

סופרימום אינפימום

תרגיל 1

נתונה הקבוצה

$$A = \mathbb{N}$$

מצאו, אם קיימים:

$$\inf(A), \sup(A), \min(A), \max(A)$$

תרגיל 2

נתונה הקבוצה

$$A = \{\cos x \mid x \in [0, 2\pi)\}$$

מצאו, אם קיימים:

$$\inf(A), \sup(A), \min(A), \max(A)$$

תרגיל 3

נתונה הקבוצה

$$A = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

מצאו, אם קיימים:

$$\inf(A), \sup(A), \min(A), \max(A)$$

תרגיל 4

נתונה הקבוצה

$$A = \left\{ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \mid x, y \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

מצאו, אם קיימים:

$$\inf(A), \sup(A), \min(A), \max(A)$$

תרגיל 5

נתונה הקבוצה

$$A = \left\{ \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \mid x, y, z \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

מצאו, אם קיימים:

$$\inf(A), \sup(A), \min(A), \max(A)$$

תרגיל 6

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלמטה. נגדיר

$$-A = \{-x \mid x \in A\}$$

הוכיחו כי:

$$\sup(-A) = -\inf(A)$$

תרגיל 7

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלמעלה. נגדיר

$$-A = \{-x \mid x \in A\}$$

הוכיחו כי:

$$\inf(-A) = -\sup(A)$$

תרגיל 8

יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות וחסומות מלמעלה.

נגדיר

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$$

הוכיחו כי:

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

תרגיל 9

יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות, כך ש- A חסומה מלמעלה ו- B חסומה מלמטה.

נגדיר

$$A - B = \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$$

הוכיחו כי:

$$\sup (A - B) = \sup (A) - \inf (B)$$

תרגיל 10

יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}$ תתי־קבוצות לא ריקות וחסומות מלמעלה. הוכיחו כי:

$$\sup (A \cup B) = \max \{ \sup (A), \sup (B) \}$$

תרגיל 11

יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}$ תתי־קבוצות לא ריקות וחסומות מלמטה. הוכיחו כי:

$$\inf (A \cup B) = \min \{ \inf (A), \inf (B) \}$$

תרגיל 12

יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ תתי־קבוצות לא ריקות וחסומות. נגדיר

$$A \cdot B = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$$

הוכיחו כי:

$$\sup (A \cdot B) = \sup (A) \cdot \sup (B)$$

תרגיל 13

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^+$ קבוצה לא ריקה וחסומה, ונניח כי

$$\inf (A) > 0$$

נגדיר

$$\frac{1}{A} = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in A \right\}$$

הוכיחו כי:

$$\sup \left(\frac{1}{A} \right) = \frac{1}{\inf (A)}$$

תרגיל 14

נתונה הקבוצה

$$A = \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + n^{(-1)^n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

מצאו:

$$\sup (A), \inf (A)$$

תרגיל 15

נתונה הקבוצה

$$A = \left\{ \frac{k^2 + (-1)^k k^2}{2(k^2 + 1)} \mid k \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

מצאו:

$$\sup(A), \inf(A)$$

תרגיל 16

נתונה הקבוצה

$$A = \left\{ n + (-1)^n n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

מצאו:

$$\sup(A), \inf(A)$$

תרגיל 17

נתונה הקבוצה

$$A = \left\{ \frac{n + \sqrt{m}}{\sqrt{n} + m} \mid n, m \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

מצאו:

$$\sup(A), \inf(A)$$

תרגיל 18

נתונה הקבוצה

$$A = \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

מצאו:

$$\sup(A), \inf(A)$$

תרגיל 19

נתונה הקבוצה

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{N}^+, m < 2n \right\}$$

מצאו:

$$\sup(A), \inf(A)$$

פרק 1 - סדרות

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n}$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(n)}{n}$$

תרגיל 3

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n}$$

תרגיל 4

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}}{n^5}$$

תרגיל 5

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n + 1}$$

תרגיל 6

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n + \sqrt{n}}}$$

תרגיל 7

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}}}$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3}{(n+1)^2(n+2)^2}$$

תרגיל 9

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n}$$

תרגיל 10

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\sin^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

תרגיל 11

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 17\right)}{\cos(e^{-n})}$$

תרגיל 12

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - n^2)^3}{(8n^3 + 2n)^2}$$

תרגיל 13

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 5)^3}{(124 + 34n + n^2 + 3n^3)^4}$$

תרגיל 14

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 + n + 1)^3 - (n^3 + n)^2}{(n + 1)^6}$$

תרגיל 15

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

תרגיל 16

יהי c מספר ממשי.

נתונה הסדרה (a_n) המוגדרת על ידי:

$$a_n = \sqrt{n+1} - c\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$$

מצאו לאן הסדרה מתכנסת, כתלות בערך של c .

סנדוויץ

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$$

תרגיל 3

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}$$

תרגיל 4

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(2x)(x^3 + 18x + 2)}{(x + 1)^2(x - 1)^2}$$

תרגיל 5

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 x(x^2 + 4x + 1)}{x^3(2x + 4)^2}$$

תרגיל 6

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + \cos x}{x^2 + 4x}$$

תרגיל 7

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + \sin x}$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^4 + 1} + \frac{1}{n^4 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^4 + n} \right)$$

תרגיל 9

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^4 + 1} + \frac{2}{n^4 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^4 + n} \right)$$

תרגיל 10

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^3 + 1} + \frac{2n}{n^3 + 2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3 + n} \right)$$

תרגיל 11

נתונה הסדרה (a_n) המוגדרת על ידי:

$$a_n = \frac{[\pi] + [2\pi] + \cdots + [n\pi]}{n^2}$$

כאשר $[x]$ מסמן את החלק השלם של x .

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

תרגיל 12

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^2 + k}}$$

תרגיל 13

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^2 + \sqrt{k}}}$$

תרגיל 14

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^3} \frac{n}{n^3 + k}$$

תרגיל 15

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{n^3 + k^3}$$

תרגיל 16

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n^2 + k}\right)$$

$$e$$

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(1 + \frac{1}{\tan x}\right)^{\tan x}$$

תרגיל 3

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

תרגיל 4

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2 + 2x + 6}\right)^x$$

תרגיל 5

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x + 5}\right)^x$$

תרגיל 6

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{17x + 4}\right)^{\frac{x^2 + 6}{x}}$$

תרגיל 7

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 8x + 3} \right)^x$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3n - 1}{n^2 + 5} \right)^{4n}$$

תרגיל 9

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 4}{n^2 + 2n + 3} \right)^{\frac{5n^2 - n}{n}}$$

תרגיל 10

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - 2n + 4} \right)^{6n}$$

תרגיל 11

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 2n + 4}{n^3 + n^2 - 1} \right)^{\frac{3n^2 + 1}{n + 2}}$$

תרגיל 12

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 2n^2 - 5}{n^3 - 3n + 6} \right)^{\frac{2n^2 + 3}{n + 1}}$$

תרגיל 13

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

תרגיל 14

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln(1+x) - \ln(1-x))^{\frac{1}{x}}$$

תרגיל 15

נתונה הסדרה (a_n) המוגדרת על ידי:

$$a_n = \left(\frac{2}{\pi} \arctan(n) \right)^n$$

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

תרגיל 16: יהיו $a, b > 0$ ונראה ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \sqrt{ab}$$

$$\infty - \infty$$

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 17} - x)$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x)$$

תרגיל 3

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{16x^4 + 13x} - 2x)$$

תרגיל 4

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 9} - 3}{x}$$

תרגיל 5

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{3x^2 + 22} - \sqrt{3x^2 + 4})$$

תרגיל 6

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$$

תרגיל 7

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

תרגיל 9

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0}$$

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2}{2x^5 - 3x^4 + x^2}$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8 - 5x^7 + 4x^6 + 3x^5}{2x^7 - x^6 - 6x^5}$$

תרגיל 3

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 - 2x^6 + x^5 - 4x^4}{x^6 + 3x^5 - 10x^4}$$

תרגיל 4

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 + 2x^5 - 7x^4}{3x^5 - 9x^4 + 6x^3}$$

תרגיל 5

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^3}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$$

תרגיל 6

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1 - 5x - 10x^2}{x^3}$$

תרגיל 7

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^4 - 16 - 32x - 24x^2 - 8x^3}{x^4}$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^5 - 243 - 405x - 270x^2 - 90x^3}{x^4}$$

תרגיל 9

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)^6 - 1 + 12x - 60x^2}{x^3}$$

תרגיל 10

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^7 - (1-x)^7 - 14x - 70x^3}{x^5}$$

גבולות מעריכי להוסיף

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n}{5 \cdot 3^n - 7 \cdot 2^n}$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3 \cdot 5^n}{4 \cdot 5^n + 7 \cdot 2^n}$$

תרגיל 3

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n - 10 \cdot 6^n}{3 \cdot 7^n + 2 \cdot 6^n}$$

תרגיל 4

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^{3n} - 4 \cdot 3^{2n}}{7 \cdot 8^n + 2 \cdot 9^n}$$

תרגיל 5

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 4^{n+1} - 2 \cdot 2^{2n+3}}{5 \cdot 4^n + 6 \cdot 2^{2n}}$$

תרגיל 6

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot 3^{2n+1} - 4 \cdot 9^{n-1}}{5 \cdot 9^n + 2 \cdot 3^{2n}}$$

תרגיל 7

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^{n+\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^{2n+1}}{3 \cdot 4^n - 7 \cdot 2^{2n-1}}$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^{n+1} - 4 \cdot 3^{2n-1}}{2 \cdot 9^n + 5 \cdot 3^{2n}}$$

תרגיל 9

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4^{n+2}} + 3 \cdot 2^n}{5 \cdot 2^{n+1} - \sqrt{16^n}}$$

תרגיל 10

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8^{n+3}} + 2 \cdot 2^{n+1}}{7 \cdot 2^n - 3 \cdot \sqrt{4^{n+2}}}$$

גבולות ידועים להוסיף

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x}$$

תרגיל 3

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{x}$$

תרגיל 4

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

תרגיל 5

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 7x}$$

תרגיל 6

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x}$$

תרגיל 7

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{\tan 3x}$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x} - 1}{x}$$

תרגיל 9

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \tan 2x}{x^2}$$

תרגיל 10

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{4x} - 1)\ln(1 + 3x)}{x \sin 5x}$$

תרגיל 11

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\tan 3x}$$

תרגיל 12

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(1+4x))}{e^{2x}-1}$$

תרגיל 13

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\tan 3x} - 1}{\sin 5x}$$

תרגיל 14

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin 2x} - 1)\tan 3x}{x \ln(1+4x)}$$

תרגיל 15

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\tan 2x)}{a^{\sin 3x} - 1}$$

תרגיל 16

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)\ln(1+5x)}{x^2(e^{2x}-1)}$$

תרגיל 17

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin kx}{x}$$

תרגיל 18

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdots \sin kx}{x^k}$$

תרגיל 19

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 1)(e^{3x} - 1) \cdots (e^{kx} - 1)}{x^k}$$

תרגיל 20

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot \tan 2x \cdot \tan 3x \cdots \tan kx}{(\ln(1+x))^k}$$

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} \cdot \sin(x^2 - 1)}{\tan(x^3 - 1)}$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(5^{\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^3}} - 5^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \right)$$

תרגיל 3

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^7 \left(3^{\frac{1}{n^4+n}} - 3^{\frac{1}{n^4}} \right)$$

שאלה 4

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sin(4x)}{\tan(7x)}$$

תרגיל 5

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} \cdot \sin(x^2-4)}{\tan(x^3-8)}$$

תרגיל 6

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x^3)}{\sin(x^2-1)}$$

תרגיל 7

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} \cdot \tan(x^2-9)}{\sin(x^3-27)}$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(2^{\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}} - 2^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \right)$$

תרגיל 9

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(7^{\tan\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{n^4}} - 7^{\tan\left(\frac{1}{n}\right)} \right)$$

תרגיל 10

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \left(e^{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{2}{n^5}} - e^{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right)$$

תרגיל 11

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \left(2^{\frac{1}{n^3+n}} - 2^{\frac{1}{n^3}} \right)$$

תרגיל 12

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left(5^{\frac{1}{n^5+n^2}} - 5^{\frac{1}{n^5}} \right)$$

תרגיל 13

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{11} \left(3^{\frac{1}{n^6+n}} - 3^{\frac{1}{n^6}} \right)$$

גבולות של כלל המנה

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n!}$$

תרגיל 3

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{(2n)!}$$

תרגיל 4

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

תרגיל 5

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{4^n \cdot n!}$$

תרגיל 6

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!}$$

תרגיל 7

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n - 2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}$$

תרגיל 9

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n - 1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdots (4n)}$$

תרגיל 10

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$$

גבולות של כלל השורש

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{5^n}$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5 - 3n^2 + 1}{2^n}$$

תרגיל 3

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^{2n}}$$

תרגיל 4

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + 3^n}{4^n}$$

תרגיל 5

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k \cdot 2^n}{5^n}$$

תרגיל 6

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \cdot 3^n + 4^n}{6^n}$$

תרגיל 7

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n - 1}$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k - n^k}{3^n}$$

תרגיל 9

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{3^n}$$

תרגיל 10

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$$

תרגיל 11

חשבו את גבול הסדרה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{\sin(1) \sin\left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{3}\right) * \dots * \sin\left(\frac{1}{n-1}\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

טריקים של לוגריתם להוסיף

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin (\ln (x+2)-\ln x)$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan (\ln (x+3)-\ln x)$$

תרגיל 3

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+5}{x}\right)$$

תרגיל 4

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin (\ln \left(x^2+1\right)-\ln \left(x^2\right))$$

תרגיל 5

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin (\ln \left(x^2+x\right)-\ln \left(x^2\right))$$

תרגיל 6

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1+e^{3 n}\right)}{\ln \left(1+e^{5 n}\right)}$$

תרגיל 7

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(2+e^{2 n}+e^{4 n}\right)}{\ln \left(5+e^{3 n}\right)}$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^n + e^{6n})}{\ln(1 + e^{2n} + e^{4n})}$$

תרגיל 9

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(1 + e^{n+2}) - \ln(1 + e^n)]$$

תרגיל 10

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{2n}) - \ln(1 + e^n)}{\ln(1 + e^{5n}) - \ln(1 + e^{3n})}$$

סדרות רקורסיביות

תרגיל 1

נתונה הסדרה a_n המוגדרת על ידי:

$$a_1 = 0$$

ולכל $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת, וחשבו את גבולה.

תרגיל 2

נתונה הסדרה a_n המוגדרת על ידי:

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$

ולכל $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$$

הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת, וחשבו את גבולה.

תרגיל 3

נתונה הסדרה a_n המוגדרת על ידי:

$$a_1 = 2$$

ולכל $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{2 + a_n}$$

הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת, וחשבו את גבולה.

תרגיל 4

יהיו a_n, b_n שתי סדרות המוגדרות על ידי תנאי ההתחלה:

$$0 < b_1 < a_1$$

ולכל $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

הוכיחו כי שתי הסדרות a_n, b_n מתכנסות, וכי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

בנוסף, מצאו את הגבול המשותף שלהן.

תרגיל 5

יהיו a_n, b_n שתי סדרות המוגדרות על ידי תנאי ההתחלה:

$$0 < b_1 < a_1$$

ולכל $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

הוכיחו כי שתי הסדרות a_n, b_n מתכנסות, וכי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

תרגיל 6

יהיו a_n, b_n שתי סדרות המוגדרות על ידי תנאי ההתחלה:

$$0 < b_1 < a_1$$

ולכל $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$$

הוכיחו כי שתי הסדרות a_n, b_n מתכנסות, וכי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

בנוסף, חשבו את הגבול המשותף שלהן.

תרגיל 7

נתונה הסדרה a_n המוגדרת על ידי:

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

ולכל $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \sin(a_n^2)$$

הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת, וכי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

שטולץ צזארו

תרגיל 1

תהי a_n סדרה מתכנסת, ונניח כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

הוכיחו כי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}{n^n}$$

תרגיל 3

יהי a מספר טבעי קבוע.

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^a + 2^a + 3^a + \dots + n^a}{n^{a+1}}$$

תרגיל 4

תהי a_n סדרה של מספרים חיוביים, ונניח כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

הוכיחו כי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = L$$

תרגיל 5

תהי a_n סדרה חיובית ועולה ממש.

נניח כי קיים הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

הוכיחו כי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

תרגיל 6

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \binom{n}{k}}$$

תרגיל 7

יהי $k \geq 1$ מספר טבעי קבוע.

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{kn}{n}}$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$$

תרגיל 9

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n}$$

אפסילונאות

תרגיל 1

הוכיחו לפי הגדרת הגבול של סדרה כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0$$

תרגיל 2

הוכיחו לפי הגדרת הגבול של סדרה כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n^2 + 1} = 0$$

תרגיל 3

הוכיחו לפי הגדרת הגבול של סדרה כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^4 + 3n^2 + 1} = 0$$

תרגיל 4

הוכיחו לפי הגדרת הגבול של סדרה כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^4 + 3n^2 + 1} = 0$$

תרגיל 5

הוכיחו לפי הגדרת הגבול של סדרה כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1$$

תרגיל 6

הוכיחו לפי הגדרת הגבול של סדרה כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{17n^4}{n^4 + 3n^2 + 1} = 17$$

תרגיל 7

יהיו a_n, b_n, c_n שלוש סדרות ממשיות. נניח כי לכל n מתקיים:

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

וכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

תרגיל 8

יהיו a_n, b_n שתי סדרות מתכנסות, ונניח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

תרגיל 9

יהיו a_n, b_n שתי סדרות מתכנסות, ונניח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$$

תרגיל 10

תהי a_n סדרה מתכנסת.

הוכיחו כי הסדרה a_n חסומה.

תרגיל 11

תהי b_n סדרה המתכנסת לגבול $K > 0$.

הוכיחו כי קיימים קבוע $c > 0$ ומספר טבעי N , כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$$b_n > c$$

תהי a_n סדרה כך שלכל $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \neq 0$$

נניח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

כאשר $L \neq 0$.

הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$$

תרגיל 12

תהי a_n סדרה מתכנסת, ונניח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$$

תרגיל 13

תהי a_n סדרה של מספרים חיוביים, ונניח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = L$$

תרגיל 14

יהיו a_n, b_n שתי סדרות מתכנסות, ונניח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min \{a_n, b_n\} = \min \{a, b\}$$

תרגיל 15

תהי a_n סדרה מתכנסת. הוכיחו כי קיים לסדרה איבר מינימלי או קיים לסדרה איבר מקסימלי.

הערה: איבר מינימלי הוא איבר a_m המקיים:

$$a_m \leq a_n$$

לכל $n \in \mathbb{N}$.

תרגיל 16

תהי a_n סדרה מונוטונית עולה וחסומה.

נסמן:

$$S = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S$$

תרגיל 17

תהי a_n סדרה מונוטונית יורדת וחסומה.

נסמן:

$$s = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$$

תרגיל 18

יהיו a_n, b_n שתי סדרות כך ש a_n סדרה עולה ו- b_n סדרה יורדת

בנוסף נניח כי הסדרה $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

הוכיחו כי שתי הסדרות a_n, b_n מתכנסות לגבולות סופיים.

תרגיל 19

תהי a_n סדרה המקיימת:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 1$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

תרגיל 20 מבחן השורש

תהי a_n סדרה של מספרים חיוביים, ונניח כי קיים הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

הוכיחו את הטענות הבאות:

אם $0 \leq L < 1$, אז:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

אם $L > 1$, אז:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

אם $L = 1$, הראו כי לא ניתן להסיק מסקנה כללית על הגבול של a_n .

תרגיל 21 מבחן המנה

תהי a_n סדרה של מספרים חיוביים, ונניח כי קיים הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

הוכיחו את הטענות הבאות:

אם $0 \leq L < 1$, אז:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

אם $L > 1$, אז:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

אם $L = 1$, הראו כי לא ניתן להסיק מסקנה כללית על הגבול של a_n .

תרגיל 22

תהי a_n סדרה ממשית המקיימת כי קיים λ ש-

$$0 < \lambda < 1$$

ולכל $n \geq 1$:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < \lambda |a_{n+1} - a_n|$$

הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת.

תרגיל 23

נתונה סדרה a_n כך ש-

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

ולכל $n \geq 2$:

$$|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$$

הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת.

תרגיל 24

תהי a_n סדרת קושי של מספרים ממשיים.

הוכיחו כי הסדרה a_n חסומה, וכי היא מתכנסת לגבול סופי.

תרגיל 25

בדקו האם הסדרה a_n היא סדרת קושי, כאשר:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

תרגיל 26

בדקו האם הסדרה a_n היא סדרת קושי, כאשר:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

תרגיל 27

יהיו a_n, b_n שתי סדרות ממשיות.

נניח כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n, m > N$ מתקיים:

$$|a_n - b_m| < \varepsilon$$

א. הוכיחו כי כל אחת מן הסדרות a_n, b_n מתכנסת לגבול סופי.

ב. הוכיחו כי שתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול.

תרגיל 28

יהי $k > 0$.

הוכיחו כי קיים $M > 0$, כך שלכל $x > M$ מתקיים:

$$\ln x \leq x^k$$

תרגיל 29

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית עולה.

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם f אינה חסומה מלמעלה, אז:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

ב. אם f חסומה מלמעלה, אז הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

קיים וסופי.

ג. הוכיחו או הפריכו: אם קיימת סדרה x_n כך ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

ו-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$$

אז מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

תרגיל 30

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונניח כי קיימים הגבולות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = K$$

כאשר $L, K \in \mathbb{R}$.

הוכיחו כי f חסומה על $\mathbb{R}$.

תרגיל 31

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונניח כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

הוכיחו כי לפונקציה f קיים מקסימום גלובלי או מינימום גלובלי.

תרגיל 32

תהי a_n סדרה המתכנסת לגבול L , כאשר:

$$L \notin \mathbb{Z}$$

הוכיחו כי:

סעיף א:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n] = [L]$$

כאשר $[x]$ מסמן את החלק השלם של x .

סעיף ב:

תנו דוגמה מנומקת לסדרה a_n המתכנסת לגבול L כך שהסדרה $[a_n]$ אינה מתכנסת.

סעיף ג:

הוכיחו כי לסדרה $[a_n]$ יש בדיוק שני גבולות חלקיים שונים.

תרגיל 33

תהי a_n סדרה חיובית, ונניח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1} = 1$$

הוכיחו כי אם $L > 0$ הוא גבול חלקי של a_n , אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי של a_n .

סעיף ב:

הוכיחו כי אם a_n חסומה, אז 0 אינו גבול חלקי של (a_n) .

תרגיל 34

תהי a_n סדרה כך שקבוצת הגבולות החלקיים שלה היא:

$$PL(a_n) = \{0, 4\}$$

נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי:

$$b_n = |a_n - 2|$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

תרגיל 35

מצאו דוגמה לסדרה b_n המקיימת:

$$|b_{n+1} - b_n| \leq 1$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, כך שגם 1 וגם $+\infty$ הם גבולות חלקיים במובן הרחב של הסדרה b_n .
ניתן להציג את הדוגמה באמצעות נוסחה מפורשת או באמצעות תיאור מסודר של איברי הסדרה.

סעיף ב:

הוכיחו כי קיים לסדרה b_n גבול חלקי נוסף L המקיים:

$$L \in [1, \infty)$$

תרגיל 36

תהי a_n סדרה, ונניח כי $0, 2024$ הם גבולות חלקיים שלה.

בנוסף נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq 1$$

הוכיחו כי קיים לסדרה a_n גבול חלקי נוסף L המקיים:

$$L \in [1, 2023]$$

תרגיל 37

תהי a_n סדרה חיובית וחסומה, ונניח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$$

נסמן:

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

-I

$$\ell = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

הוכיחו כי כל מספר t המקיים:

$$\ell < t < L$$

הוא גבול חלקי של הסדרה a_n .

שאלות שונות

תרגיל 1:

חשב את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(b + \frac{1}{n} \right)^2 + \left(b + \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left(b + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right)$

תרגיל 2:

חשב את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3}$$

תרגיל 3:

חשב את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1999}}{n^{2000} - (n-1)^{2000}} = \frac{1}{2000}$$

תרגיל 5:

נתונה סדרה $a_n \neq 1$ כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ וחשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_n^2 + \dots + a_n^k - k}{a_n - 1}$$

גבולות חלקיים

תרגיל 1

נתונה הסדרה a_n המוגדרת על ידי:

$$a_n = \cos(n\pi)$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה.

תרגיל 2

נתונה הסדרה a_n המוגדרת על ידי:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה.

תרגיל 3

נתונה הסדרה a_n המוגדרת על ידי:

$$a_n = (-1)^n n$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה, במובן הרחב.

תרגיל 4

יהיו a_n, b_n שתי סדרות.

נניח כי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$a_n \leq b_n$$

הוכיחו כי:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

תרגיל 5

יהיו a_n, b_n שתי סדרות.

נניח כי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$a_n \leq b_n$$

הוכיחו כי:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

תרגיל 6

יהיו a_n, b_n שתי סדרות.

נניח שכל הביטויים הבאים מוגדרים במובן הרחב, ושאינן הופעה של צורות בלתי מוגדרות מן הסוג:

$$\infty - \infty$$

הוכיחו כי:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$$

תרגיל 7

יהיו a_n, b_n שתי סדרות.

נניח שכל הביטויים הבאים מוגדרים במובן הרחב, ושאינן הופעה של צורות בלתי מוגדרות מן הסוג:

$$\infty - \infty$$

הוכיחו כי:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

תרגיל 8

יהיו a_n, b_n שתי סדרות.

נניח שכל הביטויים הבאים מוגדרים במובן הרחב, ושאינן הופעה של צורות בלתי מוגדרות מן הסוג:

$$\infty - \infty$$

הוכיחו כי:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$$

תרגיל 9

יהיו a_n, b_n שתי סדרות.

נניח שכל הביטויים הבאים מוגדרים במובן הרחב, ושאינן הופעה של צורות בלתי מוגדרות מן הסוג:

$$\infty - \infty$$

הוכיחו כי:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

תרגיל 10

יהיו a_n, b_n שתי סדרות.

נניח כי הגבולות הבאים קיימים, סופיים וחיוביים:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

הוכיחו כי:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$$

תרגיל 11

יהיו a_n, b_n שתי סדרות.

נניח שכל הביטויים הבאים מוגדרים במובן הרחב, ושאינן הופעה של צורה בלתי מוגדרת מן הסוג:

$$0 \cdot \infty$$

הוכיחו כי:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

תרגיל 12

יהיו a_n, b_n שתי סדרות.

נניח שכל הביטויים הבאים מוגדרים במובן הרחב, ושאינן הופעה של צורה בלתי מוגדרת מן הסוג:

$$0 \cdot \infty$$

הוכיחו כי:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$$

תרגיל 13

יהיו a_n, b_n שתי סדרות.

נניח שכל הביטויים הבאים מוגדרים במובן הרחב, ושאינן הופעה של צורה בלתי מוגדרת מן הסוג:

$$0 \cdot \infty$$

הוכיחו כי:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

טורים

תרגיל 1:

בדקו האם הטור מתכנס או מתבדר.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$$

תרגיל 2:

בדוק האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

תרגיל 3:

בדוק האם הטור מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2$$

תרגיל 4:

בדוק האם הטור מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

תרגיל 5:

בדוק האם הטור מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$$

תרגיל 6:

בדוק האם הטור מתכנס:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

תרגיל 7:

בדוק האם הטור מתכנס:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{19}{20}\right)^n$$

תרגיל 1:

האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 18}}$$

תרגיל 2:

האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 + 3n^2 + 1}}$$

תרגיל 3:

האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 3n + \sin(n)}}$$

תרגיל 4:

האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2 + 2n + 18}$$

תרגיל 5:

האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 + 15n + 18}$$

תרגיל 6:

האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2 + 2n}$$

תרגיל 7:

האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12n^2 + 3n + 15}{(n^2 + 17n)^2}$$

תרגיל 8:

האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{32n(n+43)})}$$

תרגיל 9:

האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{21n}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

תרגיל 10: האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^n}$$

תרגיל 1:

בדקו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

תרגיל 2:

בדקו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \sin(n)}{2^n}$$

תרגיל 3:

בדקו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3 + 2n + 1) \cos(n^2)}{\sqrt{n} * e^n}$$

תרגיל 4:

בדקו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

תרגיל 5:

בדקו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n (\arctan(n!))}{(2n)!}$$

תרגיל 6:

בדקו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^3}{2^n (n^4 + 3n + 2n + 1)}$$

תרגיל 7:

בדוק האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+3}}{n! (n^4 + 3n^2 + 2n + 1)}$$

תרגיל 8:

בדוקו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{(n-17)!}$$

תרגיל 1:

הראה שהטור לא מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{17n + \sqrt{n}}$$

תרגיל 2:

הראה שהטור לא מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + 2^n}$$

תרגיל 3:

הראה שהטור לא מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2n)}{\ln(2n) + 17}$$

תרגיל 4:

הראה שהטור לא מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + n^{16}}$$

תרגיל 5:

הראה שהטור לא מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \arctan(n^2)}{3^n + 4^n}$$

תרגיל 1:

בדוק את התכנסות הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

תרגיל 2:

הראה שהטור מתכנס בעזרת מבחן העיבוי

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}$$

תרגיל 3:

הראה שהטור מתכנס בעזרת מבחן העיבוי

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \ln(\ln(n))}$$

תרגיל 4:

הראה שהטור מתכנס בעזרת מבחן העיבוי

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$$

תרגיל 5:

הראה שהטור מתכנס בעזרת מבחן העיבוי

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2 \ln(n)}$$

תרגיל 1:

בדוק האם הטור מתכנס בהחלט או בתנאי.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

תרגיל 2:

בדוק האם הטור מתכנס בהחלט או בתנאי.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

תרגיל 3:

בדוק האם הטור מתכנס בהחלט או בתנאי.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$$

תרגיל 4:

בדוק האם הטור מתכנס בהחלט או בתנאי.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$$

תרגיל 5:

בדוק האם הטור מתכנס בהחלט או בתנאי.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln(n)}$$

תרגיל 6:

בדוק האם הטור מתכנס בהחלט או בתנאי.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan(n)}{n^2 + 2n}$$

תרגיל 7:

בדוק האם הטור מתכנס בהחלט או בתנאי.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

תרגיל 8:

בדוק האם הטור מתכנס בהחלט או בתנאי.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{n^2}$$

תרגיל 1:

בדקו האם הטור מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2(n)}{n}$$

תרגיל 2:

בדקו האם הטור מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n}$$

תרגיל 3:

בדקו האם הטור מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$$

תרגיל 4:

בדקו האם הטור מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan(n)}{n}$$

תרגיל 5:

בדקו האם הטור מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

תרגיל 6:

בדקו האם הטור מתכנס.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n \ln(n)} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

תרגיל 7:

בדקו האם הטור מתכנס.

נתון ש הטור הבאה מתכנס עבור $x = x_0$ ונראה שהטור מתכנס עבור $x > x_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

תרגיל 8:

הראו שאם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ מתכנס בהחלט וגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ מתכנס אז גם

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

מתכנס.

תרגיל:

תהי a_n סדרת מספרים חיוביים עבורה הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(a_n)$$

מתכנס.

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

מתכנס וחשבו את הערך שלו.

תרגיל:

חקור את התכנסות הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$$

פתרון:

תרגיל:

נגדיר סדרה באופן הבא-

$$\begin{cases} a_{n+1} = \ln(e^{a_n} - a_n) \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס? אם כן חשבו את ערכו.

תרגיל:

בדקו האם הטור מתכנס או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

תרגיל:

מיצאו עבור אילו ערכים של p הטור הבא מתכנס

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^p \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

תרגיל :

חקור את התכנסות הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{e^{n^2}}$$

תרגיל :

חקור את התכנסות הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(n)}{\ln(n)}$$

תרגיל :

חקור את התכנסות הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^n - n^{\frac{n}{2}}}{3^n n! - 2^n} \right)$$

פרק 4 - פונקציות

תרגיל 1:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x$$

תרגיל 2:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3$$

תרגיל 3:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4$$

תרגיל 4:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$$

תרגיל 5:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$$

תרגיל 6:

חשבו את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$$

תרגיל 8:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos(x^2) = 0$$

תרגיל 1:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x$$

תרגיל 2:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x}$$

תרגיל 3:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

תרגיל 4:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{x^2 + 1}$$

תרגיל 5:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

תרגיל 6:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x}$$

תרגיל 7:

חשב את הגבול לפי הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 17} - x$$

תרגיל 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x + 13}$$

תרגיל 2:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x + 17}$$

תרגיל 3:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x^2}$$

תרגיל 6:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^n)}{x}$$

כאשר $n > 0$

פתרון:

תרגיל 1:

הראה שאין גבול לפונקציה $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$

תרגיל 2:

הראה שאין גבול לפונקציה $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$

תרגיל 3:

הראה שאין גבול לפונקציה $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

פרק 6 - רציפות

תרגיל 1:

הוכח שהפונקציה ההבאה רציפה בכל נקודה

$$f(x) = x$$

תרגיל 2:

הוכח שהפונקציה ההבאה רציפה בכל נקודה

$$f(x) = x^2 + 3x + 4$$

תרגיל 3:

הוכח שהפונקציה ההבאה רציפה בכל נקודה

$$f(x) = \cos(x)$$

תרגיל 4:

הוכח שהפונקציה ההבאה רציפה כאשר $x > 0$

$$f(x) = \ln(x)$$

תרגיל 6:

הוכח שהפונקציה הבאה רציפה בכל נקודה

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

תרגיל 7:

הוכח שהפונקציה ההבאה רציפה בכל נקודה

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + 1}$$

תרגיל 8:

הוכח שהפונקציה ההבאה רציפה בתחום $x > 0$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 + 1}$$

תרגיל 9:

הוכח שהפונקציה ההבאה רציפה בכל נקודה

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

תרגיל 10:

הוכח שהפונקציה ההבאה רציפה בכל נקודה

$$f(x) = \frac{x}{(x^4 + 1)^2}$$

תרגיל 1:

סווג את אי הרציפות:

$$f(x) = \frac{x^2}{x}$$

רגיל 2: סווג את אי הרציפות:

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

תרגיל 3: סווג את אי הרציפות:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

תרגיל:

נתונה פונקציה

$$f(x) = (3x^2 + \cos(2x) + 5x^4 - 7)D(x)$$

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \text{ כאשר}$$

יש נקודות רציפות?

תרגיל :

נתון זוג פונקציות $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

נניח ששתייהן רציפות ב- (a, b) .

הוכיחו כי גם הפונקציות $h_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $h_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

רציפות ב- (a, b)

תרגיל :

נתונות שתי פונקציות f, g רציפות בנקודה $x = c$.

נגדיר את הפונקציה

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{Q} \\ g(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ונראה שפונקציה רציפה בנקודה $x = c$ אם ורק אם $f(c) = g(c)$

פתרון:

תרגיל:

תהי f פונקציה רציפה בקרן $[0, \infty)$ המקיימת $f(0) > 0$.

בנוסף נתון כי $f(x) \leq \frac{1}{x}$ לכל $x > 0$.

הוכיחו כי f מקבלת מקסימום בקרן $[0, \infty)$

תרגיל :

תהא f פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}$ כך ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

הוכיחו כי f מקבלת מקסימום מוחלט ב- $\mathbb{R}$

הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = e^{-x^2} \arctan(x) - x^2$ מקבלת מקסימום מוחלט ושהערך של המקסימום הוא חיובי

תרגיל:

תהי f פונקציה רציפה בקרן $[0, \infty)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(0)$

הוכיחו כי f מקבלת מקסימום בקרן $[0, \infty)$

פרק 7 - נגזרות

תרגיל 1:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x$

תרגיל 2:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^2 + 2x + 7$

תרגיל 3:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = (x^2 + 1)(2x + 3)$

תרגיל 4:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sin(x) \cos(x)$

תרגיל 5:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

תרגיל 6:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sin(32x + 17)$

תרגיל 7:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \cos(7000x + 12)$

תרגיל 8:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \arctan(x)$

תרגיל 9:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \arcsin(x)$

תרגיל 10:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \arccos(x)$

תרגיל 11:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = e^{2x+2}$

תרגיל 12:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = 17^{2x+16}$

תרגיל 13:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$

תרגיל 14:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+1}$

תרגיל 15:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x+1}$

תרגיל 16:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x \sin(x)$

תרגיל 17:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x \cos(x)$

תרגיל 18:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x * \tan(x)$

תרגיל 19:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^{32} * e^x$

תרגיל 20:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x \arctan(x)$

תרגיל 21:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x * \ln(x)$

תרגיל 22

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

תרגיל 23:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = e^x \ln(x)$

תרגיל 24:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = (2x + 1) \ln(x)$

תרגיל 25:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sinh(2x + 7)$

תרגיל 1:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sqrt{\tan(x+7)}$

תרגיל 2:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{x \cdot e^x}{\tan(2x+7)}$

תרגיל 3:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{(x^2+2x+1)e^x}{x^3+3x^2+3x+1}$

תרגיל 4:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 2x + 3}$

תרגיל 5:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sqrt{\sin(4x+3)}$

תרגיל 6:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sqrt[n]{\cos(x)}$

תרגיל 7:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

תרגיל 8:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^2 \ln^2(x)$

תרגיל 9:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x}}$

תרגיל 10:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = (x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x + 1)(\ln^2(x) + \ln(x))$

תרגיל 11:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{2\cos(x)}{1+\sin(x)}$

תרגיל 12:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = e^{\sin(x)}$

תרגיל 13:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = e^{\tan(x)}$

תרגיל 14:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = (x^2 + 2x + 17)e^{\sqrt{17x+2}}$

תרגיל 15:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = xe^{\sinh(2x+3)}$

תרגיל 16:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

תרגיל 17:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sqrt{e^x + 7x}$

תרגיל 18:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{\tan(x)}}{x^2+2x+3}$

תרגיל 19:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$

תרגיל 20:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

תרגיל 1:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^x$

תרגיל 2:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sqrt{\arcsin(\ln(x))}$

תרגיל 3:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sqrt{e^x \sin(17x^2 + 2x + 1)}$

תרגיל 4:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{\sin^{\cos(x)}(x)}{x}$

תרגיל 5:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{e^{e^x}}{x^2 + 3x + 1}$

תרגיל 6:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sqrt{\ln(\arcsin(e^x))}$

תרגיל 7:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)+x}{\cos^{12}(x)}\right)$

תרגיל 8:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = (\sin(x))^{\tan(x)}$

תרגיל 9:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = (\ln(\sinh(e^x)))^{17}$

תרגיל 10:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \cos(\ln(\arcsin(e^{\cos(x)})))$

פרק 8 - נגזרות

תרגיל 1:

חשב את הנגזרת לפי הגדרה

$$f(x) = \sin(x)$$

תרגיל 2:

חשב את הנגזרת לפי הגדרה

$$f(x) = \cos(x)$$

תרגיל 3:

חשב את הנגזרת לפי הגדרה

$$f(x) = x^4$$

תרגיל 4:

חשב את הנגזרת לפי הגדרה

$$f(x) = \ln(x)$$

תרגיל 5:

חשב את הנגזרת לפי הגדרה

$$f(x) = \tan(x)$$

תרגיל 6:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{הוכח את כלל המכפלה}$$

תרגיל 7:

נסח והוכח את כלל המנה

תרגיל 8:

יהיו $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירה ונניח כי $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ עבור $x_0 \in \mathbb{R}$ מסויים. הוכיחו כי $g(x) = \min(f_1(x), f_2(x))$ גזירה ב- x_0 אם ורק אם $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$

תרגיל 9:

תהי

$$f(x) = \begin{cases} -x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

סעיף א:

הוכיחו כי $f'(0) < 0$

סעיף ב:

מיצאו דוגמא לסדרה חיובית x_n שמקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ וגם $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = \infty$

סעיף ג:

הוכיחו שלא קיימת סביבה של 0 שבה f מונוטונית יורדת.

תרגיל 10:

תהי

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x} + 2 & x \geq 0 \\ e^x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

סעיף א:

האם f רציפה ב- $\mathbb{R}$?

סעיף ב:

האם f חסומה ב- $\mathbb{R}$?

סעיף ג:

האם f גזירה ב- $\mathbb{R}$? אם כן מיצאו את $f'(x)$.

סעיף ד:

האם f גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$? אם כן מיצאו את $f''(x)$

תרגיל 11:

תהי

$$f(x) = \begin{cases} x^4(2 + \sin(\frac{1}{x})) & x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

סעיף א:

חשבו את הנגזרת $f'(x)$

האם $x = 0$ היא נקודת מינימום מוחלט של f ?

סעיף ב:

האם קיימת סביבה $(0, \delta)$ שבה f עולה?

תרגיל 12:

תהי

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & 0 < x \leq 1 \\ -\ln(2-x) & 1 < x < 2 \end{cases}$$

סעיף א:

הוכיחו שהפונקציה רציפה בקטע $(0,2)$

סעיף ב:

האם הפונקציה גזירה ב- $(0,2)$ אם כן מצאו את הנגזרת.

סעיף ג:

האם הנגזרת $f'(x)$ רציפה בקטע $(0,2)$.

סעיף ד:

האם f גזירה פעמיים בקטע $(0,2)$?

תרגיל 13:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x}, & x \leq 4 \\ x, & x > 4 \end{cases}$$

האם הפונקציה גזירה?

תרגיל 14:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ \ln(x), & x > 0 \end{cases}$$

האם הפונקציה גזירה?

תרגיל 15:

עבור אילו ערכים של הפרמטרים a, b הפונקציה רציפה

ועבור אילו ערכים הפונקציה גזירה –

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ a + b & x = 0 \\ \frac{a}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

תרגיל 16:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

האם הפונקציה גזירה

תרגיל 17:

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

האם הפונקציה גזירה

תרגיל 18

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) המקיימת את התנאים הבאים

$$f(a) \leq a^2, \quad b^2 \leq f(b), \quad f'(x) \leq 2x$$

הראו ש- $f(x) = x^2$

פרק 9 -משפט ערך הביניים

תרגיל 1

הוכיחו כי לפונקציה

$$f(x) = x^4 + x - 1$$

קיים שורש בקטע $[0,1]$.

כלומר הוכיחו שקיים $c \in [0,1]$ כך ש-

$$f(c) = 0$$

תרגיל 2

הוכיחו כי לפונקציה

$$f(x) = x^5 + x^4 - 1$$

קיים שורש בקטע $[0,1]$.

כלומר, הוכיחו שקיים $c \in [0,1]$ כך ש-

$$f(c) = 0$$

תרגיל 3

הוכיחו כי קיים $x_0 \in [-1,0]$ כך ש-

$$e^{x_0} = x_0^2$$

תרגיל 4

הוכיחו כי קיים $x_0 \in [0,\pi]$ כך ש-

$$(1 - x_0)\sin x_0 = \cos x_0$$

תרגיל 5

תהי

$$f: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

פונקציה רציפה. הוכיחו כי קיים $c \in [0,1]$ כך ש-

$$f(c) = c$$

תרגיל 6

הוכיחו כי הפונקציה

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \sin^2 x + 3x$$

היא חד־חד־ערכית ועל.

תרגיל 7

יהי

$$P(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0$$

פולינום ממשי ממעלה אי־זוגית, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

הוכיחו כי קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$P(c) = 0$$

תרגיל 8

תהי

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה רציפה.

יהיו

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$$

הוכיחו כי קיים $c \in (a, b)$ כך ש-

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

תרגיל 9

תהי

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה רציפה ואי־שלילית, כלומר

$$f(x) \geq 0$$

לכל $x \in [0, 1]$.

נוסף לכך נתון כי

$$f(0) = f(1) = 0$$

הוכיחו כי לכל r המקיים

$$0 < r < 1$$

קיימות שתי נקודות $x, y \in [0,1]$ כך ש-

$$|x - y| = r$$

וגם

$$f(x) = f(y)$$

תרגיל 10

תהי

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה רציפה וחד־חד־ערכית.

הוכיחו כי f מונוטונית ממש בקטע $[a, b]$.

תרגיל 11

הוכיחו כי קיימים אינסוף זוגות של מספרים חיוביים $x, y > 0$ כך ש-

$$x^x = y^y$$

וגם

$$x \neq y$$

רמז:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

משפט רול

תרגיל 1

אמתו את תנאי משפט רול עבור הפונקציה

$$f(x) = x^2 + 1$$

בקטע $[-1, 1]$, והוכיחו שקיימת נקודת קיצון של f בתחום $(-1, 1)$.

תרגיל 2

אמתו את תנאי משפט רול עבור הפונקציה

$$f(x) = \sin(2x)$$

בקטע

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

והוכיחו שקיימת נקודת קיצון של f בתחום

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

תרגיל 3

אמתו את תנאי משפט רול עבור הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

בקטע $[-1, 1]$, והוכיחו שקיימת נקודת קיצון של f בתחום $(-1, 1)$.

תרגיל 4

אמתו את תנאי משפט רול עבור הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 17x^2 + 2}$$

בקטע $[-1, 1]$, והוכיחו שקיימת נקודת קיצון של f בתחום $(-1, 1)$.

תרגיל 5

תהי

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) .

נניח כי

$$0 < a < b$$

וכן

$$bf(a) = af(b)$$

הוכיחו כי קיימת נקודה $x_0 \in (a, b)$ כך ש-

$$x_0 f'(x_0) = f(x_0)$$

תרגיל 6

תהי

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) .

נניח כי

$$f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$$

הוכיחו כי למשוואה

$$f'(x)f(x) = x$$

קיים פתרון אחד לפחות בקטע (a, b) .

תרגיל 7

תהי

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) .

נניח כי

$$0 < a < b$$

וכן

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{f(b)}{f(a)}$$

כאשר $f(a) \neq 0$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש-

$$f(c) = -\frac{c}{2}f'(c)$$

תרגיל 8

יהיו

$$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) ואינן מתאפסות בקטע $[a, b]$.

נניח כי

$$f(a)g(b) = f(b)g(a)$$

הוכיחו כי קיימת נקודה $x_0 \in (a, b)$ כך ש-

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$$

תרגיל 9

תהי

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b)

נניח כי

$$f(a) = f(b) = 0$$

ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש-

$$\alpha f(c) + f'(c) = 0$$

תרגיל 10

תהי

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b)

נניח כי

$$f(a) = f(b) = f'(b) = 0$$

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש-

$$f''(c) = 0$$

תרגיל 11

תהי

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה גזירה פעמיים.

נתון כי

$$f(1) - f(0) = f(6) - f(5)$$

הוכיחו כי קיימת נקודה $a \in (0, 6)$ כך ש-

$$f''(a) = 0$$

תרגיל 12

נתונים מספרים ממשיים

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

המקיימים

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

הוכיחו כי קיימת נקודה $x \in (0,1)$ כך ש-

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

תרגיל 13

יהיו

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

מספרים ממשיים, ונגדיר

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

נניח כי מתקיים

$$\frac{a_n2^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1}2^n}{n} + \dots + 2a_1 + 2a_0 = 0$$

הוכיחו כי לפולינום $P(x)$ קיים שורש בתחום $(0,2)$.

תרגיל 14

תהי

$$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה גזירה.

נניח כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(0)$$

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in (0, \infty)$ כך ש-

$$f'(c) = 0$$

תרגיל 15

יהיו

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציות גזירות בכל הישר הממשי.

נניח כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$$

הוכיחו כי בין כל שתי נקודות שונות שבהן f מתאפסת, קיימת נקודה שבה g מתאפסת.

תרגיל 16

תהי

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה גזירה פעמיים. נניח כי f מתאפסת בלפחות שבע נקודות שונות.

הוכיחו כי הפונקציה

$$f + 6f' + 9f''$$

מתאפסת בלפחות חמש נקודות שונות.

רמז: הגדירו

$$g(x) = 9e^{\frac{x}{3}}f(x)$$

תרגיל 17:

יהיו f, g פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות בקטע (a, b) כך ש $f(a) = f(b) = 0$

ונראה שיש $x_0 \in (a, b)$ כך ש $g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

משפט לגרנז

תרגיל 1

הוכיחו כי לכל $x > y > 1$ מתקיים:

$$\left| \ln\left(\frac{x}{y}\right) \right| < x - y$$

תרגיל 2

הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$$

תרגיל 3

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש-

$$f(0) = 1$$

ולכל $x \in \mathbb{R}$:

$$|f'(x)| \leq 1$$

הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$|f(x)| \leq |x| + 1$$

תרגיל 4

תהי f פונקציה גזירה בנקודה a .

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

תרגיל 5

תהיינה f, g פונקציות גזירות בנקודה a .

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)f(a) - g(a)f(x)}{x - a}$$

תרגיל 6

תהי f פונקציה גזירה בנקודה c ויהי $k \in \mathbb{N}$ קבוע.

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(f\left(c + \frac{1}{n}\right) + f\left(c + \frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(c + \frac{k}{n}\right) - kf(c) \right)$$

תרגיל 7

תהי f פונקציה גזירה בנקודה c .

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(c + \frac{1}{n^2}\right) + f\left(c + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(c + \frac{n}{n^2}\right) - nf(c) \right)$$

תרגיל 8

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+2}} \right)$$

תרגיל 9

יהיו $x, y \in [0, 1]$.

הוכיחו כי:

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq \frac{1 + \pi}{2} |x - y|$$

תרגיל 10

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

נניח כי לכל $x \in \mathbb{R}$

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{1 + x^4}$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x + x^2) - f(x)) = 0$$

תרגיל 11

תהי f פונקציה גזירה בכל תחומה, ונניח כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2} = 0$$

תרגיל 12

תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ונניח כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

וכן:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$$

תרגיל 13

תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ גזירה בקטע $(0,1)$ ונניח כי:

$$f(0) = 0$$

נניח בנוסף כי f' מונוטונית עולה בקטע $(0,1)$.

נגדיר:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad 0 < x < 1$$

הוכיחו כי g מונוטונית עולה בקטע $(0,1)$.

תרגיל 14

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

נניח כי:

$$f'(x) \geq 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$, וכי f' מונוטונית עולה.

הוכיחו כי אם f חסומה מלעיל, אז f קבועה.

תרגיל 15

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ונניח כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = K > 0$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

בנוסף, בדקו האם הטענה נשארת נכונה במקרה $K = 0$.

תרגיל 16

נניח כי $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות.

נניח כי קיימים הגבולות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$$

-I

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = K$$

הוכיחו כי:

$$K = 0$$

תרגיל 17

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נניח כי קיים $c > 0$ כך שלכל $x \in [0, \infty)$:

$$f'(x) \geq c$$

ונניח בנוסף כי:

$$f(0) < 0$$

הוכיחו כי קיים $x \in \left[0, -\frac{f(0)}{c}\right]$ כך ש-

$$f(x) = 0$$

והוכיחו כי פתרון זה יחיד.

תרגיל 18

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

נניח כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

ובנוסף קיים $T > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x+T) = f'(x)$$

הוכיחו כי f קבועה.

תרגיל 19

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה וגזירה פעמיים, ונניח כי ל- f יש מינימום גלובלי.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$f''(c) = 0$$

תרגיל 20

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ונניח כי f' מונוטונית עולה.

הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

תרגיל 21

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים, ונניח כי לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) > 0$$

הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x+1) + f(x-1)}{2} > f(x)$$

תרגיל 22

תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים, ונניח כי לכל $x > 0$:

$$f''(x) > 0$$

הוכיחו כי לכל $x > 0$:

$$f(2x) - f(x) < f(3x) - f(2x)$$

תרגיל 23

תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים, ונניח כי לכל $x > 0$:

$$f''(x) > 0$$

הוכיחו כי לכל $x > 0$:

$$2(f(2x) - f(x)) < f(4x) - f(2x)$$

תרגיל 24

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ונניח כי לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) > x$$

נגדיר סדרה a_n על ידי:

$$a_1 = 1$$

ולכל $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = f(a_n + 1) - f(a_n)$$

הוכיחו כי הסדרה a_n מונוטונית עולה ושואפת ל- $+\infty$.

תרגיל 25

תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ונניח כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

הוכיחו כי קיימת סדרה c_n כך ש-

$$c_n \rightarrow \infty$$

וגם:

$$f'(c_n) \rightarrow 0$$

תרגיל 26

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , ונניח כי:

$$f(a) = a, f(b) = b$$

הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1, c_2 \in (a, b)$ לא בהכרח שונות, כך ש-

$$f'(c_1) + f'(c_2) = 2$$

תרגיל 27

תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים, ונניח כי לכל $x > 0$:

$$f''(x) > 0$$

נניח בנוסף כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$$

קיים במובן הרחב.

ב. קיימת סדרה a_n כך שלכל $n \in \mathbb{N}$:

$$n < a_n < n + 1$$

וכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(a_n) = 0$$

ג. לכל $x > 0$ מתקיים:

$$f'(x) < 0$$

ד. לכל $x > 0$ מתקיים:

$$f(x) > L$$

תרגיל 28

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ותהי a_n סדרה אי־שלילית. נניח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = +\infty$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

סעיף ב:

נניח בנוסף כי:

$$\frac{f(a_n)}{a_n} \rightarrow \infty$$

הוכיחו כי קיימת סדרה c_n כך ש-

$$c_n \rightarrow \infty$$

וגם:

$$f'(c_n) \rightarrow \infty$$

תרגיל 29

הוכיחו כי קיימת פונקציה $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה המקיימת $f'(x) < 1$ וגם $f(x) > x$ לכל $x \in (0, \infty)$

משפט קושי

תרגיל 1

הוכיחו כי לכל שני מספרים ממשיים x, y , $\tan(x) - \tan(y)$

$$0 < x, y < \frac{\pi}{3}$$

מתקיים:

$$\frac{|\tan(x) - \tan(y)|}{|\sin(x) - \sin(y)|} \leq 8.$$

תרגיל 2

הוכיחו כי לכל מספר ממשי $x \neq 0$ מתקיים:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x.$$

תרגיל 3

יהיו a, b מספרים ממשיים כך ש- $a < b$.

תהי f פונקציה גזירה ברציפות בקטע $[a, b]$.

הוכיחו כי קיים מספר c בקטע (a, b) כך שמתקיים:

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(c) - cf'(c).$$

תרגיל 4

תהי

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה גזירה, ונניח כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

הוכיחו כי קיימת סדרה c_n , המקיימת

$$c_n \rightarrow \infty,$$

כך שמתקיים:

$$f'(c_n) \rightarrow 0.$$

תרגיל 5

תהי

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה גזירה.

נניח כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + f'(x)) = 0.$$

הוכיחו כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

ויירשטראס

תרגיל 1:

תהי f פונקציה בעלת נגזרת רציפה ב- $[0,1]$.

הוכיחו שקיים קבוע c כך שהפונקציה $g(x) = f(x) - ce^x$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,1]$.

רציפות במידה שווה

תרגיל 1

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$

נתונה הפונקציה

$$f(x) = x^2$$

- א. קבעו האם f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$.
ב. קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

תרגיל 2

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$

נתונה הפונקציה

$$f(x) = x^3$$

- א. קבעו האם f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$.
ב. קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

תרגיל 3

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \sin x$$

- א. קבעו האם f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$.
ב. קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

תרגיל 4

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \cos x$$

א. קבעו האם f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$.

ב. קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

תרגיל 5

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{x}$$

א. קבעו האם f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$.

ב. קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

תרגיל 6

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$

נתונה הפונקציה

$$f(x) = e^{-1/x}$$

א. קבעו האם f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$.

ב. קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

תרגיל 7

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$

נתונה הפונקציה

$$f(x) = x \ln(x)$$

א. קבעו האם f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$.

ב. קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

תרגיל 8

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$

נתונה הפונקציה

$$f(x) = x^2 \ln(x)$$

- א. קבעו האם f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$.
- ב. קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

תרגיל 9

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$

נתונה הפונקציה

$$f(x) = x \sin(x)$$

- א. קבעו האם f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$.
- ב. קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

תרגיל 10

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \sin(\sin(x))$$

- א. קבעו האם f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$.
- ב. קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

תרגיל 11

קבעו האם הפונקציה

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

רציפה במידה שווה בתחום $(0,1)$

תרגיל 12

קבעו האם הפונקציה

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

רציפה במידה שווה בתחום $(0,1)$

תרגיל 13

קבעו האם הפונקציה

$$f(x) = e^x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

רציפה במידה שווה בתחום $(0,1)$

תרגיל 14

קבעו האם הפונקציה

$$f(x) = \sin(x^2)$$

רציפה במידה שווה בתחום $[0, \infty)$.

תרגיל 15

קבעו האם הפונקציה

$$f(x) = \sin(\sqrt{x})$$

רציפה במידה שווה בתחום $[0, \infty)$.

תרגיל 16

נתונה הפונקציה $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, המוגדרת על ידי

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $[0, \infty)$.

תרגיל 17

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$$

קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

תרגיל 18

תהי $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח כי קיים מספר ממשי L כך שמתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

הוכיחו כי f רציפה במידה שווה בתחום $[1, \infty)$.

תרגיל 19

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$

תהי $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.

נניח כי קיים קבוע $M > 0$ כך שלכל x בקטע (a, b) מתקיים:

$$|f''(x)| \leq M$$

הוכיחו כי f רציפה במידה שווה בקטע (a, b) .

תרגיל 20

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בתחום $[0, \infty)$ וגזירה פעמיים בתחום $(0, \infty)$

נניח כי לכל $x > 0$ מתקיים:

$$f''(x) \leq 0 \leq f'(x).$$

הוכיחו כי f רציפה במידה שווה בתחום $[0, \infty)$.

תרגיל 21

תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

נניח כי לכל $x > 0$ מתקיים:

$$f'(x) > \frac{1}{x}$$

הוכיחו כי איננה רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

תרגיל 22

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בתחום $[0, \infty)$ וגזירה בתחום $(0, \infty)$.

נניח כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$$

הוכיחו כי איננה רציפה במידה שווה בתחום $[0, \infty)$.

תרגיל 23

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה במידה שווה בכל $\mathbb{R}$.

הוכיחו כי הפונקציה

$$g(x) = f(x + 2024) - f(x)$$

חסומה בכל $\mathbb{R}$.

תרגיל 24

תהי $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה כאשר $a < b$.

הוכיחו כי f רציפה במידה שווה בקטע (a, b) אם ורק אם קיימים וסופיים שני הגבולות החד-צדדיים:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x).$$

תרגיל 25

יהיו $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שתי פונקציות רציפות במידה שווה בכל $\mathbb{R}$.

הוכיחו כי ההרכבה

$$f \circ g$$

רציפה במידה שווה בכל $\mathbb{R}$.

תרגיל 26

יהי I קטע פתוח, ותהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

א. הוכיחו כי f ליפשיצית ב- I אם ורק אם הנגזרת f' חסומה ב- I .

כלומר, הוכיחו כי קיים קבוע $K > 0$ כך שלכל x, y ב- I מתקיים:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

אם ורק אם קיימת חסימות על $|f'(x)|$ לכל x ב- I .

ב. תהי $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ליפשיצית.

הוכיחו כי g רציפה במידה שווה ב- I .

ג. מצאו דוגמה לפונקציה גזירה ורציפה במידה שווה בתחום הגדרתה, שאיננה ליפשיצית בתחום זה.

תרגיל 27

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה במידה שווה בכל $\mathbb{R}$.

הוכיחו כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(\sqrt{x^2 + 1}) - f(x) = 0$$

תרגיל 28

תהי הפונקציה

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

המוגדרת בתחום $(0, \infty)$.

א. קבעו האם f רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

ב. קבעו האם הנגזרת f' רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

נמקו את תשובותיכם.

תרגיל 29

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה הגזירה בתחום $(0, \infty)$.

נניח כי

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty$$

א. האם מן הנתונים בלבד ניתן להסיק כי רציפה במידה שווה בתחום הגדרתה?

ב. האם מן הנתונים בלבד ניתן להסיק כי f גזירה בנקודה $x = 0$?

אם לא ניתן להסיק מסקנה חד-משמעית הביאו דוגמאות מתאימות.

תרגיל 30

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה גזירה.

נניח כי לכל $x > 0$ מתקיים:

$$f(x) \leq f'(x)$$

הוכיחו כי f איננה רציפה במידה שווה בתחום $\mathbb{R}$.

חישוב גבולות וכלל לופיטל

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

תרגיל 3

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

תרגיל 4

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$$

תרגיל 5

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כאשר $b \neq 0$.

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx}.$$

תרגיל 6

יהי a מספר ממשי קבוע.

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x^2 - a^2}$$

תרגיל 7

יהי n מספר טבעי חיובי.

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x + x^2 + \dots + x^n)}{nx}.$$

תרגיל 8

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כאשר $b \neq 0$.

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}.$$

תרגיל 9

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כאשר $b \neq 0$.

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arctan(ax))}{\ln(1 + \arctan(bx))}$$

תרגיל 10

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{17} - 1}{6x^5 - 3x^3 + x - 4}$$

תרגיל 11

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

תרגיל 12

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{8}{x-1} - \frac{16}{x^2-1} \right)$$

תרגיל 13

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right)$$

תרגיל 14

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right)$$

תרגיל 15

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^x}{x^2 - x}$$

תרגיל 16

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

תרגיל 17

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)$$

תרגיל 18

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

תרגיל 19

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$$

תרגיל 20

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \tan x$$

תרגיל 21

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

תרגיל 22

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \right)$$

תרגיל 23

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

תרגיל 24

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$$

תרגיל 25

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \arctan x}{x^2}$$

תרגיל 26

יהי a מספר ממשי המקיים:

$$a > 0, a \neq 1.$$

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^x}{a^x - a^a}.$$

תרגיל 27

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)}{x - 1}$$

תרגיל 28

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x \tan x}}$$

טורי טיילור

תרגיל 1

חשבו את פולינום טיילור מסדר 2 של הפונקציה

$$f(x) = \ln(1+x)$$

סביב הנקודה $x_0 = 0$.

תרגיל 2

יהי a מספר ממשי קבוע.

חשבו את פולינום טיילור מסדר 2 של הפונקציה

$$f(x) = (1+x)^a$$

סביב הנקודה $x_0 = 0$.

תרגיל 3

חשבו את פולינום טיילור מסדר 4 של הפונקציה

$$f(x) = \sin x$$

סביב הנקודה $x_0 = 0$.

תרגיל 4

חשבו את פולינום טיילור מסדר 4 של הפונקציה

$$f(x) = \cos x$$

סביב הנקודה $x_0 = 0$.

תרגיל 5

חשבו בקירוב את הערך

$$\sin(1)$$

כך שהשגיאה לא תעלה על

$$\frac{1}{100}$$

תרגיל 6

חשבו בקירוב את הערך

$$\cos(1)$$

כך שהשגיאה לא תעלה על

$$\frac{1}{100}$$

תרגיל 7

חשבו בקירוב את הערך

$$\sqrt[5]{1.1}$$

ברמת דיוק של 0.01.

תרגיל 8

חשבו בקירוב את הערך

$$\ln(1.04)$$

ברמת דיוק של 0.01

תרגיל 9

חשבו בקירוב את הערך

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} = e^{-1/5}$$

ברמת דיוק של 0.01.

תרגיל 10

הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

תרגיל 11

הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים:

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

תרגיל 12

יהי n מספר טבעי.

הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים:

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

תרגיל 13

הוכיחו כי לכל מספר טבעי $n \geq 2$ מתקיים:

$$0 < \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{2n^2}$$

תרגיל 14

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right)$$

תרגיל 15

יהי $x > 0$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{x} - 1)^n = x^2$$

תרגיל 16

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln \left(\frac{1}{x} \right)} \left(\left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

תרגיל 17

יהי $a > 1$

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^7 \left(a^{\frac{1}{x^4+x}} - a^{\frac{1}{x^4}} \right)$$

תרגיל 18

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x^4) - x^4}{(x - \sin x)^4}$$

תרגיל 19

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - x)^2}{(\ln(1+x) - x)^3}$$

תרגיל 20

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\cos x - e^{-x^2/2})}{\sin^4 x}$$

תרגיל 21

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - x^2 + \frac{x^6}{6}}{e^{x^5} - 1 - x^5}$$

תרגיל 22

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{2k}{n^2}\right)$$

תרגיל 23

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$$

תרגיל 24

תהי f פונקציה גזירה פעמיים ברציפות בסביבה של 0, ונניח כי

$$f(0) = 0.$$

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{k=1}^{\lfloor 1/\sqrt{x} \rfloor} f(kx)$$

תרגיל 25

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right) \right)$$

תרגיל 26

תהי

$$f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

פונקציה גזירה פעמיים ברציפות.

נניח כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

וכי קיים קבוע $M > 0$ כך שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$|f''(x)| \leq M$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

תרגיל 27

תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$, וגזירה פעמיים בתחום $(0,1)$.

נניח כי:

$$f(0) = f(1) = 0.$$

כמו כן, נניח כי קיים קבוע $M > 0$ כך שלכל x בתחום $(0,1)$ מתקיים:

$$|f''(x)| \leq M$$

הוכיחו כי לכל x בתחום $(0,1)$ מתקיים:

$$|f'(x)| < \frac{M}{2}$$

תרגיל 28

תהי $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה שלוש פעמים ברציפות.

נניח כי:

$$f(-1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$$

הוכיחו כי קיים c בתחום $(-1,1)$ כך שמתקיים:

$$f'''(c) \geq 3.$$

תרגיל 29

תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות.

נניח כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0$$

וכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf''(x) = 0$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x) = 0$$

תרגיל 30

יהיו a, b מספרים ממשיים כך ש- $a < b$.

תהי f פונקציה הגזירה בסביבה של הקטע $[a, b]$, ונניח כי:

$$f'(a) = f'(b) = 0$$

נניח בנוסף כי f'' קיימת בתחום (a, b)

הוכיחו כי קיים c בתחום (a, b) כך שמתקיים:

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

תרגיל 31

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות.

נניח כי:

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1.$$

יהי a מספר ממשי קבוע.

הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) \right)^x = e^{-a^2/2}.$$

תרגיל 32

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.

נניח כי לכל x ממשי מתקיים:

$$f''(x) \geq 0$$

נניח בנוסף כי קיים קבוע $M > 0$ כך שלכל x ממשי מתקיים:

$$|f(x)| < M$$

הוכיחו כי f פונקציה קבועה.

תרגיל 33

יהי

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

טור חיובי מתכנס.

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{a_n} - 1)$$

מתכנס.

תרגיל 34

תהי $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות.

נניח כי:

$$f(0) = 0$$

וכי:

$$f'(0) \neq 0.$$

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} f\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$$

מתבדר.

תרגיל 35

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות.

נניח כי f חסומה וכי f'' חסומה.

נגדיר:

$$A = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, B = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

נניח כי:

$$A > 0, B > 0$$

הוכיחו כי:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{AB}$$

תרגיל 36

תהי f פונקציה גזירה אינסוף פעמים בסביבה של x_0 .

תהי x_n סדרה מונוטונית ממש, המקיימת:

$$x_n \neq x_0$$

לכל n , וכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

נניח כי לכל n מתקיים:

$$f(x_n) = 10$$

מצאו את פולינום טיילור מסדר 2 של f סביב הנקודה x_0 .

תרגיל 37

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה בעלת נגזרת שנייה רציפה.

נניח כי:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1,$$

וכי לכל x ממשי מתקיים:

$$f''(x) > 0.$$

הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים:

$$e^{f(x)} \geq x + 1.$$

תרגיל 38

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה חמש פעמים ברציפות.

נניח כי:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$$

וכן:

$$f^{(5)}(0) > 0$$

א. הוכיחו כי קיימת סביבה ימנית של 0 שבה מתקיים:

$$f(x) > 0$$

ב. נניח בנוסף כי לכל $x \neq 0$ מתקיים:

$$f'(x) \neq 0$$

הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים:

$$f(x) > 0$$

תרגיל 39

תהי f פונקציה גזירה פעמיים בנקודה $a = 3$.

נתון כי פולינום טיילור מסדר 2 של f סביב $a = 3$ הוא:

$$P_2(x) = 1 - 3(x - 3) + 2(x - 3)^2$$

נגדיר:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

מצאו את פולינום טיילור מסדר 2 של g סביב הנקודה $x = 3$.

תרגיל 40

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ארבע פעמים בכל הישר הממשי.

נניח כי לכל x ממשי מתקיים:

$$|f^{(4)}(x)| \leq 6$$

הוכיחו כי קיים פולינום $p(x)$ כך שלכל x ממשי מתקיים:

$$f(x) - p(x) \leq \frac{1}{4}(x+1)^4$$

תרגיל 41

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.

נניח כי:

$$f(0) = f(1) = 0$$

וכן:

$$\min \{f(x): 0 \leq x \leq 1\} = -1$$

הוכיחו כי קיים c בתחום $(0,1)$ כך שמתקיים:

$$f''(c) \geq 8$$

תרגיל 42

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים.

נסמן ב- $R_n(x)$ את שארית טיילור מסדר n של f סביב 0.

נניח כי לכל x ממשי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

קבעו האם הטענה הבאה נכונה או שגויה:

קיים קבוע $K > 0$ כך שלכל מספר טבעי n ולכל x ממשי מתקיים:

$$|f^{(n)}(x)| \leq K$$

שאלות ברמת מבחן

תרגיל 1

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x).$$

תרגיל 2

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n^2} \right)^{n^2}$$

תרגיל 3

יהי $x \geq 1$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{\sqrt[n]{x}} - 1)^n = x^2$$

תרגיל 4

יהי $a > 0$

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a^{k/n^2} - 1).$$

תרגיל 5

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה

הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$$

אם ורק אם

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin(x)) = L$$

תרגיל 6

תהי a_n סדרה חיובית ממש.

נניח כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנס.

הוכיחו כי גם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

מתכנס.

תרגיל 7

חקרו את התכנסות הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

קבעו האם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תרגיל 8

חקרו את התכנסות הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/n} - 1}{n}$$

קבעו האם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תרגיל 9

חקרו את התכנסות הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n - \sqrt{n^2 + n})}{n}$$

תרגיל 10

חקרו את התכנסות הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$$

תרגיל 11

חקרו את התכנסות הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} - e \right)^n$$

תרגיל 12

קבעו עבור אילו ערכים של $a > 0$ הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^a} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{n^a} \right)$$

מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תרגיל 13

נגדיר

$$f(x) = e^x - e^{-x}.$$

קבעו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$$

מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תרגיל 14

קבעו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תרגיל 15

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות.

נניח כי:

$$f(0) = 0$$

וכן שלכל x ממשי מתקיים:

$$|f'(x)| \leq 1.$$

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^2\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$$

מתכנס.

תרגיל 16

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות.

נניח כי:

$$f(0) = 0$$

וכי f' פונקציה עולה.

תהי x_n סדרה חיובית יורדת המקיימת:

$$x_n \rightarrow 0$$

נניח כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(x_n)$$

מתכנס.

הוכיחו כי גם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$$

מתכנס.

תרגיל 17

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \arctan x) = 0$$

הוכיחו כי f רציפה במידה שווה בתחום $[0, \infty)$.

תרגיל 18

תהי $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה במידה שווה.

הוכיחו כי קיימים קבועים $A, B > 0$ כך שלכל $x \geq 1$ מתקיים:

$$|f(x)| \leq Ax + B.$$

תרגיל 19

תהי $f: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה רציפה במידה שווה.

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$$

מתבדר.

תרגיל 20

תהי $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה גזירה.

נניח כי לכל $x > 0$ מתקיים:

$$f'(x) \geq f(x)$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f(2x)} = 0$$

תרגיל 21

תהי a_n סדרה חיובית, ונגדיר:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

נניח כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתבדר.

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$$

מתבדר.

תרגיל 22

תהי a_n סדרה חיובית, ונגדיר:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

נניח כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתבדר.

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$$

מתכנס.

תרגיל 23

תהי a_n סדרה חיובית, ונגדיר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנס.

נגדיר את סדרת השאריות:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}}$$

מתבדר.

תרגיל 24

תהי a_n סדרה חיובית, ונגדיר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנס.

נגדיר את סדרת השאריות:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}}$$

מתכנס.

תרגיל 25

תהי a_n סדרה חיובית, חסומה ומונוטונית עולה.

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$$

מתכנס.

תרגיל 26

תהי a_n סדרה חיובית ומונוטונית עולה, ונניח כי:

$$a_n \rightarrow \infty.$$

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$$

מתבדר.

תרגיל 27

תהי a_n סדרה חיובית המקיימת:

$$a_n \rightarrow a$$

עבור $a > 0$

הוכיחו כי שני הטורים

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right)$$

מתכנסים.

נוסף על כך, הוכיחו כי הטור הראשון מתכנס בהחלט אם ורק אם הטור השני מתכנס בהחלט.

תרגיל 28

יהי a_1 מספר ממשי, ונגדיר סדרה a_n על ידי:

$$a_{n+1} = \cos(a_n)$$

קבעו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנס.

תרגיל 29

נסמן ב- $v(n)$ את מספר הספרות של המספר הטבעי n בכתוב העשרוני.

קבעו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^2}$$

מתכנס.

תרגיל 30

נסמן ב- $v(n)$ את סכום הספרות של המספר הטבעי n בכתוב העשרוני.

קבעו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^2}$$

מתכנס.

תרגיל 31

נסמן ב- a_n את סדרת השורשים החיוביים של המשוואה:

$$\tan x = x$$

מסודרים בסדר עולה.

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2}$$

מתכנס.

תרגיל 32

תהי $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות.

נניח כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

וכי קיים קבוע $M > 0$ כך שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$|f''(x)| \leq M$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

תרגיל 33

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ותהי $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

נניח כי f אינה חסומה בקטע (a, b) .

הוכיחו כי f' אינה חסומה בקטע (a, b) .

תרגיל 34

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה החסומה בכל קטע סופי.

נניח כי קיים מספר ממשי L כך שמתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+1) - f(x)) = L$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = L$$

תרגיל 35

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות.

נניח כי קיים מספר ממשי L כך שמתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

נניח בנוסף כי הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$$

קיים וסופי

הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

תרגיל 36

תהי a_n סדרה חיובית, ונניח כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנס.

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n} \right)$$

מתכנס.

תרגיל 37

תהי $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה שלוש פעמים ברציפות.

נניח כי לכל x בתחום $[-1, 1]$ מתקיים:

$$f'(x) < 0$$

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n f\left(\frac{1}{n}\right) - n f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f'(0) \right)$$

מתכנס.

תרגיל 38:

$$a_{n+1} = \ln(e^{a_n} - a_n) \quad a_1 = 1$$

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס? במידה ובטור מתכנס חשבו את ערכו.

תרגיל 39:

נניח ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתבדר ואיבריו חיוביים האם הטור הבא מתכנס או מתבדר או לא ניתן לקבוע.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$$

תרגיל 40:

נניח ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתבדר ואיבריו חיוביים האם הטור הבא מתכנס או מתבדר או לא ניתן לקבוע.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n^2}$$

תרגיל 41:

נתונה פונקציה רציפה $f: R \rightarrow R$ כך ש $f(x) = f(2x + 1)$ לכל x ונראה שהפונקציה קבועה

פתרון:

תרגיל 42:

תהי a_n סדרה כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ונראה שקיימת תת סדרה a_{n_k} כך ש $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ מתכנס.

פתרון:

תרגיל 43:

נתונות פונקציות $f, g: R \rightarrow R$ גזירות פעמיים בכל R ומקיימות

$$f(0) = g(0) \quad f'(0) = g'(0)$$

ונראה כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right) \right)$ מתכנס.

תרגיל 44:

האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

פתרון:

תרגיל 45:

נניח ש $f(a) > 0$ ו f גזירה ב a חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{\ln(x) - \ln(a)}}$$

פתרון:

תרגיל 46

תהי $f: R \rightarrow R$ פונקציה מונוטונית כך ש $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$ ונראה שלכל $c \geq 1$ מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$$

פתרון:

תרגיל 47

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ פונקציה גזירה ונניח ש $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + f'(x)) = 0$ ונראה ש $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

פתרון:

תרגיל 48:

תהי $f: R \rightarrow R$ גזירה כך ש $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \text{exist (finite)}$ ונניח ש $\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x) = \text{exist}$

אז נראה $\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x) = 0$.

תרגיל 49

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^x - 1}{x(a - 1)} \right)^{\frac{1}{x}} \quad a > 0 \quad a \neq 1$$

תרגיל 50

נניח ש $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ וגם $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$ ונראה ש $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

תרגיל 51:

תהי x_n סדרה חיובית כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n) = L$

סעיף א: יהי $a > 0$ עבור אילו ערכי a הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{x_n}$$

מתכנס או מתבדר?

ב. תהי $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה. נניח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x f(x) = 1$ הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$$

מתכנס