

101 學測

精彩 解析

臺南女中 / 高孟敏 老師

數學 考科

【試題·答案】依據大考中心公布內容

發行人 / 陳炳亨

總召集 / 周耀琨

總編輯 / 蔣海燕

主編 / 陳俊龍

校對 / 李忠穎、鄭家倫

美編 / 李懿娟、曾惠玉

◎本書內容同步刊載於翰林我的網

出版 / 民國一〇一年二月

發行所 / 70248 臺南市新樂路 76 號

編輯部 / 70252 臺南市新忠路 8-1 號

電話 / (06)2619621#314

E-mail / periodical@hanlin.com.tw

翰林我的網 <http://www.worldone.com.tw>

NO.00847



翰林出版

數學考科 臺南女中 / 高孟楸 老師

101 年學測，是『九五暫綱』的最後一屆，所以此課綱的末代考生也戰戰兢兢的迎接此次考試，畢竟如果明年要再重來就得重新研讀新課綱的內容。也因為九五課綱的最後一屆，所以考題的趨勢在考前就有許多的猜測，不知會不會來個分數大放送呢？又因為緊鄰總統大選時期，加上『九九課綱』已刪除信賴區間內容，所以很多人就會猜測，關於抽樣的統計部分是否又會是出題的重點呢？這些疑問隨著考試的結束也跟著有了答案，下面就針對 101 年學測數學試題做些簡易的分析與解析！

一 試題分布分析

冊別	單元	題號	分數合計	單冊合併計分
第一冊	第一章數與坐標系	單選 1.、選填 B.	10	25 分
	第二章數列與級數	單選 2.、選填 A.	10	
	第三章多項式	多選 8.	5	
第二冊	第一章指數與對數	單選 3.、單選 5.	10	25 分
	第二章三角函數的基本概念	多選 12	5	
	第三章三角函數的性質與應用	多選 10.、選填 E.	10	
第三冊	第一章向量	選填 C.	5	15 分
	第二章空間中的直線與平面	多選 11. (註 1)	5	
	第三章圓與球面	單選 7.	5	
第四冊	第一章圓錐曲線	多選 13.、選填 D.、 選填 F.	15	35 分
	第二章排列組合	多選 9.	5	
	第三章機率與統計	單選 4.、單選 6.、 選填 G. (註 2)	15	

由此表格可以發現這份考題不僅各冊的試題分配平均，每個單元也都出現在考題中，幾個重要概念如：指數與對數、多項式、三角函數、圓錐曲線、排列組合、機率與統計等都有入題，但獨缺以往喜好的空間向量題型，連信賴區間的考題也都缺席。題目仍舊維持歷年來的單選題、多選題、選填題的型態，大部分題目維持為簡單數學概念的基本題，除此外也有部分題目可利用幾何圖形幫助解題，是份具有鑑別度的試題。

註：1. 多選 11 題雖歸為第三冊第二章，但主要是考二元一次聯立方程組的概念。

2. 選填 G. 雖歸類為機率的考題，但其需要用到空間中平面的概念，了解平行平面的距離，才可以解題，可視為跨單元的考題。

二 試題特色

今年的考題，題意清晰，沒有冗長的言詞，與去年的考題雷同之處即為很多題目都結合圖形觀念，可見這是未來教學的重點。因各單元都有入題，可見學子不可以偏頗任一個觀念。以下就本份試題的特色，依筆者經驗提出幾點加以討論，也盼各位先進不吝指導！

1. 重幾何圖形：這份試題中，單選 7、多選 9、多選 10、多選 13、選填 E、選填 F、選填 G 等題都是圖形題，尤其是選填 G 只要了解六個平面的關係與立體圖形的形狀即可以解題。另外選填 F 也是藉由橢圓圖形的對稱性與橢圓的基本定義即可解題，這也是幾乎每年學測都會出現的利用『圓錐曲線定義』來解的題目。可見出題者想要藉由這份考題在提醒學子，學習數學不只是數字上的運算與定理的運用，圖形的輔助學習也很重要！
2. 少公式記憶：這份考題不太需要用到很多數學公式，僅有在多選 12 用到倍角公式與半角公式。單選 4 考到統計學中的常態分配概念，也需用到標準差的意義，但不需要代公式計算，只要用基本定義概念即可以選出符合狀況的圖形。所以學習數學不能僅有公式的背誦與套用而已！
3. 條件的重要性：這份試題公認有很多『陷阱』。但與其說是陷阱，不如說是在提醒學子，學習過程中需要注意很多定義的限制與條件，不可以囫圇吞棗！以多選 12 為例，其中的 $\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ ，其正負號需要看 $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限決定。另外多選 11 題，也是需要小心作答的，因為方程組有解，可能是『恰有一組解』或是『無限多組解』。
4. 簡單計算能力：簡單的計算能力是數學的根基。單選 1 是國中程度的根式計算，是讓考生信心大增的送分題。單選 3 與單選 5 都是指數與對數的基本計算題，也強調對數表的重要性。

三 結語

綜觀這份試題，題幹敘述清楚，不複雜冗長，「重觀念、少計算」，應屬中間程度稍偏難，但也有不少的送分題。程度好且觀念清晰的考生一分鐘內即可答完一題，但若平時只重視演算的學子，應很難拿到高分。此外，近年來套公式的記憶式考題越來越少，取而代之的是用思考解答的觀念題。

總而言之，『重觀念與圖形的理解、少繁瑣的計算』似乎已成為學測考試的趨勢，於是觀念學習的重要性不可言喻，動腦思考的習慣養成也很重要，藉由平時的演練儲備能力，考試的時候保持清晰的思緒，想要在數學科拿到好成績並非難事！



第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. $\sqrt{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2}} + 1$ 等於下列哪一個選項？

- (1) 1.01 (2) 1.05 (3) 1.1 (4) 1.15 (5) 1.21

答案 (2)

命題出處 第一冊第一章 數與座標系

測驗目標 根式與數的運算

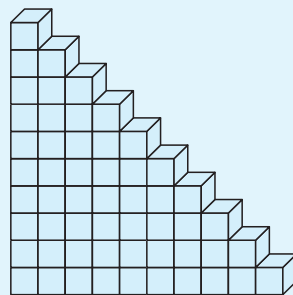
解析 $\sqrt{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2}} + 1 = \sqrt{\frac{16 + 25 + 16 \times 25}{16 \times 25}} = \frac{21}{20} = 1.05$

故選(2)

難易度 易

2. 將邊長為 1 公分的正立方體堆疊成一階梯形立體，如下圖所示，其中第 1 層（最下層）有 10 塊，第 2 層有 9 塊，……，依此類推。當堆疊完 10 層時，該階梯形立體的表面積（即該立體的前、後、上、下、左、右各表面的面積總和）為多少？

- (1) 75 平方公分
 (2) 90 平方公分
 (3) 110 平方公分
 (4) 130 平方公分
 (5) 150 平方公分



答案 (5)

命題出處 第一冊第二章 數列與級數

測驗目標 幾何圖形概念與等差級數

解析 面積包含此立體圖形的前、後、底面、左側與右側的階梯狀面積，所以其面積總和為

$$\Rightarrow \log(x^2 + y) = \log(10^{5.6} + 10^{5.6}) = \log(10^{5.6} \times 2) = 5.6 + \log 2 \approx 5.901$$

故選(3)

難易度 易

類似題 《學測新導向·數學 1-4 冊》第 103 頁第 14 題

6. 箱中有編號分別為 0, 1, 2, …, 9 的十顆球。隨機抽取一球，將球放回後，再隨機抽取一球。請問這兩球編號相減的絕對值為下列哪一個選項時，其出現的機率最大？

- (1) 0 (2) 1 (3) 4 (4) 5 (5) 9

答案 (2)

命題出處 第四冊第三章 機率與統計

測驗目標 排列組合與機率

解析 因為樣本空間相同，取法共有 $10 \times 10 = 100$ 種，所以機率越大表示事件的個數越多，故只要算出各選項的事件個數即可。

(1) 相差 0，表示兩次均取到相同的數字球，所有 10 種

(2) 相差 1 的狀況有 (0, 1)、(1, 2)、…、(8, 9) 共 $9 \times 2! = 18$ 種

(3) 相差 4 的狀況有 (0, 4)、(1, 5)、…、(5, 9) 共 $6 \times 2! = 12$ 種

(4) 相差 5 的狀況有 (0, 5)、(1, 6)、…、(4, 9) 共 $5 \times 2! = 10$ 種

(5) 相差 9 的狀況有 (0, 9) 共 $1 \times 2! = 2$ 種

故選(2)

難易度 中

類似題 《學測新導向·數學 1-4 冊》第 335 頁範例 5 類題 2

7. 空間坐標中有一球面（半徑大於 0）與平面 $3x + 4y = 0$ 相切於原點，請問此球面與三個坐標軸一共有多少個交點？

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

答案 (3)

命題出處 第三冊第三章 圓與球面

測驗目標 球面的切平面與球面的關係，空間座標系概念

解析 設原點為 O 、球心 $A(x, y, z)$ ，平面 $3x + 4y = 0$ 法向量為

$$\vec{n} = (3, 4, 0), \text{ 則 } \overrightarrow{OA} = t\vec{n} \Rightarrow (x, y, z) = (3t, 4t, 0)$$

$\sqrt{(3t)^2 + (4t)^2 + 0^2} = 5|t|$ ，因為 A 點到 x 、 y 、 z 軸的距離分別為

$4|t|$ ($< r$)、 $3|t|$ ($< r$)、 $5|t|$ ($= r$)，所以球面與 x 軸交兩點（其中有一個原點）、球面與 y 軸交兩點（其中有一個原點）、球面與 z 軸交一點（即為原點）。故球面與座標軸共交三點。

故選(3)

難易度 難

類似題 《學測新導向·數學 1-4 冊》第 230 頁第 E 題

二、多選題 (占 30 分)

說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 設 $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + ax + b$ 為實係數多項式，且知 $f(i) = 0$ (其中 $i^2 = -1$)。請問下列哪些選項是多項式方程式 $f(x) = 0$ 的根？

- (1) $-i$ (2) 0 (3) 1 (4) -5 (5) 5

答案 (1)(2)(5)

命題出處 第一冊第三章 多項式

測驗目標 實係數多項式方程式虛根成雙

解析 $\because f(x) = 0$ 為實係數多項式方程式且 $f(i) = 0 \Rightarrow f(-i) = 0$

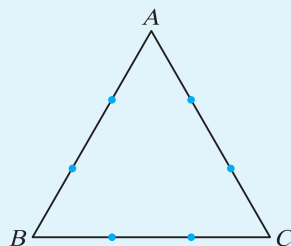
$\therefore (x-i)(x+i) = x^2 + 1$ 為 $f(x)$ 的因式，利用長除法可以得到
 $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + ax + b = (x^2 + 1)(x^2 - 5x) = x(x-5)(x^2 + 1)$
 $\Rightarrow f(x) = 0$

故選(1)(2)(5)

難易度 中

9. 三角形 ABC 是一個邊長為 3 的正三角形，如下圖所示。若在每一邊的兩個三等分點中，各選取一點連成三角形，則下列哪些選項是正確的？

- (1) 依此方法可能連成的三角形一共有 8 個
 (2) 這些可能連成的三角形中，恰有 2 個是銳角三角形
 (3) 這些可能連成的三角形中，恰有 3 個是直角三角形
 (4) 這些可能連成的三角形中，恰有 3 個是鈍角三角形
 (5) 這些可能連成的三角形中，恰有 1 個是正三角形



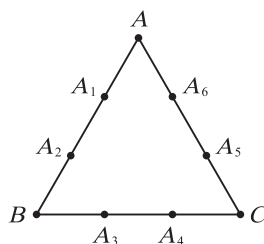
答案 (1)(2)

命題出處 第四冊第二章 排列組合

測驗目標 三角形的圖形關係與排列組合

解析 將三角形的每一邊的三等分點標為 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ，如圖所示。則：

- (1) \bigcirc ：每邊有兩個點可以選擇，所以共
 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 個三角形



(2)(3)(4)(5) 這 8 個三角形中， $\triangle A_1A_5A_3$ 、 $\triangle A_2A_4A_6$ 為正三角形
 (銳角三角形)， $\triangle A_1A_6A_3$ 、 $\triangle A_2A_3A_5$ 、 $\triangle A_1A_5A_4$ 、
 $\triangle A_1A_6A_4$ 、 $\triangle A_2A_6A_3$ 、 $\triangle A_2A_4A_5$ 為直角三角形

故選(1)(2)

難易度 難

類似題 《學測新導向·數學 1-4 冊》第 315 頁範例 14 類題 1

10. 設 O 為複數平面上的原點，並令點 A, B 分別代表非零複數 z, w 。若 $\angle AOB = 90^\circ$ ，則下列哪些選項必為負實數？

(1) $\frac{z}{w}$

(2) zw

(3) $(zw)^2$

(4) $\frac{z^2}{w^2}$

(5) $(z\bar{w})^2$ (其中 \bar{w} 為 w 的共軛複數)

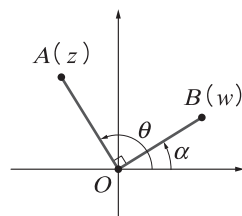
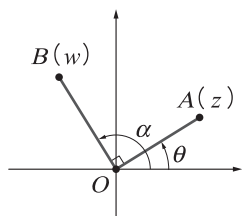
答案 (4)(5)

命題出處 第二冊第三章 三角函數的性質與應用

測驗目標 複數極式的計算與幾何意義

解析 設 $z = a(\cos\theta + i\sin\theta)$ 、 $w = b(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ，

$a, b > 0$ 且 $\theta - \alpha = \pm 90^\circ$ ($\because \angle AOB = 90^\circ$ ，如圖所示)。則：



(1) \times : $\frac{z}{w} = \frac{a}{b}(\cos(\theta - \alpha) + i\sin(\theta - \alpha))$

$$= \frac{a}{b}(\cos(\pm 90^\circ) + i\sin(\pm 90^\circ)) = \frac{a}{b}(\pm i)$$

(2) \times : $zw = ab(\cos(\theta + \alpha) + i\sin(\theta + \alpha))$ 無法確定其值

(3) \times : 同(2)無法確定其值

(4) \circ : $\frac{z^2}{w^2} = \frac{a^2}{b^2}(\cos(2\theta - 2\alpha) + i\sin(2\theta - 2\alpha))$

12. 在坐標平面上，廣義角 θ 的頂點為原點 O ，始邊為 x 軸的正向，且滿足 $\tan\theta = \frac{2}{3}$ 。若 θ 的終邊上有一點 P ，其 y 坐標為 -4 ，則下列哪些選項一定正確？

(1) P 的 x 坐標是 6

(2) $\overline{OP} = 2\sqrt{13}$

(3) $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

(4) $\sin 2\theta > 0$

(5) $\cos \frac{\theta}{2} < 0$

答案 (2)(4)

命題出處 第二冊第二章 三角函數的基本概念

測驗目標 廣義角三角函數的定義；倍角與半角公式

解析 (1) \times ：根據定義， $\tan\theta = \frac{-4}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -6$

(2) \circ ： $\overline{OP} = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13}$

(3) \times ： $\cos\theta = \frac{x}{\overline{OP}} = \frac{-6}{2\sqrt{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$

(4) \circ ： $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta = 2 \times \frac{-4}{2\sqrt{13}} \times \frac{-3}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13} > 0$

(5) \times ：因為 θ 為第三象限角 $\Rightarrow 180^\circ + 360^\circ \times n < \theta < 270^\circ + 360^\circ \times n$

$$\Rightarrow 90^\circ + 180^\circ \times n < \frac{\theta}{2} < 135^\circ + 180^\circ \times n$$

$\Rightarrow \frac{\theta}{2}$ 可能為第二或四象限角

所以 $\cos \frac{\theta}{2}$ 可能為正或負

故選(2)(4)

難易度 中

類似題 《學測新導向·數學 1-4 冊》第 109 頁範例 3、第 129 頁第 1 題、第 141 頁範例 11

13. 平面上兩點 F_1, F_2 滿足 $\overline{F_1F_2}=4$ 。設 d 為一實數，令 Γ 表示平面上滿足 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=d$ 的所有 P 點所成的圖形，又令 C 為平面上以 F_1 為圓心、6 為半徑的圓。請問下列哪些選項是正確的？

- (1) 當 $d=0$ 時， Γ 為直線
- (2) 當 $d=1$ 時， Γ 為雙曲線
- (3) 當 $d=2$ 時， Γ 與圓 C 交於兩點
- (4) 當 $d=4$ 時， Γ 與圓 C 交於四點
- (5) 當 $d=8$ 時， Γ 不存在

答案 (1)(2)(5)

命題出處 第四冊第一章 圓錐曲線

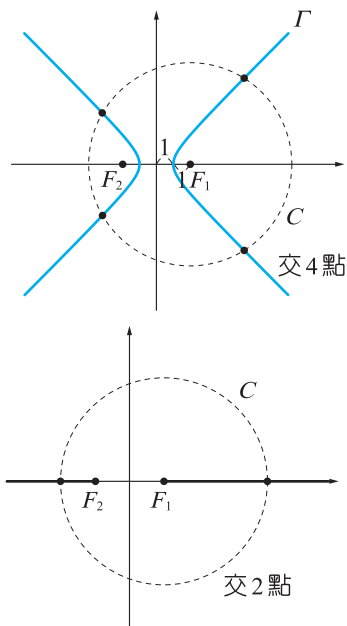
測驗目標 雙曲線的定義與圓的圖形

- 解析**
- (1) ○：當 $d=0$ ， Γ 為 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線
 - (2) ○：當 $d=1$ ， $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=1 < 4$
 $\Rightarrow \Gamma$ 為以 F_1, F_2 為焦點的雙曲線
 - (3) ×：當 $d=2$ ， $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2 < 4$
 $\Rightarrow \Gamma$ 為以 F_1, F_2 為焦點的雙曲線，
 焦點 F_1 與中心點距離為 2，如圖所示，
 所以 Γ 與圓 C 交四點
 - (4) ×：當 $d=4$ ， $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=4$
 $\Rightarrow \Gamma$ 為以 F_1, F_2 為始點射向兩端的射線，
 如圖所示，所以 Γ 與圓 C 交兩點
 - (5) ○：當 $d=8$ ， $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=8 > 4$
 $\Rightarrow \Gamma$ 不存在

故選(1)(2)(5)

難易度 中

類似題 《學測新導向·數學 1-4 冊》第 297 頁第 4 題



第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14~33）。

2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若首項為 a ，公比為 0.01 的無窮等比級數和等於循環小數 $1.\bar{2}$ ，則 $a =$ 14. 15 16。

答案 14 1 15 2 16 1

命題出處 第一冊第二章 數列與級數

測驗目標 無窮等比級數的求和、循環小數

解 析 $1.\bar{2} = 1 \frac{2}{9} = \frac{11}{9} = \frac{a}{1-0.01} \Rightarrow a = \frac{11}{9} \times \frac{99}{100} = 1.21$

難易度 易

類似題 《學測新導向·數學 1-4 冊》第 45 頁範例 13、第 46 頁範例 14 類題 1

B. 設 $A(1, 1)$, $B(3, 5)$, $C(5, 3)$, $D(0, -7)$, $E(2, -3)$ 及 $F(8, -6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 各恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為 ⑰⑱。

答 案 ⑰ — ⑱ 3

命題出處 第一冊第一章 數與座標系

測驗目標 直線斜率的基本定義

解 析 因為直線 L 與三角形各交一點，所以直線 L 可能為直線 AD (斜率為 8)、直線 AF (斜率為 -1)、直線 CD (斜率為 2)、直線 CE (斜率為 2)、直線 CF (斜率為 -3)。所以斜率最小為 -3

難易度 中

C. 小明在天文網站上看到以下的資訊「可利用北斗七星斗杓的天璇與天樞這兩顆星來尋找北極星：由天璇起始向天樞的方向延伸便可找到北極星，其中天樞與北極星的距離為天樞與天璇距離的 5 倍。」今小明將所見的星空想像成一個坐標平面，其中天璇的坐標為 $(9, 8)$ 及天樞的坐標為 $(7, 11)$ 。依上述資訊可以推得北極星的坐標為 $(\underline{\text{⑲⑳}}, \underline{\text{㉑㉒}})$ 。

答 案 ⑲ — ⑳ 3 ㉑ 2 ㉒ 6

命題出處 第三冊第一章 向量

測驗目標 平面向量座標的應用

解 析 設天璇位置為 $O(9, 8)$ ，天樞位置為 $A(7, 11)$ ，
北極星位置為 $B(x, y)$

則 $\overrightarrow{OB} = 6\overrightarrow{OA} \Rightarrow (x-9, y-8) = 6(-2, 3) \Rightarrow (x, y) = (-3, 26)$

難易度 易

D. 設點 $A(-2, 2)$ 、 $B(4, 8)$ 為坐標平面上兩點，且點 C 在二次函數 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的圖形上變動。當 C 點的 x 坐標為 ⑳㉑ 時，內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 有最小值 ㉓㉔。

答 案 ㉓ — ㉔ 1 ㉕ — ㉖ 3

命題出處 第四冊第一章 圓錐曲線

測驗目標 拋物線的參數式

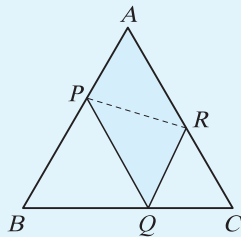
解析 設 C 點座標為 $(t, \frac{1}{2}t^2)$ ，則

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= (6, 6) \cdot (t+2, \frac{1}{2}t^2-2) \\ &= 6t+3t^2+12-12=3t^2+6t=3(t^2+2t+1)-3 \\ &= 3(t+1)^2-3 \geq -3\end{aligned}$$

所以當 $t=-1$ 時有最小值 -3

難易度 中

E. 在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P, Q, R ，使得 $APQR$ 形成一平行四邊形，如右圖所示：若平行四邊形 $APQR$ 的面積為 $20\sqrt{3}$ ，則線段 PR 的長度為 27。



答案 27 7

命題出處 第二冊第三章 三角函數的性質與應用

測驗目標 平行四邊形面積、餘弦定理

解析 因為四邊形 $APQR$ 為平行四邊形，

$$\text{所以 } \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AP} = \overline{CR} \quad (\because \overline{AB} = \overline{AC})$$

設 $\overline{AP} = \overline{CR} = x$ ， $\overline{AR} = 13 - x$ ，所以利用平行四邊形面積得到 $20\sqrt{3} = x(13-x)\sin 60^\circ \Rightarrow x^2 - 13x + 40 = 0 \Rightarrow x = 5$ 或 8

$$\begin{aligned}\text{所以利用餘弦定理，} \overline{PR} &= \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{AR}^2 - 2\overline{AP} \times \overline{AR} \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2}} = 7\end{aligned}$$

難易度 難

F. 設 m, n 為正實數，橢圓 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 的焦點分別為 $F_1(0, 2)$ 與 $F_2(0, -2)$ 。

若此橢圓上有一點 P 使得 $\triangle PF_1F_2$ 為一正三角形，則 $m =$ 28 29，
 $n =$ 30 31。

答案 28 1 29 2 30 1 31 6

命題出處 第四冊第一章 圓錐曲線

測驗目標 橢圓的基本定義

解析 由橢圓的基本定義， $\overline{F_1F_2}=4=2c \Rightarrow c=2$
 $\because \triangle PF_1F_2$ 為正三角形
 $\Rightarrow \overline{PF_1}=\overline{PF_2}=\overline{F_1F_2}=2c=4$ ， $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2 \times 4=8=2a \Rightarrow a=4$
 $\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$
 因為此橢圓為直立式橢圓，所以 $m=b^2=12$ ， $n=a^2=16$

難易度 中

G. 坐標空間中，在六個平面 $x=\frac{14}{13}$ ， $x=\frac{1}{13}$ ， $y=1$ ， $y=-1$ ， $z=-1$ 及 $z=-4$ 所圍成的長方體上隨機選取兩個相異頂點。若每個頂點被選取的機率相同，則選到兩個頂點的距離大於 3 之機率為 $\frac{\textcircled{32}}{\textcircled{33}}$ 。(化成最簡分數)

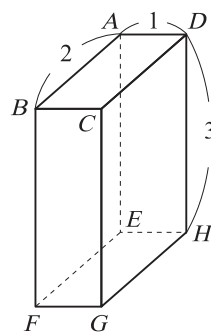
答案 $\textcircled{32}$ 3 $\textcircled{33}$ 7

命題出處 第四冊第三章 機率統計

測驗目標 空間概念與機率的基本定義

解析 六平面所形成的長方體如圖所示，其長、寬、高分別為 2、1、3。若要選取兩頂點的距離要大於 3，則要選擇面的對角線上的頂點：

$$\begin{aligned}
 & (AH)(AF)(AG)(BG)(BE)(BH)(CH)(CF)(CE)(DE) \\
 & (DG)(DF) \text{ 共 } 12 \text{ 組，所以機率為 } \frac{12}{C_2^8} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}
 \end{aligned}$$



難易度 中

類似題 《學測新導向·數學 1-4 冊》第 193 頁範例 4 類題 1

參考公式及可能用到的數值

- 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解： $x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
 - 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
 - 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
 - 首項為 a_1 且公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$
- 等比數列 $\langle ar^{k-1} \rangle$ 的前 n 項之和 $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ， $r \neq 1$

5. 級數公式： $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
6. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$
 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
7. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ， R 為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑
 $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
8. 棣美弗定理：設 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，則 $z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ， n 為一正整數
9. 算術平均數： $M(=\bar{X}) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
 (樣本) 標準差： $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\bar{X}^2)}$
10. 95% 信心水準下的信賴區間： $\left[\hat{p} - 2 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$
11. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ； $\sqrt{3} \approx 1.732$ ； $\sqrt{5} \approx 2.236$ ； $\sqrt{6} \approx 2.449$ ； $\pi \approx 3.142$
12. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$