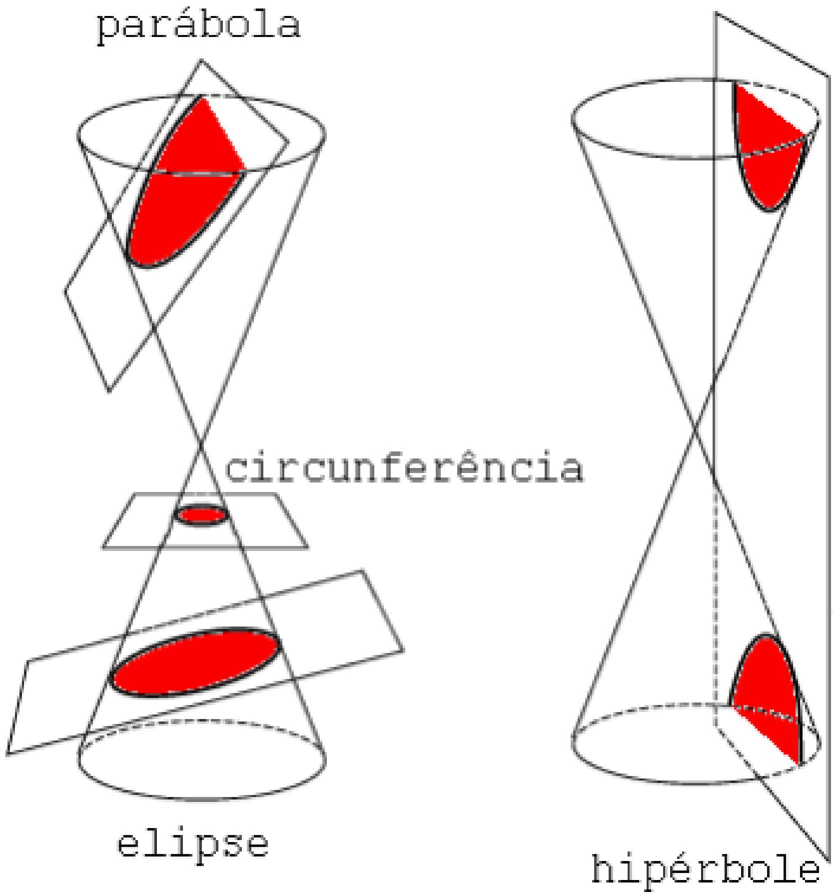
Elipse: Aplicações

Prof. Guilherme Furlan
Matemática

Curvas cônicas

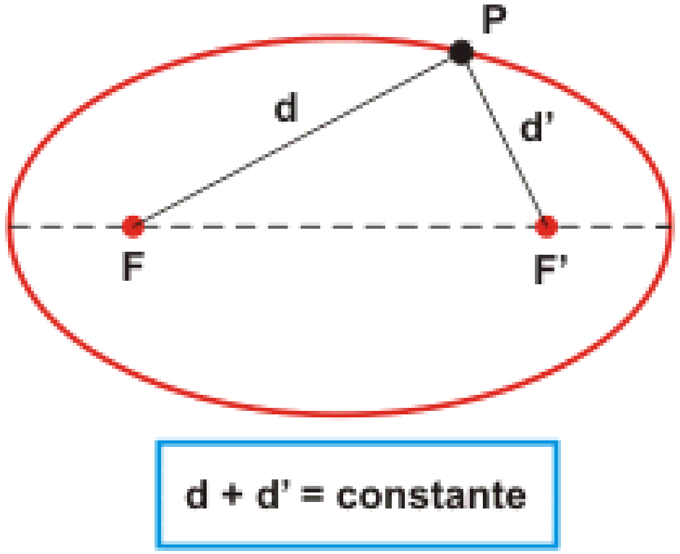
As chamadas curvas cônicas (circunferência, elipse, parábola e hipérbole) são seções planas numa superfície cônica ilimitada



(Disponível em: https://www.coladaweb.com . Acesso em: 20 outubro 2020).

Definição

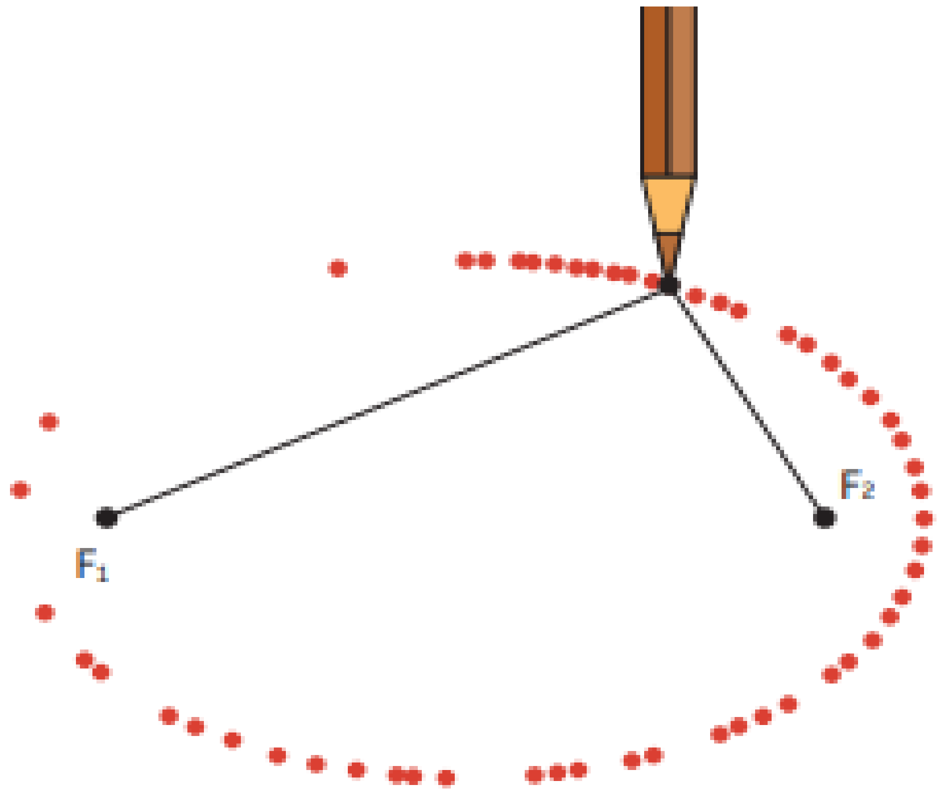
Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, F1 e F2, é constante. Essa constante será representada por 2a, sendo a real e positivo.



(Disponível em: https://lh3.googleusercontent.com . Acesso em: 20 outubro 2020).

Definição

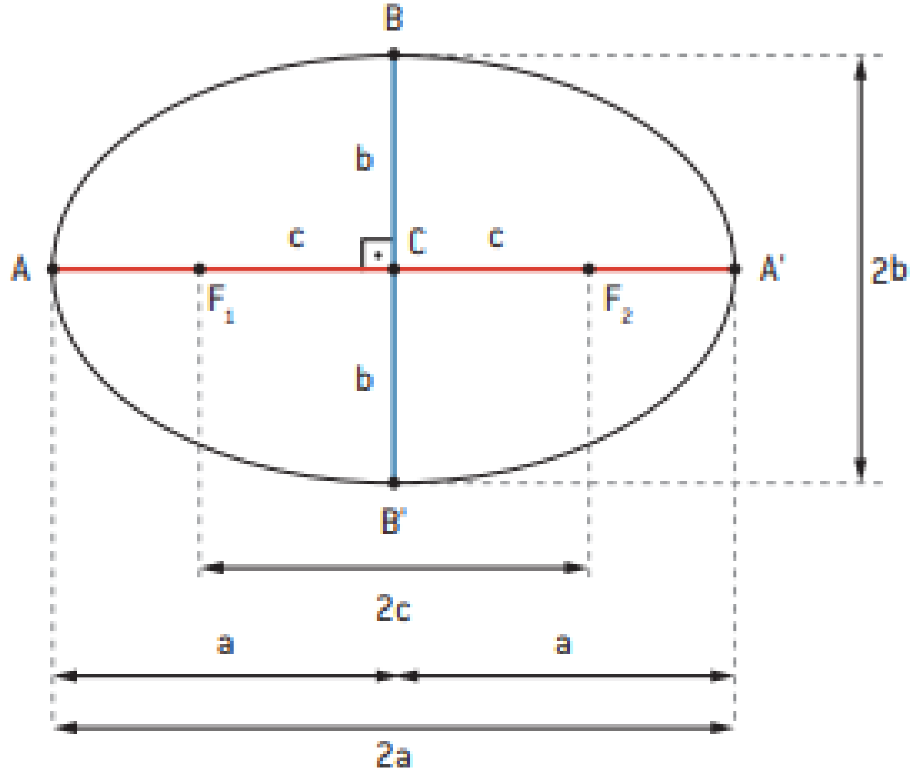
Imagine um pedaço de barbante preso a dois pontos fixos, F1 e F2, de modo que seu comprimento seja maior que a medida do segmento F1F2. Com um lápis, podemos esticar o barbante e, com ele esticado, desenhar uma curva, como sugere a ilustração:



A curva gerada pela ponta do lápis é uma elipse; F1 e F2 são os focos.

Elementos da elipse

Considere a elipse representada a seguir:



Focos: F1 e F2

Vértices: A, A’, B e B’

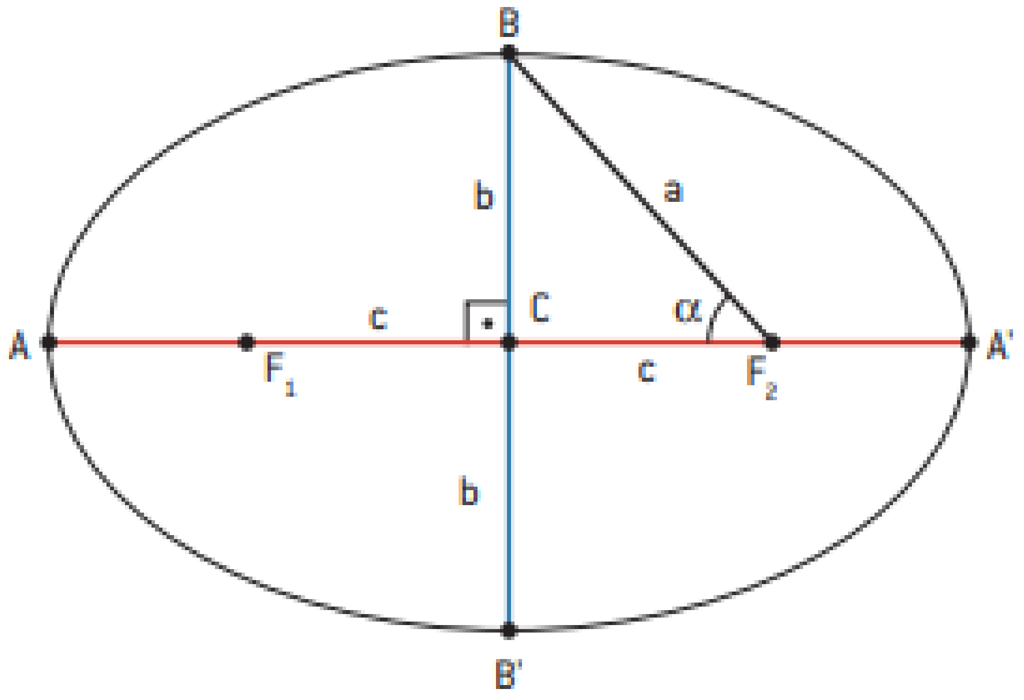
Eixo maior: AA’ = 2a

Eixo menor: BB’ = 2b

Distância focal: F1F2 = 2c

Propriedades

Considere a elipse representada a seguir:

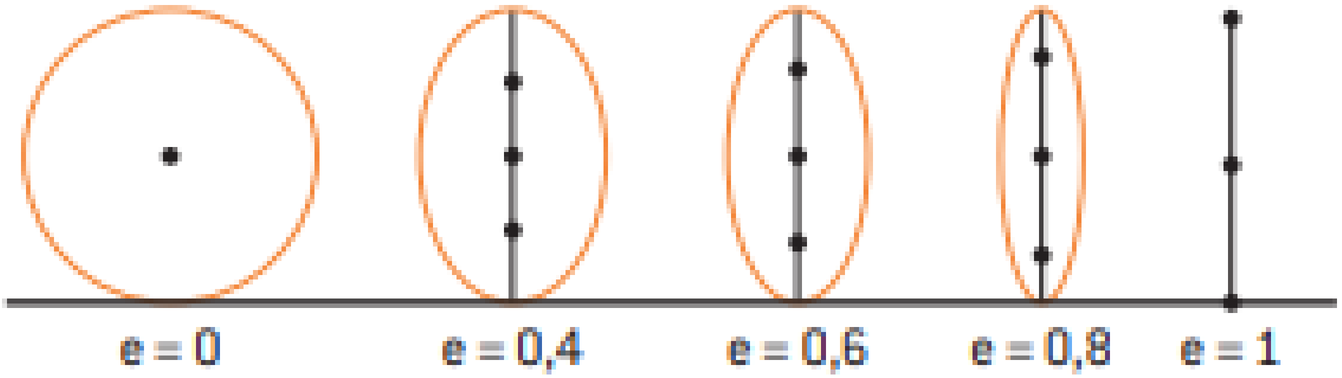


Excentricidade: $e = c/a$

$a^2 = b^2 + c^2$

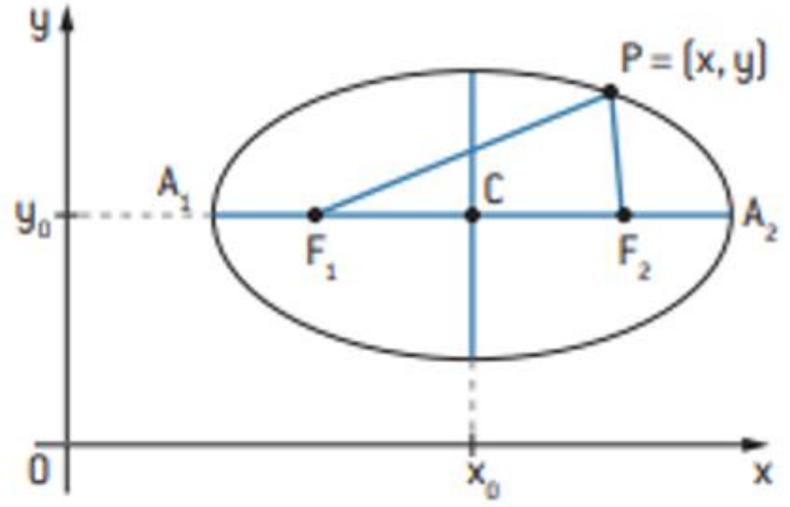
Excentricidade

Quanto mais a excentricidade se aproxima de 1, mais achatada ela fica.
(0 < e < 1).

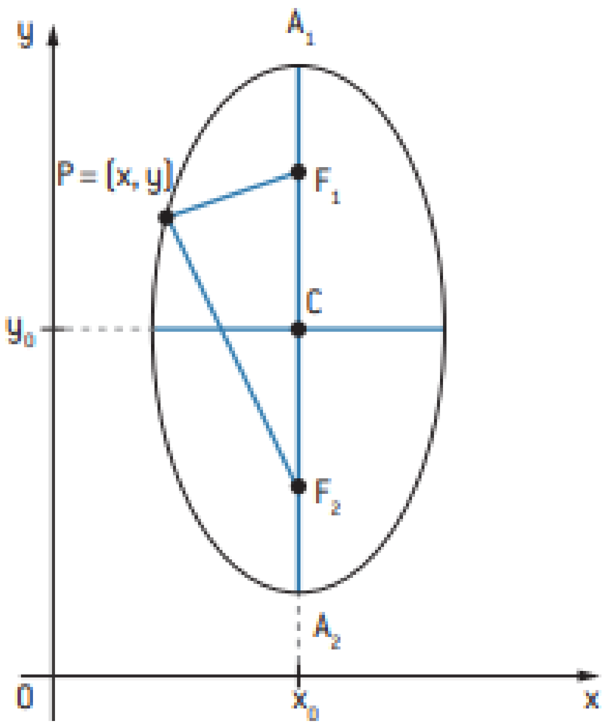


Equação reduzida da elipse

Considere uma elipse de centro C = (x0, y0)



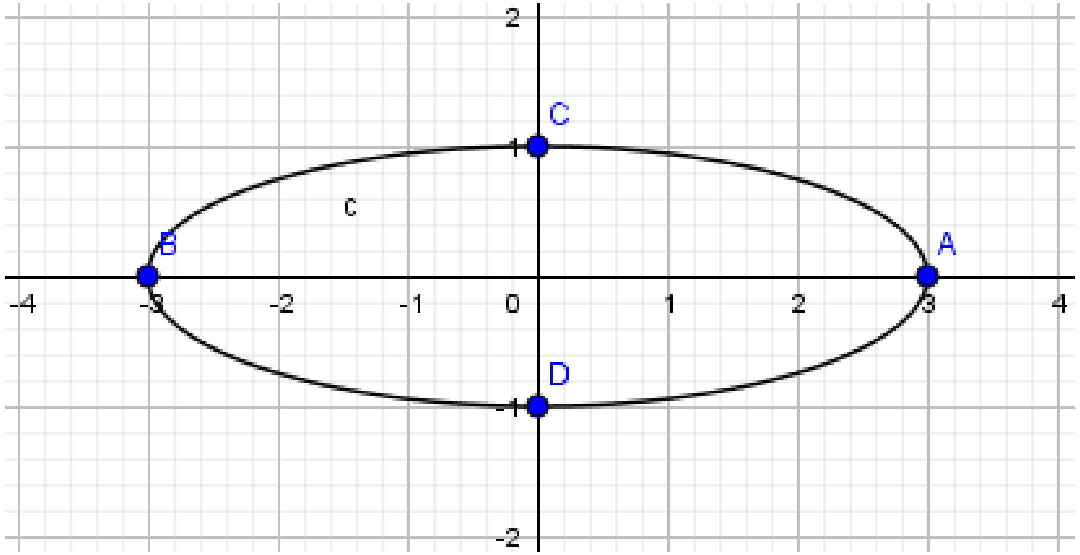
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

Exemplo 01

Determine a equação da elipse que tem centro na origem do sistema cartesiano e vértices nos pontos A (3, 0), B (−3, 0), C (0, 1) e D (0, −1).



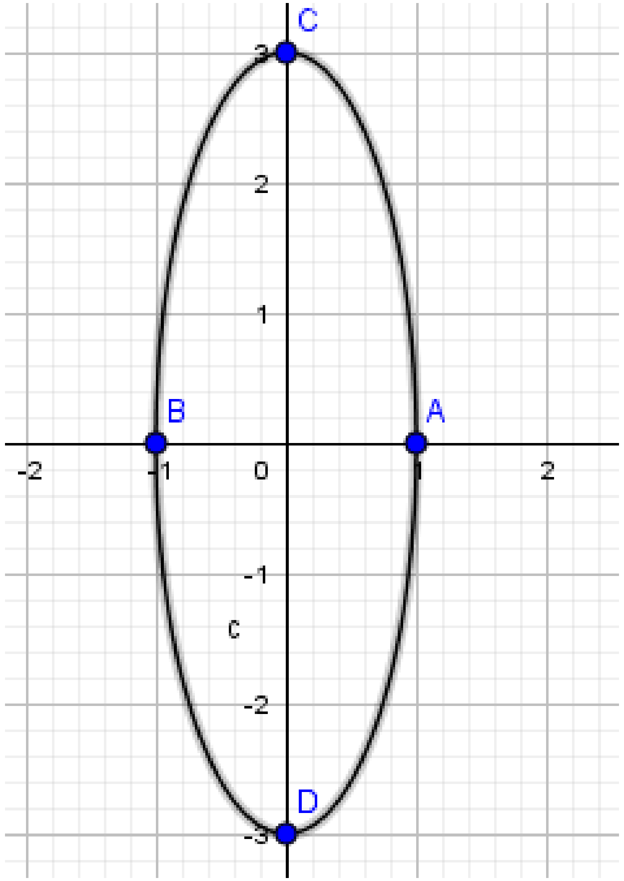
a = 3

b = 1

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Exemplo 02

Determine a equação da elipse que tem centro na origem do sistema cartesiano e vértices nos pontos A (1, 0), B (-1, 0), C (0, 3) e D (0, −3).



a = 3
b = 1

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Exemplo 03

A equação $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ representa uma elipse no plano cartesiano. Determine sua equação reduzida, as coordenadas do centro, as medidas dos eixos maior e menor e represente-a no plano.

Organizando a equação: ⇨ $4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) = -4$

Completando os quadrados ⇨ $4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = -4 + 4 + 36$

⇨ $4(x - 1)^2 + 9(y + 2)^2 = 36$

Dividindo ambos os lados por 36 ⇨ $$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

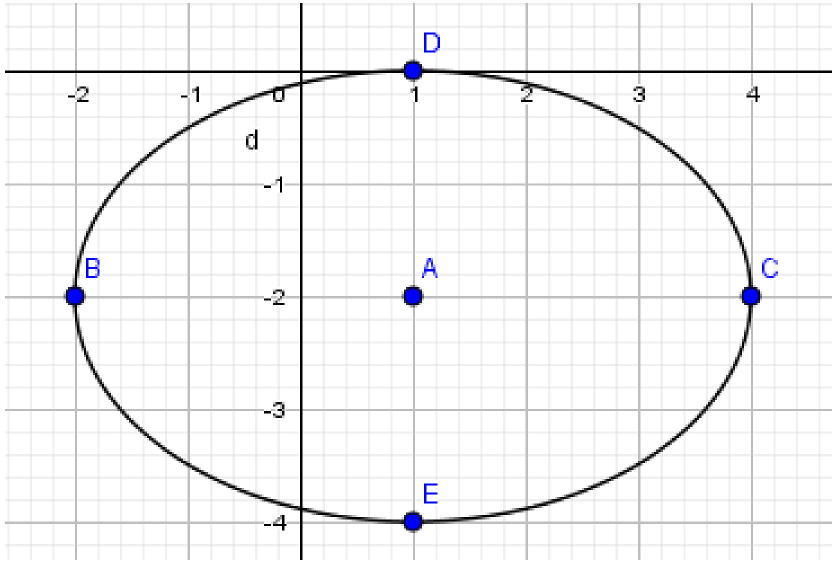
Exemplo 03

A equação $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ representa uma elipse no plano cartesiano. Determine sua equação reduzida, as coordenadas do centro, as medidas dos eixos maior e menor e represente-a no plano.

Logo, tem-se que:

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

Eixo maior = 6
Eixo menor = 4
Centro = (1, -2)

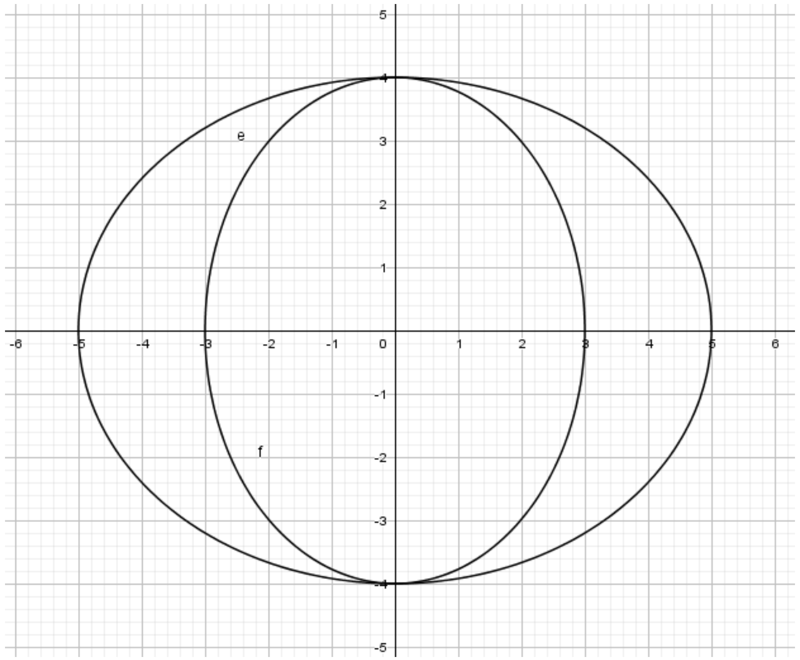


Exemplo 04

A área delimitada por uma elipse é dada por A = π.a.b. Então, a área da região situada entre as elipses de equações $16x^2 + 25y^2 = 400$ e $16x^2 + 9y^2 = 144$ é:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$



Área situada = diferença das áreas

A = π.5.4 – π.3.4

A = **8π**

Exemplo 05

(FGV – SP) Sendo m o maior valor real que x pode assumir na equação analítica $(x - 2)^2 + 4(y + 5)^2 = 36$ e n o maior valor real que y pode assumir nessa mesma equação, então m + n é igual a:

Equação reduzida:

$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1$$

Elipse “deitada”

a = 6

b = 3

Centro = (2, -5)

m = 2 + 6 = 8

n = -5 + 3 = -2

m + n = 6

OBRIGADO

Prof. Guilherme Furlan
Matemática

estuda.com