Semelhança de Triângulos

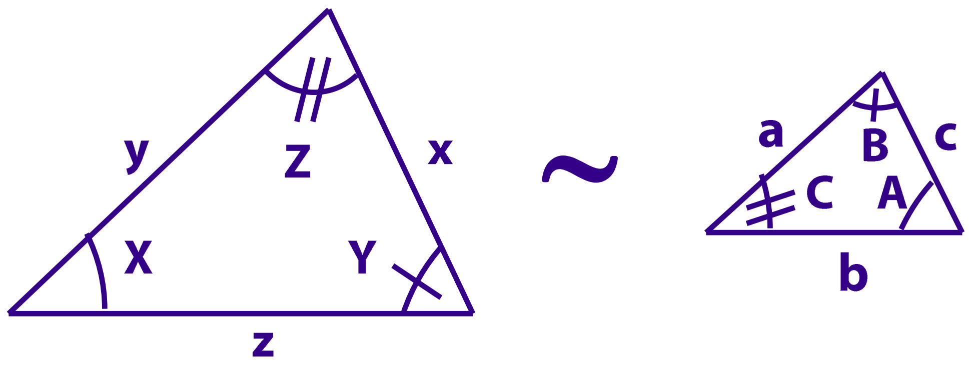
Prof. Léo

Matemática

Semelhança de triângulos

Triângulos Semelhantes

Dois triângulos são semelhantes, se e somente se, possuem dois ângulos respectivamente congruentes.

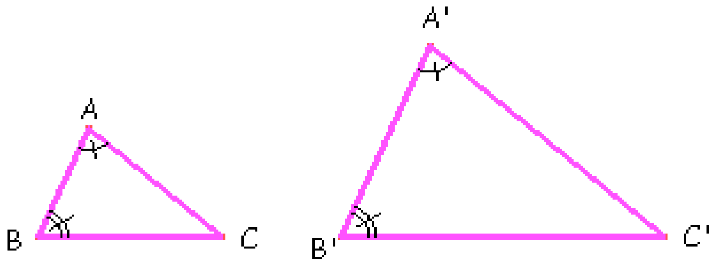


Casos:

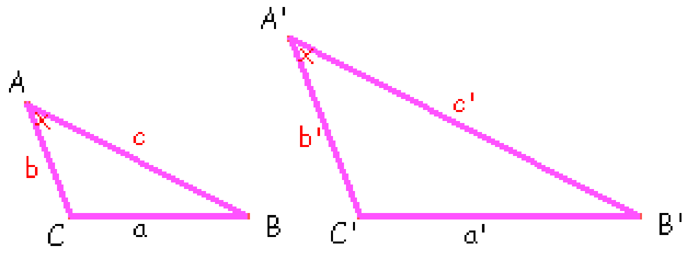
ÂÂ, LÂL, LLL

Os ângulos X e Z são respectivamente congruentes aos ângulos B e C.

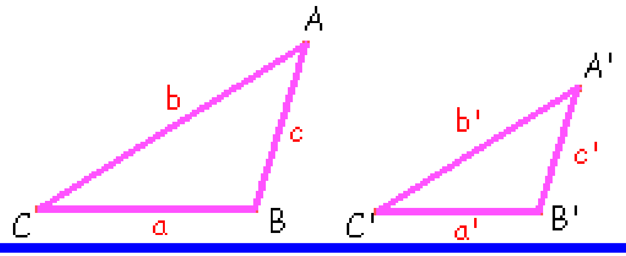
Casos de Semelhança:



Caso ÂÂ:
Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes



Caso LÂL:
Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos lados homólogos do outro triângulo e se o ângulo entre estes lados for congruente ao correspondente do outro triângulo, então os triângulos são semelhantes



Caso LLL:
Se dois triângulos possuem os seus lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes

Semelhança de triângulos

Relações Lineares

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{2p_1}{2p_2} = k$$

Relação com Área

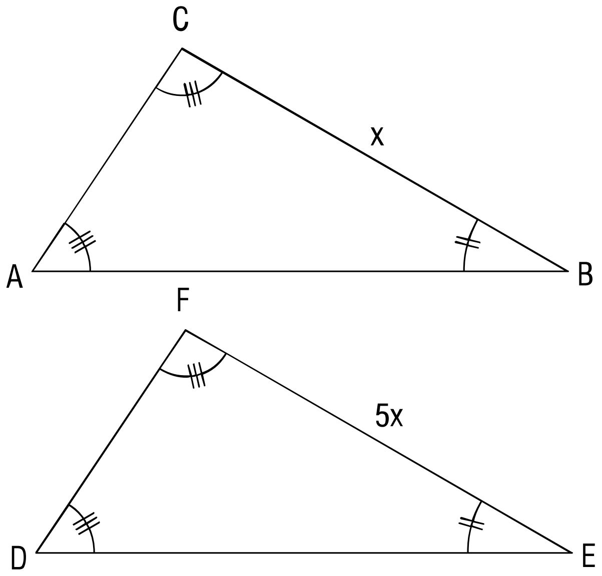
$$\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \frac{A_1}{A_2} = k^2$$

Relação com Volume

$$\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 = \frac{V_1}{V_2} = k^3$$

Semelhança de triângulos

Exemplo: UFSC - 2010 | As figuras abaixo mostram dois triângulos semelhantes. Se a área do menor é de 10 cm², então a área do maior é de 50 cm².



$$\left(\frac{x}{5x}\right)^2 = \frac{10}{A}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{10}{A}$$

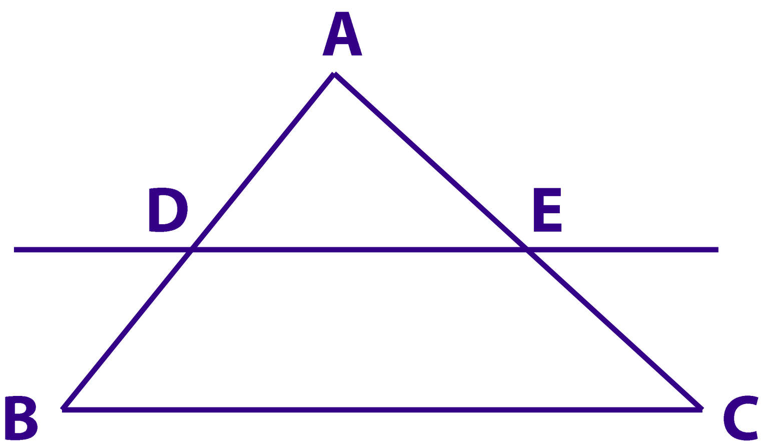
$$\frac{1}{25} = \frac{10}{A}$$

$$A = 250cm^2$$

Incorreto

Propriedade Fundamental

Toda reta paralela a um lado de um triângulo determina outro triângulo semelhante.

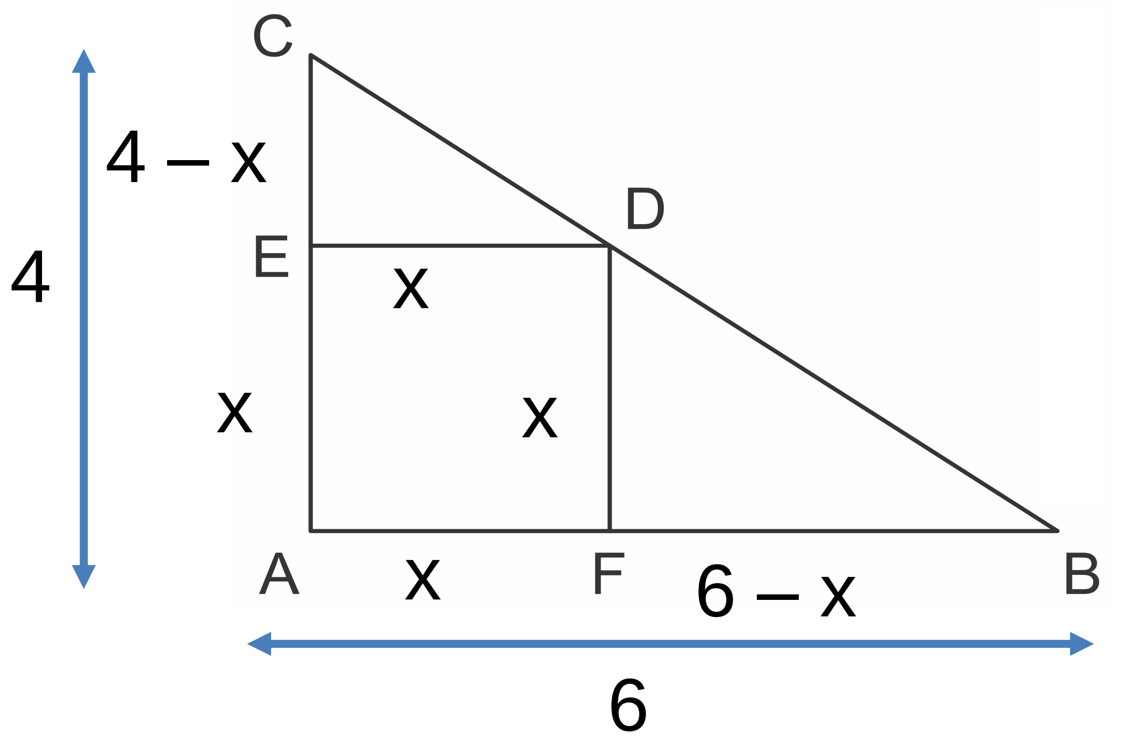


$\Delta ABC \sim \Delta ADE$

Semelhança de triângulos

Exemplo: Na figura abaixo, temos um quadrado AEDF e AC=4 e AB=6.Qual é o valor do lado do quadrado?

a) 2
b) 2,4
c) 2,5
d) 3
e) 4



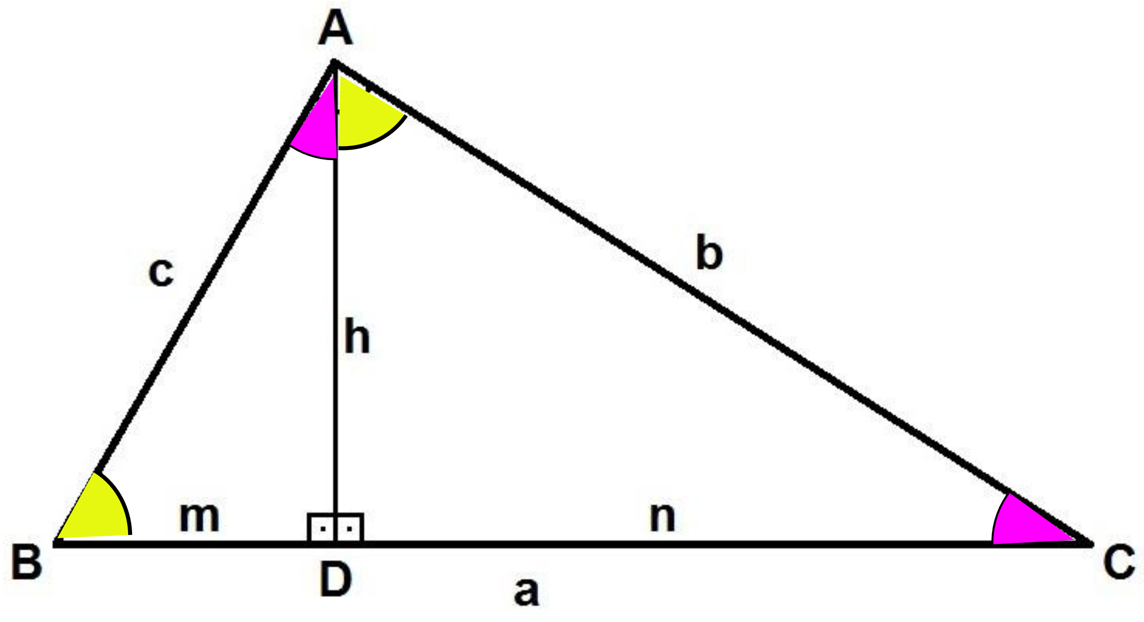
$$\frac{4}{6} = \frac{x}{6 - x}$$

$$6x = 24 - 4x$$

$$10x = 24$$

$$\boxed{x = 2{,}4}$$

TRIÂNGULO RETÂNGULO – RELAÇÕES MÉTRICAS



$HIP^2 = CAT^2 + CAT^2$

$CAT^2 = HIP \cdot PROJ$

$CAT_1 \cdot CAT_2 = HIP \cdot ALT$

$ALT^2 = PROJ_1 \cdot PROJ_2$

$\boxed{b^2 = a \cdot n}$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

$\boxed{b \cdot c = a \cdot h}$

$\boxed{c^2 = a \cdot m}$

$\boxed{h^2 = m \cdot n}$

Exemplo: Determine a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos medem $6\ cm$ e $8\ cm$.

a) $3{,}6\ cm$.

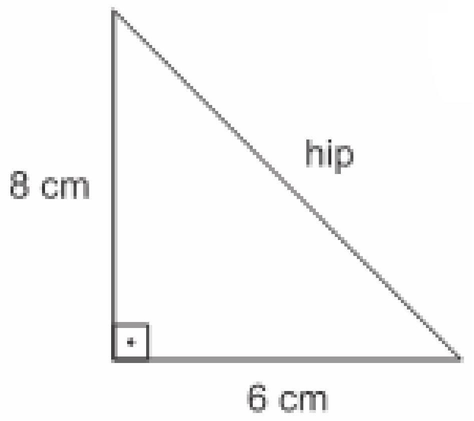
b) $4{,}8\ cm$.

c) $6{,}0\ cm$.

d) $6{,}4\ cm$.

e) $8{,}0\ cm$.

Primeiro Passo:
Calcular a hipotenusa



$$hip^2 = cat^2 + cat^2$$

$$hip^2 = 6^2 + 8^2$$

$$hip^2 = 36 + 64$$

$$hip^2 = 100$$

$$hip = \sqrt{100} = 10$$

Exemplo: Determine a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos medem $6\ cm$ e $8\ cm$.

a) $3{,}6\ cm$.

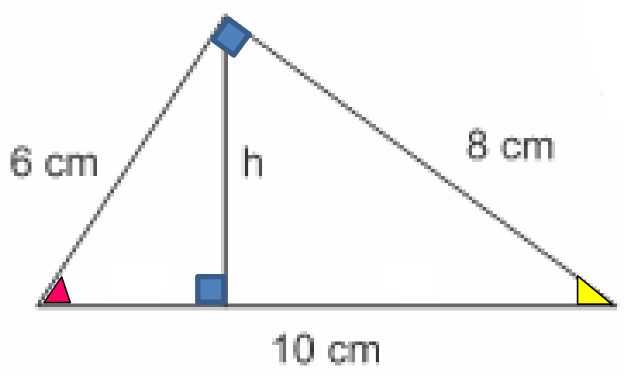
b) $4{,}8\ cm$.

c) $6{,}0\ cm$.

d) $6{,}4\ cm$.

e) $8{,}0\ cm$.

Segundo Passo:
Calcular a Altura relativa a hipotenusa



$$hip.\mathrm{alt} = cat.cat$$

$$10.\mathrm{h} = 8.6$$

$$10.\mathrm{h} = 48$$

$$\boxed{\mathrm{h} = 4{,}8}$$

Exemplo: Determine a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos medem $6\ cm$ e $8\ cm$.

a) $3{,}6\ cm$.

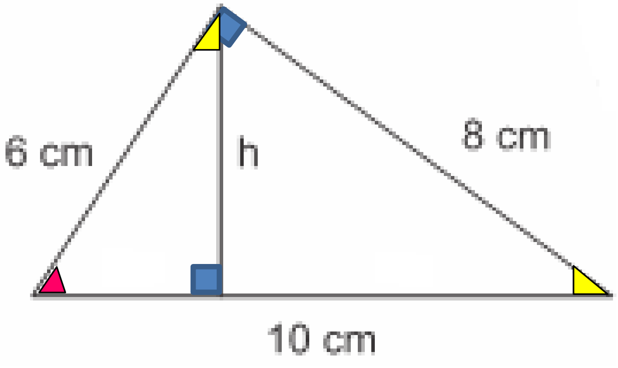
b) $4{,}8\ cm$.

c) $6{,}0\ cm$.

d) $6{,}4\ cm$.

e) $8{,}0\ cm$.

Segundo Passo:
Calcular a Altura relativa a hipotenusa



$$\frac{8}{10} = \frac{h}{6}$$

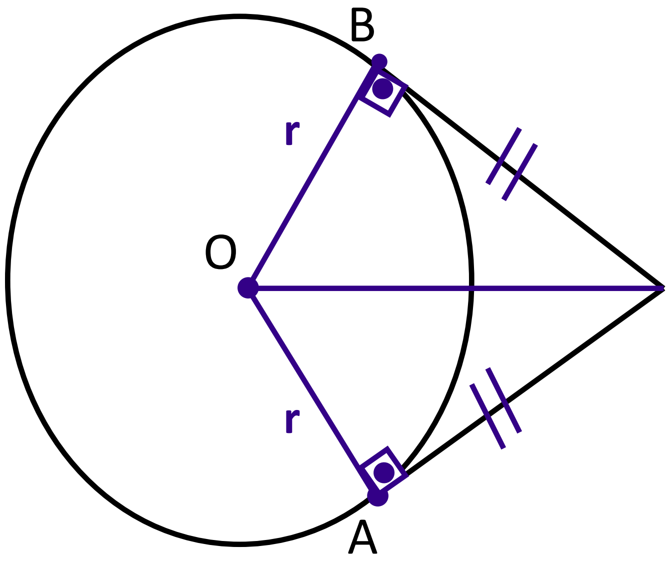
$$10.\mathrm{h} = 8.6$$

$$10.\mathrm{h} = 48$$

$$\boxed{\mathrm{h} = 4{,}8}$$

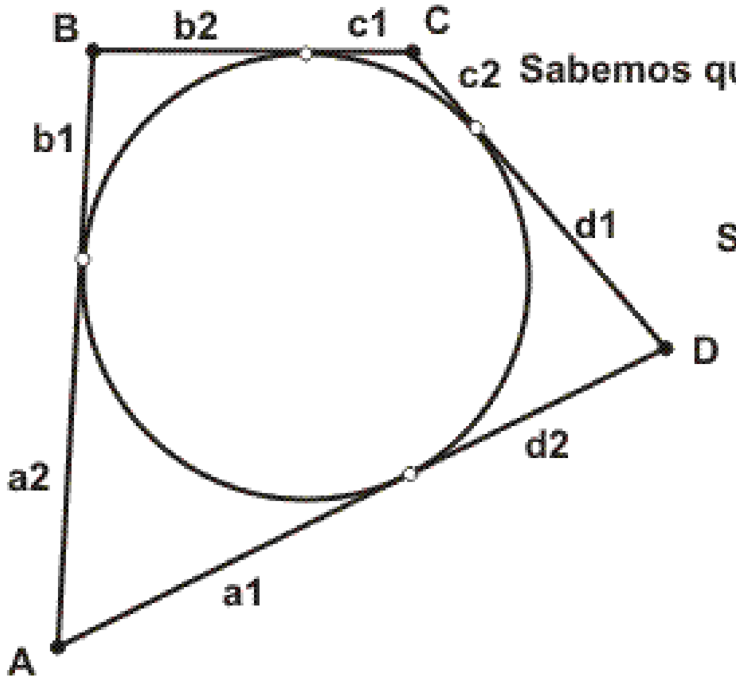
Propriedades

Tangente – As tangentes traçadas de um ponto em relação a uma circunferência são iguais.



$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

Teorema de Pitot:



Maior distância de um ponto a uma circunferência

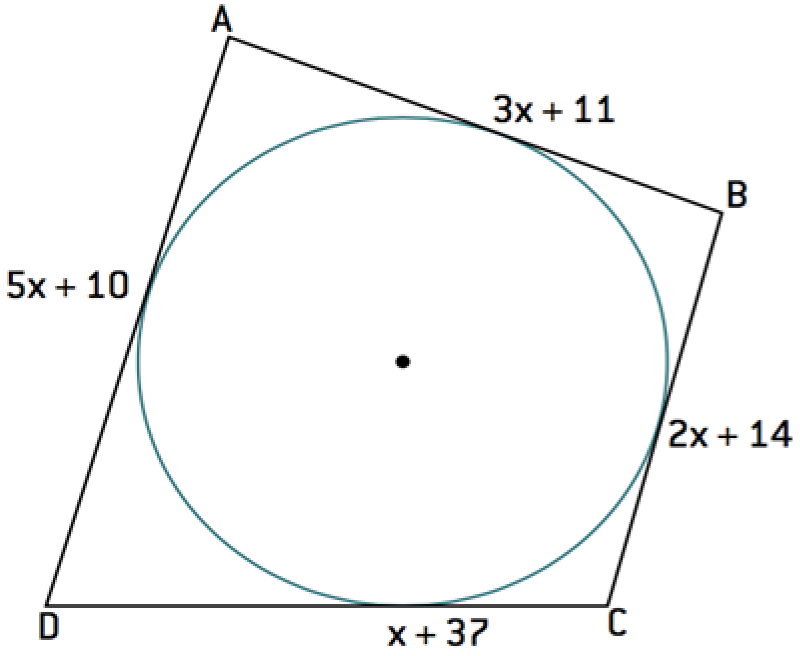
Sabemos que

a1 = a2	a2 = a1
b1 = b2	b1 = b2
c1 = c2	c2 = c1
d1 = d2	d1 = d2

Somando $\boxed{a2 + b1} + \boxed{c2 + d1} = \boxed{b2 + c1} + \boxed{d2 + a1}$

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}}$$

Exemplo: Na figura, o quadrilátero ABCD está circunscrito à circunferência de centro O, então o valor de x é:



$$5x + 10 + 2x + 14 = 3x + 11 + x + 37$$

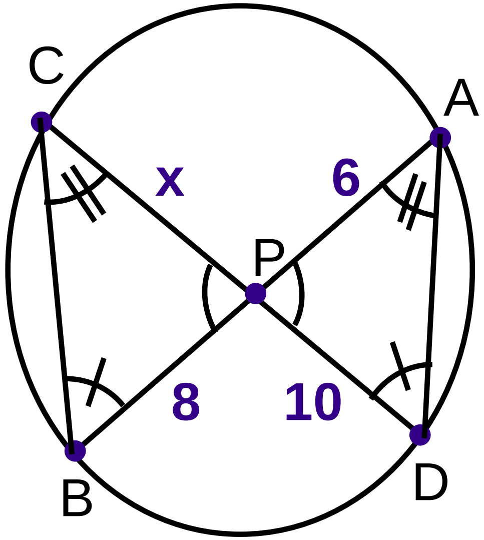
$$7x + 24 = 4x + 48$$

$$3x = 24$$

$$\boxed{x = 8}$$

Cordas – O Ponto P é interior à circunferência.

$$\overline{PA}\,.\,\overline{PB} = \overline{PC}\,.\,\overline{PD}$$



Exemplo:

PA . PB = PC . PD ou $\dfrac{6}{x} = \dfrac{10}{8}$

6 . 8 = x . 10

10x = 48

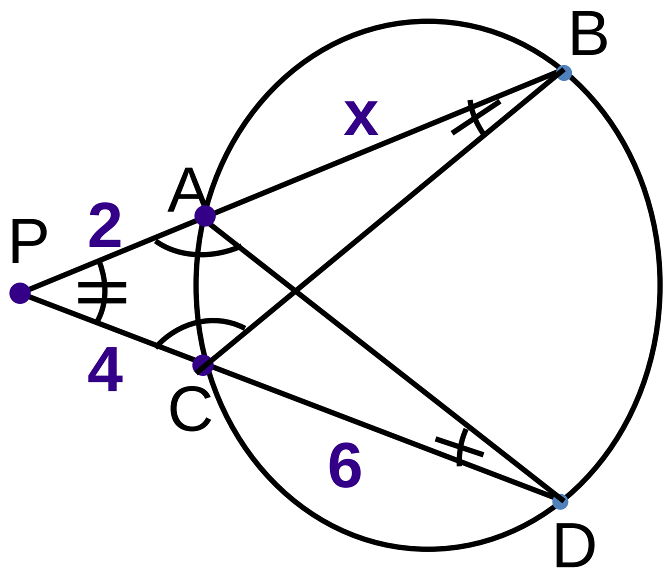
$\boxed{x = 4,8}$

10x = 6.8

$\boxed{x = 4,8}$

Secantes – O Ponto P é exterior à circunferência.

$$\overline{PA} . \overline{PB} = \overline{PC} . \overline{PD}$$



Exemplo:

PA . PB = PC . PD

2 . (2 + x) = 4 . 10

4 + 2x = 40

2x = 36

$\boxed{x = 18}$

ou

$$\frac{2}{4} = \frac{10}{2+x}$$

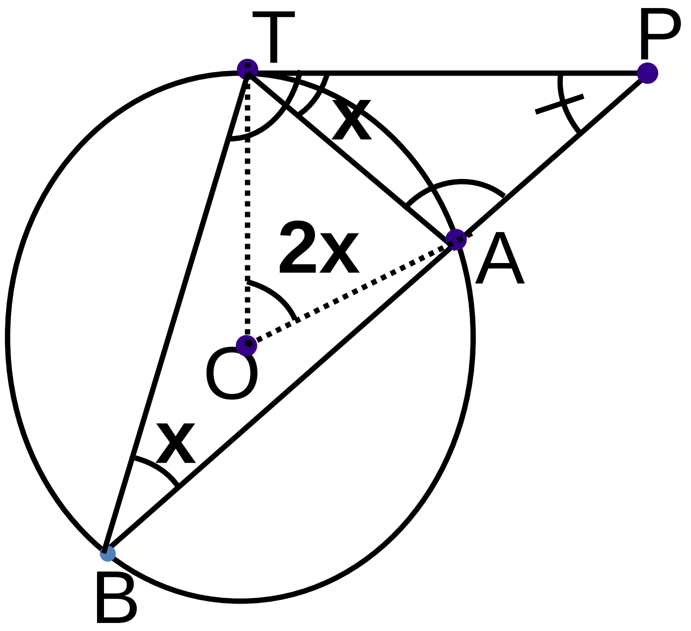
4 + 2x = 4.10

2x = 36

$\boxed{x = 18}$

Secantes – O Ponto P é exterior à circunferência.

$$\left(\overline{PT}\right)^2 = \overline{PA}\,.\,\overline{PB}$$

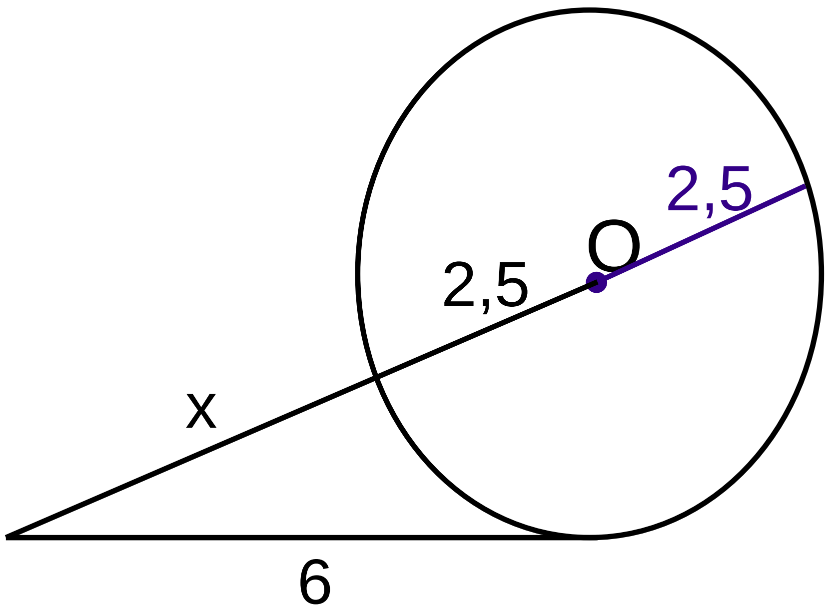


$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}$$

Exercícios

USP | Calcule o valor de x na figura abaixo sabendo que o segmento de comprimento 6 é tangente a circunferência de centro O.

Resolução 1



$$\left(\overline{PT}\right)^2 = \overline{PA} \, . \, \overline{PB}$$

$$6^2 = x \, . \, (5 + x)$$

$$36 = 5x + x^2$$

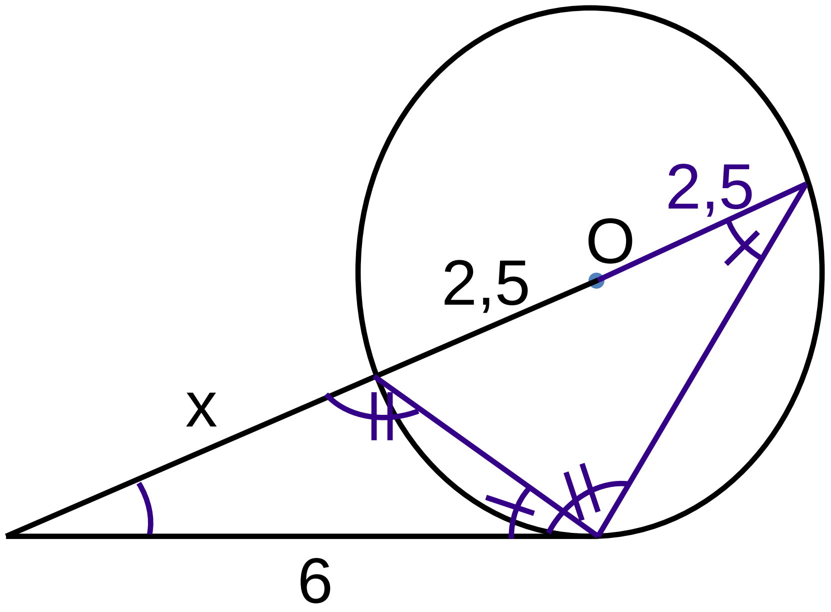
$$x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$x = 4 \text{ ou } \cancel{x = -9}$$

$$\boxed{x = 4}$$

USP | Calcule o valor de x na figura abaixo sabendo que o segmento de comprimento 6 é tangente a circunferência de centro O.

Resolução 2



$$\frac{6}{x} = \frac{5+x}{6}$$

$$6^2 = x \cdot (5 + x)$$

$$36 = 5x + x^2$$

$$x^2 + 5x - 36 = 0$$

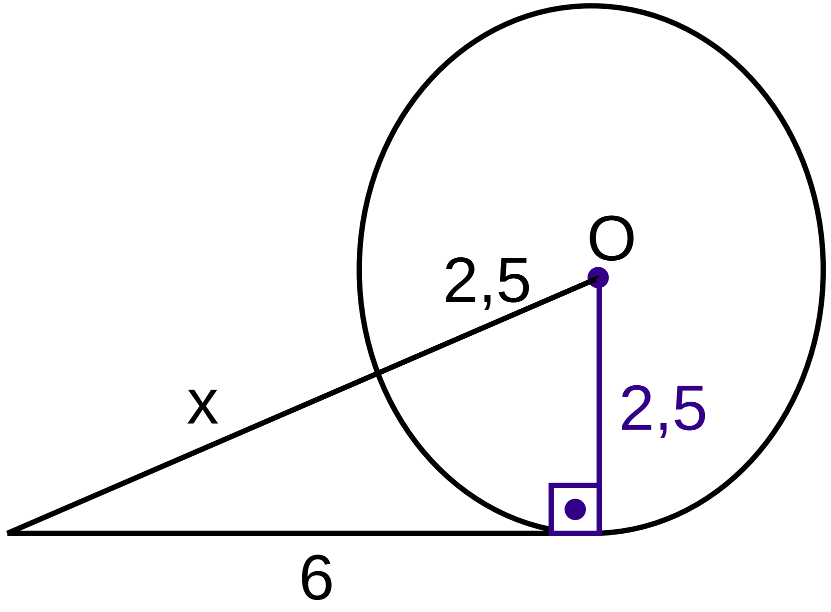
$$x = 4 \text{ ou } \cancel{x = -9}$$

$$\boxed{x = 4}$$

Relações Métricas

USP | Calcule o valor de x na figura abaixo sabendo que o segmento de comprimento 6 é tangente a circunferência de centro O.

Resolução 3



$$(x + 2{,}5)^2 = 6^2 + 2{,}5^2$$

$$x^2 + 5x + \cancel{2{,}5^2} = 6^2 + \cancel{2{,}5^2}$$

$$x^2 + 5x = 36$$

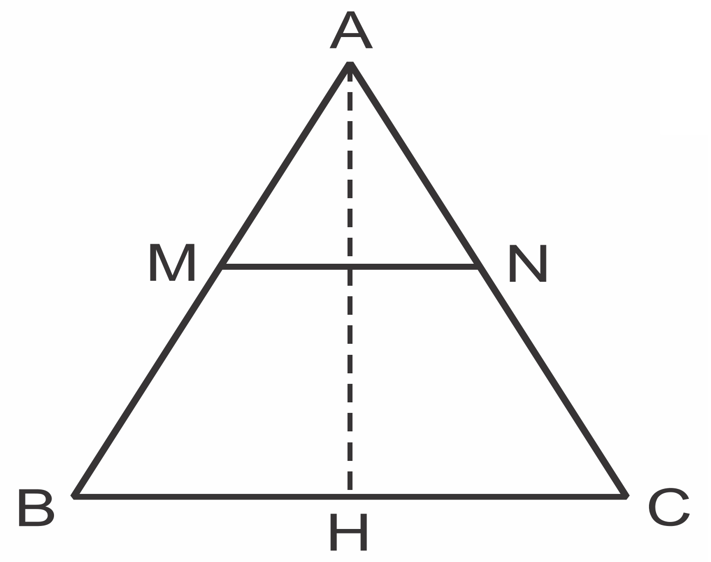
$$x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$x = 4 \text{ ou } \cancel{x = -9}$$

$$\boxed{x = 4}$$

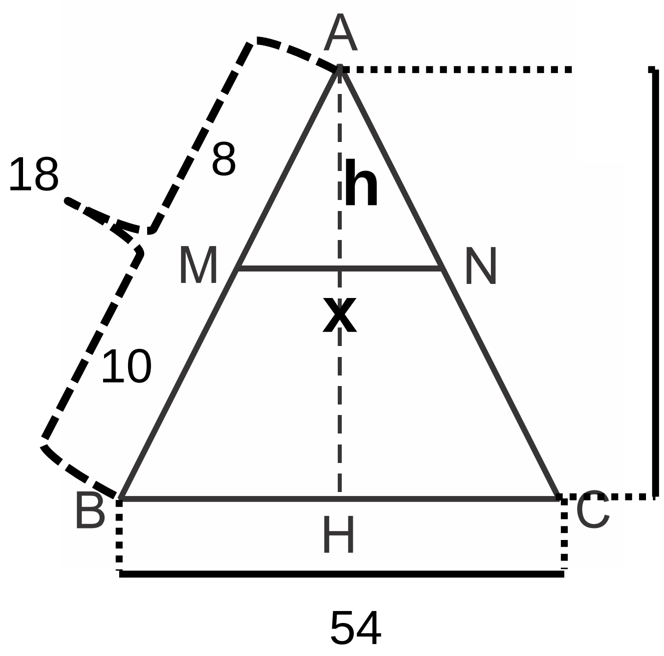
Semelhança de triângulos

Na figura, AM = 8 cm, BM = 10cm, BC = 54 cm, AH = 45/2 e MN // BC.
Em relação (aproximada) entre a área do trapézio BCMN e a área do triângulo AMN é **correto** afirmar:



a) A área do trapézio é o quádruplo da área do triângulo.
b) Diferem entre si em 360 cm².
c) O trapézio é 200% maior que o triângulo.
d) A razão entre as áreas é 13/5.

Semelhança de triângulos



$$\frac{45}{2} = 22{,}5$$

$$\frac{8}{18} = \frac{h}{22{,}5}$$

$$18h = 180$$

$$\boxed{h = 10}$$

$$\frac{8}{18} = \frac{x}{54}$$

$$18x = 432$$

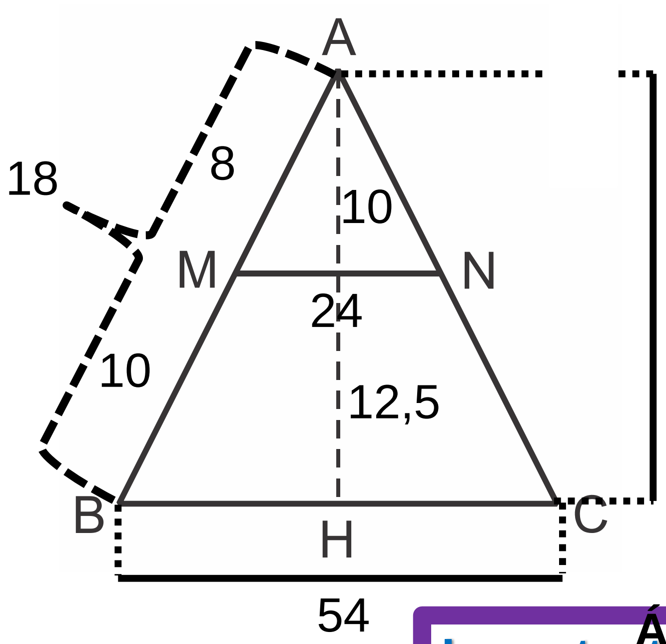
$$\boxed{x = 24}$$

Importante:

Se a altura do triangulo AMN é 10 a altura do trapézio BCMN é 12,5.

Semelhança de triângulos

Resolução:



$$\frac{45}{2} = 22{,}5$$

$$\frac{8}{18} = \frac{h}{22{,}5}$$

$$18h = 180$$

$$\boxed{h = 10}$$

$$\frac{8}{18} = \frac{x}{54}$$

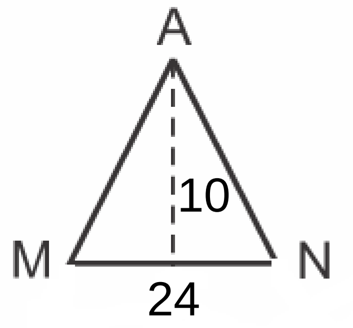
$$18x = 432$$

$$\boxed{x = 24}$$

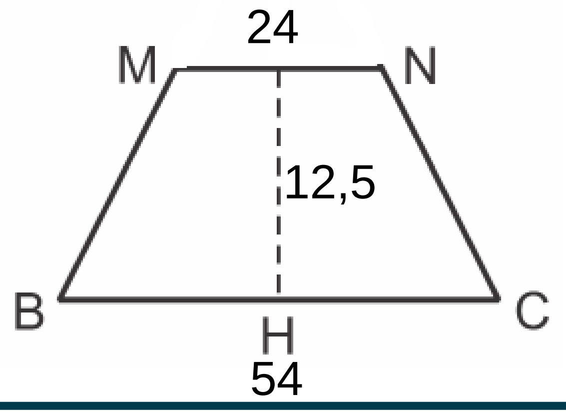
Importante:

Se a altu
triangulo
10 a altu
trapézio
12,5.

Área do triângulo:

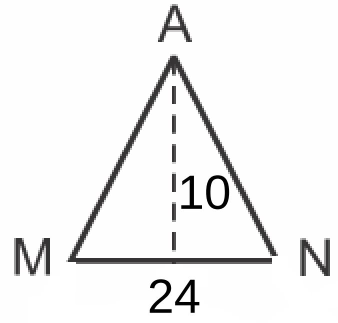


Área do trapézio:



Resolução:

Área do triângulo:



$$A_1 = \frac{24.10}{2}$$

$$A_1 = \frac{240}{2}$$

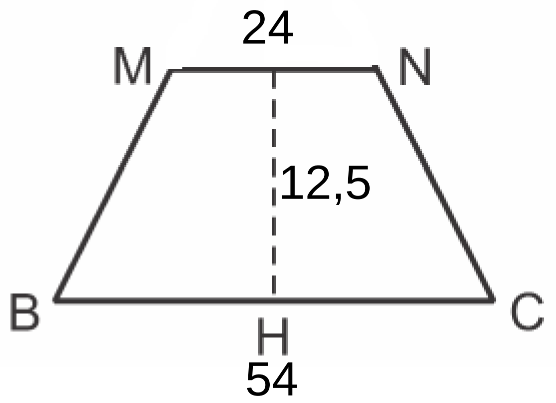
$$\boxed{A_1 = 120}$$

a) A área do trapézio é o quádruplo da área do triângulo.

$$\frac{487{,}5}{120} = 4{,}0625$$

Correta!

Área do triângulo:



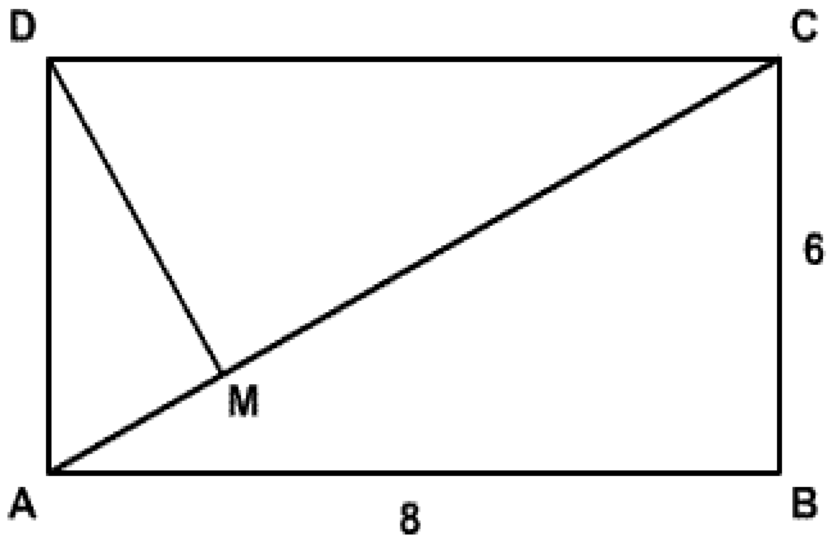
$$A_2 = \frac{(24+54).12{,}5}{2}$$

$$A_2 = \frac{\cancel{78}.12{,}5}{\cancel{2}}$$

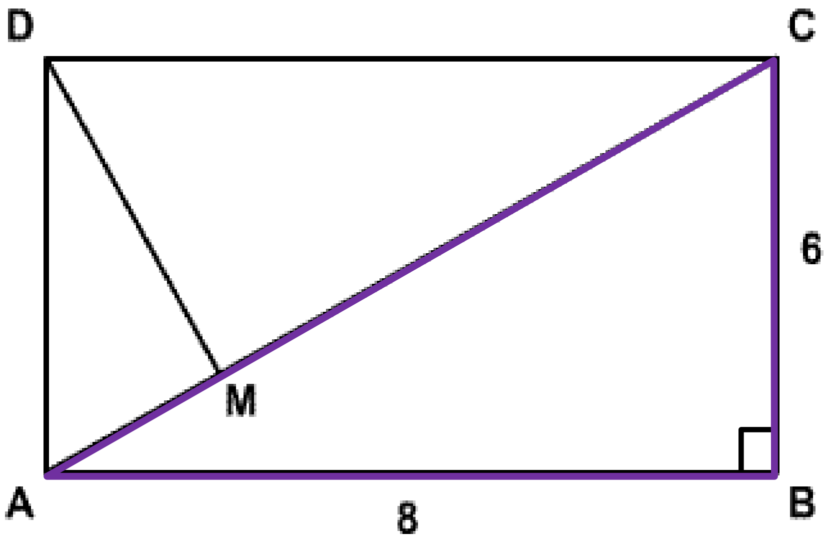
$$A_2 = 39.12{,}5$$

$$\boxed{A_2 = 487{,}5}$$

(ACAFE-SC) No retângulo de lados AB = 8 e BC = 6, o segmento DM é perpendicular à diagonal AC. O segmento AM mede:



(ACAFE-SC) No retângulo de lados AB = 8 e BC = 6, o segmento DM é perpendicular à diagonal AC. O segmento AM mede:



Passo Primeiro: Calcular a diagonal $\overline{AC}$:

$$hip^2 = cat^2 + cat^2$$

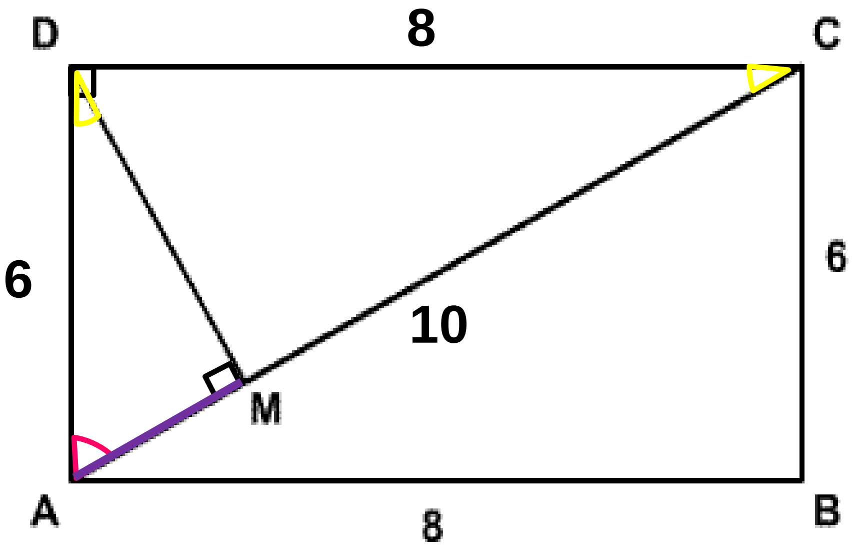
$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 8^2$$

$$\overline{AC}^2 = 36 + 64$$

$$\overline{AC}^2 = 100$$

$$\overline{AC} = \sqrt{100} = 10$$

(ACAFE-SC) No retângulo de lados AB = 8 e BC = 6, o segmento DM é perpendicular à diagonal AC. O segmento AM mede:



Primeiro Passo: Calcular o valor de $\overline{AM}$:

Obs: Utilizando Semelhança de triângulos

$$\frac{\overline{AM}}{6} = \frac{6}{10}$$

$$10.\overline{AM} = 36$$

$$\boxed{\overline{AM} = 3,6}$$

Obrigado

Prof. Léo
Matemática