

翰林

107 學測

精彩 解析

數學 考科

● 家齊高中 · 黃峻棋 老師

試題答案依據大考中心公布內容

發行人 / 陳炳亨
總召集 / 陳彥良
總編輯 / 蔣海燕
主編 / 江欣穎
校對 / 陳盈如
美編 / 林琬晴 · 陳雅惠
◎ 本書內容同步刊載於翰林官網

出版 / 民國一〇七年二月
發行所 / 70248 臺南市新樂路 76 號
編輯部 / 70252 臺南市新忠路 8-1 號
電話 / (06) 2619621 #312
E-mail / periodical@hanlin.com.tw
翰林官網 <http://www.hle.com.tw>



00847-02

翰林出版

家齊高中 ◀ 黃峻棋 老師

一 107年大學學測考試重點

(打★者代表 105 年學測考過的重點)
(打★者代表 106 年學測考過的重點)

第 1 單元 數與式

數與式

有理數、無理數

- 有理數、無理數的表示法
- 循環小數與分數的互換

乘法公式、實數性質

- 求值問題
- 實數比較大小
- 根式的運算

絕對值的幾何意義

- 絕對值運算
- 距離與分點公式

一次方程式、不等式

- 絕對值方程式與不等式
- ★ 三角不等式
- 算幾不等式

第 2 單元 多項式函數

多項式函數

一次、二次函數

- 斜率的概念與線性函數的圖形
- ★ 二次函數的圖形
- ★★ 二次函數的極值
- 函數圖形的平移
- ★ 三次、四次單項函數的圖形

除法原理、綜合除法

- 除法原理
- 綜合除法及應用

餘式、因式定理

- 除法原理、求餘式
- 因式定理
- ★ 插值多項式

多項式方程式

- 複數的運算
- ★ 牛頓定理 (整係數一次因式檢驗法)
- ★ 虛根成對性質
- 根與係數的關係

勘根定理

- ★ ● 勘根定理

多項式不等式

- 二次不等式及應用
- 二次函數恆正、恆負的應用

第 3 單元 指數與對數函數

指數與對數函數

指數與對數的運算	<ul style="list-style-type: none"> ● 整數指數、有理數指數與實數指數的定義 ★★● 指數律的運算 ● 對數的定義 ★★● 對數的運算
指、對數函數的圖形	<ul style="list-style-type: none"> ● 指數函數的定義與圖形 ● 對數函數的定義與圖形 ● 指、對數函數圖形的性質 ● 函數圖形的交點個數與極值的應用
方程式與不等式	<ul style="list-style-type: none"> ● 可化成同底的指數方程式(一元二次) ● 參數型指數方程式(注意參數範圍) ● 可化成同底的對數方程式(注意驗根) ● 不同底的指數方程式(兩邊取對數) ● 指數不等式(化成同底,考慮遞增或遞減) ● 對數不等式(同上,再加上考慮自然限制) ● 不等式與比較大小
首數與尾數	<ul style="list-style-type: none"> ★● 對數表查表與內插法 ● 首數與尾數的意義 ● 應用問題(等比級數、對數不等式)

第 4 單元 數列與級數

數列與級數

數列的定義	<ul style="list-style-type: none"> ● 數列的規律性 ★● 等差數列 ★● 等比數列及應用(與第3單元的對數結合)
一階遞迴數列	<ul style="list-style-type: none"> ● 遞迴表示法 ★● 有規則的遞迴數列
數學歸納法	<ul style="list-style-type: none"> ● 歸納法的應用
Σ 的性質	<ul style="list-style-type: none"> ● 求和公式 ● 分式級數求和

第 5 單元 排列、組合

排列、組合

簡單邏輯概念	<ul style="list-style-type: none"> ● 真、假命題 ● 笛摩根定理
基本計數原理	<ul style="list-style-type: none"> ★● 集合的運算 ★● 取捨原理 ★● 加法原理與乘法原理
排 列	<ul style="list-style-type: none"> ★● 完全相異物的直線排列 ● 不完全相異物的直線排列 ● 重複排列
組 合	<ul style="list-style-type: none"> ● 一般組合(不可重複的組合) ● 分組問題 ● 重複組合(三種等價意義)
二項式定理	<ul style="list-style-type: none"> ● 二項式定理 ● 巴斯卡定理

第 6 單元 機 率

機 率	古典機率	<ul style="list-style-type: none"> ● 樣本空間與事件 ★● 古典機率的定義與性質
	條件機率	<ul style="list-style-type: none"> ★● 條件機率的定義 ● 條件機率的乘法法則 ★● 公平原則 ● 獨立事件
	貝氏定理	<ul style="list-style-type: none"> ● 合計機率法則 ★● 貝氏定理

第 7 單元 數據分析

數據分析	一維數據分析	<ul style="list-style-type: none"> ★●● 平均數、中位數 ● 標準差 ★● 資料的平移 ● 數據標準化
	二維數據分析	<ul style="list-style-type: none"> ★● 散佈圖 ★● 相關係數的定義與性質 ● 最小平方方法 ● 迴歸直線方程式

第 8 單元 三 角

三 角	銳角三角函數	<ul style="list-style-type: none"> ● 正弦、餘弦、正切函數的定義 ● 平方關係 ● 商數關係
	廣義角與極坐標	<ul style="list-style-type: none"> ● 同界角的概念 ★●● 廣義角三角函數 ● 直角坐標與極坐標的互換 ★● 度與弧度之轉換
	正弦、餘弦定理	<ul style="list-style-type: none"> ★●● 正弦定理 ★●● 餘弦定理及應用 ● 中線定理
	三角形面積公式	<ul style="list-style-type: none"> ★● 兩邊一夾角求面積 ★● 面積與外接圓半徑 ★● 面積與內切圓半徑 ● 海龍公式
	和角與差角公式	<ul style="list-style-type: none"> ● 和角、差角公式 ● 倍角、半角公式
	三角測量	<ul style="list-style-type: none"> ● 三角函數查表 ★● 平面測量 ● 立體測量

第 9 單元 直線與圓

直線與圓	直線方程式	<ul style="list-style-type: none"> ●直線的斜率 ●直線方程式(一般式、點斜式、截距式) ●兩直線的相交情形
	二元一次不等式	<ul style="list-style-type: none"> ★●二元一次不等式的圖形 ●同側、異側的判斷 ●線性規劃
	圓方程式	<ul style="list-style-type: none"> ●圓的定義與方程式 ★●點與圓的關係 ★●圓與直線的關係

第 10 單元 平面向量

平面向量	平面向量表示法	<ul style="list-style-type: none"> ●幾何表示法 ●坐標表示法 ●向量合成與分解
	向量的線性組合	<ul style="list-style-type: none"> ★●三點共線的性質 ●分點公式 ★●線性組合與面積
	向量的內積	<ul style="list-style-type: none"> ●幾何表示法 ●坐標表示法 ●三角形的面積 ●向量的正射影 ●柯西不等式
	平面上的直線	<ul style="list-style-type: none"> ●直線的參數式 ●兩直線的夾角 ●點到直線的距離 ●角平分線方程式
	二階行列式	<ul style="list-style-type: none"> ★●面積與二階行列式 ●克拉瑪公式

第 11 單元 空間向量

空間向量	空間基本概念	<ul style="list-style-type: none"> ●空間立體圖形 ●兩面角 ●三垂線定理
	空間坐標系	<ul style="list-style-type: none"> ★●空間坐標表示法 ●空間向量表示法 ★●內積、正射影、柯西不等式
	空間向量的外積	<ul style="list-style-type: none"> ●外積的定義 ●外積的性質 ●向量的外積與面積

第 12 單元 空間中的平面與直線

空間中的平面與直線

平面方程式

- ★●法向量
- 平面一般式
- 平面截距式
- 決定平面方程式的條件

平面方程式的應用

- 兩平面的夾角
- 點到平面的距離
- 投影點與對稱點

空間直線方程式

- 參數式
- 對稱比例式
- 兩面式
- ★●直線與平面的關係
- ★★●直線與直線的關係

第 13 單元 矩 陣

矩 陣

矩陣列運算

- ★●高斯消去法
- ★●矩陣的意義
- ★●矩陣列運算

矩陣的運算性質

- 加減法
- 係數積
- 矩陣的乘法

矩陣的應用

- 轉移矩陣
- 乘法反方陣

第 14 單元 二次曲線

二次曲線

拋物線

- 拋物線的定義
- 拋物線的標準式
- ★●拋物線的圖形及應用

橢 圓

- 橢圓的定義
- ★●橢圓的標準式
- 橢圓的圖形及應用（平移與伸縮）
- 共焦點問題

雙曲線

- 雙曲線的定義
- 雙曲線的標準式
- 等軸雙曲線、共軛雙曲線
- ★●漸近線問題
- 共焦點問題
- 雙曲線的圖形及應用

二 107 年大學學測試題分布

題號	題型	命題出處	測驗目標	難易度
1	單選	第四冊第一章 空間向量	空間基本概念	易
2	單選	第二冊第三章 機率	獨立事件	中偏易
3	單選	第二冊第三章 機率	古典機率	中偏易
4	單選	第一冊第三章 指數與對數函數	指數、對數不等式	中偏易
5	單選	第三冊第一章 三角 第二冊第一章 數列與級數	和角公式、等差數列	中
6	單選	第二冊第四章 數據分析	一維數據分析	中偏易
7	單選	第三冊第三章 平面向量	向量的內積（幾何表示法）	中
8	多選	第二冊第四章 數據分析 第二冊第二章 排列、組合	統計圖表閱讀、邏輯概念	中偏易
9	多選	第一冊第二章 多項式函數	除法原理	中
10	多選	第三冊第三章 平面向量 第三冊第一章 三角	向量坐標表示法、 銳角三角函數	中
11	多選	第四冊第二章 空間中的平面與直線	空間平面與直線的關係	中
12	多選	第四冊第四章 二次曲線	二次曲線的標準式	中
A	選填	第三冊第二章 直線與圓 第一冊第三章 指數與對數函數	斜率的性質、對數的運算性質	中偏易
B	選填	第三冊第一章 三角	平面測量	中
C	選填	第三冊第二章 直線與圓 第一冊第二章 多項式函數	圓的切線性質、 二次函數的極值	中
D	選填	第三冊第二章 直線與圓 第三冊第三章 平面向量	二元一次不等式、 平行線的距離	中
E	選填	第一冊第二章 多項式函數 第三冊第一章 三角	二次函數的圖形、餘弦定理	中
F	選填	第四冊第三章 矩陣	矩陣的乘法	易
G	選填	第三冊第三章 平面向量 第三冊第一章 三角	向量的分點公式、正弦定理	中偏難
H	選填	第四冊第一章 空間向量	兩面角	中偏難

三 試題分析

比起去年的學測題目，今年算是簡單許多。一來單選題少了文字上的誤判，二來多選題也都能引導同學作答，不致於亂猜一通，而選填題則是今年同學能否拿到高分的關鍵！

今年試題的特色如下：

1. 今年的試題嚴重分配不均，偏重在幾何（三、四冊）。第一冊 15 分，第二冊 20 分，第三冊 40 分，第四冊 25 分。
2. 幾何題型偏多的情形之下，解題技巧就相對靈活許多，也考驗同學的演算能力，對於死背公式的同學可能會是致命傷。
3. 傳統的排列組合題型都沒有出現，而機率問題也比往年簡單。統計的題型跳脫不出表格和閱讀，不過都是可以輕鬆應付的。
4. 指、對數本身概念性的題目並沒有出現，取而代之的是以“解題工具”呈現。例如：單選 2、單選 4、選填 A。
5. 個人覺得最有鑑別度的題目是選填 C、G、H 這三題。選填 C 用圓的切線來包裝，然後搭配函數求極值，不過這個配方求極值卻用到 4 次配方。選填 G 考向量分點公式，但是必須先求出邊長的比例關係（利用正弦定理來求是最快的），技巧性很高。選填 H 是空間摺紙問題，考兩面角的概念，這個題目應是考古題型，大部分的同學應該在複習的過程都有做過才對，但是在考場上若無法想像空間摺紙的立體圖形，這題恐怕就解不出來了。

整體來說，今年的題目簡單許多，滿級分大概需要 91 分以上，同學可以參考看看。



第壹部分：選擇題（占 60 分）

家齊高中 ◀ 黃峻棋 老師

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 給定相異兩點 A 、 B ，試問空間中能使 $\triangle PAB$ 成一正三角形的所有點 P 所成集合為下列哪一選項？

- (1) 兩個點 (2) 一線段 (3) 一直線 (4) 一圓 (5) 一平面

答案 (4)

命題出處 第四冊第一章 空間向量

測驗目標 空間基本概念

難易度 易

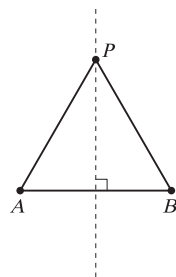
類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 185 頁範例 1

詳解 空間中一點 P ，使得 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{AB}$

$\therefore P$ 點必在 \overline{AB} 之中垂線上

將此中垂線旋轉一圈

$\therefore P$ 點所形成的圖形為一圓，故選(4)



2. 一份試卷共有 10 題單選題，每題有 5 個選項，其中只有一個選項是正確答案。假設小明以隨機猜答的方式回答此試卷，且各題猜答方式互不影響。試估計小明全部答對的機率最接近下列哪一選項？

- (1) 10^{-5} (2) 10^{-6} (3) 10^{-7} (4) 10^{-8} (5) 10^{-9}

答案 (3)

命題出處 第二冊第三章 機率

測驗目標 獨立事件

難易度 中偏易

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 98 頁範例 8

詳解 每一題猜對的機率為 $\frac{1}{5}$ ，又每題猜答方式互不影響

\therefore 全部答對的機率為 $\left(\frac{1}{5}\right)^{10} = 5^{-10}$

又 $\log 5^{-10} = -10 \times \log 5$

$\approx -10 \times 0.6990 = -6.990 \approx -7 = \log 10^{-7}$

$\therefore 5^{-10} \approx 10^{-7}$ ，故選(3)

3. 某公司規定員工可在一星期（七天）當中選擇兩天休假。若甲、乙兩人隨機選擇休假日且兩人的選擇互不相關，試問一星期當中發生兩人在同一天休假的機率為何？

- (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{8}{21}$ (3) $\frac{3}{7}$ (4) $\frac{10}{21}$ (5) $\frac{11}{21}$

答案 (5)

命題出處 第二冊第三章 機率

測驗目標 古典機率

難易度 中偏易

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 93 頁範例 3

詳解 一星期中兩人在同一天休假的機率為

$1 - P(\text{兩人休假都在不同天})$

$$= 1 - \frac{C_2^7 \times C_2^5}{C_2^7 \times C_2^7} \quad (\because \text{甲選擇} : C_2^7, \text{乙選擇 (和甲不同)} : C_2^5)$$

$$= 1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$$

故選(5)

4. 試問有多少個整數 x 滿足 $10^9 < 2^x < 9^{10}$ ？

- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個

答案 (2)

命題出處 第一冊第三章 指數與對數函數

測驗目標 指數、對數不等式

難易度 中偏易

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 55 頁類題 3

詳解 $10^9 < 2^x < 9^{10} \Leftrightarrow \log 10^9 < \log 2^x < \log 9^{10}$

$$\Leftrightarrow 9 < x \times \log 2 < 10 \times \log 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{0.3010} < x < \frac{10 \times 2 \times 0.4771}{0.3010}$$

$$\therefore 29.90\cdots < x < 31.70\cdots$$

$$\therefore x = 30 \text{ 或 } 31$$

故選(2)

5. 試問共有幾個角度 θ 滿足 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ，且 $\cos(3\theta - 60^\circ)$ ， $\cos 3\theta$ ， $\cos(3\theta + 60^\circ)$ 依序成一等差數列？
- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個

答案 (3)

命題出處 第三冊第一章 三角
第二冊第一章 數列與級數

測驗目標 和角公式、等差數列

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 140 頁精彩試題觀摩 2

詳解 由題意知

$$\begin{aligned} & 2 \times \cos 3\theta \\ &= \cos(3\theta - 60^\circ) + \cos(3\theta + 60^\circ) \\ &= (\cos 3\theta \cos 60^\circ + \sin 3\theta \sin 60^\circ) + (\cos 3\theta \cos 60^\circ - \sin 3\theta \sin 60^\circ) \\ &= \cos 3\theta \\ &\therefore \cos 3\theta = 0, 0^\circ < \theta < 180^\circ (0^\circ < 3\theta < 540^\circ) \\ &\Leftrightarrow 3\theta = 90^\circ \text{ 或 } 270^\circ \text{ 或 } 450^\circ \\ &\therefore \theta = 30^\circ \text{ 或 } 90^\circ \text{ 或 } 150^\circ \\ &\text{故選(3)} \end{aligned}$$

6. 某貨品為避免因成本變動而造成售價波動太過劇烈，當週售價相對於前一週售價的漲跌幅定為當週成本相對於前一週成本的漲跌幅的一半。例如下表中第二週成本上漲 100%，所以第二週售價上漲 50%。依此定價方式以及下表的資訊，試選出正確的選項。

【註：成本漲跌幅 = $\frac{\text{當週成本} - \text{前週成本}}{\text{前週成本}}$ ，售價漲跌幅 = $\frac{\text{當週售價} - \text{前週售價}}{\text{前週售價}}$ 。】

	第一週	第二週	第三週	第四週
成本	50	100	50	90
售價	120	180	x	y

- (1) $120 = x < y < 180$
 (2) $120 < x < y < 180$
 (3) $x < 120 < y < 180$
 (4) $120 = x < 180 < y$
 (5) $120 < x < 180 < y$

答案 (5)**命題出處** 第二冊第四章 數據分析**測驗目標** 一維數據分析**難易度** 中偏易**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 105 頁範例 1**詳解** 第三週成本下跌 $\frac{100-50}{100}=0.5$ (=50%)

$$\therefore \text{售價下跌 } 25\%, \text{ 即 } \frac{180-x}{180}=0.25 \quad \therefore x=135$$

$$\text{又第四週成本上漲 } \frac{90-50}{50}=0.8 \text{ (=80\%)}$$

$$\therefore \text{售價上漲 } 40\%, \text{ 即 } \frac{y-135}{135}=0.4 \quad \therefore y=189$$

故選(5)

7. $\triangle ABC$ 內接於圓心為 O 之單位圓。若 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \sqrt{3}\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，則 $\angle BAC$ 之度數為何？

(1) 30° (2) 45° (3) 60° (4) 75° (5) 90° **答案** (4)**命題出處** 第三冊第三章 平面向量**測驗目標** 向量的內積（幾何表示法）**難易度** 中**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 168 頁範例 6**詳解** $\therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \sqrt{3}\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OB} + \sqrt{3}\overrightarrow{OC}| = |-\overrightarrow{OA}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OB} + \sqrt{3}\overrightarrow{OC}|^2 = |-\overrightarrow{OA}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\sqrt{3}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 3|\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2$$

$$\therefore 1 + 2\sqrt{3} \times |\overrightarrow{OB}| \times |\overrightarrow{OC}| \times \cos \theta + 3 = 1$$

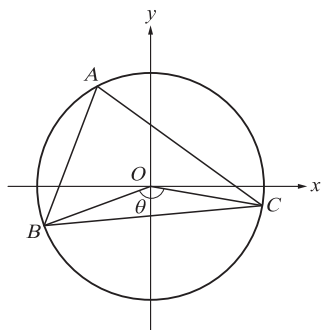
(\overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} 之夾角為 θ)

$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \theta = 150^\circ$$

$\therefore \angle BAC$ 為圓周角

$$\therefore \angle BAC = 75^\circ$$

故選(4)



二、多選題 (占 25 分)

說明：第 8 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 某年學科能力測驗小華的成績為：國文 11 級分、英文 12 級分、數學 9 級分、自然 9 級分、社會 12 級分。他考慮申請一些校系，表 1 為大考中心公布的學測各科成績標準；表 2 是他最有興趣的五個校系規定的申請檢定標準，依規定申請者需通過該校系所有檢定標準才會被列入篩選。例如甲校系規定國文成績須達均標、英文須達前標、且社會須達均標；丙校系則規定英文成績須達均標、且數學或自然至少有一科達前標。表 2 空白者表示該校系對該科成績未規定檢定標準。

表 1 學測各科成績標準

	頂標	前標	均標	後標	底標
國文	13	12	10	9	7
英文	14	12	9	6	4
數學	12	10	7	4	3
自然	13	11	9	6	5
社會	13	12	10	8	7

表 2 校系篩選規定

	國文	英文	數學	自然	社會
甲校系	均標	前標			均標
乙校系	前標	均標			前標
丙校系		均標	一科達前標		
丁校系	一科達前標			均標	均標
戊校系	均標	前標	均標	前標	

根據以上資訊，試問小華可以考慮申請哪些校系 (會被列入篩選) ?

- (1)甲校系 (2)乙校系 (3)丙校系 (4)丁校系 (5)戊校系

答案 (1)(4)

命題出處 第二冊第四章 數據分析
第二冊第二章 排列、組合

測驗目標 統計圖表閱讀、邏輯概念

難易度 中偏易

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 105 頁類題 2、
第 77~78 頁範例 1 及類題

詳解 由題意知，小華的國文成績達到均標
 英文成績達到前標
 數學成績達到均標
 自然成績達到均標
 社會成績達到前標
 \therefore 小華可申請甲、丁校系
 故選(1)(4)

9. 已知多項式 $f(x)$ 除以 x^2-1 之餘式為 $2x+1$ 。試選出正確的選項。

- (1) $f(0) = 1$
 (2) $f(1) = 3$
 (3) $f(x)$ 可能為一次式
 (4) $f(x)$ 可能為 $4x^4+2x^2-3$
 (5) $f(x)$ 可能為 $4x^4+2x^3-3$

答案 (2)(3)(5)

命題出處 第一冊第二章 多項式函數

測驗目標 除法原理

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義·數學1-4冊》第26頁範例9

詳解 由除法原理

$$\text{可令 } f(x) = (x^2-1) \cdot Q(x) + 2x+1$$

$$(1) \times : f(0) = -Q(0) + 1 \text{ 不確定其值}$$

$$(2) \bigcirc : f(1) = 2+1=3$$

$$(3) \bigcirc : f(x) \text{ 可能為一次式 (例如: } Q(x)=0, f(x)=2x+1)$$

$$(4) \times : f(x) - 2x - 1 = (x^2 - 1) \cdot Q(x)$$

$$\therefore \text{驗算 } g(x) = f(x) - 2x - 1 = 4x^4 + 2x^2 - 2x - 4 \text{ 是否被 } x^2 - 1 \text{ 整除}$$

$$\Leftrightarrow g(1) = 0, g(-1) \neq 0 \therefore \text{不合}$$

$$(5) \bigcirc : \text{承(4)}$$

$$\text{令 } g(x) = 4x^4 + 2x^3 - 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow g(1) = 0, g(-1) = 0$$

$$\therefore f(x) \text{ 可能為 } 4x^4 + 2x^3 - 3$$

故選(2)(3)(5)

10. 已知坐標平面上 $\triangle ABC$ ，其中 $\overrightarrow{AB} = (-4, 3)$ ，且 $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 。試選出正確的選項。

- (1) $\overline{BC} = 5$ (2) $\triangle ABC$ 是直角三角形 (3) $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{11}{5}$
 (4) $\sin B > \sin C$ (5) $\cos A > \cos B$

答案 (2)(3)

命題出處 第三冊第三章 平面向量
 第三冊第一章 三角

測驗目標 向量坐標表示法、銳角三角函數

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義·數學1-4冊》第163頁範例1、第122頁範例1

詳解 $\because \overrightarrow{AB} = (-4, 3), \overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \left(\frac{22}{5}, -\frac{11}{5}\right)$$

$$(1) \times : \overline{BC} = \sqrt{\left(\frac{22}{5}\right)^2 + \left(-\frac{11}{5}\right)^2} \neq 5$$

$$(2) \circ : \because \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{44}{25} - \frac{44}{25} = 0$$

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{BC}$ ，即 $\triangle ABC$ 為直角三角形（ $\angle C$ 為直角）

$$(3) \circ : \triangle ABC \text{ 面積為 } \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{20}{25}} \times \sqrt{\frac{605}{25}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{11\sqrt{5}}{5} = \frac{11}{5}$$

$$(4) \times : \text{略圖如右，} \sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

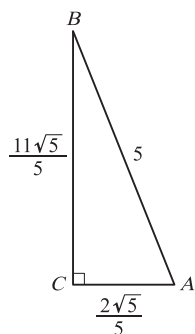
$$\sin C = \sin 90^\circ = 1$$

$$\therefore \sin B < \sin C$$

$$(5) \times : \cos A = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos B = \frac{11\sqrt{5}}{5} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \cos A < \cos B$$

故選(2)(3)



11. 坐標空間中，設直線 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-1}$ ，平面 $E_1: 2x-3y-z=0$ ，平面

$E_2: x+y-z=0$ 。試選出正確的選項。

- (1) 點 $(3, 0, -1)$ 在直線 L 上 (2) 點 $(1, 2, 3)$ 在平面 E_1 上
 (3) 直線 L 與平面 E_1 垂直 (4) 直線 L 在平面 E_2 上
 (5) 平面 E_1 與 E_2 交於一直線

答案 (3)(5)

命題出處 第四冊第二章 空間中的平面與直線

測驗目標 空間平面與直線的關係

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 204 頁範例 8

詳解 (1) \times ：將 $(3, 0, -1)$ 代入 L 中， $\frac{2}{2} \neq \frac{-2}{-3}$

$\therefore (3, 0, -1)$ 不在 L 上

(2) \times ：將 $(1, 2, 3)$ 代入 E_1 中， $2-6-3 \neq 0$

$\therefore (1, 2, 3)$ 不在 E_1 上

(3) \circ ： L 的方向向量 $\vec{v} = (2, -3, -1)$

E_1 的法向量 $\vec{n}_1 = (2, -3, -1)$

$\therefore \vec{v} \parallel \vec{n}_1$

$\therefore L$ 與 E_1 垂直

(4) \times ：承(3)， E_2 的法向量 $\vec{n}_2 = (1, 1, -1)$

$\therefore \vec{v} \cdot \vec{n}_2 = (2, -3, -1) \cdot (1, 1, -1)$

$$= 2 - 3 + 1 = 0$$

又 L 上的定點 $(3, -1, -1)$ 代入 E_2 中，
 $3 - 1 + 1 \neq 0$ (即 $(3, -1, -1)$ 不在 E_2 上)

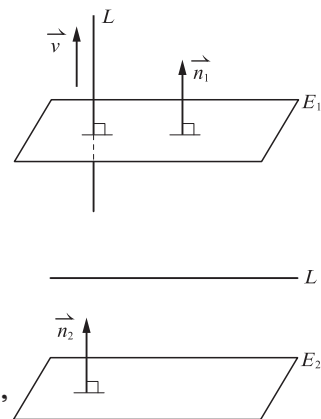
$\therefore L \parallel E_2$

(5) \circ ：承(3)(4)

$\therefore L \parallel E_2$ ， L 與 E_1 垂直

$\therefore E_1$ 與 E_2 交於一直線

故選(3)(5)



12. 試問下列哪些選項中的二次曲線，其焦點（之一）是拋物線 $y^2=2x$ 的焦點？

(1) $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

(2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(3) $x^2 + \frac{4y^2}{3} = 1$

(4) $8x^2 - 8y^2 = 1$

(5) $4x^2 - 4y^2 = 1$

答案 (1)(3)(4)

命題出處 第四冊第四章 二次曲線

測驗目標 二次曲線的標準式

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 220 頁範例 1、第 224 頁範例 6、第 230 頁範例 11

詳解 令 $\Gamma: y^2=2x \quad \therefore 4c=2 \Rightarrow c=\frac{1}{2} \quad \therefore \Gamma$ 的焦點為 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$$(1) \circ: \Gamma_1: \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{1}{4}, \text{ 頂點 } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), \text{ 開口向上}$$

$$\text{又 } 4c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{4} \quad \therefore \text{焦點為 } \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$(2) \times: \Gamma_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow a^2=4, b^2=3 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=1 \Rightarrow c=1$$

$$\Rightarrow \text{焦點為 } (1, 0), (-1, 0)$$

$$(3) \circ: \Gamma_3: \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1 \Rightarrow a^2=1, b^2=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow c^2=a^2-b^2=\frac{1}{4} \Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{焦點為 } \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$(4) \circ: \Gamma_4: \frac{x^2}{\frac{1}{8}} - \frac{y^2}{\frac{1}{8}} = 1 \Rightarrow a^2=\frac{1}{8}, b^2=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2=\frac{1}{4} \Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{焦點為 } \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$(5) \times: \Gamma_5: \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \Rightarrow a^2=\frac{1}{4}, b^2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2=\frac{1}{2} \Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \text{焦點為 } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

故選(1)(3)(4)

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1. 第 A. 至 H. 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（13-33）。

2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 已知坐標平面上三點 $(3, \log 3)$ 、 $(6, \log 6)$ 與 $(12, y)$ 在同一直線上，則 $y = \log$ ⑬⑭。

答案 24

命題出處 第三冊第二章 直線與圓

第一冊第三章 指數與對數函數

測驗目標 斜率的性質、對數的運算性質

難易度 中偏易

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 144 頁類題 2

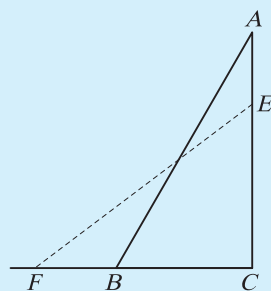
詳解 \because 三點共線 \square 斜率相等

$$\therefore \frac{\log 6 - \log 3}{6 - 3} = \frac{y - \log 6}{12 - 6}$$

$$\therefore y - \log 6 = 2 \cdot (\log 6 - \log 3) = 2 \log 2 = \log 4$$

$$\therefore y = \log 6 + \log 4 = \log 24$$

B. 如右圖所示（只是示意圖），將梯子 \overline{AB} 靠在與地面垂直的牆 AC 上，測得與水平地面的夾角 $\angle ABC$ 為 60° 。將在地面上的底 B 沿著地面向外拉 51 公分到點 F （即 $\overline{FB} = 51$ 公分），此時梯子 \overline{EF} 與地面的夾角 $\angle EFC$ 之正弦值為 $\sin \angle EFC = 0.6$ ，則梯子長 $\overline{AB} =$ ⑮⑯⑰ 公分。



答案 170

命題出處 第三冊第一章 三角

測驗目標 平面測量

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 137 頁類題 2

詳解 設 $\overline{AB} = x$ ，由題意知 $\cos 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{x}$

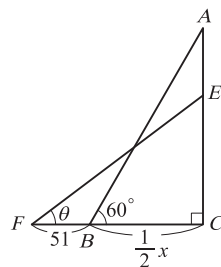
$$\therefore \overline{BC} = \frac{1}{2}x$$

$$\text{又 } \sin \angle EFC = \sin \theta = 0.6 = \frac{3}{5} \quad \therefore \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{故 } \cos \theta = \frac{51 + \frac{1}{2}x}{\overline{EF}} = \frac{\frac{1}{2}x + 51}{x} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{5}{2}x + 255 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x = 255$$

$$\therefore x = 170, \text{ 即 } \overline{AB} = 170$$



C. 平面上兩點 A 、 B 之距離為 5，以 A 為圓心作一半徑為 r ($0 < r < 5$) 的圓 Γ ，過 B 作圓 Γ 的切線，切點（之一）為 P 。當 r 變動時， $\triangle PAB$ 的面積最大可能

值為 $\frac{\textcircled{18}\textcircled{19}}{\textcircled{20}}$ 。（化成最簡分數）

答案 $\frac{25}{4}$

命題出處 第三冊第二章 直線與圓
第一冊第二章 多項式函數

測驗目標 圓的切線性質、二次函數的極值

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 22 頁範例 5

詳解 作圖如右

$\therefore \overline{BP}$ 為圓的切線

$\therefore \overline{BP} \perp \overline{AP}$ ，即 $\triangle PAB$ 為直角三角形

$$\therefore \overline{PB} = \sqrt{5^2 - r^2} = \sqrt{25 - r^2}$$

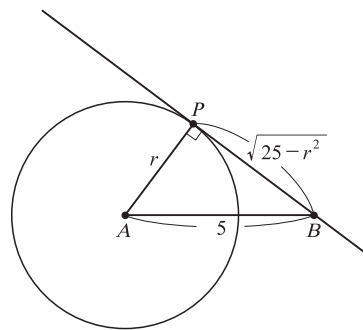
$$\therefore \triangle PAB \text{ 面積為 } \frac{1}{2} \times r \times \sqrt{25 - r^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{-r^4 + 25r^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{-\left(r^2 - \frac{25}{2}\right)^2 + \frac{625}{4}}$$

$$\therefore \text{當 } r^2 = \frac{25}{2} \text{ 時，面積最大值為 } \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{25}{2} = \frac{25}{4}$$

註：本題亦可用算幾不等式求此極值。



- D. 坐標平面上，圓 Γ 完全落在四個不等式： $x-y \leq 4$ 、 $x+y \leq 18$ 、 $x-y \geq -2$ 、 $x+y \geq -24$ 所圍成的區域內。則 Γ 最大可能面積為 $\frac{\textcircled{21}}{\textcircled{22}} \pi$ 。（化成最簡分數）

答案 $\frac{9}{2}$

命題出處 第三冊第二章 直線與圓
第三冊第三章 平面向量

測驗目標 二元一次不等式、平行線的距離

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 176 頁範例 13

詳解 不等式作圖如右，區域為一矩形 $ABCD$

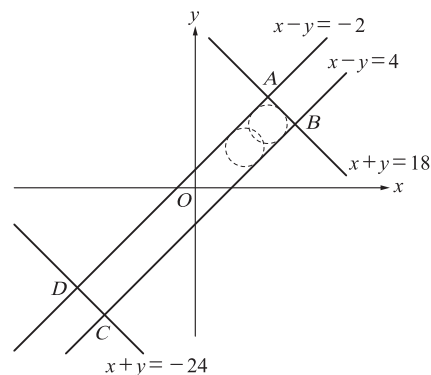
\therefore 圓 Γ 的圖形在 $ABCD$ 區域內

$\therefore \Gamma$ 的直徑 ($2r$) 為 $x-y=-2$ 、 $x-y=4$ 的距離

$$\therefore 2r = \frac{|4 - (-2)|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

\therefore 圓的最大面積為 $\pi r^2 = \frac{9}{2} \pi$



- E. 坐標平面上，若拋物線 $y=x^2+2x-3$ 的頂點為 C ，與 x 軸的交點為 A 、 B ，則

$\cos \angle ACB = \frac{\textcircled{23}}{\textcircled{24}}$ 。（化成最簡分數）

答案 $\frac{3}{5}$

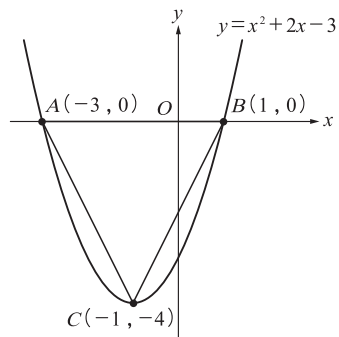
命題出處 第一冊第二章 多項式函數
第三冊第一章 三角

測驗目標 二次函數的圖形、餘弦定理

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 129 頁範例 8

詳解 $y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$
 \therefore 頂點 $C(-1, -4)$
 令 $y=0$
 $\therefore x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0$
 $\therefore x = -3$ 或 1
 即 $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$
 $\therefore \overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,
 $\overline{BC} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$
 $\therefore \cos \angle ACB = \frac{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 - 4^2}{2 \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}$
 $= \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$



註：本題亦可用向量內積解之。

F. 設 a, b, c, d, e, x, y, z 皆為實數，考慮矩陣相乘：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -4 & 6 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x & 7 \\ 0 & y & 7 \\ -11 & z & 23 \end{bmatrix}, \text{ 則 } y = \frac{\textcircled{25}}{\textcircled{26}}. \text{ (化成最簡分數)}$$

答案 $\frac{7}{2}$

命題出處 第四冊第三章 矩陣

測驗目標 矩陣的乘法

難易度 易

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 211 頁範例 3

詳解

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -4 & 6 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x & 7 \\ 0 & y & 7 \\ -11 & z & 23 \end{bmatrix}$$

由矩陣乘法得知 $y = 5c + 6d$①

$-3c - 4d = 0$②

$7c + e \cdot d = 7$③

又 $7 + 2e = 23 \therefore e = 8$ 代入③得 $7c + 8d = 7$

$\therefore \begin{cases} -3c - 4d = 0 \\ 7c + 8d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow c = 7, d = -\frac{21}{4}$ 代入①

得 $y = 35 - \frac{63}{2} = \frac{7}{2}$

G. 設 D 為 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 邊上的一點，已知 $\angle ABC=75^\circ$ 、 $\angle ACB=45^\circ$ 、

$\angle ADB=60^\circ$ 。若 $\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ ，則 $s=\frac{\textcircled{27}}{\textcircled{28}}$ ， $t=\frac{\textcircled{29}}{\textcircled{30}}$ 。（化成最簡分數）

答案 $s=\frac{1}{3}$ ， $t=\frac{2}{3}$

命題出處 第三冊第三章 平面向量
第三冊第一章 三角

測驗目標 向量的分點公式、正弦定理

難易度 中偏難

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 127 頁範例 6

詳解 由正弦定理

$\triangle ABD$ 中，

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

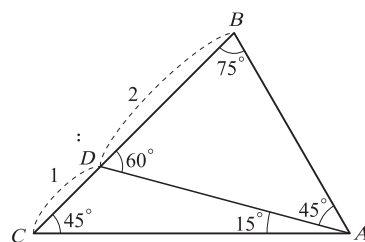
$\triangle ACD$ 中，

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} \text{ 得 } \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} &= \frac{\sin 15^\circ \times \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ \times \sin 45^\circ} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{由向量分點公式得 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore s = \frac{1}{3}, t = \frac{2}{3}$$



H. 將一塊邊長 $\overline{AB}=15$ 公分、 $\overline{BC}=20$ 公分的長方形鐵片 $ABCD$ 沿對角線 \overline{BD} 對摺後豎立，使得平面 ABD 與平面 CBD 垂直，則 A 、 C 兩點（在空間）的距離 $\overline{AC}=\sqrt{\textcircled{31}\textcircled{32}\textcircled{33}}$ 公分。（化成最簡根式）

答案 $\sqrt{337}$

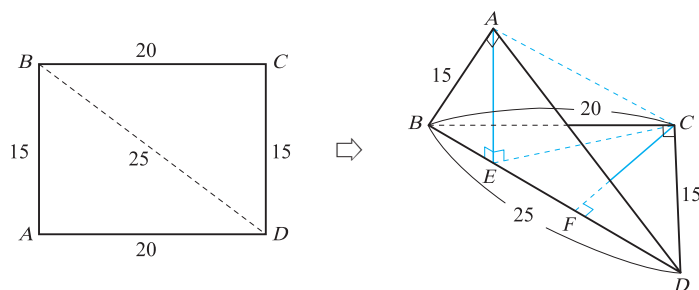
命題出處 第四冊第一章 空間向量

測驗目標 兩面角

難易度 中偏難

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 186 頁範例 2

詳解 由題意得知長方形對角線 $\overline{BD}=25$
長方形摺起後，作 $\overline{AE}\perp\overline{BD}$ ， $\overline{CF}\perp\overline{BD}$



$$\text{則 } \overline{AE}=\overline{CF}=\frac{15\times 20}{25}=12$$

$$\therefore \overline{BE}=\overline{DF}=9 (\triangle ABE, \triangle CDF \text{ 為直角三角形})$$

$$\square \overline{EF}=25-9\times 2=7$$

又 $\triangle CEF$ 為直角三角形

$$\therefore \overline{CE}=\sqrt{12^2+7^2}=\sqrt{193}$$

\therefore 平面 ABD 與平面 BCD 垂直

$$\therefore \angle AEC=90^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \overline{AC} &= \sqrt{12^2+193} \\ &= \sqrt{144+193} = \sqrt{337} \end{aligned}$$

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$\text{算術平均數 } \mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,

$$\text{相關係數 } r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\text{迴歸直線 (最適合直線) 方程式 } y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

8. 角錐體積 = $\frac{1}{3}$ 底面積 \times 高

