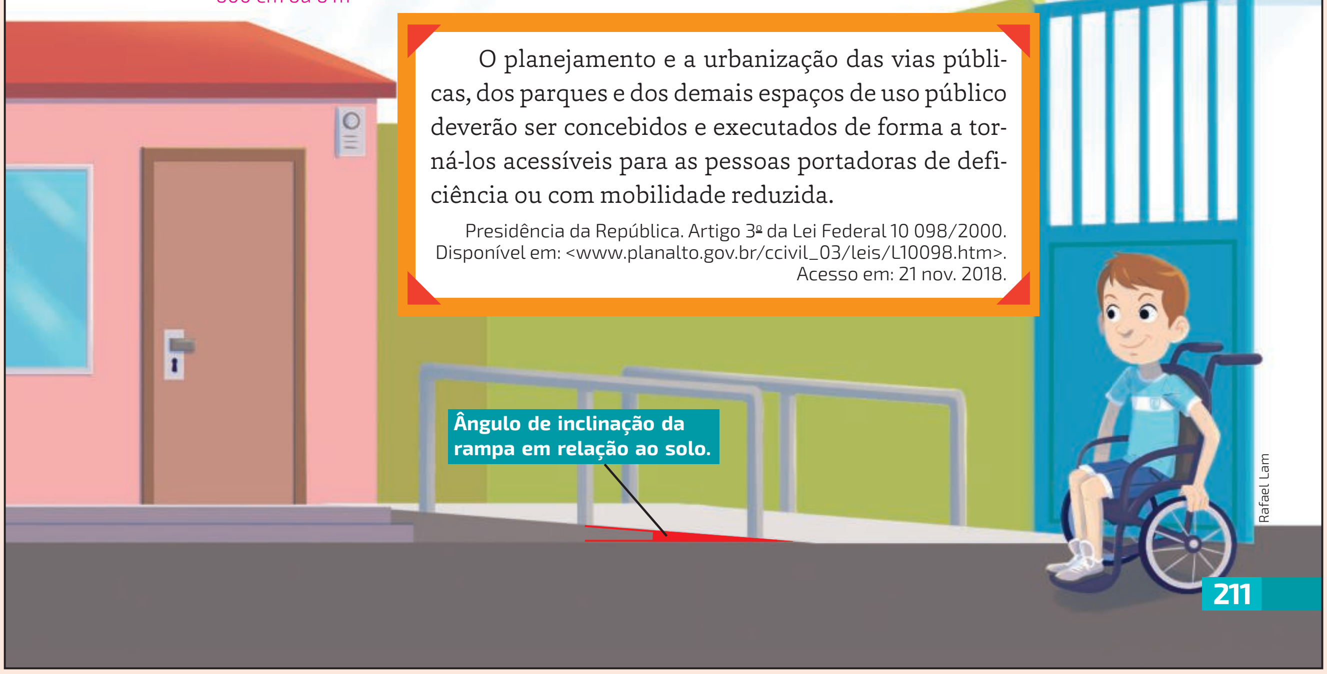
**b)** Em relação ao solo, qual a medida aproximada do ângulo de inclinação de uma rampa cuja medida da altura é igual a 25 cm e a medida do comprimento horizontal é igual a 5 m? 3°

- Essa medida está de acordo com a norma que estabelece a inclinação máxima de uma rampa de acesso para pessoas portadoras de necessidades especiais? Justifique sua resposta. Sim, pois $\frac{25}{500} = 0{,}05 \leq 0{,}0833$.

**c)** Em sua opinião, qual a importância de estabelecer uma inclinação máxima para as rampas de acesso?

**d)** Para acessar uma altura com medida igual a 50 cm, qual deve ser, aproximadamente, a medida do comprimento horizontal mínimo da rampa?

600 cm ou 6 m



> O planejamento e a urbanização das vias públicas, dos parques e dos demais espaços de uso público deverão ser concebidos e executados de forma a torná-los acessíveis para as pessoas portadoras de deficiência ou com mobilidade reduzida.
>
> Presidência da República. Artigo 3º da Lei Federal 10 098/2000. Disponível em: <www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L10098.htm>. Acesso em: 21 nov. 2018.

Rafael Lam

### BNCC em foco

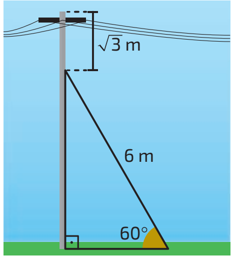
- A atividade **45** apresenta aos alunos um artigo da lei federal que regulamenta a acessibilidade de pessoas portadoras de necessidades especiais e informa sobre as normas para a construção das rampas de acesso. Esse assunto torna-se conveniente para o trabalho com a **Competência geral 1**, pois auxilia os alunos na compreensão da realidade, de modo que possam colaborar com a elaboração de uma sociedade mais justa e inclusiva, incentivando-os a utilizar os conhecimentos historicamente construídos para intervir de maneira positiva na sociedade.
- Destacar o direito à acessibilidade é também uma maneira de colocar em pauta o tema contemporâneo **Educação em Direitos Humanos**, uma vez que todas as pessoas têm igualdade de direitos e devem ter suas diferenças reconhecidas e valorizadas, além de que, igualmente, devem ter o direito à liberdade de locomoção e residência dentro das fronteiras de cada Estado assegurado.

- Aproveite ainda os estudos sobre as rampas de acessibilidade e converse com os alunos sobre ter empatia para com quem está em situação de mobilidade reduzida. Pergunte a eles se conhecem alguém nessas condições e se sabem dizer algo a respeito do cotidiano da pessoa no que tange ao acesso a locais e vias públicas. Questione-os também sobre a acessibilidade na cidade em que vivem, se porventura já observaram se há rampas acessíveis. Peça que façam o exercício de se colocar no lugar da pessoa com necessidades especiais e imaginar como seria seu dia a dia, de modo que se solidarizem e possam lutar junto com esses indivíduos pelos seus direitos. A lei citada pode ser consultada integralmente no endereço eletrônico disponível em: <www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L10098.htm>. Acesso em: 19 nov. 2018. Considere levar os alunos para fora da sala de aula e peça a eles que, com um transferidor, estimem a medida do ângulo de algumas rampas que há na escola. Reúna-os em duplas caso não haja transferidores suficientes, ou então reproduza o disponível nas **Páginas para reprodução**.

- Complemente as atividades dessa página propondo aos alunos a questão a seguir:
  - Joaquim deseja construir uma rampa para acessar a garagem de sua casa. Sabendo que o desnível da garagem em relação à calçada é de 1,5 m e a inclinação da rampa será de 30° com a horizontal, qual será a medida do comprimento dessa rampa?

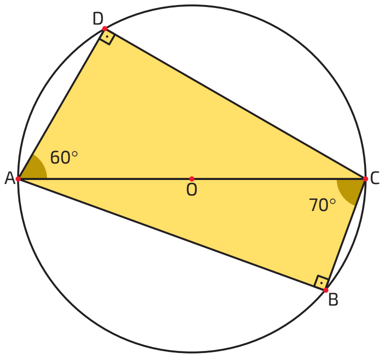
    Ⓡ 3 m

**46.** Para auxiliar na sustentação de um poste, foi fixado um cabo de aço de 6 m de comprimento a $\sqrt{3}$ m de seu topo, formando um ângulo com medida de 60° com o solo, conforme a figura. Qual a medida da altura do poste?
$4\sqrt{3}$ m ou aproximadamente 6,928 m



Ronaldo Lucena

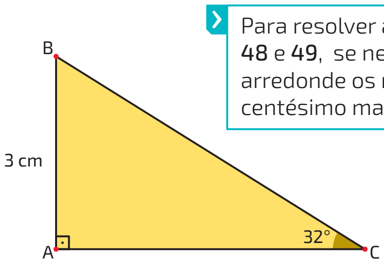
**47.** Calcule a medida aproximada da área do quadrilátero ABCD sabendo que a medida do diâmetro da circunferência de centro **O** é igual a 6 cm. 13,581 cm²



Sergio L. Filho

**48.** Qual ficha apresenta apenas informações corretas acerca do ΔABC? a

Para resolver as atividades **48** e **49**, se necessário, arredonde os resultados ao centésimo mais próximo.



Sergio L. Filho

**a)** BC = 5,66 m
AC = 4,8 m

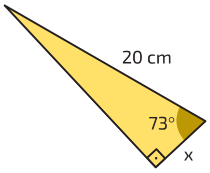
**c)** BC = 1,59 m
AC = 1,87 m

**b)** BC = 4,8 m
AC = 5,66 m

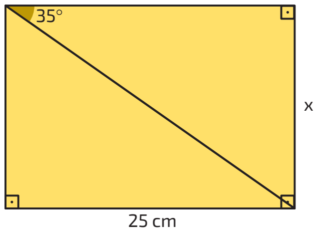
**d)** BC = 1,87 m
AC = 1,59 m

**49.** Calcule a medida de **x** em cada figura.

**a)** x = 5,84 cm

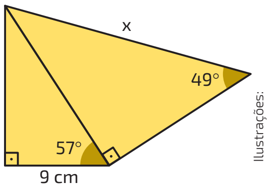


**b)** x = 17,5 cm



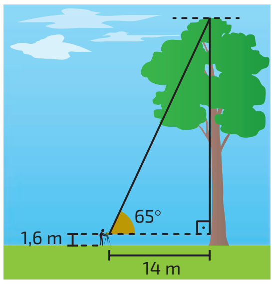
**c)** x ≃ 8,12 cm

**d)** x ≃ 21,87 cm



Ilustrações: Sergio L. Filho

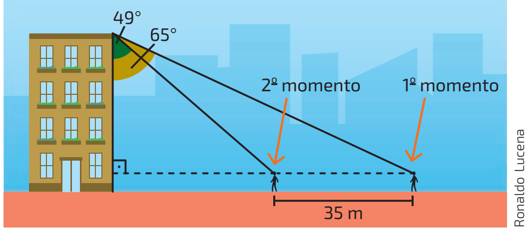
**50.** Para calcular a medida da altura de uma árvore, Marcelo construiu o esquema a seguir com o auxílio de um teodolito. Qual é a medida aproximada da altura dessa árvore? 31,63 m



Ronaldo Lucena

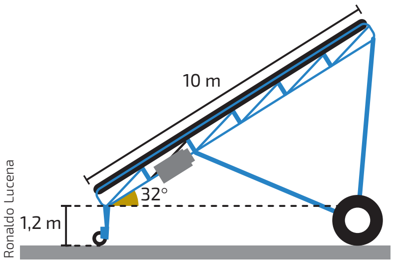
**51.** Uma escada de 2,6 m de comprimento está apoiada em uma parede 40 cm abaixo de uma janela. Determine a medida da altura que a janela está do solo sabendo que a escada forma com a horizontal um ângulo que mede 58°.
2,605 m

**52.** Uma pessoa observa o alto de um prédio em dois momentos sob diferentes ângulos, conforme o esquema.



Qual é a medida aproximada da distância entre a pessoa e o prédio no 1º momento? E no 2º momento? 75,452 m; 40,452 m

**53.** De acordo com um fabricante de esteiras elevatórias, a medida do ângulo de inclinação de uma esteira com 10 m de comprimento pode variar de 0° a 32°. Observe o esquema.



**a)** Quais são as medidas de altura mínima e máxima que essa esteira pode atingir? altura mínima: 1,2 m; altura máxima: 6,5 m

**b)** Calcule a medida da altura que a esteira atinge quando a medida do ângulo de inclinação é:

- 12° 3,28 m
- 19° 4,46 m
- 28° 5,89 m

**c)** Determine a medida do ângulo de inclinação quando a medida da altura da esteira é:

- 2,76 m 9°
- 4,95 m 22°
- 6,35 m 31°

## Explorando o que estudei

Anote no caderno

**1.** Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo

**2.** Explique o que você entende por trigonometria. Resposta pessoal.

**3.** Qual a diferença entre relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo? Possível resposta: as relações métricas envolvem apenas a medida do comprimento dos lados do triângulo retângulo e as relações trigonométricas, a medida do comprimento dos lados e a medida dos ângulos internos.

**4.** Como você escolhe a relação métrica mais conveniente para determinar certa medida em um triângulo retângulo? Espera-se que os alunos respondam que escolhem de acordo com as medidas conhecidas e a que se quer determinar.

**5.** A afirmação abaixo está correta? Por quê? sim; Espera-se que os alunos justifiquem que a medida desconhecida pode ser obtida, por exemplo, utilizando o teorema de Pitágoras.

> Dadas as medidas do comprimento de dois lados de um triângulo retângulo, é sempre possível obter a medida do comprimento do outro.

**6.** Qual a relação entre o teorema de Pitágoras e a medida da distância entre dois pontos em um plano cartesiano?

6. Resposta pessoal. Possível resposta: a partir da utilização do teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida da distância entre dois pontos em um plano cartesiano identificando a hipotenusa e os catetos do triângulo retângulo formado pelo segmento de reta que une os dois pontos e as projeções horizontal e vertical desse segmento.

**7.** O que você entende por coordenadas do ponto médio de um segmento de reta?

7. Resposta pessoal. Possível resposta: são as coordenadas do ponto que divide um segmento de reta em dois segmentos congruentes.

**8.** Explique o que são o seno, o cosseno e a tangente. Possível resposta: são razões trigonométricas que relacionam a medida de um ângulo e a medida do comprimento de dois lados do triângulo retângulo.

**9.** Em quais circunstâncias é conveniente utilizar a tabela trigonométrica? Espera-se que os alunos respondam que quando se quer obter o valor do seno, do cosseno ou da tangente da medida de um ângulo ou, com base nesse valor, a medida do comprimento de um lado do triângulo retângulo.

### Material digital

- Antes de prosseguir com os estudos e, se julgar oportuno, avalie a aprendizagem dos alunos em relação a algumas habilidades trabalhadas no decorrer desse bimestre. O material digital apresenta uma proposta de avaliação para o 3º bimestre que pode ser utilizada neste momento como ferramenta auxiliar do processo de ensino e aprendizagem.

- Na atividade **53**, explique aos alunos que algumas empresas utilizam esteiras elevatórias para levar seus produtos ao caminhão que realizará o transporte. Conforme a medida da altura da carroceria desse caminhão, é necessário ajustar a esteira alterando o ângulo de sua inclinação.

### Avaliação

- Utilize a seção **Explorando o que estudei** para realizar uma avaliação com a turma, de maneira a identificar quais habilidades os alunos desenvolveram durante o estudo desse capítulo. Observe e anote possíveis dúvidas que surgirem durante as resoluções e, caso julgue necessário, faça um resumo do conteúdo para a turma. Durante o processo de avaliação, reflita sobre as práticas empregadas no trabalho com o capítulo identificando como elas contribuíram com os processos de ensino e aprendizagem, podendo confirmá-las ou modificá-las para as próximas aulas.

- Após os alunos responderem à questão **2**, verifique se eles compreenderam que a trigonometria é uma parte da Matemática que trata, entre outros conceitos, do estudo dos métodos para calcular as medidas dos comprimentos dos lados e dos ângulos de um triângulo.
- Na questão **5**, peça aos alunos que desenhem alguns triângulos retângulos para verificarem na prática a informação apresentada e, em seguida, solicite que eles mostrem aos colegas.

# Capítulo 10

## Estatística e probabilidade

Alf Ribeiro/Shutterstock.com

Congestionamento na avenida 23 de Maio, em dezembro de 2017, na cidade de São Paulo (SP).

Nesse capítulo, as atividades contextualizadas procurarão motivar a leitura e a interpretação de dados apresentados por meio de gráficos e tabelas, bem como a construção de algumas dessas formas de representação. Os alunos também serão levados a calcular a média aritmética, a mediana e a moda de conjuntos de dados.

Ademais, serão estudadas a pesquisa amostral e as amostragens aleatórias, sistemáticas e estratificadas, além do cálculo de probabilidade, levando os alunos a terem contato com conceitos relacionados à natureza aleatória de alguns eventos ao estudarem as chances de suas ocorrências.

- A contextualização apresentada na abertura do capítulo traz informações sobre o trânsito e os transportes no Brasil, assunto bastante discutido atualmente, sobretudo com ênfase na questão ambiental e na problemática dos congestionamentos. Os dados organizados com o auxílio de recursos provenientes da Estatística levam os alunos a perceberem a importância desse conceito na apresentação de informações. Uma sugestão de condução do trabalho é ler o texto coletivamente e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. As respostas das questões propostas podem ser indicadas na lousa com base nos argumentos desenvolvidos por eles e, nesse momento, é importante que a turma seja incentivada a participar. Para complementar o estudo do tema, questione-os sobre outras maneiras por meio das quais os dados apresentados poderiam ter sido organizados, como texto discursivo, tabela, gráfico, entre outras. Com base nas respostas, também é possível solicitar que os alunos confeccionem cartazes com as informações apresentadas nas páginas de abertura.

O constante e acelerado crescimento da frota brasileira de veículos, bem acima da taxa de crescimento populacional, tem gerado vários transtornos, como congestionamentos, aumento de vítimas em acidentes de trânsito e um tráfego cada dia mais lento nas grandes cidades. Enquanto a população brasileira cresceu cerca de 17,5% de 2003 a 2017, a frota de automóveis, nesse mesmo período, aumentou cerca de 123,2% e a de motocicletas 307,5%.

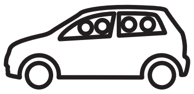
Entre as providências que vários países do mundo têm adotado estão a cobrança de pedágios nas regiões mais movimentadas, investimento no transporte coletivo e rodízio de automóveis.

Para melhorar o tráfego e a segurança no trânsito, cada cidadão deve fazer sua parte, como respeitar as leis de trânsito e dar preferência aos transportes coletivos urbanos, que, além de poluírem menos, transportam mais pessoas ocupando menos espaço na malha viária.

## Dicas para redução de congestionamentos

Quando a medida do trajeto for pequena, opte por fazê-lo caminhando ou de bicicleta.

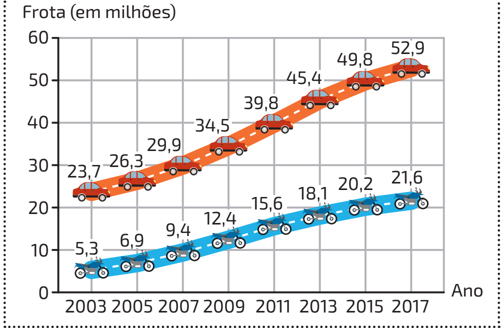
Opte pelo transporte coletivo sempre que puder.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

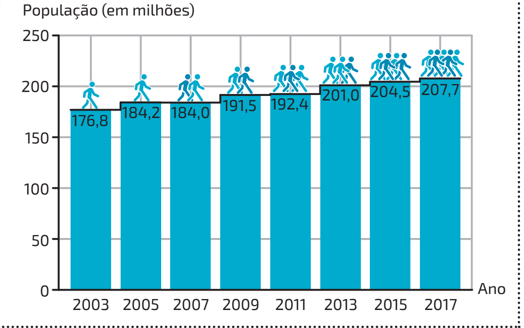
Combine com amigos para irem no mesmo automóvel. Assim, em vez de vários carros, haverá apenas um em circulação.

### Crescimento da frota de automóveis e de motocicletas no Brasil – 2003 a 2017



DENATRAN – Departamento Nacional de Trânsito. **Frota de veículos**. Disponível em: <www.denatran.gov.br/estatistica/237-frota-veiculos>. Acesso em: 23 nov. 2018.

### Crescimento da população brasileira – 2003 a 2017



Ilustrações: Ronaldo Lucena

IBGE. **Projeção da população**. Disponível em: <ww2.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2013/default_tab.shtm>. Acesso em: 23 nov. 2018.

## Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

Ⓐ No Brasil, a razão entre a quantidade de automóveis e a de habitantes aumentou ou diminuiu entre os anos 2003 e 2017? Justifique.

Ⓑ Em 2017, havia aproximadamente quantos habitantes, em média, para cada veículo da frota brasileira, entre automóveis e motocicletas?

Ⓒ Pesquise e cite outras dicas para evitar congestionamentos.

## Pensando nisso...

Ⓐ Aumentou; Espera-se que os alunos justifiquem que o crescimento percentual da frota de automóveis foi maior do que o da população brasileira no mesmo período.

Ⓑ Aproximadamente 1 veículo para cada 3 habitantes.

Ⓒ Possíveis respostas: implantação de semáforos sensíveis ao fluxo de veículos, para alternar a medida do tempo de permissão de passagem; faixas exclusivas para transportes coletivos de grande porte; câmeras de monitoramento de tráfego.

- No item **C**, questione os alunos se na cidade em que moram há algum equipamento ou medida adotada que contribui para a diminuição dos congestionamentos.

## Material digital

- No material digital, é apresentado um **Plano de desenvolvimento** para o 4º bimestre capaz de auxiliar nos planejamentos e desenvolvimentos das aulas, em que são descritos em um quadro os objetivos específicos, os objetos de conhecimento e as habilidades específicas **EF09MA11**, **EF09MA15**, **EF09MA17**, **EF09MA19**, **EF09MA20**, **EF09MA21**, **EF09MA22** e **EF09MA23**, previstas para os capítulos **10**, **11** e **12** sugeridos para esse período.
- Além disso, são elencadas as principais práticas didático-pedagógicas e atividades recorrentes previstas para o conteúdo abordado nesse bimestre.

## Objetivos do capítulo

- Ler e interpretar gráficos e tabelas.
- Escolher e construir o gráfico mais adequados para representar determinado conjuntos de dados.
- Calcular a média aritmética, a mediana e a moda de um conjunto de dados.
- Analisar a variabilidade de um conjunto de dados.
- Identificar pesquisa amostral e pesquisa censitária.
- Reconhecer amostragem aleatória, sistemática e estratificada.
- Calcular a probabilidade de eventos dependentes e independentes.

## Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **10**, **11** e **12** do 4º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

# Gráficos e tabelas

Os gráficos e tabelas são utilizados pelos mais variados meios de comunicação, apresentando as informações de maneira simplificada e organizada. Assim, é importante saber ler tabelas e gráficos e interpretar as informações.

As tabelas apresentam as informações organizadas em linhas e colunas. Vamos destacar a **tabela de dupla entrada**, utilizada para apresentar dois ou mais tipos de dados sobre um mesmo assunto. Veja o exemplo ao lado.

Em uma tabela de dupla entrada devemos analisar simultaneamente as linhas e as colunas.

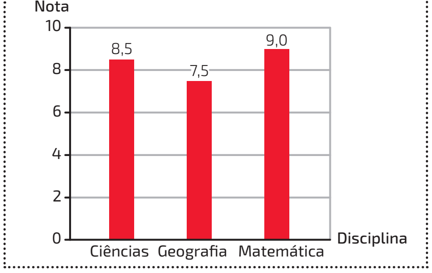
**População rural e urbana no Brasil, em milhões de habitantes – 1980 a 2010**

| Zona | Ano | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1980 | 1991 | 2000 | 2010 |
| Rural | 39,1 | 36 | 31,9 | 29,8 |
| Urbana | 82 | 110,9 | 138 | 160,9 |

IBGE. **Sinopse do Censo Demográfico 2010**. Disponível em: <https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=8>. Acesso em: 13 set. 2018.

Já os gráficos são recursos visuais utilizados para apresentar informações. Existem vários tipos de gráficos e a escolha do tipo mais adequado para cada situação depende da natureza dos dados. Vamos destacar os **gráficos de barras**, **de setores** e **de linhas**.

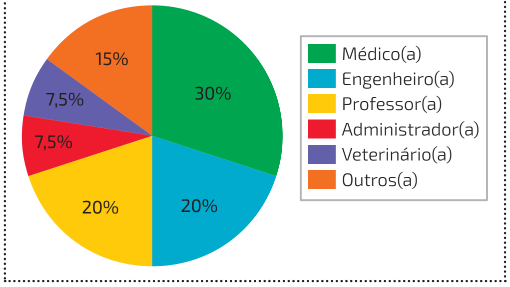
Notas de Augusto em algumas disciplinas – 2019



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

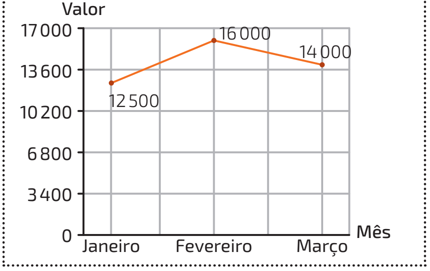
O **gráfico de barras** é mais adequado de ser utilizado quando se pretende comparar os dados obtidos entre si.

Profissão preferida pelos alunos do 9º ano A – 2019



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Valores arrecadados com as vendas no 1º trimestre – 2019



Ilustrações: Sergio L. Filho

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

O **gráfico de setores** é apropriado quando se deseja comparar os dados da pesquisa em relação ao universo pesquisado.

O **gráfico de linhas** é mais adequado de ser utilizado quando se pretende representar a evolução dos dados pesquisados no decorrer de certo período de tempo.

## BNCC em foco

- O tópico que se inicia nessa página abordará o estudo de gráficos e tabelas, além de capacitar os alunos a escolher o tipo de gráfico mais adequado entre o de colunas, o de setores e o de linhas, para apresentar um determinado conjunto de dados. O aluno também é levado a construir gráficos, com ou sem o uso de planilhas eletrônicas, destacando aspectos como as medidas de tendência central. Dessa maneira, contempla-se a habilidade **EF09MA22**.

# Média aritmética, moda e mediana

Vamos relembrar o que estudamos em anos anteriores a respeito das medidas de tendência central: **média aritmética** (ou simplesmente **média**), **moda** e **mediana**. Para isso, considere a pontuação obtida por duas equipes de basquete em 10 jogos.

- Equipe **A**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 48 | 49 | 52 | 52 | 52 | 53 | 56 | 57 | 58 | 58 |

- Equipe **B**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 44 | 47 | 47 | 52 | 54 | 55 | 57 | 59 | 59 |

Para facilitar a compreensão dos dados, podemos organizá-los em ordem crescente ou decrescente. Chamamos essa ordenação de **rol**.

Para calcular a média (Ma) de pontos de cada equipe, adicionamos a pontuação de cada jogo e dividimos o resultado pela quantidade de jogos considerados.

- Equipe **A**

$$\text{Ma} = \frac{48 + 49 + 52 + 52 + 52 + 53 + 56 + 57 + 58 + 58}{10} = 53{,}5$$

- Equipe **B**

$$\text{Ma} = \frac{41 + 44 + 47 + 47 + 52 + 54 + 55 + 57 + 59 + 59}{10} = 51{,}5$$

Portanto, a média de pontos da equipe **A** é 53,5 pontos e da equipe **B**, 51,5 pontos.

Para obter a moda (Mo) desses conjuntos de dados, basta verificarmos os valores que ocorrem com maior frequência. Assim, a moda da pontuação da equipe **A** é 52 pontos, pois esse é o valor que mais se repete. Já a pontuação da equipe **B** apresenta duas modas, 47 e 59 pontos.

Quando ocorrerem duas modas, o conjunto de valores é chamado **bimodal**; três modas, **trimodal**; e assim por diante. Quando o conjunto não possui moda, o chamamos de **amodal**.

Agora, vamos determinar a mediana (Md) das pontuações das equipes. Com os dados organizados em rol, a mediana é o valor que ocupa a posição central do conjunto, caso o conjunto tenha uma quantidade ímpar de elementos. Nos casos em que a quantidade de elementos for par, a mediana será obtida ao calcular a média aritmética dos dois valores centrais do rol. Assim, temos:

- Equipe **A**

$$\text{Md} = \frac{52 + 53}{2} = 52{,}5$$

- Equipe **B**

$$\text{Md} = \frac{52 + 54}{2} = 53$$

Portanto, a mediana da equipe **A** é 52,5 pontos e a mediana da equipe **B** é 53 pontos.

Já estudamos também que uma maneira de analisar a dispersão (variabilidade) dos valores de um conjunto de dados em torno de um valor central é por meio da **amplitude total** ($A_t$), que calculamos subtraindo o menor do maior valor do conjunto de dados.

- Ao trabalhar os conteúdos dessa e da próxima página, explique aos alunos que a média aritmética, a mediana e a moda são chamadas medidas de tendência central e representam um conjunto de dados de maneira resumida. Verifique se eles percebem que nem sempre essas medidas apresentam o mesmo valor. Alerte-os para o fato de que para resumir um conjunto de dados a um único valor, devemos escolher a medida de tendência central mais adequada em cada caso.

- No gráfico de linhas apresentado na questão **1**, comente com os alunos que a linha vermelha indicada por "preço médio" refere-se à média aritmética simples dos valores observados entre julho e dezembro.

Calculando a amplitude total dos pontos das equipes **A** e **B**, temos:

- Equipe **A**: 58 − 48 = 10
- Equipe **B**: 59 − 41 = 18

Assim, como a amplitude total dos pontos da equipe **A** é menor do que da equipe **B**, os pontos obtidos pela equipe **A** apresentam menor dispersão, ou seja, estão mais próximos entre si e das medidas de tendência central do que os pontos obtidos pela equipe **B**.

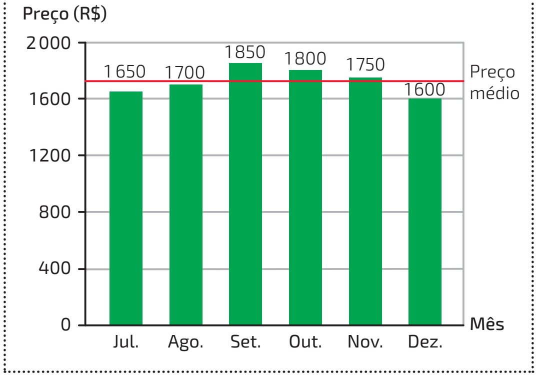
> Quanto maior a amplitude total, mais afastados os valores do conjunto estarão uns dos outros e também das medidas de tendência central. Quanto menor a amplitude, mais próximos os valores do conjunto estarão uns dos outros e, consequentemente, mais próximos das medidas de tendência central.

## Atividades

Anote no caderno

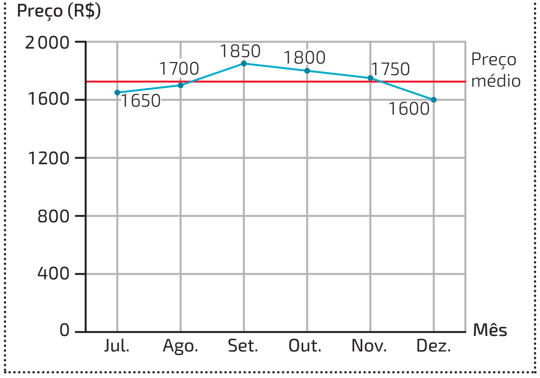
**1.** Caio acompanhou a variação mensal do preço de certo *notebook* que pretende comprar. Em seguida, organizou os dados que obteve em diferentes gráficos.

**Preço, em reais, do *notebook* de julho a dezembro – 2019**



Anotações de Caio.

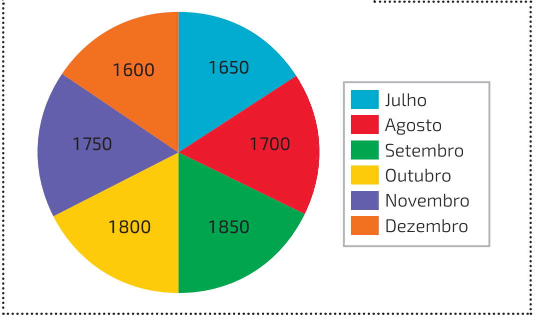
**Preço, em reais, do *notebook* de julho a dezembro – 2019**



Anotações de Caio.

> Nos gráficos de colunas e de linhas, além do preço mensal, também está indicado o preço médio do *notebook* nesse período.

**Preço, em reais, do *notebook* de julho a dezembro – 2019**



Ilustrações: Sergio L. Filho

Anotações de Caio.

**a)** Dos gráficos construídos por Caio, qual não é adequando para representar esses dados? O gráfico de setores.

**b)** Qual desses gráficos é o mais adequado para representar esses dados? Por quê?

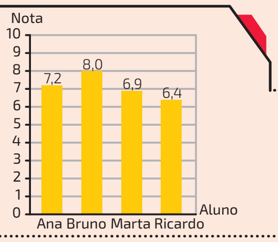
**c)** Qual é o preço médio do *notebook* nesse período? Em quais meses o valor do *notebook* ficou abaixo do preço médio?
R$ 1 725,00; julho, agosto e dezembro

1. b) Espera-se que os alunos respondam que é o gráfico de linhas, pois é o que melhor representa a variação dos dados no decorrer do tempo.

## Respostas

**2. c)**

**Notas do 1º bimestre de alguns alunos em Geografia – 2019**

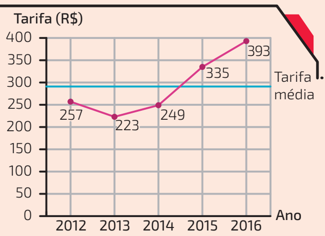


Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Ilustrações: Sergio L. Filho

**3. b)**

**Tarifa média cobrada das indústrias por mega watt-hora (MWh) de energia elétrica (em reais) 2012 a 2016**



EPE (Empresa de Pesquisa Energética). **Anuário Estatístico de Energia Elétrica 2017**. Disponível em: <www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-160/topico-168/Anuario2017vf.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2018.

**2.** Observe as notas de alguns alunos de certo colégio.

**Notas de alguns alunos em Geografia – 2019**

| Aluno | Nota | | |
|---|---|---|---|
| | 1º bimestre | 2º bimestre | 3º bimestre |
| Ana | 7,2 | 8,7 | 9,0 |
| Bruno | 8,0 | 7,6 | 8,5 |
| Marta | 6,9 | 7,5 | 7,6 |
| Ricardo | 6,4 | 6,5 | 6,0 |

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

**a)** Sabendo que para ser aprovado a média entre as notas dos quatro bimestres deve ser maior ou igual a 6,5, qual dever ser a nota mínima de cada aluno no 4º bimestre para que ele seja aprovado na disciplina?
Ana: 1,1; Bruno: 1,9; Marta: 4,0; Ricardo: 7,1

**b)** Considerando as notas dos três primeiros bimestres, qual dos alunos apresenta notas com menor dispersão? Ricardo

**c)** Qual tipo de gráfico você considera mais adequado para representar as notas desses alunos no 1º bimestre? Construa um gráfico para representar as notas do 1º bimestre. Espera-se que os alunos respondam gráfico de barras. Resposta nas orientações ao professor.

**3.** Observe a tabela ao lado e resolva os itens.

**Tarifa média cobrada das indústrias por megawatt-hora (MWh) de energia elétrica (em reais) – 2012 a 2016**

| Ano | Tarifa (R$) |
|---|---|
| 2012 | 257 |
| 2013 | 223 |
| 2014 | 249 |
| 2015 | 335 |
| 2016 | 393 |

EPE – Empresa de Pesquisa Energética. **Anuário Estatístico de Energia Elétrica 2017**. Disponível em: <www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-160/topico-168/Anuario2017vf.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2018.

**a)** Calcule a média, a moda e a mediana do preço, em reais, cobrado das indústrias pelo MWh de 2012 a 2016. média: R$ 291,40; moda: amodal; mediana: R$ 257,00

**b)** Em sua opinião, qual é o tipo de gráfico mais adequado para representar o dados da tabela? Construa-o em seu caderno e, em seguida, destaque a tarifa média nesse período. Espera-se que os alunos respondam gráfico de linhas. Resposta nas orientações ao professor.

**4.** Para cada situação, identifique o tipo de gráfico mais adequado para representá-la. Em seguida, construa o gráfico em seu caderno. Respostas nas orientações ao professor.

**a)** A mãe de Heitor pretende construir um gráfico para indicar o quanto seu filho cresceu dos 5 aos 10 anos. Ela tem as seguintes anotações.

| Idade (ano) | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Medida da altura (cm) | 124 | 131 | 136 | 143 | 151 | 156 |

Espera-se que os alunos respondam que o tipo de gráfico mais indicado para esta situação é o de linhas.

**b)** A professora do 9º ano **B** vai apresentar em um gráfico a fruta favorita de cada aluno da turma. Veja as suas anotações.

| Fruta favorita | Banana | Melancia | Goiaba | Laranja | Morango | Maçã |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Quantidade de alunos | 8 | 2 | 7 | 3 | 12 | 8 |

Espera-se que os alunos respondam que o tipo gráfico mais indicado para esta situação é o de barras ou colunas.

**c)** Uma loja realizou uma pesquisa de satisfação para melhor atender os seus clientes. Veja os dados obtidos na pesquisa.

| Nível de satisfação | Ruim | Regular | Bom |
|---|---|---|---|
| Porcentagem dos clientes | 17% | 26% | 57% |

Espera-se que os alunos respondam que o tipo de gráfico mais indicado para esta situação é o de setores.

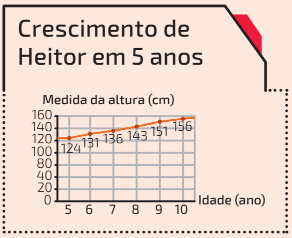
- Complemente a atividade **2** com as seguintes questões:
  - Marta será aprovada nessa disciplina se sua nota no 4º bimestre for 6,0? E se for 4,0?

    R sim; sim
  - Se a nota de Ricardo no 3º bimestre fosse 7,2, ele seria aprovado se obtivesse 5,7 no 4º bimestre? Em caso negativo, qual deveria ser a nota mínima do 4º bimestre para ele ser aprovado?

    R não; 5,9
  - Também é possível complementar a questão **3** realizando a seguinte questão:
  - Podemos afirmar que o preço da energia elétrica cobrado das indústrias, no período apresentado, foi sempre crescente? Por quê?

    R Não, pois houve redução em 2013, se comparado ao preço no ano anterior.

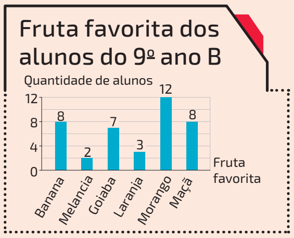
**4. a)**



Anotações da Mãe de Heitor.

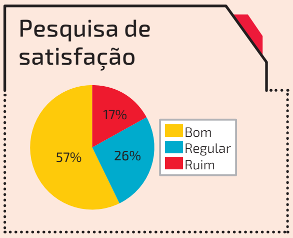
Ilustrações: Sergio L. Filho

**b)**



Professora do 9º ano B.

**c)**



Loja.

# Leitura e interpretação de gráficos e tabelas

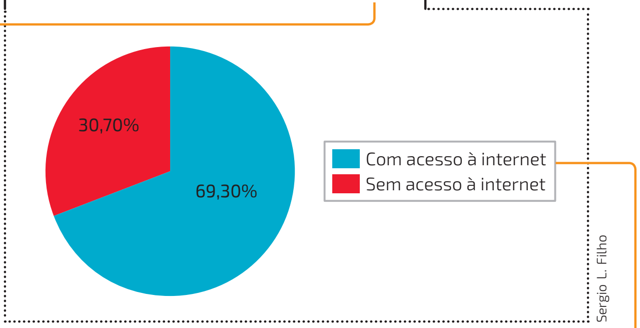
Neste tópico, estudaremos alguns elementos que afetam a leitura e interpretação de gráficos e tabelas, como o **título**, a **fonte** de pesquisa, a **data** ou a época de referência e a **legenda**, quando necessária, para a compreensão das informações. Todos esses elementos são muito importantes na leitura e interpretação de gráficos e tabelas.

Veja cada um desses elementos destacados no gráfico a seguir.

Quando um gráfico ou tabela não possui **título**, temos dificuldade em saber qual o assunto tratado.

No título de alguns gráficos é fundamental apresentar: ano; mês e ano ou dia; mês e ano. Nesses casos, sem essa informação não é possível saber a qual época os dados se referem.

Porcentagem de domicílios com acesso à internet no Brasil – 2016



IBGE. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua – PNAD Contínua**. Disponível em: <www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/sociais/trabalho/17270-pnad-continua.html?edicao=19937&t=resultados>. Acesso em: 23 nov. 2018.

Se estiver faltando a **fonte**, não é possível avaliar se os dados foram obtidos de uma fonte segura.

Quando a fonte é obtida em um *site* e a **data** de acesso não é apresentada, não é possível saber se os dados são atuais.

Nesse gráfico, sem a **legenda**, a leitura e interpretação das informações seriam prejudicadas.

Nos meios de comunicação, como televisão, jornais, internet, revistas, entre outros, frequentemente são apresentados gráficos e tabelas com certas manipulações ou a falta de alguns elementos, muitas vezes com o objetivo de que a interpretação das informações seja tendenciosa em relação às intenções de quem os fornece. Por isso, devemos ficar atentos ao fazer leituras de gráficos ou tabelas.

**BNCC em foco**

- O tópico que se inicia nessa página dará aos alunos condições de analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, a erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes, como fontes e datas, entre outras, conforme orienta a habilidade **EF09MA21**.

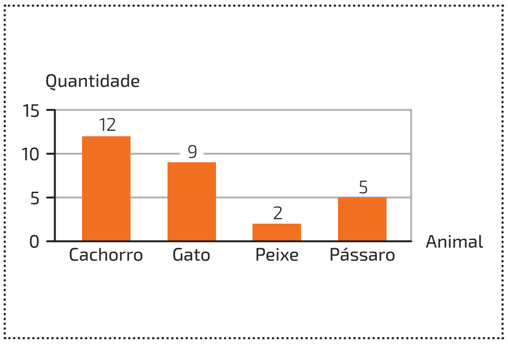
- Verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para que pesquisem gráficos divulgados pela mídia. Oriente-os a verificar se os elementos estão apresentados de maneira clara, de modo que não possibilitem a leitura errada aos alunos. Caso não estejam, peça que indiquem quais correções devem ser feitas para uma leitura clara e objetiva.

## Atividades

Anote no caderno

**5.** Nos gráficos a seguir estão faltando importantes elementos para a correta interpretação das informações apresentadas. Identifique e escreva quais elementos devem ser acrescentados em cada um dos gráficos.

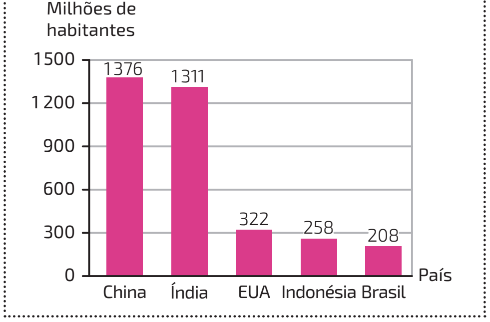
**a)**



Alunos do 9º ano.

Título do gráfico. Espera-se que os alunos percebam a necessidade de incluir o ano no título desse gráfico.

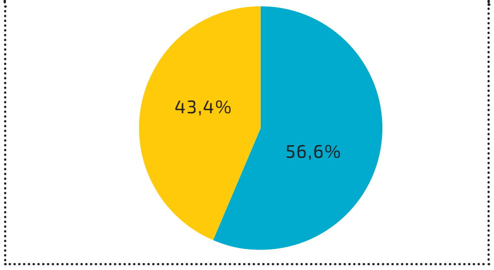
**b)** População aproximada dos cinco países mais populosos do mundo



IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 7. ed. Rio de Janeiro, 2016. p. 69.

Data à qual os dados se referem. Espera-se que os alunos percebam a necessidade de incluir a data no título do gráfico.

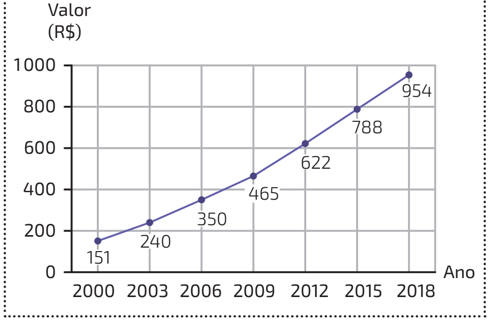
**c)** Distribuição da massa de rendimento mensal real domiciliar *per capita* – 2016



IBGE. **Agência IBGE notícias**. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/18377-desigualdade-de-renda-atinge-regioes-generos-cores-e-escolaridades>. Acesso em: 23 nov. 2018.

Legenda do gráfico.

**d)** Salário-mínimo no Brasil – 2000 a 2018



Ilustrações: Sergio L. Filho

Fonte das informações. Espera-se que os alunos percebam a necessidade de incluir na fonte de pesquisa a data de acesso.

**6.** Juliana está observando uma tabela em um anúncio da loja Mais celulares.

| | Quantidade de vendas *on-line* de outubro a dezembro de 2019 | | |
|---|---|---|---|
| | Outubro | Novembro | Dezembro |
| Mais celulares* | 2 560 | 5 610 | 11 840 |
| Principal concorrente | 4 320 | 3 890 | 7 908 |

*Valores acumulados

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Aparentemente, qual das lojas apresentou maior crescimento na quantidade de vendas *on-line*? Quais recursos foram utilizados para que tenhamos essa impressão? Mais celulares; Espera-se que os alunos respondam que a linha da tabela correspondente à loja Mais celulares está com destaque em relação a outra, e os valores apresentados são os acumulados, enquanto que na principal concorrente os valores são mensais.

**Avaliação**

- Avalie os alunos enquanto respondem às questões propostas a partir dessa página. Possibilite que elas sejam resolvidas em duplas, para que possam compartilhar suas estratégias e desenvolver a interação com os colegas. Veja a possibilidade de caminhar pela sala de aula e fazer questionamentos, a fim de identificar possíveis dificuldades com os conteúdos estudados até o momento. Com base nisso, elabore estratégias que possibilitem contribuir, nas próximas aulas, com os alunos que apresentarem alguma dificuldade.

- Veja uma questão que pode complementar o estudo da atividade **6**:
  - Quantas vendas *on-line* a loja Mais celulares realizou em cada um dos meses apresentados na tabela?

    R Outubro: 2 560; Novembro: 5 610; Dezembro: 11 840.

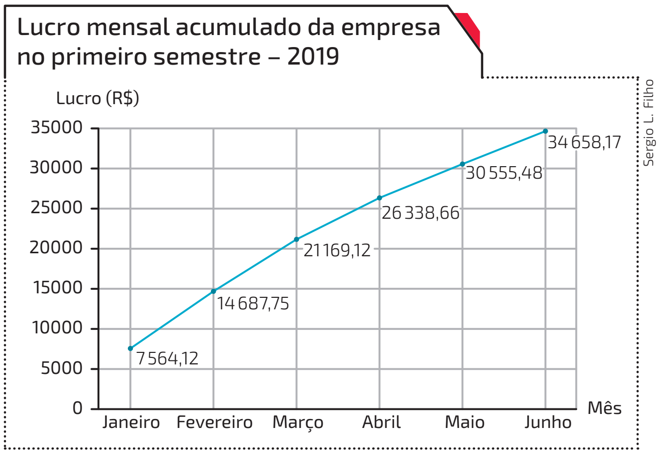
**Relacionando saberes**

- O gráfico da atividade de **8** pode contribuir para estabelecer uma relação com o componente curricular **Geografia**. Se necessário, conte com o auxílio do professor responsável pelo componente e aproveite as informações contidas na atividade para falar, por exemplo, sobre a relação entre a dimensão das regiões e seus contingentes populacionais. Diga-lhes que, no caso brasileiro, regiões com grande extensão territorial apresentam baixa densidade demográfica, como é o caso da região Norte. Peça aos alunos que apontem os principais motivos dessa diferença e saliente que, historicamente, regiões com mais investimentos atraem mais moradores. Caso seja pertinente para a conversa, solicite que o professor indique alguns fatores que determinaram a divisão política atual das regiões brasileiras.

- Complemente a atividade **8** propondo a seguinte questão aos alunos:
  - A medida aproximada da área total do território nacional é 8 515 767,09 km². Qual é a medida da área da Região Norte? E da Região Sul?

    R Aproximadamente 3 854 236,19 km². Aproximadamente 575 665,86 km².

**7.** Observe o gráfico de linhas a seguir, que mostra o lucro mensal acumulado de uma microempresa no primeiro semestre de 2019.


**Lucro mensal acumulado da empresa no primeiro semestre – 2019**

Sergio L. Filho

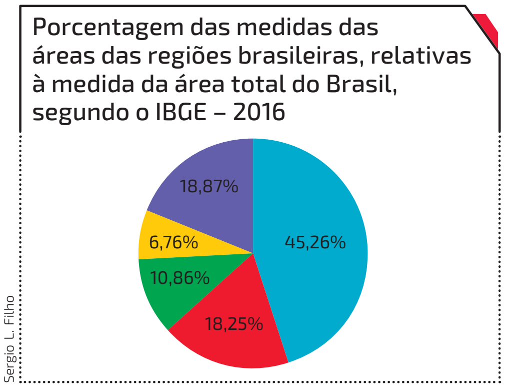
Elaborado pelo autor com dados fictícios.

7. a) Espera-se que os alunos respondam que a palavra "acumulado" significa que o lucro do mês em questão está sendo adicionado aos lucros dos meses anteriores e que, caso seja retirada a palavra, a interpretação das informações seria prejudicada, pois, ao ler o gráfico, entenderíamos que o valor apresentado em cada mês é referente a apenas esse mês.

**a)** O que você acha que significa a palavra "acumulado" no título do gráfico? Se essa palavra fosse removida do título, seria alterada de alguma forma a interpretação do gráfico? Justifique suas respostas.

**b)** Em qual mês do primeiro semestre de 2019 essa empresa obteve o maior lucro? Quanto foi esse lucro? janeiro; R$ 7 564,12

**8.** O gráfico a seguir apresenta a porcentagem da medida da área das regiões Norte, Nordeste, Sul, Sudeste e Centro-Oeste em relação à medida da área total do território nacional.


**Porcentagem das medidas das áreas das regiões brasileiras, relativas à medida da área total do Brasil, segundo o IBGE – 2016**

Sergio L. Filho

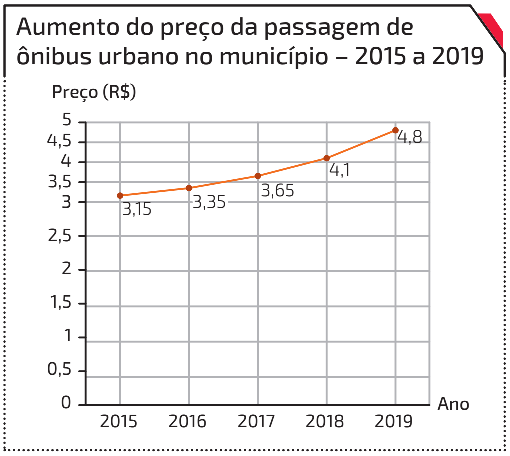
IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 7. ed. Rio de Janeiro, 2016. p. 94.

**a)** Sabendo que a Região Norte é a que tem maior medida de área e a Região Sul, a menor, a qual porcentagem do território nacional corresponde a Região Norte? E a Região Sul? 45,26%; 6,76%

**b)** De acordo com o gráfico, é possível determinar a qual porcentagem correspondem as demais regiões? Justifique sua resposta.
Espera-se que os alunos respondam que não, pois no gráfico falta a legenda informando a qual setor corresponde cada região.

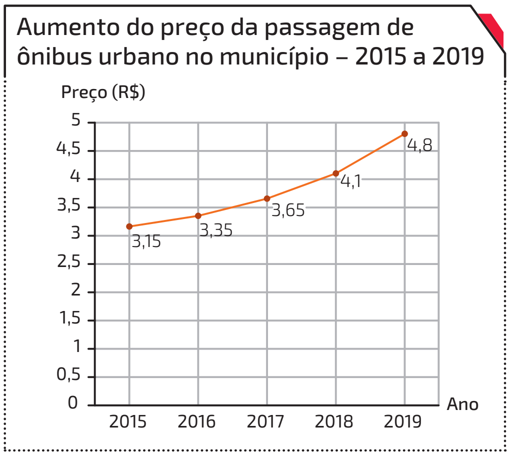
**9.** Um dos gráficos de linhas a seguir apresenta uma manipulação que interfere na interpretação das informações. Observe.

**I**



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

**II**



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Ilustrações: Sergio L. Filho

**a)** Os gráficos acima apresentam as mesmas informações? Justifique. Sim, pois apresentam os mesmos valores, títulos e fonte das informações.

**b)** Em qual dos gráficos, aparentemente, o aumento de preço nas passagens foi menor? Por quê? Espera-se que os alunos respondam gráfico **I**, pois a linha é menos inclinada em relação à linha do gráfico **II**.

**c)** Qual dos gráficos sofreu algum tipo de manipulação em sua construção? Qual foi essa manipulação? Gráfico **I**, a escala utilizada no eixo vertical.

**d)** Em sua opinião, se o gráfico **I** fosse apresentado em uma propaganda da empresa responsável pelo transporte urbano no município, qual seria o objetivo dessa empresa ao apresentar esse gráfico manipulado? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que o objetivo seria fazer com que não percebam o real aumento do preço da passagem.

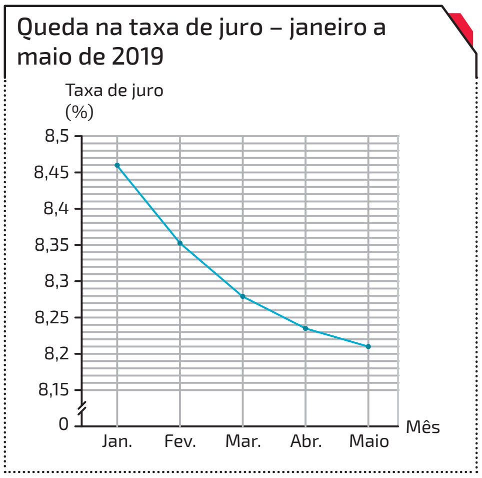
**10.** Determinada instituição financeira que oferta crédito pessoal apresentou, em seu comercial de TV, um gráfico para mostrar a queda da taxa de juro aplicada no decorrer dos últimos 5 meses. Veja a seguir o gráfico apresentado e responda.

**a)** Qual é a taxa de juro aplicada nos meses de janeiro e maio por essa empresa? De quanto foi a queda da taxa entre esses meses? janeiro: 8,46%; maio: 8,21%; 0,25%

**b)** Observando o gráfico, podemos dizer que, aparentemente, houve uma grande redução na taxa de juro? Justifique sua resposta.

10. b) Espera-se que os alunos respondam que sim, pois o gráfico apresenta um acentuado decrescimento de janeiro a maio.

**c)** É possível notar alguma intenção, por parte da empresa, ao elaborar esse gráfico para o comercial de TV? Qual foi essa intenção? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que sim, pois a escala utilizada no eixo "Taxa de juro" é inapropriada, induzindo, o cliente a pensar que houve uma grande queda na taxa de juros, e isso pode atrair novos clientes. Porém essa queda na taxa foi de apenas 0,25%.



Setor financeiro da empresa.

Sergio L. Filho

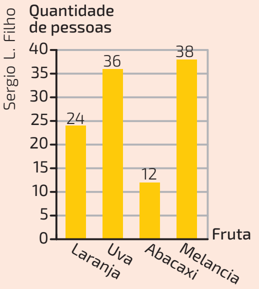
- Durante o trabalho com essa página, promova um momento de diálogo para contribuir com o desenvolvimento da comunicação em sala de aula, tanto entre os alunos quanto entre estes e o professor. Pergunte aos alunos se já viram em jornais, programas de TV, *sites*, aplicativos de celular ou em outros meios de comunicação gráficos tendenciosos que podem levar a uma interpretação errada das informações, se não tivermos um olhar cuidadoso. Peça também para citarem outros exemplos de situações em que é possível fazer manipulações de gráficos e ocasionar erros de leitura.

- Proponha aos alunos a **Atividade complementar** apresentada a seguir, que contribui para que eles desenvolvam a habilidade de planejar pesquisas estatísticas, nas quais os tipos de questionamentos, o tipo de amostragem e a representação dos dados são partes fundamentais. Possibilite que os alunos realizem a atividade em dupla e compartilhem suas ideias e experiências.

## Atividade complementar

- Observe o gráfico a seguir que apresenta as respostas de uma das questões de uma coleta de dados.

Sergio L. Filho



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

**a)** Qual elemento está faltando no gráfico para uma correta interpretação das informações?

R Título do gráfico.

**b)** Qual questão pode ter originado esse gráfico?

R Qual é o seu suco preferido?

**c)** Escreva outra questão que também poderia originar os dados apresentados no gráfico.

R Possíveis respostas: De qual fruta você menos gosta?; Qual fruta você mais gostaria de comer na merenda escolar?; Qual fruta você mais come?

**d)** Para cada questão apresentada nos itens **a** e **b**, quem seriam os investigados? Como pode ter ocorrido a abordagem e que tipo de amostragem pode ter sido utilizada?

R Possíveis respostas: alunos da escola, de determinadas séries, pacientes de um hospital etc.; a abordagem pode ter sido feita por escrito ou em pesquisa oral; amostragem aleatória.

freedomnaruk/Shutterstock.com

Cafeeiro com frutos.

# Pesquisa amostral

O agrônomo responsável pelas plantações de café de um sítio fará uma análise da qualidade dos grãos.

A área plantada é de 25 hectares e cada hectare possui cerca de 10 000 plantas, o que torna inviável uma análise de todos os pés de café. Assim, em vez de realizar uma pesquisa **censitária**, ele fará a pesquisa por amostragem, ou seja, selecionará uma parte dos pés de café para analisar. Esse tipo de pesquisa é conhecida por **pesquisa amostral**.

**População** são todos os elementos do grupo que se deseja analisar.

**Amostra** é a parte da população que representará o todo na análise a ser realizada.

**Pesquisa amostral** é aquela feita com uma parte da população que representará o total, ou seja, uma amostra.

Em uma pesquisa censitária, todos os elementos da população são analisados.

O agrônomo pediu para os funcionários desse sítio passarem por entre a plantação e colherem os grãos de cinco mil plantas aleatoriamente para análise.

Chamamos esse método de obtenção da amostra de **amostragem aleatória**, pois foram selecionadas plantas sem usar nenhum tipo de regra. Nesse tipo de amostragem, todos os elementos da população têm a mesma chance de serem escolhidos para fazer parte da amostra.

Além da amostragem aleatória, temos a **amostragem sistemática** e a **amostragem estratificada**.

A amostragem sistemática costuma ser usada quando os elementos da população estão organizados seguindo uma ordem. Nesse tipo de amostragem, os elementos da amostra são escolhidos conforme um critério ou fator de repetição. Na situação apresentada, a plantação possui 500 fileiras com 500 pés de café cada fileira; se forem colhidas as plantas de uma fileira inteira, a cada 50 fileiras, teremos uma amostragem sistemática.

Danaan/Shutterstock.com

Plantação de café.

Já a amostragem estratificada é aquela em que a população é dividida em subgrupos (extratos), atendendo a critérios estabelecidos pelo estudo, em que são selecionados elementos de cada um desses extratos, por amostragem aleatória ou sistemática, para formarem a amostra.

Na situação apresentada, a plantação está em 5 níveis de solo diferentes; cada um dos níveis possui cerca de 5 hectares, ou seja, aproximadamente 50 000 pés de café. Assim, se cada nível for considerado como um extrato da população, e de cada extrato 1 000 plantas forem colhidas, teremos uma amostragem estratificada.

## Atividades

Anote no caderno

**11.** Classifique cada pesquisa a seguir em censitária ou amostral.

- **a)** Para determinar o esporte preferido no Brasil em 2018, foram entrevistados 5 000 000 brasileiros. Pesquisa amostral.
- **b)** Todos os alunos do 9º ano B foram entrevistados e concluiu-se que a turma prefere escrever com lápis. Pesquisa censitária.
- **c)** Foi realizada uma pesquisa com todos os funcionários para determinar quantos vão para o trabalho de bicicleta. Pesquisa censitária.

**12.** Para cada situação de pesquisa amostral a seguir, determine se a obtenção da amostra é aleatória, sistemática ou estratificada.

- **a)** Para verificar tendências climáticas, um grupo de meteorologistas realiza medições da temperatura ambiente em uma cidade a cada sete dias. sistemática
- **b)** Para saber o destino mais desejado das pessoas que viajam no fim de ano, uma equipe de especialistas da área de turismo e hotelaria disponibilizou um questionário para os visitantes de seu *site*. aleatória
- **c)** Foram entrevistadas algumas pessoas de cada um dos bairros de certo município para determinar a porcentagem da população que pratica atividades físicas. estratificada

**13.** Junte-se a dois colegas para realizar uma pesquisa amostral na escola sobre um tema atual relacionado à realidade social. Para isso, sigam estas etapas: planejamento, coleta de dados, organização, análise e interpretação. Depois, escrevam um relatório com o objetivo de divulgar os resultados obtidos por meio de tabelas e gráficos, destacando as medidas de tendência central e a amplitude total do conjunto de dados. Resposta pessoal.


Danillo Souza

Na seção **Explorando tecnologias**, na página **282**, veja como utilizar uma planilha eletrônica para organizar os dados de uma pesquisa, calcular algumas medidas de tendência central e construir um gráfico de linhas.

**BNCC em foco**

- A atividade **13** propõe que os alunos planejem e executem uma pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social para, então, comunicarem os resultados por meio de um relatório que contenha os valores de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas. Dessa maneira, cumpre-se o que orienta a habilidade **EF09MA23**.
- Atividades como a de número **13** oportunizam situações em que é possível colocar em prática o que descreve a **Competência geral 7**, tendo em vista que auxilia no desenvolvimento da argumentação, estimulando essa capacidade com base em dados, informações e fatos confiáveis a respeito de questões sociais relevantes para a comunidade.
- Da mesma maneira, a atividade **13** vai ao encontro do que orienta a **Competência específica de Matemática 8**, pois proporciona aos alunos a interação com seus pares. Ao trabalharem coletivamente no planejamento e desenvolvimento de uma pesquisa que visa a responder a questionamentos para a busca de soluções de problemas, são instigados a identificarem aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, o que promove o aprendizado mútuo e o respeito pelo modo de pensar do colega.

- Na atividade **13**, caso julgue necessário, lembre os alunos dos detalhes de cada uma das etapas sugeridas para a realização de uma pesquisa estatística, conteúdo que pode ser consultado na página **185** do volume do 8º ano dessa coleção. Sugira que os alunos abordem temas contemporâneos e de relevância social para elaborarem a pesquisa.

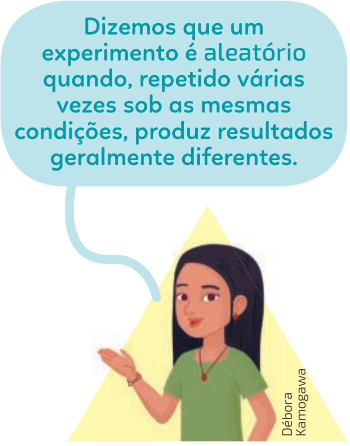
- Na seção **Explorando tecnologias**, na página **282**, veja como utilizar uma planilha eletrônica para organizar, calcular a média, a moda e a mediana e construir um gráfico de linhas de um conjunto de dados. Veja a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para realizarem a atividade.

**BNCC em foco**

- O tópico que se inicia nessa página possibilitará aos alunos reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, em ambos os casos. Dessa maneira, a habilidade **EF09MA20** é contemplada.

# Probabilidade

Em anos anteriores, estudamos alguns conceitos envolvendo probabilidade, por exemplo, o **espaço amostral** (**S**) de um experimento.



Débora Kamogawa

**Amanda**

O espaço amostral é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento.

Vamos considerar o seguinte **experimento aleatório**: de uma urna com 3 fichas numeradas de 1 a 3, retiramos 2 fichas ao acaso com reposição, ou seja, ao retirar a ficha, ela volta novamente para a urna.

O espaço amostral desse experimento é:

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1),(2,2),(2,3), (3,1),(3,2),(3,3)\}$$

Nesse experimento, podemos imaginar diversas situações, chamadas **eventos**, por exemplo: o evento **A** "obter na 1ª retirada um número ímpar"; e o evento **B** "obter na 2ª retirada um número par". Nesses casos, temos:

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1),(3,2),(3,3)\} \qquad B = \{(1,2), (2,2),(3,2)\}$$

Vamos calcular a probabilidade dos eventos **A** e **B**. Para isso, inicialmente, lembre-se de que, se todos os elementos do espaço amostral **S** têm a mesma chance de ocorrer, a probabilidade de um evento **A** é:

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$, em que n(A) e n(S) indicam a quantidade de elementos de **A** e **S**, respectivamente.

Assim:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \qquad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Ingridhi Borges

Qual é a probabilidade de **B** ocorrer, dado que **A** já ocorreu? Para responder a essa pergunta, note que, ao realizarmos a 2ª retirada, há na caixa uma ficha com um número par de um total de 3 fichas. Assim:

$$P(B|A) = \frac{1}{3}$$

A probabilidade de **X** ocorrer, dado que já ocorreu **Y**, é indicada por P(X|Y).

Nesse caso, dizemos que os eventos **A** e **B** são **independentes**, pois a probabilidade de ocorrer **B**, sabendo que **A** já ocorreu, é a própria probabilidade de ocorrer **B**, ou seja,

$$P(B|A) = P(B).$$

Agora, vamos calcular a probabilidade de sortear duas fichas com reposição, de maneira que a 1ª contenha um número ímpar e a 2ª, um número par. Para isso, calculamos: $P(A) \cdot \underbrace{P(B|A)}_{P(B)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

Considere agora o seguinte experimento aleatório, parecido com o anterior, porém sem reposição de fichas: de uma urna com 3 fichas numeradas de 1 a 3, retirarmos 2 fichas ao acaso sem reposição.

Seja o evento **D** "obter o número 1 na 1ª retirada" e o evento **E** "obter um número ímpar na 2ª retirada".

- Ao realizarmos a 1ª retirada, temos uma ficha com o número 1 de um total de 3 fichas. Assim, a probabilidade de **D** é:

$$P(D) = \frac{1}{3}$$

- Já, ao realizarmos a 2ª retirada, sabendo que obtemos a ficha com o número 1 na 1ª retirada, temos 1 ficha com número ímpar de um total de 2 fichas. Assim, a probabilidade de **E**, dado que **D** ocorreu, é:

$$P(E|D) = \frac{1}{2}$$

Na situação acima, note que a ocorrência do evento **D** altera a quantidade de fichas com números ímpares e também a quantidade total de fichas na urna, afetando a probabilidade do evento **E**. Nesse caso, dizemos que os eventos são **dependentes**.

Se desejarmos calcular a probabilidade de sortear duas fichas sem reposição, de maneira que a 1ª contenha o número 1 e a 2ª um número ímpar, efetuamos:

$$P(D) \cdot P(E|D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

## Atividades

Anote no caderno

**14.** Classifique os eventos **A** e **B** em dependentes ou independentes, dado o experimento:

**a)** retirar ao acaso duas canetas de dentro de um estojo com 5 canetas nas cores vermelha, azul, preta, verde e rosa, sem reposição. dependente

Evento **A**: "sortear uma caneta na cor vermelha na 1ª retirada"

Evento **B**: "sortear uma caneta na cor azul na 2ª retirada"

**b)** lançar uma moeda duas vezes. independente

Evento **A**: "obter coroa no 1º lançamento"

Evento **B**: "obter coroa no 2º lançamento"

**c)** retirar duas fichas de uma urna que contém 10 fichas iguais identificadas pelas letras **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I**, **J**, **K** e **L**, sem reposição. dependente

Evento **A**: "sortear uma ficha com uma vogal na 1ª retirada"

Evento **B**: "sortear uma ficha com a letra **I** na 2ª retirada"

- Ao iniciar o trabalho com o tópico **Probabilidade**, verifique a possibilidade de realizar o experimento apresentado nessa página e na anterior. Leia o texto a seguir sobre a realização de atividades desse tipo.

> Entende-se que o ensino de matemática focado na probabilidade precisa ultrapassar o contexto escolar, haja vista a sua importância social. Para tanto, é essencial que as praticas pedagógicas extrapolem a simples sistematização de definição e reprodução da aplicação de estruturas algorítmicas operatória.
>
> [...]
>
> Compreende-se que associar conceitos matemáticos abordando a probabilidade a contextos de aplicabilidade é fundamental. Contudo, não é suficiente quando se almeja para oportunizar uma formação integral escolar de qualidade. Na qual o aluno tenha subsídios para associar e aplicar os saberes e conhecimentos educativos, em sua vida cotidiana.
>
> Desta forma, acredita-se que a ação do professor é elemento primordial ao processo de ensino e aprendizagem, ao promover encaminhamentos pedagógicos que favorecem e instigam organização, apropriação e correlação dos conhecimentos probabilísticos pelos alunos, bem como provocar conflitos cognitivos que impulsiona, e propiciem o crescimento intelectual, podendo apoiar-se em jogos de regras para tal.

FERNANDES, Rúbia Juliana Gomes; SANTOS JUNIOR, Gataçara dos. Uma proposta pedagógica para ensinar probabilidade no Ensino Fundamental. **Revista Práxis**, Rio de Janeiro, Editora FOA, ano VII, v. 7, n. 14, 2015. p. 89.

### Material digital

No material digital dessa coleção, para complementar o trabalho com o tópico **Probabilidade**, foi disponibilizada a **Sequência didática 10**, elaborada com o objetivo de desenvolver a habilidade **EF09MA20**. Nessa sequência, as atividades buscam explorar o reconhecimento de situações possíveis de acontecer e de situações impossíveis de acontecer, além da resolução de problemas envolvendo probabilidade de eventos aleatórios.

- Verifique a possibilidade de realizar na prática o experimento apresentado na atividade **16**. Para isso, providencie cópias das peças de dominó disponíveis nas **Páginas para reprodução** e uma caixa ou objeto que possibilite retirar as peças de dentro sem vê-las.
- Nas **Páginas para reprodução**, disponibilizamos moldes de dois dados para realizar o experimento feito na atividade **17**. Solicite que os alunos formem duplas e realizem esse experimento. Se necessário, peça que construam um quadro com o espaço amostral do lançamento dos dados, conforme apresentado no rodapé da página.
- Veja um possível problema proposto pelos alunos na atividade **18**:
  - Qual a probabilidade de retirar desse baralho uma carta vermelha com o número 4?

    R $\frac{1}{28}$
- Veja abaixo o quadro com o espaço amostral do experimento da atividade **17**:

**15.** Considere o seguinte experimento aleatório: lançar três vezes uma moeda.

**a)** Qual é o espaço amostral desses experimento?

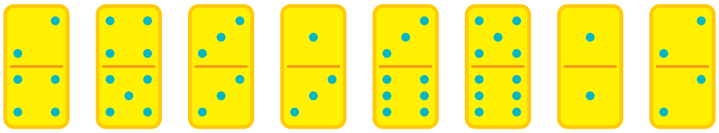
**b)** Qual é a probabilidade de obter:

- cara no 1º lançamento? $\frac{1}{2}$
- coroa no 3º lançamento? $\frac{1}{2}$
- cara nos três lançamentos? $\frac{1}{8}$

Indique por C "cara" e por K "coroa".

15. a) S = {(C C C), (C C K), (C K C), (C K K), (K C C),(K C K), (K K C), (K K K)}

**16.** Jurandir guardou as 8 peças de dominó apresentadas a seguir em uma caixa.

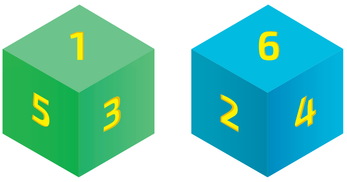


Sergio L. Filho

Sabendo que ele vai retirar de dentro dessa caixa duas dessas peças ao acaso sem reposição, determine a probabilidade de que ele obtenha uma peça cuja:

- soma dos pontos seja igual a 6, na 1ª retirada. $\frac{1}{4}$
- soma dos pontos seja igual a 9 na 2ª retirada, dado que a soma dos pontos da peça obtida na 1ª retirada é igual a 4. $\frac{2}{7}$

**17.** Em certo jogo, Renan e Everton devem lançar simultaneamente dois dados de seis faces: um verde e um azul. Após o lançamento, os valores obtidos nas faces voltadas para cima em cada um dos dados são adicionados e vence o jogador que obtiver o maior resultado.



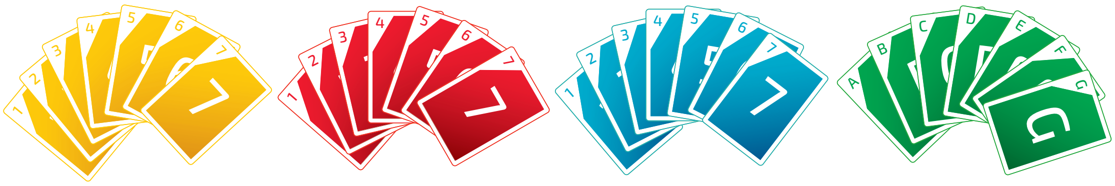
Sergio L. Filho

**a)** Qual é a probabilidade de se obter o resultado 2? E o resultado 8? $\frac{1}{36}$; $\frac{5}{36}$

**b)** Supondo que Carlos obtenha resultado 4 em seu lançamento, a probabilidade de Everton vencer é maior ou menor do que 50%?
Maior do que 50%.

**c)** Qual resultado tem a maior probabilidade de acontecer? 7

**18.** Um jogo de 28 cartas de mesmo tamanho é composto de: 7 cartas amarelas numeradas de 1 a 7; 7 cartas vermelhas numeradas de 1 a 7; 7 cartas azuis numeradas de 1 a 7; 7 cartas verdes identificadas com as letras de **A** a **G**.



Sergio L. Filho

De acordo com as informações apresentadas, elabore um problema que envolva probabilidade e troque-o com um colega. Depois, verifique se a solução obtida por ele está correta. Resposta pessoal.

| D2<br>D1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| 5 | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| 6 | (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

## Explorando o que estudei

Anote no caderno

**1.** Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo?
gráficos, tabelas, média aritmética, mediana, moda, amplitude, total, pesquisa amostral e probabilidade

**2.** Cite diferentes tipos de gráfico que você conhece.
Possíveis respostas: gráfico de colunas, gráfico de linhas, gráfico de setores.

**3.** Como calcular a média aritmética de um conjunto de valores? A média aritmética de um conjunto de valores é igual ao quociente da soma dos valores atribuídos à variável pela quantidade de valores adicionados.

**4.** Leia o texto.

Nos últimos anos, a frota de carros brasileira cresceu em ritmo acelerado. Em 1968, a média era 0,02 veículo por habitante. Em 2010, essa média passou a ser cerca de 0,34 veículo por habitante.


Iconographia/Reminiscências

Porto Alegre (RS) nas primeiras décadas do século XX, onde o fluxo de veículos era baixo.


Alf Ribeiro/Shutterstock.com

Congestionamento de veículos na famosa avenida 23 de Maio, em São Paulo (SP), em novembro de 2014.

5. Espera-se que os alunos respondam que organizar um conjunto de valores em rol consiste em escrever tais valores em ordem crescente ou decrescente, e que esse modo de organizar os valores é importante para calcular a mediana, pois facilita a visualização dos valores centrais.

6. a) Possível resposta: {1, 2, 3, 1, 3, 4}.
b) Possível resposta: {1, 2, 1, 3, 2, 3, 4}.
c) Possível resposta: {1, 3, 4, 2}.

9. A probabilidade de um evento **A** é dada pela razão entre a quantidade de resultados favoráveis e quantidade de resultados possíveis, ou seja: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$.

O que representa a palavra “média” no texto acima?
Possível resposta: a razão entre a quantidade de veículos que compunham a frota brasileira e o de habitantes.

**5.** Explique com suas palavras como organizar um conjunto de valores em rol. Por que esse tipo de organização é importante para calcular a mediana?

**6.** Dê um exemplo de um conjunto de valores:

**a)** bimodal. **b)** trimodal. **c)** amodal.

**7.** Cite algumas situações em que a pesquisa amostral é usada. Resposta pessoal.

**8.** Explique, exemplificando, as diferenças entre amostragem estratificada, amostragem sistemática e amostragem aleatória. Resposta pessoal.

**9.** Se todos os elementos de um espaço amostral **S** têm a mesma chance de ocorrer, como é definida a probabilidade de um evento **A**?

**10.** Qual é a principal diferença entre eventos dependentes e eventos independentes? Sejam dois eventos **A** e **B**, em que **B** ocorre após **A** ter ocorrido. Se a ocorrência de **A** não interfere na probabilidade de ocorrer **B**, dizemos que os eventos são independentes. Agora, se a ocorrência de **A** interfere na probabilidade de ocorrer **B**, dizemos que os eventos são dependentes.

**Avaliação**

- A seção **Explorando o que estudei** pode ser utilizada para realizar uma avaliação dos alunos quanto aos conteúdos estudados nesse capítulo. Durante a resolução das atividades, observe-os e faça questionamentos para identificar se eles compreenderam: a utilidade de diferentes gráficos; o que é a média aritmética; conjuntos de valores modal, bimodal e trimodal; pesquisa amostral; os diferentes tipos de amostragem; as diferenças entre eventos dependentes e independentes e se compreenderam o cálculo de probabilidades. Com isso, reflita sobre as práticas desenvolvidas durante os estudos e analise a possibilidade de reformulá-las ou confirmá-las para as próximas aulas.

**BNCC em foco**

- A seção apresentada nessas páginas visa a desenvolver o tema contemporâneo **Educação em direitos humanos**, destacando a importância da representação política e da consciência na hora da escolha de candidatos.
- Junto aos alunos, realize uma leitura das cenas e questione se eles têm o hábito de conversar com os pais sobre os candidatos escolhidos. Diga que um modo justo de escolher é levar em conta as afinidades de pensamento, mas também, considerar as propostas mais abrangentes que possam beneficiar a maior quantidade de pessoas e não excluam determinados grupos sociais. Assuntos como esse são, de igual maneira, importantes para o desenvolvimento da **Competência geral 6**, já que trabalham com a autogestão e a capacidade de fazer escolhas responsáveis em relação ao futuro no âmbito escolar e na vida em sociedade.

- Instigue os alunos a expressarem suas opiniões, sempre tomando cuidado para que haja respeito mútuo. Explique que implantar a representatividade dentro do ambiente escolar é um exercício democrático que ajuda a garantir os interesses dos alunos por meio da representação discente. Dessa forma, ampliam-se as relações sociais, que são democratizadas e potencializam a conscientização sobre o papel de estudante na construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

# Cidadania: explore essa ideia

## Política

Nik Neves

A política consiste em governar, tomar decisões e fixar regras destinadas a todos, sendo um meio eficaz para organizar a vida em sociedade e garantir o respeito e os direitos humanos. No Brasil, o regime político adotado atualmente é o regime democrata, no qual o povo elege seus representantes por meio do voto. Dessa forma, elegem-se prefeitos, governadores e presidente da república, com as funções de governar e administrar os interesses públicos, e vereadores, deputados e senadores, com as funções de elaborar leis e fiscalizar os gastos públicos.

De modo geral, os cargos políticos citados acima são ocupados pelos candidatos que tiverem as maiores quantidades de voto, exceto deputados e vereadores. O esquema a seguir apresenta o sistema de distribuição de vagas para deputados e vereadores.

| Dados da eleição | 1º passo | 2º passo | 3º passo | Resultado |
|---|---|---|---|---|
| Suponha que sejam 9 vagas e 2 700 votos válidos, assim divididos entre os partidos:<br>**A**: 400 votos<br>**B**: 1 100 votos<br>**C**: 1 200 votos | Calcular o **quociente eleitoral** (QE): divide-se a quantidade de votos válidos pela quantidade de vagas.<br>2 700 : 9 = 300<br>Para obter ao menos 1 vaga, o partido precisa alcançar o QE. | Vagas por partido*: divide-se a quantidade de total de votos de cada partido pelo **QE**. e arredonda-se o resultado ao menor valor inteiro.<br>**A**: 400 : 300 = 1<br>**B**: 1 100 : 300 = 3<br>**C**: 1 200 : 300 = 4 | Vaga que sobrou: divide-se a quantidade de votos de cada partido pela quantidade de vagas já obtidas mais 1. Ganha a vaga quem tiver o maior resultado, nesse caso, o partido **B**.<br>**A**: 400 : (1+1) = 200<br>**B**: 1 100 : (3+1) = 275<br>**C**: 1 200 : (4+1) = 240 | As vagas são atribuídas aos candidatos de cada partido por ordem de votos.<br>**A**: 1 vaga<br>**B**: 4 vagas<br>**C**: 4 vagas |

*O candidato é eleito se tiver pelo menos 10% da quantidade de votos do QE.

Nik Neves

## Analisando com cidadania

Anote no caderno

Respostas nas orientações ao professor.

1. Quais são as principais características que devemos analisar antes de votar em um candidato?
2. Segundo as informações do texto, quais são os políticos eleitos para representar o povo? E quais são suas principais funções?
3. Você já participou de alguma eleição para representante de turma? Quais critérios você utilizou para escolher o candidato?

## Analisando com a Matemática

Anote no caderno

4. Suponha que em uma eleição para vereadores de certa cidade tenham sido validados 4 500 votos. Considerando que foram disponibilizadas 10 vagas e que o Partido **A** obteve 1 000 votos; o Partido **B**, 1 200 votos; e o Partido **C**, 2 300 votos, calcule quantas vagas cada partido obteve.
5. Se nessa eleição um partido obtiver 400 votos, ele consegue eleger algum candidato? Justifique.

### Respostas

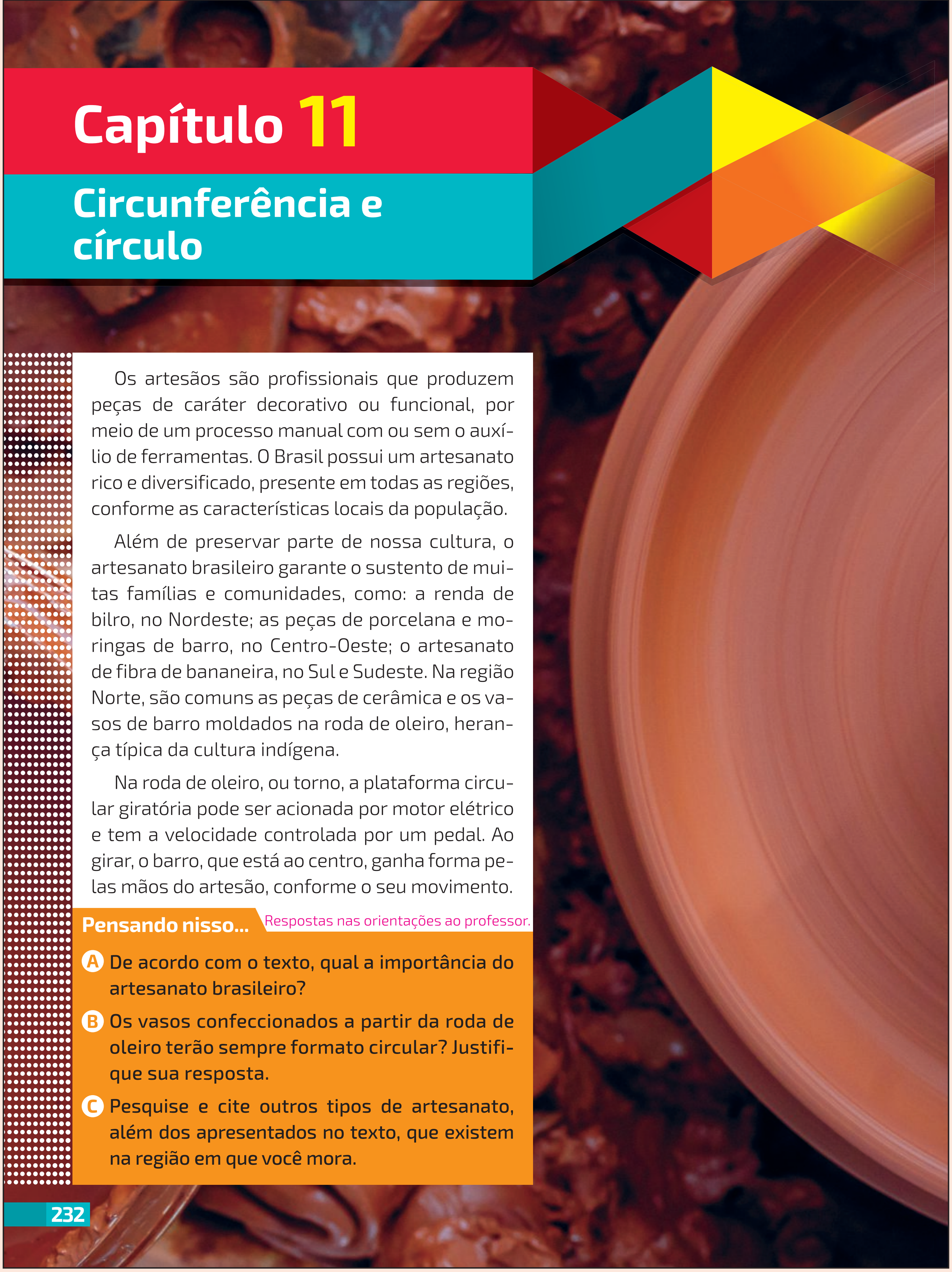
1. Possíveis respostas: histórico político, propostas de gestão, coerência com sua função.
2. Prefeitos, governadores e presidente da república: governam e administram os interesses públicos; vereadores, senadores e deputados: elaboram leis e fiscalizam gastos.
3. Resposta pessoal. Converse com os alunos sobre algumas características importantes para a escolha de um candidato a representante de turma, como saber ouvir os colegas e representá-los em situações de interesse da turma.
4. partido **A**: 2 vagas; partido **B**: 3 vagas; partido **C**: 5 vagas
5. Não, pois para obter uma vaga o partido precisa ter pelo menos a quantidade de votos do quociente eleitoral, que nesse caso refere-se a 450 votos.

- Antes de trabalhar com a questão **3**, verifique se em sua escola há a prática de se eleger representantes de turma e grêmios estudantis. Se houver, peça que o eleito da sala relate um pouco de sua experiência e suas sensações, quais as principais tarefas a desempenhar e os maiores pontos de aprendizado no cargo. Se não houver, avalie a possibilidade de sugerir esta ação à comunidade escolar.

Nesse capítulo, os alunos serão levados a construir circunferências e polígonos regulares utilizando compasso, além de reconhecer os elementos de uma circunferência e de um círculo e identificar o ângulo central e o ângulo inscrito na circunferência.

O capítulo avançará para o estudo do cálculo da medida do comprimento de circunferências e de arcos de circunferências, da medida da área de círculos, de setores circulares e coroas circulares e, ainda, habilitará os alunos a diferenciarem círculo de circunferência.

- As páginas de abertura desse capítulo apresentam aos alunos informações sobre diferentes tipos de artesanatos brasileiros, confeccionados em diversas regiões do país. Com isso, procura-se mostrar a importância desse tipo de manifestação cultural, inclusive como fonte de renda para milhares de famílias, destacando os vasos circulares de barro, que são produzidos com a plataforma circular giratória. Isso permite que os alunos percebam algumas aplicações de conceitos como círculo e circunferência, assuntos tratados no capítulo. Uma sugestão para conduzir o trabalho com a abertura é fazer uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. As questões propostas nessas páginas iniciais podem ser respondidas individualmente ou em grupos de dois ou três alunos, e, ao final, é importante que as respostas sejam discutidas pela turma.



# Capítulo 11

## Circunferência e círculo

Os artesãos são profissionais que produzem peças de caráter decorativo ou funcional, por meio de um processo manual com ou sem o auxílio de ferramentas. O Brasil possui um artesanato rico e diversificado, presente em todas as regiões, conforme as características locais da população.

Além de preservar parte de nossa cultura, o artesanato brasileiro garante o sustento de muitas famílias e comunidades, como: a renda de bilro, no Nordeste; as peças de porcelana e moringas de barro, no Centro-Oeste; o artesanato de fibra de bananeira, no Sul e Sudeste. Na região Norte, são comuns as peças de cerâmica e os vasos de barro moldados na roda de oleiro, herança típica da cultura indígena.

Na roda de oleiro, ou torno, a plataforma circular giratória pode ser acionada por motor elétrico e tem a velocidade controlada por um pedal. Ao girar, o barro, que está ao centro, ganha forma pelas mãos do artesão, conforme o seu movimento.

### Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

**A** De acordo com o texto, qual a importância do artesanato brasileiro?

**B** Os vasos confeccionados a partir da roda de oleiro terão sempre formato circular? Justifique sua resposta.

**C** Pesquise e cite outros tipos de artesanato, além dos apresentados no texto, que existem na região em que você mora.

Para complementar o estudo do tema, sugira que pesquisem na internet vídeos que apresentam um artesão produzindo vasos circulares na plataforma giratória, trabalho que pode ser feito no laboratório de informática. Peça que relatem o que julgarem mais interessante nos vídeos observados.

oykuozgu/Shutterstock.com

Oleiro criando uma peça de argila sobre uma mesa giratória, também conhecida como roda de oleiro.

## BNCC em foco

- A teoria e as atividades desse capítulo serão desenvolvidas com a intenção de habilitar os alunos a resolverem problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica. Dessa maneira, contempla-se a habilidade **EF09MA11**. A **Competência específica de Matemática 3** também será contemplada nesse capítulo, pois possibilitará que os alunos compreendam as relações entre os conceitos da Geometria e da Álgebra, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- As páginas de abertura fornecem subsídios para se desenvolver a **Competência geral 3**, haja vista que colocam o artesanato em evidência, mostrando manifestações culturais de diversas comunidades brasileiras. Dessa maneira, auxiliam na formação de repertório cultural dos alunos e promovem o apuramento do senso estético.

## Pensando nisso...

Ⓐ Espera-se que os alunos respondam que, além de preservar parte de nossa cultura, o artesanato brasileiro garante o sustento de muitas famílias e comunidades.

Ⓑ sim; Espera-se que os alunos justifiquem dizendo que o artesão modela o vaso enquanto a plataforma da roda de oleiro gira. Logo, os vasos obtidos terão formato circular.

Ⓒ Resposta pessoal.

- Na questão **C**, pergunte aos alunos se eles têm em casa alguma peça de artesanato. Caso digam que sim, solicite que compartilhem com a turma sua origem e de qual material ela é feita .

## Objetivos do capítulo

- Construir circunferências utilizando o compasso.
- Identificar os elementos de uma circunferência e de um círculo.
- Identificar os ângulos central e inscrito na circunferência.
- Construir polígonos regulares com régua e compasso.
- Calcular a medida do comprimento de circunferências e de arcos de circunferências.
- Diferenciar círculo de circunferência.
- Calcular a medida da área de círculos, setores circulares e coroas circulares.

## Material digital

- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital dessa coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **10**, **11** e **12** do 4º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos alcançou o resultado esperado.

- Caso não haja réguas e compassos para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar as atividades **1** e **2** ou, então, verifique a possibilidade de levar alguns desses instrumentos para a sala de aula.

Thirteen/Shutterstock.com

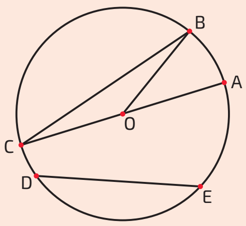
# A circunferência

Observe os vasos ao lado.

Uma característica comum a esses vasos é a possibilidade de identificar neles formatos que podem ser associados a circunferências, uma vez que foram confeccionados em uma roda de oleiro.

Vasos de vários tamanhos e formatos, confeccionados com argila. Peças como essas podem ser usadas na decoração de diversos ambientes ou até mesmo como utensílios domésticos.

**Circunferência** é uma linha fechada em um plano, na qual todos os seus pontos estão a uma mesma medida de distância de um ponto fixo, chamado **centro**.



Cynthia Sekiguchi

Em uma circunferência, podemos destacar os seguintes elementos.

- **Raio** (r): segmento de reta que liga o centro **O** a um ponto qualquer da circunferência. Os segmentos OA, OB e OC são exemplos de raios da circunferência.
- **Corda**: segmento de reta que une dois pontos quaisquer de uma circunferência. Os segmentos BC, AC e DE são exemplos de cordas.
- **Diâmetro (d)**: corda que passa pelo centro da circunferência. O segmento AC é um exemplo de diâmetro. A medida do comprimento do diâmetro é o dobro da medida do comprimento do raio, isto é, d = 2r.

## Atividades

Anote no caderno

**1.** Utilizando régua e compasso, construa uma circunferência de centro:

Respostas nas orientações ao professor.

**a)** **O** e medida do comprimento do raio igual a 2,5 cm.

**b)** **C** e medida do comprimento do diâmetro igual a 4 cm.

**c)** **A** e medida do comprimento da corda maior igual a 6 cm.

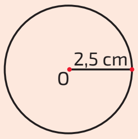
**2.** Considerando as circunferências construídas na atividade anterior, trace:

Respostas nas orientações ao professor.

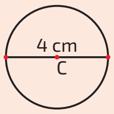
- uma corda $\overline{MN}$ na circunferência de centro **O**.
- um diâmetro $\overline{PQ}$ na circunferência de centro **A**.
- um raio $\overline{CP}$ na circunferência de centro **C**.
- uma corda $\overline{FG}$ que mede 3 cm de comprimento na circunferência de centro **C**.

### Respostas

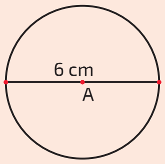
**1. a)**



**b)**



**c)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

# Ângulo na circunferência

## Ângulo central

Utilizando um programa de computador, Talita construiu uma circunferência de centro **O** e nela marcou os pontos **A** e **B**, como mostra a figura.

Ao marcar esses pontos, a circunferência ficou dividida em duas partes, sendo cada uma dessas um **arco de circunferência**. O arco menor, em alaranjado, pode ser indicado por $\overset{\frown}{AB}$, sendo os pontos **A** e **B** as extremidades do arco.

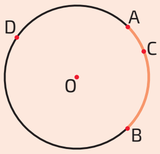
Com esse mesmo programa de computador, Talita traçou, a partir do centro da circunferência, as semirretas OA e OB, determinando um ângulo cujo vértice é **O**. O ângulo $A\hat{O}B$ obtido é chamado **ângulo central**.

Ilustrações: Rafael Lam/ Sergio L. Filho

> Definimos a medida de um arco, em graus, como sendo igual à medida do ângulo central correspondente.

Na construção feita por Talita temos que: med $\left(\overset{\frown}{AB}\right)$ = med$\left(A\hat{O}B\right)$.

- Ao trabalhar o conteúdo dessa página, explique aos alunos que é possível utilizar outra notação para nomear um arco de circunferência. Nessa notação, é inserido um ponto entre as extremidades do arco. Na circunferência apresentada nessa página, os pontos **A** e **B** definem dois arcos de circunferência que podem ser nomeados como descrito a seguir:
  - Arco menor: $\overset{\frown}{ACB}$
  - Arco maior: $\overset{\frown}{ADB}$

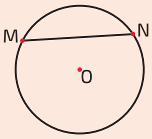


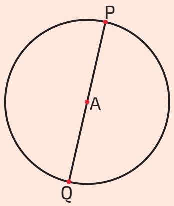
Sergio L. Filho

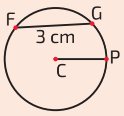
**Material digital**

- No material digital dessa coleção, para complementar o trabalho com o tópico **Ângulo na circunferência**, disponibilizamos a **Sequência didática 11**, elaborada com o objetivo de desenvolver a habilidade **EF09MA11**. Essa sequência apresenta uma etapa com atividades que possibilitam reconhecer e diferenciar circunferência e círculo, identificando seus elementos. A relação entre a medida do arco da circunferência e a medida do ângulo central correspondente também será abordada, assim como a relação entre a medida do ângulo central e a medida do ângulo inscrito correspondente.

**2.** Possível resposta:







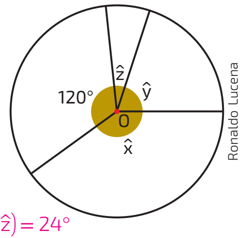
Ilustrações: Sergio L. Filho

## Atividades

Anote no caderno

**3.** Na circunferência de centro **O** ao lado, calcule a medida, em graus, dos ângulos centrais $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ sabendo que:

- $\text{med}(\hat{x}) = 2 \cdot \text{med}(\hat{y})$
- $\text{med}(\hat{y}) = 3 \cdot \text{med}(\hat{z})$



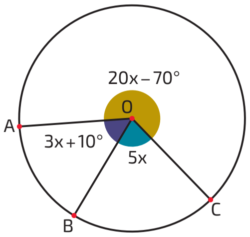
Ronaldo Lucena

$\text{med}(\hat{x}) = 144°$, $\text{med}(\hat{y}) = 72°$ e $\text{med}(\hat{z}) = 24°$

**4.** Determine a medida em graus de cada ângulo central indicado nas circunferências de centro **O** abaixo.

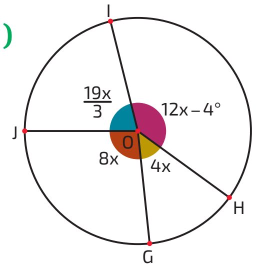
**a)**

$\text{med}(A\hat{O}B) = 55°$,
$\text{med}(B\hat{O}C) = 75°$ e
$\text{med}(C\hat{O}A) = 230°$



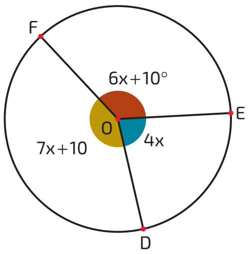
**c)**

$\text{med}(G\hat{O}H) = 48°$,
$\text{med}(H\hat{O}I) = 140°$,
$\text{med}(I\hat{O}J) = 76°$ e
$\text{med}(J\hat{O}G) = 96°$



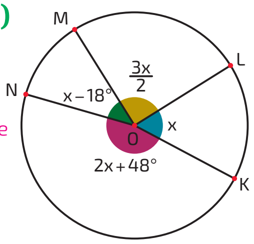
**b)**

$\text{med}(D\hat{O}E) = 80°$,
$\text{med}(E\hat{O}F) = 130°$ e
$\text{med}(F\hat{O}D) = 150°$



**d)**

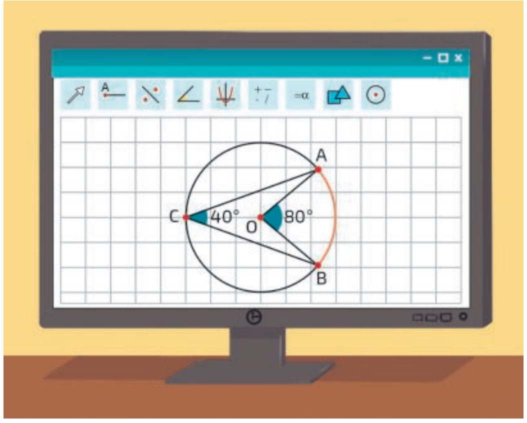
$\text{med}(K\hat{O}L) = 60°$,
$\text{med}(L\hat{O}M) = 90°$,
$\text{med}(M\hat{O}N) = 42°$ e
$\text{med}(N\hat{O}K) = 168°$



Ilustrações: Ronaldo Lucena

## Ângulo inscrito

Ainda utilizando o programa de computador, Talita construiu uma circunferência de centro **O** e nela os pontos **A**, **B** e **C**. Em seguida, traçou um ângulo central $A\hat{O}B$ que mede 80°, depois, traçou o ângulo $A\hat{C}B$, e verificou que a medida de $A\hat{C}B$ era 40°.



Rafael Lam/Sergio L. Filho

Note que os ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{C}B$ determinam o mesmo arco na circunferência.

O ângulo $A\hat{C}B$ é chamado **ângulo inscrito**. Podemos notar que a medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente, isto é:

$$\text{med}(A\hat{C}B) = \frac{\text{med}(A\hat{O}B)}{2}$$

- Verifique na prática com os alunos que, em uma circunferência, a medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente. Para isso, realize a **Atividade complementar** a seguir.

### Atividade complementar

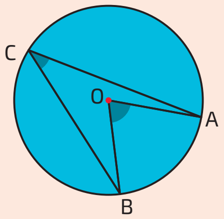
### Ângulo inscrito e sua relação com o ângulo central

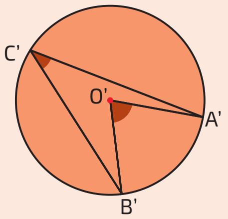
**Materiais**

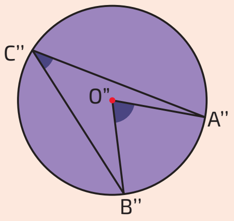
- compasso
- régua
- tesoura com pontas arredondadas

**Desenvolvimento**

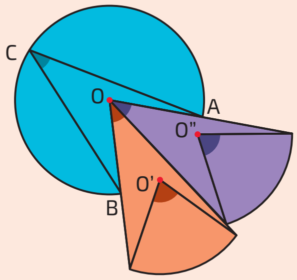
- Oriente os alunos a se reunir em grupos de 3 integrantes.
- Peça a eles que construam três circunferências de mesmo raio em uma folha de papel. Depois, utilizando o compasso, peça que tracem em cada uma delas um ângulo central com a mesma medida e um ângulo inscrito correspondente, conforme segue:







- Oriente os alunos a recortar o ângulo inscrito de duas dessas circunferências e sobrepor na outra circunferência os ângulos recortados, como mostra a figura. Por fim, peça que verifiquem que a medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Essa propriedade é válida para todo ângulo central e ângulo inscrito correspondentes em uma circunferência. Para demonstrá-la, consideramos três casos.

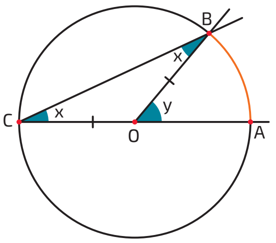
**1º caso**: O centro da circunferência pertence a um dos lados do ângulo inscrito.

O $\Delta COB$ é isósceles, pois $\overline{OC} \equiv \overline{OB}$. Como $A\hat{O}B$ é um ângulo externo do $\Delta COB$, temos:

$$y = x + x$$

$$y = 2x$$

$$x = \frac{y}{2}$$



Logo, $\text{med}\left(A\hat{C}B\right) = \frac{\text{med}\left(A\hat{O}B\right)}{2}$.

**2º caso**: O centro da circunferência não pertence aos lados e à região angular do ângulo inscrito.

Traçamos o diâmetro $\overline{CD}$. De acordo com o 1º caso, temos:

$$q = 2p \text{ (I)}$$

$$q + y = 2 \cdot (p + x) \text{ (II)}$$

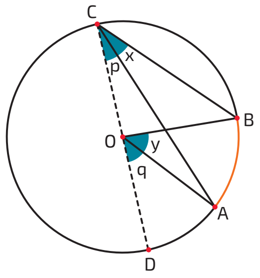
Substituindo **I** em **II**:

$$2p + y = 2 \cdot (p + x)$$

$$2p + y = 2p + 2x$$

$$y = 2x$$

$$x = \frac{y}{2}$$



Logo, $\text{med}\left(A\hat{C}B\right) = \frac{\text{med}\left(A\hat{O}B\right)}{2}$.

**3º caso**: O centro da circunferência pertence à região angular do ângulo inscrito.

Traçamos o diâmetro $\overline{CD}$, obtendo $c + d = y$ e $p + q = x$.

De acordo com o 1º caso, temos:

$$c = 2p \text{ (I)} \qquad d = 2q \text{ (II)}$$

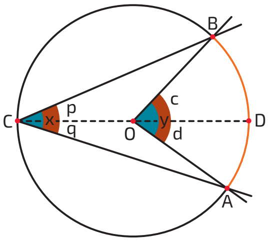
Adicionamos as igualdades **I** e **II** membro a membro:

$c + d = 2p + 2q \longleftarrow$ fatoramos $2p + 2q$ colocando o 2 em evidência

$c + d = 2 \cdot (p + q) \longleftarrow$ temos $c + d = y$ e $p + q = x$

$$y = 2x$$

$$x = \frac{y}{2}$$

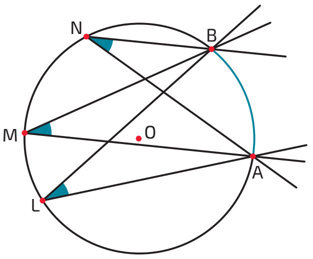


Logo, $\text{med}\left(A\hat{C}B\right) = \frac{\text{med}\left(A\hat{O}B\right)}{2}$.

Assim, nos três casos apresentados temos que $\text{med}\left(A\hat{C}B\right) = \text{med}\,\frac{\left(A\hat{O}B\right)}{2}$.

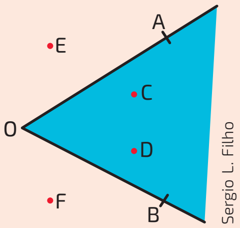
**Observe na figura ao lado os ângulos $A\hat{L}B$, $A\hat{M}B$ e $A\hat{N}B$. O que podemos concluir a respeito de suas medidas? Justifique sua resposta.**

Os ângulos $A\hat{L}B$, $A\hat{M}B$ e $A\hat{N}B$ têm medidas iguais, pois determinam o mesmo arco na circunferência.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

- Na verificação da propriedade apresentada no 2º caso, explique aos alunos que um ângulo determina três conjuntos de pontos no plano: os que estão sobre os lados do ângulo, os que estão na parte interna e os que estão na parte externa do ângulo. Denominamos região angular a reunião dos conjuntos dos pontos que estão sobre os lados do ângulo e na parte interna. Na figura a seguir, os pontos **A**, **B**, **C** e **D** pertencem à região angular de **$A\hat{O}B$**, e os pontos **E** e **F**, não.



Sergio L. Filho

- Veja a resolução do desafio proposto na atividade **9**:

  Os ângulos centrais indicados na figura são dados por:

  $\frac{19x}{4} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = \frac{19x}{2}$

  $\frac{13x}{2} = \frac{z}{2} \Rightarrow z = 13x$

  Assim:

  $y + z = 360° \Rightarrow$

  $\Rightarrow \frac{19x}{2} + 13x = 360° \Rightarrow$

  $\Rightarrow \frac{45x}{2} = 360° \Rightarrow x = 16°$

  Segue que:

  $\text{med}(A\hat{B}C) =$

  $= \frac{19 \cdot 16°}{4} = 76°$

  $\text{med}(A\hat{D}C) = \frac{13 \cdot 16°}{2} =$

  $= 104°$

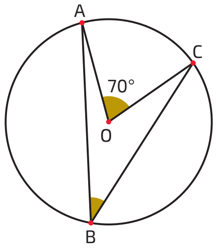
  Caso os alunos tenham dificuldades em resolver essa atividade, desenhe uma figura parecida com a apresentada na resolução, de maneira que eles possam perceber que os ângulos centrais $\frac{19x}{2}$ e 13x correspondem, respectivamente, ao dobro das medidas dos ângulos inscritos $\frac{19}{4}$ x e $\frac{13}{2}$ x. Assim, podemos escrever a equação $\frac{19x}{2} + 13x = 360°$.
- Na seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **276** e **277**, apresentamos uma maneira de construir arcos de circunferência e verificar a relação entre as medidas de um ângulo central e um ângulo inscrito, determinados pelo mesmo arco, utilizando o *software* GeoGebra. Veja a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para utilizarem essa ferramenta para realizar tal construção.

## Atividades

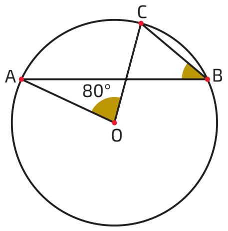
Anote no caderno

**5.** Determine a medida, em graus, do ângulo $A\hat{B}C$ em cada circunferência de centro **O**.

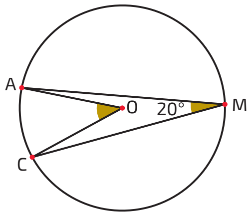
**a)** 35°



**b)** 40°



**c)** 40°



Ilustrações: Ronaldo Lucena

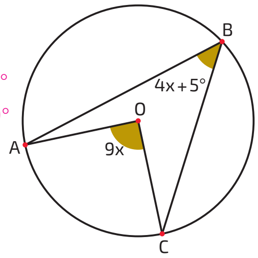
**6.** Em cada circunferência de centro **O**, calcule o valor de **x** e determine as medidas de $A\hat{B}C$ e $A\hat{O}C$.

**a)**

$x = 10°$

$\text{med}(A\hat{B}C) = 45°$

$\text{med}(A\hat{O}C) = 90°$

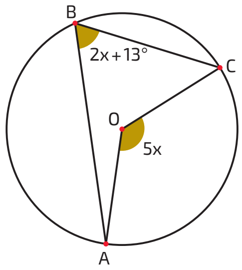


**b)**

$x = 26°$

$\text{med}(A\hat{B}C) = 65°$

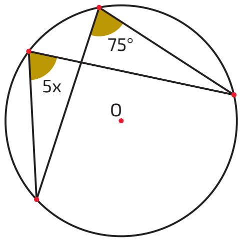
$\text{med}(A\hat{O}C) = 130°$



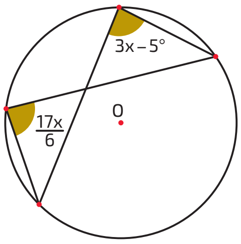
Ilustrações: Sergio L. Filho

**7.** Determine o valor de **x** em cada circunferência.

**a)** $x = 15°$

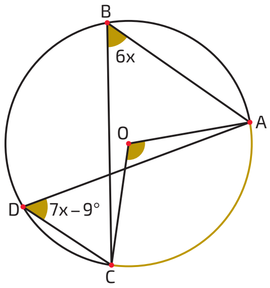


**b)** $x = 30°$



Ilustrações: Sergio L. Filho

**8.** Calcule a medida, em graus, do ângulo central em destaque na circunferência de centro **O**. $\text{med}(A\hat{O}C) = 108°$

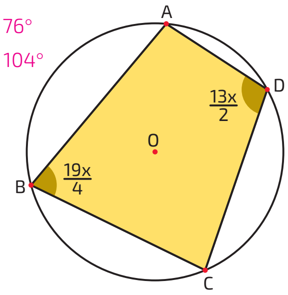


Sergio L. Filho

**9.** Na circunferência de centro **O** abaixo, foi inscrito o quadrilátero ABCD. Determine a medida, em graus, dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$.

$\text{med}(A\hat{B}C) = 76°$

$\text{med}(A\hat{D}C) = 104°$



Sergio L. Filho

Na seção **Explorando tecnologias**, nas páginas **276** e **277**, veja como utilizar um *software* de geometria para construir arcos de circunferência e verificar a relação entre as medidas de um ângulo central e um ângulo inscrito, determinados pelo mesmo arco.

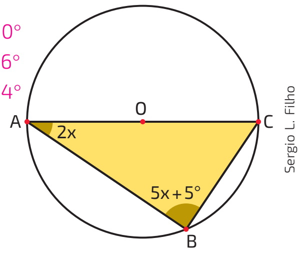
**10.** O $\Delta ABC$ abaixo está inscrito na circunferência de centro **O**. Calcule o valor de **x** e determine as medidas, em graus, dos ângulos internos do triângulo.

$x = 17^\circ$

$\text{med}(A\hat{B}C) = 90^\circ$

$\text{med}(A\hat{C}B) = 56^\circ$

$\text{med}(B\hat{A}C) = 34^\circ$

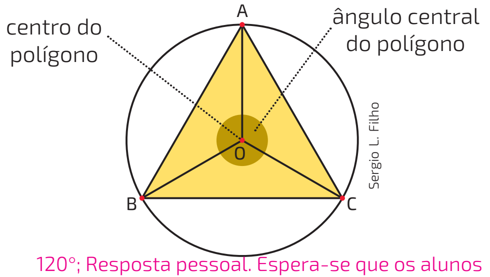


Sergio L. Filho

**11.** Estudamos, em anos anteriores, que todo polígono regular pode ser inscrito e circunscrito numa circunferência. Além disso, vimos que o:

- **centro** de um polígono regular é o centro comum da circunferência inscrita e da circunferência circunscrita a ele.
- **ângulo central** de polígono regular é o ângulo cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados contêm vértices consecutivos do polígono.

Veja esses elementos destacados no triângulo equilátero ABC abaixo.



Sergio L. Filho

120°; Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que dividiram 360° por 3.

**a)** Determine a medida, em graus, do ângulo central de um triângulo equilátero. Como você obteve essa medida?

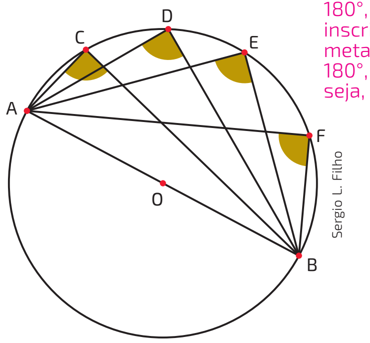
**b)** Calcule a medida do ângulo central, em graus, de um eneágono (polígono de nove lados) regular e de um polígono regular de 20 lados.

eneágono regular: 40°; polígono regular de 20 lados: 18°

**c)** Escreva uma expressão para calcular a medida, em graus, do ângulo central de um polígono qualquer de **n** lados. $\frac{360^\circ}{n}$

**12.** Na circunferência, $\overline{AB}$ é um diâmetro.

b) Iguais, pois são ângulos inscritos que correspondem a um mesmo arco. Nesse caso, o ângulo central mede 180°, e os inscritos, metade de 180°, ou seja, 90°.



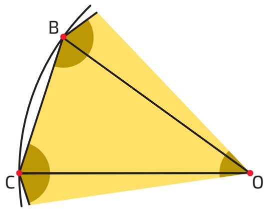
Sergio L. Filho

$\text{med}(A\hat{C}B) = \text{med}(A\hat{D}B) = \text{med}(A\hat{E}B) = \text{med}(A\hat{F}B) = 90^\circ$

**a)** Junte-se a um colega e, sem realizar medições, determinem $\text{med}(A\hat{C}B)$, $\text{med}(A\hat{D}B)$, $\text{med}(A\hat{E}B)$ e $\text{med}(A\hat{F}B)$.

**b)** Esses ângulos possuem medidas iguais ou diferentes? Justifiquem suas respostas.

**13.** Parte de um decágono regular inscrito em uma circunferência está representada na imagem abaixo.



Sergio L. Filho

**a)** Qual a medida, em graus, do ângulo $\hat{O}$? E dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$? $\text{med}(\hat{O}) = 36^\circ$; $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 72^\circ$

**b)** Se esse polígono regular tivesse 12 lados, quais seriam as medidas, em graus, dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$?

$\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 75^\circ$

**c)** Quais seriam as medidas, em graus, dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ caso esse polígono tivesse **p** lados? $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 90^\circ - \frac{180^\circ}{p}$

Note que **p** é um número natural maior ou igual a 3, pois **p** representa a quantidade de lados de um polígono.

- A atividade **12** incita o trabalho em dupla, o que contribui para que os alunos possam desenvolver a interação entre eles e, assim, compartilhar estratégias de resolução.

## BNCC em foco

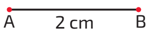
- A atividade **14** da página seguinte, ao solicitar aos alunos que construam fluxogramas, permitirá que eles expressem suas respostas por meio da linguagem escrita e visual, a fim de que partilhem informações e ideias, objetivando alcançar o entendimento mútuo, conforme orienta a **Competência geral 4**.
- Nesse sentido, essa atividade contempla a habilidade **EF09MA15**, pois possibilita que os alunos descrevam, por escrito e por meio de fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso. Além disso, é apresentada na seção **Explorando tecnologias**, na página **278**, uma maneira de construir um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando o *software* GeoGebra. Veja a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para utilizarem essa ferramenta e realizarem tal construção.

**14.** Para um trabalho escolar, Denise precisava construir, utilizando régua e compasso, um hexágono regular cuja medida do comprimento do lado é 2 cm. Ela pesquisou e encontrou um algoritmo que apresenta os procedimentos necessários para realizar a construção de um polígono regular qualquer, dada a medida do comprimento de seus lados.

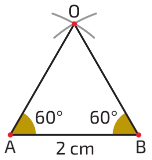
> Esse algoritmo será utilizado para construir polígonos cuja medida do ângulo central é expressa por um número natural.

Veja a construção feita por ela de acordo com o algoritmo.

**I )** Trace o lado $\overline{AB}$ do polígono cuja medida do comprimento é dada.

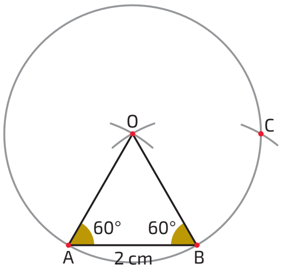


**II )** A partir de $\overline{AB}$, construa o triângulo isósceles AOB, cuja medida de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ é dada por $90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}$, em que **n** representa a quantidade de lados do polígono regular que se deseja construir.



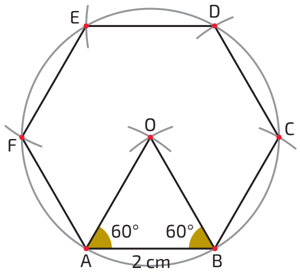
**III)** Com a ponta-seca do compasso em **O** e abertura igual a **AO**, trace uma circunferência.

**IV)** Com a ponta-seca do compasso em **B** e abertura igual a **AB**, trace um arco sobre a circunferência e marque o ponto **C**, que é um dos vértices do polígono que se deseja construir.



**V )** Você obteve todos os vértices do polígono? Se não, considere o último vértice obtido e utilizando o mesmo procedimento do passo anterior, trace todos eles. Se sim, vá para o próximo passo.

**VI)** Ligue os vértices para formar o polígono desejado.



Ilustrações: Sergio L. Filho

> Na seção **Explorando tecnologias**, na página **278**, veja como utilizar um *software* de geometria para construir um polígono regular cuja medida do comprimento do lado é conhecida.

Respostas nas orientações ao professor.

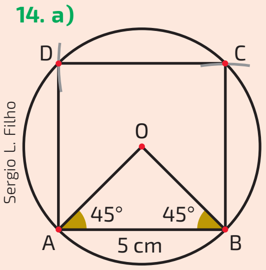
**a)** Utilizando o algoritmo apresentado, construa um quadrado cuja medida do comprimento do lado é 5 cm.

**b)** Construa um fluxograma para representar o algoritmo apresentado.

**c)** Escreva um passo a passo que possibilite construir um polígono regular de 12 lados cuja medida do comprimento do lado é 3 cm. Em seguida, organize-o em um fluxograma.

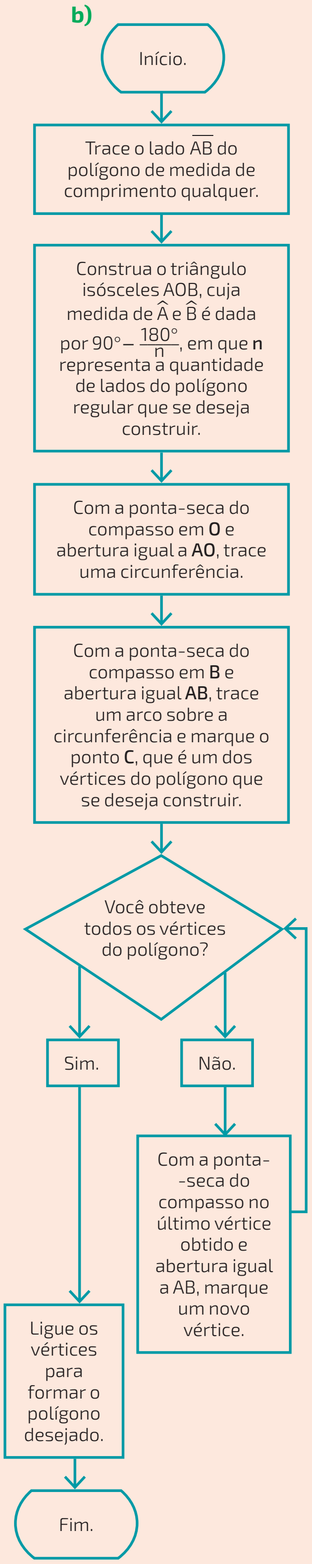
## Respostas

**14. a)**



Sergio L. Filho

**b)**



Início.

Trace o lado $\overline{AB}$ do polígono de medida de comprimento qualquer.

Construa o triângulo isósceles AOB, cuja medida de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ é dada por $90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}$, em que **n** representa a quantidade de lados do polígono regular que se deseja construir.

Com a ponta-seca do compasso em **O** e abertura igual a **AO**, trace uma circunferência.

Com a ponta-seca do compasso em **B** e abertura igual **AB**, trace um arco sobre a circunferência e marque o ponto **C**, que é um dos vértices do polígono que se deseja construir.

Você obteve todos os vértices do polígono?

Sim.

Não.

Com a ponta-seca do compasso no último vértice obtido e abertura igual a AB, marque um novo vértice.

Ligue os vértices para formar o polígono desejado.

Fim.

**c)** Resposta pessoal. Possível resposta:

**1º)** Trace o lado $\overline{AB}$ do polígono com medida de comprimento de 3 cm.

**2º)** A partir de $\overline{AB}$, construa o triângulo isósceles AOB, cuja medida de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ seja de 75°.

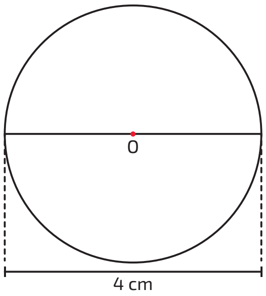
**3º)** Com a ponta-seca do compasso em **O** e abertura igual a **AO**, trace uma circunferência.

**4º )** Agora, com a ponta-seca do compasso em **B** e abertura igual a **AB**, trace um arco sobre a circunferência e marque o ponto **C**, que é um dos vértices do polígono.

**5º)** Como ainda não foram obtidos todos os vértices do polígono, considere o último vértice obtido e utilizando o procedimento do passo anterior, trace todos os vértices do polígono.

**6º)** Ligue os vértices para formar o polígono desejado.

# Medida do comprimento de um arco de circunferência



Você já estudou no 8º ano que é possível determinar a medida do comprimento **C** de uma circunferência se conhecida a medida do comprimento do diâmetro **d** ou do raio **r**. Por exemplo, seja a circunferência cujo diâmetro mede 4 cm de comprimento e considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$C = d \cdot \pi$$

$$C = 4 \cdot 3{,}14 = 12{,}56$$

O número $\pi = 3{,}14159265...$, porém utilizaremos $\pi = 3{,}14$, ou seja, uma aproximação com duas casas decimais.

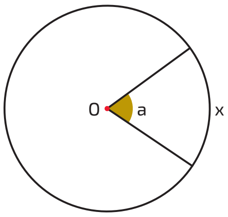
Portanto, a medida aproximada do comprimento da circunferência é 12,56 cm.

Como a medida do comprimento do diâmetro é o dobro da medida do comprimento do raio, a fórmula utilizada acima pode ser escrita como apresentado ao lado:

$$C = \underbrace{2 \cdot r}_{d} \cdot \pi \quad \text{ou} \quad C = 2\pi r$$

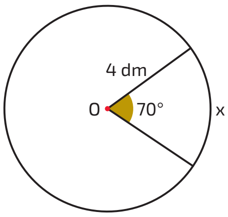
Utilizando essa fórmula e a regra de três simples, podemos calcular também a medida do comprimento do arco de uma circunferência. A medida do comprimento de um arco e a medida do ângulo central que determina esse arco são grandezas diretamente proporcionais. Assim, podemos escrever a seguinte regra de três:

| Medida do ângulo central (em graus) | Medida do comprimento do arco |
|---|---|
| 360 | $2\pi r$ |
| a | x |



**O**: centro da circunferência
**a**: medida do ângulo central em graus
**x**: medida do comprimento do arco

Veja como podemos calcular a medida do comprimento do arco representado ao lado.



**O**: centro da circunferência

Ilustrações: Sergio L. Filho

Inicialmente calculamos a medida do comprimento da circunferência.

$$C = 2\pi r$$

$$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 = 25{,}12$$

Em seguida, calculamos a medida do comprimento do arco por meio de uma regra de três.

| Medida do ângulo central (em graus) | Medida do comprimento do arco (dm) |
|---|---|
| 360 | 25,12 |
| 70 | x |

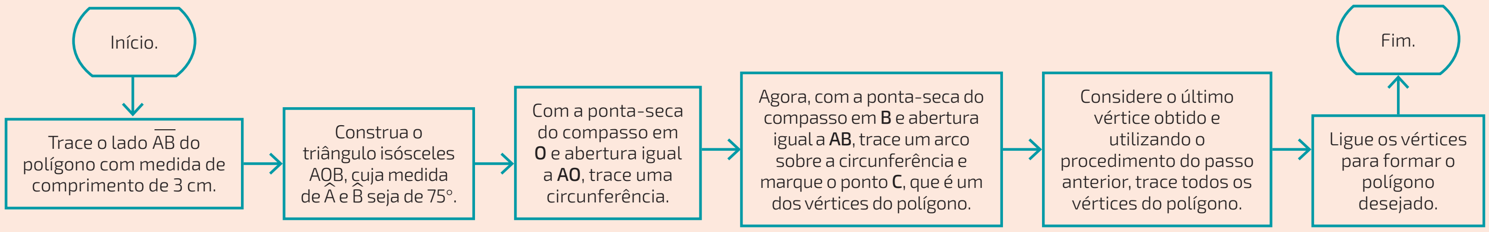
$$\frac{360^{:10}}{70^{:10}} = \frac{25{,}12}{x}$$

$$x \cdot 36 = 7 \cdot 25{,}12$$

$$\frac{36x}{36} = \frac{175{,}84}{36}$$

$$x \simeq 4{,}88$$

Portanto, a medida aproximada do comprimento do arco é 4,88 dm.



**Avaliação**

- Aproveite as atividades propostas a partir dessa página e realize uma avaliação com os alunos, a fim de observar como eles estão lidando com os conceitos estudados. Com base nisso, alinhe as práticas empregadas para o ensino conforme as habilidades e dificuldades apresentadas pelos alunos nas resoluções das atividades.

**Relacionando saberes**

- A questão **15** traz informações sobre o bambolê, uma atividade que mistura brincadeira e esporte. Faça uma relação com o componente curricular **Educação Física** e, com o auxílio do professor responsável, converse com os alunos sobre alguns dos benefícios dessa prática que desenvolve a psicomotricidade por exigir o controle do corpo com movimentos circulares com a cintura, os tornozelos, as munhecas, o pescoço e os braços. Além disso, o bambolê é aliado na perda de peso, tonifica a musculatura e aumenta a flexibilidade. Verifique a possibilidade de levar os alunos à quadra poliesportiva da escola para brincarem com o bambolê e medirem o comprimento da circunferência de diferentes aros.

## Atividades

Anote no caderno

Nas atividades deste capítulo, aproxime π até a 2ª casa decimal, ou seja, considere $\pi = 3{,}14$.

**15.** O bambolê é um brinquedo, geralmente de plástico, cujo formato lembra o de uma circunferência, que se faz girar em torno da cintura (ou corpo). Desenvolve habilidades como o equilíbrio, ritmo, coordenação motora, além de condicionamento físico. O bambolê infantil tem a medida do comprimento do diâmetro igual a 80 cm.

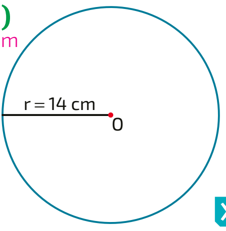
Rawpixel.com/Shutterstock.com

Crianças brincando com bambolê.

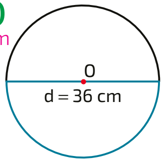
Sabendo que o comprimento do diâmetro de um bambolê adulto mede 100 cm, quantos centímetros a medida do comprimento da circunferência do bambolê infantil é menor do que a do bambolê adulto? aproximadamente 62,8 cm

**16.** Em cada figura está representada uma circunferência, de centro **O**. Calcule a medida do comprimento aproximado de cada linha azul.

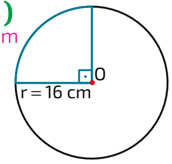
**a)** 87,92 cm



**b)** 92,52 cm



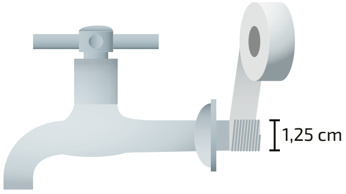
**c)** 57,12 cm



Ilustrações: Ronaldo Lucena

Nos itens **a** e **c**, a letra **r** indica a medida do comprimento do raio. Já no item **b**, a letra **d** indica a medida do comprimento do diâmetro.

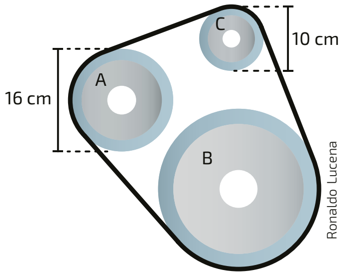
**17.** Para evitar possíveis vazamentos, Mário utilizou na instalação de uma torneira uma fita de vedação na rosca da torneira.



Ronaldo Lucena

Sabendo que Mário deu 12 voltas completas com a fita ao redor da rosca da torneira, calcule a medida aproximada do comprimento mínimo de fita utilizada. 47,1 cm

**18.** O esquema representa 3 polias ligadas por uma correia.

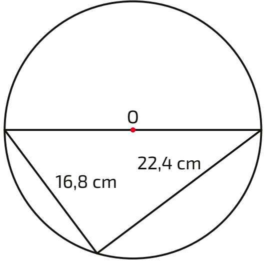


Ronaldo Lucena

**a)** Quando a polia **A** girar 5 voltas, quantas voltas terá girado a polia **C**? 8 voltas

**b)** Sabendo que a cada volta da polia **C** a polia **B** gira $\frac{2}{5}$ de volta, determine a medida do comprimento do raio da polia **B**. 12,5 cm

**19.** Determine a medida do comprimento da circunferência de centro **O**. aproximadamente 87,92 cm

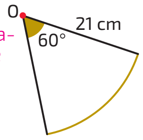


Ronaldo Lucena

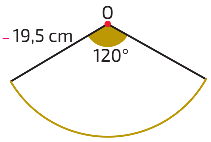
- Algumas das atividades propostas nessa página e na página seguinte apresentam contextos oriundos de situações reais que podem tornar o estudo mais relevante para os alunos. É possível propor a resolução das atividades em duplas, pois, assim, desenvolvem-se a interação e o compartilhamento de experiências e estratégias de resolução.
- Na atividade **19**, verifique se os alunos perceberam que o triângulo formado é retângulo. Assim, é possível aplicar o teorema de Pitágoras e obter a medida do comprimento do diâmetro da circunferência.

**20.** Determine a medida do comprimento de cada um dos arcos de circunferência de centro **O** destacados em amarelo.

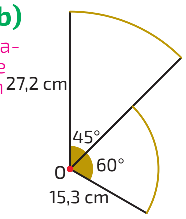
**a)** aproximadamente 21,98 cm



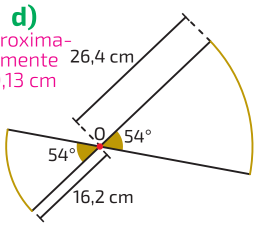
**c)** aproximadamente 40,82 cm



**b)** aproximadamente 37,37 cm



**d)** aproximadamente 40,13 cm



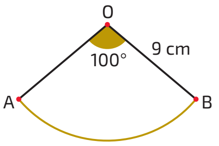
Ilustrações: Ronaldo Lucena

**21.** A medida do comprimento do diâmetro do pneu traseiro de certa colhedeira é igual a 68% da medida do comprimento do diâmetro do pneu dianteiro. Se o pneu dianteiro der 34 voltas, quantas voltas dará o pneu traseiro? 50 voltas

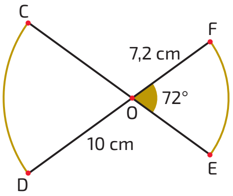
**22.** Determine a medida do comprimento de cada um dos arcos de circunferência de centro **O**. b) aproximadamente 12,56 cm; aproximadamente 9,0432 cm

No item **b**, os pontos **C**, **O** e **E** estão sobre uma mesma reta, assim como os pontos **D**, **O** e **F**.

**a)** aproximadamente 15,7 cm

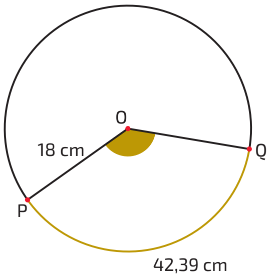


**b)**



Ilustrações: Ronaldo Lucena

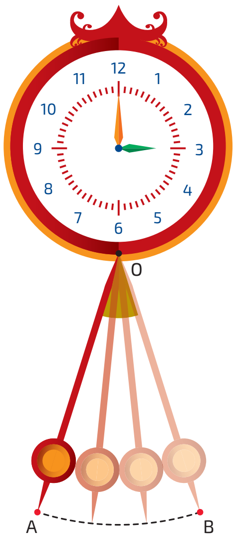
**23.** Na circunferência de centro **O** abaixo, qual a medida do ângulo central $P\hat{O}Q$, que determina um arco cuja medida do comprimento é 42,39 cm? 135°



Ronaldo Lucena

**24.** O pêndulo de um relógio mede 18 cm de comprimento. Ao balançar, a extremidade desse pêndulo descreve um arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$ com 11 cm de medida de comprimento.

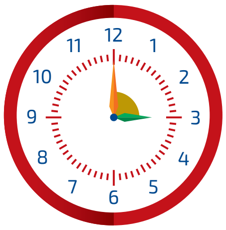
Qual é a medida aproximada de $A\hat{O}B$, em graus? 35°



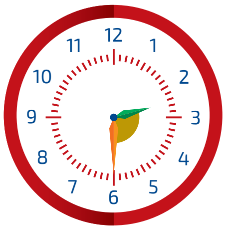
Ronaldo Lucena

**25.** Sem utilizar instrumentos de medição, determine a medida do ângulo indicado pelos ponteiros das horas e dos minutos do relógio em cada item.

**a)** 90°



**b)** 105°



Ilustrações: Cynthia Sekiguchi

**26.** Um automóvel, cujo comprimento do diâmetro do pneu mede 56,2 cm, está trafegando em uma rodovia a 82 km/h.

**a)** Quantas voltas por segundo, aproximadamente, gira em média o pneu desse automóvel? 12,9 voltas

**b)** Escreva o procedimento que você utilizou para resolver o item **a**.
Resposta pessoal.

- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **21**:
Se **x** é a medida do comprimento do diâmetro do pneu dianteiro, então a medida do comprimento do diâmetro do pneu traseiro é 0,68x. 34 voltas do pneu dianteiro correspondem a uma medida de distância de:

$$34C = 34 \cdot 2\pi r = 34 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{x}{2} = 106{,}76x.$$

Assim, se **n** é a quantidade de voltas do pneu traseiro, então:

$$n \cdot C = 106{,}76x$$
$$n \cdot 2\pi r = 106{,}76x$$
$$n \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{0{,}68x}{2} = 106{,}76x$$
$$n = 50$$

Portanto, o pneu traseiro dará 50 voltas.

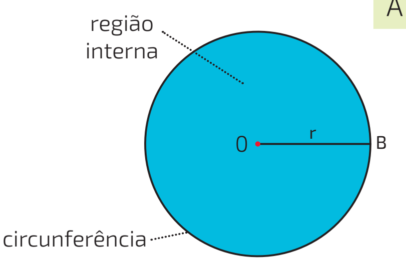
- Ao trabalhar com o tópico **Medida da área do setor circular**, caso julgue necessário, retome os conceitos estudados no capítulo **4** desse volume e no capítulo **10** do volume do **8º** ano dessa coleção, para auxiliar os alunos na compreensão do conteúdo dessa página.

# Medida da área do setor circular

Você já estudou no 8º ano que, se reunirmos a circunferência e todos os seus pontos internos, obtemos uma figura chamada **círculo**.

Além disso, você também estudou que é possível calcular a medida da área **A** de um círculo se conhecida a medida do comprimento de seu raio **r**. Para isso, usamos a seguinte fórmula:

$$A = \pi r^2$$



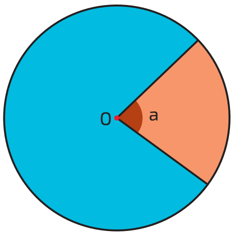
No círculo, podemos destacar alguns elementos como a região interna, a circunferência, o raio $\overline{OB}$ e o centro **O**.

Por exemplo, dado um círculo cujo comprimento do raio mede 12 cm e considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$A = \pi r^2$$
$$A = 3{,}14 \cdot 12^2$$
$$A = 3{,}14 \cdot 144$$
$$A = 452{,}16$$

Portanto, a medida aproximada da área desse círculo é 452,16 cm$^2$.

Na figura abaixo, a parte em alaranjado é um **setor circular** determinado por um ângulo central de medida **a**.



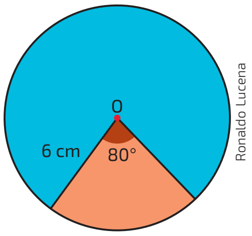
Ilustrações: Ronaldo Lucena

A parte indicada na cor azul é outro setor circular.

Utilizando a fórmula $A = \pi r^2$ e a regra de três simples, podemos calcular a medida da área desse setor circular. A medida da área de um setor circular e a medida do ângulo central que determina esse setor são grandezas diretamente proporcionais. Assim, podemos escrever a seguinte regra de três:

| Medida do ângulo central (em graus) | Medida da área do setor circular |
|---|---|
| 360 | $\pi r^2$ |
| a | x |

Veja como podemos calcular a medida da área do setor circular em alaranjado representado na figura a seguir, considerando $\pi = 3{,}14$.



**O**: centro da circunferência

Inicialmente calculamos a medida da área do círculo.

$$A = \pi r^2$$
$$A = 3{,}14 \cdot 6^2$$
$$A = 3{,}14 \cdot 36$$
$$A = 113{,}04$$

A medida aproximada da área desse círculo é 113,04 cm$^2$.

Em seguida, calculamos a medida da área do setor circular por meio de uma regra de três.

| Medida do ângulo central (em graus) | Medida da área do setor circular |
|---|---|
| 360 | 113,04 |
| 80 | x |

$$\frac{360^{:10}}{80^{:10}} = \frac{113{,}04}{x}$$
$$x \cdot 36 = 8 \cdot 113{,}04$$
$$\frac{36x}{36} = \frac{904{,}32}{36}$$
$$x = 25{,}12$$

Portanto, a medida aproximada da área do setor circular é 25,12 cm$^2$.

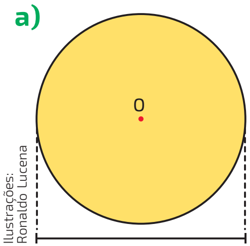
## Atividades

Anote no caderno

Quando necessário, aproxime os resultados ao centésimo mais próximo.

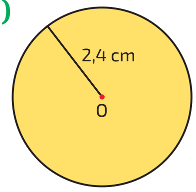
**27.** Calcule a medida da área de cada círculo de centro **O**.

**a)**



aproximadamente 24,62 cm$^2$

**b)**



aproximadamente 18,09 cm$^2$

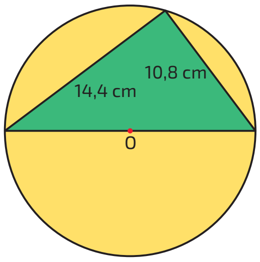
**28.** Qual a medida da área de um círculo cujo comprimento de sua circunferência mede 56,52 m? aproximadamente 254,34 m$^2$

**29.** Qual a medida do comprimento do raio de um círculo cuja área mede 452,16 cm$^2$? aproximadamente 12 cm

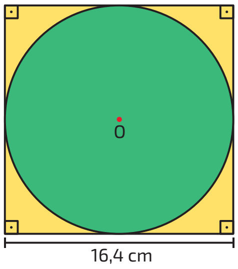
**30.** Calcule a medida do comprimento da maior corda de um círculo cuja área mede 1 256 cm$^2$. aproximadamente 40 cm

**31.** Determine a medida aproximada da área da região amarela em cada figura.

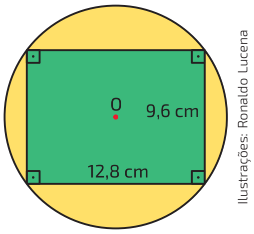
**a)** 176,58 cm$^2$



**b)** 57,83 cm$^2$

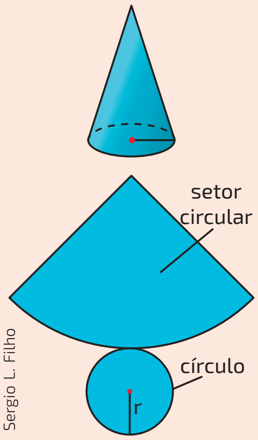


**c)** 78,08 cm$^2$



Nos itens **a** e **c**, os polígonos estão inscritos na circunferência de centro **O**. Já no item **b**, o polígono está circunscrito à circunferência de centro **O**.

- Explique para os alunos que a planificação de um cone reto pode ser decomposta em um círculo e um setor circular, conforme mostra a imagem abaixo.



- Na atividade **31**, verifique se os alunos perceberam que, para determinar a medida da área da região em amarelo, é necessário calcular a medida da área da figura menor e subtrair da maior. No caso da figura indicada no item **a**, por exemplo, basta calcular a medida da área do retângulo e subtrair da medida da área do círculo.

**32.** Leia a tirinha.

© 2018 King Features Syndicate/Ipress

BROWNE, Chris. Hagar. **Folha de S.Paulo**, São Paulo, 14 set. 2005. Ilustrada, p. E9.

**a)** Qual foi seu entendimento acerca dessa tirinha? Resposta pessoal.

**b)** Suponha que a medida do comprimento do diâmetro do escudo maior seja o triplo da medida do comprimento do diâmetro do escudo menor. Nesse caso, a medida da área do escudo maior também será o triplo da medida da área do escudo menor? Justifique sua resposta. Resposta nas orientações ao professor.

**Resposta**

**32. b)** não; Espera-se que os alunos respondam que, se a medida do comprimento do diâmetro do escudo menor for **a**, a medida da área será: $\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{a^2}{4}$. Como a medida do comprimento do diâmetro do escudo maior é o triplo da medida do comprimento do diâmetro do menor, ou seja, 3a, a medida da área será: $\pi \cdot \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 9\left(\pi \cdot \frac{a^2}{4}\right)$, isto é, 9 vezes a medida da área do escudo menor.

Rafael Lam

**33.** De uma chapa retangular de madeira cujas dimensões medem 1,2 m por 2 m, deverá ser cortada a quantidade máxima de círculos com raio medindo 15 cm de comprimento.

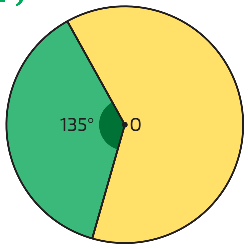
**a)** Quantos desses círculos, no máximo, será possível cortar dessa chapa? 24 círculos

**b)** Qual a medida da área de cada círculo? aproximadamente 706,5 $cm^2$

**c)** Qual a medida da área da parte da chapa de madeira que vai sobrar com esses cortes? aproximadamente7 044 $cm^2$

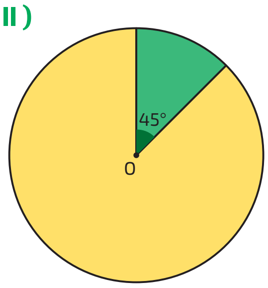
**34.** Em cada círculo de centro **O** estão indicados dois setores circulares e algumas medidas.

**I )**



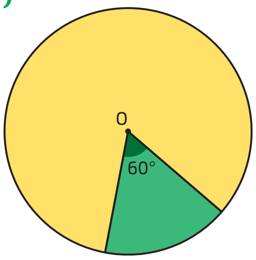
Medida do comprimento do raio: 15,9 cm.

**II )**



Medida do comprimento do diâmetro: 34,2 cm.

**III)**



Medida do comprimento da circunferência: 104,25 cm.

Ilustrações: Ronaldo Lucena

**a)** Calcule a medida da área de cada setor circular verde. I: aproximadamente 297,68 $cm^2$; II: aproximadamente 114,77 $cm^2$; III: aproximadamente 144,22 $cm^2$

**b)** Em cada círculo, que fração da medida da área total o setor circular verde representa? I: $\frac{3}{8}$; II: $\frac{1}{8}$; III: $\frac{1}{6}$

- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **33**:

**a)** 1,2 m = 120 cm
2 m = 200 cm
d = 2r = 2 · 15 = 30
120 : 30 = 4
200 : 30 = $6,\overline{6}$, considere 6.
4 · 6 = 24, ou seja, 24 círculos.

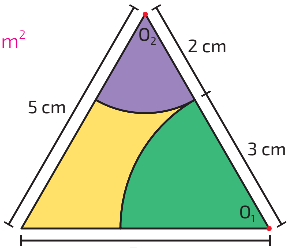
**b)** $A_c = \pi\, 15^2 = 3,14 \cdot 225 = 706,5$; 706,5 $cm^2$

**c)** $A = 120 \cdot 200 - 24 \cdot 706,5 = 7\,044$; 7 044 $cm^2$

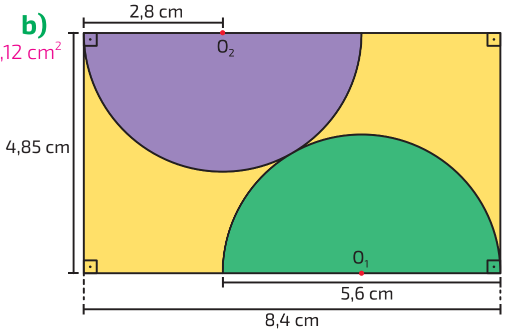
- Complemente essa atividade com a seguinte pergunta:
  - Quantos centímetros quadrados de madeira vão sobrar se forem cortados da chapa 240 círculos cuja medida do comprimento do diâmetro é igual a 10 cm? Ⓡ 5 160 $cm^2$

**35.** Nas imagens abaixo, **O**, **$O_1$** e **$O_2$** correspondem a centros de círculos. De acordo com as indicações, determine a medida aproximada da área da região amarela.

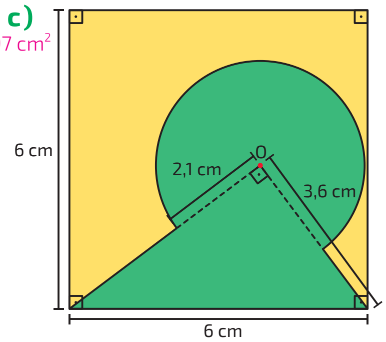
**a)** 4,03 cm²



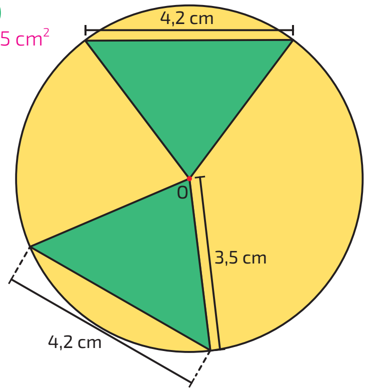
**b)** 16,12 cm²



**c)** 16,97 cm²

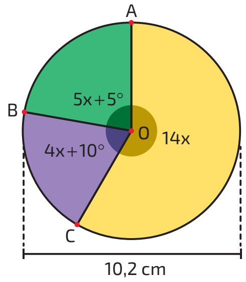


**d)** 26,705 cm²



Ilustrações: Ronaldo Lucena

**36.** Observe o círculo de centro **O** representado abaixo e resolva as questões.



Ronaldo Lucena

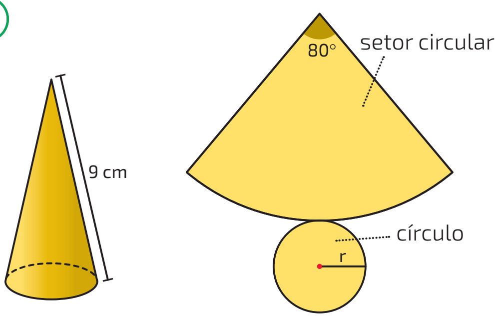
**a)** Calcule a medida em graus do ângulo:

- $A\hat{O}B$ 80°
- $B\hat{O}C$ 70°
- $A\hat{O}C$ 210°

**b)** Qual a medida da área aproximada do setor:

- amarelo? 47,64 cm²
- verde? 15,88 cm²
- roxo? 18,15 cm²

**37.** Observe um cone reto e sua planificação.

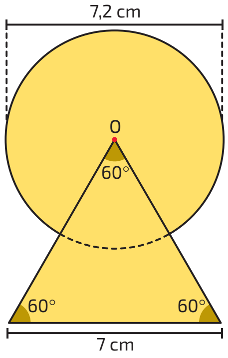


Ronaldo Lucena

**a)** Qual a medida do comprimento **r** do raio da base do cone? 2 cm

**b)** Qual a medida da área total da superfície desse cone? aproximadamente 69,08 cm²

**38.** Determine a medida da área total da figura, sabendo que **O** é o centro da circunferência. aproximadamente 55,1 cm²



Ronaldo Lucena

- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **37**:

**a)** Inicialmente, calculamos a medida do comprimento do setor circular, que corresponde à medida do comprimento do círculo da base:

$2 \cdot 3,14 \cdot 9 = 56,52$

| Medida do ângulo central (em graus) | Medida do comprimento (cm) |
|---|---|
| 360 | 56,52 |
| 80 | C |

$$\frac{360}{80} = \frac{56,52}{C}$$
$$C = 12,56$$

Assim, segue que:

$$C = 2\pi r$$
$$12,56 = 2 \cdot 3,14 \cdot r$$
$$r = 2$$

2 cm

**b)** Inicialmente, calculamos a medida da área da superfície lateral, que corresponde ao setor circular.

$A_l = 3,14 \cdot 9^2 = 254,34$

| Medida do ângulo central (em graus) | Medida da área do setor (c m²) |
|---|---|
| 360 | 254,34 |
| 80 | x |

$$\frac{360}{80} = \frac{254,34}{x}$$
$$x = 56,52$$

Em seguida, calculamos a medida da área da base.

$A_b = 3,14 \cdot 2^2 = 12,56$

Por fim, adicionamos as medida das áreas obtidas.

$A_t = 56,52 + 12,56 =$
$= 69,08$; 69,08 c m²

**BNCC em foco**

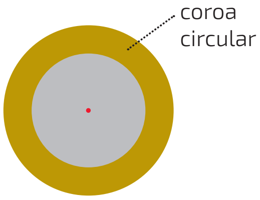
- Tendo em vista as informações sobre as representações das grafias indígenas presentes nas moedas brasileiras, aproveite para relacionar com o tema contemporâneo **Educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena** e ressalte a valorização da cultura indígena que advém dessa representação.

# Medida da área da coroa circular

Desde 2002, circula no Brasil um modelo da moeda de 1 real em que estão presentes grafias encontradas em cerâmicas de origem indígena, fazendo referência às raízes étnicas brasileiras.

Essa moeda é composta de um núcleo prateado de aço inoxidável e um anel externo dourado de aço revestido de bronze, que pode ser associado a uma **coroa circular**.


Reprodução/Casa da Moeda do Brasil/Ministério da Fazenda



Modelo matemático da moeda.

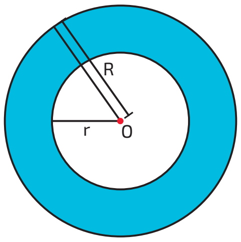
A medida da área da coroa circular ($A_c$), que corresponde à região compreendida entre duas circunferências concêntricas, é obtida calculando-se a diferença entre a medida da área do círculo de maior raio e a medida da área do círculo de menor raio.

Lembre-se de que circunferências concêntricas são aquelas que têm o mesmo centro.

Em relação à medida da área da coroa circular, temos:

$$A_C = \pi R^2 - \pi r^2 \leftarrow \text{colocamos } \pi \text{ em evidência}$$

$$A_C = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$



**O**: centro das circunferências concêntricas.

Portanto, podemos calcular a medida da área de uma coroa circular utilizando a fórmula:

$$A_C = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

Veja, por exemplo, como calcular a medida da área da coroa circular representada a seguir, considerando $\pi = 3{,}14$.

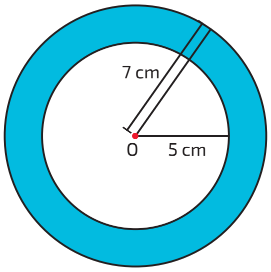


Ilustração: Ronaldo Lucena

Substituindo as medidas de comprimento dos raios na fórmula, temos:

$$A_C = \pi(R^2 - r^2)$$

$$A_C = 3{,}14 \cdot \left(7^2 - 5^2\right) = 3{,}14 \cdot 24 = 75{,}36$$

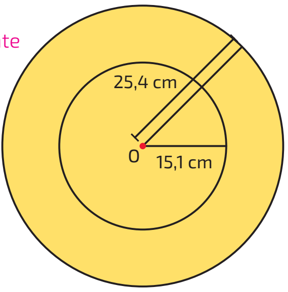
Portanto, a medida aproximada da área da coroa circular é $75{,}36\ \text{cm}^2$.

## Atividades

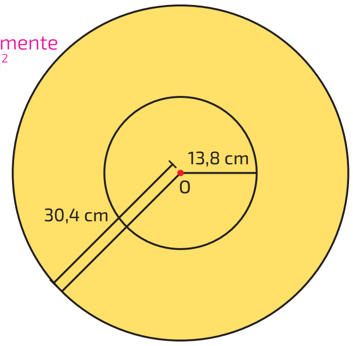
Anote no caderno

**39.** Sabendo que **O** é o centro das circunferências concêntricas, calcule a medida da área de cada coroa circular.

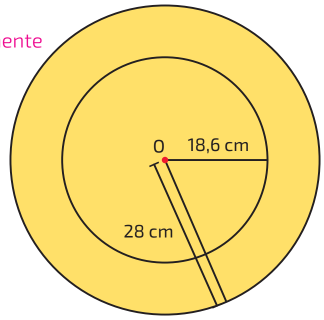
**a)** aproximadamente 1 309,85 $cm^2$



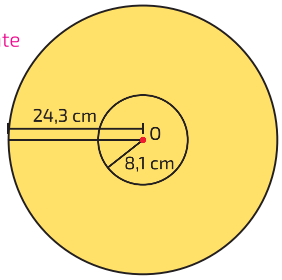
**b)** aproximadamente 2 303,88 $cm^2$



**c)** aproximadamente 1 375,45 $cm^2$



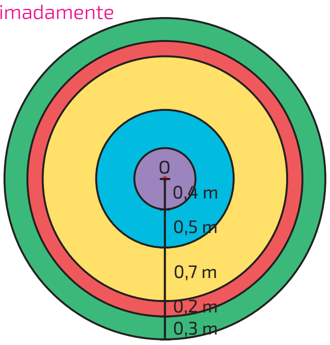
**d)** aproximadamente 1 648,12 $cm^2$



Ilustrações: Ronaldo Lucena

**40.** A figura a seguir é composta de círculos concêntricos de centro **O**.

azul: aproximadamente 2,04 $m^2$
amarela: aproximadamente 5,5 $m^2$
verde: aproximadamente 3,67 $m^2$
vermelha: aproximadamente 2,14 $m^2$



Ronaldo Lucena

Calcule a medida da área da coroa circular na cor:

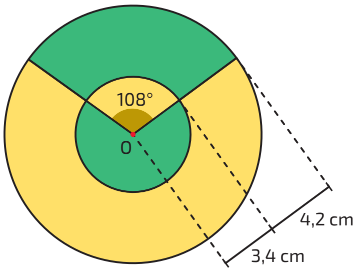
- azul
- amarela
- verde
- vermelha

**41.** Vimos na página **248** que a moeda de 1 real, atualmente em circulação no Brasil, possui centro prateado, composto de aço inoxidável e um anel externo dourado, composto de aço revestido de bronze. 317,93 $mm^2$

Reprodução/Casa da Moeda do Brasil/Ministério da Fazenda

De acordo com as indicações, qual a medida aproximada da área ocupada pelo anel dourado em cada face dessa moeda?

**42.** Sabendo que **O** é o centro das circunferências concêntricas, calcule a medida da área da região indicada em amarelo na figura e anote os procedimentos que você utilizou. 112, 44 $cm^2$



Ronaldo Lucena

- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **42**:
  - Medida da área do setor circular amarelo:

$\pi r^2 = 3,14 \cdot (3,4)^2 \simeq 36,3;$
36,3 $cm^2$

| Medida do ângulo central (em graus) | Medida da área do setor (c $m^2$) |
|---|---|
| 360 | 36,3 |
| 108 | x |

$$\frac{360}{108} = \frac{36,3}{x}$$

$x = 10,89; 10,89\ cm^2$

  - Medida da área da região amarela da coroa circular:

$A_c = \pi \left(R^2 - r^2\right) =$
$= 3,14 \cdot$
$\left((3,4 + 4,2)^2 - (3,4)^2\right) \simeq$
$\simeq 145,07$

| Medida do ângulo central (em graus) | Medida da área da coroa circular (c $m^2$) |
|---|---|
| 360 | 145,07 |
| 252 | y |

$$\frac{360}{252} = \frac{145,07}{y}$$

$y \simeq 101,55; 101,55\ cm^2$

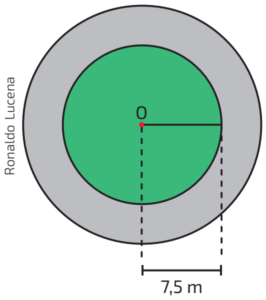
Portanto, a medida da área total da região amarela é dada por:

$A_a = 10,89 + 101,55 =$

$= 112,44; 112,44\ cm^2$

- Possibilite que os alunos realizem, em duplas, as atividades propostas nessa página. Dessa maneira, contribui-se para a interação entre eles e o compartilhamento de estratégias de resolução. Durante o trabalho com as atividades, observe e peça a algumas duplas que, ao final, apresentem na lousa suas resoluções e debatam com a turma, a fim de chegarem a um consenso.

**43.** A prefeitura de certa cidade realizará a revitalização de uma praça cujo formato é circular. As circunferências concêntricas abaixo representam um esquema dessa praça. Nela, a parte central em verde será coberta com grama e a parte em cinza será coberta com concreto.

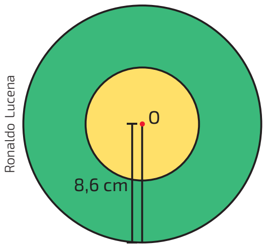


Ronaldo Lucena

Nessa imagem, **O** representa o centro da praça.

Qual a medida da área que será coberta com concreto, sabendo que a medida do comprimento do diâmetro dessa praça é igual ao triplo da medida do comprimento do raio da parte que será coberta com grama?
aproximadamente 220, 78 m$^2$

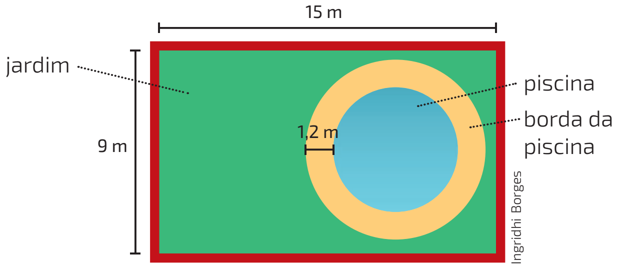
**44.** Os círculos de centro **O** apresentados abaixo são concêntricos e a medida da área do círculo menor é 50, 24 cm$^2$. Qual a medida da área da região destacada em verde na imagem? aproximadamente 182 cm$^2$



Ronaldo Lucena

Realize a aproximação para o inteiro mais próximo.

**45.** Guilherme pretende construir no jardim retangular de sua casa uma piscina circular cuja espessura da borda mede 1,2 m. Veja na imagem o esquema que ele fez para representar essa piscina e sua borda utilizando duas circunferências concêntricas.



Ingridhi Borges

Sabendo que a medida da área da borda da piscina terá 24,87 m$^2$, determine:

**a)** a medida da área da piscina. aproximadamente 22,9 m$^2$

**b)** a medida da área que vai sobrar do jardim após a construção da piscina e de sua borda. aproximadamente 87,2 m$^2$

## Explorando o que estudei

Anote no caderno

**1.** Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? circunferência, ângulo na circunferência, medida do comprimento da circunferência e de um arco, medida da área do círculo, do setor e da coroa circular.

**2.** Quais elementos estudados neste capítulo podemos destacar em uma circunferência? Raio, corda, diâmetro e centro.

**3.** O que diferencia o círculo da circunferência?

3. Espera-se que os alunos respondam que a circunferência é uma linha fechada em um plano, na qual todos os seus pontos estão a uma mesma medida de distância de um ponto fixo, chamado centro. O círculo é a reunião da circunferência com todos os seus pontos internos.

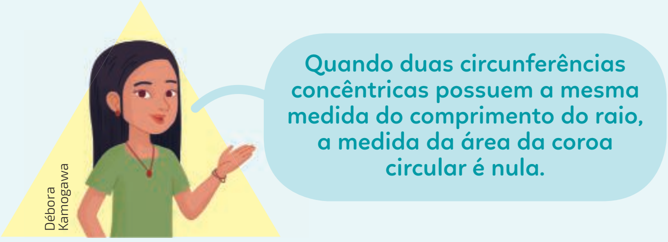
**4.** Na circunferência, qual a relação existente entre a medida de um ângulo central e a de um ângulo inscrito correspondente? A medida de um ângulo central é o dobro da medida do ângulo inscrito correspondente.

**5.** Arquimedes (287-212 a.C.) foi um matemático grego que, com base no chamado método clássico, verificou que o valor aproximado de $\pi$ é dado pela desigualdade $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

A aproximação $\pi = 3,14$ pertence à desigualdade de Arquimedes? Se necessário, utilize uma calculadora. sim

**6.** Explique o que é um setor circular e uma coroa circular. Possível resposta: o setor circular corresponde à região determinada por um ângulo central em um círculo. A coroa circular corresponde à região compreendida entre duas circunferências concêntricas.

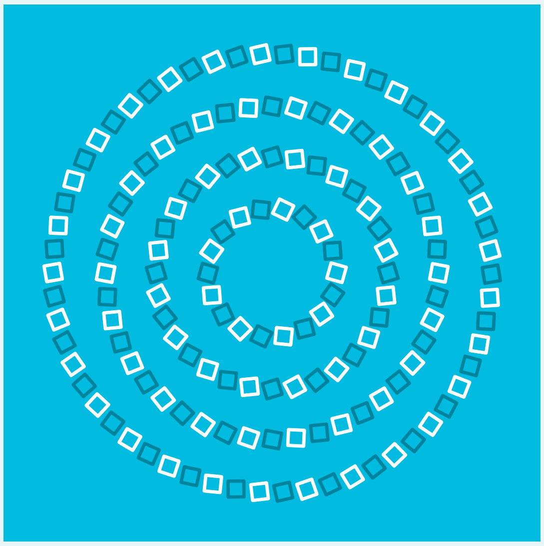
**7.** Leia o que Amanda está dizendo.



Débora Kamogawa

Essa afirmação é verdadeira? Justifique. sim; Possível resposta: não há região compreendida entre essas duas circunferências.

**8.** Na figura a seguir, os círculos sugeridos se cruzam ou são concêntricos? são concêntricos



Ronaldo Lucena

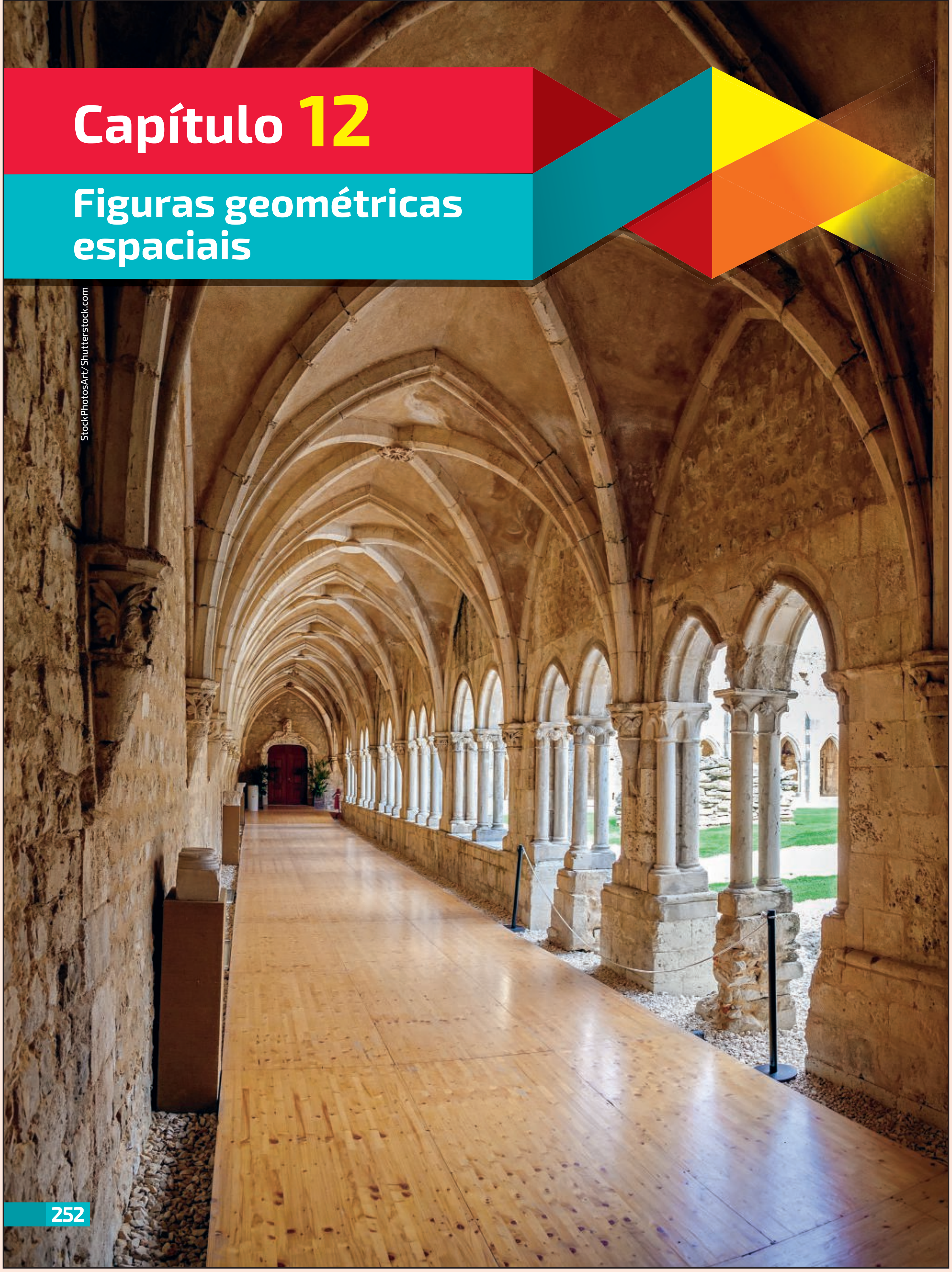
**Avaliação**

- Utilize a seção **Explorando o que estudei** para avaliar os alunos quanto aos conhecimentos adquiridos no decorrer desse capítulo. Procure identificar como eles lidam com os elementos de uma circunferência, com as relações entre a medida do ângulo central e a medida do ângulo inscrito correspondente, com setores e coroas circulares, dentre outros conceitos estudados. Observe-os durante a resolução das questões propostas objetivando identificar habilidades e dificuldades apresentadas por eles, aproveitando para refletir sobre as práticas desenvolvidas para o trabalho com o capítulo, a fim de reformulá-las ou confirmá-las.

- Na questão **6**, peça aos alunos que desenhem figuras para exemplificar as explicações.
- Na questão **8**, explique aos alunos que essa imagem se trata de uma ilusão de ótica. Essas imagens enganam a visão humana, fazendo-a visualizar algo que não está presente ou visualizar algo de maneira errada.

# Capítulo 12

## Figuras geométricas espaciais



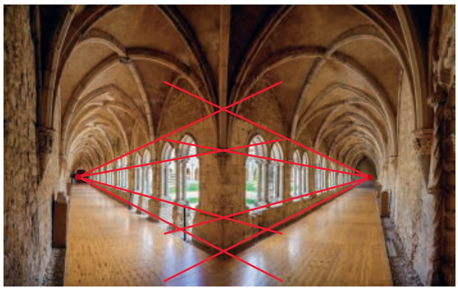
StockPhotosArt/Shutterstock.com

Esse capítulo auxiliará os alunos a recordar algumas figuras geométricas espaciais para então prosseguir com o estudo das vistas ortogonais e dos desenhos em perspectiva. O capítulo abordará o reconhecimento das perspectivas cavaleira, isométrica e cônica, incluindo pontos de fuga.

Além disso, serão retomados o conceito de volume e as unidades de medida de volume mais utilizadas, levando os alunos a resolver e a elaborar problemas envolvendo o cálculo da medida do volume de paralelepípedos retângulos, prismas e cilindros, inseridos, sempre que possível, em contextos reais.

- A abertura desse capítulo permite que os alunos tenham contato com o conceito de perspectiva. Na imagem apresentada é possível observar a ideia de profundidade. A abordagem do conteúdo com base no contexto apresentado pode contribuir com o processo de aprendizagem desse conceito, uma vez que as imagens em perspectiva aguçam a imaginação e criatividade dos alunos, tornando os estudos mais interessantes. Pergunte se eles já viram alguma fotografia ou desenho com essas características. Uma sugestão de condução do trabalho é realizar uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate, a fim de observar as diferentes interpretações e opiniões. As questões propostas podem ser respondidas individualmente ou em duplas e, ao final, é importante que as respostas sejam discutidas pela turma.

Ao observarmos a fotografia destas páginas, temos a impressão de que as paredes de cada um dos corredores irão se encontrar em algum ponto, dando-nos a ideia de profundidade na imagem, tanto que a porta ao fim de um dos corredores parece ser bem pequena. Porém, na realidade isso não ocorre, pois as paredes dos corredores são paralelas; mesmo se as prolongarmos, elas não irão se encontrar. Dizemos que esta fotografia está em perspectiva.


Sergio L. Filho

Imagine retas que acompanhem as linhas das paredes e do chão desses corredores. Note que elas parecem se aproximar cada vez mais, nos dando a ideia de profundidade na imagem.

## Pensando nisso...

Respostas nas orientações ao professor.

**A** Você já visitou algum local em que desse a impressão de profundidade como na fotografia?

**B** Você acha possível fazer um desenho que dê a ideia de profundidade?

**C** Pesquise outras imagens nas quais possamos perceber a ideia de profundidade.


Convento de São Francisco, em Portugal, em 2017.

## Pensando nisso...

**A** Resposta pessoal.

**B** Espera-se que os alunos respondam que sim.

**C** Resposta pessoal.

- No item **C**, veja a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para que possam pesquisar na internet imagens de outros lugares que possuem as características da fotografia apresentada nas páginas de abertura. Se achar conveniente, apresente algumas fotografias feitas em perspectivas e proponha que os alunos criem algo parecido, utilizando, por exemplo, a câmera de um *smartphone*.

## BNCC em foco

- O trabalho com esse capítulo proporcionará aos alunos compreender as relações entre conceitos e procedimentos da Geometria e da Álgebra, estudando, inicialmente, vistas e desenhos em perspectiva, e, posteriormente, calculando medidas de volume de figuras geométricas espaciais. Dessa maneira, a segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos é desenvolvida, além da autoestima e da perseverança na busca de soluções, como postula a **Competência específica de Matemática 3**.

# Relembrando figuras geométricas espaciais

Diversos objetos e elementos do cotidiano, por apresentarem determinadas características, podem ser associados a figuras geométricas espaciais. Veja alguns exemplos:


Fablok/ Shutterstock.com

Tijolo de cerâmica que lembra um paralelepípedo retângulo ou bloco retangular.


MilanB/ Shutterstock.com

Dado com quatro faces que lembra uma pirâmide de base triangular.


Odua Images/ Shutterstock.com

Caixa que lembra um prisma de base octogonal.


Tomislav Pinter/Shutterstock.com

Lixeira que lembra um cilindro.

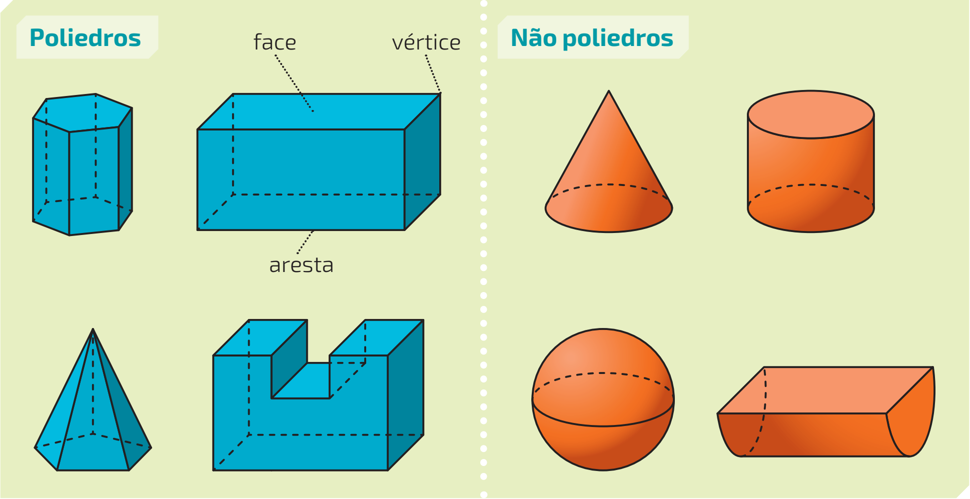

chanchai howharn/ Shutterstock.com

Cone de sinalização que lembra um cone.


FocusStocker/ Shutterstock.com

Bola de basquete que lembra uma esfera.

É possível classificar algumas figuras geométricas espaciais em **poliedros** e **não poliedros**. Os poliedros são figuras geométricas espaciais limitadas por uma quantidade finita de polígonos, de maneira que cada lado de um polígono seja também lado de apenas um outro polígono. Já as figuras que não têm pelo menos uma dessas características são chamadas não poliedros. Veja alguns exemplos.



Ilustrações: Sergio L. Filho

**Objetivos do capítulo**

- Reconhecer figuras geométricas espaciais.
- Compreender e representar vistas ortogonais de figuras espaciais.
- Desenhar em perspectiva utilizando malha quadriculada, pontilhada e triangular.
- Reconhecer e compreender figuras espaciais desenhadas na perspectiva cavaleira, isométrica ou cônica.
- Compreender e desenhar figuras geométricas espaciais em perspectiva com pontos de fuga.
- Reconhecer unidades de medida de volume.
- Calcular medidas de volume de paralelepípedos retângulos, prismas e cilindros.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo do cálculo de medida de volume de paralelepípedos retângulos, prismas e cilindros inseridos em contextos do cotidiano.

- Comente com os alunos que existem poliedros que não são pirâmides nem prismas, e são classificados de acordo com a quantidade de faces. Veja alguns exemplos:
  - 8 faces: octaedro;
  - 12 faces: dodecaedro;
  - 20 faces: icosaedro.

  Já a esfera possui superfície inteiramente não plana, o que não a caracteriza como um poliedro.

**Material digital**

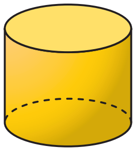
- Para auxiliar no processo de acompanhamento da aprendizagem dos alunos, o material digital desta coleção disponibiliza um modelo de **Ficha de acompanhamento individual**, elaborado com base nos objetivos previstos para os capítulos **10**, **11** e **12** do 4º bimestre. No decorrer do trabalho com esse capítulo, é possível preencher essas fichas de modo a reorientar o trabalho com alguns alunos, caso tais objetivos não tenham sido atingidos. As fichas também configuram um instrumento para refletir sobre a prática docente, uma vez que elas podem ser usadas como parâmetro para avaliar se o trabalho com determinados conteúdos refletiu o resultado esperado.

## Atividades

Anote no caderno

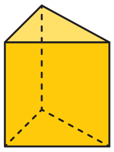
**1.** Classifique as figuras geométricas espaciais em poliedros ou não poliedros.
poliedros: II, III e VI; não poliedros: I, IV e V

**I )**



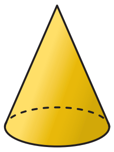
Cilindro.

**III)**



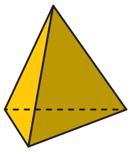
Prisma de base triangular.

**V )**



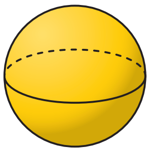
Cone.

**II )**



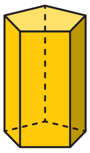
Pirâmide de base triangular.

**IV)**



Esfera.

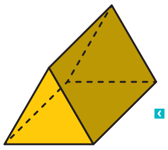
**VI)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

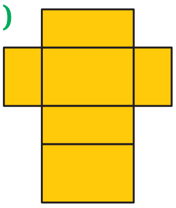
Prisma de base pentagonal.

**2.** Qual das planificações a seguir corresponde à da figura geométrica espacial ao lado? b

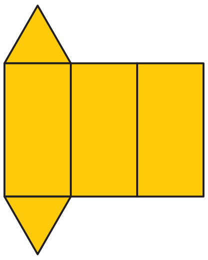


Prisma de base triangular.

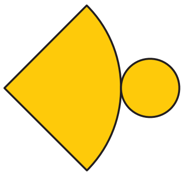
**a)**



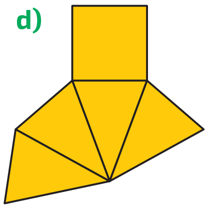
**b)**



**c)**



**d)**

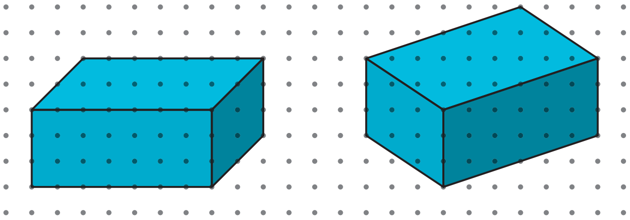


Ilustrações: Sergio L. Filho

## Representando alguns poliedros

As figuras geométricas espaciais podem ser representadas no plano por meio de diferentes métodos. Um recurso utilizado para facilitar esse processo são as malhas. Veja como é possível representar alguns poliedros em três tipos de malhas.

- Malha pontilhada

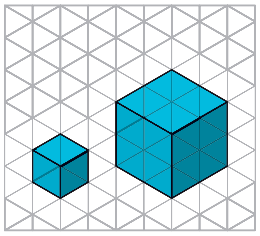


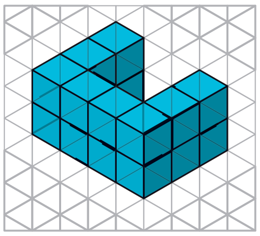
Ronaldo Lucena

Blocos retangulares.

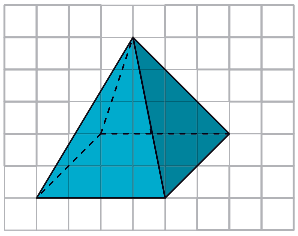
- No decorrer do capítulo, em diversas atividades será solicitada a utilização de malha quadriculada, pontilhada e/ou triangular. Para auxiliar os alunos, reproduza as malhas disponíveis nas **Páginas para reprodução** e entregue a eles.

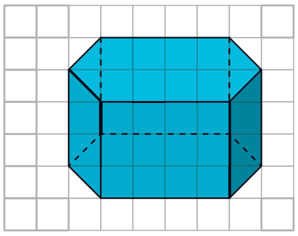
- Malha triangular


Cubos.


Pilha de cubos.

- Malha quadriculada


Pirâmide de base quadrangular.

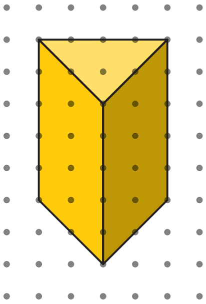

Prisma de base hexagonal.

Ilustrações: Ronaldo Lucena

## Atividades

Anote no caderno

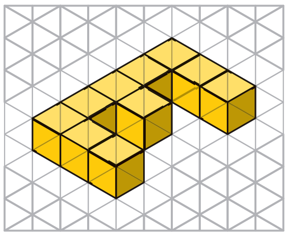
**3.** Qual o nome da figura geométrica espacial representada na malha pontilhada a seguir? prisma de base triangular


Ronaldo Lucena

Represente essa figura em uma malha quadriculada. Resposta nas orientações ao professor.

**4.** Desenhe um cubo em uma malha triangular, de modo que a medida do comprimento da aresta seja igual a 4 vezes a do comprimento do lado do triângulo que compõe a malha.
Resposta nas orientações ao professor.

**5.** Com qual letra se parece a figura geométrica espacial formada por cubos representada na malha triangular a seguir?
letra E


Ronaldo Lucena

Agora, em uma malha triangular, represente a letra **L** utilizando 7 cubos.
Resposta nas orientações ao professor.

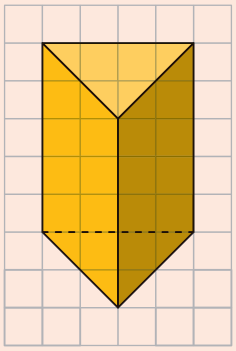
**6.** Em uma malha pontilhada, desenhe uma pirâmide de base triangular.
Resposta nas orientações ao professor.
Em seguida, responda:

**a)** Quantas arestas tem a figura representada? 6 arestas

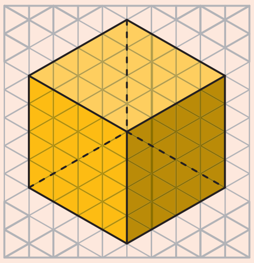
**b)** Qual polígono pode ser observado em suas faces? triângulo

**Respostas**

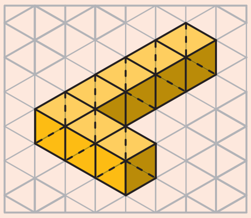
**3.** Possível resposta:



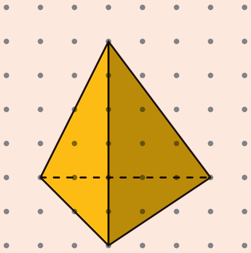
**4.**



**5.** Possível resposta:



**6.** Possível resposta:

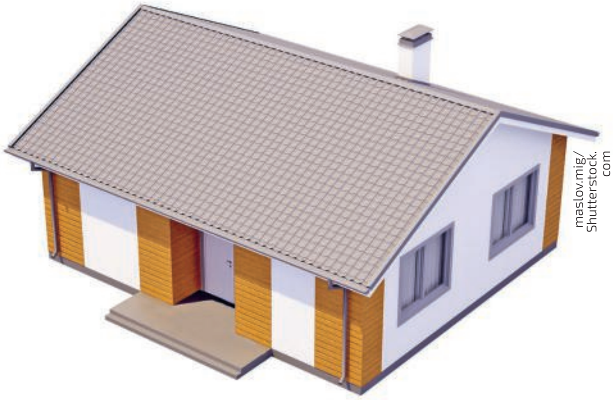


Ilustrações: Sergio L. Filho

# Vistas ortogonais

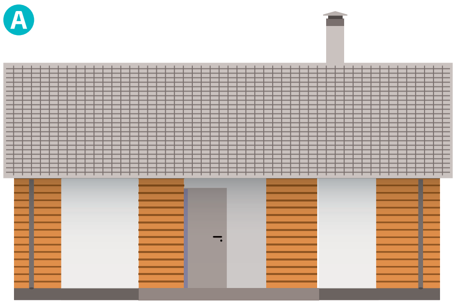
Para construir uma casa, um arquiteto cria um projeto, que, em geral, é esboçado inicialmente com instrumentos de desenho e, posteriormente, por meio de programas computacionais.

Veja ao lado o projeto finalizado de uma casa e a seguir os desenhos dessa construção feitos por um arquiteto.



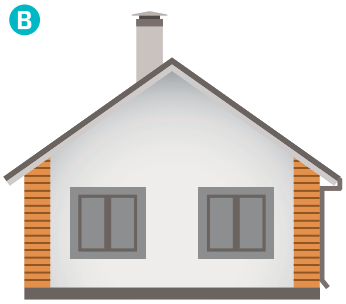
maslov.mig/Shutterstock.com

A



Vista frontal.

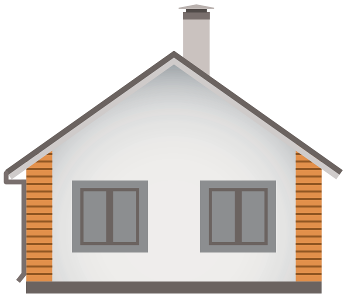
B



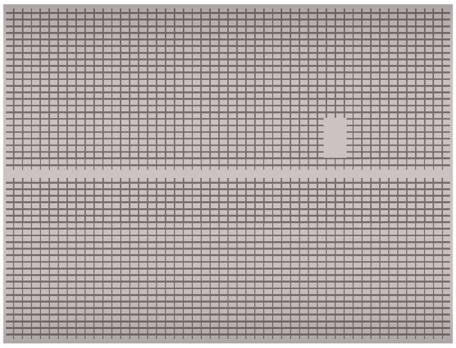
Vista lateral esquerda.

Podemos notar que os desenhos do arquiteto apresentam diferentes representações da casa. Isso ocorre porque eles foram feitos pensados a partir de diferentes posições do observador. Assim, a partir de um ponto de referência, podemos definir diferentes **vistas ortogonais** de elementos ou figuras geométricas espaciais.

No exemplo, tomando o desenho da fachada **A** como **vista frontal** (ou **vista ortogonal frontal**), então, o desenho **B** representa a **vista lateral esquerda** da casa. Outras vistas que podem ser representadas são a **vista superior** e a **vista lateral direita**, conforme as imagens abaixo.



Vista lateral direita.



Vista superior.

Ilustrações: Ronaldo Lucena

- Realize a **Atividade complementar** a seguir, que levará os alunos a procurar meios de reproduzir as fachadas dos prédios no papel, para que possam compreender as vistas de uma construção e, desse modo, desenvolver a habilidade de investigação.

## Atividade complementar

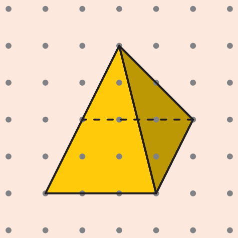
- Verifique a possibilidade de levar os alunos para fora da sala de aula com o intuito de observarem os prédios ao redor, de maneira a desenvolver uma postura parecida com a dos arquitetos, como foi apresentado na teoria dessa página. Peça que reproduzam as vistas de um prédio, da escola ou de outra construção próxima, em uma folha de papel, para que com isso possam compreender as vistas trabalhadas.

## BNCC em foco

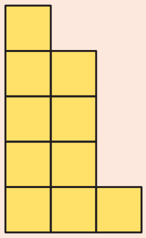
- O tópico iniciado nessa página proporcionará aos alunos reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento no desenho de objetos em perspectiva, contemplando a habilidade **EF09MA17**.

## Respostas

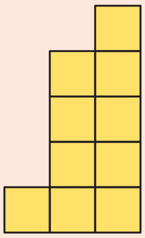
**9.** Possível resposta:



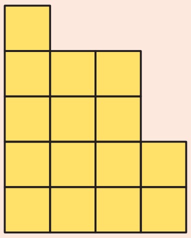
**11.** vista lateral esquerda:



vista lateral direita:



vista frontal:



Ilustrações: Sergio L. Filho

# Atividades

Anote no caderno

**7.** Luciano fotografou um carro a partir de diferentes vistas. Considerando a vista frontal ao lado, escreva a que vista corresponde cada uma das fotografias abaixo.

Vista frontal.

**a)**

vista lateral esquerda

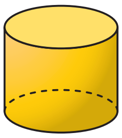
**b)** vista superior

**c)**

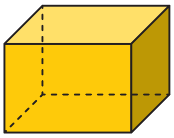
vista lateral direita

Ilustrações: Yuri Schmidt/ Shutterstock.com

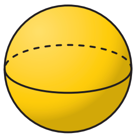
**8.** Qual das figuras geométricas espaciais a seguir tem a mesma representação, qualquer que seja a vista? esfera



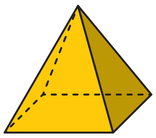
Cilindro.



Paralelepípedo retângulo.



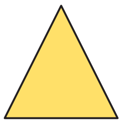
Esfera.



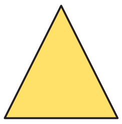
Pirâmide de base quadrada.

Ilustrações: Sergio L. Filho

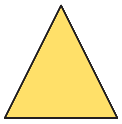
**9.** Qual é o nome da figura geométrica espacial representada abaixo por suas diferentes vistas? pirâmide de base quadrangular



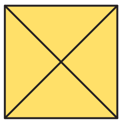
Vista frontal.



Vista lateral direita.



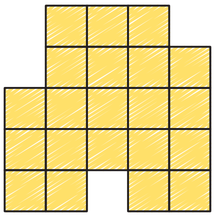
Vista lateral esquerda.



Vista superior.

Agora, em uma malha pontilhada, represente essa figura geométrica espacial.
Resposta nas orientações ao professor.

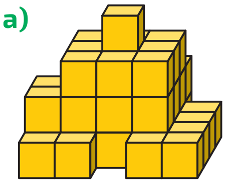
**10.** O desenho a seguir, feito por Natália, representa a vista superior de uma pilha de cubos.



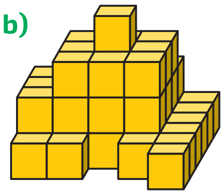
Desenho de Natália.

Entre as opções abaixo, qual delas Natália observou para fazer o desenho?
a

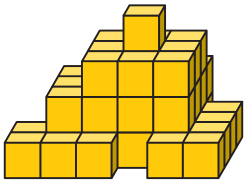
**a)**



**b)**

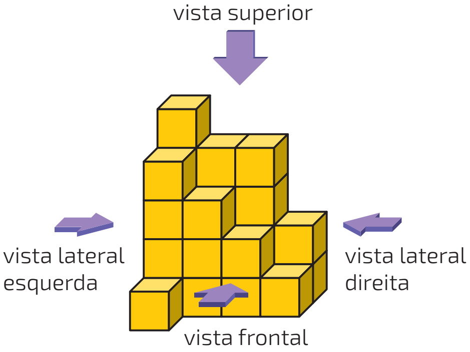


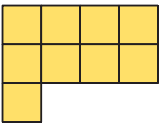
**c)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

**11.** Veja uma pilha composta por 26 cubos e o desenho de sua vista superior.





Vista superior.

Ilustrações: Sergio L. Filho

Agora, desenhe em seu caderno cada uma das outras vistas indicadas.
Respostas nas orientações ao professor.

# Representações em perspectiva

Quando observamos um objeto, podemos ver três dimensões: altura, largura e profundidade.

Assim, quando vamos representar um objeto em uma folha de papel, que tem apenas duas dimensões, para dar a ideia de profundidade, é necessário utilizar uma técnica de representação tridimensional chamada **perspectiva**.

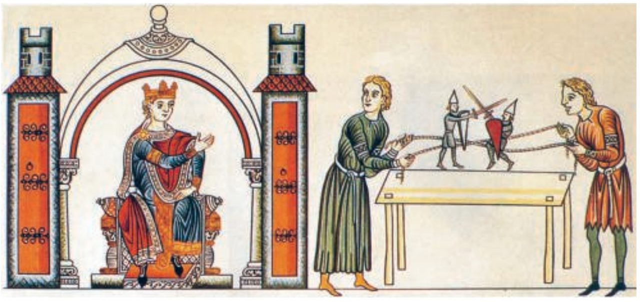
Essa técnica consiste em representar, por meio de conceitos geométricos, um objeto no plano de modo a parecer que ele possui três dimensões. Com o uso da perspectiva, é possível representar os objetos de uma mesma cena com profundidades diferentes.

Observe as imagens a seguir.

Tridimensional › que tem três dimensões.


serato/Shutterstock.com/Salas de Rafael, Museus Vaticanos, Vaticano

**A Escola de Atenas**. 1509-1510. Raffaello Sanzio. Afresco.


Reprodução/Coleção particular

**Lutando com fantoches de cavaleiros**. 1167-1185. Herrad de Landsberg. Iluminura.

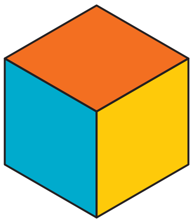
**Em qual das pinturas acima foi utilizado o recurso da perspectiva?**

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam a primeira imagem, da pintura **A Escola de Atenas**, pois ela dá a ideia de profundidade.

Observe, a seguir, duas diferentes representações de um mesmo cubo.

I

II


Ilustrações: Ronaldo Lucena

Perceba que a representação **II** dá a ideia de profundidade e de tridimensionalidade. Isso ocorre porque foi utilizada a técnica de desenho em perspectiva para sua composição.

**BNCC em foco**

- As representações em perspectiva foram um marco do Renascimento, que, dentre outras abrangências, pode ser visto como um movimento cultural de extrema importância para a História da Arte, ocorrido no século XVI. Apresentar referências artísticas aos alunos é uma maneira de trabalhar com a **Competência geral 3** e contribuir para a formação intelectual e criativa deles, ajudando-os a formular sua interpretação sobre as obras e os períodos históricos e desenvolver seu senso estético.

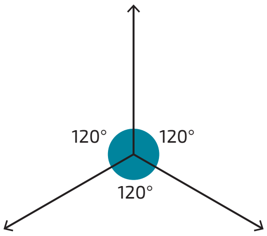
  Nesse sentido, o conteúdo abordado nessa página contextualiza o estudo da Matemática e demonstra sua relevância, apresentando a técnica da perspectiva.

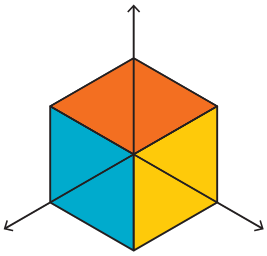
**Relacionando saberes**

- Aproveite o assunto das técnicas em perspectiva e faça uma relação com o componente curricular **Arte**, de maneira que o professor responsável possa contribuir com informações sobre as técnicas e dizer em quais situações artísticas essas perspectivas são comumente utilizadas. Tendo em vista que a fotografia apresentada nessa página traz a cidade de Burano, na Itália, peça ao professor que destaque também o valor desse país na produção artística ocidental.

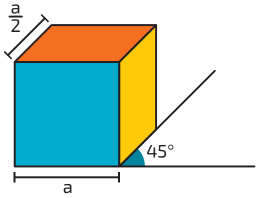
Existem diferentes técnicas de desenho em perspectiva, dentre as quais destacamos as seguintes: **isométrica**, **cavaleira** e **cônica**.

Na perspectiva **isométrica**, a impressão que temos é de como se o objeto tivesse sido posicionado em um sistema de eixos que formam entre si um ângulo com medida de 120°. A malha triangular, formada por triângulos equiláteros, é um recurso que auxilia no esboço de desenhos em perspectiva isométrica.





Na perspectiva **cavaleira**, uma das vistas do objeto não sofre distorções. Por exemplo, criando uma representação do cubo nessa perspectiva e tomando a face azul como a vista frontal, essa face não seria distorcida. Já a face superior laranja seria representada por um paralelogramo, assim como a face lateral amarela. Nesse tipo de representação, é preciso manter uma relação entre o ângulo de inclinação em que o objeto é observado e a proporção entre as medidas dos comprimentos das arestas.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

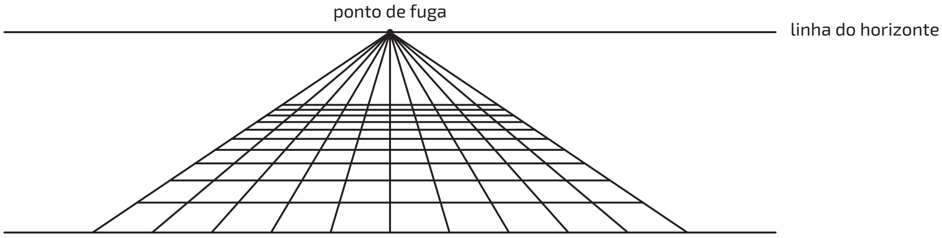
Esses dois tipos de perspectiva são utilizados em ilustrações técnicas.

Agora, observe a fotografia a seguir.

ver0nicka/Shutterstock.com

Prédios coloridos em Burano, na Itália, em 2017.

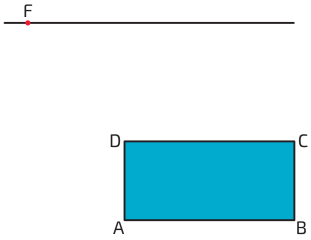
A perspectiva em uma representação que mais se aproxima de um efeito parecido com o da fotografia é a **cônica**. Essa técnica é aplicada a partir de retas e um **ponto de fuga** sobre uma dessas retas, denominada **linha do horizonte**.



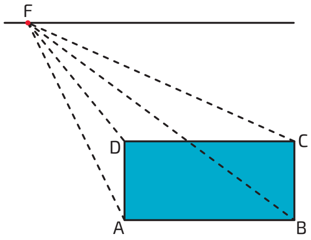
Observe alguns passos para representar um paralelepípedo retângulo em perspectiva cônica, a partir de sua vista frontal.

1. Traçamos a linha do horizonte e marcamos o ponto de fuga **F** sobre ela. Desenhamos o retângulo ABCD. Nesse exemplo, o objeto está posicionado abaixo da linha do horizonte e à direita do ponto de fuga.
2. Construímos os segmentos que ligam cada um dos vértices do retângulo ao ponto de fuga. Na imagem, indicamos pela linha pontilhada.
3. Traçamos um segmento paralelo a $\overline{AD}$, um paralelo a $\overline{BC}$, um paralelo a $\overline{CD}$ e outro paralelo a $\overline{AB}$, formando um outro retângulo ao fundo cujos vértices pertencem aos segmentos traçados no passo **2**.
4. Reforçamos os segmentos que representam as arestas do paralelepípedo e apagamos as linhas excedentes, a linha do horizonte e o ponto de fuga.

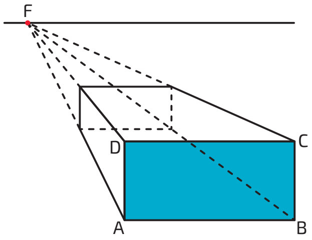
**Passo 1**



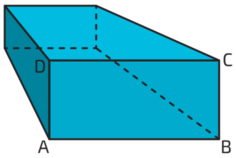
**Passo 2**



**Passo 3**



**Passo 4**



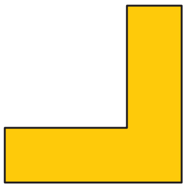
Ilustrações: Ronaldo Lucena

## Atividades

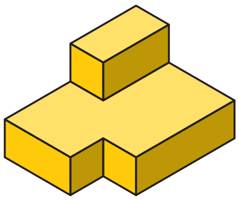
Anote no caderno

**12.** Em quais itens a seguir a representação está em perspectiva? b e c

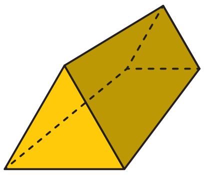
**a)**



**b)**



**c)**



Ilustrações: Ronaldo Lucena

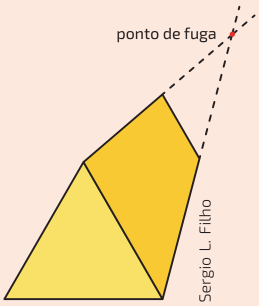
- Para o trabalho com essa página, peça aos alunos que realizem a construção indicada no passo a passo. Se necessário, leve algumas réguas para a sala de aula e possibilite que eles façam a atividade em duplas, contribuindo para a interação e a troca de experiências. Em seguida, solicite que construam outras figuras utilizando a perspectiva cônica.

### Avaliação

- Enquanto os alunos resolvem as atividades propostas a partir dessa página, observe como estão lidando com o conteúdo estudado e quais habilidades desenvolveram. Para isso, ande pela sala de aula e converse com eles durante a resolução das questões, fazendo perguntas para verificar suas estratégias de solução dos problemas. Com base nisso, analise suas práticas em sala de aula, enfatizando em quais aspectos elas podem estar contribuindo com a aprendizagem dos alunos e, caso julgue necessário, modifique-as para cumprir com os objetivos.

**Resposta**

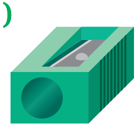
**16.** Possível resposta:



Sergio L. Filho

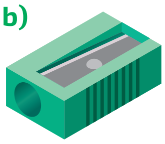
**13.** Identifique, entre as imagens abaixo, qual foi construída na perspectiva cônica, qual foi construída na perspectiva cavaleira e qual foi construída na perspectiva isométrica.

**a)**



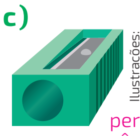
perspectiva cavaleira

**b)**



perspectiva isométrica

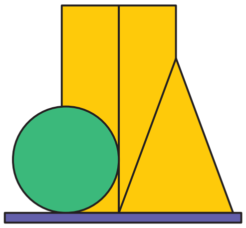
**c)**



perspectiva cônica

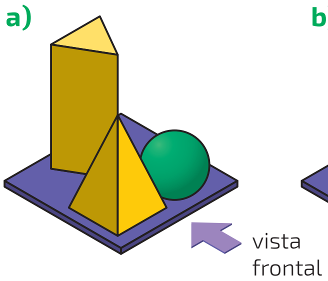
Ilustrações: Caio Tanaka

**14.** Veja ao lado a representação que Henrique desenhou da vista frontal de uma composição de figuras geométricas espaciais.

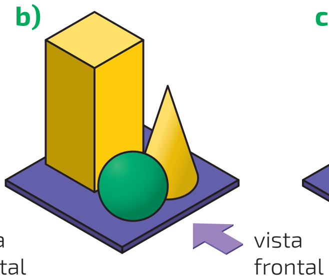


Entre as composições de figuras geométricas espaciais abaixo, qual delas é a que Henrique observou para fazer seu desenho? c

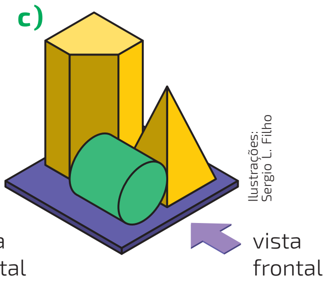
**a)**



**b)**



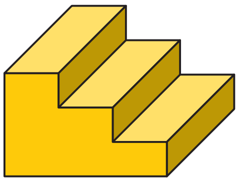
**c)**



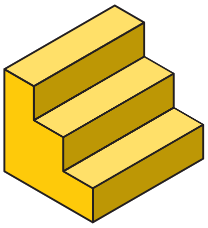
Ilustrações: Sergio L. Filho

**15.** Qual das figuras a seguir é uma representação em perspectiva cônica? c

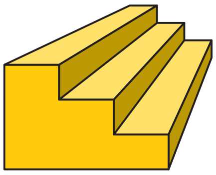
**a)**



**b)**

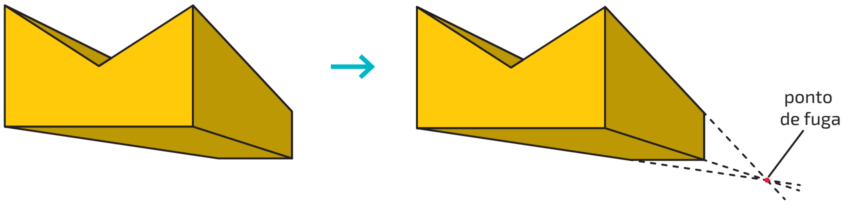


**c)**



Ilustrações: Ronaldo Lucena

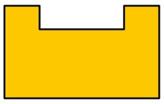
**16.** A partir de uma representação em perspectiva cônica parecida com a construída na página anterior, é possível obter o ponto de fuga prolongando as representações de algumas das arestas laterais e marcando o ponto de interseção entre elas, conforme apresentado abaixo.



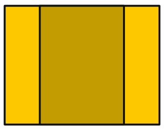
Ilustrações: Ronaldo Lucena

Tomando um triângulo como a vista frontal de uma figura tridimensional, construa sua representação em perspectiva cônica, apagando as linhas excedentes e o ponto de fuga ao final. Em seguida, troque com um colega para que ele determine o ponto de fuga. Resposta nas orientações ao professor.

**17.** A partir das vistas ortogonais frontal, lateral direita e superior apresentadas a seguir, Pedro desenhou em seu caderno um poliedro em perspectiva cônica.

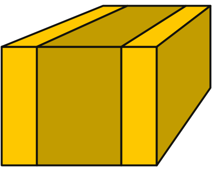

Vista frontal.


Vista lateral direita.

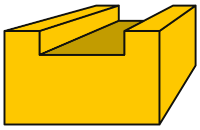

Vista superior.

Qual dos desenhos a seguir corresponde a esse poliedro? b

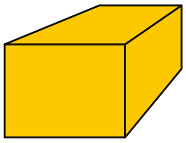
**a)**



**b)**

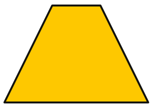


**c)**

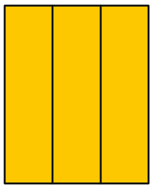


Ilustrações: Ronaldo Lucena

**18.** Represente uma figura geométrica espacial em perspectiva cônica, com base nas vistas apresentadas a seguir.
Resposta nas orientações ao professor.


Vista frontal.

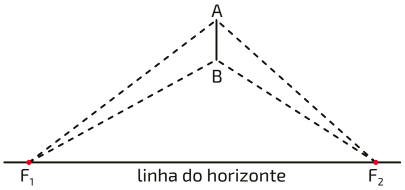

Vista lateral esquerda.


Vista superior.

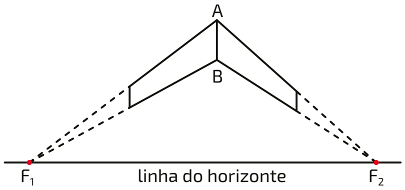
Ilustrações: Ronaldo Lucena

**19.** Outra técnica de desenho bastante utilizada na criação de projetos arquitetônicos e no *design* de interiores é a perspectiva central com dois pontos de fuga. Ela consiste basicamente em compor dois pontos de fuga sobre a linha do horizonte. Veja o passo a passo de como construir um paralelepípedo retângulo usando essa técnica.

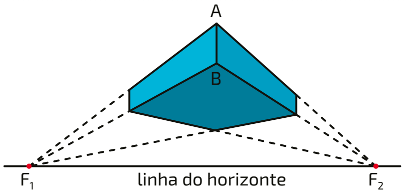
**I** Traçamos a linha do horizonte com dois pontos de fuga ($F_1$ e $F_2$) e a aresta frontal do paralelepípedo. Ligamos as extremidades da aresta aos pontos de fuga.



**II** Construímos dois segmentos paralelos à aresta, um com extremidades em $\overline{AF_1}$ e $\overline{BF_1}$ e o outro com extremidades em $\overline{AF_2}$ e $\overline{BF_2}$.



**III** Ligamos as extremidades dos segmentos construídos no passo **II** aos pontos de fuga.

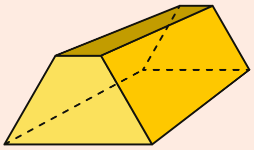


Ilustrações: Ronaldo Lucena

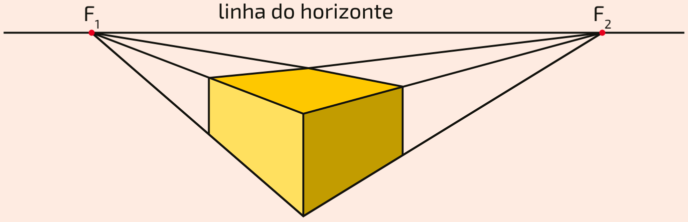
Agora, usando a perspectiva central com dois pontos de fuga, desenhe em seu caderno um paralelepípedo retângulo, de modo que a aresta frontal esteja abaixo da linha do horizonte. Resposta nas orientações ao professor.

## Respostas

**18.** Possível resposta:



**19.** Possível resposta:



Ilustrações: Sergio L. Filho

**BNCC em foco**

- A partir dessa página, o objetivo será desenvolver nos alunos a habilidade de resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos em situações cotidianas, utilizando, inclusive, expressões de cálculo, o que vai ao encontro do que orienta a habilidade **EF09MA19**.

**Avaliação**

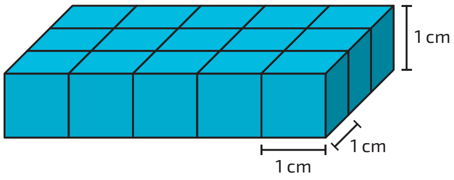
- Realize uma avaliação com os alunos durante o estudo dos conceitos de volume. Procure criar situações de diálogo questionando-os sobre as unidades de medida de volume mais utilizadas. Caso identifique dificuldades, verifique a possibilidade de retomar os conteúdos estudados no capítulo **12** do volume do **7º** ano dessa coleção.

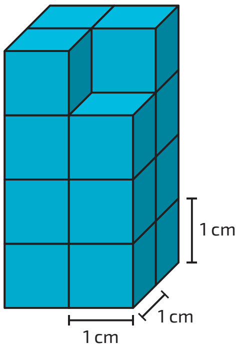
# Medidas de volume

As pilhas a seguir foram construídas com cubos cuja medida do comprimento da aresta é 1 cm.

O **centímetro cúbico** é uma das principais unidades de medida de volume, assim como o **decímetro cúbico** e o **metro cúbico**.

Um cubo cuja medida do comprimento da aresta é 1 cm tem medida de volume igual a 1 $cm^3$. Já outros dois cubos cujas medidas dos comprimentos das arestas são 1 dm e 1 m têm as medidas dos volumes iguais a 1 $dm^3$ e 1 $m^3$, respectivamente.



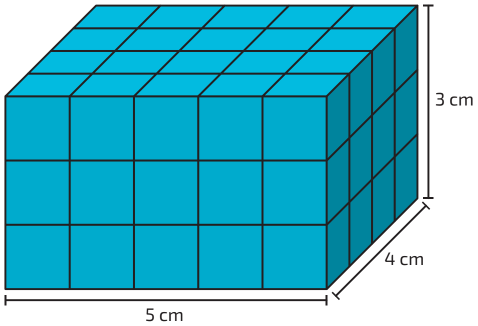


Ilustrações: Sergio L. Filho

**Determine a medida do volume das pilhas de cubos apresentadas.**
Todas têm medida do volume igual a 15 $cm^3$.

# Medida do volume de paralelepípedos retângulos

Agora observe o paralelepípedo retângulo formado por cubos iguais aos das pilhas acima.



Ronaldo Lucena

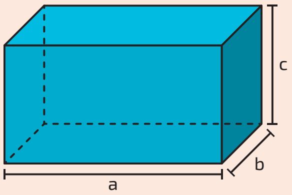
Podemos calcular a medida do volume dessa figura multiplicando a quantidade de cubos em cada camada pela quantidade de camadas.

$$V = \underbrace{5 \cdot 4}_{\text{quantidade de cubos em uma camada}} \cdot \underbrace{3}_{\text{quantidade de camadas}} = 60$$

Assim, a medida do volume desse paralelepípedo retângulo é 60 $cm^3$.

A medida do volume **V** de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são **a**, **b** e **c** é igual à medida da área da base multiplicada pela medida da altura, ou seja:

$$V = \underbrace{a \cdot b}_{\text{medida da área da base}} \cdot \underbrace{c}_{\text{altura}}$$



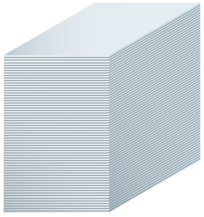
Sergio L. Filho

No caso do paralelepípedo retângulo com as arestas de mesma medida de comprimento, ou seja, o cubo, a medida do volume pode ser calculada por:

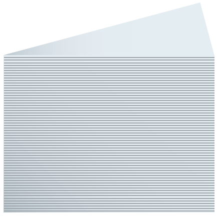
$V = a^3$, sendo **a** a medida do comprimento da aresta.

## Medida do volume de prismas

Considere dois tipos de folha de papel de mesma espessura e com mesma medida de área, sendo um retangular e outro triangular. Se construirmos duas pilhas, uma com as folhas de papel retangulares e outra com as triangulares, utilizando a mesma quantidade de folhas, obteremos duas formas que lembram figuras geométricas espaciais com mesma medida de volume, ou seja, um paralelepípedo retângulo e um prisma de base triangular.



Pilha de folhas de papel em formato retangular, o que faz lembrar um paralelepípedo retângulo.

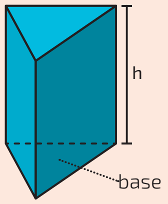


Pilha de folhas de papel em formato triangular, o que faz lembrar um prisma de base triangular.

Com base nessa ideia, podemos obter uma fórmula para calcular a medida do volume de um prisma da mesma maneira que obtemos a do paralelepípedo retângulo, ou seja, multiplicando a medida da área da base pela medida da altura.

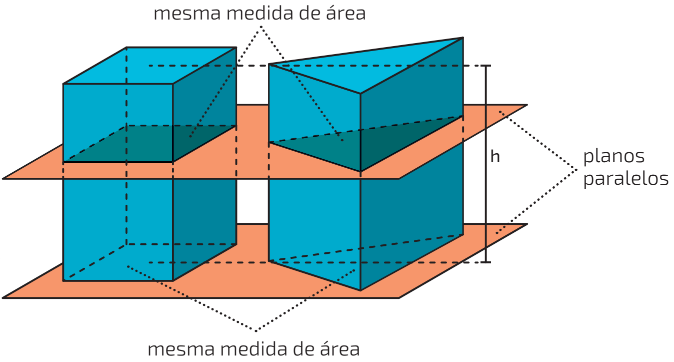
A medida do volume **V** de um prisma cujas medidas da área da base é $A_b$ e da altura é **h** é dada por:

$$V = \underbrace{A_b}_{\text{medida da área da base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{altura}}$$



Essa propriedade baseia-se no princípio de Cavalieri.

Considere duas figuras geométricas espaciais quaisquer com a mesma medida de altura **h**, apoiadas em um mesmo plano. Se todo plano que for paralelo ao plano em que as figuras estão apoiadas e que cruza essas figuras determina regiões planas de mesma medida de área, então essas figuras têm a mesma medida de volume.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

- Veja mais informações sobre o princípio de Cavalieri.

[...] princípios de Cavalieri:

*1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.*

*2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.*

Os princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno. Com a aceitação desses princípios como evidentes, intuitivamente, podem-se resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requereriam técnicas avançadas de cálculo.

[...]

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 425-426

**Avaliação**

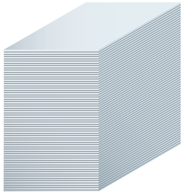
- Antes de iniciar o trabalho com essa página, realize uma avaliação com a intenção de identificar os conhecimentos prévios dos alunos. Para isso, proponha as questões abaixo.
- Enquanto os alunos respondem as questões propostas, observe como eles lidam com os cálculos da medida da área de um círculo, da medida do comprimento de uma circunferência e se diferenciam círculo de circunferência e diâmetro de raio, pois estes conceitos serão fundamentais para o estudo das próximas páginas.

- Calcule a medida da área de um círculo com raio de comprimento medindo 2 m.
  Ⓡ 12,56 $m^2$
- Determine a medida da área de um círculo cuja circunferência tem 50,24 cm de comprimento.
  Ⓡ 200,96 $cm^2$

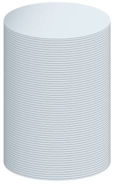
# Medida do volume de cilindros

Utilizando a ideia do princípio de Cavalieri, também podemos obter uma fórmula para calcular a medida do volume do cilindro. Imagine agora dois tipos de folha de papel de mesma espessura e com mesma medida de área, sendo um retangular e outro com formato de círculo. Ao construírmos duas pilhas, uma com as folhas de papel retangulares e outra com as de formato de círculo, utilizando a mesma quantidade de folhas, obteremos duas formas que lembram figuras geométricas espaciais com mesma medida de volume, ou seja, um paralelepípedo retângulo e um cilindro.

Ilustrações: Ronaldo Lucena



Pilha de folhas de papel em formato retangular, o que faz lembrar um paralelepípedo retângulo.



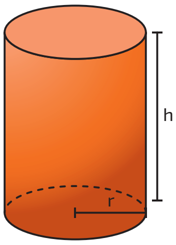
Pilha de folhas de papel em formato de círculo, o que faz lembrar um cilindro.

Baseando-se nessa ideia, a fórmula para calcular a medida do volume de um cilindro pode ser obtida da mesma maneira que obtemos a do bloco retangular, ou seja, multiplicando a medida da área da base pela medida da altura.

A medida da área da base do cilindro abaixo é dada por $A_b = \pi \cdot r^2$, em que **r** é a medida do comprimento do raio da base do cilindro. Assim, a medida do volume **V** do cilindro é dada por:

$$V = \underbrace{A_b}_{\text{medida da área da base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{medida da altura}}$$

$$V = \pi r^2 \cdot h$$



Sergio L. Filho

## Atividades

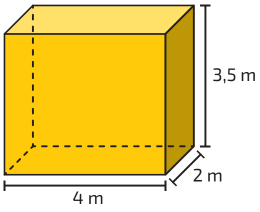
Anote no caderno

Nas atividades dessa seção, as medidas indicadas nos cilindros ou nos objetos que lembram cilindros referem-se à medida do comprimento do raio ou do diâmetro de sua base e, também, à medida de sua altura. Além disso, quando necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

**20.** Calcule a medida do volume de cada uma das figuras geométricas espaciais a seguir.

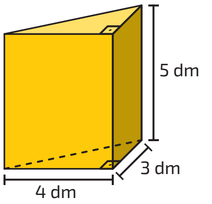
**a)** 28 $m^3$

Ilustrações: Ronaldo Lucena



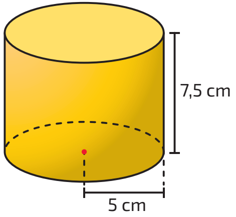
Paralelepípedo retângulo.

**b)** 30 $dm^3$



Prisma de base triangular.

**c)** 588,75 $cm^3$

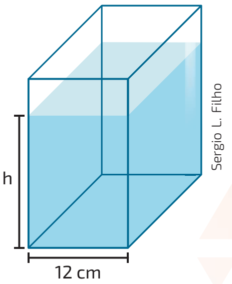


Cilindro.

**Material digital**

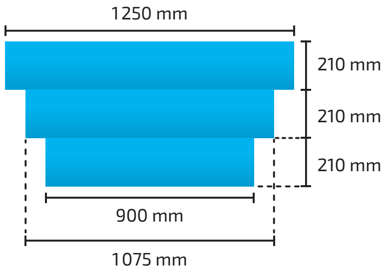
- Após trabalhar com o tópico **Medida do volume de cilindros**, verifique a possibilidade de trabalhar com a **Sequência didática 12**, disponibilizada no material digital dessa coleção, elaborada com o objetivo de desenvolver a habilidade **EF09MA19**. Essa sequência apresenta atividades que possibilitam identificar e diferenciar prismas e cilindros, reconhecendo seus elementos e, também, propõe a resolução de problemas envolvendo o cálculo da medida do volume de prismas e cilindros.

**21.** Um recipiente com formato de paralelepípedo retângulo está com 4 500 $cm^3$ de água. Caso sejam despejados nesse recipiente mais 900 $cm^3$ de água, o nível da água aumentará 3 cm. Qual a medida da altura **h**? 15 cm



Sergio L. Filho

**22.** Observe no esquema abaixo as medidas das dimensões aproximadas de uma caixa-d'água circular.

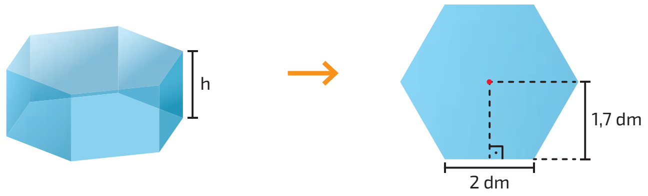


Ilustrações: Bárbara Sarzi

Qual é a medida aproximada da capacidade dessa caixa-d'água, em litros? 581,6 L

Lembre-se de que 1 $dm^3$ = 1 L.

**23.** Maurício fará um aquário com formato de prisma cuja base é um hexágono regular.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

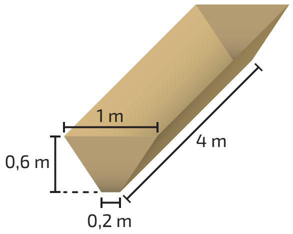
Qual deve ser a medida aproximada da altura **h** do aquário se, para enchê-lo totalmente, serão necessários 15 $dm^3$ de água? 1,47 dm

**24.** Calcule a medida da altura e a medida do comprimento do raio da base de um cilindro com volume medindo 169,56 $cm^3$, sabendo que a medida de sua altura é igual à medida do comprimento do diâmetro de sua base.

altura: 6 cm; raio: 3 cm

**25.** Marina comprou 2 $m^3$ de terra orgânica para colocar nos canteiros de sua casa. Ela despejou parte dessa terra até encher o canteiro, representado abaixo.

O restante da terra ela despejou igualmente em três outros canteiros em formato cúbico, com comprimento da aresta interna medindo 0,6 m. Qual a medida do volume de terra que ainda falta para ela poder encher esses três canteiros cúbicos completamente? 0,088 $m^3$



Ronaldo Lucena

- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **21**:

A cada 900 $cm^3$ de água, a medida da altura aumenta 3 cm; dessa maneira, com 4 500 $cm^3$, a medida da altura será:

$$\frac{4500}{900} = \frac{h}{3}$$
$$13\,500 = 900h$$
$$h = 15$$

Portanto, a medida da altura é 15 cm.

- Na atividade **22**, peça aos alunos que convertam as medidas em mm para dm (1 dm = 100 mm).
- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **24**:

$V = \pi r^2 \cdot h$, porém $r = \frac{h}{2}$; sendo assim:

$$\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h = 169{,}56$$
$$h^3 = \frac{169{,}56 \cdot 4}{\pi}$$
$$h^3 = \frac{678{,}24}{3{,}14}$$
$$h^3 = 216$$
$$h = 6$$

Como $r = \frac{h}{2}$, então $r = 3$.

Portanto, a medida da altura é 6 cm e a medida do comprimento do raio é 3 cm.

- Veja um possível problema que pode ser elaborado pelos alunos na atividade **26**:
  - Com a quantidade de água presente nessa jarra, é possível encher os três copos? Sobrará ou faltará água? Caso sobre ou falte, determine quantos centímetros cúbicos.

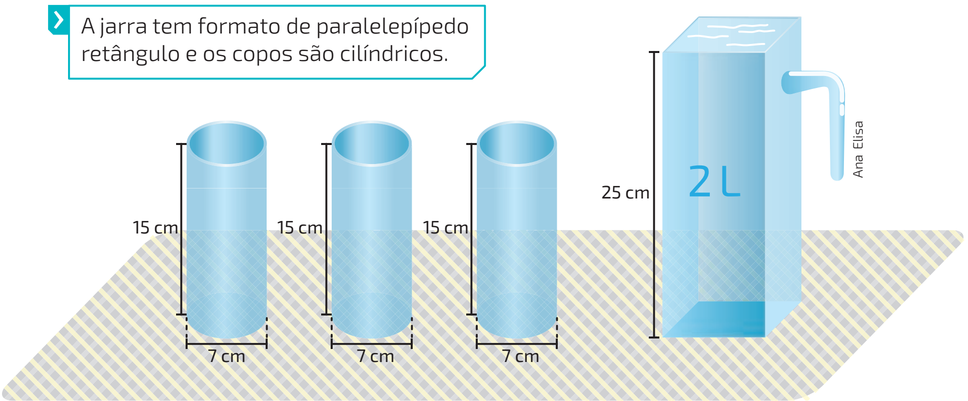
    Ⓡ sim; sobrará; $269{,}075\ \text{cm}^3$
- Veja uma possível resolução do desafio proposto na atividade **28**:
  - Medida do volume de água no recipiente:

    $V = \pi \cdot \left(\frac{30}{2}\right)^2 \cdot 58 =$

    $= 13\,050\pi = 40\,977$, aproximadamente $40\,977\ \text{cm}^3$.
  - Como restaram no recipiente $27{,}477\ \text{L} =$ $= 27{,}477\ \text{dm}^3 =$ $= 27\,477\ \text{cm}^3$, temos que a medida do volume da barra corresponde à quantidade de água que transbordou, dada por:
  - $40\,977 - 27\,477 =$ $= 13\,500$, ou seja, $13\,500\ \text{cm}^3$.

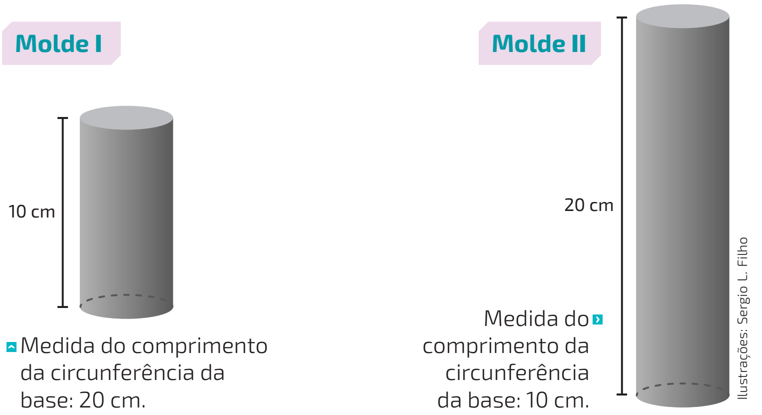
**26.** Com base na imagem abaixo, elabore um problema que envolva o conceito de volume e dê para um colega resolver. Em seguida, peça que ele lhe explique qual foi sua estratégia de resolução e verifique se o que ele fez está correto. Resposta pessoal.

A jarra tem formato de paralelepípedo retângulo e os copos são cilíndricos.



Ana Elisa

**27.** José está interessado em confeccionar pesos de cimento em formato cilíndrico e, para isso, ele usará dois tipos de moldes.



Medida do comprimento da circunferência da base: 20 cm.

Medida do comprimento da circunferência da base: 10 cm.

Ilustrações: Sergio L. Filho

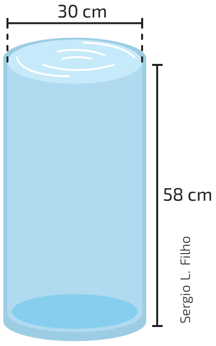
Supondo que o custo da confecção de cada peso seja diretamente proporcional à medida do volume de cimento utilizado, qual dos dois pesos custará mais a José? Quanto a mais? O peso confeccionado a partir do molde I. O dobro.

**28.** Junte-se a um colega e observem as medidas internas do recipiente cilíndrico cheio de água.

Se colocarmos nesse recipiente certa barra de ferro, ela ficará totalmente submersa e a água transbordará, restando no recipiente 27,477 L.

Qual a medida do volume, em centímetros cúbicos, dessa barra de ferro? $13\,500\ \text{cm}^3$

Lembre-se de que $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$.



Sergio L. Filho

## Material digital

O material digital dessa coleção apresenta o projeto **Animais abandonados**, que possibilita a integração com os componentes curriculares **Arte** e **Língua Portuguesa**, além do trabalho com alguns dos temas contemporâneos destacados na BNCC, sobretudo **Educação ambiental**. Esse projeto visa promover a conscientização com relação ao abandono de animais e, também, acerca do uso de materiais recicláveis na construção de abrigos para esses animais.

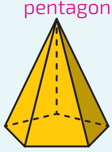
## Explorando o que estudei

Anote no caderno

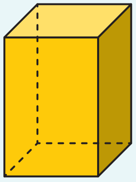
**1.** Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo?
figuras geométricas espaciais, representação de poliedros em malhas, vistas ortogonais, representações em perspectiva, medida do volume de prismas e cilindros

**2.** Nomeie cada figura geométrica espacial a seguir e, depois, responda aos itens.

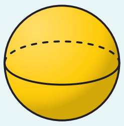
**I)** pirâmide de base pentagonal



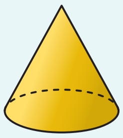
**II)** paralelepípedo retângulo



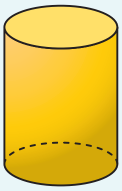
**III)** esfera



**IV)** cone



**V)** cilindro



Ilustrações: Sergio L. Filho

Qual das figuras acima tem alguma vista ortogonal que é:

**a)** um triângulo? IV

**b)** um círculo? III; IV; V

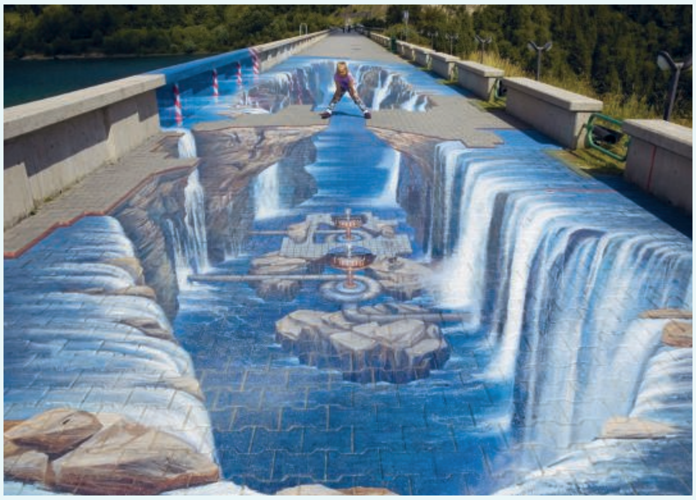
**c)** um retângulo? II; V

**d)** um hexágono? nenhuma

**e)** um pentágono? I

**3.** Faça um desenho livre em perspectiva cônica. Resposta pessoal.

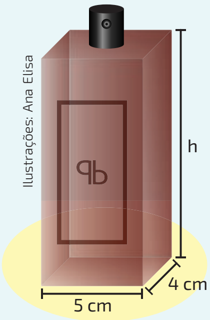
**4.** Em sua opinião, a fotografia a seguir teria o mesmo efeito visual se a pessoa que a tirou estivesse em outra posição?
Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que não.

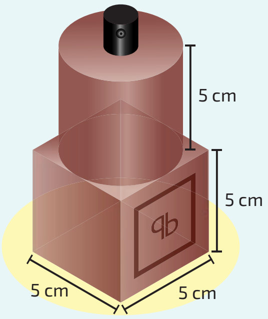


Ilusão de ótica em perspectiva, em Niedzica, na Polônia, em 2013.

Mariusz Switulski/Shutterstock.com
© Warsinski, Ryszard/AUTVIS, Brasil, 2018

**5.** Observe dois tipos de frascos de perfume que uma loja comercializa. Um deles em formato de paralelepípedo retângulo e o outro composto por uma parte cilíndrica e outra com formato de paralelepípedo retângulo.





Ilustrações: Ana Elisa

Qual deve ser a medida da altura aproximada do frasco em formato de paralelepípedo retângulo, de modo que a capacidade dos dois frascos seja a mesma? 11,16 cm

### Avaliação

- A seção **Explorando o que estudei** pode contribuir como ferramenta de avaliação dos alunos. Observe e anote como eles lidam com os conceitos exigidos para responder às questões propostas e quais dificuldades apresentam. Dessa maneira, pondere sobre realizar um resumo do conteúdo estudado com a turma, de modo a contribuir com aqueles que apresentaram alguma dificuldade. Esse momento também pode ser útil para uma reflexão sobre as ações empregadas no trabalho com o capítulo, de modo a identificar possíveis falhas e acertos na condução e dar subsídios para confirmá-las ou modificá-las para as próximas aulas.

### Material digital

- Antes de prosseguir com os estudos e, se julgar oportuno, avalie a aprendizagem dos alunos em relação a algumas habilidades trabalhadas no decorrer desse bimestre. O material digital apresenta uma proposta de avaliação para o 4º bimestre que pode ser utilizada neste momento como ferramenta auxiliar do processo de ensino e aprendizagem.

**BNCC em foco**

- Na seção **Explorando tecnologias**, propomos algumas construções que envolvem a resolução de problemas por meio de tecnologias digitais de informação e comunicação, conforme orienta a **Competência específica de Matemática 5**. Com isso, é esperado que os alunos compreendam as tecnologias apresentadas e as utilizem de forma crítica e significativa em sua vida, tanto pessoal quanto coletiva, incluindo as práticas escolares.

- Nessa seção, são utilizados *softwares* livres que podem ser baixados em qualquer computador, sendo um deles de geometria dinâmica, o GeoGebra, e uma planilha eletrônica, o Calc do pacote LibreOffice.
- Durante o trabalho com essa seção, os conteúdos de Matemática que podem ser trabalhados são: função afim, homotetia, relações trigonométricas no triângulo retângulo, arcos e ângulos na circunferência, polígonos regulares, juro simples e juro composto, estatística, entre outros.
- Oriente os alunos a abrirem uma nova janela do programa ao iniciar cada tópico.

# Explorando tecnologias

Os constantes avanços tecnológicos são notados pelas versões de equipamentos eletrônicos lançadas praticamente todos os dias, além das novas linguagens e programas computacionais.

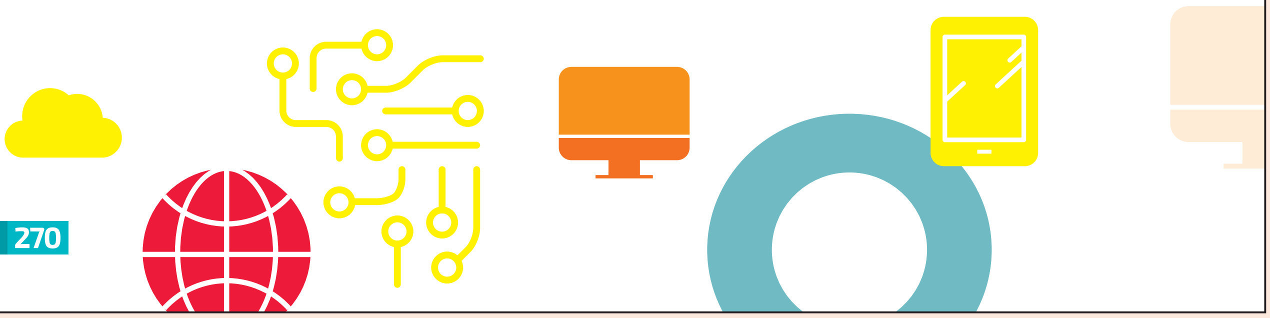
As gerações atuais, já inseridas na cultura digital, de modo geral, lidam facilmente com esses avanços. Entretanto, é necessário que desenvolvam habilidades cada vez mais refinadas e específicas para destacarem-se no mundo do trabalho, que também tem sido muito influenciado pela tecnologia.

Compreender e utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) é imprescindível para se comunicar por meio das diferentes linguagens e mídias, produzir conhecimentos, resolver problemas e desenvolver projetos autorais e coletivos.

Nesta seção, indicamos possibilidades de utilização de alguns programas computacionais que contribuem para a visualização e a verificação de propriedades matemáticas, uma vez que permitem construções e efeitos pouco viáveis de serem realizados apenas com lápis, papel e instrumentos físicos de medição e desenho. Com isso, esperamos ampliar o repertório de utilização das tecnologias digitais, a fim de favorecer a capacidade de se comunicar e resolver problemas por meio de alguns recursos tecnológicos disponíveis gratuitamente.

Convidamos você para conhecer e explorar o uso de tais recursos computacionais e experimentar, de diferentes maneiras, os conteúdos matemáticos presentes em seu livro, o que torna o estudo mais interessante e dinâmico.

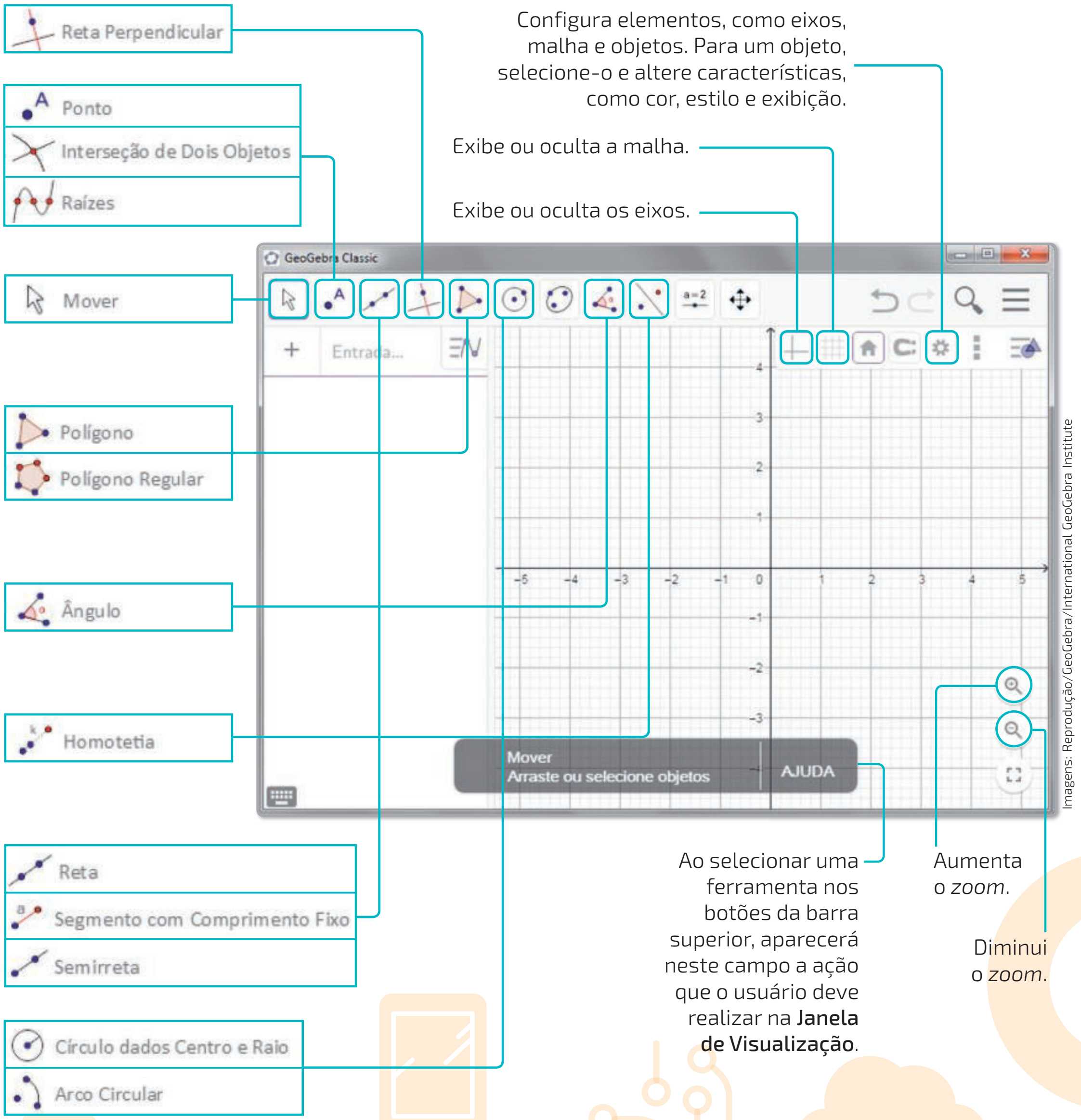
Sumário



# GeoGebra

GeoGebra é um programa computacional gratuito que combina recursos de construções geométricas, algébricas, gráficos, tabelas e cálculos. Sua interface é simples e exibe comandos para realizar diferentes tipos de construções. Para fazer o *download* e instalá-lo, basta acessar o endereço eletrônico <www.geogebra.org>. Acesso em: 24 ago. 2018. O *site* também possui informações e materiais de apoio para a utilização do programa.

Veja algumas ferramentas do GeoGebra que serão úteis nesta seção.



Configura elementos, como eixos, malha e objetos. Para um objeto, selecione-o e altere características, como cor, estilo e exibição.

Exibe ou oculta a malha.

Exibe ou oculta os eixos.

Ao selecionar uma ferramenta nos botões da barra superior, aparecerá neste campo a ação que o usuário deve realizar na **Janela de Visualização**.

Aumenta o *zoom*.

Diminui o *zoom*.

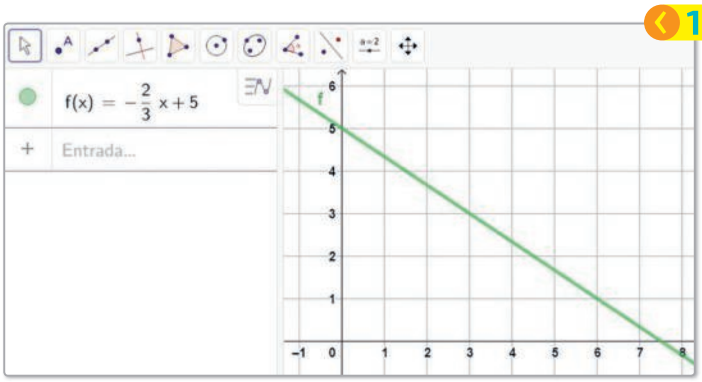
Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

- As construções dos tópicos das páginas **272** a **278**, que apresentam imagens obtidas do GeoGebra, foram realizadas utilizando a versão **6.0.487.0-offline** do programa.
- A janela do programa apresentada nessa página está dividida em duas partes principais, a **Janela de Álgebra**, em que são indicadas as representações aritméticas e algébricas, como coordenadas de pontos e equações, e a **Janela de Visualização**, onde aparecem as representações gráficas dos objetos.
- Nas construções previstas para o GeoGebra nesse volume, em alguns tópicos utilizamos apenas a **Janela de Visualização** e, em outros, também a **Janela de Álgebra**. Assim, para desabilitar alguma dessas janelas, clique sobre o botão ☰ e, em **Exibir**, deixe marcadas apenas as opções desejadas.
- Se possível, realize uma leitura dessa página com os alunos. Comente com eles que, na imagem apresentada, como a ferramenta **Mover** está selecionada, o comando que o usuário deve realizar está descrito na parte inferior da **Janela de Visualização**: "Arraste ou selecione objetos". Para verificar como eles podem utilizar as demais ferramentas, oriente-os a selecionar as ferramentas desejadas e ler as informações que são exibidas.
- Ressalte também que é preciso clicar no botão ≡△ para que seja aberta a aba em que aparecem as configurações de malha, eixos e configuração de objetos.

- Inicialmente, oriente os alunos a exibirem a **Janela de Visualização** e a **Janela de Álgebra**. Para isso, veja o comentário da página **271**, nas orientações ao professor.
- Antes da realização do passo **1**, diga aos alunos para configurarem a malha quadriculada da seguinte maneira: clique no botão ⚙ e, na aba **Malha**, selecione a opção **Malha Principal** em **Tipo de malha**. Caso a malha esteja desabilitada, oriente-os a selecionar a opção **Exibir Malha** na mesma aba. Além disso, oriente-os a habilitar a opção que exibe os eixos, como indicado na página **271**, caso eles não estejam exibidos.

## Função afim

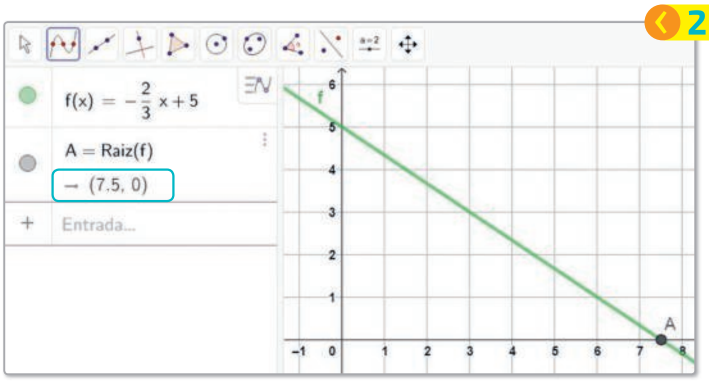
Nesse tópico, vamos construir o gráfico da função afim **f** dada por $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$. Além disso, vamos determinar o zero dessa função e o ponto de interseção entre seu gráfico e o eixo **y**.


f(x) = $-\frac{2}{3}$ x + 5

Entrada...

**1** Para construir o gráfico de uma função afim, digite, no campo **Entrada...** da **Janela de Álgebra**, a lei de formação da função. Nesse caso, $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$.

Ao digitar a fração $-\frac{2}{3}$ no GeoGebra, utilize a tecla que contém o símbolo / do teclado.


f(x) = $-\frac{2}{3}$ x + 5

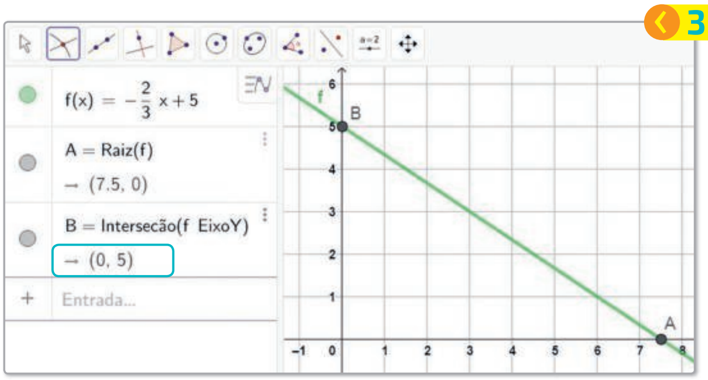
A = Raiz(f)

→ (7.5, 0)

Entrada...

**2** Selecione a ferramenta **Raízes** e clique sobre o gráfico da função **f**. Com isso, será marcado o ponto de interseção, nesse caso **A**, entre o gráfico de **f** e o eixo **x**. A abscissa do ponto **A**, nesse caso 7,5, corresponde ao zero da função **f**. Em alguns casos, o programa pode apresentar valores aproximados do zero de determinada função.

No GeoGebra, o zero de uma função é nomeado raiz.


f(x) = $-\frac{2}{3}$ x + 5

A = Raiz(f)

→ (7.5, 0)

B = Interseção(f EixoY)

→ (0, 5)

Entrada...

Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

**3** Agora, selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, clique sobre o gráfico da função **f** e sobre o eixo **y**. Com isso, será marcado o ponto de interseção entre o gráfico e o eixo **y**, nesse caso **B**.

Respostas nas orientações ao professor.

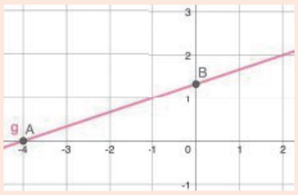
**1.** Calcule f(5) e verifique a sua resposta digitando **f(5)** no campo **Entrada...**.

**2.** Construa o gráfico da função **g** dada por $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ no GeoGebra. Em seguida, marque os pontos de interseção entre o gráfico de **g** e os eixos **x** e **y**, e escreva as coordenadas desses pontos.

### Respostas

**1.** $f(5) = \frac{5}{3}$

**2.** Possível resposta:

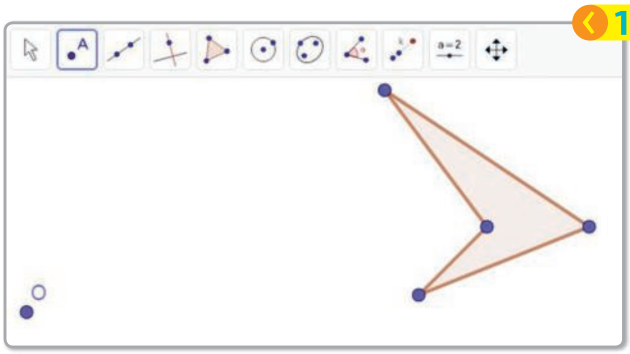


Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

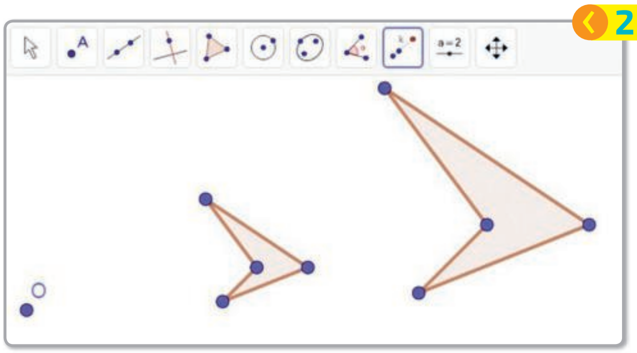
$A(-4, 0); B\left(0, \frac{4}{3}\right);$

# Homotetia

No exemplo desse tópico, vamos construir uma redução na razão 1 : 2 e uma ampliação na razão 3 : 2 de um polígono.

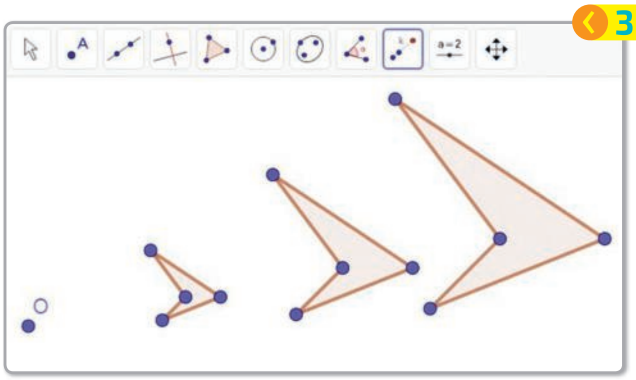


**1** Selecione a ferramenta **Polígono** e construa um polígono qualquer. Depois, marque um ponto, nesse caso **O**, externo ao polígono.



**2** Com a ferramenta **Homotetia**, clique no polígono e, em seguida, no ponto **O**. Na janela que será exibida, digite **1/2** ou **0.5** no campo **Fator**, para construir uma redução do polígono na razão 1 : 2, e clique em **OK**.

$1:2=\frac{1}{2}=0,5$



**3** De maneira parecida, construa uma ampliação do polígono do passo **1** na razão 3 : 2, inserindo o valor **1.5** no campo **Fator**.

Se necessário, modifique o *zoom* da **Janela de Visualização** ou arraste-a para que seja possível visualizar os três polígonos.

Imagens: Reprodução/GeoGebra/ International GeoGebra Institute

Respostas nas orientações ao professor.

**1.** Por que o valor inserido no passo **3** é 1.5?

**2.** Selecione a ferramenta **Semirreta** e construa quatro semirretas com origem em **O**, cada uma passando por um dos quatro vértices do polígono construído no passo **1**. O que você pôde observar?

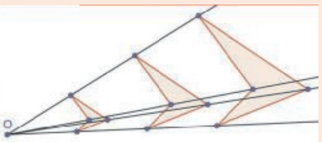
**3.** Construa dois triângulos semelhantes, na razão de semelhança $\frac{2}{5}$, utilizando a ferramenta **Homotetia**.

- Inicialmente, oriente os alunos a deixarem apenas a **Janela de Visualização** sendo exibida. Para isso, veja o comentário da página **271**, nas orientações ao professor. Oriente-os também a ocultarem a malha e os eixos.
- Durante a realização do passo **2**, comente com os alunos que, no GeoGebra, o ponto é utilizado no lugar da vírgula, para separar a parte inteira da parte decimal de um número. Por isso, digitamos 0.5 em vez de 0,5.
- No passo **3**, diga aos alunos para clicarem nos botões destacados na página **271** para aumentar ou diminuir o *zoom* da **Janela de Visualização**, se necessário. Outra possibilidade é utilizar as ferramentas **Ampliar** ou **Reduzir** do programa.
- Ao realizarem a construção proposta na questão **3**, avalie se os alunos perceberam que podem inserir **0.4** no campo **Fator**, que corresponde ao valor 0,4, ou **2/5**, pois $\frac{2}{5}=0,4$.

## Respostas

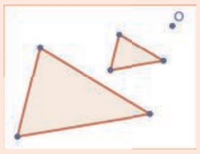
**1.** Porque a razão de semelhança é $\frac{3}{2}=1,5$.

**2.** Possível resposta:



Espera-se que os alunos respondam que as semirretas também passam pelos vértices correspondentes dos outros dois polígonos.

**3.** Possível resposta:

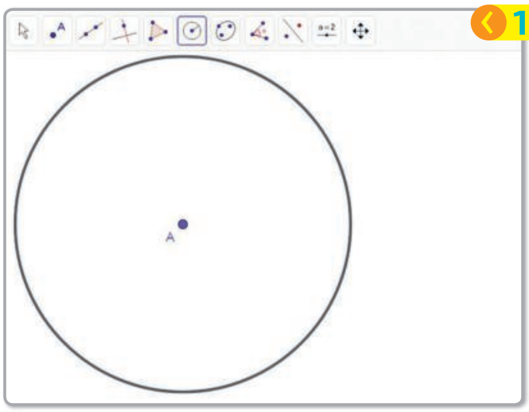


Imagens: Reprodução/GeoGebra/ International GeoGebra Institute

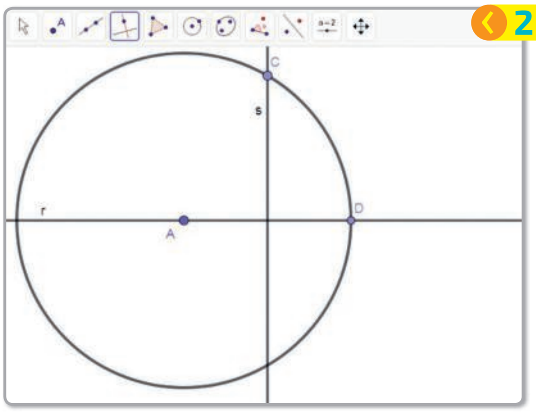
- Se julgar conveniente, auxilie os alunos a alterarem as configurações de arredondamento do GeoGebra. Para isso, oriente-os a clicar nos botões e , sem que algum objeto esteja selecionado, e, na aba , que aparece ao lado direito, alterar a opção **Arredondamento** da maneira desejada.

# Relações trigonométricas no triângulo retângulo

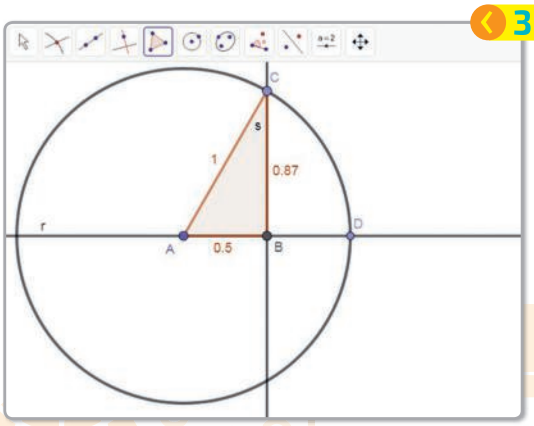
Nesse tópico, vamos construir, no GeoGebra, um triângulo retângulo, com o comprimento da hipotenusa medindo 1 unidade de comprimento (u.c.) e determinar os valores aproximados do seno e do cosseno de um de seus ângulos internos agudos, com base nessa construção. Além disso, calcularemos o valor aproximado da tangente desse ângulo.



**1** Nessa construção, não utilizaremos os eixos e a malha quadriculada. Para obter um triângulo com o comprimento da hipotenusa medindo 1 u.c., primeiro vamos construir uma circunferência com centro **A** e raio com comprimento medindo 1 u.c. Assim, selecione a ferramenta **Círculo dados Centro e Raio** e clique em um ponto na **Janela de Visualização**. Na janela que será exibida, digite **1** no campo **Raio** e clique em **OK**.



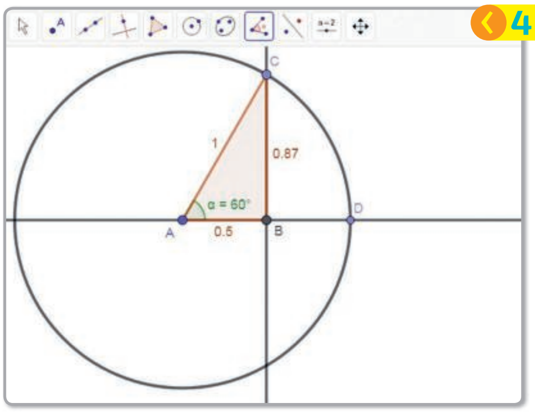
**2** Agora, selecione a ferramenta **Reta**, clique em **A** e sobre um ponto qualquer pertencente à circunferência, nesse caso **D**, para obter a reta **r**. Com a ferramenta **Ponto**, crie um ponto **C** sobre a circunferência, como na imagem ao lado. Em seguida, selecione a ferramenta **Reta Perpendicular**, clique no ponto **C** e na reta **r** para obter a reta **s**, perpendicular à **r**.



**3** Com a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, marque o ponto de interseção entre as retas **r** e **s**, na imagem indicado por **B**. Em seguida, selecione a ferramenta **Polígono** e construa o triângulo ABC, retângulo em **B**, conforme indicado.

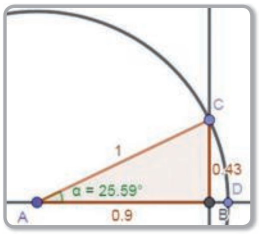
Para exibir as medidas dos comprimentos dos lados do triângulo, selecione cada um deles, clique no botão e, na aba **Básico**, selecione a opção **Valor** no campo **Exibir Rótulo**.

Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute



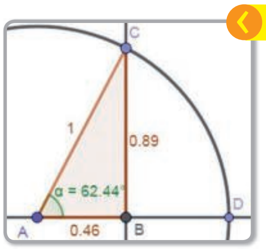
**4** Selecione a ferramenta **Ângulo** e clique em **B**, **A** e **C**, nessa ordem, para obter a medida do ângulo $B\hat{A}C$, indicada por α. Como o comprimento da hipotenusa do triângulo ABC mede 1 u.c. temos:

- $\text{sen}\,\alpha = \frac{BC}{1} = BC$
- $\cos\alpha = \frac{AB}{1} = AB$



sen 25,59° ≃ 0,43

cos 25,59° ≃ 0,9



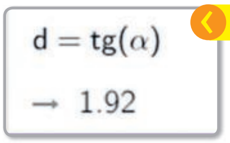
sen 62,44° ≃ 0,89

cos 62,44° ≃ 0,46

**5** Com a ferramenta **Mover** selecionada, mova o ponto **C** para alterar a medida do ângulo e verificar os valores aproximados de seu seno e de seu cosseno. Esse deslocamento do ponto **C** deve ser feito de maneira que a medida de $B\hat{A}C$ seja maior do que 0° e menor do que 90°.

Como a medida do comprimento da hipotenusa de ABC continua sendo 1 u.c., as igualdades do passo anterior sempre são válidas.

Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute



$d = \text{tg}(\alpha)$

→ 1.92

Valor aproximado de tg(α), para α = 62,44°.

**6** Para obter o valor aproximado da tangente do ângulo cuja medida é α, habilite a exibição da **Janela de Álgebra** e, no campo **Entrada...**, digite **tg(α)** e pressione **Enter**. O valor da tangente aparecerá conforme indicado na imagem ao lado. Ao movimentar o ponto **C** e mudar o valor de α, o valor da tangente também se alterará.

Utilize o teclado do GeoGebra para digitar a letra grega α na fórmula da tangente. Para isso, basta clicar no campo **Entrada...** e selecionar o ícone ⌨.

Respostas nas orientações ao professor.

**1.** Por que o seno e o cosseno do ângulo α são iguais às medidas dos comprimentos de $\overline{BC}$ e de $\overline{AB}$, respectivamente?

**2.** Mova o ponto **C** e obtenha o valor aproximado de:

**a)** sen 18° **b)** cos 56° **c)** tg 67°

**3.** Determine a medida aproximada de α em cada item.

**a)** sen α = 0,46 **c)** cos α = 0,22

**b)** sen α = 0,99 **d)** cos α = 0,86

- No passo **4**, se necessário, oriente os alunos a exibirem o nome e a medida do ângulo construído. Para isso, basta selecionar o ângulo, clicar no botão ⚙, em ▲, e, na aba **Básico**, selecionar a opção **Nome & Valor** no campo **Exibir Rótulo**.
- Após o passo **4**, se julgar conveniente, solicite que os alunos verifiquem o valor aproximado de sen 60° e cos 60° na tabela trigonométrica da página **207**.
- No passo **6**, oriente os alunos a clicarem no campo **Entrada...** e, depois, utilizarem o botão α para inserir o símbolo α, disponível na aba **αβγ** do teclado do programa. Caso o teclado não apareça automaticamente, basta clicar no botão ⌨.
- Uma maneira de inserir expressões que envolvem seno, cosseno e tangente no campo **Entrada...**, na **Janela de Álgebra**, é usar os botões sen , cos e tg do teclado do programa, na aba **f(x)**.
- Explique aos alunos que, em alguns casos, as medidas dos comprimentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ apresentadas pelo programa são aproximações. Consequentemente, os valores obtidos para seno e cosseno também são aproximados. Porém, há casos em que esses valores obtidos são exatos, como $\cos 60° = 0{,}5$.

## Respostas

**1.** Porque a medida do comprimento da hipotenusa do triângulo ABC é 1.

**2.** Possíveis respostas:
- **a)** aproximadamente 0,31
- **b)** aproximadamente 0,56
- **c)** aproximadamente 2,35

**3.** Possíveis respostas:
- **a)** aproximadamente 27°
- **b)** aproximadamente 81°
- **c)** aproximadamente 77°
- **d)** aproximadamente 31°

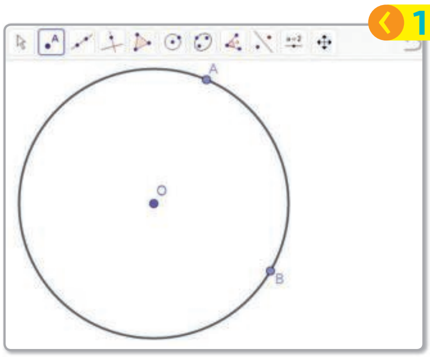
**BNCC em foco**

- A habilidade **EF09MA11** da BNCC orienta a resolução de problemas que envolvam a relação entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, utilizando *softwares* de geometria dinâmica. Para isso, propomos, nesse tópico, uma construção que permite a verificação de algumas características desses elementos, no GeoGebra.

- Comente com os alunos que, quando utilizamos a ferramenta **Círculo dados Centro e Raio**, o GeoGebra constrói uma circunferência, e não um círculo.
- No passo **2**, outra maneira de alterar as características dos arcos construídos, como cor e espessura, é clicar no objeto e, depois, nos botões ☐ e —, em .

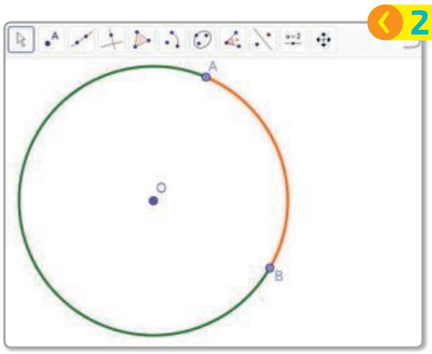
# Arcos e ângulos na circunferência

Nesse tópico, veja como construir arcos de circunferência e verificar a relação entre as medidas de um ângulo central e de um ângulo inscrito determinados pelo mesmo arco.



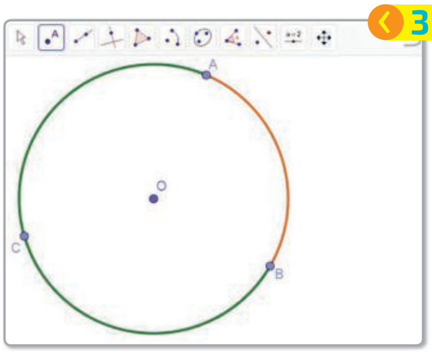
**1** Para construir uma circunferência, selecione a ferramenta **Círculo dados Centro e Raio**, clique em um ponto, nesse caso, **O**, e, na janela que será exibida, insira a medida do comprimento do raio, nesse caso, 4. Então, com a ferramenta **Ponto**, marque dois pontos, indicados na imagem por **A** e **B**, sobre a circunferência construída.

No GeoGebra, não existe distinção entre circunferência e círculo.

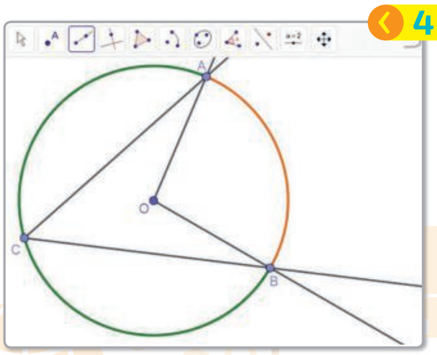


**2** Para marcar os arcos com extremidades em **A** e **B**, selecione a ferramenta **Arco Circular**. Clique em **O**, **A** e **B** e depois em **O**, **B** e **A**, nessa ordem. Altere a espessura e a cor dos dois arcos, a fim de diferenciá-los. Para isso, selecione cada arco e clique no botão , em .

No caso do arco menor, na imagem ao lado, a cor foi alterada para laranja e a espessura da linha, para 8.

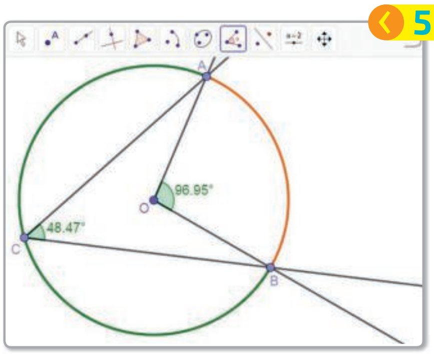


**3** Utilizando a ferramenta **Ponto**, clique sobre o arco maior e marque um ponto **C**.



Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

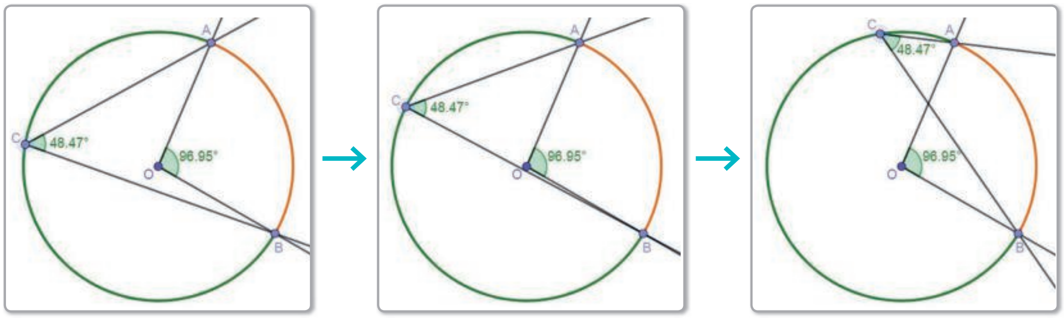
**4** Com a ferramenta **Semirreta**, construa as semirretas OA, OB, CA e CB. No caso da semirreta OA, por exemplo, clique em **O** e, depois, em **A**.



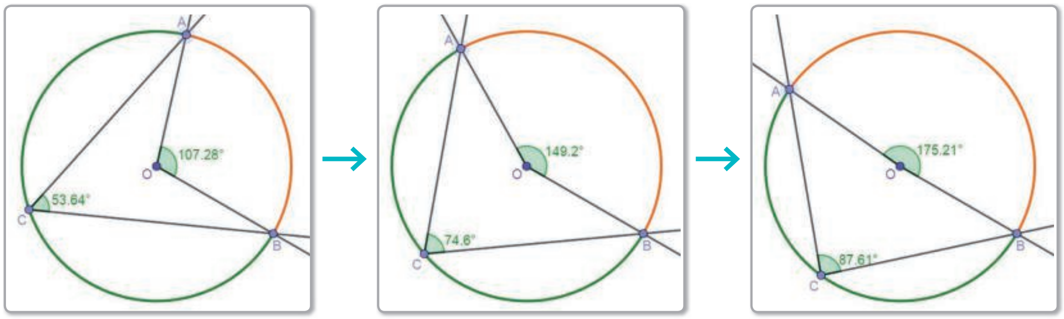
**5** Selecione a ferramenta **Ângulo**, clique em **B**, **O** e **A** e depois em **B**, **C** e **A**, nessas ordens. Com isso, serão construídos o ângulo central $B\hat{O}A$ e o ângulo inscrito $B\hat{C}A$.

Nas imagens apresentadas, as medidas dos ângulos foram aproximadas pelo programa.

**6** Com a opção **Mover**, mova o ponto **C** e verifique que a medida do ângulo $B\hat{C}A$ não se altera.



**7** Ainda com a opção **Mover**, mova o ponto **A** e verifique que $\text{med}\left(B\hat{C}A\right) = \dfrac{\text{med}\left(B\hat{O}A\right)}{2}$.



Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

Respostas nas orientações ao professor.

1. Classifique os segmentos OA, OB, CA e CB, na imagem do passo **5**, em raio, corda ou diâmetro.
2. Ao mover o ponto **C**, no passo **6**, por que a medida do ângulo $B\hat{C}A$ não se altera?
3. Clique com o botão direito no *mouse* sobre o ponto **C** e selecione a opção **Animação**. Em sua opinião, quais verificações podemos fazer por meio dessa opção?

- No passo **5**, oriente os alunos a deixarem exibidas apenas as medidas dos ângulos. Para isso, basta selecionar cada um dos ângulos, clicar no botão AA, em , e selecionar a opção **Valor**.
- No passo **7**, se julgar conveniente, solicite aos alunos que utilizem uma calculadora para verificar que a medida do ângulo central corresponde ao dobro da medida do ângulo inscrito. Nesse caso, comente com eles que devem considerar o arredondamento do programa.
- Para animar o ponto **C**, na questão **3**, outra possibilidade é clicar no botão ▶, referente a este ponto, que aparece na **Janela de Álgebra**.

**Respostas**

1. OA: raio; OB: raio; CA: corda; CB: corda
2. Porque o ângulo $B\hat{C}A$ é um ângulo inscrito e sua medida é igual à metade da medida do ângulo central correspondente, que, nesse caso, não se altera.
3. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que é possível verificar, por meio da animação, que a medida do ângulo $B\hat{C}A$ não se altera. Além disso, fica perceptível o arco de circunferência ao qual o ponto **C** pertence.

**BNCC em foco**

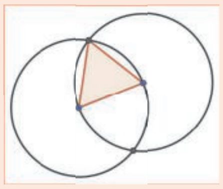
- Nesse tópico, os alunos poderão construir e descrever os passos para a construção de um polígono regular cuja medida do comprimento do lado é conhecida, utilizando o GeoGebra, conforme orienta a habilidade **EF09MA15** da BNCC.

- Antes de trabalhar com os alunos a construção proposta nessa página, oriente-os a realizar no GeoGebra a construção de um polígono regular de 12 lados cuja medida do comprimento do lado seja 3, seguindo o passo a passo desenvolvido na resolução da atividade da página **240**. Oriente os alunos quanto ao uso das ferramentas do GeoGebra, como a ferramenta **Compasso**.

**Atividade complementar**

- Descreva um processo de construção de um triângulo equilátero utilizando as ferramentas **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**, **Interseção de Dois Objetos** e **Polígono**. Em seguida, realize essa construção no GeoGebra.

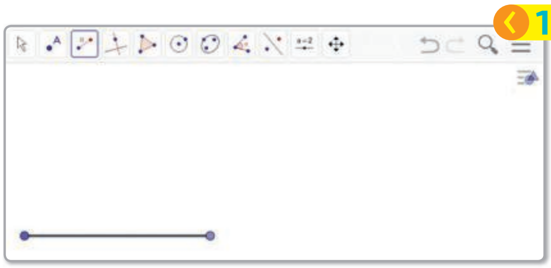
  R Possível resposta: Selecione a ferramenta **Círculo dados Centro** e **Um de seus Pontos** e clique em dois pontos distintos da **Janela de Visualização**. Depois, com a mesma ferramenta selecionada, clique nos mesmos dois pontos, na ordem inversa. Com a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, clique nas duas circunferências construídas. Para finalizar construa o triângulo com a ferramenta **Polígono**.



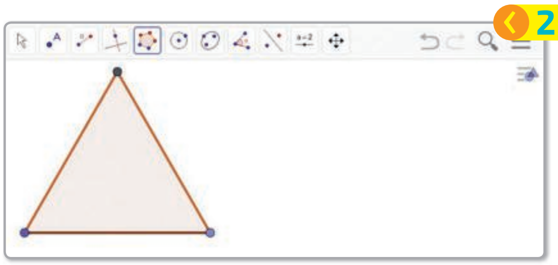
Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

# Polígonos regulares

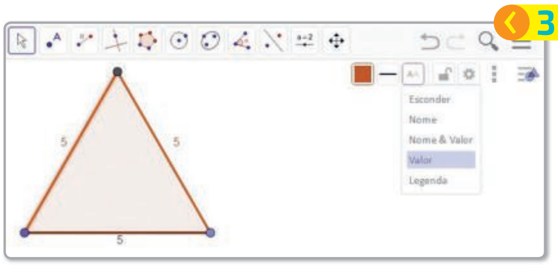
A seguir, veja como construir, no GeoGebra, um polígono regular cuja medida do comprimento do lado é conhecida. No caso desse exemplo, o polígono é um triângulo equilátero com o comprimento de cada lado medindo 5 u.c.



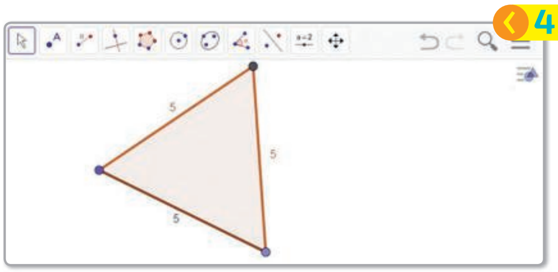
**1** Selecione a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo** e clique em um ponto na **Janela de Visualização**. Na janela que será exibida, insira o número **5** no campo **Comprimento**, que corresponde à medida do comprimento do lado que o polígono terá, e clique em **ok**.



**2** Agora, com a ferramenta **Polígono Regular**, clique nas duas extremidades do segmento construído no passo anterior e, na janela que será exibida, insira a quantidade de vértices que o polígono terá, nesse caso, **3**, e clique em **ok**.



**3** A fim de verificar que os comprimentos dos três lados do triângulo construído têm a mesma medida, selecione cada um deles e marque a opção **Valor** no botão AA, em ◪.



**4** Com a ferramenta **Mover**, mova os vértices do triângulo construído e deixe-o em outra posição.

Ao mover seus vértices, o triângulo continua sendo equilátero, por conta da maneira como foi construído.

Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

Respostas nas orientações ao professor.

**1.** No passo **2**, por que foi inserido o valor **3** na quantidade de vértices do polígono?

**2.** Descreva, por escrito e por meio de um fluxograma como construir um pentágono com comprimento do lado medindo 7 u.c. no GeoGebra.

**3.** Construa, no GeoGebra, os polígonos indicados a seguir.

**a)** Quadrado com o comprimento de cada lado medindo 10 u.c.

**b)** Hexágono regular com o comprimento de cada lado medindo 8 u.c.

**Respostas**

**1.** Porque a construção é de um triângulo equilátero.

**2.** Possível resposta: Construa um segmento com a medida do comprimento fixa e igual a 7. Em seguida, construa um polígono regular, com 5 lados, que tenha esse segmento como um dos lados.

## Planilha eletrônica

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversos tipos de informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Elas facilitam a organização dos dados e possuem recursos para realizar cálculos e construir gráficos. Uma planilha é dividida em regiões retangulares, denominadas células, indicadas pelo cruzamento de uma linha (representada por um número) com uma coluna (representada por uma letra).

Calc é a planilha eletrônica do LibreOffice, uma versão gratuita de aplicações que inclui, além da planilha, editores de textos, de apresentações, de desenhos e banco de dados. Para fazer o *download* e instalá-la, basta acessar o *site* <https://pt-br.libreoffice.org>. Acesso em: 25 ago. 2018.

No esquema a seguir, são apresentados alguns recursos da planilha eletrônica do LibreOffice, que serão utilizados nos exemplos e nas atividades propostas nesta seção.

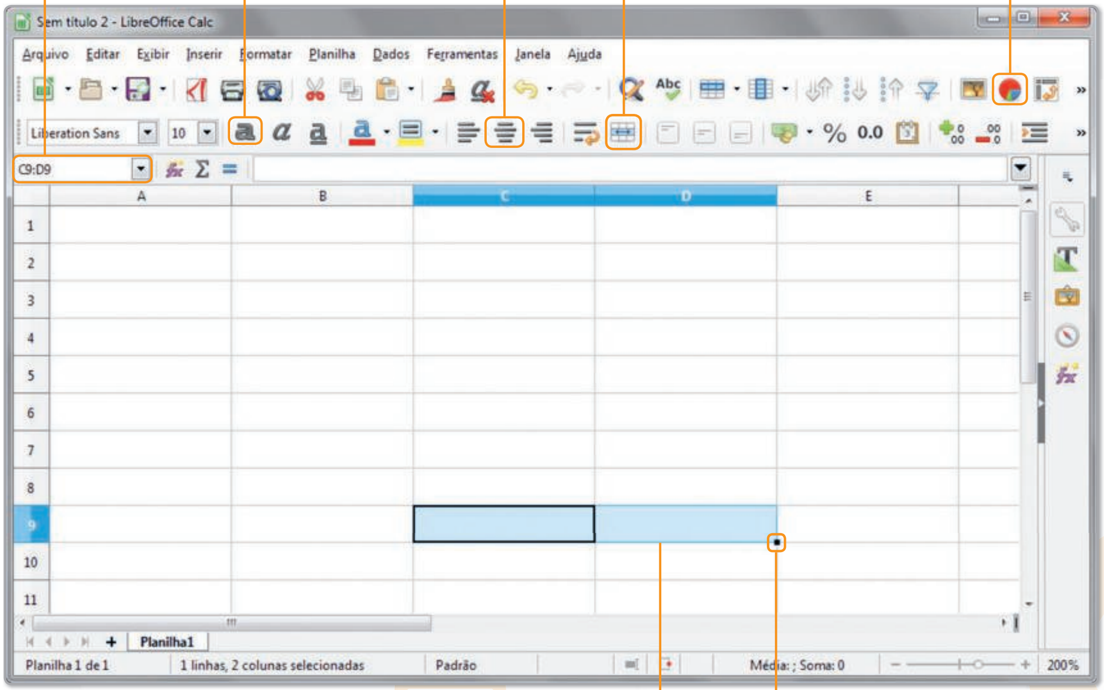
Centraliza um texto.

Indica a célula ou intervalo selecionado.

Formata um texto em negrito.

Mescla e centraliza duas ou mais células.

Insere um gráfico e seus elementos, a partir de células selecionadas.

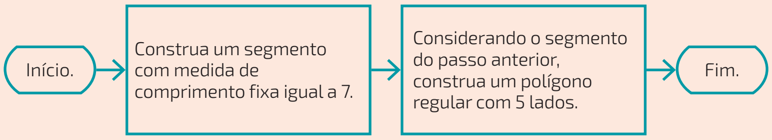


Reprodução/Calc/The Document Foundation

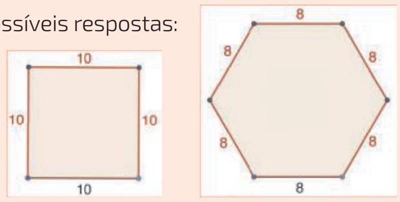
Intervalo de células selecionado.

Alça de preenchimento.

- Os tópicos das próximas páginas, que descrevem como realizar alguns procedimentos e apresentam imagens obtidas do Calc, foram realizados por meio da versão 5.4.7.2 do programa.
- Inicialmente, leia com os alunos a descrição das ferramentas destacadas nessa página, que serão utilizadas nos tópicos seguintes.
- Lembre os alunos de que, em uma planilha eletrônica, o encontro entre uma linha e uma coluna é chamado **célula**. Verifique se eles percebem como localizar cada célula, utilizando uma letra, referente à coluna, e um número, referente à linha.



**3.** Possíveis respostas:



Imagens: Reprodução/GeoGebra/International GeoGebra Institute

# Juro simples e juro composto

Ao resolver problemas envolvendo juro simples ou juro composto, além de utilizar fórmulas, também podemos construir, em uma planilha eletrônica, tabelas indicando o montante e o juro a cada mês. Veja um exemplo elaborado a fim de comparar os valores nesses dois regimes de juro, sendo o capital R$ 6 500,00 e a taxa de juros de 1% a.m.

| Período | Juro simples | | Juro composto | |
|---|---|---|---|---|
| | Juro | Montante | Juro | Montante |

**1** No Calc, o ícone é utilizado para mesclar duas ou mais células, ou seja, juntá-las. Para mesclar o intervalo **A1:A2**, por exemplo, selecione essas duas células e clique nesse ícone. Sabendo disso, mescle os intervalos **A1:A2**, **B1:C1** e **D1:E1**, e digite os textos conforme indicado ao lado.

| Período | Juro simples | | Juro composto | |
|---|---|---|---|---|
| | Juro | Montante | Juro | Montante |
| 0 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 |

**2** Digite: **0** (zero) na célula **A3**; **R$ 0** nas células **B3** e **D3**; e **R$ 6 500** nas células **C3** e **E3**. Observe que estamos representando o capital inicial como o "montante no período zero". Além disso, não há juro nesse período.

Ao digitar **R$ 0** na célula **B3**, ela é formatada como valor monetário, e aparecerá o valor **R$ 0,00**.

| Período | Juro simples | | Juro composto | |
|---|---|---|---|---|
| | Juro | Montante | Juro | Montante |
| 0 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 |
| 1 | | | | |

=A3+1

**3** Como o período é igual ao período anterior mais 1, insira a fórmula indicada na célula **A4**.

| Período | Juro simples | | Juro composto | |
|---|---|---|---|---|
| | Juro | Montante | Juro | Montante |
| 0 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 |
| 1 | | | R$ 65,00 | |

=E3*1%

**4** No regime de juro composto, o juro é igual ao montante do período anterior multiplicado pela taxa de 1%. Então, insira, na célula **D4**, a fórmula indicada.

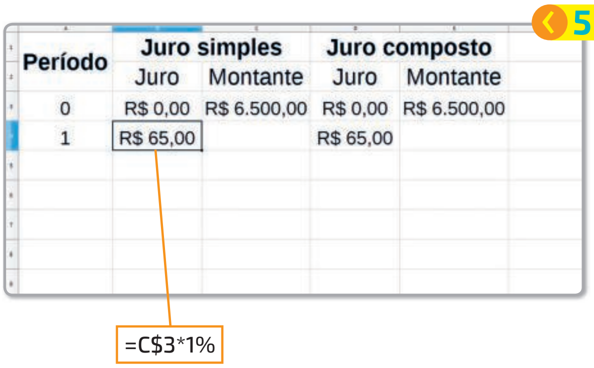
Imagens: Reprodução/Calc/The Document Foundation

**BNCC em foco**

- O objetivo desse tópico é que os alunos conheçam maneiras de se utilizar uma planilha eletrônica para resolver problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos, no contexto da educação financeira, contemplando a habilidade **EF09MA05** da BNCC.

- No passo **1**, para mesclar os intervalos de células destacados, deve-se clicar em uma das células, segurar o clique e arrastar até a outra. Em seguida, basta clicar no botão **Mesclar e centralizar células** destacado na página **279**.
- Após o passo **1**, oriente os alunos a deixarem os textos "Período", "Juro simples" e "Juro composto" em negrito, clicando no botão **Negrito** destacado na página **279**. Além disso, é possível ajustar as larguras das colunas. No caso da coluna **A**, por exemplo, basta clicar no local indicado abaixo, segurar o clique, e arrastar o *mouse*.

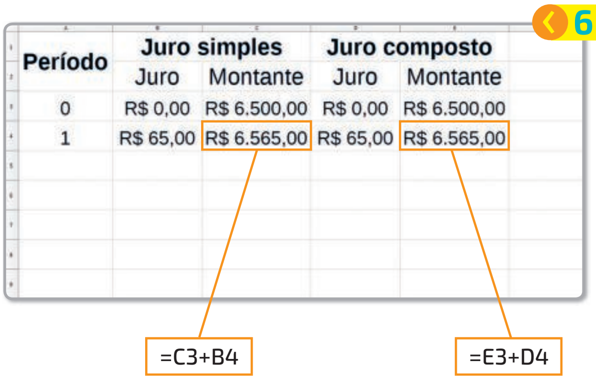
Reprodução/Calc/The Document Foundation



| Período | Juro simples | | Juro composto | |
|---|---|---|---|---|
| | Juro | Montante | Juro | Montante |
| 0 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 |
| 1 | R$ 65,00 | | R$ 65,00 | |

=C$3*1%

**5** Para que o juro simples seja calculado sempre sobre o capital inicial, e não sobre o montante anterior, utilizamos o símbolo de cifrão ($), conforme indicado na fórmula inserida na célula **B4**.



| Período | Juro simples | | Juro composto | |
|---|---|---|---|---|
| | Juro | Montante | Juro | Montante |
| 0 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 |
| 1 | R$ 65,00 | R$ 6.565,00 | R$ 65,00 | R$ 6.565,00 |

=C3+B4

=E3+D4

**6** O montante de determinado período é igual ao do anterior, acrescido do juro desse período. Sabendo disso, insira as duas fórmulas indicadas nas células **C4** e **E4**.

| Período | Juro simples | | Juro composto | |
|---|---|---|---|---|
| | Juro | Montante | Juro | Montante |
| 0 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 |
| 1 | R$ 65,00 | R$ 6.565,00 | R$ 65,00 | R$ 6.565,00 |
| 2 | R$ 65,00 | R$ 6.630,00 | R$ 65,65 | R$ 6.630,65 |
| 3 | R$ 65,00 | R$ 6.695,00 | R$ 66,31 | R$ 6.696,96 |
| 4 | R$ 65,00 | R$ 6.760,00 | R$ 66,97 | R$ 6.763,93 |
| 5 | R$ 65,00 | R$ 6.825,00 | R$ 67,64 | R$ 6.831,57 |
| 6 | R$ 65,00 | R$ 6.890,00 | R$ 68,32 | R$ 6.899,88 |

Imagens: Reprodução/Calc/
The Document Foundation

**7** Por fim, podemos estender as fórmulas digitadas anteriormente nas próximas linhas. Para isso, selecione o intervalo de células **A4:E4**, clicando em **A4**, segurando o clique e arrastando até **E4** e, em seguida, clique e arraste a **Alça de preenchimento**, indicada na página **279**, para baixo, até a linha 9. Com isso, podemos comparar os montantes nos regimes de juro simples e juro composto observando as colunas **C** e **E**.

Respostas nas orientações ao professor.

**1.** Utilize a planilha que você construiu para obter, por meio de tentativas, o capital que deve ser investido, a uma taxa de juro composto de 1% a.m., para obter o montante de R$ 26 500,00 ao final de 6 meses.

**2.** Em seu caderno, calcule o capital que deve ser investido, a uma taxa de juro simples de 1% a.m., para obter o montante de R$ 26 500,00 em 6 meses. Depois, utilize a planilha construída para conferir sua resposta.

- Explique aos alunos que as fórmulas obtidas após o uso do preenchimento automático podem ser visualizadas na **Linha de entrada**, clicando na célula desejada, como o exemplo no rodapé. Diga para eles observarem o padrão em cada coluna, de maneira que percebam que, no regime de juro composto, o juro de determinado período é calculado com base no montante do período anterior.
- Nas questões **1** e **2** propostas, oriente os alunos a utilizarem a mesma planilha construída nesse tópico. Para isso, basta substituir os valores inseridos nas células **C3** e **E3**. Após pressionar **Enter** o programa irá recalcular os valores da planilha.

**Respostas**

**1.** R$ 24 964,20

**2.** R$ 25 000,00

=C$3*1%

| Período | Juro simples | | Juro composto | |
|---|---|---|---|---|
| | Juro | Montante | Juro | Montante |
| 0 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 | R$ 0,00 | R$ 6.500,00 |
| 1 | R$ 65,00 | R$ 6.565,00 | R$ 65,00 | R$ 6.565,00 |
| 2 | R$ 65,00 | R$ 6.630,00 | R$ 65,65 | R$ 6.630,65 |

Fórmula inserida na célula **B5** (=**C$3***1%).

Reprodução/Calc/The Document Foundation

**BNCC em foco**

- Nesse tópico, juntamente com a **Atividade complementar** proposta abaixo, contemplamos as habilidades **EF09MA22** e **EF09MA23** no que diz respeito à construção de gráficos, ao cálculo das medidas de tendência central, pesquisa amostral e amplitude total, em uma planilha eletrônica.

- Se julgar conveniente, auxilie os alunos a deixarem em negrito os textos destacados na planilha e a centralizá-los. Além disso, é possível alterar a largura das colunas. Como indicado nos comentários da página **280**.

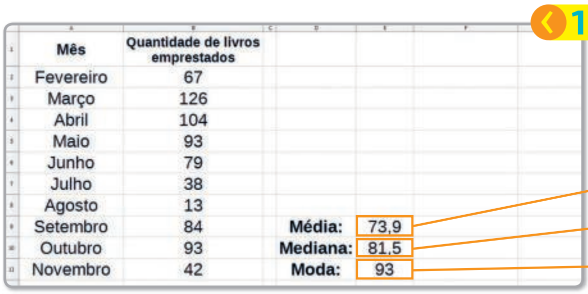
**Atividade complementar**

- Para calcular a amplitude total do conjunto de dados que foi inserido na planilha construída nesse tópico, podemos utilizar a fórmula **=MÁXIMO(B2:B11)–MÍNIMO(B2:B11)**, que corresponde à diferença entre o maior e o menor valor do conjunto. Sabendo disso, calcule a amplitude total desse conjunto de dados na célula **D12**.

  R Espera-se que os alunos insiram a fórmula **=(MÁXIMO(B2:B11) – MÍNIMO(B2:B11))** na célula **D12** e pressionem **Enter**. A amplitude total será 113.

# Pesquisa amostral e medidas de tendência central

A seguir, vamos organizar no Calc os dados fictícios da quantidade de livros emprestados na escola Camões, em 2020. Em seguida, vamos calcular a média, a mediana e a moda desse conjunto de dados, por meio do Calc, e construir um gráfico de linhas.



| Mês | Quantidade de livros emprestados | | |
|---|---|---|---|
| Fevereiro | 67 | | |
| Março | 126 | | |
| Abril | 104 | | |
| Maio | 93 | | |
| Junho | 79 | | |
| Julho | 38 | | |
| Agosto | 13 | | |
| Setembro | 84 | Média: | 73,9 |
| Outubro | 93 | Mediana: | 81,5 |
| Novembro | 42 | Moda: | 93 |

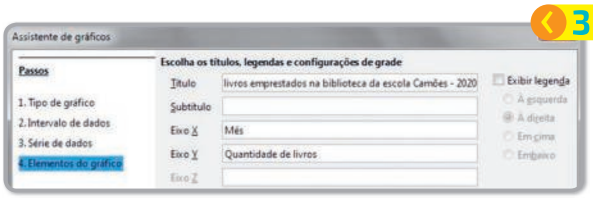
=MÉDIA(B2:B11)

=MED(B2:B11)

=MODO(B2:B11)

**1** Insira, na planilha, os dados conforme apresentado ao lado. Depois, insira as fórmulas correspondentes a média, mediana e moda em três células, conforme indicado.

**2** Selecione o intervalo de células **A1:B11**, clicando em **A1**, segurando o clique e arrastando até **B11**. Clique no botão para aparecer a caixa de diálogo **Assistente de gráficos**. Em **Tipo de gráfico**, selecione a opção **Somente linhas**, no tipo **Linha**.



Título: livros emprestados na biblioteca da escola Camões - 2020

Subtítulo:

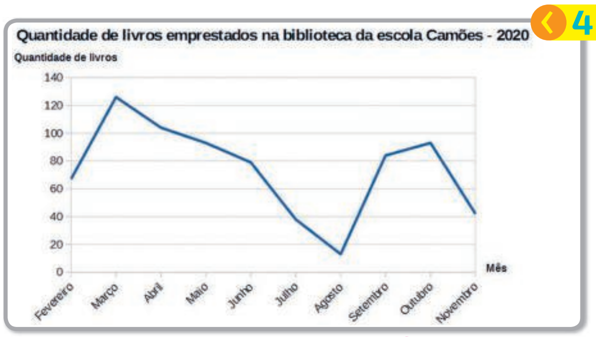
Eixo X: Mês

Eixo Y: Quantidade de livros

Eixo Z:

☐ Exibir legenda

**3** Em **Elementos do gráfico**, digite “Quantidade de livros emprestados na biblioteca da escola Camões - 2020” em **Título** e os nomes dos eixos **x** (horizontal) e **y** (vertical), conforme indicados. Em seguida, desmarque a opção **Exibir legenda**.



Imagens: Reprodução/Calc/ The Document Foundation

**4** Clique no botão **Concluir** para gerar o gráfico de linhas.

Como não há uma opção para inserir a fonte de pesquisa no gráfico, uma maneira de incluí-la é digitá-la em uma célula abaixo do gráfico.

Resposta nas orientações ao professor.

**1.** Escolha um tema de sua realidade e realize uma pesquisa com seus familiares ou colegas. Em seguida, registre os dados no Calc e destaque aspectos como as medidas de tendência central, se possível, e construa um gráfico a partir deles.

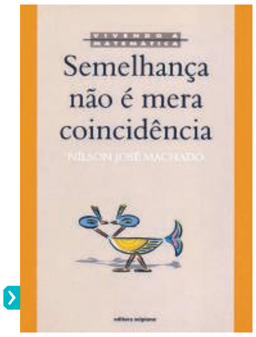
**Resposta**

**1.** Resposta pessoal.

# Sugestões de livros e *sites*

## Livros

- **Atlas da situação mundial**, de Dan Smith. Tradução de Mário Vilela. São Paulo: Companhia Editoria Nacional.
- **Semelhança não é mera coincidência**, de Nílson José Machado. São Paulo: Scipione. (Vivendo a Matemática).



Reprodução/Editora Scipione

- **Como encontrar a medida certa**, de Carlos Alberto Marcondes dos Santos e Nelson Gentil. São Paulo: Ática. (A descoberta da Matemática).
- **A Matemática das coisas**: do papel A4 aos cordões de sapatos, do GPS às rodas dentadas, de Nuno Crato. São Paulo: Livraria da Física.
- **101 Ilusões de óptica**, de Sam Taplin. São Paulo: Edições Usborne.

Reprodução/Edições Usborne

- **Os peregrinos**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD. (O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **Origami**: a divertida arte das dobraduras, de William Gilbert. São Paulo: Nobel.
- **Esporte, caminho de superação**, de Denise Pellegrini. São Paulo: Moderna.

Reprodução/Editora Moderna

- **O homem que calculava**, de Malba Tahan. Rio de Janeiro: Record.
- **Os olímpicos**, de Egidio Trambaiolli Neto. São Paulo: FTD.(O contador de histórias e outras histórias da Matemática).
- **História da equação do 2º grau**, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática. (Contando a história da Matemática).
- **Você precisa de quê?**: A diferença entre consumo e consumismo, de Silmara Franco. São Paulo: Moderna.

Reprodução/Editora Moderna

- **As mil e uma equações**, de Ernesto Rosa. São Paulo: Ática. (A descoberta da Matemática).

- **Geometria na Amazônia**, de Ernesto Rosa Neto. São Paulo: Ática. (A descoberta da Matemática).
- **Os mistérios dos números**: uma viagem pelos grandes enigmas da Matemática, Marcus du Sautoy. Rio de Janeiro: Zahar

Reprodução/Editora Zahar

- **Dando corda na trigonometria**, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática. (Contando a história da Matemática).
- **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos**, de Paul Strathern. Tradução de Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Zahar. (Cientistas em 90 minutos).
- **Matemática divertida e curiosa**, de Malba Tahan. Rio de Janeiro: Record.

Reprodução/Editora Record

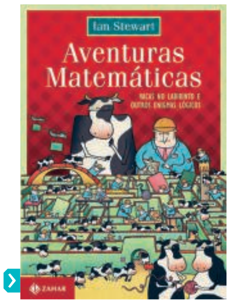
- **A história dos números**, de Hélio Gordon. São Paulo: FTD. (História-ciência, técnica, invenções e profissões).
- **Uma proporção ecológica**, de Luzia Faraco Ramos. São Paulo: Ática. (A descoberta da Matemática).
- **Os números (não) mentem**: como a Matemática pode ser usada para enganar, Charles Selfie. Rio de Janeiro: Zahar.
- **O mistério dos números perdidos**, de Michael Thomson. São Paulo: Melhoramentos.
- **Infográficos** - Universo: fatos e curiosidades inusitadas sobre a vida, a terra, os planetas e muito mais, de Thomas Eaton. São Paulo: Publifolha.

Reprodução/Publifolha

- **Infográficos** - Música: fatos e curiosidades inusitadas sobre canções, músicos, discos e muito mais, de Graham Betts. São Paulo: Publifolha.
- **A Matemática no museu de Arte**, de Majungmul. São Paulo: Callis.
- **Uma raiz diferente**, de Luzia Faraco Ramos. São Paulo: Ática. (A descoberta da Matemática).
- **Ideias geniais na Matemática**: maravilhas, curiosidades, enigmas e soluções brilhantes da mais fascinante das ciências, de Suderna Verma. Belo Horizonte: Gutenberg.

Reprodução/Editora Gutenberg

- **Mania de Matemática**: diversão e jogos de lógica e Matemática, de Ian Stewart. Rio de Janeiro: Zahar.
- **O enigma de Einstein**, de Jeremy Stangroom. São Paulo: Marco Zero.
- **Aventuras Matemáticas**: vacas no labirinto e outros enigmas lógicos, de Ian Stewart. Rio de Janeiro: Zahar.



Reprodução/Editora Zahar

## Sites

- Arte & Matemática: <**www2.tvcultura.com.br/artematematica/home.html**>. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Domínio Público: <**www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.do**>. Acesso em: 3 nov. 2018.
- IBGE educa: <**https://educa.ibge.gov.br**>. Acesso em: 3 nov. 2018.
- iMática: <**www.matematica.br**>. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Disponível em: <**www.inep.gov.br**>. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Jornal da USP Especial Matemática <**http://jornal.usp.br/especial/matematica/**>. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Khan Academy: <**https://pt.khanacademy.org/math**>. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Malba Tahan: <**www.malbatahan.com.br**>. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Olimpíada Brasileira de Matemática: <**www.obm.org.br**>. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas: <**www.obmep.org.br**>. Acesso em: 3 nov. 2018.
- ProEnem <**www.proenem.com.br**>. Acesso em: 3 nov. 2018.
- Tv Escola: <**https://tvescola.org.br**>. Acesso em: 3 nov. 2018.

# Respostas

## capítulo 1 Potências e raízes

**1.** **a)** 125 **b)** 1 **c)** $-\frac{1}{32}$ **d)** 0,064 **e)** 1 **f)** $-\frac{1}{32}$ **g)** 0,28 **h)** $\frac{9}{49}$ **i)** 1 **j)** 400

**2.** **a)** 15 625 **b)** 312 500 000 **c)** 0,008 **d)** 97 344 **e)** 226,981 **f)** 65 536

**3.** **a)** $\frac{81}{4}$ **b)** $\frac{7}{5}$ **c)** 216 **d)** $\frac{16}{81}$

**4.** **a)** $3^6 = 729$ **b)** $(-9)^5 = -59\,049$ **c)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$ **d)** $15^2 = 225$ **e)** $6^{-6} = \frac{1}{46\,656}$ **f)** $(-10)^1 = -10$ **g)** $10^6 = 1\,000\,000$ **h)** $7^{-4} = \frac{1}{2\,401}$

**5.** **a)** 15 625 **b)** 12 **c)** 9 **d)** 18 **e)** 54 **f)** 729

**6.** **a)** 319 **b)** 64 **c)** $-\frac{4}{125}$ **d)** $-\frac{107}{8}$ **e)** $\frac{13}{8}$

**7.** $A = 3^{-2}$; $B = 3^0$; $C = 3^4$; $D = 3^6$; $E = 3^{-1}$

**8.** **a)** $x = 4$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = 0$ **d)** $x = 1$ **e)** $x = 2$ **f)** $x = 4$

**9.** **a)** 1 000 **b)** 1 000 000 000 **c)** 10 **d)** 1 000 000 **e)** 100 000 000 **f)** 10 000

**10.** 1 000 perfumes

**11.** **a)** $3 \cdot 10^8$ **b)** $7,6 \cdot 10^9$ **c)** $1 \cdot 10^{-2}$ **d)** $1 \cdot 10^{-3}$

**12.** **a)** 7 dias **b)** $3,4 \cdot 10^{12}$

**13.** **a)** 52 cm **b)** 60 cm **c)** 46,8 cm **d)** 36 cm

**14.** **a)** 5 cm **b)** 6 m **c)** 9 m

**15.** **a)** 4,24 **b)** 2,24 **c)** 3,16 **d)** 6,48 **e)** 8,60 **f)** 25,26

**16.** **a)** 6 561 **b)** 13 **c)** 7 776 **d)** 4 **e)** 4 096 **f)** 6

**17.** b; d; e; f

**18.** **a)** 512 $cm^3$ **b)** 8 cm

**19.** **a)** $\sqrt[7]{5^{10}}$, $\sqrt[8]{5^{12}}$ e $\sqrt[9]{5^{14}}$ **b)** $\sqrt[4]{5^4}$

**20.** **a)** 1 e 30; 2 e 15; 3 e 10

**b)** Para $a = 1$ e $b = 30$, temos: 15,5; para $a = 2$ e $b = 15$, temos: 8,5; para $a = 3$ e $b = 10$, temos 6,5

**c)** 5 e 6; Porque, entre os possíveis valores de **a** e **b**, esses são os mais próximos um do outro.

**d)** • 4,5 • 8,5 • 6 • 11

**21.** A: 4; B: 5; C: 9; D: 5; E: 2; F: 10

**22.** **a)** $11^{\frac{5}{4}}$ **b)** $2^{\frac{4}{7}}$ **c)** $1^{\frac{1}{8}}$ **d)** $4^{\frac{3}{9}}$ ou $4^{\frac{1}{3}}$

**23.** **a)** $\sqrt[5]{3^2}$ **b)** $\sqrt[9]{8^4}$ **c)** $\sqrt{15^7}$ **d)** $\sqrt[6]{65}$

**24.** **a)** 2 **b)** 13

**25.** a–III; b–I; c–IV; d–II

**26.** **a)** 9 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $-5$

**27.** A: 1; B: 12; C: 4; D: 2

**28.** **a)** $\sqrt{252}$ **b)** $\sqrt[4]{180}$ **c)** $\sqrt[7]{\frac{13}{9}}$ **d)** $\sqrt[10]{25}$

**29.** **a)** $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:q]{a^{m:q}}$ **b)** • $\sqrt{17}$ • $\sqrt[3]{2}$

**30.** **a)** V **b)** F **c)** V **d)** F

**31.** **a)** $\sqrt[6]{20}$ **b)** $\sqrt[12]{\frac{15}{2}}$

**32.** não; Possível resposta: nesse caso, $a = -3 < 0$, o que não atende à restrição $a > 0$ da propriedade; 3

**33.** b

**34.** **a)** $\sqrt[4]{7}$ **b)** $\sqrt[3]{4}$ **c)** $\sqrt[3]{9}$

**35.** **a)** 8 **b)** 4 **c)** 7

**36.** **a)** $9\sqrt{2}$ **b)** $3\sqrt[4]{5}$ **c)** $6\sqrt[3]{13}$ **d)** $3\sqrt[5]{77}$

**37.** **a)** 5 **b)** 23 **c)** 567 **d)** 3 **e)** 12 **f)** 540

**38.** a–III; b–IV; c–I; d–II

**39.** **a)** $\sqrt[3]{162}$ **b)** $\sqrt{98}$ **c)** $\sqrt[4]{128}$ **d)** $\sqrt[3]{648}$ **e)** $\sqrt{56}$ **f)** $\sqrt[3]{5}$

**40.** $2\sqrt{11} < 3\sqrt{6} < 3\sqrt{7} < 6\sqrt{2} < 5\sqrt{3} < 8\sqrt{2} < 7\sqrt{3}$

**41.** **a)** $-19\sqrt{6}$ **b)** $17\sqrt{2}$ **c)** $-6\sqrt[3]{7}$ **d)** $10\sqrt{11} + 9\sqrt{3}$ **e)** $\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

**42.** $12\sqrt{3}$ cm

**43.** **a)** 26,56 **b)** 2,45 **c)** $-10,6$ **d)** $-18,68$

**44.** A: 50; B: $9\sqrt{14}$

**45.** c

**46.** **a)** $6\sqrt{3}$
**b)** $4\sqrt{57}$
**c)** $5\sqrt[3]{5}$
**d)** $2$
**e)** $2\sqrt{14}$
**f)** $4\sqrt[3]{20}$

**47.** **a)** $6\sqrt{21}\ m^2$
**b)** $12\sqrt[3]{3}\ m^2$

**48.** **a)** $x = 17$
**b)** $x = 16$
**c)** $x = 3$
**d)** $x = 5$

**49.** $4\sqrt{7} - 9$

**50.** **a)** $4\sqrt{6} + 6\sqrt{5}$
**b)** $-4 - 14\sqrt{3}$

**51.** $2\sqrt{42}$ cm

**52.** **a)** $96\sqrt{2}\ cm^3$
**b)** $180\ cm^3$

**53.** Possível resposta:
**a)** $\sqrt{26} \cdot \sqrt{8}$
**b)** $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{5}$
**c)** $\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{18}$

**54.** **a)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
**b)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$
**c)** $\frac{5\sqrt{14}}{14}$
**d)** $2\sqrt{6}$
**e)** $\frac{2\sqrt{21}}{7}$
**f)** $\frac{\sqrt{6}}{4}$

**55.** -0,893

**56.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ cm

**57.** **a)** sim
**c)** • $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ • $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ • $\frac{\sqrt{11}}{88}$ • $\frac{5\sqrt{6}}{21}$

**58.** **a)** $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
**b)** • $\frac{81 - 9\sqrt{5}}{76}$ • $-\frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{4}$
• $-\frac{13 + 13\sqrt{7}}{6}$ • $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{4}$

**59.** $8\sqrt{6}\ dm^3$

**60.** **a)** $\frac{7\sqrt[8]{3^3}}{3}$
**b)** $\frac{4\sqrt[6]{5^5}}{5}$
**c)** $3\sqrt[7]{3^2}$
**d)** $\frac{2\sqrt[5]{15^3}}{5}$

## capítulo 2 Equações do 2º grau e sistemas de equações

**1.** a; b; d; e

**2.** **a)** $2x^2 + \frac{1}{2}x + 5 = 0$
**b)** $-3x^2 + x - 1 = 0$
**c)** $5x^2 - 1 = 0$
**d)** $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x = 0$
**e)** $-\sqrt{\frac{1}{3}}x^2 - \sqrt{2}x + \frac{3}{2} = 0$

**3.** **a)** $a = -1$, $b = 0$ e $c = 4$; incompleta
**b)** $a = 1$, $b = 2$ e $c = -\frac{1}{2}$; completa
**c)** $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$ e $c = 0$; incompleta
**d)** $a = -3$, $b = 0$ e $c = 7$; incompleta
**e)** $a = \frac{1}{9}$, $b = -1$ e $c = 2$; completa
**f)** $a = \sqrt[3]{2}$, $b = \frac{2}{5}$ e $c = 1$; completa

**4.** **a)** $m = 0$
**b)** $m = 2$

**5.** **a)** $x^2 - \frac{9}{2}x - 7 = 0$
**b)** $2x^2 - 2x = 0$
**c)** $-x^2 + x - 2 = 0$
**d)** $\frac{x^2}{3} - 6x + 1 = 0$

**6.** Possível resposta:
**a)** $2x^2 - 5x + 8 = 0$; $-x^2 + 3x - 1 = 0$; $\sqrt{3}x^2 + x - \frac{1}{3} = 0$
**b)** $2x^2 + 5x = 0$; $-7x^2 + \sqrt{2}x = 0$; $-x^2 + \frac{3}{2}x = 0$
**c)** $-7x^2 + 2 = 0$; $\frac{1}{3}x^2 - 1 = 0$; $x^2 + 8 = 0$

**7.** **a)** $x = -2$ e $x = 2$
**b)** $x = -1$
**c)** $x = 2$
**d)** $x = -1$ e $x = 2$
**e)** $x = \frac{5}{4}$

**8.** **a)** $4x^2 + 4x - 15 = 0$
**b)** $x^2 - 14 = 0$
**c)** $x^2 - x + 15 = 0$
**d)** $3x^2 - \frac{11x}{5} = 0$

**9.** **a)** Possível resposta: $2x^2 - 16x + 32 = 0$
**b)** Possível resposta: $a = 2$, $b = -16$ e $c = 32$; completa

**10.** **a)** I: $x^2 - 2x = 0$; II: $2x^2 + 16x + 30 = 0$
**b)** I: $x = 0$ e $x = 2$; II: $x = -3$ e $x = -5$

**11.** **a)** $x = 2$ e $x = -2$
**b)** $x = 0$
**c)** $x = 0$ e $x = -\frac{1}{5}$
**d)** $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$
**e)** $x = 0$ e $x = -\frac{5}{2}$
**f)** $x = 0$ e $x = 4$
**g)** $x = 0$ e $x = 4$
**h)** $x = 6$ e $x = -6$

**12.** • 5 m; 6 m • 3 m; 8 m

**13.** I e II

**14.** $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$

**15.** • $3x^2 = 75$; $x = 5$ e $x = -5$
• $\frac{1}{2}x = x^2$; $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$
• $x^2 - 5 = 0$; $x = \sqrt{5}$ e $x = -\sqrt{5}$

**16.** b = 3 cm; h = 4 cm; B = 7 cm

**18.** medida da altura: 2 m e medida do comprimento: 18 m

**19.** **a)** $x = 4$
**b)** $x = 5$

**20.** sim

**21. a)** F **b)** V **c)** V **d)** V **e)** F

**22. a)** $x = 0$

**b)** $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$

**c)** $x = 4$ e $x = -4$

**d)** $x = 0$

**23.** $x = 3$ e $x = 0$

**24. a)** 48 $m^3$; 6 m; 4 m; 2 m

**b)** 48 $m^3$; 3 m; 4 m; 4 m

**25.** $x = 0$, $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$, $x = 2$ e $x = -2$

**26. b)** 30,625 m

**c)** 122,5 m

**d)** 490 m

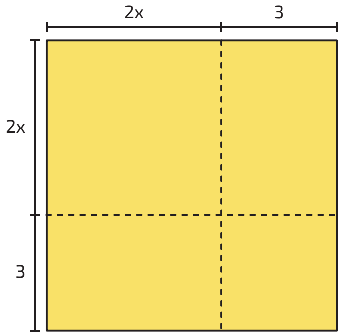
**27. a)** $(x - 2)^2 = 9$; $x_1 = 5$ e $x_2 = -1$

**b)** $(x + 6)^2 = 0$; $x_1 = -6$ e $x_2 = -6$

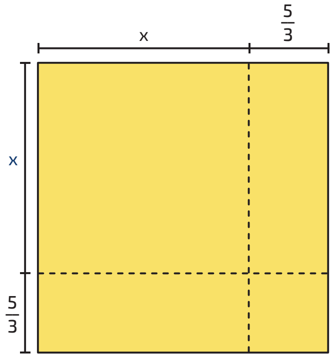
**c)** $(2x - 3)^2 = 16$; $x_1 = \frac{7}{2}$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$

**d)** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 25$; $x_1 = \frac{11}{2}$ e $x_2 = -\frac{9}{2}$

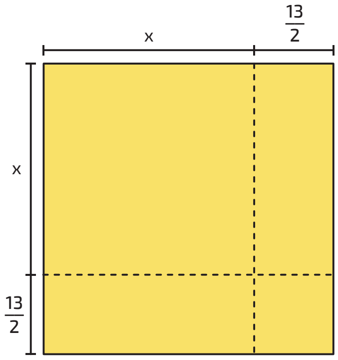
**28. a)** $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = -\frac{5}{2}$



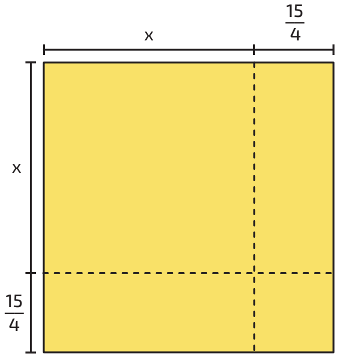
**b)** $x_1 = -\frac{1}{3}$ e $x_2 = -3$



**c)** $x_1 = -5$ e $x_2 = -8$



**d)** $x_1 = -\frac{3}{2}$ e $x_2 = -6$



Ilustrações: Sergio L. Filho

**29. a)** $x_1 = 1$ e $x_2 = -13$

**b)** $x_1 = \frac{3}{2}$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$

**c)** $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$

**d)** $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$

**30.** $x = 2$ cm

**31. a)** $x^2 + 2x - 24 = 0$; $x_1 = 4$ e $x_2 = -6$

**b)** $x^2 + 3x - 18 = 0$; $x_1 = 3$ e $x_2 = -6$

**32.** 50 m ou 55 m

**33. a)** $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = -1$

**b)** $x_1 = 3$ e $x_2 = -4$

**c)** $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{1}{3}$

**d)** $x_1 = -8$ e $x_2 = 3$

**34. a)** $\frac{1}{3}x + 2x^2 = 4$; $x_1 = \frac{4}{3}$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$

**b)** $x^2 - 3x + 4 = 8$; $x_1 = 4$ e $x_2 = -1$

**c)** $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4x = 9$; $x_1 = 2$ e $x_2 = -18$

**35. a)** $x^2 - 4x - 5 = 0$; $x_1 = 5$ e $x_2 = -1$

**b)** $x^2 + 6x + 8 = 0$; $x_1 = -2$ e $x_2 = -4$

**c)** $3x^2 - 8x - 3 = 0$; $x_1 = 3$ e $x_2 = -\frac{1}{3}$

**d)** $x^2 - \frac{25}{3}x - 6 = 0$; $x_1 = 9$ e $x_2 = -\frac{2}{3}$

**36.** **a)** 20 cm **b)** 18 cm

**37.** **a)** $4x^2 + 20x = 144$; $x_1 = -9$ e $x_2 = 4$
**b)** sim

**38.** $x_1 = 7$ e $x_2 = 3$

**39.** $x = 7$ m

**40.** **a)** • 14 diagonais • 170 diagonais
**b)** 5 lados; 9 lados

**41.** 78 unidades de área

**43.** 2 m

**44.** • 26 cm • 30 cm

**45.** 44 m

**46.** **a)** duas raízes reais e diferentes
**b)** duas raízes e iguais
**c)** não possui raiz real

**47.** $k < -1$

**48.** **a)** $m < -3$ **b)** $m = -3$ **c)** $m > -3$

**49.** 7 números naturais

**50.** **a)** $S = 3$ e $P = 2$; $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$
**b)** $S = 2$ e $P = 1$; $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$
**c)** $S = -5$ e $P = -6$; $x_1 = -6$ e $x_2 = 1$

**51.** **a)** $n = 7$ **b)** $n = 6$ **c)** $n = 4$

**52.** **a)** $x_1 = -4$ e $x_2 = -3$ **b)** -6

**53.** **a)** I: $m = 3$, II: $n = 2$
**b)** I: $x^2 - 9x - 10 = 0$, $x_1 = 10$ e $x_2 = -1$
II: $x^2 - 9x + 14 = 0$, $x_1 = 2$ e $x_2 = 7$

**54.** **a)** $p = -12$ **c)** $p = 26$
**b)** $p = 11$ **d)** $p = 12$

**55.** **a)** $x_1 = 6$ e $x_2 = 7$ **c)** $x_1 = x_2 = 1$
**b)** $x_1 = 4$ e $x_2 = 7$ **d)** $x_1 = -2$ e $x_2 = 5$

**56.** 8 e 15

**57.** 11 e 12

**58.** Possível resposta:
**a)** $x^2 - 7x + 12 = 0$ **c)** $x^2 + 5x - 6 = 0$
**b)** $x^2 - 2x - 35 = 0$

**59.** Possíveis respostas:
**a)** $x^2 + 3x = 0$ e $-2x^2 - 6x = 0$
**b)** $x^2 - 6x + 8 = 0$ e $x^2 - 10x + 24 = 0$
**c)** $x^2 - 8x + 15 = 0$ e $x^2 - 10x + 21 = 0$
**d)** $x^2 - 4x + 4 = 0$ e $x^2 + 6x + 9 = 0$

**60.** $5x^2 - 35x - 220 = 0$

**61.** $x^2 - 12x + 4 = 0$

**62.** base menor: 12 cm e altura: 4 cm

**63.** 4 anos

**64.** **a)** $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$ **c)** $x_1 = -6$ e $x_2 = 4$
**b)** $x_1 = 1$ e $x_2 = 7$

**65.** 2

**66.** Possível resposta:
**a)** $-x^2 + 5x - 6 = 0$ **c)** $3x^2 - 6x - 24 = 0$
**b)** $x^2 + 9x + 18 = 0$

**67.** **a)** $(1, 1)$ e $\left(\frac{17}{9}, -\frac{5}{3}\right)$ **c)** $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
**b)** $(9, -1)$ e $\left(-6, \frac{3}{2}\right)$

**68.** **a)** A e C **b)** A e B **c)** D e F

**69.** **a)** $-2$ e $8$ **b)** 6 e 14; $-6$ e $-14$

**70.** **a)** $(1, 2)$ **c)** $(4, 4)$ e $(-4, -4)$
**b)** $(0, 3)$ e $(-3, 0)$

**71.** $x^2 - 10x + 24 = 0$

**73.** 4 m e 9 m

**74.** **a)** 18 m e 25 m **b)** 34,2 m²

**75.** **a)** 6 calças e 17 camisas

## capítulo 3 Matemática financeira

**1.** **a)** $\frac{2}{100}$; 0,02 **c)** $\frac{100}{100}$; 1
**b)** $\frac{34}{100}$; 0,34 **d)** $\frac{121}{100}$; 1,21

**2.** **a)** 5,4 kg **c)** 75 L
**b)** R$ 5,00 **d)** 70 mm

**3.** R$ 14,72

**4.** 13%

**5.** **a)** 15 cm²
**b)** 3 cm²
20%

**6.** 30%

**7.** 20,3 L

**8.** aproximadamente R$ 24,42

**10.** **a)** acréscimo de, aproximadamente, 2,1%
**b)** acréscimo de, aproximadamente, 5,6%
**c)** desconto de, aproximadamente, 1,3%
**d)** acréscimo de, aproximadamente, 6,4%

**11.** **a)** R$ 750,00 **c)** R$ 1 050,00
**b)** R$ 75,00 **d)** 7 anos

**12.** 6,43% a.m. **13.** 8 meses

**14.** R$ 3 400, 00

**15.** aproximadamente R$ 547,83

**16.** R$ 143,52

**17.** 9% a.m.

**18.** 9 meses

**19.** R$ 39,17

**20.** • R$ 2 322, 00 • R$ 2 426, 49

**21.** • aproximadamente R$ 2 872, 13
• aproximadamente R$ 3 289, 73

**22.** **a)** investimentos I e II: R$ 1 500, 00
**b)** • investimento I • investimento **II**
**c)** investimento I e II: 15% a.m.

**23.** R$ 312,16

**24.** maior

**25.** **a)** investimento II
**b)** investimento I: R$ 599,90 e investimento **II**: R$ 600,00

## capítulo 4 Razão e proporção

**1.** **a)** 60%
**b)** 80%

**2.** **a)** • São Paulo • Amajari • São João de Mereti
**b)** não
**c)** não

**3.** **a)** 6,5 m
**b)** 4 cm

**4.** 26,6 m/s

**5.** **a)** Paola: 162 batimentos por minuto; Tiago: 186 batimentos por minuto; Juliana: 168 batimentos por minuto
**b)** Paola e Juliana

**6.** aproximadamente 102, 90 hab/km$^2$; aproximadamente 129, 24 hab/km$^2$

**7.** 58 km/h

**9.** **a)** 168 meninos
**b)** menos

**10.** $a = 55$, $b = 30$, $c = 40$

**12.** inversamente proporcionais

**13.** 2 h 30 min

**14.** 5 horas

**16.** João, Ivo e Elton receberam respectivamente 8,14 e 24 moedas.

**17.** Os candidatos receberão respectivamente R$ 144 000, 00, R$ 88 000, 00 e R$ 56 000, 00.

**18.** Julia: R$ 700,00; Débora: R$ 1 050, 00; Igor: R$ 1 750, 00

**19.** Amanda receberá R$ 750,00, Taís R$ 1 000, 00 e Heloísa R$ 1 250, 00.

**20.** Os funcionários **A**, **B** e **C** ganharão 6, 3 e 2 diárias, respectivamente.

**21.** A premiação será, respectivamente, R$ 2 310, 00, R$ 1 650, 00 e R$ 1 050, 00.

**22.** **a)** proporcionais **c)** proporcionais
**b)** não proporcionais **d)** não proporcionais

**23.** **b)** Sim, pois, ao dobrarmos a medida do tempo, a quantidade de peças produzidas também dobrará, ao quintuplicar a medida do tempo, a quantidade de peças produzidas também quintuplicará, e assim por diante.

**24.** **a)** $x = 360$ **c)** $x = 9$
**b)** $x = 840$ **d)** $x = 245$

**25.** **a)** 55,5 kcal; 1,5 mg **b)** aproximadamente 676 mL

**26.** **a)** lavadora de roupas **c)** 5 h
**b)** 3 750 Wh

**28.** 7 min 30 s

**29.** **a)** 11 250 latas **b)** R$ 1 050, 00

**30.** 119 km; 180 km

**31.** 3,25 L de água filtrada e 11,375 g de sal

**32.** 6 h 15 min

**34.** 20 min; 32 min

**35.** não

**36.** 16 computadores

**37.** 120 entrevistadores

**38.** 273,6 L

**39.** **b)** 24,96 kg

**40.** 40 dias

**41.** 7 h

**42.** 6 dias

**43.** 9 h 36 min

**44.** 7 h

**46.** 33 dias

## capítulo 5 Noções de função e função afim

**1.** **a)** $g = \frac{m}{2}$ **b)** 18 gotas **c)** 82 kg

**2.** **a)** • $P = 8x + 2$ • $A = 4x^2$
**b)** • 2 cm: $P = 18$ cm e $A = 16$ cm$^2$
• 3 cm: $P = 26$ cm e $A = 36$ cm$^2$
• 5 cm: $P = 42$ cm e $A = 100$ cm$^2$
• 10 cm: $P = 82$ cm e $A = 400$ cm$^2$
• 20 cm: $P = 162$ cm e $A = 1600$ cm$^2$
• 70 cm: $P = 562$ cm e $A = 19600$ cm$^2$

**3. a)** R$ 13,20 **c)** R$ 7,80 **e)** R$ 13,00

**b)** $L = 0,65C$ **d)** 65%

**4. a)** $V = 60 + 3t$

**b)** • R$ 84,00

**c)** Não, pois $V = 60 + 3 \cdot 5 = 75$ (R$ 75,00).

**5. a)** $y = 3x$ **b)** $y = \frac{2}{3}x + 3$

**6. a)** • R$ 42 972,36 • R$ 44 540,36

**b)** A partir de 1 ano e 2 meses, ou 14 meses.

**7. a)** 27 cubos; 38 cubos

**b)** $c = f^2 + 2$

**c)** • 66 cubos • 102 cubos • 227 cubos

**8. a)** $f(5) = \frac{3}{5}$, $f(-2) = \frac{1}{4}$ e $f(1) = 1$

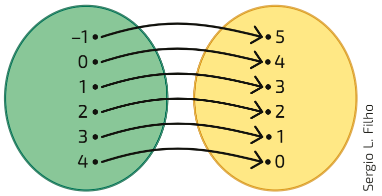
**b)** $f(-1) = 0$

**c)** $x = 7$

**9. a)** $c = 0,06t$ **b)** 10,8 kWh

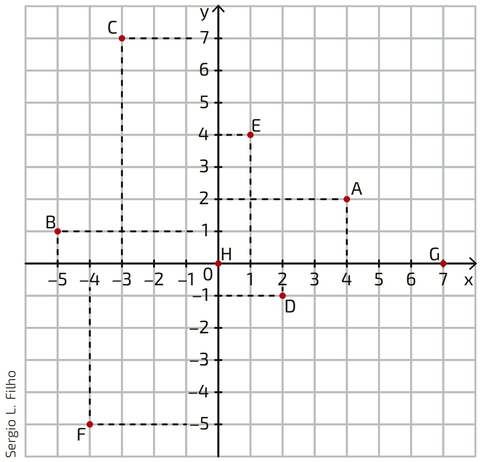
**10.** b

**11.**



Sergio L. Filho

**12.**



Sergio L. Filho

**a)** G e H; H

**b)** $A' = (4, -2)$, $B' = (-5, -1)$ e $C'(-3, -7)$

**13.** não; Possível resposta: um elemento correspondente à variável independente está associado a dois elementos correspondentes à variável dependente.

**14.** b

**15.** a–III; b–I; c–II **16.** b; d

**17. a)** $y = -3x + 4$; $a = -3$; $b = 4$

**b)** $y = 4x + 1$; $a = 4$; $b = 1$

**c)** $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$; $a = -\frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$

**d)** $y = 2x + 7$; $a = 2$; $b = 7$

**e)** $y = -\frac{x}{5} + 1$; $a = -\frac{1}{5}$; $b = 1$

**f)** $y = -\frac{5x}{2} - 2$; $a = -\frac{5}{2}$; $b = -2$

**18.** a; c; f; h

**19.** $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = 2x + 3$

**a)** • $f(3) = 1$ e $g(3) = 9$
- $f(-1) = -7$ e $g(-1) = 1$
- $f(7) = 9$ e $g(7) = 17$
- $f(-2) = -9$ e $g(-2) = -1$
- $f(0) = -5$ e $g(0) = 3$

**b)** • f: $x = \frac{13}{2}$; g: $x = \frac{5}{2}$
- f: $x = 3$; g: $x = -1$
- f: $x = -1$; g: $x = -5$
- f: $x = \frac{5}{2}$; g: $x = -\frac{3}{2}$

**20. a)** $p(x) = 8x$ **b)** 64 cm **c)** 4,55 cm

**21. a)** R$ 155,00; R$ 217,50 **c)** $g(m) = 2,5m + 30$

**b)** 45 entregas

**22.** $p(t) = 35t + 7$

**23. a)** $f(x) = 0,06x + 50$

**b)** Sim, pois ela é uma função do tipo $f(x) = ax + b$, em que $a = 0,06$ e $b = 50$.

**c)** • R$ 68,00 • R$ 81,20

**d)** R$ 600,00

**24. a)** $A(x) = 19,10 + 0,26x$; $B(x) = 52,60 + 0,10x$

**b)** R$ 111,66; R$ 88,20

**c)** A partir de 210 minutos de ligação, pois para $x > 209,375$, $B(x) < A(x)$

**25. a)** $y = 85x + 25$

**b)** R$ 450,00

**c)** 4 dias

**26.** $y = 8x + 4$, em que **y** é o número de palitos e **x** o número da figura na sequência.

**27. a)** 27 **b)** $y = 2,5x + 2$ **c)** 8

**28. a)** 30 $cm^2$

**b)** 3 cm

**c)** $y = \frac{12x}{2}$

**29.** **a)** não

**b)** • $f(x) = 62{,}24 + 10{,}79(x - 10)$ ou
$f(x) = 10{,}79x - 45{,}66$

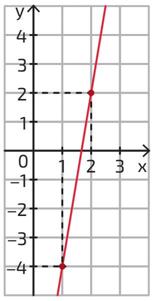
• $f(x) = 278{,}04 + 18{,}40(x - 30)$ ou
$f(x) = 18{,}40x - 273{,}96$

**c)** • R$83,82 • R$267,25 • R$370,00

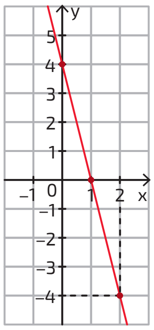
**d)** 17 $m^3$

**30.** a–III; b–I; c–II

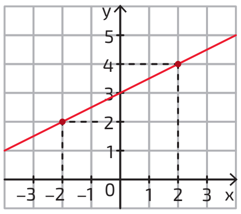
**31.** **a)**



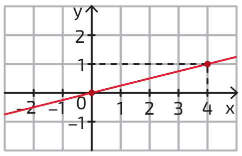
**c)**



**b)**



**d)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

**32.** **a)** 150 kWh

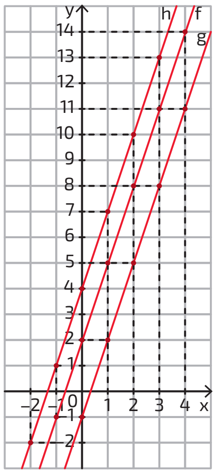
**b)** $f(x) = 50x$

**c)** • 300 kWh • 425 kWh • 775 kWh • 1 200 kWh

**d)** 18 horas

**33.** **a)** $y = 2x$ **b)** $y = -x + 1$

**34.**



Sergio L. Filho

**a)** sim

**b)** São iguais a 3.

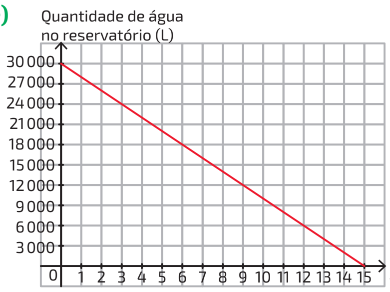
**35.** **a)** $q = 30\,000 - 2\,000t$

**b)** $q = 20\,000$ L

**c)** 12 h

**d)** 15 h

**e)**



Sergio L. Filho

**36.** **a)** $g(x) = \sqrt{2}\,x - 1$; $h(x) = \sqrt{2}\,x + 5$; $m(x) = \sqrt{2}\,x + 2$

**b)** $g(x) = 8x - 1$; $h(x) = 8x + 10$; $m(x) = 8x - 12$

**c)** $g(x) = -4x - 5$; $h(x) = -4x + 1$; $m(x) = -4x + 9$

**37.** Todo **n** tal que $n \neq 1$.

**38.** Possíveis respostas: $(-3,\ 6)$, $(-2,\ 5)$, $(-1,\ 4)$; $(0,\ 3)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$; $(3,\ 0)$, $(4,\ -1)$, $(5,\ -2)$
$f(x) = -x + 3$

**39.** d

**40.** **a)** I e III

**b)** I: $-3$; III: $\frac{3}{2}$

**c)** I: $f(x) = -3x$; III: $h(x) = \frac{3x}{2}$

**41.** **a)** $(0,\ 0)$

**b)** Sim, pois o gráfico é uma reta que passa pelo ponto de coordenadas $(0,\ 0)$.

**c)** 6

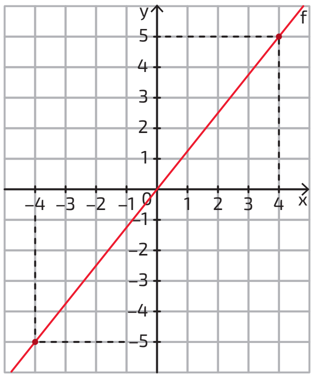
**42.** a

**a)** Representa o gráfico de uma função linear, pois o gráfico é uma reta e passa pelo ponto de coordenadas $(0,\ 0)$.

**b)** Não representa o gráfico de uma função linear, pois o gráfico não é uma reta.

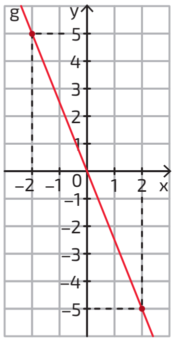
**43.** $f(x) = -\frac{x}{4}$

**44.** **a)**

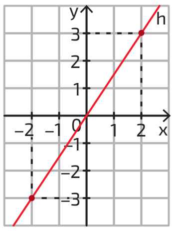


Sergio L. Filho

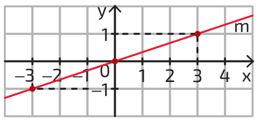
**b)**



**c)**



**d)**

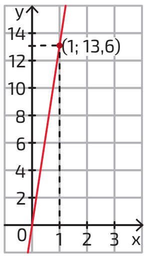


Ilustrações: Sergio L. Filho

**45.** **a)** R$ 3,40; R$ 5,44

**b)** aproximadamente 515 g

**c)** $p(x) = 13,6x$



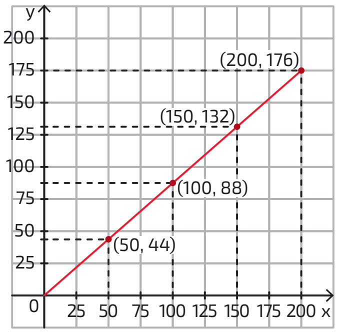
Sergio L. Filho

**d)** R$ 068

**46.** **a)** $y = 0,88x$

**b)** R$ 844,80

**c)**



Sergio L. Filho

**47.** **a)** decresnte; crescente

**b)** A interseção de **f** com o eixo **x** ocorre em $\left(\frac{18}{7}, 0\right)$, e com eixo **y** em (0, 6). A interseção de **g** com o eixo **x** ocorre em $\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$, e com eixo **y** em (0, 2).

**c)** negativo; positivo

**48.** **a)** V

**b)** F; Não existe uma função afim decrescente cujo coeficiente **a** é maior que zero.

**c)** F; Toda função afim cujo coeficiente **a** é maior que zero é crescente.

**d)** F; A reta que representa o gráfico de uma função afim crescente não pode ser paralela à reta que representa o gráfico de uma função afim decrescente.

**49.** Possível resposta:

**a)** $f(x) = 2x + 3$ **b)** $f(x) = -5x$

**50.** decrescente; Possível resposta: ao diminuirmos o valor de **x** de 0 para −2, o valor de **y** aumenta de 0 para 3.

**51.** crescente: h, m, p, q; decrescente: f, g, n, r

**52.** **a)** $p > 3$ **b)** $p < 3$

**54.** **a)** positivo **b)** crescente

**55.** **a)** $n > 0$ **b)** $n > -3$ **c)** $n > 2$ **d)** $n > \frac{7}{10}$

**56.** a: $n < 0$; b: $n < -3$; c: $n < 2$; d: $n < \frac{7}{10}$

**57.** **a)** A: $y = -x + 1$; B: $y = -3x - 3$; C: $y = x - 1$

**b)** A– I; B– III; C– II

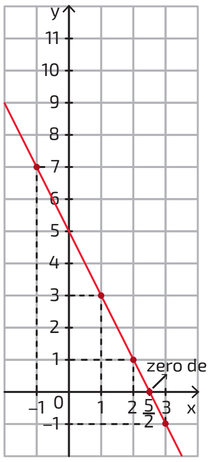
**c)** crescente: **C**; decrescente: **A** e **B**

**58.** **a)** $x = \frac{1}{6}$; $(0, \ -1)$ **d)** $x = 0$; $(0, \ 0)$

**b)** $x = 0$; $(0, \ 0)$ **e)** $x = -2$; $(0, \ 6)$

**c)** $x = 10$; $(0, \ 60)$ **f)** $x = 14$; $(0, \ 2)$

**59.**



Sergio L. Filho

**60.** $k = 2$

**61.** sim

**62.** **a)** $f(x) = 2x - 4$

**b)** crescente

**c)** $x = 2$

**d)** $(0, \ -4)$

**63.** **I )** Verdadeira, pois o coeficiente **a** é menor que zero.

**II)** Falso, pois zero da função é $-\frac{5}{2}$.

**III)** Verdadeiro, pois a função é do tipo $y = ax + b$.

**IV)** Falso, pois a interseção ocorre no ponto de coordenadas $(0, \ -5)$.

**64.** **a)** trote: $y = (220 - x) \cdot 0,7$;
corrida leve: $y = (220 - x) \cdot 0,85$;
corrida intensa: $y = (220 - x) \cdot 0,95$

**65.** **a)** $x = 0$
**b)** $x = 4$
**c)** $x = 1$
**d)** $x = -1$
**e)** $x = 2$

## capítulo 6 Função quadrática

**1.** $f(x) = 5x^2 + 9x + 7$, $h(x) = x^2 + 1$ e $m(x) = \frac{x^2}{3} - 14x$

**2.** **a)** 31 **b)** 3 **c)** 21

**3.** **a)** $y = -8x^2 + 2x - 4$
**b)** $y = 7x^2 - 6$

**4.** funções quadráticas: a, c, d
**a)** $a = 1$, $b = 10$ e $c = 12$
**c)** $a = 1$, $b = 2$ e $c = 6$
**d)** $a = 2$, $b = -10$ e $c = 37$

**5.** **a)** $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$
**b)** $x_1 = -1$ e $x_2 = 0$
**c)** $x_1 = -3$ e $x_2 = 2$

**6.** **a)** $m \neq 0$
**b)** $m \neq -5$ e $m \neq 5$
**c)** $m \neq 3$
**d)** para todo $m \in \mathbb{R}$

**7.** **I )** $A(x) = 6x^2 + 3x$
**II)** $A(x) = x^2 + 2x$
I: 108 u.a; II: 24 u.a

**8.** **a)** • $y = 2x^2$ • $y = 8x^2 + 2x - 15$ • $y = 6x^2 + 2x - 15$
**b)** $x = 8$ m
**c)** quadra: 128 m², 8 m e 16 m; terreno: 513 m², 19 m e 27 m

**9.** **a)** Maior, pois a concavidade da parábola está voltada para cima.
**b)** não **c)** $y = x^2 - 2x - 3$

**10.** a–II; b–III; c–I

**11.** **a)** $n > 0$ **c)** $n < 5$
**b)** $n < 2$ **d)** não existe $n \in \mathbb{R}$

**12.** **a)** f, m; g, h
**c)** h, m

**13.** **a)** 4 s
**b)** 2 s; 20 m
**c)** $h = -5t^2 + 20t$
**d)** • 15 m • 19,8 m • 18,75 m
• 18,75 m • 15 m • 3,8 m

**14.** **a)** (1, 0) e (4, 0); os zeros da função
**b)** (0, 4)
**c)** não
**d)** maior

**15.** **a)** f: $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$; g: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$; m: $x_1 = x_2 = 0$; n: $x_1 = 0$ e $x_2 = 8$
**b)** f: (0, − 15); g: (0, − 9); m: (0, 0); n: (0, 0)
**c)** Possível resposta: a interseção da parábola com o eixo **y** ocorre no ponto de abscissa zero e ordenada **c** (coeficiente independente).

**16.** • $\Delta = 0$, dois zeros reais e iguais
• $\Delta = -40$, não possui zeros reais
• $\Delta = -36$, não possui zeros reais
• $\Delta = 4$, dois zeros reais e diferentes

**17.** **a)** menor do que zero: f; maior do que zero: g e h
**b)** (0, 0)
**c)** f: $x_1 = 1$ e $x_2 = 7$; g: $x_1 = x_2 = 5$

**18.** **a)** $m \neq \frac{7}{3}$ e $m < 5$ **b)** $m = 5$ **c)** $m > 5$

**19.** $b = -4$, $c = 3$; $g(x) = x^2 - 4x + 3$

**20.** **a)** (1, 0) e (5, 0) **c)** (3, − 4)
**b)** (0, 5) **d)** (3, 0)

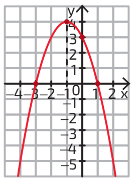
**21.** **a)** (1, 4) **d)** (0, − 3)
**b)** (−2, − 4)
**c)** (−1, 9) **e)** $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{57}{4}\right)$

**22.** **a)** para cima: f, g, n; para baixo: h, m
**b)** 0
**c)** f: (0, 5), g: (0, 8), h: (0, 7), m: (0, − 3); n: (0, − 8)

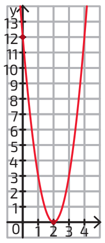
**23.** $n = 1$

**24.** $a = -\frac{1}{4}$ e $c = -9$

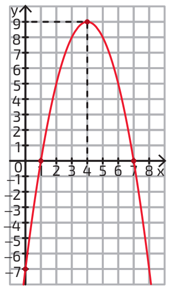
**25.** **a)**



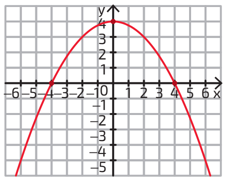
**b)**



**c)**



**d)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

**26.** ponto de máximo: g, m; ponto de mínimo: f, h

**27. a)** ponto de mínimo: $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

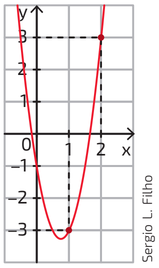
**b)** ponto de máximo: $(0, 0)$

**c)** ponto de mínimo: $\left(-\frac{3}{7}, \frac{26}{7}\right)$

**d)** ponto de máximo: $\left(\frac{2}{3}, \frac{20}{3}\right)$

**28. a)** 2

**b)**



Sergio L. Filho

**29.** –1

**30. a)** m; g

**b)** $(3, 0)$; $\left(\frac{1}{3}, \frac{22}{3}\right)$

**c)** 0; $\frac{22}{3}$

**31. a)**

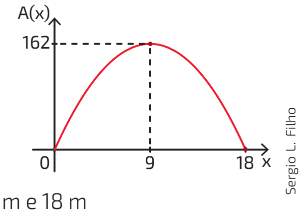
| x | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 4,2 m | 4,55 m | 4,8 m | 4,95 m | 5 m | 4,95 m | 4,8 m | 4,55 m | 4,2 m |

**b)** 5 m

**32. a)** $x = 4$ **b)** 4 cm e 8 cm

**33. a)** $A(x) = 36x - 2x^2$

**b)**



Sergio L. Filho

**c)** 9 m e 18 m

**34. a)** R$ 2 750,00 **b)** 100 peças; R$ 2 000,00

## capítulo 7 Medidas de comprimento e medidas em informática

**1. a)** $2 \cdot 10^5$ m
**b)** $6,52 \cdot 10^6$ km
**c)** $7,8951 \cdot 10^7$ UA
**d)** $9,64125 \cdot 10^{11}$ km

**2. a)** 3
**b)** 2,5
**c)** $1,1968 \cdot 10^9$
**d)** $4,7872 \cdot 10^8$
**e)** 2
**f)** 5
**g)** $3,311 \cdot 10^{13}$
**h)** $9,46 \cdot 10^{13}$

**3. a)** Ceres: aproximadamente 2,77 UA; Plutão: aproximadamente 39,48 UA; Haumea: aproximadamente 42,99 UA; Makemake: aproximadamente 45,34 UA; Éris: aproximadamente 68,05 UA.

**b)**
- aproximadamente 42,57 UA
- aproximadamente 25,06 UA
- aproximadamente 36,71 UA
- aproximadamente 3,51 UA

**4.** • $4,0205 \cdot 10^{13}$ km • $2,6875 \cdot 10^{10}$ UA

**5. a)** aproximadamente 1,52 UA
**b)** aproximadamente 37,96 UA

**7. a)** $3 \cdot 10^{-4}$ m
**b)** $2,22 \cdot 10^{-5}$ m
**c)** $7,56 \cdot 10^{-3}$ m
**d)** $8,9 \cdot 10^{-7}$ m

**8. a)** 9
**b)** 56
**c)** 0,89
**d)** $3 \cdot 10^{-6}$
**e)** $5,23 \cdot 10^{-4}$
**f)** $6 \cdot 10^{-7}$

**10.** 1 000 μm

**11. a)** 0,0000015 m

**12.** 0,00005 m; 0,0003 m

**13. a)**
- *Megaphragma caríbea*: 0,0001778 m; *Nanossella fungi*: 0,0003 m
- *Megaphragma caribea*: 177,8 μm; *Nanossella fungi*: 300 μm

**14. a)** HD externo
**b)** 4 812,8 MB; 32 768 MB
**c)** 1 536 MB

**15. a)** 4.8 MB **b)** 16 GB **c)** 2 TB **d)** 92 KB

**16.** b

**18.** 19,2 GB

**19.** 5%

**20. a)** 47 185 920 B
**b)** aproximadamente 0,0000591 TB
**c)** 18 874,368 KB
**d)** 0,09 MB

**21. a)** 819 fotografias
**b)** 3 276 fotografias
**c)** 13 107 fotografias

**22. a)** 2,8125 MB
**b)** aproximadamente 41,34 MB; 5,625 MB

**23. a)** 204,8 GB
**b)** 5 DVDs

**24.** **a)** 2,1 GHz; 2 100 000 000 Hz
**b)** • 1 TB • 8 GB
**c)** 15"
**d)** *drive* óptico

**25.** **a)** 1,4 GHz
**b)** 300 MHz

**26.** **a)** 2 200 000 000 ciclos por segundo
**b)** 900 000 000 ciclos por segundo
**c)** 1 800 000 000 ciclos por segundo

**27.** **a)** computador A
**b)** 8 h; 10 Mbps
**c)** 13 h; 7 200 kbps

**28.** A: 320; B: 27; C: 10

**29.** **a)** aproximadamente 22,8 s
**b)** aproximadamente 68,27 MB
**c)** 39 min

**30.** **a)** 24 s
**b)** 40 s
**c)** aproximadamente 35 min 33 s
**d)** aproximadamente 45 min 31 s

**31.** **a)** Renata: 5 Mbps; Daniel: 8 Mbps; Amanda: aproximadamente: 3 Mbps
**b)** Daniel; Amanda
**c)** 24 s

**32.** **a)** Adriano: I; Beatriz: I e II; Cláudia: nenhum critério

## capítulo 8 Semelhança

**1.** 25°

**2.** **I )** 10°; 60°
**II)** 18°; 38°

**3.** med$(\hat{a}) = 60°$; med$(\hat{b}) = 120°$

**4.** **I )** 60° **II)** 116°

**6.** Possíveis respostas: Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são congruentes. Considerando $\hat{c}$ o ângulo alterno externo ao ângulo $\hat{b}$, quando consideramos as retas paralelas $s_1$ e $s_2$ e a transversal $r_1$, temos que med$(\hat{c})$=med$(\hat{b})$. Este mesmo ângulo $\hat{c}$ é correspondente ao ângulo $\hat{a}$ quando consideramos as paralelas $r_1$ e $r_2$ com relação à reta transversal $s_1$, logo med$(\hat{c})$=med$(\hat{a})$. Portanto, med$(\hat{a})$=med$(\hat{b})$.

**7.** **a)** $\frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0,333...$

**b)** $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4$

**c)** $\frac{20}{4} = 5$

**8.** **a)** $\frac{10}{4} = 2,5$
**b)** Não, pois $\frac{13}{7} \neq \frac{10}{4}$.

**9.** ST = 25 cm

**10.** x = 3 cm; y = 5 cm; z = 22 cm

**11.** **a)** 750 km
**b)** 1 140 km

**12.** b; c; f; h

**13.** II

**14.** não; Possível resposta: pois $\frac{3}{3,9} \neq \frac{3}{3,2}$

**15.** $x = 7,2$m

**16.** **a)** 72 m; 54 m
**b)** 396 m

**17.** **a)** $x = 7,5$ m; $y = 20,8$ m
**b)** $x = 9$ m; $y = 4,5$ m

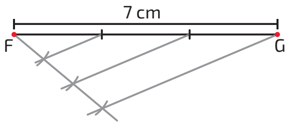
**19.** **a)** $a = \sqrt{241}$ m
**b)** $a = 8$ m

**20.** **a)** $a = 9$ m; $b = 6$ m; $c = 18$ m
**b)** $a = 19,25$ m; $b = 11$ m; $c = 16,5$ m

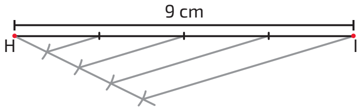
**21.** **a)** $x = 1,2$
**b)** $x = 3$
**c)** $x = 1$ ou $x = -1$

**22.** $p = 4,1$ m; $q = 20,5$ m

**23.** •



•



Ilustrações: Sergio L. Filho

**24.** **a)** $a = 21$ cm; $b = 31,5$ cm; $c = 16$ cm; $d = 27$ cm

**25.** Possível resposta: $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$; $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$; $\frac{f}{e} = \frac{c}{b}$;

$\frac{a+b}{b} = \frac{d+e}{e}$; $\frac{a}{a+b+c} = \frac{d}{d+e+f}$; $\frac{a}{b+c} = \frac{d}{e+f}$

**26.** AB = 10,4 cm; AC = 13 cm; BC = 11 cm

**27.** 56 cm

**28.** **a)** $x = 14,7$ m
**b)** $x = 2,6$ m

**29.** 155,8 cm

**30. a)** $x = 12$ cm e $y = 21$ cm
**b)** $x = 43$ cm e $y = 28$ cm

**32.** $x = 28$ cm

**33. a)** não semelhantes
**b)** semelhantes; $\frac{3}{2} = 1,5$

**34. a)** semelhantes
**b)** não semelhantes

**35. a)** 9 cm; 13,5 cm
**b)** $\frac{2}{3}$ ou $0,666...$
**c)** $\frac{2}{3}$ ou $0,666...$

**36. a)** perímetro: 17,6 m; perímetro 26,4 m
**b)** perímetro 27,5 m; perímetro: 16,5 m

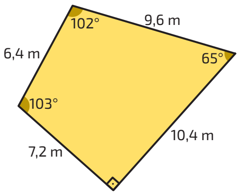
**37. a)** correto
**b)** correto
**c)** incorreto

**38.** maior: 8,4 cm; menor: 2,4 cm

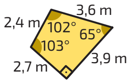
**39. a)** sim
**b)** $\frac{5,5}{4,4} = \frac{5}{4} = 1,25$
**c)** $\frac{27,5}{22} = \frac{5}{4} = 1,25$
**d)** sim; sim

**41. a)** 2 cm; 4,2 cm
**b)** $\frac{4,2}{2} = 2,1$

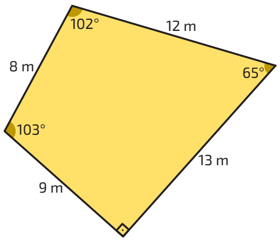
**42. a)**



**b)**

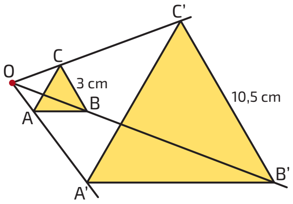


**c)**

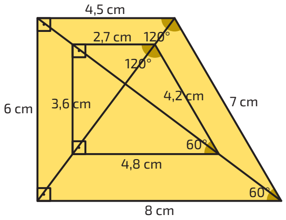


Ilustrações: Sergio L. Filho

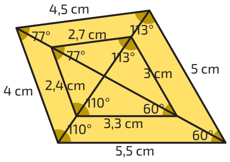
**43**



**44 a)**



**b)**



Ilustrações: Sergio L. Filho

**45. a)** sim
**b)** • 2 • AA

**46.** a, f: AA; b, e: LAL; c, d: LLL

**47. a)** sim; Possíveis respostas: LLL; LAL
**b)** Não, pois as medidas do comprimento dos lados correspondentes são diferentes.

**48. a)** $x = 12,6$ cm **b)** $x = 7$ m

**49.** 200 cm **50.** 19,8 m **51.** 27 $\text{cm}^2$

**52. a)** $x = 9$ m **b)** $x = 3,6$ m

**54. a)** AA; $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BE}$, $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$
**b)** $\frac{12,6}{8,1} = \frac{14}{9} = 1,555...$
**c)** $BE = 13,5$ cm

**55.** 52,5 m

## capítulo 9 Relações no triângulo retângulo

**1. a)** $\Delta ABC$: $\text{med}(B\hat{A}C) = 90°$; $\text{med}(A\hat{B}C) = 53°$; $\text{med}(A\hat{C}B) = 37°$;
$\Delta ABD$: $\text{med}(B\hat{A}D) = 37°$; $\text{med}(A\hat{B}D) = 53°$; $\text{med}(A\hat{D}B) = 90°$;
$\Delta ACD$: $\text{med}(C\hat{A}D) = 53°$; $\text{med}(A\hat{C}D) = 37°$; $\text{med}(A\hat{D}C) = 90°$
**b)** $\Delta ABC \sim \Delta ABD \sim \Delta ACD$

**2. a)** $x = 20$ cm

**b)** $x = \frac{120}{13}$ cm ou $s \simeq 9{,}23$ cm

**c)** $x = 18$ cm

**d)** $x = 2\sqrt{21}$ cm ou $x \simeq 9{,}17$ cm

**e)** $x = 15{,}75$ cm

**3. a)** $x = 49$ cm; $y = 3\sqrt{58}$ cm $\simeq 22{,}85$ cm; $z = 7\sqrt{58}$ cm $\simeq 53{,}31$ cm

**b)** $x = 8\sqrt{10}$ cm $\simeq 25{,}3$ cm; $y = 8\sqrt{15}$ cm $\simeq 30{,}98$ cm; $z = 40$ cm

**c)** $x = 30$ cm; $y = 22{,}5$ cm; $z = 62{,}5$ cm

**d)** $x = 16$ cm; $y = 20$ cm; $z = 5\sqrt{41}$ cm $\simeq 32{,}02$ cm

**e)** $x = 30$ cm; $y = 24$ cm; $z = 40$ cm

**f)** $x = 20$ cm; $y = 25$ cm; $z = 15\sqrt{5}$ cm $\simeq 33{,}54$ cm

**4. a)** 30 m; 37,5 $m^2$ **c)** 30 m; 30 $m^2$

**b)** 24 m; 24 $m^2$

**5.** 52 cm; 156 $cm^2$

**6.** $x = 3\sqrt{2}$ cm ou $x \simeq 4{,}24$ cm

**7. a)** 24 m **b)** 36 m

**8.** 1 500 $m^2$ **9.** II e IV **10.** 102 cm

**11.** aproximadamente 5,7 m

**12.** 24 cm **15.** 7,5 m **17.** 8 cúbitos

**13.** 6 m **16.** $3\sqrt{3}$ m

**18.** $9\sqrt{3}$ $cm^2$ ou aproximadamentev 15,59 $cm^2$

**19.** $\sqrt{53}$ unidades de comprimento

**20. a)** • 4 unidades de comprimento

- 3 unidades de comprimento

**b)** • 5 unidades de comprimento

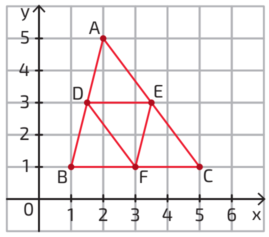
- $\sqrt{13}$ unidades de comprimento

**c)** não; sim

**21.** I: medida da área: 6 unidades de área; medida do perímetro: $2\sqrt{3} + 4$ unidades de comprimento; II: medida da área: 16 unidades de área; medida do perímetro: $2\sqrt{5} + 12$ unidades de comprimento

**22. a)** $D\left(\frac{3}{2}, 3\right)$, $E\left(\frac{7}{2}, 3\right)$, $F(3,1)$

**b)**



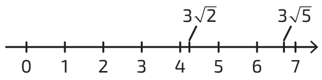
Sergio L. Filho

$\frac{1}{2}\left(\sqrt{17} + 9\right)$ unidades de comprimento

**23. I )** $2\sqrt{2}$ cm **II)** $3\sqrt{2}$ cm **III )** $4\sqrt{2}$ cm **IV )** $5\sqrt{2}$ cm

**b)** $d = \ell\sqrt{2}$

**24.** $AC = 3\sqrt{5}$ unidades de comprimento; $EG = 3\sqrt{2}$ unidades de comprimento

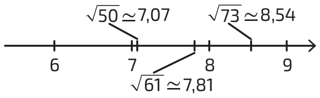


Sergio L. Filho

**25.** • $\sqrt{73}$ unidades de comprimento

- $\sqrt{61}$ unidades de comprimento
- $\sqrt{50}$ unidades de comprimento

**a)**



Sergio L. Filho

**26.** ΔABC

$\hat{B}$: $\overline{AC}$ é cateto oposto e $\overline{AB}$ é cateto adjacente;

$\hat{C}$: $\overline{AB}$ é cateto oposto e $\overline{AC}$ é cateto adjacente

ΔDEF

$\hat{D}$: $\overline{EF}$ é cateto oposto e $\overline{DE}$ é cateto adjacente;

$\hat{F}$: $\overline{DE}$ é cateto oposto e $\overline{EF}$ é cateto adjacente

ΔGHI

$\hat{G}$: $\overline{HI}$ é cateto oposto e $\overline{GH}$ pé cateto adjacente;

$\hat{I}$: $\overline{GH}$ é cateto oposto e $\overline{HI}$ é cateto adjacente

ΔJKL

$\hat{J}$: $\overline{KL}$é cateto oposto e $\overline{JK}$ é cateto adjacente;

$\hat{L}$: $\overline{JK}$ é cateto oposto e $\overline{KL}$ é cateto adjacente

**27. a)** $BC \simeq 20{,}758$ cm

**b)** 60°

**c)** Complementares, pois $med(\hat{A}) + med(\hat{B}) = 90°$.

**d)** $\text{sen } 30° = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$; $\cos \alpha = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$; são iguais

**28. a)** $\text{sen } \alpha \simeq 0{,}724$; $\cos \alpha \simeq 0{,}690$; $\text{tg } \alpha \simeq 1{,}05$

**b)** $\text{sen } \alpha \simeq 0{,}180$; $\cos \alpha \simeq 0{,}984$; $\text{tg } \alpha \simeq 0{,}183$

**c)** $\text{sen } \alpha \simeq 0{,}6$; $\cos \alpha \simeq 0{,}8$; $\text{tg } \alpha \simeq 0{,}75$

**29.** tg a = 1; tg b = 0,5; tg c = 1; tg d = 2

**30. a)** $\cos 50° \simeq 0{,}646$; $\text{tg } 50° \simeq 1{,}190$

**b)** • $\text{sen } 21° \simeq 0{,}358$; $\cos 21° \simeq 0{,}934$; $\text{tg } 21° \simeq 0{,}384$

- $\text{sen } 36° \simeq 0{,}588$; $\cos 36° \simeq 0{,}809$; $\text{tg } 36° \simeq 0{,}727$
- $\text{sen } 55° \simeq 0{,}819$; $\cos 55° \simeq 0{,}574$; $\text{tg } 55° \simeq 1{,}428$
- $\text{sen } 70° \simeq 0{,}940$; $\cos 70° \simeq 0{,}342$; $\text{tg } 70° \simeq 2{,}747$

**31.** 0,724; 0,690

**32. a)** 0,259 **d)** 0,342

**b)** 0,996 **e)** 0,488

**c)** 0,799 **f)** 1,111

**33. a)** 21°
**b)** 54°
**c)** 40°
**d)** 68°
**e)** 10°
**f)** 84°

**34. a)** 4 cm
**b)** 3 cm
**c)** 6 cm
**d)** 2 cm
**e)** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ cm ou aproximadamente 1,443 cm
**f)** 3,8 cm

**35. a)** 44°
**b)** 19°
**c)** 47°
**d)** 40°

**36.** 13,661 cm

**37.** 4,35 m

**38.** 37,65 m

**39.** 45°

**40.** 12,028 m

**41.** 5,698 m

**42.** $\text{med}(\widehat{a}) \simeq 13$; $\text{med}(\widehat{b}) \simeq 11°$; $\text{med}(\widehat{c}) \simeq 10°$

**43. a)** 3,24 $\text{cm}^2$
**b)** $2\sqrt{3}$ $\text{cm}^2$ ou 3,464 $\text{cm}^2$

**44.** perímetro: 14 cm; área: $6\sqrt{3}$ $\text{cm}^2$ ou 10,392 $\text{cm}^2$

**45. a)** Possível resposta: para que possa ter maior independência no acesso a locais públicos.
**b)** • 3º
• Sim, pois $\frac{25}{500} = 0,05 \leq 0,0833$
**d)** 600 cm ou 6 m

**46.** $4\sqrt{3}$ m ou aproximadamente 6,928 m

**47.** 13,581 $\text{cm}^2$

**48.** a

**49. a)** $x = 5,84$ cm
**b)** $x = 17,5$ cm
**c)** $x \simeq 8,12$ cm
**d)** $x \simeq 21,87$ cm

**50.** 31,63 m

**51.** 2,605 m

**52.** 75,452 m; 40,452 m

**53. a)** altura mínima: 1,2 m; altura máxima: 6,5 m
**b)** • 3,28 m • 4,46 m • 5,89 m
**c)** • 9° • 22° • 31°

## capítulo 10 Estatística e probabilidade

**1. a)** O gráfico de setores.
**c)** R$ 1 725,00;
julho, agosto e dezembro

**2. a)** Ana: 1,1;
Bruno: 1,9;
Marta: 4,0;
Ricardo: 7,1
**b)** Ricardo

**3. a)** média: R$ 291,40;
moda: amodal;
mediana: R$ 257,00

**5. a)** Título do gráfico.
**b)** Data à qual os dados se referem.
**c)** Legenda do gráfico.
**d)** Fonte das informações.

**6. a)** Mais celulares

**7. b)** janeiro; R$ 7 564,12

**8. a)** 45,26% ; 6,76%

**9. a)** Sim, pois apresentam os mesmos valores, títulos e fonte das informações.
**c)** Gráfico **I**, a escala utilizada no eixo vertical.

**10. a)** janeiro: 8,46%; maio: 8,21%; 0,25%

**11. a)** Pesquisa amostral.
**b)** Pesquisa censitária.
**c)** Pesquisa censitária.

**12. a)** sistemática
**b)** aleatória
**c)** estratificada

**14. a)** dependente
**b)** independente
**c)** dependente

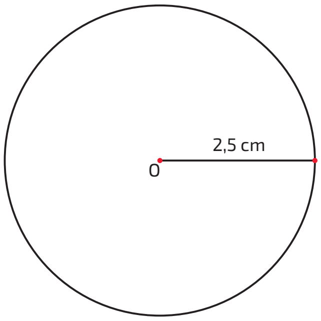
**15. a)** $S = \{(C\,C\,C), (C\,C\,K), (C\,K\,C), (C\,K\,K), (K\,C\,C), (K\,C\,K), (K\,K\,C), (K\,K\,K)\}$
**b)** • $\frac{1}{2}$ • $\frac{1}{2}$ • $\frac{1}{8}$

**16.** • $\frac{1}{4}$ • $\frac{2}{7}$

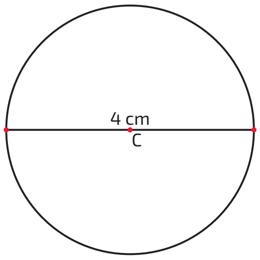
**17. a)** $\frac{1}{36}; \frac{5}{36}$
**b)** Maior do que 50%.
**c)** 7

# capítulo 11 Circunferência e círculo

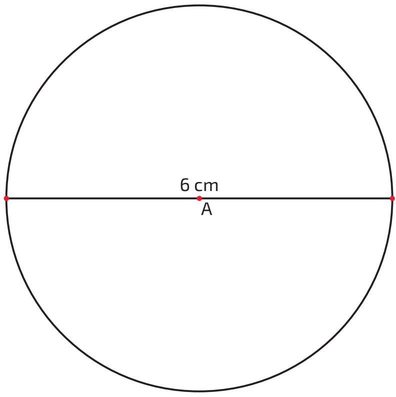
**1. a)**



**b)**

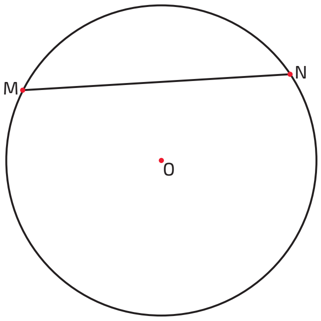


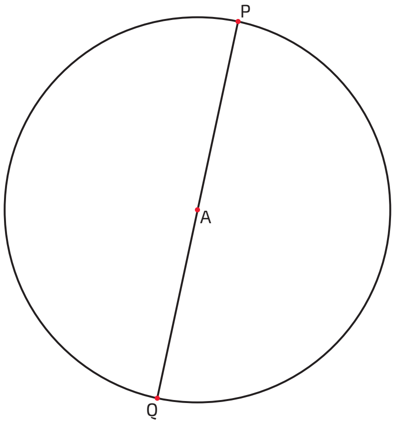
**c)**

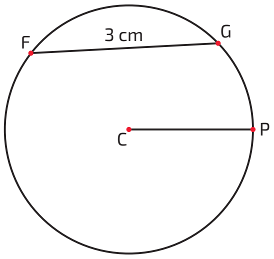


Ilustrações: Sergio L. Filho

**2.** Possível resposta:

- 

- 

- 

Ilustrações: Sergio L. Filho

**3.** $\text{med}(\hat{x}) = 144^\circ$, $\text{med}(\hat{y}) = 72^\circ$ e $\text{med}(\hat{z}) = 24^\circ$

**4. a)** $\text{med}(A\hat{O}B) = 55^\circ$, $\text{med}(B\hat{O}C) = 75^\circ$ e $\text{med}(C\hat{O}A) = 230^\circ$

**b)** $\text{med}(D\hat{O}E) = 80^\circ$, $\text{med}(E\hat{O}F) = 130^\circ$ e $\text{med}(F\hat{O}D) = 150^\circ$

**c)** $\text{med}(G\hat{O}H) = 48^\circ$, $\text{med}(H\hat{O}I) = 140^\circ$, $\text{med}(I\hat{O}J) = 76^\circ$ e $\text{med}(J\hat{O}G) = 96^\circ$

**d)** $\text{med}(K\hat{O}L) = 60^\circ$, $\text{med}(L\hat{O}M) = 90^\circ$, $\text{med}(M\hat{O}N) = 42^\circ$ e $\text{med}(N\hat{O}K) = 168^\circ$

**5. a)** 35°

**b)** 40°

**c)** 40°

**6. a)** $x = 10^\circ$, $\text{med}(A\hat{B}C) = 45^\circ$ e $\text{med}(A\hat{O}C) = 90^\circ$

**b)** $x = 26^\circ$, $\text{med}(A\hat{B}C) = 65^\circ$ e $\text{med}(A\hat{O}C) = 130^\circ$

**7. a)** $x = 15^\circ$

**b)** $x = 30^\circ$

**8.** $\text{med}(A\hat{O}C) = 108^\circ$

**9.** $\text{med}(A\hat{B}C) = 76^\circ$; $\text{med}(A\hat{D}C) = 104^\circ$

**10.** $x = 17^\circ$, $\text{med}(A\hat{B}C) = 90^\circ$, $\text{med}(A\hat{C}B) = 56^\circ$ e $\text{med}(B\hat{A}C) = 34^\circ$

**11. a)** 120°

**b)** eneágono regular: 40°;
polígono regular de 20 lados: 18°

**c)** $\frac{360°}{n}$

**12. a)** $\text{med}(A\hat{C}B) = \text{med}(A\hat{D}B) = \text{med}(A\hat{E}B) =$
$= \text{med}(A\hat{F}B) = 90°$

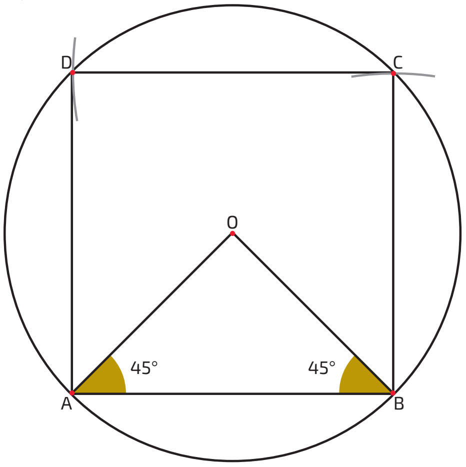
**b)** Iguais, pois são ângulos inscritos que correspondem a um mesmo arco. Nesse caso, o ângulo central mede 180°, e os inscritos, metade de 180°, ou seja, 90°.

**13. a)** $\text{med}(\hat{O}) = 36°$; $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 72°$

**b)** $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 75°$

**c)** $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 90° - \frac{180°}{p}$

**14. a)**



Sergio L. Filho

**b)** Resposta pessoal. Possível resposta:

**1º)** Trace o lado $\overline{AB}$ do polígono com medida de comprimento de 3 cm.

**2º)** A partir de $\overline{AB}$, construa o triângulo isósceles AOB, cuja medida de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ seja de 75°.

**3º)** Com a ponta-seca do compasso em **O** e abertura igual a **AO**, trace uma circunferência.

**4º)** Agora, com a ponta-seca do compasso em **B** e abertura igual **AB**, trace um arco sobre a circunferência e marque o ponto **C**, que é um dos vértices do polígono.

**5º)** Como ainda não foram obtidos todos os vértices do polígono considere o último vértice obtido e, utilizando o procedimento do passo anterior, trace todos os vértices do polígono.

**6º)** Ligue os vértices para formar o polígono desejado.

**15.** aproximadamente 62,8 cm

**16. a)** 87,92 cm
**b)** 92,52 cm
**c)** 57,12 cm

**17.** 47,1 cm

**18. a)** 8 voltas
**b)** 12,5 cm

**19.** aproximadamente 87,92 cm

**20. a)** aproximadamente 21,98 cm
**b)** aproximadamente 37,37 cm
**c)** aproximadamente 40,82 cm
**d)** aproximadamente 40,13 cm

**21.** 50 voltas

**22. a)** aproximadamente 15,7 cm
**b)** aproximadamente 12,56 cm;
aproximadamente 9,0432 cm

**23.** 135°

**24.** 35°

**25. a)** 90°
**b)** 105°

**26. a)** 12,9 voltas

**27. a)** aproximadamente 24,62 $cm^2$
**b)** aproximadamente 18,09 $cm^2$

**28.** aproximadamente 254,34 $m^2$

**29.** aproximadamente 12 cm

**30.** aproximadamente 40 cm

**31. a)** 176,58 $cm^2$
**b)** 57,83 $cm^2$
**c)** 78,08 $cm^2$

**32. b)** não

**33. a)** 24 círculos
**b)** aproximadamente 706,5 $cm^2$
**c)** aproximadamente 7 044 $cm^2$

**34. a)** I: aproximadamente 297,68 $cm^2$;
II: aproximadamente 114,77 $cm^2$;
III: aproximadamente 144,22 $cm^2$

**b)** I: $\frac{3}{8}$; II: $\frac{1}{8}$; III: $\frac{1}{6}$

**35. a)** 4,03 $cm^2$
**b)** 16,12 $cm^2$
**c)** 16,97 $cm^2$
**d)** 26,705 $cm^2$

**36. a)** • 80° • 70° • 210°

**b)** • 47,64 cm² • 15,88 cm² • 18,15 cm²

**37. a)** 2 cm

**b)** aproximadamente 69,08 cm²

**38. a)** aproximadamente 55,1 cm²

**39. a)** aproximadamente 1 309,85 cm²

**b)** aproximadamente 2 303,88 cm²

**c)** aproximadamente 1 375,45 cm²

**d)** aproximadamente 1 648,12 cm²

**40.** • aproximadamente 2,04 m²

- aproximadamente 5,5 m²
- aproximadamente 3,67 m²
- aproximadamente 2,14 m²

**41.** 317,93 mm²

**42.** 112,44 cm²

**43.** aproximadamente 220,78 m²

**44.** aproximadamente 182 m²

**45. a)** aproximadamente 22,9 m²

**b)** aproximadamente 87,2 m²

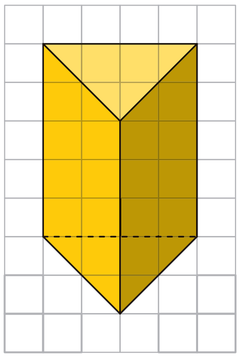
## capítulo 12 Figuras geométricas espaciais

**1.** poliedros: II, III e VI; não poliedros: I, IV e V

**2.** b

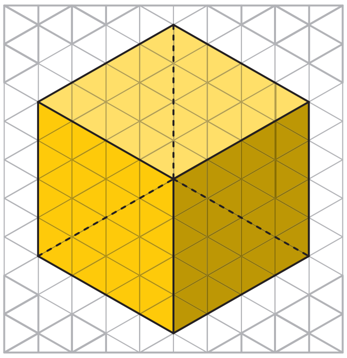
**3.** prisma de base triangular

Possível resposta:



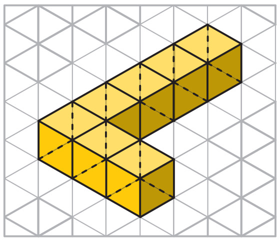
Sergio L. Filho

**4.**



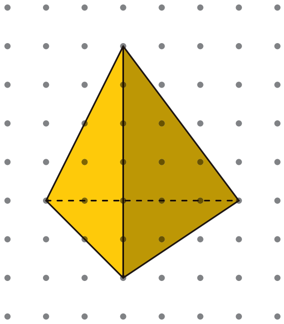
Sergio L. Filho

**5.** letra E



Sergio L. Filho

**6.**



Sergio L. Filho

**a)** 6 arestas

**b)** triângulo

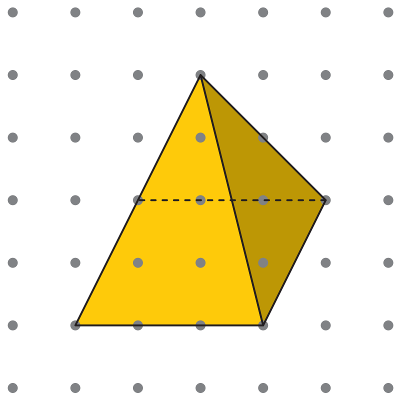
**7. a)** vista lateral esquerda

**b)** vista superior

**c)** vista lateral direita

**8.** esfera

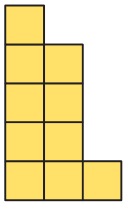
**9.** pirâmide de base quadrangular



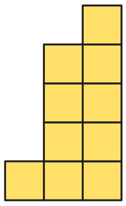
Sergio L. Filho

**10.** a

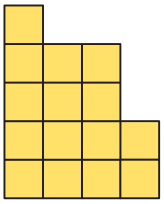
**11.** vista lateral esquerda:



vista lateral direita:



vista frontal:



Ilustrações: Sergio L. Filho

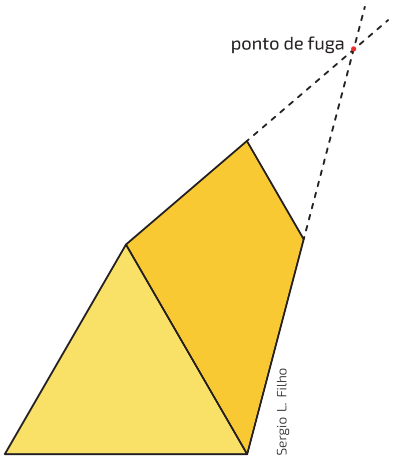
**12.** b e c

**13.** **a)** perspectiva cavaleira
**b)** perspectiva isométrica
**c)** perspectiva cônica

**14.** c

**15.** c

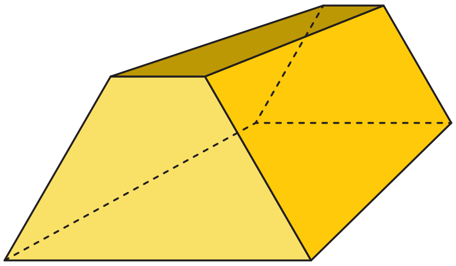
**16.** Possível resposta:



Sergio L. Filho

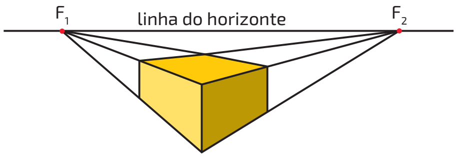
**17.** b

**18.** Possível resposta:



Sergio L. Filho

**19.** Possível resposta:



Sergio L. Filho

**20.** **a)** 28 $m^3$
**b)** 30 $dm^3$
**c)** 588,75 $cm^3$

**21.** 15 cm

**22.** 581,6 L

**23.** 1,47 dm

**24.** altura: 6 cm; raio: 3 cm

**25.** 0,088 $m^3$

**27.** O peso confeccionado a partir do molde **I**. O dobro.

**28.** 13 500 $cm^3$

# Bibliografia

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo padrões pitagóricos**: geométricos e numéricos. 4. ed. São Paulo: Atual, 2012.

BOYER, Carl; MERZBACH, Uta. **História da Matemática**. 3. ed. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 25 set. 2018.

CARDOSO, Virgínia Cardia. **Materiais didáticos para as quatro operações**. 3. ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 1996.

CENTURIÓN, Marília. **Conteúdo e metodologia da Matemática**: números e operações. 2. ed. São Paulo: Scipione, 1995.

COLL, César et al. **O construtivismo na sala de aula**. 6. ed. Tradução de Cláudia Schilling. São Paulo: Ática, 1999.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José. **Fundamentos de Matemática elementar**: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FREITAS, Ladir Souza de; GARCIA, Airton Alves. **Matemática passo a passo, com teorias e exercícios de aplicação**. São Paulo: Avercamp, 2011.

GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio**. Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

GUELLI, Oscar. **Jogando com a Matemática**. 8. ed. São Paulo: Ática, 1998. (Contando a História da Matemática).

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 2.

KENNEDY, Edward S. **História da Trigonometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula).

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 1.

______. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 2.

______. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 3.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Alberto P. (Org.). **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2012.

MACHADO, Nílson José. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MORGADO, Augusto et al. **Análise combinatória e probabilidade**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção do Professor de Matemática).

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo Matemática**. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artmed, 2004.

OCHI, Fusako Hori et al. **O uso de quadriculados no ensino da Geometria**. 3. ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 1997.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SCHLIEMANN, Analúcia; NUNES, Terezinha; CARRAMBER, David. **Na vida dez, na escola zero**. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

SMOLE, Kátia; DINIZ, Maria; CÂNDIDO, Patrícia. (Org.). **Resolução de problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2000. (Matemática de 0 a 6).

SOUZA, Eliane; DINIZ, Maria. **Álgebra**: das variáveis às equações e funções. 2. ed. São Paulo: IME-USP, 1996.

STAREPRAVO, Ana Ruth. **Jogando com a Matemática**: números e operações. Curitiba: Aymará, 2009.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 87. ed. Rio de Janeiro: Record, 2001.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Didática de Matemática**: como dois e dois. São Paulo: FTD, 1997.

ISBN 978-854740167-2

9 788547 401672